宇宙現象を用いた究極理論探査

京都大学大学院理学研究科
物理学第２専攻天体核研究室
2016年11月21日, 23日, 24日

小玉　英雄

京都大学基礎物理学研究所

目 次

1 序章

§1.1 宇宙論の残された課題

1.1.1　10 年前の状況

宇宙モデル

✓ 宇宙の一様等方性，平坦性，宇宙年齢問題

⇒ 統一理論に基づく具体的なインフレーションモデル

⇒ ダークエネルギーの実体と起源

Cf. No-Go 定理，Landscape 問題, 超対称性の破れ

問題点	解決状況	解決方法	派生問題
一様等方性の起源	OK	インフレーション	統一理論に基づくインフレーションモデルの構成
宇宙パラメーターの観測値			
Hubble 定数 H_0	OK	Hubble 望遠鏡	
宇宙年齢	OK		
曲率 k	$\|k\| < 0.1$	WMAP, BoomerangI/II	
物質密度 Ω_M		WMAP	ダークマターの実体と起源
バリオン密度 Ω_b		WMAP	ダークバリオン
宇宙項 Λ		WMAP, SNIa 観測	ダークエネルギーの実体と起源 Cf. Modified Gravity
球状星団から決まる宇宙年齢 $\gg 1/H_0$	OK	ダークエネルギー	

宇宙物質

✓ CMB の温度・スペクトル，軽元素の起源と組成

$\Rightarrow$ メタルの起源 (PopIII 星の形成機構)

✓ バリオン数・レプトン数非対称性の起源

$\Rightarrow$ 初期宇宙進化と GUT の確定

✓ ダークマターの実体・存在量

$\Rightarrow$ 超対称モデルの確定と超対称性の破れの機構

★ 超高エネルギー宇宙線の量と起源 ($E > 10^{10}$GeV)

$\Rightarrow$???

問題点	解決状況	解決方法	派生問題
CMB スペクトル	OK	COBE/ビッグバンモデル	
バリオン非対称性の起源，大きさ	OK???	GUT/LEPTGENESIS + Anomaly	GUT モデルの特定，CP の破れの決定，インフレーションの終了時期，再加熱過程の詳細
レプトン非対称性の小ささ			
He, 軽元素の起源	OK	BNS	銀河間ガスでの重水素存在量
メタルの起源	???	Pop III 星???	Pop III 星の形成機構・時期
ダークマターの実体と起源	OK???	超対称性 and/or axion，衝突銀河団の Chandra/G-lens 観測	超対称性の破れの機構
超高エネルギーエネルギー宇宙線の起源	???	存在量 ??	

宇宙構造

問題点	解決状況	解決方法	派生問題
CMB の非等方性:大きさとスペクトル	OK	インフレーション・WMAP	スペクトル指数の一定性と大きさの説明
銀河分布の超大構造の解明	???	SDSS 観測・Λ CDM モデル	
超巨大ボイド (?)	?	WMAP+電波観測	宇宙原理への疑問
超大域的銀河流/ Hubble Bubble（事実？）	?	?	宇宙原理への疑問
銀河分布の相関関数	OK??	SDSS 観測・Λ CDM モデル	
銀河の起源	OK??	Λ CDM モデル	初代星の形成機構
銀河の光度関数の導出			
銀河の種族・形態分布の説明	OK?	階層的集凝モデル?	
銀河の回転曲線	OK	Λ CDM モデル	小さなスケールでのスペクトルの欠如，cusp/clump 問題: Cf. MOND
X 線銀河・銀河団の成因			
AGN の起源と進化	OK??	BH + accretion	相対論的宇宙ジェットの形成機構 SM BH の形成過程

天体物理学

- ✓ 星の構造と進化，銀河の構造と進化
- ★ 星の形成機構（質量の決まるメカニズム）
- ★ 超新星爆発の機構
- ★ ガンマ線バースターの構造・成因・機構
- ★ 活動的コンパクト天体・AGN の機構・形成過程
  - ⇒ （相対論的）宇宙ジェットの形成機構
  - ⇒ （超巨大）ブラックホールの形成機構
  - ⇒ 中性子星・ブラックホール合体、崩壊による重力波放出の定量的推定

§1.2
何を基礎理論として採用するか？

ボトムアップロジック

- Standard model $\Rightarrow$ GUT: gauge-sector unification
  - hypercharge structure, α-unification, neutrino mass
  - Baryon asymmetry, strong CP(Peccei-Quinn symmetry)
- GUT $\Rightarrow$ SGUT: boson-fermion correspondence
  - Dark matter, Λ problem, hierarchy problem
- SGUT $\Rightarrow$ Sugra GUT: inclusion of gravity
  - Primordial inflation, flat inflaton potential
- Sugra GUT $\Rightarrow$ HD Sugra GUT: matter sector unification
  - Generation repitition, Cabibo/neutrino mixing, CP violation
- HD Sugra GUT $\Rightarrow$ Superstring/M theory
  - Consistency as a quantum theory, finite control parameters
  - No Λ freedom (M-theory)

§1.3
高次元宇宙論の課題

1.3.1　10 年前の状況

- ダークエネルギー・インフレーション問題
  - 超対称性は必要だが十分ではない．
    ⇒　新たな対称性？
  - 超対称性は大きな破れと回復が必要
  - No-Go 定理の克服
    ⇒　高次補正？特異性の許容？開いた内部空間？
- コンパクト化の問題
  - モジュライ安定化機構の解明
    ⇒　4 次元有効理論と高次元理論の対応
    - フラックスコンパクト化はブレインワールド描像を要求するか？
    - 非摂動論的効果は高次元的取り扱いが可能か？
  - ランドスケープ問題
    ⇒　コンパクト化・基底状態の動的比較
  - 超対称性の破れ・回復の機構
    ⇒　11 次元，10 次元超重力理論の超対称解の組織的分類（ ??? ）
- 高次元時空の数理
  - 非自明なホライズン位相をもつブラックホール・ブラックブレイン・ブラックチューブ解の探査

1.3.2　新たな課題

★ ランドスケープの中に我々の宇宙は含まれるか？（素粒子・宇宙双方で相整合的な統合理論の探査）

★ モジュライの引き起こす宇宙現象によるコンパクト化の探査（コンパクト化の観測による探査）

2 超弦理論と超重力理論

§2.1 超弦理論

2.1.1 フレームワーク

超弦理論は，2 次元時空上の超対称性をもつ共形不変な場の理論であり，そのボゾン的な基礎場の数が D のとき，D 次元時空内を運動する内部自由度をもったひもの量子論となる．

1. 古典論

- 2 次元 world sheet の位相：
  - 閉曲面（閉弦）：球面、トーラス、$\mathscr{F}_g (g \geqslant 2)$; $\mathbb{R}P^2$, Klein ボトル、$\cdots$.
  - 開曲面（開弦）：円盤、円筒、$\mathscr{F}_g - nD^2 (g \geqslant 1)$; Möbius バンド、$\cdots$.
- Target space & background fields: $\mathscr{X} : (\Sigma, h) \to (\mathscr{M}, \Phi)$

  例：(X, ψ) CFT. $\mathscr{M} = M^D \times \mathscr{S}_2^D$

$$\mathscr{X} = (X^\mu(\sigma), \psi^\mu(\sigma)), \quad \Phi = (g_{\mu\nu}(X), B_{\mu\nu}(X), \phi(X); A_\mu(X))$$

- Action: $S = S_m(h, \mathscr{X}; \Phi)$

例：(X,ψ) CFT

$$S \;=\; -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{-h}\Big[h^{ab}g(\partial_a X,\partial_b X)+\epsilon^{ab}B(\partial_a X,\partial_b X)+\alpha' R_s\phi + \frac{\alpha'}{2}g_{\mu\nu}\psi^\mu \not{D}\psi^\nu+\cdots\Big] \quad -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_{\partial\Sigma}dX^\mu A_\mu(X)+\cdots. \tag{2.1.1}$$

- Invariances:
  - WS diffeomorphism invariance
  - WS Weyl invariance
  - WS supersymmetry
  - Target space symmetries
- Field Equation: $F[\mathscr{X}]=0,\ T_{ab}=0.$
- 境界条件
  - Closed string: $\psi(t,\sigma+2\pi)=e^{2i\nu\pi}\psi(t,\sigma)$
    - Neveu-Schwarz: $\nu=1/2$
    - Ramond: $\nu=0$
  - Open string: $\partial\Sigma\subset D_p$ branes: $(N^{p+1}; F, \text{Bulk fields})$

2. 量子論

- WS diff+ Weyl, local SUSY のゲージ固定: $h=dzd\bar{z}$
  $\Rightarrow$ CFT with superconformal symmetry
  - FP ghost: $S_g=\frac{1}{2\pi}\int d^2z(b\bar{\partial}c+\beta\bar{\partial}\gamma)$.
  - Constraint: $L_n\approx 0,\quad G_r\approx 0$

ここで、

$$T_{zz}=T_B(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{L_m}{z^{m+2}},\quad T_{\bar{z}\bar{z}}=\tilde{T}_B(\bar{z})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{L}_m}{\bar{z}^{m+2}}, \tag{2.1.2a}$$

$$T_F(z)=\sum_{r\in\mathbb{Z}+\nu}\frac{G_r}{z^{r+3/2}},\quad \tilde{T}_F(\bar{z})=\sum_{r\in\mathbb{Z}+\nu}\frac{\tilde{G}_r}{\bar{z}^{r+3/2}}. \tag{2.1.2b}$$

- Regularization
  WS$\simeq \mathbb{C}^*$ 上の自由場を

$$\partial X(z) = -i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{\alpha_m}{z^{m+1}},\quad \bar\partial X(\bar z) = -i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{\tilde\alpha_m}{\bar z^{m+1}}, \tag{2.1.3a}$$

$$\psi(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+\nu}\frac{\psi_r}{z^{r+1/2}},\quad \tilde\psi(\bar z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+\tilde\nu}\frac{\tilde\psi_r}{\bar z^{r+1/2}} \tag{2.1.3b}$$

とモード展開すると、

$$L_0 = \frac{\alpha'}{4^\epsilon}p^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{-n}\cdot\alpha_n + \frac{1}{2}\sum_{r\in\mathbb{N}-\nu} r\psi_{-r}\cdot\psi_r + a^m, \tag{2.1.4a}$$

$$L_m = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_{m-n}\cdot\alpha_n + \frac{1}{4}\sum_{r\in\nu+\mathbb{Z}}(2r-m)\psi_{m-r}\cdot\psi_r, \tag{2.1.4b}$$

$$G_r = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n\cdot\psi_{r-n}. \tag{2.1.4c}$$

ここで、$\epsilon = 0$(open string), 1(closed string) で $\alpha_0^2 = \alpha' 2^{-\epsilon}p^2$, また、

$$a^m = \frac{c}{24} - \frac{D_{\rm B}}{24} + \frac{D_{\rm R}}{24} - \frac{D_{\rm NS}}{48} = 0(X+NS),\quad \frac{D}{16}(R). \tag{2.1.5}$$

また、ghost に対応する値は、

$$a^g = -1(\text{bosoni string}),\quad -\frac{5}{8}(\text{R}),\quad -\frac{1}{2}(\text{NS}). \tag{2.1.6}$$

$\Rightarrow$ Super-Virasoro 代数

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m,-n}, \tag{2.1.7a}$$

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{c}{12}(4r^2-1)\delta_{r,-s}, \tag{2.1.7b}$$

$$[L_m, G_r] = \frac{m-2r}{2}G_{m+r}. \tag{2.1.7c}$$

- Free physical states
  - Constraint: $L_n|\text{Phys}\rangle = 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$,　$G_r|\text{Phys}\rangle = 0$ $(r \in \mathbb{N}-\nu)$:

$$\frac{m^2}{m_0^2} = a + \sum_{n\in\mathbb{N}} nN_n + \sum_{r\in\mathbb{N}-\nu} rN_r. \tag{2.1.8}$$

ここで、$a = a^m + a^g$.

- Vertex operators の構成 $\Rightarrow$ $\mathscr{V}_\alpha$

$$\delta S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_\Sigma (h^{ab}\delta g + \epsilon^{ab}\delta B)(\partial_a X, \partial_b X) \tag{2.1.9}$$

より

$$\mathscr{V}_g \propto e_{MN} h^{ab}\partial_a X^M(0)\partial_b X^N(0) e^{ik\cdot X(0)}, \tag{2.1.10a}$$
$$\mathscr{V}_b \propto b_{MN} \epsilon^{ab}\partial_a X^M(0)\partial_b X^N(0) e^{ik\cdot X(0)}. \tag{2.1.10b}$$

- Projections: Tachyon $\Rightarrow$ GSO, Orientifold

例：D=10 (X, ψ)

R: $a = \frac{15}{24} - \frac{10}{24} + \frac{10}{24} - \frac{5}{8} = 0$
NS: $a = \frac{15}{24} - \frac{10}{24} - \frac{10}{48} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

  – WS fermion number F:

$$\Sigma^{\mu\lambda} = -\frac{i}{2}\sum_{r\in\nu+\mathbb{Z}}[\psi^\mu_r, \psi^\lambda_{-r}], \tag{2.1.11a}$$

$$F = \sum_{a=0}^{4} S_a : \quad S_a = i^{\delta_{a,0}}\Sigma^{2a,2a+1}, \tag{2.1.11b}$$

(2.1.11c)

$\exp(\pi i F)$ は WS スピノール場と反可換：

$$e^{\pi i F}\psi^\mu_r = -\psi^\mu_r e^{\pi i F}. \tag{2.1.12}$$

また，基底状態に対して，

$$\exp(\pi i F)|0\rangle_{\mathrm{NS}} = -|0\rangle_{\mathrm{NS}}, \tag{2.1.13a}$$
$$\exp(\pi i F)|\boldsymbol{s}\rangle_{\mathrm{R}} = |\boldsymbol{s}\rangle\Gamma_{\boldsymbol{s}'\boldsymbol{s}}. \tag{2.1.13b}$$

- Construction of S-matrix:

$$S(1;\cdots;n) = \sum_{\chi,\gamma}\frac{e^{-\lambda\chi}}{n_R}\int_{\chi,\gamma} d^{n_e}t\, d^{n_o}\nu \left\langle \prod_{j=1}^{n_e} B_j \prod_{a=1}^{n_o}\delta(B_a)\prod_{i=1}^{n}\hat{\mathscr{V}_i}\right\rangle. \tag{2.1.14}$$

ここで、χ は WS の位相、γ はスピン構造、t は偶モジュライパラメータ、ν は奇モジュライパラメータ。

3. Outcome

- 重力とゲージ場を含む整合的理論
  - 粒子の質量・スピンのスペクトル

    例：10 次元 flat BG SST での massless 粒子・場
    - Open string:$a_{\mathrm{NS}} = -1/2, a_{\mathrm{R}} = 0 \Rightarrow$ vector $\mathbf{8}_v$(NS) + spinor $\mathbf{8}_s$(R)
    - NS sector(共通部分): $\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_{v/s} \;\Rightarrow\; g_{\mu\nu},\ B_{\mu\nu},\ \phi; \psi_\mu,\ \chi\ (, \psi'_\mu, \chi')$
    - RR sector(closed string):$\mathbf{8}_s \times \mathbf{8}_s \Rightarrow \{C_p\}$
  - 散乱行列
- 低エネルギー極限の場の理論 = 10 次元超重力理論
  - Weyl 不変性 $\Rightarrow$ バルク NS 場に対する場の方程式

    特に、flat BG の SST が整合的であるためには、$D = 10$.

    背景場 (G_{MN}, B_{MN}, Φ) でのボーズ弦理論に対するアノーマリーは

$$T_a^a = -\frac{1}{2\alpha'}\beta^G_{MN} g^{ab}\partial_a X^M \partial_b X^N - \frac{i}{2\alpha'}\beta^B_{MN}\epsilon^{ab}\partial_a X^M \partial_b X^N - \frac{1}{2}\beta^\Phi R. \tag{2.1.15}$$

    ここで,

$$\beta^G_{MN} = \alpha'\left(R_{MN} + 2\nabla_M\nabla_N\Phi - \frac{1}{4}H_{MPQ}H_N{}^{PQ}\right) + \mathrm{O}\big(\alpha'^2\big), \tag{2.1.16a}$$

$$\beta^B_{MN} = \alpha'\left(-\frac{1}{2}\nabla^P H_{PMN} + \nabla^P\Phi H_{PMN}\right) + \mathrm{O}\big(\alpha'^2\big), \tag{2.1.16b}$$

$$\beta^\Phi = \frac{D-10}{4} + \alpha'\left(-\frac{1}{2}\nabla^2\Phi + (\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{4}H_{[3]}\cdot H_{[3]}\right) + \mathrm{O}\big(\alpha'^2\big) \tag{2.1.16c}$$

  - Anomaly free $\Rightarrow$ RR 場の方程式，Brane の作用積分
- Duality による理論の統一
- コンパクト化 (=非自明な target 上の弦理論）$\Rightarrow$ 低エネルギーでの 4 次元素粒子標準理論、GUT

４．得られないもの

- 一般の動的な時空（＋場）の振る舞い（物質励起の背景場への反作用）
- 宇宙定数（への量子補正）
- コンパクト化や低エネルギー理論の選別

2.1.2　平坦な時空上の超弦理論の分類

- 閉弦のみの理論
  - I 型（16 susy)
    - ヘテロ型 $E_8 \times E_8/\mathbb{Z}_2$ 理論 $\Rightarrow$ 10 次元 Type I sugra + $E_8 \times E_8$-SYM
    - ヘテロ型 SO(32) 理論 $\Rightarrow$ 10 次元 Type I sugra + SO(32)-SYM
  - II 型（32 susy)
    - IIA 型理論 $\Rightarrow$ 10 次元 type IIA sugra
    - IIB 型理論 $\Rightarrow$ 10 次元 type IIB sugra
- 開弦＋閉弦理論 (16 susy 以下）
  - IIA 型理論＋ブレーン $\Rightarrow$ 10 次元 type II sugra + brane 上の (chiral)SYM
  - IIB 型理論＋ブレーン $\Rightarrow$ 10 次元 type II sugra + brane 上の (chiral)SYM
  - I 型 SO(32) $\Rightarrow$ IIB 型理論＋ D_9 ブレーン
- M 理論 $\Rightarrow$ 11 次元 sugra

2.1.3　厳密に構成された非自明背景場・時空上の超弦理論

- Linear dilaton 理論
- PP GW 上の超弦理論
- 直積型 Calabi-Yau/Orbifold コンパクト化（no flux)

	Heterotic (M)	IIA	IIB	M/F
Local SUSY	$N = 4(D = 10)$	$N = 8(D = 10)$	$N = 8(D = 10)$	$N = 8(D = 11/12)$
Gravity sector	Bulk (g_{MN}, B_2, ϕ, Ψ_M, λ)	Bulk (NS, $\{C_{2p+1}\}$, $\Psi_M, \lambda, \Psi'_M, \lambda$')	Bulk (NS, $\{C_{2p}\}$, $\Psi_M^{(1)}, \lambda^{(1)}, \Psi_M^{(2)}, \lambda^{(2)}$)	Bulk (g_{MN}, C_3, $\Psi + M$)
Geometric Compactif.	$T^6 \Rightarrow N = 4$ $T^6/\Gamma, \mathrm{CY}^3 \Rightarrow N = 1$	$T^6 \Rightarrow N = 8$ $T^6/\Gamma, \mathrm{CY}^3 \Rightarrow N = 2$	$T^6 \Rightarrow N = 8$ $T^6/\Gamma, \mathrm{CY}^3 \Rightarrow N = 2$	$M/T^7 \Rightarrow N = 8$ $F/\mathrm{CY}^4 \Rightarrow N = 1$
Matter sector	Bulk ($F_2 + \chi$) $G = E^8 \times E^8, \mathrm{SO}(32)$	IDBs($F_2 + \chi$) $\Rightarrow N = 1$ $G = \mathrm{U}(n)$ ’ s +SO/Sp	IDBs/MDB($F_2 + \chi$) $\Rightarrow$ $N = 1$ $G = \mathrm{U}(n)$ ’ s +SO/Sp	A-D-E Singularities $G = \mathrm{U}(n)$ ’ s , E^8
Bulk Flux	Gauge bdl $\Rightarrow$ GUT H-flux $\Rightarrow Y^6$: NK	$F_0 \Rightarrow$ massive IIA Flux $\Rightarrow Y^6$: NK	ISD 3-flux $\Rightarrow$ complex moduli fixed	
Moduli Stabilisation	X (partially for complex moduli)	△ Flux+NP effect (nongeneric)	○ Flux + instanton $/\langle\chi\chi\rangle$	X
Susy breaking	???	???	○ Kahler uplifting	???
Particle Ph.	○ MSSMs $\Leftarrow$ SU(5)/SO(10)/E_6 GUTs No EW higgs!!	△ MSSM-like models. No GUT. EW SB ?	△ Direct MSSM by MDB/F-GUT.	X GUT only No realistic model.
Cosmology	X Higher-order???	X No dS vacua found !!	△ anti-D3 or string corrections	X

表 2.1: 超弦理論・M 理論のコンパクト化：Summary table

§2.2
10 次元超重力理論

2.2.1　I 型理論

基本場

- 重力セクター
  - ボーズ場
    - 計量/フレーム場： g_{MN} (e^A_M)
    - 2 形式場： $B_2 \Rightarrow \tilde{H}_3$
    - ディラトン： Φ
  - フェルミ場
    - スピン 3/2 場: ψ_M
    - ディラティーノ： λ
- ゲージセクター
  - ゲージ場： $A_1 \in \mathrm{Ad}(G)$
  - ゲージーノ： $\chi \in \mathrm{Ad}(G)$

	Gravitational sector	Gauge sector
Boson	metric g_{MN} 2-form B_2 dilaton Φ	gauge field $A_1 \in \mathrm{Ad}(G)$
Fermion	gravitino $\Psi_M(\mathbf{56})$ dilatino $\lambda(\mathbf{8})$	gaugino $\chi(\mathbf{8}) \in \mathrm{Ad}(G)$

作用積分　ストリングフレームでの Bosonic part の作用積分は

$$S_{\mathrm{Het},B} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x(-g)^{1/2}e^{-2\Phi}\left[R + 4(\partial\Phi)^2 - \frac{1}{2}|\tilde{H}_3|^2 - \frac{\alpha'}{4}\mathrm{Tr}_v\left(|F_2|^2\right)\right]. \quad (2.2.1)$$

$$F_2 = dA_1 - iA_1 \wedge A_1, \quad (2.2.2)$$

$$\tilde{H} = dB - \frac{\alpha'}{4}\left(\omega_{\mathrm{CS}}^{\mathrm{G}} - \omega_{\mathrm{CS}}^{\mathrm{L}}\right). \quad (2.2.3)$$

ここで,

- α': the inverse of the string tension
- $\omega_{\rm CS}^{\rm G}$, $\omega_{\rm CS}^{\rm L}$: Chern-Simons 接続係数：

$$d\omega_{\rm CS}^{\rm G} = {\rm Tr}\left(F \wedge F\right), \quad d\omega_{\rm CS}^{\rm L} = {\rm tr}\left(\mathscr{R} \wedge \mathscr{R}\right). \tag{2.2.4}$$

一般に，

$$\omega_{\rm CS} = {\rm Tr}_v\left(A \wedge dA - \frac{2i}{3}A \wedge A \wedge A\right), \tag{2.2.5}$$

ゲージ不変性

$$\begin{aligned} \delta A &= D\lambda \equiv d\lambda - i[A,\lambda], & (2.2.6a)\\ \delta\omega &= D\Theta \equiv d\Theta + [\omega,\Theta], & (2.2.6b)\\ \delta B &= d\sigma + (\alpha'/4)\left\{{\rm Tr}(\lambda dA) + {\rm tr}(\Theta d\omega)\right\} & (2.2.6c)\end{aligned}$$

ここで，σ は任意の 1 形式.

2.2.2　II 型理論

基本場

$$\begin{aligned} {\rm IIA} &: \left\{g_{MN}, B_{[2]}, \phi, C^{(1)}, C^{(3)}, C^{(5)}, C^{(7)}, C^{(9)}, \psi_M, \lambda\right\}, & (2.2.7a)\\ {\rm IIB} &: \left\{g_{MN}, B_{[2]}, \phi, C^{(0)}, C^{(2)}, C^{(4)}, C^{(6)}, C^{(8)}, \psi_M, \lambda\right\}. & (2.2.7b)\end{aligned}$$

ここで，IIA に対しては ψ_M, λ は右と左カイラリティの doublets，IIB に対しては条件

$$\Gamma_{11}\psi_M = \psi_M, \quad \Gamma_{11}\lambda = -\lambda \tag{2.2.8}$$

を満たす同じカイラリティの doublets. また，G^{2n} は on-shell で次の双対条件を満たす：

$$G^{(2n)} + \Psi^{(2n)} = (-1)^{[n]} * G^{(10-2n)}. \tag{2.2.9}$$

擬作用積分

$$S_B = \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}\sqrt{-g}\left[e^{-2\phi}\left(R(\omega(e)) + 4d\phi\cdot d\phi - \frac{1}{2}H\cdot H\right) - \sum_{n\in S}\frac{1}{4}G^{(2n)}\cdot G^{(2n)}\right]. \tag{2.2.10}$$

ここで，

$$S = \begin{cases} (0,1,\cdots,5); & IIA \\ (1/2,3/2,\cdots,9/2); & IIB \end{cases} \tag{2.2.11}$$

また，

$$\boldsymbol{G} = \sum_{n \in S} \frac{1}{\ell_s^{2n-1}} G^{(2n)}, \quad \boldsymbol{C} = \sum_{n \in S} \frac{1}{\ell_s^{2n-1}} C^{(2n-1)} \tag{2.2.12}$$

として，

$$H = dB, \quad \boldsymbol{G} = d\boldsymbol{C} - \frac{1}{\ell_s^2} dB \wedge \boldsymbol{C} + \ell_s G^{(0)} e^{B/\ell_s^2}. \tag{2.2.13}$$

(この定義は，IIB の標準的なものに対応．IIA の標準的なものとは B の符号が異なる．)

§2.3
Gauge and gravitational anomaly

References

- Harvey JA: hep-th/0509097, “ TASI Lecture on Anomalies ”
- Adler SL: ”Anomalies” [arXiv:hep-th/0411038]
- Alvarez-Gaume L, Ginsparg P: Ann. Phys. 161:423-490 (1985), “The Structure of Gauge and Gravitational Anomalies ”
- Alvarez-Gaume L, Witten E: NPB234:269-330 (1983), “Gravitational anomalies ”
- Witten E: plb117(1982)324, “ SU(2) anomaly ”

  Anomalous U(1) and GCS/GGS

- Anastasopoulos P, Bianchi M, Dudascde E, Kiritsis E.: JHEP0611:057 (2006) “ Anomalies, anomalous U(1) ’ s and generalized Chern-Simons terms ”

2.3.1　一般的構造

アノーマリーはカイラルな場の量子効果によってのみ生成され，d 次元時空では，一般に次の構造をもつ：

$$\delta \ln Z = \frac{-i}{(2\pi)^5} \int \hat{I}^d(F_2, R_2), \tag{2.3.1}$$

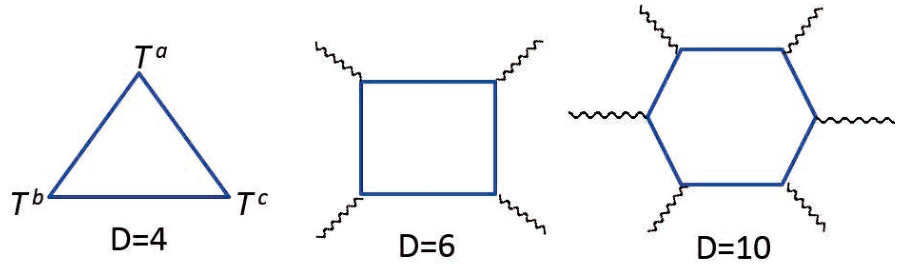
$$\hat{I}^{d+2} \;\Rightarrow\; \hat{I}^d : \quad \hat{I}^{d+2} = d\hat{I}^{d+1}, \quad \delta\hat{I}^{d+1} = d\hat{I}^d. \tag{2.3.2}$$

ゲージアノーマリー

- 4 次元の Gauge anomaly は次の形にかける：

$$I^d = C\alpha^a \mathrm{Tr}(t_a t_{(b} t_{c)}) \mathscr{F}^b \wedge \mathscr{F}^c. \tag{2.3.3}$$

- 自己共役表現（実表現，ないし擬実表現）はゲージアノーマリーを生まない．これは，このような表現に対しては，ゲージ不変性をもつ Pauli-Villarse 型



counter term が作れるためである．

4 次元の場合，これは直接示すことができる．まず，

$$\delta\psi_{\mathrm{r}} = i\alpha^a t_a \psi_{\mathrm{r}}, \quad \delta\psi_{\mathrm{r}}^* = -i\alpha^a t_a^* \psi_{\mathrm{r}}^* \tag{2.3.4}$$

で，t_a はエルミートなので，自己共役表現に対しては，

$$t_a = S(-{}^{T}t_a)S^{-1}. \tag{2.3.5}$$

よって，

$$\mathrm{Tr}(t_a t_{(b} t_{c)}) = -\mathrm{Tr}({}^{T}t_a\, {}^{T}t_{(b}\, {}^{T}t_{c)}) = -\mathrm{Tr}(t_a t_{(b} t_{c)}). \tag{2.3.6}$$

- 4 次元では，$G = \mathrm{SU}(2), \mathrm{SO}(2n+1)(n \geqslant 2), \mathrm{Sp}(2n)(n \geqslant 3), G_2, F_4, E_7, E_8$ のときゲージアノーマリーは生じない．一方，$G = \mathrm{U}(1), \mathrm{SU}(n)(n \geqslant 3), \mathrm{SO}(4n+2), E_6$ はアノーマリーを生じる可能性がある．これらは，$\mathrm{U}(1)$ を除くとすべて $\pi_5(G) \neq 0$.

重力アノーマリー

- 理論の CPT 不変性と重力相互作用の P 不変性より，カイラルスピノール（およびカイラルテンソル）がローレンツ群の複素表現となっている場合には，必ずカイラリティが反対の項が作用積分に対になって現れ，アノーマリーはキャンセルする．このため，重力アノーマリーは $D = 4k+2$ 次元でのみ発生．
- 重力アノーマリーは，$D/2+1$ 個の外線をもつカイラルフェルミ粒子と自己共役テンソルにより生じる．

2.3.2　10 次元超重力理論

10 次元超重力理論に登場するカイラル場と対応する I^{12} は

- dilatino: $\mathbf{8}, \mathbf{8}'$

$$\begin{aligned}\hat{I}_{\mathbf{8}}(F_2, R_2) = & -\frac{\mathrm{Tr}(F_2^6)}{1440} \\ & + \frac{\mathrm{Tr}(F_2^4)\mathrm{tr}(R_2^2)}{2304} - \frac{\mathrm{Tr}(F_2^2)\mathrm{tr}(R_2^4)}{23040} - \frac{\mathrm{Tr}(F_2^2)[\mathrm{tr}(R_2^2)]^2}{18432} \\ & + \dim(G)\left(\frac{\mathrm{tr}(R_2^6)}{725760} + \frac{\mathrm{tr}(R_2^4)\mathrm{tr}(R_2^2)}{552960} + \frac{[\mathrm{tr}(R_2^2)]^3}{1327104}\right). \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

ここで，tr は $R_2 = (\mathscr{R}^a{}_b)$ の接空間添え字 a, b に関するトレース，Tr はフェルミ粒子のゲージ群 G の表現に関するトレース．

- gravitino: $\mathbf{56}, \mathbf{56}'$

$$\hat{I}_{\mathbf{56}}(R_2) = -495\frac{\mathrm{tr}(R_2^6)}{725760} + 225\frac{\mathrm{tr}(R_2^4)\mathrm{tr}(R_2^2)}{552960} - 63\frac{[\mathrm{tr}(R_2^2)]^3}{1327104}. \quad (2.3.8)$$

- 5-form flux (IIB): $[5]_+, [5]_-$

$$\hat{I}_{\mathrm{SD}}(R_2) = +992\frac{\mathrm{tr}(R_2^6)}{725760} - 448\frac{\mathrm{tr}(R_2^4)\mathrm{tr}(R_2^2)}{552960} + 128\frac{[\mathrm{tr}(R_2^2)]^3}{1327104}. \quad (2.3.9)$$

II 型理論　IIA 型理論はカイラルでないので，アノーマリーは自明にキャンセルする．また，IIB 型理論でも，アノーマリーはキャンセルする：

$$\hat{I}_{\mathrm{IIB}}(R_2) = -2\hat{I}_{\mathbf{8}}(R_2) + 2\hat{I}_{\mathbf{56}}(R_2) + \hat{I}_{\mathrm{SD}}(R_2) = 0. \quad (2.3.10)$$

I 型理論　I 型理論のアノーマリーは

$$\begin{aligned}\hat{I}_1 &= \hat{I}_{\mathbf{56}}(R_2) - \hat{I}_{\mathbf{8}}(R_2) + \hat{I}_{\mathbf{8}}(F_2, R_2) \\ &= \frac{Y_4 X_8}{768} + \frac{1}{1440}\left\{-\mathrm{Tr}_a(F_2^6) + \frac{1}{48}\mathrm{Tr}_a(F_2^2)\mathrm{Tr}_a(F_2^4) - \frac{1}{14400}[\mathrm{Tr}_a(F_2^2)]^3\right\} \\ & \quad +(\dim(G) - 496)\left\{\frac{\mathrm{tr}(R_2^6)}{725760} + \frac{\mathrm{tr}(R_2^4)\mathrm{tr}(R_2^2)}{552960} + \frac{[\mathrm{tr}(R_2^2)]^3}{1327104}\right\} \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

ここで，

$$Y_4 = \mathrm{tr}(R_2^2) - \frac{1}{30}\mathrm{Tr}_a(F_2^2), \quad (2.3.12a)$$

$$X_8 = \mathrm{tr}(R_2^4) + \frac{[\mathrm{tr}(R_2^2)]^2}{4} - \frac{\mathrm{Tr}_a(F_2^2)\mathrm{tr}(R_2^2)}{30} + \frac{\mathrm{Tr}_a(F_2^4)}{3} - \frac{[\mathrm{Tr}_a(F_2^2)]^2}{900}. \quad (2.3.12b)$$

まず，$G = \mathrm{SO}(n)$ のとき，任意の生成元 $t \in \mathfrak{so}(n)$ に対し，

$$\mathrm{Tr}_a(t^2) = (n-2)\mathrm{Tr}_v(t^2), \quad (2.3.13a)$$

$$\mathrm{Tr}_a(t^4) = (n-8)\mathrm{Tr}_v(t^4) + 3[\mathrm{Tr}_v(t^2)]^2, \quad (2.3.13b)$$

$$\mathrm{Tr}_a(t^6) = (n-32)\mathrm{Tr}_v(t^6) + 15\mathrm{Tr}_v(t^2)\mathrm{Tr}_v(t^4), \quad (2.3.13c)$$

より，第2項は

$$\frac{32-n}{1440}\left\{\mathrm{Tr}_v(F_2^6)-\frac{n+22}{48}\mathrm{Tr}_v(F_2^2)\mathrm{Tr}_v(F_2^4)+\frac{(n-2)(n+28)}{14400}[\mathrm{Tr}_v(F_2)]^3\right\} \tag{2.3.14}$$

より，$n=32$ のときのみゼロとなる．同様に，$G=E_8$ に対して，

$$\mathrm{Tr}_a(t^4)=\frac{1}{100}[\mathrm{Tr}_a(t^2)]^2,\quad \mathrm{Tr}_a(t^6)=\frac{1}{7200}[\mathrm{Tr}_a(t^2)]^3 \tag{2.3.15}$$

より，第2項は $G=E_8\times E_8, E_8\times \mathrm{U}(1)^m$ のときゼロ．第3項は，$G=\mathrm{SO}(32), E_8\times E_8, E_8\times \mathrm{U}(1)^{248}.\mathrm{U}(1)^{496}$ に対してゼロ．

2.3.3　Green-Schwarz 機構

次に,（ヘテロ表示での）作用積分において，$\tilde{H}_3$ の定義を

$$\tilde{H}_3 = dB_2 - c\omega_{3Y} - c'\omega_{3L}; \tag{2.3.16}$$

$$\omega_{3Y} = \mathrm{Tr}\left(A_1\wedge dA_1 - \frac{2i}{3}A_1\wedge A_1\wedge A_1\right), \tag{2.3.17}$$

$$\omega_{3L} = \mathrm{tr}\left(\omega_1\wedge d\omega_1 + \frac{2}{3}\omega_1\wedge\omega_1\wedge\omega_1\right) \tag{2.3.18}$$

に置き換え，ゲージ変換を

$$\delta A_1 = d\lambda - i[A_1,\lambda], \tag{2.3.19a}$$

$$\delta\omega_1 = d\Theta + [\omega_1,\Theta], \tag{2.3.19b}$$

$$\delta B_2 = c\mathrm{Tr}(\lambda dA_1) + c'\mathrm{tr}(\Theta d\omega_1) \tag{2.3.19c}$$

と定義すると，Chern-Simons 型繰り込み項

$$\boldsymbol{S}' = \int B_2 X_8(F_2,R_2) \tag{2.3.20}$$

は，ゲージ変換に補正

$$\delta\boldsymbol{S}' = \int \delta B_2 X_8 \tag{2.3.21}$$

を与える．これは，アノーマリー換算で

$$\begin{aligned} &\hat{I}'_{10} = [c\mathrm{Tr}_a(\lambda dA_1) + c'\mathrm{tr}(\Theta d\omega_1)]X_8 \\ \Rightarrow\quad &\hat{I}'_{12} = [c\mathrm{Tr}_a(F_2^2) + c'\mathrm{tr}(R_2^2)]X_2 \end{aligned} \tag{2.3.22}$$

となる．よって，

$$c' = -\frac{c}{30} \tag{2.3.23}$$

ととれば，第 1 項と相殺する（**Green-Schwarz 機構**）．このとき，

$$d\tilde{H}_3 = \frac{\alpha'}{4}\left[\mathrm{tr}(R_2^2) - \frac{1}{30}\mathrm{Tr}_a(F_2^2)\right]; \quad 4\kappa_{10}^2 = \alpha' g_{10}^2. \tag{2.3.24}$$

以上より，I 型理論では，$G = \mathrm{SO}(32), E_8 \times E_8, E_8 \times \mathrm{U}(1)^{248}.\mathrm{U}(1)^{496}$ に対して，アノーマリーは相殺する．ただし，理論の超対称性より，U(1) 因子に対しても，$\tilde{H}$ の定義で ω_{CS} を加える必要がある [Bergshoeff E, de Roo M, de Wit B, van Nieuwenhuizen P: NPB195:97(1982)]．ゲージ不変性より，これは B のゲージ変換も対応する修正を受けることを意味する．ところが，この修正のため，ゲージ変換の際に BX_8 から U(1) 因子に対応する付加項が生じ，ゲージ不変性を破る．すなわち，U(1) があると，超対称性の要請と Green-Schwarz 機構が整合的でなくなる．よって，整合的な理論は，$G = \mathrm{SO}(32), E_8 \times E_8$ のみ．

§2.4
Brane

2.4.1　分類

D 次元時空における p-brane は，C_{p+1} ポテンシャルと電気的に，C_{D-p-3} ポテンシャルと磁気的に結合する．すなわち，$d\tilde{C}_{D-p-3} = *dC_{p+1}$ として，

$$\text{Electric} \quad : \quad \mu_p \int_{Dp} C_{p+1}, \tag{2.4.1a}$$

$$\text{Magnetic} \quad : \quad \mu_p' \int_{Dp} \tilde{C}_{p+1}. \tag{2.4.1b}$$

フォーム場 F_{D-p-2} の磁荷ないし F_{p+2} の電荷を持ちうる：

$$\text{Electric charge} \quad : \quad \int_{S_{D-p-2}} *F_{p+2} = 2\kappa_{10}^2 \mu_p, \tag{2.4.2a}$$

$$\text{Magnetic charge} \quad : \quad \int_{S_{D-p-2}} F_{D-p-2} = 2\kappa_{10}^2 \mu_p'. \tag{2.4.2b}$$

電荷の量子化　D$(D-p-4)$ ブレーンを囲む多様体 Σ_{D+2} 上を Dp が，$\Sigma_{p+1} = \partial N_{p+2}$ に沿って D$(D-p-4)$ の周りを一周すると，Dp の波動関数はこの軌道に沿った運動により，

$$\exp\left(i\mu_p \int_{\Sigma_{p+1}} C_{p+1}\right) = \exp\left(i\mu_p \int_{N_{p+2}} F_{p+2}\right) \tag{2.4.3}$$

だけ位相が変化する．いま，軌道をだんだん小さくして，$N_{p+2} \to \Sigma_{p+2}$ となるよう 1 点に縮めると，位相の変化はなくならないといけないので，

$$\exp\left(i\mu_p \int_{\Sigma_{p+2}} F_{p+2}\right) = \exp\left(i\mu_p \times 2\kappa_{10}^2 \mu_{D-p-4}'\right) = 1. \tag{2.4.4}$$

これより，次の Dirac 型量子化条件を得る：

$$2\kappa_{10}^2 \mu_p \mu_{D-4-p}' = 2n\pi, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{2.4.5}$$

	Potential	Flux	electric	magnetic
	Φ	$d\Phi$	—	NS7(?)
	B_2	H_3	F1	NS5
	C_1	F_2	D0	D6
IIA	C_3	F_4	D2	D4
	(C_5)	(F_6)	D4	D2
	(C_7)	(F_8)	D6	D0
	C_9	F_{10}	D8	—
	$C_{10}(?)$	0	D9(?)	—

	Potential	Flux	electric	magnetic
	Φ	$d\Phi$	—	NS7(?)
	B_2	H_3	F1	NS5
	C_0	F_1	D-1	D7
IIB	C_2	F_3	D1	D5
	$(C_4)_+$	$(F_5)_+$	D3	D3
	(C_6)	(F_7)	D5	D1
	(C_8)	(F_9)	D7	D-1
	C_{10}	0	D9	—

2.4.2　D ブレーンの作用積分

References

- Anomaly cancelation, inflaw and brane action
  - Izquierdo JM, Townsend PK: NPB 414:93 (1994), “Axionic defect anomalies and their cancellation”
  - Green MB, Harvey JA, Moore G: CQG14:47(1997), “I-brane inflow and anomalous couplings on D-branes”
  - Cheung YK, Yin Z: NPB 517:67 (1998) “Anomalies, branes, and currents”
  - Minasian R, Moore GW: JHEP9711:002 (1997) “K-theory and Ramond-Ramond charge
- Extension to the non-Abelian case (N Dp-branes with $N > 1$)
  - Myers RC: jhep9912, 022 (1999)

    ”Dielectric-branes”

概要　電磁場 A の中の荷電粒子の作用積分は，C を時空軌道として

$$S = -mc\int_C ds - q\int_C A \tag{2.4.6}$$

で与えられる．荷電粒子を D0 ブレーンとみなすと，一般の Dp ブレーンの作用積分も同じ構造をもち，大まかには，第 1 項を弧長から D ブレーンの面積に，第 2 項の 1 形式 A を C_{p+1} に比例した微分形式のブレーン上での積分に置き換えたものになる．

1. Abelian case

DBI 作用積分　1 枚の Dp ブレーンに対する DBI 作用積分は，F をその上の U(1) ゲージ場フラックスとして，[36]

$$S_{\text{DBI,Dp}} = -\mu_p \int_{\Sigma^{p+1}} d^{p+1}\xi\, e^{-\Phi(X)}\sqrt{-\det(g_{ab}(X) + 2\pi\alpha'\mathscr{F}_{ab}(X))}. \tag{2.4.7}$$

ここで，

$$2\pi\alpha'\mathscr{F} = 2\pi\alpha' F - B, \tag{2.4.8}$$

$$\mu_p = \mu_p \ell_s^{-p-1} \times \begin{cases} 1 & \text{for type II} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{for type I} \end{cases} \tag{2.4.9}$$

(B の符号が標準のものと異なるが，こうしないと CS 作用積分のゲージ不変性が破れる．)

Chern-Simons 作用積分　$C = \sum_q C_q/\ell_s^q$ として，Dp ブレーン B^{p+1} と RR 場との結合は

$$S_{\text{CS}} = 2\pi \int_{B^{p+1}} C \wedge \operatorname{Tr} e^{-\frac{B}{\ell_s^2} + \frac{F}{2\pi}} \frac{\sqrt{\hat{A}(TB)}}{\sqrt{\hat{A}(NB)}} \tag{2.4.10}$$

ここで $\hat{A}(TB)$ と $\hat{A}(NB)$ は，それぞれブレーンの接バンドル，法バンドルの $\hat{A}$-特性類．ただし，ゲージ場はエルミートな行列に値を取るものを取る．

また，Op 面に対する DBI 作用積分は

$$S_{\text{CS}} = -2^{p-4} 2\pi \int_{B^{p+1}} C \wedge \frac{\sqrt{L(\mathscr{R}_T/4)}}{\sqrt{L(\mathscr{R}_N/4)}} \tag{2.4.11}$$

ここで，L は Hirzebruch 特性類，$\mathscr{R}_T, \mathscr{R}_N$ は Op 面の接バンドルおよび法バンドルの曲率形式 (ℓ_s のべきで無次元化されたもの．

2. Non-abelian case

N 枚重なったブレーン上には,SU(N) ゲージ場 A_M とその adjoint 表現で変換する N 次エルミート行列に値をもつ非可換スカラ場 $\Phi^i (i=1,\dots,9-p)$ が現れる．以下

$$\lambda = 2\pi\ell_s^2 = 2\pi\alpha', \quad T_p = \mu_p = \frac{2\pi}{g_s(2\pi\ell_s)^{p+1}}. \tag{2.4.12}$$

DBI 作用積分

$$S_{\mathrm{DBI}} = -T_p \int d^{p+1}\sigma \mathrm{Tr}\left(e^{-\phi}\sqrt{-\det(P+\lambda F)\det Q}\right). \tag{2.4.13}$$

ここで

$$E_{MN} = g_{MN} + B_{MN}, \tag{2.4.14a}$$
$$P_{ab} = E_{ab} + E_{ai}(Q^{-1}-\delta)^{ij}E_{jb}, \tag{2.4.14b}$$
$$Q^i{}_j = \delta^i_j + i\lambda[\Phi^i,\Phi^j]E_{k,j} \tag{2.4.14c}$$

λ が小さいとき

$$\sqrt{\det Q} = 1 - \frac{\lambda^2}{4}[\Phi^i,\Phi^j][\Phi^i,\Phi^j] + \cdots. \tag{2.4.15}$$

CS 作用積分

$$S_{\mathrm{CS}} = \mu_p \int \mathrm{Tr}(e^{i\lambda I_\Phi I_\Phi}(\sum C^{(n)}e^B)e^{\lambda F}. \tag{2.4.16}$$

ここで,

$$I_\Phi I_\Phi B = B_{ij}\Phi^i\Phi^j = \frac{1}{2}B_{ij}[\Phi^i,\Phi^j]. \tag{2.4.17}$$

§2.5
RR tadpole条件

RR フォーム場に対する場の方程式

$$dF_{8-p} = H_3 \wedge F_{6-p} + \kappa_{10}^2 \mu_p \left[N_{\rm Dp}(\delta(Dp) + \delta(Dp') + Q_p N_{\rm Op} \delta(Op) \right], \tag{2.5.1}$$

$$\kappa_{10}^2 \mu_p = (2\pi\sqrt{\alpha'})^{7-p}, \tag{2.5.2}$$

$$Q_p = -2^{p-4} \tag{2.5.3}$$

これを Dp に横断的な $(9-p)$ 次元部分多様体に沿って積分して，

$$N_{{\rm D}p} + N_{\rm flux,p} = 2^{p-5} N_{{\rm O}p} \tag{2.5.4}$$

where

$$N_{\rm flux} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2 \mu_p} \int_{Y_{9-p}} H_3 \wedge F_{6-p} \tag{2.5.5}$$

3 *コンパクト化

References

- R Blumenhagena, B Körsb, D Lüsta, S Stiebergerb: Phys. Rep. 445, 1-193 (2007)

  “Four-dimensional string compactifications with D-branes, orientifolds and fluxes”

- Luis E. Ibánez: Les Houches Lectures on String Phenomenology [arXiv:1204.5296]

  “From Strings to the LHC”

- D Bailin, A Love: Phys. Rep. 315, 285-408 (1999)

  “Orbifold compactifications of string theory”

§3.1 素粒子モデルの導出

3.1.1 要請

1. 4 次元時空（Mink or dS)
2. ゲージ対称性: $G_{\mathrm{SM}} = \mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)_Y$
3. 3 世代のカイラルフェルミ粒子系 $(l, q)_L, l_R, q_R$ と G_{SM} の表現
4. Higgs 場と湯川結合

5. ゲージ結合定数の値

6. Higgs 場の質量とポテンシャル

7. Options

   – $N = 1$ 超対称性とその破れ
   – GUT と SM への SSB 機構

3.1.2　モデルの分類

- ヘテロ型理論 $E_8 \times E_8$ (? or SO(32))
  - オービフォールドコンパクト化: $T^6/\mathbb{Z}_p$, $T^6/\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$
    +WL (2006-) ⇒ SU(5)-SGUT, SSM
  - Calabi-Yau コンパクト化
    SCY+Gauge bundle+WL (2006-) ⇒ E_6/SO(10)/SU(5)-GUT/MSSM
    * Elliptically fibred CY with Friedman-Morgan-Witten type bundle
    * Complete intersection CY in a projective space with monad bundle
    * Toric CY with monad bundle
  - O(100) 個の近似的 MSSM タイプモデルが発見されている．
    * 3×10^4 個の $T^6/\mathbb{Z}_6$-orbifold による SO(10)/$E6$ GUT モデル.
    * 多数の滑らかなトーリック CY コンパクト化による SU(5)/SO(10) GUT モデル.
  - モジュライ安定化機構が不明

- II 型理論
  - IIA 型交差 D ブレーンモデル: IIA(D6) ⇒ SM
    * T^6-orbifold/orientifold コンパクト化により MSSM タイプのモデルが構築可能.
    * いくつかの現実的モデルにおいて，アクシオンモジュライ以外のモジュライの安定化が実現される．
    * インフレーションモデルの例はまだない
  - IIB 型磁化 D ブレーンモデル: IIB(D3,D7), IIB(D9,D5) ($\subset$ I-SO(32)) ⇒ SM
  - F 理論 GUT モデル：F(D7) ⇒ GUT

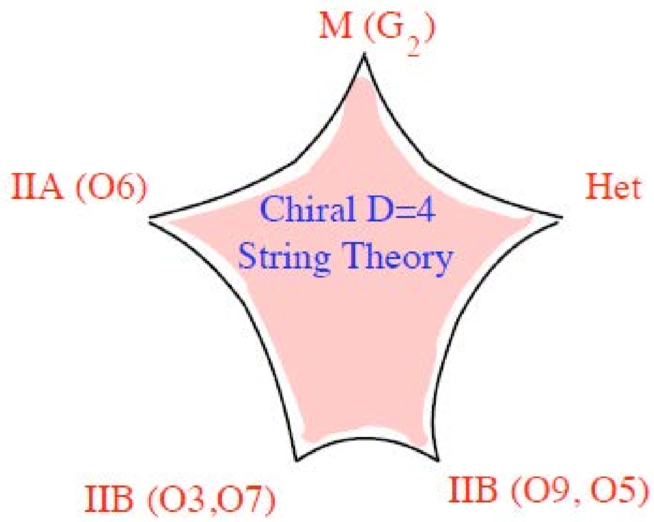


図 3.1: 4 次元素粒子モデルを与える超弦理論のコンパクト化

- M 理論
  - G_2 コンパクト化

§3.2
Calabi-Yau コンパクト化

3.2.1　共通セクター

II 型での RR フラックスや HET 型での背景ゲージ場が存在しない場合，超弦理論の超重力極限である 10 次元理論は，すべて，スピノール場の数を除いて同じ構造を持つ.

基本場

- ボーズ場
  - 計量/フレーム場： g_{MN} (e^A_M)
  - 2 形式場： $B = \frac{1}{2}B_{MN}dx^M \wedge dx^N \;\;\Rightarrow\;\; H$
  - ディラトン： ϕ
- フェルミ場
  - スピン 3/2 場: ψ_M $(+\psi'_M)$
  - ディラティーノ： λ $(+\lambda')$

作用積分　ストリングフレームでの Bosonic part の作用積分は

$$S_B \;=\; \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x(-g)^{1/2}e^{-2\phi}\left[R + 4(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}|H|^2\right] \tag{3.2.1}$$

ここで，

$$H = dB \tag{3.2.2}$$

超対称変換　String frame で

$$\delta\psi_M \;=\; \mathscr{D}_M\epsilon; \quad \mathscr{D}_M = \nabla^{(+)}_M \equiv \nabla_M(e) - \frac{1}{4}\hat{H}_M, \tag{3.2.3a}$$

$$\delta\lambda \;=\; \mathscr{O}\epsilon; \quad \mathscr{O} \equiv \Gamma^M\partial_M\phi - \frac{1}{2}\hat{H}. \tag{3.2.3b}$$

ここで

$$\hat{H}_M := \frac{1}{2}H_{MPQ}\Gamma^{PQ}, \tag{3.2.4a}$$

$$\hat{H} := \frac{1}{6}H_{MNP}\Gamma^{MNP}. \tag{3.2.4b}$$

場の方程式　ストリングフレームで

$$\mathscr{E}_{MN} := R_{MN} + 2\nabla_M\nabla_N\phi - \frac{1}{4}\tilde{H}_{MPQ}\tilde{H}_N{}^{PQ}, \tag{3.2.5a}$$

$$\mathscr{E}_\phi := R - 4(\nabla\phi)^2 + 4\Box\phi - \frac{1}{2}|\tilde{H}|^2, \tag{3.2.5b}$$

$$\mathscr{J}_{MN} := e^{2\phi}\nabla_P(e^{-2\phi}\tilde{H}^P{}_{MN}) = 0. \tag{3.2.5c}$$

最後の式は

$$d(e^{-2\phi} * \tilde{H}) = 0 \tag{3.2.6}$$

と同等．また，$\mathscr{E}^M_M$ と $\mathscr{E}_\phi$ より，曲率を含まない次の式を得る：

$$\mathscr{E}'_\phi := e^{2\phi}\Box e^{-2\phi} - |H|^2 = 0. \tag{3.2.7}$$

整合性条件　(概要：Killing スピノールが存在すれば，Killing spinor eq の整合性より，背景場がすべての場の方程式を満たすことが導かれる.)

関係式

$$[\nabla_M, \nabla_N] = \frac{1}{4}R_{MNPQ}\Gamma^{PQ} \equiv \frac{1}{2}\hat{R}_{MN} \tag{3.2.8}$$

より，

$$\Gamma^N[\mathscr{D}_M, \mathscr{D}_N] = [\mathscr{D}_M, \mathscr{O}] - \frac{1}{2}\mathscr{E}_{MP}\Gamma^P - \frac{1}{4}\mathscr{J}_{MP}\Gamma^P - \frac{1}{24}(dH)_{MNPQ}\Gamma^{NPQ}, \tag{3.2.9}$$

$$\Gamma^M[\mathscr{D}_M, \mathscr{O}] = -\frac{1}{2}\mathscr{E}'_\phi - \frac{1}{2}d\hat{H} + 2\mathscr{O}^2 - \frac{1}{4}\mathscr{J}_{PQ}\Gamma^{PQ} \tag{3.2.10}$$

を得る．したがって,，Killing スピノール ϵ が存在し，H に対する Bianchi 恒等式 $dH = 0$ が満たされれば，

$$(2\mathscr{E}_{MN} + \mathscr{J}_{MN})\Gamma^N\epsilon = 0, \tag{3.2.11a}$$

$$\left(\mathscr{E}'_\phi - \frac{1}{4}\mathscr{J}_{PQ}\Gamma^{PQ}\right)\epsilon = 0, \tag{3.2.11b}$$

(3.2.11c)

が成り立つ．これより

$$K^M = \bar{\epsilon}\Gamma^M\epsilon \tag{3.2.12}$$

とおくと

$$(2\mathscr{E}_{MN} + \mathscr{J}_{MN})(2\mathscr{E}^{MN} + \mathscr{J}^{MN}) = 0, \tag{3.2.13a}$$

$$(2\mathscr{E}_{MN} + \mathscr{J}_{MN})K^N = 0 \tag{3.2.13b}$$

が成り立つ．K^M は常に時間的ないし光的ベクトル Killing であるが，時間的ならこれらより

$$\mathscr{E}_{MN} = \mathscr{J}_{MN} = 0 \tag{3.2.14}$$

が導かれる．一方，K^M が光的な場合には，$L_M K^M \neq 0$ となる適当なベクトルに対して，さらに

$$(2\mathscr{E}_{MN} + \mathscr{J}_{MN})L^M L^N = 0 \tag{3.2.15}$$

が成り立てば同じ結論が得られる．さらに，整合性条件より

$$\mathscr{E}'_\phi = 0 \tag{3.2.16}$$

が導かれる．したがって，すべての場の方程式は満たされる．

3.2.2　4 次元理論が $N = 1$ 超対称性をもつ条件

Ansatz　10 次元時空解が 4 次元 Mink/adS/dS に対応する等長変換群で不変とすると，

$$ds^2 = \tilde{g}_{MN} dz^M dz^N = h^{1/2}(y) ds^2(X_4) + ds^2(Y_6), \tag{3.2.17a}$$
$$\phi = \phi(y), \tag{3.2.17b}$$
$$H = H_{pqr}(y) dy^p \wedge dy^q \wedge dy^r, \tag{3.2.17c}$$
$$\Gamma^a = \gamma^a \otimes 1, \quad \Gamma^p = \gamma^5 \otimes \hat{\gamma}^p. \tag{3.2.17d}$$

No-Go 定理　Dilaton に対する場の方程式より，

$$D_Y \cdot (h D_Y e^{-2\phi}) = h e^{-2\phi} |H|_Y^2. \tag{3.2.18}$$

Y がコンパクト閉で滑らか，かつ h と ϕ が有界とすると，これより

$$\int_Y \Omega(Y) h e^{-2\phi} |H|_Y^2 = 0 \ \Rightarrow \ H = 0. \tag{3.2.19}$$

さらに，$H = 0$ を用いると

$$D_Y \cdot (h D_Y e^{-2\phi}) = 0 \ \Rightarrow \ \int_Y \Omega(Y) h (D_Y e^{-2\phi})^2 = 0 \ \Rightarrow \ \phi = \mathrm{const} \tag{3.2.20}$$

となる．

$H = 0$ の場合　Killing スピノール ϵ が存在すると，

$$\nabla_\mu \epsilon = -\frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma^5 \otimes \hat{\gamma}^p \partial_p h^{1/4} \epsilon, \tag{3.2.21a}$$
$$\nabla_p \epsilon = 0, \tag{3.2.21b}$$
$$\hat{\gamma}_p \partial_p \phi \epsilon = 0. \tag{3.2.21c}$$

- **No warp & 4D 平坦性**：$\delta\psi_\mu = 0$ の整合性より

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\epsilon = \frac{1}{2}(\nabla h^{1/4})^2 \gamma_{\mu\nu}\epsilon = \frac{1}{4}R_{\mu\nu ab}(X)\gamma^{ab}\epsilon = \frac{1}{2}k\gamma_{\mu\nu}\epsilon. \tag{3.2.22}$$

よって，

$$(\nabla_m h^{1/4})(\nabla^m h^{1/4}) = k. \tag{3.2.23}$$

また，$\delta\psi_\mu = 0$ と $\delta\psi_m = 0$ の整合性より

$$\hat{\gamma}^m \partial_n \partial_m h^{1/4}\epsilon = 0 \;\Rightarrow\; \triangle_Y h^{1/4} = 0. \tag{3.2.24}$$

よって，Y がコンパクト閉で滑らか，h が正で有界とすると，

$$h = \text{const} \;\Rightarrow\; k = 0. \tag{3.2.25}$$

となる．

- Y **の Ricci 平坦性:** $\delta\psi_m = 0$ の整合性条件

$$0 = [\nabla_m, \nabla_n]\epsilon = \frac{1}{4}R_{mnrs}(Y)\hat{\gamma}^{rs}\epsilon \tag{3.2.26}$$

より，

$$R_{mn}(Y)\hat{\gamma}^n\epsilon = 0 \;\Rightarrow\; R^m_p(Y)R_{mn}(Y)\hat{\gamma}^p\hat{\gamma}^n\epsilon = 0 \;\Rightarrow\; R^m_n(Y)R^n_m(Y) = 0, \tag{3.2.27}$$

すなわち $R_{mn}(Y) = 0$ という条件が得られる．

- Y **の Kähler 性:** ϵ の X_4 上のカイラルスピノール $\xi_\pm$ と Y_6 上のカイラルスピノール $\eta_\pm$ への分解

$$\epsilon = \xi_+ \otimes \eta_\pm + \xi_- \otimes \eta_\mp \tag{3.2.28}$$

を用いて，Y_6 上の実行列行列 $J = (J_p{}^q)$ を

$$J_p{}^q = \pm i\eta_\pm^+ \gamma_p{}^q \hat{\gamma}_7 \eta_\pm \tag{3.2.29}$$

により定義すると，

$$J^2 = -1, \tag{3.2.30a}$$

$$J_p{}^r J_q{}^s g_{rs} = g_{pq} \;\Leftrightarrow\; g(Ju, Jv) = g(u, v), \tag{3.2.30b}$$

$$\nabla_p J_{qr} = 0. \tag{3.2.30c}$$

これより，特に，Nijenhuis テンソルは

$$N_{pq}{}^r \equiv J_p{}^s J^r_{[q;s]} - J_q{}^s J^r_{[p;s]} = 0. \tag{3.2.31}$$

よって，J は複素構造を定義し，$g_{pq}(Y)$ は J に関して Kähler 計量となる．

- SU(3) **ホロノミー:** 3 次元コンパクト複素多様体に対して，
  - Kähler $\Leftrightarrow$ $\nabla J = 0$ $\Leftrightarrow$ $U(3)$ ホロノミー
    - 複素接空間

$$T(M)^{\mathbb{C}} = T'(M) + T''(M): \tag{3.2.32a}$$

$$JV' = iV' \ (V' \in T'(M)), \quad JV'' = -iV'' \ (V'' \in T''(M)), \tag{3.2.32b}$$

$$h(V,V) = g(\bar{V},V), g(V,V) = g(\bar{V},\bar{V}) = 0 \ (V \in T'(M)) \tag{3.2.32c}$$

において，$\nabla J = 0$ より，共変微分 ∇ による接続は複素接空間の接続を誘導し，しかもエルミート計量を保つ．

  - Kähler, SU(3) ホロノミー $\Rightarrow$ Ricci 平坦，既約，有限基本群
  - 単連結，既約，Kähler，Ricci 平坦 $\Rightarrow$ SU(3) ホロノミー
  - コンパクト，Ricci 平坦，Kähler のとき： 標準線バンドルが自明 $\Leftrightarrow$ Hol(g) $\subset$ SU(3)
    - Kähler 多様体の接続 ∇ は，標準線バンドル $K(M) = \wedge^3 T'(M)$ の U(1) 接続を誘導し，その曲率は ∇ の Ricci 形式と対応する．したがって，この接続が平坦なら，M が単連結な時 $K(M)$ は大域的な切断をもち，$T'(M)$ バンドルの構造群が U(3) から SU(3) に簡約される．
    - $K(M)$ の大域的切断は，3 形式

$$\Omega^{pqr} = \eta_- \gamma^{pqr} \eta_+ \tag{3.2.33}$$

により与えられる．実際，Ω は次の性質をもつ：

$$J_p{}^q \Omega_{qrs} = -i\Omega_{prs}, \tag{3.2.34a}$$

$$\Omega \wedge \bar{\Omega} = -6i\Omega(Y_6), \tag{3.2.34b}$$

$$\nabla\Omega = 0. \tag{3.2.34c}$$

注

- $\phi = \text{const}$，$H = 0$, X_4:Minkowski, Y_6:Ricci 平坦という結論は，最初の一般的仮定，Y_6 がコンパクト閉で滑らか，h が有界，滑らかで正という要請と場の方程式のみから導かれ，超対称性は必要ない．

- Y_6 が複素多様体で Kahler という性質は，超対称性からの帰結である．

Cohomology group	basis	
$H^{(1,1)}$	w_a	$a = 1, .., h^{(1,1)}$
$H^{(0)} \oplus H^{(1,1)}$	$w_A = (1, w_a)$	$A = 0, .., h^{(1,1)}$
$H^{(2,2)}$	$\tilde{w}^a$	$a = 1, .., h^{(1,1)}$
$H^{(2,1)}$	χ_k	$k = 1, .., h^{(2,1)}$
$H^{(3)}$	(α_K, β^K)	$K = 0, .., h^{(2,1)}$

表 3.1: Basis of harmonic forms in a Calabi–Yau manifold.

3.2.3　モジュライ

直積型コンパクト化に得られる超対称古典解の周りの摂動は，内部空間Yで調和モード展開することにより，適当な超重力理論で記述される4次元時空上の場と見なすことができる．特に，ゼロモードに対する摂動は4次元では質量ゼロの場を与え，なかでもスカラ型のモードはモジュライと呼ばれる．

１０次元超重力論・超弦理論に含まれるゼロ質量ボゾン場は，次の2つに分類される．

1) 重力セクター： g_{MN}, B_{MN}, Φ（すべてに共通）

2) ゲージセクター：

   i) I型理論： 非可換ゲージ場 A_M

   ii) II型理論： $\{C_p\}$ (RR-form 場)

重力セクター (NS セクター)　　これらのうち，重力セクターはすべての理論に共通で，CY コンパクト化におけるゼロモードは次の2種類のモジュライを生み出す (Candelas, Horowitz, Strominger, Witten 1985[17]; Candelas P, de la Ossa XC 1991[15])．

1) 複素モジュライ＋ dilaton-axion： $h^{2,1}+1$ コの chiral 場

2) Kähler モジュライ： $h^{1,1}$ コの chiral 場

重力セクターの摂動 g_{MN}，b_{MN}，ϕ(および ψ_M, λ) から得られるゼロモードは，具体的には次のようになる：

- $\phi, b_{\mu\nu}, \lambda \;\Rightarrow\;$ Dilaton-axion カイラル超場
  - $b_{\mu\nu} \;\Rightarrow\; *db = da$: $(\phi + ai, \lambda)$
- $g_{\mu\nu}, \psi_\mu \;\Rightarrow\;$ 4次元重力超組

  - $(g_{\mu\nu}, \psi_\mu^{\mathbf{2+2^*}})$

- $g_{\mu i}, b_{\mu i}, \psi_\mu^{\mathbf{6+6^*}}, \psi_i^{\mathbf{2+2^*}}$ $\Rightarrow$ no massless field
  - $g_{\mu i}, b_{\mu i} \in \mathscr{H}^{1,0}$: $h^{1,0} = 0$.

- $g_{ij}, b_{ij}, \psi_{i,j}$ & cc $\Rightarrow$ Complex moduli カイラル超場 z^k $(k = 1, \cdots, h^{2,1})$
  - $g_{ij} \Rightarrow g_{i\bar{k}\bar{l}} = \bar{z}^k (\bar{\chi}_k)_{i\bar{k}\bar{l}} = g_{ij} G^{j\bar{m}} \Omega_{\bar{m}\bar{k}\bar{l}} \in \mathscr{H}^{1,2}$
  - $b_{ij} \in \mathscr{H}^{2,0}$: $h^{2,0} = 0$.

- $g_{i\bar{j}}, b_{i\bar{j}}, \psi_{i,\bar{j}} \Rightarrow$ Kähler moduli カイラル超場 t^a $(a = 1, \cdots, h^{1,1})$
  - $g_{i\bar{j}}, b_{i\bar{j}} \in \mathscr{H}^{1,1} \Rightarrow ig_{i\bar{j}} + b_{i\bar{j}} = t^a \omega_a$

RR セクター　一方，ゲージセクターからの寄与はＩ型とＩＩ型で異なる．まず，IIA, IIB のいずれに対しても，CY コンパクト化により得られるモジュライ場に対する４次元理論は，$N = 2$ 超対称性をもつゲージ結合のない超重力理論 (ungauged sugra) となる．登場する massless の超組（超場）は以下の通りである：

- IIA 型理論

$$C_{[1]}(x, y) = C^0_{[1]}(x), \tag{3.2.35a}$$
$$C_{[3]}(x, y) = C^a_{[1]}(x)\omega_a(y) + \xi^K(x)\alpha_K(y) - \tilde{\xi}_K(x)\beta^K(y). \tag{3.2.35b}$$

gravity multiplet	1	$(g_{\mu\nu}, C^0_1)$
vector multiplets	$h^{(1,1)}$	(C^a_1, v^a, b^a)
hypermultiplets	$h^{(2,1)}$	$(z^k, \xi^k, \tilde{\xi}_k)$
tensor multiplet	1	$(B_2, \phi, \xi^0, \tilde{\xi}_0)$

表 3.2: Type IIA moduli arranged in $\mathscr{N} = 2$ multiplets.

  - 重力超組：$(g_{\mu\nu}, \psi_\mu^{(+)}, \psi_\mu^{(-)}, C^0_{[1]})$
  - ベクトル超組 (Kahler モジュライ)：$(C^a_{[1]}, \psi^{a(-)}, \psi^{a(+)}, t^a = b^a + iv^a)$ $(a = 1, \cdots, h^{1,1})$
  - ハイパー超組 (複素モジュライ):$(\psi^{k(+)}, z^k, \psi^{k(-)}, \xi^k + i\tilde{\xi}_k)$ $(k = 1, \cdots, h^{2,1})$
  - テンソル超組：$(\lambda^{(-)}, \phi + ia, \lambda^{(+)}, \xi^0 + i\tilde{\xi}_0)$ $(*db = da)$

- IIB 型理論

$$
\begin{aligned}
C_{[0]}(x,y) &= C_{[0]}(x), && (3.2.36a)\\
C_{[2]}(x,y) &= C_{[2]}(x) + c^a(x)\omega_a(y), && (3.2.36b)\\
C_{[4]}(x,y) &= V^K_{[1]}(x)\alpha_K(y) + \rho_a(x)\tilde{\omega}^a(y). && (3.2.36c)
\end{aligned}
$$

gravity multiplet	1	$(g_{\mu\nu}, V^0_1)$
vector multiplets	$h^{(2,1)}$	(V^k_1, z^k)
hypermultiplets	$h^{(1,1)}$	(v^a, b^a, c^a, ρ_a)
tensor multiplet	1	(B_2, C_2, ϕ, C_0)

表 3.3: Type IIB moduli arranged in $\mathscr{N}=2$ multiplets.

- 重力超組：$(g_{\mu\nu}, \psi^{(1)}_\mu, \psi^{(2)}_\mu, V^0_{[1]})$
- ベクトル超組 (複素モジュライ)：$(V^k_{[1]}, \psi^{k(2)}, \psi^{k(1)}, z^k)$ $(k=1,\cdots,h^{2,1})$
- ハイパー超組（Kahler モジュライ)：$(\psi^{a(1)}, t^a = b^a + iv^a, \psi^{a(2)}, c^a + i\rho^a)$ $(a=1,\cdots,h^{1,1})$
- テンソル超組：$(\lambda^{(1)}, \phi + ia, \lambda^{(2)}, C_0 + ic)$ $(*dC_2 = dc, *db = da)$

注　$N=2$ SUSY での massless 超組は

hypermultiplet: $\left(-\frac{1}{2}, 0^2, \frac{1}{2}\right)$

vector multiplet: $\left(-1, -\frac{1}{2}^2, 0\right) + \left(0, \frac{1}{2}^2, 1\right)$

supergravity multiplet: $\left(-2, -\frac{3}{2}^2, -1\right) + \left(1, \frac{3}{2}^2, 2\right)$

ゲージセクター　E_8 の随伴表現の $\mathrm{SU}(3)\times E_6$ に関する上記の分解に対応する $E_8\times E_8$ の随伴表現の $\mathrm{SU}(3)\times E_6\times E_8$ に関する分解を次のような添え字で表す：

$$
\begin{aligned}
& a : (\mathbf{1}, \mathbf{78}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{248}), && (3.2.37a)\\
& ix : (\mathbf{3}, \mathbf{27}, \mathbf{1}), \quad \bar{i}\bar{x} : (\mathbf{3}^*, \mathbf{27}^*, \mathbf{1}), \quad i\bar{j} : (\mathbf{8}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) && (3.2.37b)
\end{aligned}
$$

また，コンパクト化により

$$
\mathrm{SO}(9,1) \supset \mathrm{SO}(3,1)\times\mathrm{SO}(6) \qquad (3.2.38)
$$

に対応して，１０次元スピノールは

$$16 = (2,1) + (2^*,1) + (2,3) + (2,3^*) \tag{3.2.39}$$

と分解する．これより，ゲージセクターの摂動

$$\begin{aligned} &a_{M,X}\ (M=\mu,i,\bar{i};\ X=a,ix,\bar{i}\bar{x},i\bar{j}),\\ &\partial_\mu\partial^\mu a = -\mathscr{D}_p\mathscr{D}^p a;\quad \mathscr{D}_p = \nabla_p - i[A_p,*] \end{aligned}$$

のゼロモード

$$\mathscr{D}_p\mathscr{D}^p a = 0$$

は次のようになる：

- $a_{\mu,X},\chi \ \Rightarrow$ ゲージ超場
  - $a_{\mu,a}$: X_4 上の $E_6\times E_8$ ゲージ場
  - $a_{\mu,X}$ $(X \neq a)$: no massless mode
- $a_{i,X},\chi \ \Rightarrow$ カイラル超場
  - $a_{i,a}\in\mathscr{H}^{1,0}$: $h^{1,0}=0$
  - $a_{i,jx} \ \Rightarrow \ a_{\bar{i}\bar{l}\bar{m}x} = a_{i,jx}G^{j\bar{k}}\Omega_{\bar{k}\bar{l}\bar{m}}\in\mathscr{H}^{1,2}$: $h^{2,1}\ \times\mathbf{27}(E_6)$.
  - $a_{i,\bar{j}\bar{x}}\in\mathscr{H}^{1,1}$: $h^{1,1}\ \times\mathbf{27}^*(E_6)$.
  - $a_{i,j\bar{k}}\in H^1(\mathrm{End}\,T)$: $\dim(H^1(\mathrm{End}\,T))$ (E_6 singlet).
- $a_{\bar{i},\bar{X}} \ \Rightarrow \ a_{i,X}$ の複素共役

世代数　以上の質量ゼロモードの解析より，ゲージ場と結合する質量ゼロフェルミオンの世代数 $N_g = |N_{\mathbf{27}} - N_{\mathbf{27}^*}|$ は

$$N_g = |h^{2,1}-h^{1,1}| = \frac{1}{2}\chi(Y_6) \tag{3.2.40}$$

となる．

$$\begin{array}{ccccccc} & & & h^{3,3} & & & \\ & & h^{3,2} & & h^{2,3} & & \\ & h^{3,1} & & h^{2,2} & & h^{1,3} & \\ h^{3,0} & & h^{2,1} & & h^{1,2} & & h^{0,3} \\ & h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} & \\ & & h^{1,0} & & h^{0,1} & & \\ & & & h^{0,0} & & & \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\ 1 & & h^{2,1} & & h^{2,1} & & 1 \\ & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

§3.3 ヘテロ型理論のコンパクト化

3.3.1　超対称コンパクト化

要請

1. 4 次元的な Poincare 不変性
2. $N=1$ 超対称性
3. アノーマリー相殺条件： $dH_3 = \mathrm{Tr}\mathscr{R}\wedge\mathscr{R} - \mathrm{Tr}\mathscr{F}\wedge\mathscr{F} - [C]$ （C は H_3 の磁荷を持つ NS5 ブレーンが巻き付く CY の正則複素曲線）.
4. ゲージ群：$E_8\times E_8 \;\Rightarrow\;$ GUT ゲージ群 $\mathscr{H} = E_6, \mathrm{SO}(10)$ または $\mathrm{SU}(5) \;\Rightarrow\; \mathrm{SU}(3)\times\mathrm{SU}(2)_L\times\mathrm{U}(1)$
5. 3 世代のレプトンとクォーク: E_8-adjoint 10D fermions **248** $\Rightarrow$???
6. GUT Higgs: 10D gauge coupling $\Rightarrow$ 4D Yukawa 結合 $(3+2)$-splitting? (未達成)

3.3.2　オービフォールドコンパクト化

References

- Bailin D, Love A: Phys. Reports 315, 285 (1999)

  "Orbifol compactifications of string theory"
- M Fischer, M Ratz, J Torradoa, PKS Vaudrevange: jhep1301, 084 (2013)

  "Classification of symmetric toroidal orbifolds"
- SG Nibbelinka, Orestis Loukasa: arXiv: 1308.5145

  "MSSM-like models on $\mathbb{Z}_8$ toroidal orbifolds"

$G \times H$	Breaking Pattern: $\mathbf{248} \to$	Particle Spectrum
$\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{E}_6$	$(\mathbf{1}, \mathbf{78}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{27}) \oplus (\overline{\mathbf{3}}, \overline{\mathbf{27}}) \oplus (\mathbf{8}, \mathbf{1})$	$n_{27} = h^1(X, V)$ $n_{\overline{27}} = h^1(X, V^\star) = h^2(X, V)$ $n_1 = h^1(X, V \otimes V^\star)$
$\mathrm{SU}(4) \times \mathrm{SO}(10)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{45}) \oplus (\mathbf{4}, \mathbf{16}) \oplus (\overline{\mathbf{4}}, \overline{\mathbf{16}}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{10}) \oplus (\mathbf{15}, \mathbf{1})$	$n_{16} = h^1(X, V)$ $n_{\overline{16}} = h^1(X, V^\star) = h^2(X, V)$ $n_{10} = h^1(X, \wedge^2 V)$ $n_1 = h^1(X, V \otimes V^\star)$
$\mathrm{SU}(5) \times \mathrm{SU}(5)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{24}) \oplus (\mathbf{5}, \mathbf{10}) \oplus (\overline{\mathbf{5}}, \overline{\mathbf{10}}) \oplus (\mathbf{10}, \mathbf{5}) \oplus (\overline{\mathbf{10}}, \mathbf{5}) \oplus (\mathbf{24}, \mathbf{1})$	$n_{10} = h^1(X, V)$ $n_{\overline{10}} = h^1(X, V^\star) = h^2(V)$ $n_5 = h^1(X, \wedge^2 V^\star)$ $n_{\overline{5}} = h^1(X, \wedge^2 V)$ $n_1 = h^1(X, V \otimes V^\star)$

Table 1: A vector bundle V with structure group G can break the E_8 gauge group of the heterotic string into a GUT group H. The low-energy representation are found from the branching of the **248** adjoint of E_8 under $G \times H$ and the low-energy spectrum is obtained by computing the indicated bundle cohomology groups.

構成

1. Orbifold: $Y = \mathbb{R}^6/S$.　No flux + flat geometry $\Rightarrow$ C3

   data: $S = (\Lambda, v)$

   – Space group $S \ni (\theta^p, \sum_{\alpha=1}^6 n_\alpha e_\alpha)$ $(p, n_\alpha \in \mathbb{Z})$

   $$\theta = (e^{2\pi i v^1}, e^{2\pi i v^2}, e^{2\pi i v^3}) \in \mathrm{SU}(3)\ (\sum_i v^i = 0). \tag{3.3.1}$$

   – Lattice $\Lambda \cong \mathbb{Z}^6$ and point group $P \in \mathbb{Z}_N$: $0 \to \Lambda \to S \to P \to 1$

   – Twist vector $v = (0, v^1, v^2, v^3)$.

2. WS boundary condition

   data: $g \in S$, $q \in \Lambda_{\mathrm{SO}(8)}$, $NV, N_\alpha W_\alpha, p \in \Lambda_{E_8 \times E_8}$

   – X^μ $(\mu = 1, \cdots, 8)$ (Lightcone gauge)

   $$X(\tau, \sigma + 2\pi) = g \circ X(\tau, \sigma); \quad g = (\theta^k, \sum_\alpha m_\alpha e_\alpha). \tag{3.3.2}$$

– Right moving WS fermion:$\psi_{\mathrm{R}}^{\mu}(\mu = 1, \cdots, 8) \Rightarrow H_R^i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ (bosonisation) $\Rightarrow$ SUSY (C2)

$$H_{\mathrm{R}}(\tau, \sigma + 2\pi) = g_{\circ} H_{\mathrm{R}}(\tau, \sigma) = H_{\mathrm{R}}(\tau, \sigma) + \pi q_{\mathrm{sh}}; \tag{3.3.3a}$$

$$q_{\mathrm{sh}} = q + v_g; \quad v_g = kv, \quad q = \mathrm{perm}(\pm 1, 0, 0, 0) \text{ or } (\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})(\text{even}) \tag{3.3.3b}$$

– Left moving 16 $X_L = (X^j) \Rightarrow$ Gauge sector (C4)

$$X_L(\tau, \sigma + 2\pi) = g_{\circ} X_L(\tau, \sigma) = X_L(\tau, \sigma) + \pi p_{\mathrm{sh}}, \tag{3.3.4a}$$

$$p_{\mathrm{sh}} = p + V_g; \quad V_g = kV + \sum_{\alpha} m_{\alpha} W_{\alpha} \tag{3.3.4b}$$

ここで，p は $E_8 \times E_8$ の 16 次元 root lattice $\Lambda_{E_8 \times E_8}$ のベクトル，W_α は discrete Wilson loop を表す 16 次元ベクトルで $N_\alpha W_\alpha \in \Lambda_{E_8 \times E_8}$，$V$ はゲージシフトと呼ばれる 16 次元ベクトルで $NV \in \Lambda_{E_8 \times E_8}$.

3. Modular invariance $\Rightarrow$ consistency + anomaly free

$$N(V^2 - v^2) = \sum_{\alpha} N_\alpha W_\alpha^2 = 0 \mod 2, \tag{3.3.5a}$$

$$N_\alpha W_\alpha \cdot V = \gcd(N_\alpha, N_\beta) W_\alpha W_\beta = 0 \mod 2, \alpha \neq \beta, \text{ no sum} \tag{3.3.5b}$$

4. Mass spectrum

$$\frac{1}{8} M_L^2 = \frac{p\mathrm{sh}^2}{2} + N_L - 1 + \delta\tilde{c}_g, \tag{3.3.6a}$$

$$\frac{1}{8} M_R^2 = \frac{q\mathrm{sh}^2}{2} + N_R - \frac{1}{2} + \delta\tilde{c}_g \tag{3.3.6b}$$

ここで，

$$\tilde{v}_g = v_g \text{ (mod1)}, 0 \leqslant \tilde{v}_g < 1 \Rightarrow \delta\tilde{c}_g = \frac{1}{2} \sum_i \tilde{v}_g^i (1 - \tilde{v}_g^i). \tag{3.3.7}$$

5. Orbifold projection of states: g と可換な $h \in S$ に対してスペクトルが不変なことより，

$$p_{\mathrm{sh}} \cdot V_h - R \cdot v_h = \frac{1}{2}(V_g \cdot V_h - v_g \cdot v_h) \text{ mod1}, \tag{3.3.8}$$

$$R^i \equiv q_{\mathrm{sh}}^i - N_L^i + N_L^{\bar{i}}. \tag{3.3.9}$$

3.3.3　CY コンパクト化

References

- Anderson LB, He, Y-.H. Lukas, A: jhep0707, 049 (2007)

  ”Heterotic compactification, an algorithmic approach”

１と２の帰結

1. Torsion の補正を摂動的に扱うとき，最低次で直積型コンパクト化：

$$ds^2 = ds^2(M_4) + ds^2(X_6) \tag{3.3.10a}$$

$$d\phi = 0 \tag{3.3.10b}$$

X_6 は Calabi-Yau 多様体: 複素構造 J, Ricci flat Kahler 計量 $g_{\alpha\bar{\beta}}$

2. 背景ゲージ場 $\mathscr{F} \in \mathscr{G} = \mathrm{SU}(3), \mathrm{SU}(4), \mathrm{SU}(5)$:

$$F_{\alpha\beta} = F_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0, \quad g^{\alpha\bar{\beta}} F_{\alpha\bar{\beta}} = 0. \tag{3.3.11}$$

正則 (poly) 安定バンドルに対して，このようなゲージ接続が一意的に存在．[Donaldson SK (1985); Uhlenbeck K, Yau ST (1986)]

以上より，コンパクト化モデルを構成するには，CY 多様体とその上の正則安定バンドルの組 (Y, V) を与え，それが要請 3 〜 5 を満たすかどうか確かめることになる．

【**Definition 3.3.1** (安定正則ベクトルバンドル)】　Kahler 多様体 (X, J, ω) 上の正則ベクトルバンドル V に対して，その**傾き** (slope)$\mu(V)$ を次式で定義する：

$$\mu(V) = \frac{1}{\mathrm{rank}(V)} \int_X c_1(V) \wedge \omega \wedge \omega. \tag{3.3.12}$$

$\mathrm{rank}(\mathscr{F}) < \mathrm{rank}(V)$ となる $\mathscr{O}(V)$ の任意の連接部分層 $\mathscr{F}$ に対して $\mu(\mathscr{F}) < \mu(V)$（$\mu(\mathscr{F}) \leqslant \mu(V)$）が成り立つとき，$V$ は Munford-竹本の意味で**安定** (stable)（**半安定** semi-stable）であるという．さらに，V が同じスロープをもつベクトルバンドルの直和となるとき（これは一般に半安定），**多重安定** (poly-stable) であるという． □

３の帰結

1. $c_1(V) = c_1(\tilde{V}) = 0$ のとき，要請 3 は

$$c_2(X) - c_2(V) - c_2(\tilde{V}) = W = [C] \tag{3.3.13}$$

2. W が 5-brane を決める正則曲線 C に対応するためには，W は $H_2(X, \mathbb{Z})$ の有効な元でないといけない．

４の帰結

1. $\mathscr{G} = \mathrm{SU}(n)(n = 3, 4, 5)$ とすると，$c_1(V) = 0$.

2. $c_1(V) = 0$ なら，

$$H^0(X, \wedge^q V) = 0, \ q = 1, \cdots, \mathrm{rank}(V) - 1. \tag{3.3.14}$$

5 の帰結

1. GUT 群を SM 群に落とすためには，$\pi_1(X) = G \neq 0$ が必要で，一般には単連結な CY $\tilde{X}$ から離散変換群 G を用いて $X = \tilde{X}/G$ としないといけない．これは，$\chi(X)$ が $|G|$ の倍数であることを要求する．

2. V の指数 $\mathrm{ind}(V)$ を

$$\mathrm{ind}(V) := h^0(X,V) - h^1(X,V) + h^2(X,V) - h^3(X,V) \tag{3.3.15}$$

により定義すると，安定バンドルに対して，

$$\mathrm{ind}(V) = -h^1(X,V) + h^2(X,V). \tag{3.3.16}$$

これは，フレーバーの数と一致し，Atiyah-Singer の指数定理より，

$$-N_f|G| = \mathrm{ind}(V) = \frac{1}{2}\int_X c_3(V). \tag{3.3.17}$$

3. $H^0(X, \wedge^2 V) = H^0(X, \wedge^2 V^*) = 0$ と $\wedge V^2$ に対する指数定理より，

$$(n-4)\mathrm{ind}(V) = -h^1(X, \wedge^2 V) + h^2(X, \wedge^2 V). \tag{3.3.18}$$

これは，$H = \mathrm{SU}(5)(n = 5)$ のとき，$\mathbf{10}$ と $\bar{\mathbf{5}}$ が同じファミリー数をもつことを保証する ($h^1(V) = n_{10}, h^2(V) = h^1(V^*) = n_{\overline{10}}, h^1(\wedge^2 V) = n_5, h^2(\wedge^2 V) = h^2(\wedge^2 V^*) = n_5$).

3.3.4　問題点

- 強結合問題; CY のサイズが GUT スケールとなるとすると，$e^\phi \gg 1$ が要求され，摂動論的定式化が使えなくなる．
- 一般に有効なモジュライ安定化機構が存在しない．
- SM 群を得るには，Wilson loop が必要で，CY が離散対称性を持つことを要求する．この位相的制限のチェックは非常に難しい．

強結合問題

弱結合 HetSST　10 次元での有効相互作用は

$$S_{10} = \int d^{10}x\sqrt{-g}e^{-2\phi}\left(\frac{4}{(\alpha')^4}R - \frac{1}{(\alpha')^3}\mathrm{tr}F^2 + \cdots\right). \tag{3.3.19}$$

4 次元に CY コンパクト化すると，CY の体積を V として，

$$S_4 = \int d^4x\sqrt{-g}e^{-2\phi}V\left(\frac{4}{(\alpha')^4}R - \frac{1}{(\alpha')^3}\mathrm{tr}F^2 + \cdots\right) \tag{3.3.20}$$

よって，

$$G_N = \frac{e^{2\phi}(\alpha')^4}{64\pi V}, \quad \alpha_{\mathrm{GUT}} = \frac{e^{2\phi}(\alpha')^3}{16\pi V}. \tag{3.3.21}$$

よって，

$$G_N = \alpha_{\mathrm{GUT}}\frac{\alpha'}{4}. \tag{3.3.22}$$

弱結合 $e^{2\phi} \lesssim 1$ を要請すると，

$$V \sim M_{\mathrm{GUT}}^{-6} \lesssim \frac{(\alpha')^3}{\alpha_{\mathrm{GUT}}} \;\Rightarrow\; G_N \gtrsim \frac{\alpha_{\mathrm{GUT}}^{4/3}}{M_{\mathrm{GUT}}^2} \simeq 10^4\left(\frac{\alpha_{\mathrm{GUT}}}{1/27}\right)^{4/3}\left(\frac{10^{16}\mathrm{GeV}}{M_{\mathrm{GUT}}}\right)^2\frac{1}{M_{\mathrm{pl}}^2}. \tag{3.3.23}$$

弱結合タイプ I SO(32) **SST**　10 次元有効作用は

$$S_{10} = \int d^{10}x\sqrt{-g_I}\left(e^{-2\phi_I}\frac{4}{(\alpha')^4}R_I - e^{-\phi_I}\frac{1}{(\alpha')^3}\mathrm{tr}F^2 + \cdots\right). \tag{3.3.24}$$

4 次元に CY コンパクト化すると，CY の体積を V_I として，

$$S_4 = \int d^4x\sqrt{-g_I}V\left(\frac{4e^{-2\phi_I}}{(\alpha')^4}R_I - \frac{e^{-\phi_I}}{(\alpha')^3}\mathrm{tr}F^2 + \cdots\right) \tag{3.3.25}$$

よって，

$$G_N = \frac{e^{2\phi_I}(\alpha')^4}{64\pi V_I}, \quad \alpha_{\mathrm{GUT}} = \frac{e^{\phi_I}(\alpha')^3}{16\pi V_I}. \tag{3.3.26}$$

よって，

$$G_N = e^{\phi_I}\alpha_{\mathrm{GUT}}\frac{\alpha'}{4}. \tag{3.3.27}$$

このタイプ I SO(3) SST は次の対応により Het SO(3) SST と双対：

$$g_I = e^{-\phi_h}g_h, \quad \phi_I = -\phi_h, \tag{3.3.28a}$$

$$F_{I3} = H_{h3}, \quad A_{I1} = A_{h1}. \tag{3.3.28b}$$

Heterotic M　11 次元有効作用は

$$S_{11} = \frac{1}{2\kappa^2}\int_{M^{11}} d^{11}x\sqrt{-g}R - \sum_i \frac{1}{8\pi(4\pi\kappa^2)^{2/3}}\int_{M_i^{10}} d^{10}x\sqrt{-g}\mathrm{tr}F_i^2. \tag{3.3.29}$$

これより，$S^1/\mathbb{Z}_2 \times \mathrm{CY}$ により 4 次元にコンパクト化すると，S^1 の長さを $2\pi\rho$ として，

$$G_N = \frac{\kappa^2}{16\pi^2 V\rho}, \quad \alpha_{\mathrm{GUT}} = \frac{(4\pi\kappa^2)^{2/3}}{2V}. \tag{3.3.30}$$

よって，

$$4\pi\kappa^2 \approx \frac{\alpha_{\mathrm{GUT}}^{3/2}}{M_{\mathrm{GUT}}^9} \;\Rightarrow\; G_N \approx \frac{\alpha_{\mathrm{GUT}}^{3/2}}{23\pi^3\rho M_{\mathrm{GUT}}^2}. \tag{3.3.31}$$

§3.4
D ブレーンが生み出す場

3.4.1　単 D ブレーン

Dirichlet 境界条件 $X(\sigma=0,t)=X(\sigma=\pi,t)=0$ を課すと，X のモード展開は

$$X = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{z^n}-\frac{1}{\bar{z}^n}\right)\alpha_n, \tag{3.4.1a}$$

$$\alpha_n^\dagger = \alpha_{-n}, \tag{3.4.1b}$$

$$[\alpha_n,\alpha_m] = n\delta_{n,-m}. \tag{3.4.1c}$$

Neumann 境界条件との違いは，重心運動部分がないことと，$\bar{\partial}X$ の符号が反対となっていることのみ．Virasoro 演算子の α_n による表現は同じで，したがって a^X の値も同じ．

WS スピノールについては，境界条件が Neumann string の場合と同じなので，すべて標準的な場合と一致．

3.4.2　交差 D ブレーン

References

- Berkooz M，Douglas MR，Leigh RG: NPB 480: 265 (1996)“ Branes intersecting at angles ”

1．２次元での交差

$p+2$ 次元時空に含まれる 2 枚の Dp ブレーン D_1, D_2 が p 次元線形空間 $\mathscr{L}$ で交わるとし，その直交補空間を (x^1,x^2) とする．この補空間内での D_1 ブレーンの配位を $x^2=0$ とし，D_2 は原点で D_1 と角度 $\phi\pi(|\phi|\leqslant 1/2)$ で交わるとする．このとき，D_1 と D_2 を結ぶ開弦の配位を複素座標

$$Z(\sigma,t) = X^1(\sigma,t)+iX^2(\sigma,t), \tag{3.4.2a}$$

$$\Psi(\sigma,t) = \psi^1(\sigma,t)+i\psi^2(\sigma,t),\quad \tilde{\Psi}(\sigma,t) = \tilde{\psi}^1(\sigma,t)+i\tilde{\psi}^2(\sigma,t) \tag{3.4.2b}$$

で表すと，開弦の境界条件は

$$\sigma = 0 \quad : \quad \mathrm{Re}\,\partial_\sigma Z = 0, \quad \mathrm{Im}\,Z = 0, \quad \tilde{\Psi} = \Psi, \tag{3.4.3a}$$
$$\sigma = \pi \quad : \quad \mathrm{Re}\,e^{-i\phi\pi}\partial_\sigma Z = 0, \quad \mathrm{Im}\,e^{-i\phi\pi} Z = 0, \quad \tilde{\Psi} = e^{-2i(\phi+\nu)\pi} \tag{3.4.3b}$$

で与えられる ($\nu = 0$(R), $\nu = 1/2$(NS)).

この節では $\alpha' = 2$ とおくと，開弦の作用積分は

$$S = -\frac{1}{2\pi}\int dt \int_0^\pi d\sigma \left(\partial_u Z \partial_{\tilde{u}} \bar{Z} + i\Psi\partial_{\tilde{u}}\bar{\Psi} - i\bar{\tilde{\Psi}}\partial_u\tilde{\Psi} \right). \tag{3.4.4}$$

ただし，

$$u = \sigma - t, \quad \tilde{u} = \sigma + t \tag{3.4.5}$$

運動方程式は

$$\partial_u \partial_{\tilde{u}} Z = 0, \tag{3.4.6a}$$
$$\partial_{\tilde{u}}\Psi = 0, \quad \partial_u \tilde{\Psi} = 0. \tag{3.4.6b}$$

A. 開弦の Z に対する一般解

$$Z = \sum_{r-\phi\in\mathbb{Z}} \frac{i}{r}\left(\alpha_r e^{iru} - \alpha_r^* e^{ir\tilde{u}} \right). \tag{3.4.7}$$

生準交換関係より，

$$[\alpha_r, \alpha_s] = 0, \quad [\alpha_r, \alpha_s^\dagger] = 2r\delta_{r,s} \tag{3.4.8}$$

Virasoro 代数　T_{ab} は

$$T_{ab} = -\frac{1}{4}\left[\partial_a Z \partial_b \bar{Z} + \partial_b Z \partial_a \bar{Z} - (\partial Z \cdot \partial \bar{Z}) g_{ab} \right] \tag{3.4.9}$$

なので，

$$T_{uu} = -\frac{1}{2}\partial_u Z \partial_u \bar{Z}, \quad T_{\tilde{u}\tilde{u}} = -\frac{1}{2}\partial_{\tilde{u}} Z \partial_{\tilde{u}} \bar{Z}. \tag{3.4.10}$$

$\partial_u Z$ の定義域 $0 \leqslant \sigma \leqslant \pi$ を

$$\partial_u Z(\sigma, t) = -e^{2\pi i\phi}(\partial_{\tilde{u}} Z(2\pi - \sigma, t))^\dagger \tag{3.4.11}$$

により $0 \leqslant \sigma \leqslant 2\pi$ に拡張すると，

$$L_m = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma e^{-imu} T_{uu} \tag{3.4.12}$$

より，

$$L_m = \frac{1}{2}\sum_r \alpha_r \alpha^\dagger_{r-m} \quad (m \neq 0, \tag{3.4.13a}$$

$$L_0 = \frac{1}{2}\sum_{r>0} \alpha^\dagger_r \alpha_r + \frac{1}{2}\sum_{r<0} \alpha_r \alpha^\dagger_r + a_Z. \tag{3.4.13b}$$

ここで，$r-\phi \in \mathbb{Z}$. 交換関係を計算すると, $|\phi| \leqslant 1/2$ として，

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}, \quad n+m \neq 0, \tag{3.4.14a}$$

$$[L_m, L_{-m}] = 2m(L_0 - a_Z) + \frac{m}{6}(m^2-1) - m|\phi|(|\phi|-1). \tag{3.4.14b}$$

よって，

$$a_Z = \frac{1}{2}|\phi|(1-|\phi|), \quad c = 2. \tag{3.4.15}$$

B. WS スピノール　WS スピノール Ψ に対しても同様で，一般解は

$$\Psi = \sum_{r-(\nu+\phi)\in\mathbb{Z}} \psi_r e^{iru}, \quad \tilde{\Psi} = \sum_{r-(\nu+\phi)\in\mathbb{Z}} \psi_r e^{-ir\tilde{u}}. \tag{3.4.16}$$

ただし，R セクターで $\nu = 0$，NS セクターで $\nu = 1/2$. 交換関係は,

$$\{\psi_r, \psi^\dagger_s\} = 2\delta_{r,s}, \quad \{\psi_r, \psi_s\} = 0. \tag{3.4.17}$$

Energy-momentum テンソルは

$$T_{uu} = \frac{i}{4}\left(\Psi\partial_u\Psi^\dagger - \partial_u\Psi\Psi^\dagger\right), \tag{3.4.18a}$$

$$T_{\tilde{u}\tilde{u}} = \frac{i}{4}\left(\tilde{\Psi}\partial_{\tilde{u}}\tilde{\Psi}^\dagger - \partial_{\tilde{u}}\tilde{\Psi}\tilde{\Psi}^\dagger\right). \tag{3.4.18b}$$

Ψ の定義域 $0 \leqslant \sigma \leqslant \pi$ を

$$\Psi(\sigma, t) = e^{2i(\nu+\phi)\pi}\tilde{\Psi}(2\pi - \sigma, t) \tag{3.4.19}$$

により $0 \leqslant \sigma \leqslant 2\pi$ に拡張すると，

$$L_m = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma e^{-imu} T_{uu} \tag{3.4.20}$$

より，Virasoro 生成子は

$$L_m = \frac{1}{4}\sum_r (2r-m)\psi^\dagger_{r-m}\psi_r \ (m \neq 0), \tag{3.4.21}$$

$$L_0 = \frac{1}{2}\sum_{r>0} r\psi^\dagger_r\psi_r + \frac{1}{2}\sum_{r<0} |r|\psi_r\psi^\dagger_r + a_\Psi. \tag{3.4.22}$$

交換関係

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}, \quad n+m \neq 0, \tag{3.4.23a}$$
$$[L_m, L_{-m}] = 2m(L_0 - a_\Psi) + \frac{m}{12}(m^2-1) + \frac{m}{4}(2|\phi| + 2\nu - 1)^2 \tag{3.4.23b}$$

より，

$$a_\Psi = \frac{1}{8}(2|\phi| + 2\nu - 1)^2. \tag{3.4.24}$$

一般的な交差ブレーン

10 次元において 2 組の D_p ブレーンが $p-k$ 次元時空で交わるとすると，2 次元的交差が k 個現れる．各 2 次元交差での角度を ϕ_i とすると，全系にタイスル a の値は

$$\begin{aligned}
\mathrm{NS}: a &= \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{24} - \frac{1}{48}\right)(10-2k) + \sum_i \left(\frac{1}{2}|\phi_i|(1-|\phi_i|) + \frac{\phi_i^2}{2}\right) - \frac{1}{2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^k |\phi|_i - 1}{2}, \qquad (3.4.25a) \\
\mathrm{R}: a &= \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{24} + \frac{1}{24}\right)(10-2k) + \sum_i \left(\frac{1}{2}|\phi_i|(1-|\phi_i|) + \frac{(2|\phi_i|-1)^2}{8}\right) - \frac{5}{8} \\
&= 0. \qquad (3.4.25b)
\end{aligned}$$

ここで，それぞれ，最初の部分は ((p-k)+(10-p-k)) 次元分の寄与，第 2 の部分は交差している 2k 次元部分の寄与，最後は ghost の寄与である．質量スペクトルは

NS:

$$\begin{aligned}
\frac{m^2}{m_0^2} &= \frac{\sum_j |\phi_j| - 1}{2} + \sum_{(n_l)} \sum_{l=1}^{8-2k} \left\{ n_l N_{n_l}^X + \left(n_l + \frac{1}{2}\right) N_{n_l}^\psi \right\} \\
&\quad + \sum_{j=1}^k \left\{ \sum_{r \in \phi_j + 1/2 + \mathbb{Z}} |r_j| N_{r_j}^\Psi + \sum_{r_j \in \phi_j + \mathbb{Z}} |r_j| N_{r_j}^Z \right\}. \qquad (3.4.26)
\end{aligned}$$

R:

$$\frac{m^2}{m_0^2} = 0 + \sum_{(n_l)} \sum_{l=1}^{8-2k} n_l (N_{n_l}^X + N_{n_l}^\psi) + \sum_{j=1}^k \sum_{r_j \in \phi_j + \mathbb{Z}} |r_j| (N_{r_j}^\Psi + N_{r_j}^Z) \tag{3.4.27}$$

以上より，基底状態近傍のモードは

$$\begin{aligned}
\mathrm{NS} &: -\frac{1 - \sum_j |\phi|_j}{2}(-),\ \frac{\sum_j |\phi|}{2}(+),\ |\phi_l| + \frac{\sum_j |\phi_j|}{2}(+), \cdots, \qquad (3.4.28a) \\
\mathrm{R} &: 0(\pm),\ |\phi_j|(\pm), \cdots \qquad (3.4.28b)
\end{aligned}$$

となる．ここで，() 内は $\exp(i\pi F)$ の符号で，R セクターでは複合は互いに独立となる．よって，R セクターの基底状態は常に massless で，GSO 射影を考慮すると，ψ_0^μ から生成される Clifford 代数の既約表現に従って変換する $p-k$ 次元上の $(10-2k)$ 次元カイラルスピノールとなる (μ はブレーンが交差する $2k$ 次元以外を動く）．また，$\sum_j |\phi_j| = 1$ ととれば，NS 基底状態が massless となり，$p-k$ 次元時空のスカラ場を与える．

【Question 3.4.1】　L_0 の適当な正則化により，(3.4.14b) と (3.4.23b) を計算で導出せよ． □

§3.5
IIA 型交差 D ブレーンモデル

References

- Blumenhagena R, Korsb B, Lusta D, Stieberger S: PLC445:1-193 (2007) ” Four-dimensional string compactifications with
- D-branes orientifolds and fluxes ”
- Cvetic M, Halverson J: arXiv:1101.2907, “ TASI Lectures: Particle Physics from Perturbative and Non-perturbative Effects in D-braneworlds ”

3.5.1　モデル構成の一般的流れ

1. CY (or orbifold) コンパクト化 $\Rightarrow$ $N = 2$ 超対称性をもつ 4D 超重力理論
2. 交差 D_p ブレーン系の導入 $\Rightarrow$ SUSY: $N = 2 \to N = 1$, chiral SM sector
3. Orientifolding : CY $\to$ CY orientifold $\Rightarrow$ RR tadpole 条件

   $\Omega\mathscr{R}$: Ω=WS parity, $\mathscr{R}$=$\mathbb{Z}_2$ anti-holomorphic involution
   $$\mathscr{R}J = -J, \quad \mathscr{R}\Omega_3 = \bar{\Omega}_3 \tag{3.5.1}$$
4. D ブレーン配位のチューニング $\Rightarrow$ SM or MSSM

【**Note 3.5.1**】

- IIA 理論の CY コンパクト化では，$H^1(\mathrm{CY}) = H^5(\mathrm{CY}) = 0$ より，D6 ブレーンのみが安定な配位を持ちうる．
- 2 組の交差 D6 ブレーンに対するストリングの質量スペクトルは
  $$M^2 = N_{\mathrm{osc}} + \frac{(r + r_\theta)^2}{2} - \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2}|\theta_i|(1 - |\theta_i|). \tag{3.5.2}$$
  ここで，$r_\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, 0)$ で，
  $$r \in \mathrm{SO}(8) - \mathrm{lattice} : r_i \in \mathbb{Z}(NS), \quad \mathbb{Z} + 1/2(R), \quad \sum_i r_i = \mathrm{odd}. \tag{3.5.3}$$
  例えば，$r = (-1/2, -1/2, -1/2, 1/2)$ は massless chiral fermion を，$r = (-1, 0, 0, 0)$ は 3 個のスカラを与える．

□

3.5.2　単純な例

- 内部空間：$Y_6 = T^2 \times T^2 \times T^2$
- D ブレーン： それぞれ $S^1 \times S^1 \times S^1$ に同相な D6$_a$, D6$_b$, D6$_c$ の3組．それぞれ3つの T^2 に巻き付く．巻き付き数は $(n_p^i, m_p^i)(p = a, b, c,\ i = 1, 2, 3)$.
- SUSY 条件：$\sum_i \theta_i = 0$ (表 3.4 の例ではすべてのブレーンペアについて OK)
- Orientifolding: $\mathscr{R}(X_i) = -X_i\ (i = 5, 7, 9) \ \Leftrightarrow\ m_p^i \to -m_p^i$
  - $\mathscr{R}$: D6 → D6 ⇒ Sp(N) or O(N)
  - $\mathscr{R}$; D6 → D6* ≠ D6 ⇒ U(N).

  例えば，表 3.4 の例では，全ゲージ群は SU(3) × SU(2)$_L$ × SU(2)$_R$ × U(1):

  - D6$_a$: U(3) × U(1)
  - D6$_b$: U(2) ⇒ Sp(1) = SU(2)
  - D6$_c$: U(2) ⇒ Sp(1) = SU(2)
- カイラスフェルミオン：D6$_p$ と D6$_q$ の交差により生じるカイラルフェルミオンの数は，交差数

$$I_{pq} = I_{pq}^1 \times I_{pq}^2 \times I_{pq}^3; \quad I_{pq}^i = n_p^i m_q^i - n_q^i m_p^i. \tag{3.5.4}$$

  例えば，表 3.4 の例では，

$$I_{ab} = 3 \ \Rightarrow\ q_L\ (\mathrm{U}(3) \times \mathrm{SU}(2)_L), \quad l_L\ (\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2)_L)$$
$$I_{ac} = -3 \ \Rightarrow\ q_R\ (\mathrm{U}(3) \times \mathrm{SU}(2)_R), \quad l_R\ (\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2)_R)$$
$$I_{bc} = 0 \ \Rightarrow\ \text{non-chiral 5D SYM } G = \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{SU}(2)_R \ \Rightarrow\ \text{4D Higgs} + \cdots$$

- Tadpole 条件

$$\sum_p N_p n_p^1 n_p^2 n_p^3 = 16, \tag{3.5.5a}$$
$$\sum_p N_p n_p^1 m_p^2 m_p^3 = 0,\ \text{permutations.} \tag{3.5.5b}$$

  この条件は，表 3.4 の例では満たされていない．

Multipliciy N_p	(n^1, m^1)	(n^2, m^2)	(n^3, m^3)	Gauge group
$N_a = 3 + 1$	$(1, 0)$	$(3, 1)$	$(3, -1)$	$\mathrm{U}(3) \times \mathrm{U}(1)$
$N_b = 2$	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(0, -1)$	$\mathrm{Sp}(1) = \mathrm{SU}(2)$
$N_c = 2$	$(0, 1)$	$(0, -1)$	$(1, 0)$	$\mathrm{Sp}(1) = \mathrm{SU}(2)$

表 3.4: IIA のトーラスコンパクト化でゲージ群が $\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{SU}(2)_R \times \mathrm{U}(1)$ の低エネルギー理論を与えるブレーン配置

Chiral Anomaly

- RR tadpole 条件が満たされれば，非可換ゲージ場に対するアノーマリー係数のうち非可換ゲージ場のみが関与する部分はゼロとなることが示される [2].
- 一方，U(1) は一般にカイラルアノーマリーをもし，$\mathscr{U}(1)$ どうしおよび U(1) と非可換ゲージ場の混合アノーマリー係数はゼロとならない．しかし，これらに対しては RR フォーム場をアクシオンとして一般化された Green-Schwarz 機構が働き，対応する U(1) ゲージ場は Stückelberg 機構によりゲージ不変性を保って質量を獲得し，大域的な対称性へと変化することが示される [2, 12].
- ただし，多くの場合，一個の U(1) はアノーマリーフリーにでき，$\mathrm{U}(1)_Y$ を与える．

References

- Cvetic M, Halverson J: arXiv:1101.2907, “ TASI Lectures: Particle Physics from Perturbative and Non-perturbative Effects in D-braneworlds ”

3.5.3　問題点

- Tadpole 問題は，ブレーンを増やし内部空間をオービフォールド化（$T^6/\Gamma \gg$ することにより解決できるが，この場合，しばしば余分な chiral multiplet が現れる．
- T^6/Γ コンパクト化では，massless スペクトルに G_{SM}-adjoint chiral multiplet が含まれる．ただし，一般の CY コンパクト化ではこのようなモードは現れない．
- Anomalous U(1) に起源をもつ大域的な U(1) 対称性のため，t quark の質量がゼロとなってしまう．
- 超対称性の要請より，D6 ブレーンの巻きつく 3-サイクルは，special Lagrangian 部分多様体でないといけないが，speical Lagrangian 部分多様体を見つける組織的な方法はなく，技術的な障害となる．

【**Note 3.5.2** (Special Lagrangian submanifold)】

- Calibration

  1. 多様体 M の閉 p-形式 ϕ が条件 $\|\phi(x)\| \equiv 1$ を満たすとき，calibration と呼ぶ．ここで，
  $$\|\phi(x)\| \equiv \sup\{\langle\phi(x), v_1 \wedge \cdots \wedge v_p\rangle \mid v_1, \cdots, v_p \text{ は } T_xM \text{ の正規直交基底}\} \tag{3.5.6}$$
  2. 任意のコンパクト p 次元部分多様体 Y に対し，$\int_Y \phi \leqslant \mathrm{Vol}(Y)$.
  3. コンパクト p 次元部分多様体 Y が条件 $\phi|_Y = \mathrm{vol}_Y$ を満たすとき，calibrated submanifold であるという．
  4. Y が p 次元 calibraed submanifold なら，任意の p 次元部分多様体 N に対して，
  $$[M] = [Y] \;\Rightarrow\; \mathrm{Vol}(Y) \leqslant \mathrm{Vol}(N) \tag{3.5.7}$$

- 例

  1. Kähler 形式 ω は calibration.
  2. 複素 n 次元 CY (X, Ω, ω) に対して，$\mathrm{Re}\,(\Omega)$ と $\mathrm{Im}\,(\Omega)$ はキャリブレーション．このとき，$\mathrm{Re}\,(\Omega)$ に関して calibrated submanifold Σ を special Lagrangian submanifold という．このような Σ に対し，$\mathrm{Im}\,(\Omega)|_\Sigma = 0$ で，Σ は ω に関して Lagrangian submanifold となる．すなわち，$T_p\Sigma$ の ω に関する直交補空間が $T_p\Sigma$ と一致する．Special Lagrangian submanifold のモジュライ空間は，局所的に $H^1(\Sigma)$ の開集合と対応する．

□

---

§3.6
*IIB 型磁化 D7 ブレーンモデル

4 *Axiverse

§4.1 Axion

4.1.1 アクシオンの作用積分の一般的構造

アクシオンの定義 カイラルなシフト対称性ないし U(1) 対称性の自発的破れに伴う（擬）Nambu-Goldstone ボゾン/場をアクシオンと呼ぶ.

アクシオン崩壊定数 対応するカイラル変換を $\exp(i\lambda Q_5)$ と表すとき，アクシオン場 ϕ は次のように変換する：

$$\phi \to \phi + \lambda f_a, \tag{4.1.1}$$

ここで，f_a は**アクシオン崩壊定数** (axion decay constant) と呼ばれ，近似的カイラル SU(2) 対称性の自発的破れに伴う擬 NG ボソンであるパイ中間子の崩壊定数 f_π と対応する．f_a の規格化は，λ の周期が 2π のとき，アクシオンの運動項が標準形 $-(e/2)(\nabla\phi)^2$ $(e = \sqrt{-g})$ となるという条件で決まる．

作用積分の構造 一般に，カイラル変換はスピノール場 Ψ に対して，

$$\Psi \mapsto e^{i\lambda t\gamma_5}\Psi, \tag{4.1.2}$$

と作用する．ここで，t はエルミート行列である $(Q_5 = t\gamma_5)$．この変換を λ が時空座標の関数である場合に拡張すると，作用積分のスピノール場を含む項のうち，$\partial_\mu\Psi$ を含む部分のみが

$$-i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu\Psi \mapsto -i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu\Psi - i\bar{\Psi}\gamma^\mu\left(i\partial_\mu\lambda t\gamma_5\right)\Psi. \tag{4.1.3}$$

と変化する．よって，元の Lagrangian が Ψ の 1 階微分までしか含まないとき，$\lambda = -\phi/f_a$ に対応する変換を行うと，この微分項からの寄与を除いて ϕ は Ψ を含む項から姿を消し，作用積分は

$$e^{-1}\mathscr{L}_{\phi,0} = -\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{f_a}\partial_\mu\phi\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5 t\Psi, \tag{4.1.4}$$

となる．

アノーマリー　量子論では，古典的作用積分 (4.1.4) にカイラルアノーマリーに起因する補正が加わる．量子論では正則化により，有効 Lagrangian は大域的カイラル変換に対し次のように変換する [9, 1]

$$e^{-1}\delta\mathscr{L}_{\text{eff}} = \lambda\mathscr{P}; \quad \mathscr{P} = \sum_{a,b}\mathrm{Tr}(tt_at_b)\frac{1}{16\pi^2}F^a\cdot\tilde{F}^b \equiv \sum_{a,b}\mathrm{Tr}(tt_at_b)\frac{1}{64\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}F^a_{\mu\nu}F^b_{\lambda\sigma}, \tag{4.1.5}$$

ここで，ゲージポテンシャル $A^a = A^a_\mu dx^\mu$ は，フェルミ場への結合と Lagragian での運動項が次の形になるよう規格化されているものとする:

$$D_\mu\Psi = \left(\partial_\mu - iA^a_\mu t_a\right)\Psi, \tag{4.1.6a}$$

$$e^{-1}\mathscr{L}_A = -\sum_a\frac{1}{2g_a^2}F^a\cdot F^a; \quad F^a = dA^a - \frac{i}{2}f^a_{bc}A^b\wedge A^c. \tag{4.1.6b}$$

ただし，a はゲージ場のすべての成分を走るものとする．したがって，a, b が同じゲージ群に対するゲージ場の成分を表すとき，$g_a = g_b$ となる．

この変換を局所化し $\lambda = \lambda(x)$ とすると, 有効 Lagrangian は次のように変化する :

$$e^{-1}\delta\mathscr{L}_{\text{eff}} = J^\mu_5\partial_\mu\lambda + \lambda\mathscr{P}, \tag{4.1.7}$$

ここで，J^μ_5 はカイラル変換 $e^{i\lambda t\gamma_5}$ に対するカレントである．分配関数 Z に対する経路積分による表示では，この局所変換は単に経路積分変数の変数変換なので Z に影響しない [37]:

$$Z = \int[d\Psi d\bar{\Psi}\cdots]e^{iS} = \int[d\Psi' d\bar{\Psi}'\cdots]e^{iS'} = \int[d\Psi d\bar{\Psi}\cdots]e^{i(S+\delta S)}. \tag{4.1.8}$$

これより次式を得る :

$$\langle\nabla_\mu J^\mu_5\rangle = \mathscr{P} \tag{4.1.9}$$

Chern-Simons 結合　Lagrangian(4.1.4) に付加項 $(\phi/f_a)\mathscr{P}$ を加えることにより，この保存則の変更と場の方程式を tree level で整合的となる．したがって,（多成分）アクシオンに対する一般的な有効 Lagrangian は次式で与えられることになる :

$$\begin{aligned} e^{-1}\mathscr{L}_a &= -\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta}\nabla\phi_\alpha\cdot\nabla\phi_\beta + \sum_\alpha\frac{1}{f_\alpha}\partial_\mu\phi_\alpha(\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5 t_\alpha\Psi) \\ &\quad + \sum_\alpha\frac{\phi_\alpha}{f_\alpha}\left(\sum_{a,b}\frac{\xi^\alpha_{ab}}{16\pi^2}F^a\cdot\tilde{F}^b + \frac{\mathrm{Tr}(t_\alpha)}{568\pi^2}R_{\mu\nu\lambda\sigma}\tilde{R}^{\mu\nu\lambda\sigma}\right), \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

ここで，t_α はカイラル変換 $e^{i\lambda^\alpha t_\alpha \gamma_5}$ を定義する行列，ϕ_α はそれに対するアクシオンで

$$\xi^\alpha_{ab} = \mathrm{Tr}(t_\alpha t_a t_b) \tag{4.1.11}$$

一般に，t_α がゲージ変換と可換なら，$\mathrm{Tr}(U^{-1} t_\alpha t_a t_b U) = \mathrm{Tr}(t_\alpha t_a t_b)$ より，a, b がともに U(1) か同じ非可換ゲージ群に属する場合のみ $\xi^\alpha_{ab} \neq 0$ となる．ただし，t_α がゲージ不変でないときには，このルールは成りたたない．例えば，標準模型で π_0 は (u, d) クォークの近似的カイラル SU(2) に対する NG ボゾンで，対応する変換行列 τ_3 は $\mathrm{U}(1)_Y \times \mathrm{SU}(2)_L$ の σ_3 と一致するので，$\xi(\pi^0, B, A^3) = \mathrm{tr}(\tau_3 Y \sigma_3) \neq 0$ となる．このため，CS 結合 $\pi_0 F \wedge F, \pi_0 dZ \wedge dZ$ が生じる．

【Question 4.1.1】　素粒子標準モデルでは，すべてのゲージアノーマリーがキャンセルすることを示せ．□

【Question 4.1.2】　$\pi^0 \to 2\gamma$ 崩壊は，pion を (u, d) クォークに対するカイラル SU(2) 変換の破れに付随する NG ボゾンと見たとき，カイラル変換 $\exp(i\tau_3\theta)$ に対するアノーマリーにより起きる．この $\pi^0 FF$ に対する $\xi_{3\gamma\gamma}$ の値を求めよ．□

4.1.2　アクシオンポテンシャル

摂動論的量子論のレベルでは，アクシオンの作用積分の構造は対応するカイラル変換の作用（カイラルカレント $J_{5(\alpha)}$ の構造と同等）で決まってしまい，その自由度はアクシオン崩壊定数とアクシオン運動項の係数計量 $K^{\alpha\beta}$ のみとなる．これらの結合定数は，アクシオン場にはよらないが，一般に他のスカラ場に依存し，もともとの理論のボゾンセクターの構造に敏感である．

このようにして得られる有効理論では，依然としてカイラス対称性は保たれており，アクシオンはポテンシャルを持たない．しかし，アクシオンと結合するゲージ場による非摂動効果を考慮するとカイラルシフト対称性は敗れ，アクシオンは非自明なポテンシャルを獲得する．このポテンシャルを計算する標準的な方法として 2 つのものが存在する．

1. インスタントン計算

CS 作用積分　アクシオン場 ϕ_α が一様なとき，$G = \mathrm{SU}(n)$ ゲージ場 $A = A^a t_a$ に対する CS 作用積分は，規格化 $\mathrm{Tr}(t_a t_b) = \delta_{ab}/2$ のもとで，

$$S_{CS} = \theta p_1; \quad p_1 = \int \frac{1}{8\pi^2} \mathrm{Tr}(F \wedge F), \tag{4.1.12}$$

で与えられる．この作用積分はゲージバンドルの第 1Pontrjagin 数 p_1 に比例する位相数となる．ここで，θ は定数 θ_0 とアクシオン場を用いて

$$\theta = \theta_0 + \sum_\alpha \frac{\xi^\alpha}{f_\alpha}\phi_\alpha; \quad \mathrm{Tr}(t_\alpha t_a t_b) = \xi^\alpha \delta_{ab}. \tag{4.1.13}$$

と表される．

インスタントン解　Lorentz 時空では p_1 が有限となる解はないが，時空を Euclid した理論では有限な p_1 を持つ古典解が存在し，インスタントン解と呼ばれる．一般に，4 次元では，インスタントン解は，$\pi_3(G)$ により分類される．このため，$\pi_3(\mathrm{U}(1)) = 0$ より，可換ゲージ場はアクシオンポテンシャルを生み出さない．一方，$\pi_3(\mathrm{SU}(n)) \cong \mathbb{Z}(n \geqslant 2)$ より，非可換ゲージ群 $\mathrm{SU}(n)$ に対応するゲージ場はインスタントン数と呼ばれる整数 $n \in \mathbb{Z}$ で分類されるインスタントン解をもつ．これらのインスタントン解の中で self-dual ないし anti-self-dual なものが与えられた n の下で最小の作用積分をもつ．特に，$\mathrm{SU}(2)$ に対する $n = \pm 1$ の SD インスタントン解は **BPST 解**と呼ばれ [8], 埋め込み $\mathrm{SU}(2) \subset \mathrm{SU}(n)$ により $G = \mathrm{SU}(n)$ に対する SD インスタントン解を与える．

アクシオンポテンシャル　BPST インスタントン解は，時空併進と dilation に対応するモジュライ自由度を持つので，その分配関数 Z への寄与は

$$Z_1 = \tilde{\Lambda}^5 \int d^4x \int dR e^{-S_E}, \tag{4.1.14}$$

とあらわされる．ここで，$\tilde{\Lambda}$ はある質量スケール． R はインスタントンサイズである．また，S_E は

$$S_E = \int d^4x \frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}(*F \wedge F) = \pm\frac{1}{g^2}\int d^4x \mathrm{Tr}(F \wedge F) = \frac{8\pi^2}{g^2}|p_1|. \tag{4.1.15}$$

一般のインスタントン解を，p 個の BPST 解と q 個の anti-BPST 解の重ね合わせにより近似すると（**dilute gas approximation**), $n = p - q$ より

$$Z_{\mathrm{inst}} = \sum_{p,q\geqslant 0} \frac{Z_1^p}{p!}\frac{Z_{-1}^q}{q!}e^{i(p-q)\theta} = \exp\left[\tilde{\Lambda}^5 \int d^4x \int dR e^{-8\pi^2/g^2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})\right]. \tag{4.1.16}$$

これは，インスタントンが非摂動論的ポテンシャル

$$V = -\Lambda^4 \cos\theta + \mathrm{const} = -\Lambda^4 \cos\left(\theta_0 + \sum_\alpha \xi^\alpha \phi_\alpha / f_\alpha\right) + \mathrm{const}, \tag{4.1.17}$$

を生み出すことを意味する．ここで，

$$\Lambda^4 = 2\tilde{\Lambda}^5 \int dR e^{-8\pi^2/g^2(1/R)}. \tag{4.1.18}$$

この表式より，$R \to \infty$ でゲージ場が強結合となると，大きなポテンシャルが生成されることが分かる．しかし，一般には，この強結合効果を計算するのは困難である．Color ゲージ場の場合には，次の方法によりその計算が可能で，Λ はパイ中間子の質量程度となる．

多成分の強結合ゲージ場が寄与する場合　2 成分以上の強結合ゲージ場がアクシオンと CS 結合する場合には，アクシオンポテンシャルは各ゲージ場からの寄与の和となる：

$$V = -\sum_A \Lambda_A^4 \cos\left(\theta_{A,0} + \sum_\alpha \xi_A^\alpha \phi_\alpha / f_\alpha\right) + \text{const.} \tag{4.1.19}$$

ここで，$\theta_{A,0}$ はフェルミ粒子の質量行列の CP 位相と各非可換ゲージ場の真空の θ 角の和である．個の一般の場合，もし独立なアクシオン場の数 N_a が関与する強結合場の数 N_s より少ないと，すべての cos の引数をゼロとできない．この場合，強結合セクターに CP の破れが残り，PQ 機構が機能しない．一方，$N_a \geqslant N_s$ の場合には，ポテンシャルの最小点で CP が回復する．ただし，$N_a > N_s$ なら，$N_a - N_s$ 個のアクシオンがゼロ質量となる．この問題は，弦理論起源の非摂動効果により回避される可能性がある [25, 61]．

アクシオン質量　アクシオンの質量は，$\theta_{A,0} = 0$ とおいて，V を ϕ_α について 2 次まで展開することにより得られる：

$$V_2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\left(\sum_A \Lambda_A^4 \xi_A^\alpha \xi_A^\beta\right)\frac{\phi_\alpha\phi_\beta}{f_\alpha f_\beta}. \tag{4.1.20}$$

この表式より，一般に，アクシオン質量は，最も大きな強結合スケール Λ とアクシオン崩壊定数 f_a を用いて

$$m_a \sim \frac{\Lambda^2}{f_a} \tag{4.1.21}$$

と表される．

2. カイラル有効理論により計算

この方法では，複合粒子である中間子を，アノーマリーを持たない近似的カイラル変換に対する擬 NG ボゾンとして記述する有効理論を用いる．ここでは，u, d クォークのみを含む QCD 系でのカイラルな SU(2) 対称性の場合を考える．

θ 位相の除去　まず，SU(3) ゲージ場に対する CS 項の θ 位相（アクシオンを含む）(4.1.13) を，カイラル変換 $(u, d) \to (e^{iy_u\theta\gamma_5}u, e^{iy_d\theta\gamma_5}d)(\ y_u + y_d = -1)$ により，クォーク質量行列に移動させる．すると，クォーク質量行列は

$$im_u\bar{u}u + im_d\bar{d}d \to im_u\bar{u}e^{2iy_u\theta\gamma_5}u + im_d\bar{d}e^{2iy_d\theta\gamma_5}d, \tag{4.1.22}$$

a と変化し，クォークの運動項は新たなクォーク・アクシオン結合

$$\partial_\mu\theta(y_u\bar{u}\gamma^\mu\gamma_5 u + y_d\bar{d}\gamma^\mu\gamma_5 d). \tag{4.1.23}$$

を生み出す.

カイラル縮退　強結合領域では，クォーク場の積が真空期待値を持ち，カイラル対称性が自発的に敗れる：

$$-i\langle\bar{u}u\rangle = -i\left\langle\bar{d}d\right\rangle = v_c\cos\left(2\pi^0/f_\pi\right), \tag{4.1.24a}$$

$$-i\langle\bar{u}\gamma_5 u\rangle = i\left\langle\bar{d}\gamma_5 d\right\rangle = -iv_c\sin\left(2\pi^0/f_\pi\right), \tag{4.1.24b}$$

$$\langle\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 u\rangle = -\left\langle\bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 d\right\rangle = \frac{1}{2}f_\pi\partial_\mu\pi^0, \tag{4.1.24c}$$

ここで，π^0 は中性パイ中間子場， f_π はパイ中間子崩壊定数である．これにより，クォーク質量項よりポテンシャルが生み出される：

$$V_{a\pi} = -v_c m_u\cos\left(y_u\theta - 2\pi^0/f_\pi\right) - v_c m_d\cos\left(y_d\theta + 2\pi^0/f_\pi\right), \tag{4.1.25}$$

さらに，アクシオンとフェルミ粒子の微分結合は，アクシオンと π^0 の混合

$$\frac{1}{2}\left\{\sum_\alpha\frac{\nabla_\mu\phi_\alpha}{f_\alpha}(z_u^\alpha - z_d^\alpha) + \nabla_\mu\theta(y_u - y_d)\right\}f_\pi\nabla^\mu\pi^0, \tag{4.1.26}$$

を生み出す．ここで，$t_\alpha u = z_u^\alpha u$，$t_\alpha d = z_d^\alpha d$ である.

アクシオン質量　アクシオンが 1 成分（QCD アクシオン）のみの場合，(y_u, y_d) の値は，$y_u + y_d = -1$ およびアクシオンーパイ中間子混合が消えるという要請から一意的に決まる．これにより，アクシオンとパイ中間子に対する標準的な質量公式を得る:

$$m_\pi^2 \simeq 4v_c\frac{m_u + m_d}{f_\pi^2}, \tag{4.1.27a}$$

$$m_a^2 \simeq v_c\frac{\xi^2}{f_a^2}\frac{m_u m_d}{m_u + m_d} \simeq \left(\frac{\xi f_\pi}{2f_a}\right)^2\frac{m_u m_d}{(m_u + m_d)^2}m_\pi^2, \tag{4.1.27b}$$

ここで，$f_a \gg f_\pi$（invisible axion condition) を仮定した.

なお，2 つ以上のアクシオンが SU(3) ゲージ場と結合するばい，y_u と y_d の選択で axion-pion 混合を消せない．代わりに，QCD アクシオン以外のアクシオンの定義を π^0 に比例した項だけずらすことにより取り除かれる．このため，axion-pion 混合はアクシオン質量に影響を与えない [24].

§4.2 String axions

概要　弦理論・M 理論では，現実的な 4 次元宇宙を与えるコンパクト化により多様なアクシオンが自然に生み出される [61, 4]. 超弦理論に本質的な要素として含まれる微分形式場がその起源となる [56].

4.2.1　ヘテロ型理論

Calabi-Yau コンパクト化　ヘテロ型理論を Calabi-Yau 3-fold Y と 4 次元時空 X の直積にコンパクト化すると, 2-形式場 B は 2 種類の X 上のアクシオン場を生み出す．直積型コンパクト化

$$ds^2(M_{10}) = ds^2(X_4) + ds^2(Y_6). \tag{4.2.1}$$

において， $\eta^i (i = 1, \cdots, b_2(Y))$ を $H_2(Y, \mathbb{Z})$ の基底に双対な Y 上の調和 2 形式の基底とする. このとき， B は

$$B = \ell_s^2 \sum_{i=1}^{b_2(Y)} \alpha_i(x)\eta^i + \beta(x), \tag{4.2.2}$$

と展開される．ここで，$\ell_s = 2\pi\sqrt{\alpha'}$，$\beta(x)$ は X_4 上の 2 形式. これを作用積分 S_B に代入して,

$$2\kappa_{10}^2 S_B = -\frac{V_Y}{2g_s^2}\int_{X_4} \Big[\sum Y^{ij} *d\alpha_i \wedge d\alpha_j + *h \wedge h + \frac{\theta}{\pi}\left\{dh - \ell_s^2(4\pi)^{-2}\left(\mathrm{Tr}(F\wedge F) - \mathrm{tr}(\mathscr{R}\wedge\mathscr{R})\right)\right\}\Big], \tag{4.2.3}$$

ここで，V_Y を Y の体積，h を H の 4 次元部分，$\theta(x)$ はアノーマリー相殺条件に対する lagrange multiplier.

$$Y^{ij} = \ell_s^4 V_Y^{-1} \int_{Y_6} *\eta^i \wedge \eta^j \tag{4.2.4}$$

h に関する変分より，$d\theta = 2\pi *h$ が得られる．これを用いて B を消去すると，θ はダイナミカルな擬スカラ場となり，その作用は次式で与えられる：

$$S_a = \int_{X_4} \Big[-\frac{1}{2}\sum Y^{ij} *da_i \wedge da_j - \frac{1}{2} *da \wedge da + \frac{\lambda}{f_a} a \left\{\mathrm{Tr}(F\wedge F) - \mathrm{tr}(\mathscr{R}\wedge\mathscr{R})\right\}\Big], \tag{4.2.5}$$

ここで， f_a は次式で定義されるアクシオン崩壊定数である：

$$f_a = \frac{\sqrt{V_Y}}{2\sqrt{2}\pi\kappa_{10}g_s} = \frac{L^3}{\sqrt{2\pi}g_s\ell_s^4} = \frac{m_{\rm pl}}{2\sqrt{2\pi}}, \tag{4.2.6}$$

ただし，$V_Y = L^6$, a_i と a は $a_i = f_a\alpha_i$ および $a = f_a\theta$ で定義される次元を持つアクシオン場, λ は無次元量

$$\lambda = \frac{\ell_s^2 f_a^2}{2\pi^2} = \frac{m_{\rm pl}^2\ell_s^2}{16\pi^3}. \tag{4.2.7}$$

である．ここで，実際のアクシオンスケール a_i は，$Y^{ij} \sim (\ell_s/L)^4$ より，一般に f_a より小さい.

このようにして得られる 2 種類のアクシオン場のうち，内部空間のサイクルより得られる a_i はモデル依存アクシオン，$B_{\mu\nu}$ より得られる a はモデル非依存アクシオンと呼ばれる．いずれのアクシオンに対しても、作用積分 (4.2.5) はシフト対称性をもつ．さらに，モデル非依存アクシオン a は，QCD アクシオンと同様，ゲージ場および重力場と Chen-Simons 相互作用をする． これに対して，モデル依存アクシオンは一見，そのような相互作用をしないように見える．また，それらは CP-even d に見える．しかし，実際には，量子補正を考えると，ゲージアノーマリーを相殺するため Green-Schwartz 相殺項

$$S = \int_{M_{11}} B \wedge X_8(F, \mathscr{R}) \tag{4.2.8}$$

がモデル依存アクシオンと $\mathrm{Tr}(F \wedge F)$ および $\mathrm{tr}(\mathscr{R} \wedge \mathscr{R})$ との相互作用を生み出す [61]. ここで，

$$X_8 = \mathrm{tr}(R_2^4) + \frac{[\mathrm{tr}(R_2^2)]^2}{4} - \frac{\mathrm{Tr}_a(F_2^2)\mathrm{tr}(R_2^2)}{30} + \frac{\mathrm{Tr}_a(F_2^4)}{3} - \frac{[\mathrm{Tr}_a(F_2^2)]^2}{900} \tag{4.2.9}$$

4.2.2　II 型理論

CY コンパクト化　(要訂正)

B は，IIB 型理論ではモデル非依存アクシオン a を，また，IIA 型理論では，モデル依存アクシオン a_i を生成する．一方，IIB 型での a_i 場と IIA 型での a 場は共に CP even となる．ヘテロ型の場合と異なり， $F \wedge F$ や $\mathscr{R} \wedge \mathscr{R}$ との結合は生成されない．しかし，II 型理論では，ヘテロ型と異なり，様々な RR 場 C_p が存在し，特に IIA 型での C_3 および IIB 型での $C_{2q}(q = 0, 1, 2)$ は，ヘテロの場合と同じ機構で，モデル依存アクシオンを生み出す．さらに，これらのアクシオンは，D ブレーンでの RR 場とゲージ場および重力場との結合を通して，ゲージ場および重力場との CS 結合を獲得する [61].

これらのうち，モデル依存型アクシオンは，内部空間が位相的に複雑になるほど多種になる．特に，IIB 型理論のフラックスコンパクト化では，ワープのために

adS 真空の uplift に膨大な数の 2 サイクルが必要となり，対応して非常に多種のアクシオンが生成されることになる [33]. また，ヘテロ型理論でも，Betti 数 A$b_2(Y)$ に対する明確な制限は得られていないが，トーリック型 CY の組織的な探査研究では，一般的な CY で $b_2(Y)$ が非常に大きくなることが知られている.[53]

4.2.3　WS インスタントン

References

- Dine M, Seiberg N, Wan X-G., Witten E: NPB278, 769 (1986)

  “Non-perturbative effects on the string world sheet”

- Dine M, Seiberg N, Wan X-G., Witten E: NPB289, 319 (1987)

  “Non-perturbative effects on the string world sheet 2”

弦に対する Eucdlid 作用積分のボソン部分

$$S_E = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{h}\left\{(h^{ab}g + \epsilon^{ab}B)(\partial_a X, \partial_b X) + \alpha' R_s\phi\right\} \tag{4.2.10}$$

において，古典解 $X^M(\sigma)$ の次の変形を考える：

- Kähler moduli: $g_{i\bar{j}} = \sum_\alpha r_\alpha b^{(\alpha)}_{i\bar{j}}$
- Axion moduli: $B_{[2]} = \sum_\alpha \theta_\alpha b^{(\alpha)}$

ここで，$b^{(\alpha)}(\alpha = 1, \cdots, b_2)$ は $H^{1,1}(Y_6)$ の基底で，$H_2(Y_6)$ の基底 Σ_α の双対基底である：

$$\int_{\Sigma_\beta} b^{(\alpha)} = \delta^\alpha_\beta. \tag{4.2.11}$$

Dilatonϕ が定数のとき，flat gauge $h_{ab}d\sigma^a d\sigma^b = dzd\bar{z}$ のもとで，

$$\begin{aligned} S_E &= \frac{1}{4\pi\alpha'}\int dzd\bar{z}\sum_\alpha b^{(\alpha)}_{i\bar{j}}\left\{r_\alpha\left(\partial X^i\bar{\partial}X^{\bar{j}} + \bar{\partial}X^i\partial X^{\bar{j}}\right) - i\theta_\alpha\left(\partial X^i\bar{\partial}X^{\bar{j}} - \bar{\partial}X^i\partial X^{\bar{j}}\right)\right\} \\ &\quad + \chi_\Sigma\phi \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

ここで，

$$\hat{b}^{(\alpha)} = X^* b^{(\alpha)} = \frac{1}{2}b^{(\alpha)}_{i\bar{j}}\left(\partial X^i\bar{\partial}X^{\bar{j}} - \bar{\partial}X^i\partial X^{\bar{j}}\right)dz \wedge d\bar{z} \tag{4.2.13}$$

は WS Σ 上の閉形式となるので，θ_α が z に依存しないときには，S_E の第 2 項は位相不変量となる：

$$S_E \ \Rightarrow \ \sum_\alpha \left(r_\alpha I^{(\alpha)} - i\theta_\alpha Q^{(\alpha)}\right) + \chi_\Sigma \phi; \tag{4.2.14}$$

$$I^{(\alpha)} = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int dz d\bar{z} b^{(\alpha)}_{i\bar{j}} \left(\partial X^i \bar{\partial} X^{\bar{j}} + \bar{\partial} X^i \partial X^{\bar{j}}\right), \tag{4.2.15}$$

$$Q^{(\alpha)} = \int_\Sigma \hat{b}^{(\alpha)}. \tag{4.2.16}$$

以上より，WS Σ のイメージが Y_6 でゼロホモローグなときは，S は θ_α に関してシフト対称性 $\theta_\alpha \to \theta_\alpha + \mathrm{const}$ をもつ．しかし，WS が非自明な 2 サイクルを覆うとき，位相不変量 $Q^{(\alpha)}$ がゼロでないと，このシフト対称性は非摂動論的に敗れる．状況は，4 次元理論でのアノーマリーによるアクシオン Chern-Simons 項 $aF \wedge F$ と完全に対応しており，同様の議論により，この $\theta_\alpha Q^{(\alpha)}$ 項が非摂動論的ポテンシャルを生み出す．

$b^{(\alpha)}$ として Kähler 形式 ω と同様に正定値のものが取れると仮定すると，$I^{(\alpha)} \geqslant |Q_{(\alpha)}|$ となるので，S_E は $\bar{\partial} X^{\bar{i}} = 0$ または $\partial X^i = 0$ となるとき最小となる．これらは **holomorphic instanton** および **anti-holomorphic instanton** と呼ばれる．これらのインスタントンに対しては，

$$e^{-S_E} = g^{-\chi_\Sigma} e^{-\sum_\alpha (r_\alpha \mp i\theta_\alpha) Q^{(\alpha)}} = e^{-I \pm i \sum_\alpha \theta_\alpha Q^{(\alpha)}} \tag{4.2.17}$$

となるので，4 次元理論が $N = 1$ sugra となるときには，

$$\delta W = \sum_\alpha A_\alpha e^{-R_\alpha / f_\alpha} \tag{4.2.18}$$

となる．対応するポテンシャルは

$$V_a = \sum_\alpha \Lambda_\alpha^4 \cos(a_\alpha / f_\alpha); \quad \Lambda_\alpha^4 = M_\alpha^4 e^{-I^{(\alpha)}}. \tag{4.2.19}$$

ここで，$a_\alpha / f_a = Q^{(\alpha)} \theta_\alpha$ で，f_a は a_α が標準的な運動項を持つという条件で決まる．

4.2.4　質量スペクトル

ブレーンやフラックスの導入，コンパクト化によりアクシオン場のシフト対称性が破れないときには，($N = 1$ 超対称性を仮定すると）摂動的な量子補正によってこの対称性が破れることはない．この場合，アクシオンは，QCD アクシオンと同様に，インスタントン効果などに非摂動論的効果によってのみ質量を獲得する．実際に，QCD アクシオンが存在する場合には，他にも多くのストリングアクシオンが残ると考えるのが自然である．

アクシオン質量の大きさは次のように評価できる．まず，一般にインスタントン効果によるアクシオン質量は

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}f_a^2(\partial\theta)^2 - \Lambda^4 U(\theta); \quad \Lambda^4 \approx M^4 e^{-S}, \tag{4.2.20}$$

と表される．ここで，S はインスタントンの作用積分である. 関係式

$$m_{\rm pl}^2 \sim g_s^{-2}L^6 l_s^{-8}, \quad f_a^2 \sim g_s^{-2}L^6 l_s^{-4}(L^2)^{-2} = g_s^{-2}L^2 l_s^{-4}, \quad S \sim l_s^{-2}L^2 \tag{4.2.21}$$

より，

$$f_a = m_{\rm pl}/S \tag{4.2.22}$$

が得られるので，

$$m_a \approx \Lambda^2/f_a \sim (M^2/m_{\rm pl})Se^{-S/2} \tag{4.2.23}$$

QCD アクシオンの全ポテンシャルは，QCD の寄与と弦理論的寄与の和となる：

$$V = V_{\rm QCD} + \Lambda^4 \cos\left(\frac{a}{f_a} + \psi\right); \quad V_{\rm QCD} = \frac{a^2}{8f_a^2}r^2 F_\pi^2 m_\pi^2 \frac{m_u m_d}{(m_u+m_d)^2}. \tag{4.2.24}$$

ここで，弦理論の寄与が QCD の寄与より小さいことを要請すると，次の制限が得られる.

$$a \approx \frac{M^4 e^{-S}}{m_\pi^2 F_\pi^2} < 10^{-10} \ \Rightarrow \ S \approx 200 \ \Rightarrow \ f_a \approx 10^{16}{\rm GeV}, \quad m_a \lesssim 10^{-15}{\rm eV} \tag{4.2.25}$$

この式より，超弦理論アクシオンの質量は， $\log m$ に関して一様に分布していることが期待される.

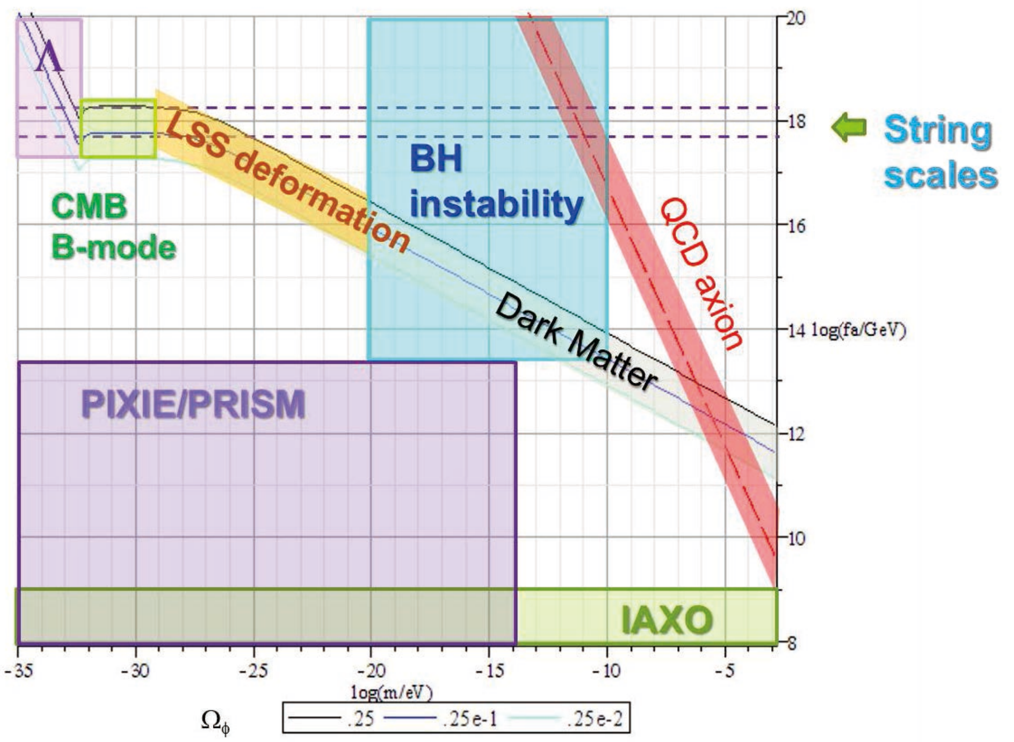


図 4.1: 超弦理論アクシオンにより引き起こされる様々な宇宙現象と将来実験によるそれらの観測がもたらすアクシオンパラメータ (m_a, f_a) への制限．CMB 実験 PIXIE/PRISM とアクシオン太陽望遠鏡実 IAXO[29] は，アクシオンと電磁場の CS 結合を用いる，$g_{a\gamma}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$．このため，これらの実験は f_a に対する直接の制限を与えない．この図では，$g_{a\gamma}\approx\alpha/(\pi f_a)$ により $g_{a\gamma}$ への制限を f_a に対する制限に翻訳している．

5 *インフレーションによる究極理論探査

§5.1 インフレーションの基本事項

定義　宇宙が加速膨張する時期が宇宙初期に存在する宇宙モデル.

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6}(\rho + 3P) > 0. \tag{5.1.1}$$

これより，インフレーション時期では $P < -\rho/3$.

観測よりの条件

1. **インフレーションの程度**:ホライズン問題，宇宙の平坦性 $\Rightarrow$ e-folding number

$$N_t > N_o \equiv 61 + \ln\left[\frac{H_{os}}{H_e}\left(\frac{H_e}{2\cdot 10^{14}\mathrm{GeV}/\hbar}\right)^{1/3}\left(\frac{g(T_r)}{216}\right)^{12}\left(\frac{T_r}{10^{16}\mathrm{GeV}}\right)^{1/3}\right] \tag{5.1.2}$$

2. **ゆらぎの振幅** $\Rightarrow$ ポテンシャルの傾き

$$\mathscr{P}_S(k_o) = (2.142\pm0.049)\times10^{-9} \quad (k_o = 0.002\mathrm{Mpc}^{-1})\ (68\%\mathrm{CL})\ [\mathrm{Planck+LSS}] \tag{5.1.3}$$

ポテンシャルが支配的なスローロルモデルでは

$$\mathscr{P}_S(k) = \left.\frac{H^2}{\|\dot{\phi}\|^2}\right|_{t=t_k}\mathscr{P}_\phi(k) \simeq \left(\frac{H^2}{2\pi\|\dot{\phi}\|}\right)^2_{t=t_k} \simeq \left(\frac{H^2}{8\pi^2\epsilon m_{\mathrm{pl}}^2}\right)_{t=t_k} \tag{5.1.4}$$

ここで,

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq \frac{m_{\rm pl}^2}{2}\frac{\|DV\|^2}{V^2}. \tag{5.1.5}$$

3. **スカラゆらぎのスペクトル指数** $\Rightarrow$ ポテンシャルの曲率

$$\mathscr{P}_S(k) = \mathscr{P}_S(k_*)\left(\frac{k}{k_*}\right)^{n_s-1}; \tag{5.1.6a}$$

$$n_s = 0.9667 \pm 0.0040 \text{ (68\%CL) [Planck+LSS]}, \tag{5.1.6b}$$

$$dn_s/d\ln(k) = -0.0065 \pm 0.0075 \text{ (68\%CL) [Planck+LSS+BKP]} \tag{5.1.6c}$$

ポテンシャルが支配的なスローロルモデルではスペクトル指数は

$$n_s - 1 \simeq 2\eta - 6\epsilon = -2\epsilon - \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon} \tag{5.1.7}$$

ここで,

$$\eta = 2\epsilon - \frac{\dot{\epsilon}}{2H\epsilon} \simeq \frac{D^aVD^bD_aD_bV}{VG(DV,DV)}. \tag{5.1.8}$$

4. **原始重力波の振幅** $\Rightarrow$ インフレーションのスケール

振幅に対する観測的制限は

$$\mathscr{P}_T(k_*) \simeq \frac{2H^2}{\pi^2 m_{\rm pl}^2} < 1.9 \times 10^{-9} \tag{5.1.9}$$

現在の観測的制限は，**テンソル-スカラ比** $r = \mathscr{P}_T/\mathscr{P}_S$ で表して

$$r_{0.002} < 0.09 \text{ (95\%CL) [Planck+LSS+BKP]} \tag{5.1.10}$$

ポテンシャルが支配的なスローロルモデルでは,

$$r \simeq 16\epsilon. \tag{5.1.11}$$

5. **ゆらぎの断熱性**: 等曲率ゆらぎの振幅 $S_m = S_c + S_b\rho_b/\rho_c$ が断熱的曲率ゆらぎを表すバーディーンパラメータ Z と $S = \mathrm{sgn}(\alpha)\sqrt{|\alpha|/(1-|\alpha|)}Z$ という比例関係にあると仮定したとき，パラメータ α に対して次の制限が得られている:

$$\alpha = 0.0003^{+0.0016}_{-0.0012} \text{ (95\%CL) [Planck]} \tag{5.1.12}$$

これは，等曲率ゆらぎの割合が断熱ゆらぎの 3%以下であることを意味する.

6. **ゆらぎの非ガウス性**: ゆらぎの統計については，ガウス的であることを支持する結果が得られている.

$$f_{\rm NL} = 2.5 \pm 5.7 \text{ (local)},\ -16 \pm 73 \text{ (equil)},\ -34 \pm 33 \text{ (ortho) (68\%CL)}. \tag{5.1.13}$$

§5.2
No-Go 定理

5.2.1　Strong Energy Condition

一般に、$(n+1)$ 次元時空における時間的測地線束（単位接ベクトル V）の体積膨張率 $\theta \equiv \nabla \cdot V$ に対して、Raychaudhuri 方程式

$$\dot{\theta} + \frac{1}{n}\theta^2 = -\mathrm{Ric}(V,V) - 2\sigma^2 + 2\omega^2 \tag{5.2.1}$$

が成りたつ。ここで、

$$2\sigma^2 = \nabla_\mu V_\nu \nabla^{(\mu} V^{\nu)}, \quad 2\omega^2 = \nabla_\mu V_\nu \nabla^{[\mu} V^{\nu]}. \tag{5.2.2}$$

この方程式を一様膨張宇宙に適用する。、宇宙時間一定面にたいする単位法ベクトル V は測地的で非回転的 $(\omega^2 = 0)$ となるので、スケール因子 a を

$$\theta = n\frac{\dot{a}}{a} = nH \tag{5.2.3}$$

により定義すると、Raychaudhuri 方程式は

$$n\frac{\ddot{a}}{a} = -\mathrm{Ric}(V,V) - 2\sigma^2 \tag{5.2.4}$$

となる。したがって、時間的収束条件（＝時間的きょうエネルギー条件）$\mathrm{Ric}(V,V) \geqslant 0$ が成りたつと、宇宙膨張は非加速的となる。

5.2.2　Gibbons の NO-GO 定理

【**Theorem 5.2.1** (GW Gibbons 1984)】　For a compactification $M_{n+4} = X_4 \times Y_n$ of a higher dimensional theory by a classical solution satisfying the following conditions, the strong energy condition is satisfied in the four-dimensional spacetime X_4:

1. The spacetime metric has the structure
$$ds^2(M_{n+4}) = W(y)^{1/2} ds^2(X_4) + ds^2(Y_n).$$
2. The internal space Y_n is a smooth compact manifold without bounary, and its metric is static.

3. The warp factor $W(y)$ is regular and bounded everywhere.

4. The original higher-dimensional theory satisfies the strong energy condition.

□

- Gibbons GW (1984): Aspects of Supergravity Theories, Three lectures given at GIFT Seminar on Theoretical Physics, San Feliu de Guixols, Spain, Jun 4-11, 1984.

Proof. From the assumptions, we have

$$R_{VV}(X) = R_{VV} - \frac{1}{4W}\triangle_Y W \tag{5.2.5}$$

for any timelike vector V parallel to X. By integrating this equation over Y, we obtain

$$R_{VV}(X)\int_Y d\Omega(Y) W = \int_Y d\Omega(Y)\left[W\,R_{VV} - \frac{1}{4}\triangle_Y W\right] \tag{5.2.6}$$

If $R_{VV} \geqslant 0$ and W is regular and bounded everywhere, the right-hand side of this equation is non-negative. Hence, we obtain

$$R_{VV}(X) \geqslant 0. \tag{5.2.7}$$

Q.E.D.

5.2.3　$D = 10/11$ 超重力理論における SEC

M-theory　$(D = 11)$

$$\begin{aligned} R_{MN} &= \frac{1}{12}F_{M\cdots}F_N{}^{\cdots} - \frac{1}{6}|F_4|^2 g_{MN} \\ R_{00} &= \frac{1}{18}F_{0ijk}F_0{}^{ijk} + \frac{1}{144}F_{ijkl}F^{ijkl} \end{aligned} \tag{5.2.8a}$$

$D = 10$ **Type IIB Supergravity**

$$\begin{aligned} R_{MN} &= \frac{1}{2\tau_2^2}\nabla_{(M}\tau\nabla_{N)}\bar{\tau} + \frac{1}{4\tau_2}\left(G_{**(M}\bar{G}_{N)}{}^{**} - \frac{1}{2}|G_3|^2 g_{MN}\right) + \frac{1}{96}\tilde{F}_{M****}\tilde{F}_N{}^{****} \\ R_{00} &= \frac{1}{2\tau_2^2}|\nabla_0\tau|^2 + \frac{3}{16\tau_2}G_{0ij}\bar{G}_0{}^{ij} + \frac{1}{48\tau_2}G_{ijk}\bar{G}^{ijk} + \frac{1}{96}\tilde{F}_{0ijkl}\tilde{F}_0{}^{ijkl} \end{aligned} \tag{5.2.9a}$$

$D = 10$ **Type IIA Supergravity**

$$\begin{aligned}
R_{MN} &= \frac{1}{2}\partial_M\phi\partial_N\phi + e^{-\phi}\left(\frac{1}{4}H_{M**}H_N{}^{**} - \frac{1}{8}|H_3|^2 g_{MN}\right) \\
&\quad + e^{\phi/2}\left(\frac{1}{12}\tilde{F}_{M***}\tilde{F}_N{}^{***} - \frac{3}{16}|\tilde{F}_4|^2 g_{MN}\right) \\
&\quad + e^{3\phi/2}\left(\frac{1}{2}\tilde{F}_M * \tilde{F}_N{}^* - \frac{1}{16}|\tilde{F}_2|^2 g_{MN}\right) + \frac{m_0^2}{16}e^{5\phi/2}g_{MN}, \quad (5.2.10a) \\
R_{00} &= \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + e^{-\phi}\left(\frac{3}{16}H_{0ij}H_0{}^{ij} + \frac{1}{48}H_{ijk}H^{ijk}\right) \\
&\quad + e^{\phi/2}\left(\frac{5}{96}\tilde{F}0ijk\tilde{F}_0{}^{ijk} + \frac{1}{128}\tilde{F}_{ijkl}\tilde{F}^{ijkl}\right) \\
&\quad + e^{3\phi/2}\left(\frac{7}{16}\tilde{F}_{0i}\tilde{F}_0{}^i + \frac{1}{32}\tilde{F}_{ij}\tilde{F}^{ij}\right) - \frac{m_0^2}{16}e^{5\phi/2}. \quad (5.2.10b)
\end{aligned}$$

$D = 10$ **Type I Supergravity**

$$\begin{aligned}
R_{MN} &= \frac{1}{2}\partial_M\phi\partial_N\phi + e^{-\phi}\left(\frac{1}{4}\tilde{H}_{M**}\tilde{H}_N{}^{**} - \frac{1}{8}|\tilde{H}_3|^2 g_{MN}\right) \\
&\quad + \frac{\alpha'}{4}e^{-\phi/2}\mathrm{Tr}\left(F_{M*}F_N{}^* - \frac{1}{8}|F_2|^2 g_{MN}\right) \\
R_{00} &= \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{e^{-\phi}}{48}\left(9\tilde{H}_{0ij}\tilde{H}_0{}^{ij} + \tilde{H}_{ijk}\tilde{H}^{ijk}\right) + \frac{\alpha'}{64}e^{-\phi/2}\mathrm{Tr}\left(14F_{0i}F_0{}^i + F_{ij}F^{ij}\right)
\end{aligned} \quad (5.2.11a)$$

加速膨張を実現するための必要条件　以下のいずれかの条件を破る必要がある：

1. 内部空間の古典的記述
2. ワープしたコンパクト化の枠組み：$ds^2(M_D) = W(y)^2 g(X_4) + g(Y_n)$
3. Y_n: 定常、コンパクト、閉多様体。
4. ワープ因子 $W(y)$ が有界で滑らかな非ゼロ関数。
5. 出発点となる高次元理論が強エネルギー条件を満たす。

5.2.4　Maldacena-Nunez の No-Go 定理

【**Theorem 5.2.2** (Maldacena-Nunez 2001)】　For a compactification $M_D = X_d \times Y_n$ of a higher dimensional theory by a classical solution satisfying the following conditions, X_d cannot be de Sitter spacetime:

1. The spacetime metric has the structure
$$g(M_D) = \Omega(y)^2 \left[g(X_d) + \hat{g}(Y_n)\right].$$
2. The Newton constant in X_d is finite:
$$\int_Y d\mu_{\hat{g}} \Omega^{D-2} < \infty.$$
3. Near the boundary of Y_n or singularities of Ω, Ω decreases monotonically toward them.
4. In the original higher-dimensional theory, the potential is non-positive and all massless bosonic fields have positive kinetic terms.

□

Reference

- Maldacena JM, Nunez G (2001): IJMPA16, 822

【Note 5.2.3】 A stronger result can be obtained for the massive IIA supergravity. □

Proof. In the Einstein equations

$$\mathrm{Ric}(M) = \mathbb{T}(M) - \frac{1}{D-2} T_s g(M) \tag{5.2.12}$$

Ric(M) can be written

$$\mathrm{Ric}(M) = \mathrm{Ric}(X) - \left(\hat{\nabla}^2 \ln\Omega + (D-2)(\hat{\nabla}\ln\Omega)^2\right) g(X) \tag{5.2.13}$$

Hence, the contraction of the Einstein equations with $g(X) - 1$ gives

$$\frac{d}{D-2}\hat{\triangle}(\Omega^{D-2}) = \Omega^{D-2} R_s(X) + \Omega^D \tilde{T}; \quad \tilde{T} = -T^\mu_\mu + \frac{d}{D-2} T^M_M \tag{5.2.14}$$

If X is Mink or dS, massless form field strength F_p should have the form

$$F_p = \Omega_d(X) \wedge \alpha_{p-d}(Y) + \beta_p(Y) \tag{5.2.15}$$

Then, from the condition 4

$$\tilde{T} = -\frac{2d}{D-2} V + \sum_p \frac{d}{D-2}\left((D-p-1)\alpha\cdot\alpha + (p-1)\beta\cdot\beta\right) \geqslant 0 \tag{5.2.16}$$

Hence,

$$0 \geqslant \frac{d}{D-2}\int_{\partial Y} d\sigma_{\hat{g}} \nabla_\perp(\Omega^{D-2}) = \int_Y d\mu_{\hat{g}}\left(d(d-1)\Lambda\Omega^{D-2} + \Omega^D\tilde{T}\right) \geqslant 0 \tag{5.2.17}$$

Q.E.D.

5.2.5　ブレーンを含む IIB 理論における No-Go 定理

【**Theorem 5.2.4** (Dasgupta et al 2014; Giddings, Kachru, Polchinski 2002)】
For a compactification $M_{10} = X_4 \times Y_6$ of 10D IIB string theory by a classical solution satisfying the following conditions, X_4 cannot be de Sitter spacetime:

1. The spacetime metric has the structure
$$g(M_{10}) = e^{2A(y)}\left[g(X_4) + e^{-2A(y)}\hat{g}(Y_6)\right].$$
2. The internal space is a smooth, compact closed manfold, and the warp factor is smooth.
3. All fields are invariant under the maximal symmetry of X_4.
4. Flux, non-trivial dilaton, smeared D-brane/$\bar{D}$-brane are allowed, but O-planes/$\bar{O}$-planes or higher-order corrections/quantum corrections are not includes.

□

References

- Dasgupta K et al (2014): JHEP 1407, 054
- Giddings SB, Kachru S, Polchinski J (2002): PRD66, 106006

【**Note 5.2.5**】 The inclusion of curvature corrections, D-instanton corrections, loop-corrections may lead to a de Sitter solution. □

Proof. 1. From the Einstein equations, the scalar curvature of X_4 can be written
$$\hat{\triangle} e^{4A} = R_s(X) - \frac{\kappa_{10}^2}{2} e^{2A}\left[T^\mu_\mu - T^m_m\right]. \tag{5.2.18}$$
Integrating this yields
$$R_s(X)\int_Y d\mu(Y) = \frac{\kappa_{10}^2}{2}\int_Y d\mu(Y) e^{2A}\left[T^\mu_\mu - T^m_m\right] \tag{5.2.19}$$

2. The D-brane and O-plane actions read
$$S_{D_p} = -\int_{\Sigma_{p+1}} d^{p+1}x T_p e^{\frac{p+1}{4}\phi}\sqrt{-\det(g+F+B)} + \mu_p \int_{\Sigma_{p+1}} C \wedge e^{F+B}, \tag{5.2.20a}$$
$$S_{O_p} = -\int_{\Sigma_{p+1}} d^{p+1}x T_{O_p} e^{\frac{p+1}{4}\phi}\sqrt{-\det(g)} + \mu_{O_p}\int_{\Sigma_{p+1}} C. \tag{5.2.20b}$$
where $T_p > 0$, $T_{Op} < 0$.

3. Their EM tensors are given by

$$T^\mu_\mu[D_p/\bar{D}_p] = -4T_p e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu[D_p/\bar{D}_p], \tag{5.2.21a}$$
$$T^m_m[D_p/\bar{D}_p] = -(p-3)T_p e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu[D_p/\bar{D}_p], \tag{5.2.21b}$$
$$T^\mu_\mu[O_p/\bar{O}_p] = 4|T_{O_p}| e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu[O_p/\bar{O}_p], \tag{5.2.21c}$$
$$T^m_m[O_p/\bar{O}_p] = (p-3)|T_{O_p}| e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu[O_p/\bar{O}_p] \tag{5.2.21d}$$

Hence, D-brane does not help to realise dS:

$$T^\mu_\mu[D_p/\bar{D}_p] - T^m_m[D_p/\bar{D}_p] = -(12-p)T_p e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu[D_p/\bar{D}_p] < 0 \tag{5.2.22}$$

In contrast, O-planes have negative energy and may help to realise dS:

$$T^\mu_\mu[O_p/\bar{O}_p] - T^m_m[O_p/\bar{O}_p] = (12-p)|T_{O_p}| e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu[O_p/\bar{O}_p] > 0 \tag{5.2.23}$$

However, they cannot be smoothed out, so its back reaction produces singularity.

Q.E.D.

【**Note 5.2.6** (Argument based on SEC)】　The strong energy condition gives slightly different conditions:

(5.2.24)

- D$_p$-brane ($\tau > 0$): only 8-brane or 9-brane provides a negative contribution to R_{00}
- O$_p$-plane ($\tau < 0$): p-brane ($p < 7$) provide a negative contribution to R_{00}.

□

【**Note 5.2.7**】

- The tadpole condition requires the existence of an O$_p$-plane if D$_p$-branes exist, and if the internal space is closed.
- An O$_p$-plane produces naked singularities classically.

□

【**Note 5.2.8** (Tadpole condition)】　By integrating the field equation with the brane source

$$dF_n = H_3 \wedge F_{n-2} + (2\pi\sqrt{\alpha'})^{n-1} \rho^{\mathrm{loc}}_{8-n} \tag{5.2.25}$$

for $n = 5$ over the internal space Y, we obtain the constraint

$$N_{\mathrm{D3}} + N_{\mathrm{flux}} = \frac{1}{4} N_{\mathrm{O3}} \tag{5.2.26}$$

where

$$N_{\text{flux}} = \frac{1}{(2\pi)^4\alpha'^2}\int_{Y_6} H_3 \wedge F_3 = e_K m^K_{\text{RR}} - m^K e_{K\text{RR}}, \tag{5.2.27}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2\alpha'}\int_{A_K/B_K} H_3 = m^K/e_K,\ K = 1, \cdots, h^3/2, \tag{5.2.28}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2\alpha'}\int_{A_K/B_K} F_3 = m^K_{\text{RR}}/e_{K\text{RR}},\ K = 1, \cdots, h^3/2. \tag{5.2.29}$$

Hence, if the flux does not match the number of D3 branes, an appropriate number of O3 planes are required.

For example, for the flux CY compactification of IIB, the 3-form fluxes are imaginary self-dual and satisfies the condition $*_Y F_3 = e^{-\phi} H_3$. Hence,

$$N_{\text{flux}} = \frac{1}{(2\pi)^4\alpha'^2}\int_Y e^{-\phi} *_Y F_3 \wedge F_3 = \frac{1}{(2\pi)^4\alpha'^2}\int_Y d\mu(Y) e^{-\phi}|F_3|^2 \geqslant 0. \tag{5.2.30}$$

□

5.2.6　ブレーンを含む IIA 理論における No-Go 定理

【Theorem 5.2.9 (Hertzberg MP, Kachru S, Taylor W, Tegmark M (2007))**】**
For a CY compactification of $M_{10} = X_4 \times Y_6$ of 10D IIA string theory by a classical solution satisfying the following conditions, X_4 cannot be de Sitter spacetime:

1. The spacetime metric has the structure

$$g(M_{10}) = g(X_4) + \hat{g}(Y_6). \tag{5.2.31}$$

2. The internal space is a Calabi-Yau manifold.

3. All fields are invariant under the maximal symmetry of X_4.

4. H_3-flux, RR-flux, non-trivial dilaton, smeared D6-branes and O6-planes are allowed,

Further, if one of the RR-fluxes does not vanish, X_4 cannot be the Minkowski spacteime. □

References

- Hertzberg MP, Kachru S, Taylor W, Tegmark M: jhep 12, 095 (2007)

  "Inflationary constraints on type IIa string theory"

Proof. モジュライ変数 ρ，τ を

$$\rho = (\mathrm{Vol}(Y_6))^{1/3}, \quad \tau = e^{-\phi}(\mathrm{Vol}(Y_6))^{1/2} \tag{5.2.32}$$

おくと，Einstein frame

$$g^E_{\mu\nu} = \frac{\tau^2}{m_{\mathrm{pl}}^2 \kappa_{10}^2} g_{\mu\nu}(X) \tag{5.2.33}$$

において，これらの運動項は

$$\mathscr{L}_K = -\frac{1}{2}\left\{(\partial\hat{\rho})^2 + (\partial\hat{\tau})^2\right\}; \tag{5.2.34}$$

$$\hat{\rho} = \sqrt{\frac{3}{2}} m_{\mathrm{pl}} \ln\rho, \quad \hat{\tau} = \sqrt{2} m_{\mathrm{pl}} \ln\tau. \tag{5.2.35}$$

Flux の量子化

$$\int_{\Sigma^p} F_p \propto f_\Sigma \in \mathbb{Z} \tag{5.2.36}$$

より，フラックスのポテンシャルへの寄与は

$$H_3 \quad \Rightarrow \quad V_3^{\mathrm{NS}} \propto \rho^{-3}\tau^{-2}, \tag{5.2.37a}$$

$$F_p \quad \Rightarrow \quad V_p \propto \rho^{3-p}\tau^{-4}. \tag{5.2.37b}$$

また，ブレーンの寄与は

$$D6 \quad : \quad V_{D6} \propto \tau^{-3}, \tag{5.2.38a}$$

$$O6 \quad : \quad V_{O6} \propto -\tau^{-3}. \tag{5.2.38b}$$

よって，ψ を ρ, τ 以外のモジュライ変数として，

$$\begin{aligned} V &= V_3^{\mathrm{NS}} + \sum_p V_p + V_{D6} + V_{O6} \\ &= \frac{A_3^{NS}(\psi)}{\rho^3\tau^2} + \sum_p \frac{A_p(\psi)}{\rho^{p-3}\tau^4} + \frac{A_{D3}(\psi) - A_{O3}(\psi)}{\tau^3}. \end{aligned} \tag{5.2.39}$$

これより，

$$-\rho\frac{\partial V}{\partial\rho} - 3\tau\frac{\partial V}{\partial\tau} = 9V + \sum_p pV_p \geqslant 9V. \tag{5.2.40}$$

Q.E.D.

目次へ

【**Note 5.2.10** (No-Go 定理を克服する可能性)】

- Geometrical/NG flux $T : H_{abc} \to f^a{}_{bc} \to Q^{ab}_c \to R^{abc}$

$$V_f \propto \pm \rho^{-1}\tau^{-2} \quad \Rightarrow \quad -(\rho\partial_\rho + 3\tau\partial_\tau)V_f = 9V_f - 2V_f, \tag{5.2.41a}$$

$$V_Q \propto \pm \rho\tau^{-2} \quad \Rightarrow \quad -(\rho\partial_\rho + 3\tau\partial_\tau)V_Q = 9V_Q - 4V_Q, \tag{5.2.41b}$$

$$V_R \propto \pm \rho^3\tau^{-2} \quad \Rightarrow \quad -(\rho\partial_\rho + 3\tau\partial_\tau)V_R = 9V_R - 6V_R. \tag{5.2.41c}$$

- NS5 ブレーン

$$V_{NS5} \propto \pm \rho^{-2}\tau^{-2} \;\Rightarrow\; -(\rho\partial_\rho + 3\tau\partial_\tau)V_{NS5} = 9V_{NS5} - V_{NS5} \tag{5.2.42}$$

□

5.2.7　α' 補正を含む $10D$ ヘテロ型超重力理論

Field contents

- Boson: g_{MN}, ϕ, B_{MN}; $A_M \in \mathrm{ad}(G)$

  ここで、$G = \mathrm{Spin}(32)/\mathbb{Z}_2$ or $E_8 \times E_8$

- Fermion: Majorana-Weyl spinors ψ_M, λ; $\chi \in \mathrm{ad}(G)$

Action with $\mathrm{O}(\alpha'^2)$ **corrections**

$$S = \int_M e^{-2\phi}\Big[R_s(\omega_+) + 4|\nabla\phi|^2 - \frac{1}{2}|T|^2 - \frac{\alpha'}{4}\left(\mathrm{tr}|F|^2 - \mathrm{tr}|\mathscr{R}(\omega_+)|^2 + 2\mathrm{tr}(\bar{\chi}\not{D}\chi)\right) + \cdots\Big] \tag{5.2.43}$$

where

$$\omega_\pm^{AB} = \omega^{AB} \pm \tfrac{1}{2}H^{AB}{}_M dx^M + \mathrm{O}\big(\alpha'^2\big)\,, \tag{5.2.44a}$$

$$T = H_3 + \frac{\alpha'}{8}\mathrm{tr}(\bar{\chi}\Gamma_{[3]}\chi), \tag{5.2.44b}$$

$$H_3 = dB_2 + \frac{\alpha'}{4}[\mathrm{CS}(\omega_+) - \mathrm{CS}(A)], \tag{5.2.44c}$$

$$\mathrm{CS}(A) = \mathrm{tr}\left(A \wedge dA + \tfrac{2}{3}A \wedge A \wedge A\right). \tag{5.2.44d}$$

This α'-correction is consistent with the anomaly cancellation condition

$$dH = \frac{\alpha'}{4}\left[\mathrm{tr}(\mathscr{R}_+ \wedge \mathscr{R}_+) - \mathrm{tr}(F \wedge F)\right] \tag{5.2.45}$$

5.2.8　α' を考慮した $10D$ 超重力理論における No-Go 定理

【Theorem 5.2.11 (Gautason,Junghans, Zagermann 2012)**】** 10D HET supergravity with the full α corrections does not allow a compactification $M = \mathrm{dS}^4 \times Y_6$ or $M = \mathrm{adS}^4 \times Y_6$ under the following conditions:

1. Metric is regular and takes the warped form

$$g_M = e^{2A(y)} g_X(x) + \hat{g}_Y(y) \tag{5.2.46}$$

2. Fields are regular and invariant under the maximal symmetry of X

$$F_2 = F_Y(y), \quad H_3 = H_Y(y), \quad \phi = \phi(y) \tag{5.2.47}$$

3. No gaugino condensates
4. No stringy loop/non-perturbative correction.
5. α'-expansion is allowed.

□

Reference

- Gautason FF, Junghans D, Zagermann M (2012): JHEP 1206, 029 [arXiv:1204.0807] “ On Cosmological Constants from a ’ -Corrections

Proof. 1. Neglecting the terms that vanish when the configuration is invariant under the maximal symmetry group of X, the effective action reads

$$S = \int d\mu_X \tau^2 \left[e^{4a}\hat{V} + e^{2a} C R_s(X) + \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha')^{n+1} e^{-2na} W_n \right] \tag{5.2.48}$$

where

$$e^{-2\phi} = \tau^2 e^{-2\hat{\phi}}, \quad A = a + \hat{A}(y), \tag{5.2.49a}$$

$$C = \int d\mu_Y e^{-2\hat{\phi}+2\hat{A}} \left(1 - \frac{\alpha'}{2} (\hat{D}A)^2 + \cdots \right), \tag{5.2.49b}$$

$$W_0 = \frac{1}{4} |\mathscr{R}(X)|^2, \tag{5.2.49c}$$

$$\begin{aligned} \hat{V} = \int d\mu_Y e^{-2\hat{\phi}+4\hat{A}} \Big\{ & R_s(Y) - 8\hat{\Box} A - 20(\hat{D}A)^2 + 4(\hat{D}\phi)^2 - \frac{1}{2}|\hat{H}|^2 + \frac{\alpha'}{4}\Big(- \mathrm{tr}|\hat{F}|^2 + |\hat{\mathscr{R}}^+|^2 \\ & + 8(\hat{D}\hat{D}A)^2 + 8\hat{D}A \cdot \hat{D}((\hat{D}A)^2) + 20((\hat{D}A)^2)^2 + |\hat{D}A \cdot \hat{H}|^2 \Big) \end{aligned} \tag{5.2.49d}$$

2. Variations wrt τ and a give

$$\delta\tau \quad : \quad \hat{V} + CR_s(X) + W = 0, \tag{5.2.50a}$$

$$\delta a \quad : \quad 4\hat{V} + 2CR_s(X) - \sum_{n=1}^{\infty} 2n(\alpha')^{n+1} W_n = 0 \tag{5.2.50b}$$

From these, it follows

$$CR_s(X) + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)(\alpha')^{n+1} W_n = 0 \tag{5.2.51}$$

3. When X is a constant curvature space

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{\Lambda}{3}\left(g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}\right)$$
$$\Rightarrow \; R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}, \quad R_s = 4\Lambda, \quad |\mathscr{R}|^2 = \frac{4\Lambda^2}{3} \tag{5.2.52}$$

Hence, the above equation can be written

$$4(C_0 + \alpha' C_1 + \cdots)\Lambda + \alpha'\Lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) w_n (\alpha'\Lambda)^n = 0 \tag{5.2.53}$$

There exists no solution such that

$$\Lambda = \Lambda_0 + \alpha'\Lambda_1 + \cdots \neq 0. \tag{5.2.54}$$

Q.E.D.

【**Theorem 5.2.12** (Quigly C 2015)】 10D HET supergravity with the quadratic α corrections and gaugino condensates does not allow a compactification $M = \mathrm{dS}^4 \times Y_6$ or $M = \mathrm{adS}^4 \times Y_6$ under the following conditions:

1. Metric is regular and takes the warped form

$$g_M = e^{2A(y)} g_X(x) + \hat{g}_Y(y) \tag{5.2.55}$$

2. Fields are regular and invariant under the maximal symmetry of X

$$F_2 = F_Y(y), \quad H_3 = H_Y(y), \quad \phi = \phi(y),$$
$$\chi = e^{-3\varphi/4}\left(\chi_4(x) \otimes \chi_6(y) + \text{c.c.}\right); \quad \hat{\not{D}}\chi_6 = \mathrm{O}(\alpha') \tag{5.2.56}$$

3. Gaugino condensates

$$\langle \mathrm{tr}(\bar{\chi}_4 \chi_4) \rangle = M^3 f(\phi_0, \rho_0) \tag{5.2.57}$$

4. No stringy loop/non-perturbative correction.

5. α'-expansion is allowed.

□

Reference

- Quigley C (2015): arXiv: 1504.00652 “Gaugino Condensation and the Cosmological Constant”

Proof. 1. Under the ansatz of the theorem, the 10D action reduces to

$$S = \int_X d^4x\sqrt{-g_4}\int_Y d^6y\sqrt{\hat{g}_6}\left[R_s(X) + \frac{\alpha'}{4}e^{-\varphi}|\mathscr{R}_X|^2 - V(y) + \mathrm{O}\big(\alpha'^3\big)\right] \tag{5.2.58}$$

where

$$\begin{aligned} V &= e^{\varphi}\Big[e^{-\rho}(-R_s(Y) + |\hat{D}\rho|^2 + \hat{D}\rho\cdot\hat{D}\varphi) + \frac{1}{2}e^{-3\rho}|T_Y|^2 \\ &\quad + \frac{\alpha'}{4}e^{-2\rho}\left(\mathrm{tr}|F_Y|^2 - \mathrm{tr}|R_{+Y}|^2\right) + \frac{\alpha'}{2}M^3 f e^{-(\varphi+\rho)/2}(\bar{\chi}_6\gamma^m\hat{D}_m\chi_6 + \mathrm{cc})\Big] \end{aligned} \tag{5.2.59}$$

2. Variation wrt φ gives

$$-\hat{\nabla}\cdot(e^{\varphi-\rho}\hat{\nabla}\rho) + \frac{\alpha'}{4}e^{-\varphi}\left\langle|\mathscr{R}_X|^2\right\rangle_X + V(y) \tag{5.2.60}$$

$$= \frac{\alpha'}{2}M^3 e^{\varphi-2\rho}\partial_\varphi(e^{-3(\varphi-\rho)/2}f)[\bar{\chi}_6(\gamma^m\hat{\nabla}_m + \frac{1}{4}e^{-\rho}\gamma_{[3]}\cdot T)\chi_6 + \mathrm{cc}] + \mathrm{O}(\alpha'^3) \tag{5.2.61}$$

RHS of this equation can be set to $\mathrm{O}(\alpha'^3)$) by requiring

$$\left[\gamma^m\hat{\nabla}_m + \tfrac{1}{4}\gamma^m\hat{\nabla}_m(-\varphi-\rho+2\ln f) + \tfrac{1}{4}e^{-\rho}\gamma_{[3]}\cdot T\right]\chi_6 = \mathrm{O}\big(\alpha'^3\big) \tag{5.2.62}$$

Hence, by integrating over Y, we obtain

$$\frac{\alpha'}{4}\left\langle e^{-\varphi}\right\rangle_Y\left\langle|\mathscr{R}_X|^2\right\rangle_X + \langle V\rangle_Y = \mathrm{O}\big(\alpha'^3\big) \tag{5.2.63}$$

3. Variation wrt g gives

$$\begin{aligned} &R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R_s(X)g_{\mu\nu} + \frac{\alpha'}{4}\left\langle e^{-\varphi}\right\rangle_Y\left[R_{\mu***}R_\nu{}^{***} + 2\nabla_\alpha\nabla_\beta R^{\mu\alpha\nu\beta} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}|\mathscr{R}_X|^2\right] \\ &= -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\langle V\rangle_Y + \mathrm{O}\big(\alpha'^3\big) \end{aligned} \tag{5.2.64}$$

4. When X is a constant curvature spacetime

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\lambda\sigma} &= \frac{\Lambda}{3}\left(g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}\right) \\ \Rightarrow\ R_{\mu\nu} &= \Lambda g_{\mu\nu},\quad R_s = 4\Lambda,\quad |\mathscr{R}|^2 = \frac{4\Lambda^2}{3} \end{aligned} \tag{5.2.65}$$

The two field equations reduce to

$$\frac{2\alpha'}{3}\Lambda^2\left\langle e^{-\varphi}\right\rangle_Y + \langle V\rangle_Y = \mathrm{O}\big(\alpha'^3\big) \tag{5.2.66a}$$

$$\Lambda = \frac{1}{2}\langle V\rangle_Y + \mathrm{O}\big(\alpha'^3\big) \tag{5.2.66b}$$

Hence, by eliminating V, we obtain

$$\Lambda = -\frac{\alpha'}{3}\Lambda^2 \left\langle e^{-\varphi} \right\rangle_Y + \mathrm{O}\big(\alpha'^3\big) \quad \Rightarrow \; \Lambda = \mathrm{O}\big(\alpha'^3\big) \tag{5.2.67}$$

Q.E.D.

【**Theorem 5.2.13** (Kutasov D, Maxfield T, Melnikov I, Sethi S 2015)】 For heterotic or type IIB with no RR fluxes, compactification to $\mathrm{dS}^n (n \geqslant 4)$ is not allowed even when all α'-corrections including perturbative curvature corrections and world sheet non-perturbative effects are allowed, if no stringy loop or non-perturbative correction is included. □

Reference

- Kutasov D, Maxfield T, Melnikov I, Sethi S (2015):arXiv:1504.00056. “ Constraining de Sitter Space in String Theory ”

5.2.9　如何にして No-Go 定理を回避するか？

残る可能性

- 高次の α' 補正と RR フラックスを含む II 型超重力理論（D ブレーンと O ブレーンを含む）
  1. KKLT シナリオ
     i) IIB 理論の warped CY コンパクト化 with ISD flux(+compensating O_3-planes) $\Rightarrow$ No scale 4D $N = 1$ Sugra
     ii) Instanton (Euclidean D-brane)/D7 上での gaugino condensates による NP 効果 $\Rightarrow$ Kähler モジュライの安定化 $\Rightarrow$ adS^4.
     iii) $\bar{D}_3$ ブレーンによる vacuum uplift $\Rightarrow$ dS^4
  2. LVS (Large volume scenario)
     iii’) Kähler uplifting: Kähler ポテンシャルへの α' 補正 $\Rightarrow$ dS^4

  iv’) Monodromy inflation (低エネルギーでの $N = 1$ sugra の放棄)
- 超重力理論の枠組みの拡大
  - Non-geometric flux を用いたコンパクト化 [Blumenhagen et al 2015-2016]
- 開多様体によるコンパクト化

  - 例 : 4D SO(4, 4)-GSugra の Dall'Agata-Inverso dS-臨界点の M 理論へのアップリフト [Baron, Dall'Agata 2015]

- ストリングループ効果・非摂動効果

§5.3 フラックスコンパクト化

5.3.1　ワープ

仮定

計量

$$ds^2(M) = A(x,y)^2 ds^2(X_4) + B(x,y)^2 ds^2(Y_6), \tag{5.3.1}$$

場

$$\tau \equiv C_0 + i\, e^{-\Phi} = i g_s^{-1} (= \mathrm{const})\,, \tag{5.3.2a}$$
$$G_3 \equiv i g_s^{-1} H_3 - F_3 = \frac{1}{3!} G_{pqr}(y)\, dy^p \wedge dy^q \wedge dy^r\,, \tag{5.3.2b}$$
$$*_{\mathrm{Y}} G_3 = \epsilon i\, G_3 \quad (\epsilon = \pm 1)\,, \tag{5.3.2c}$$
$$\tilde{F}_5 = (1 \pm *) V_p dy^p \wedge \Omega(X_4) = V \wedge \Omega(X_4) \mp A^{-4} B^4 *_{\mathrm{Y}} V, \tag{5.3.2d}$$

場の方程式　自明でない方程式は

$$dG_3 = 0, \tag{5.3.3a}$$
$$\nabla \cdot G_3 = *d * G_3 = -iG_3 \cdot \tilde{F}_5, \tag{5.3.3b}$$
$$d\tilde{F}_5 = H_3 \wedge F_3, \tag{5.3.3c}$$
$$R_{MN} = \frac{g_s}{4}\left[\mathrm{Re}\,(G_{MPQ} G^{*\ PQ}_{N}) - \frac{1}{2} G_3 \cdot G_3^* g_{MN}\right] + \frac{1}{96} \tilde{F}_{NP_1\cdots P_4} \tilde{F}_M{}^{P_1\cdots P_4} \tag{5.3.3d}$$

一般解　G_3 は Y_6 上の閉 ISD 3 形式なので，y にのみ依存し，(5.3.3b) は

$$\big(V \mp \epsilon d_y(A^4)\big) \cdot G_3 = 0 \tag{5.3.4}$$

を与える．ここで，$d_y = dy^p \partial_p$．これより，$G_3 \neq 0$ なら

$$V = \pm \epsilon d_y(A^4), \tag{5.3.5}$$

したがって，(5.3.3c) は次の 2 式と同値となる．

$$\partial_\mu (A^{-4} B^4 \partial_p (A^4)) = 0, \tag{5.3.6a}$$
$$(\hat{D} \cdot (A^{-4} B^4 \hat{D}(A^4))_{\mathrm{Y}} = -\frac{g_s}{2} (G_3 \cdot \bar{G}_3)_{\mathrm{Y}}, \tag{5.3.6b}$$

次に，Einstein 方程式 $R_{ap}=0$ とこれらの第 1 式より，

$$A=h(x,y)^{-1/4},\quad B=h(x,y)^{1/4}, \tag{5.3.7}$$

対応して，$\tilde{F}_5$ と (5.3.6b) は

$$\tilde{F}_5=\pm\epsilon(1\pm *)d(h^{-1})\wedge\Omega(X_4), \tag{5.3.8}$$

$$\triangle_{\mathrm{Y}}h=-\frac{g_s}{2}(G_3\cdot\bar{G}_3)_{\mathrm{Y}}. \tag{5.3.9}$$

よって，Einstein 方程式は

$$hR_{\mu\nu}(X_4)-D_\mu D_\nu h+\frac{1}{4}g_{\mu\nu}(X_4)\triangle_{\mathrm{X}}h=0, \tag{5.3.10a}$$

$$\partial_\mu\partial_p h=0, \tag{5.3.10b}$$

$$R_{pq}(Y_6)-\frac{1}{4}g_{pq}(Y_6)\triangle_{\mathrm{X}}h=0. \tag{5.3.10c}$$

この第 2 式より直ちに，

$$h(x,y)=h_0(x)+h_1(y). \tag{5.3.11}$$

さらに，$h_1\neq 0$ とすると，残りの方程式は

$$R_{\mu\nu}(X_4)=0, \tag{5.3.12a}$$

$$D_\mu D_\nu h_0=\lambda g_{\mu\nu}(X_4), \tag{5.3.12b}$$

$$R_{pq}(Y_6)=\lambda g_{pq}(Y_6). \tag{5.3.12c}$$

ここで，$(Dh_0)^2\neq 0$ なら X_4 が局所平坦となることが示される．

以上より，任意の Ricci 平坦な 4 次元空間 X_4，任意のコンパク Einstein 空間 Y_6 とその上の実調和 3 形式が与えられると，（一般に超対称な）IIB 型超重力理論の CY フラックスコンパクト化解が得られる．ただし，この解は $G_3\neq 0$ なら必ずワープしており，しかもワープ因子 h は必ず特異点をもつ．また，X_4 が平坦な場合には，この任意の解 $h=h_1(y)$ に対し，$h=h_1(y)+a_\mu x^\mu$ 型の解が存在する [Kodama H, Uzawa K 2006[49]]．

5.3.2　例:conifold

【**Example 5.3.1** ($adS^5\times S^5$)】

$$\begin{aligned} ds^2(M)&=ds^2(\mathrm{adS}^5)+L^2ds^2(S^5)\\ &=h^{-1/2}ds^2(E^{3,1})+h^{1/2}\left(dr^2+r^2ds^2(S^5)\right), \end{aligned} \tag{5.3.13a}$$

$$h=\frac{L^4}{r^4}, \tag{5.3.13b}$$

$$F_5=\frac{4}{L^4}(1+*)dr\wedge\Omega(E^{3,1}), \tag{5.3.13c}$$

$$H_3=F_3=0,\quad \phi=C_0=0. \tag{5.3.13d}$$

超対称性: 32kis □

【**Example 5.3.2** (Conifold)】　(Candelas P, de la Ossa XC 1990[16]) 代数多様体

$$x^2 + y^2 + v^2 + w^2 = 0 \tag{5.3.14}$$

は $S^2 \times S^3$ 上のコーンの構造をもつ．これに Kahler 計量を入れた 6 次元空間である，Einstein 空間 $T^{11} (\cong S^2 \times S^3)$ 上のコーン空間へのコンパクト化．

$$ds^2(M) = h^{-1/2} ds^2(E^{3,1}) + h^{1/2} \left(dr^2 + r^2 ds^2(\mathbb{T}^{11}) \right), \tag{5.3.15a}$$

$$ds^2(\mathbb{T}^{11}) = \frac{1}{9} \left(d\psi + \sum_{i=1}^{2} \cos\theta_i \, d\phi_i \right)^2 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{2} \left(d\theta_i^2 + \sin^2\theta_i \, d\phi_i^2 \right), \tag{5.3.15b}$$

$$h = \frac{36 g_s M^2}{r^4} \left[\ln\left(\frac{r}{r_0} \right) + \frac{1}{4} \right] + \frac{C}{r^4}, \tag{5.3.15c}$$

$$F_5 = (1 + *) d(h^{-1}) \wedge \Omega(E^{3,1}), \tag{5.3.15d}$$

$$H_3 = g_s *_Y F_3 = \frac{3 g_s M}{2r} dr \wedge \left[\Omega(S_1^2) - \Omega(S_2^2) \right], \tag{5.3.15e}$$

$$\phi = C_0 = 0. \tag{5.3.15f}$$

超対称性は $N = 1$.　□

【**Example 5.3.3** (KS 解)】　(Klebanov IR, Strassler MJ 2000[46]) 変形コニフォールド

$$x^2 + y^2 + v^2 + w^2 = \epsilon^2 \tag{5.3.16}$$

へのコンパクト化.

$$ds^2(M) = h^{-1/2} ds^2(E^{3,1}) + h^{1/2} ds^2(Y_6), \tag{5.3.17a}$$

$$\begin{aligned} ds^2(Y_6) = \frac{1}{2} \epsilon^2 K(\tau) \Bigg[& \frac{1}{3K^3(\tau)} \left\{ d\tau^2 + (g^5)^2 \right\} + \sinh^2\left(\frac{\tau}{2} \right) \left\{ (g^1)^2 + (g^2)^2 \right\} \\ & + \cosh^2\left(\frac{\tau}{2} \right) \left\{ (g^3)^2 + (g^4)^2 \right\} \Bigg], \end{aligned} \tag{5.3.17b}$$

$$h(x, \tau) = h_0(x) + \alpha \frac{2^{2/3}}{4\epsilon^4} \int_\tau^\infty du \, \frac{u \coth u - 1}{\sinh^2 u} \left\{ \sinh(2u) - 2u \right\}^{1/3}, \tag{5.3.17c}$$

$$F_5 = (1 + *) d(h^{-1}) \wedge \Omega(E^{3,1}), \tag{5.3.17d}$$

$$B_2 = \alpha g_s \left[(1 - F) \tanh^2(\tau/2) g^1 \wedge g^2 + F \coth^2(\tau/2) g^3 \wedge g^4 \right], \tag{5.3.17e}$$

$$H_3 = g_s *_Y F_3 = dB_2, \tag{5.3.17f}$$

$$\phi = C_0 = 0. \tag{5.3.17g}$$

ここで

$$K(\tau) = \frac{\left[\sinh(2\tau) - 2\tau \right]^{1/3}}{2^{1/3} \sinh(\tau)}, \tag{5.3.18}$$

$$F = \frac{\sinh\tau - \tau}{2 \sinh\tau}. \tag{5.3.19}$$

また，基底 $g^1 \sim g^5$ は

$$g^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1 - e^3)\,, \quad g^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^2 - e^4)\,, \quad g^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1 + e^3)\,, \tag{5.3.20}$$

$$g^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^2 + e^4)\,, \quad g^5 = e^5\,, \tag{5.3.21}$$

$$e^1 \equiv -\sin\theta_1\, d\phi_1\,, \quad e^2 \equiv d\theta_1\,, \quad e^3 \equiv \cos\psi\, \sin\theta_2\, d\phi_2\, - \sin\psi\, d\theta_2 \tag{5.3.22}$$

$$e^4 \equiv \sin\psi\, \sin\theta_2\, d\phi_2\, + \cos\psi\, d\theta_2\,, \quad e^5 \equiv d\psi + \cos\theta_1\, d\phi_1\, + \cos\theta_2\, d\phi_2 \tag{5.3.23}$$

この解は $N=1$ 超対称性をもち，$\tau \to \infty$ で漸近的に conifold 解に近づく:

$$ds^2(Y_6) \to dr^2 + r^2 g(\mathbb{T}^{1,1}), \tag{5.3.24}$$

$$r \to \frac{3^{1/2}}{2^{5/6}} \epsilon e^{\tau/3}. \tag{5.3.25}$$

また，至る所滑らかで，コーン型突起の頂点では

$$ds^2 \simeq \frac{\epsilon^2}{12^{1/3}} \left[\frac{1}{2}(d\tau^2 + \tau^2 g(S^2)) + g(S^3) \right] \tag{5.3.26}$$

□

5.3.3　超対称性

超対称変換

$$F_1 = dC_0, \tag{5.3.27}$$

$$F_3 = dC_2 - C_0 H_3, \tag{5.3.28}$$

$$F_5 = dC_4 - H_3 \wedge C_2 : \quad *F_5 = F_5, \tag{5.3.29}$$

$$\tau = C_0 + ie^{-\phi}, \tag{5.3.30}$$

$$G_3 := \tau H_3 - dC_2 = ie^{-\phi} H_3 - F_3, \tag{5.3.31}$$

$$\Gamma^{11}\lambda = -\lambda, \quad \Gamma^{11}\psi_M = \psi_M \tag{5.3.32}$$

に対して，

$$\delta\lambda = \left[\partial\!\!\!/\phi - \frac{1}{12}\left(H\!\!\!\!/ - ie^{\phi} F\!\!\!\!/_{[3]}\sigma_2 \right)\sigma_3 - e^{\phi} F\!\!\!\!/_{[1]} i\sigma_2 \right]\epsilon, \tag{5.3.33a}$$

$$\begin{aligned} \delta\psi_M &= \nabla_M \epsilon - \frac{1}{8} H\!\!\!\!/_M \sigma_3 \epsilon + \frac{e^{\phi}}{48} F\!\!\!\!/_{[3]} \Gamma_M \sigma_1 \epsilon \\ &\quad + e^{\phi}\left(\frac{1}{8} F\!\!\!\!/_{[1]} + \frac{1}{16\cdot 5!} F\!\!\!\!/_{[5]} \right)\Gamma_M i\sigma_2 \epsilon. \end{aligned} \tag{5.3.33b}$$

ここで，

$$\nabla_M = \partial_M + \frac{1}{4}\omega_{ABM}\Gamma^{AB}. \tag{5.3.34}$$

仮定

- 計量とディラトン

$$ds^2 = h(y)^{-1/2} ds_2(X_4) + h(y)^{1/2} ds_2(Y_6), \tag{5.3.35}$$
$$\phi = 0 \tag{5.3.36}$$

- フラックス

$$\tilde{G}_{[3]} = \frac{1}{3!} G_{lmn}(y) dy^l \wedge dy^m \wedge dy^n, \tag{5.3.37a}$$
$$*_Y G_{[3]} = iG_{[3]}$$
$$\Leftrightarrow \quad *_Y H = -e^{\phi} F_3, \quad *_Y F_3 = e^{-\phi} H, \tag{5.3.37b}$$
$$\tilde{F}_{[5]} = -h^2(1+*) dh \wedge \Omega(X_4)$$

Killing spinor　(おそらく正しくない)

$$\delta\lambda = -\frac{1}{2} h^{-3/4} \not{H} \sigma_3 (1 - \hat{\gamma}_7 \sigma_2) \epsilon = 0, \tag{5.3.38a}$$
$$\delta\psi_\mu = \nabla^X_\mu \epsilon - i \frac{A}{48B^3} \gamma_\mu \hat{\gamma}_7 \hat{\not{F}}_3 \sigma_3 \epsilon = 0, \tag{5.3.38b}$$
$$\delta\psi_m = B^{-1/2} \nabla^Y_m \left(B^{1/2} \epsilon\right) - \frac{i}{48B^2} \hat{\gamma}_7 \hat{\gamma}_m \hat{\not{F}}_3 \sigma_3 \epsilon = 0. \tag{5.3.38c}$$

したがって，条件

$$(1 - \hat{\gamma}_7 \sigma_2)\epsilon = 0, \quad \hat{\not{F}}_3 \epsilon = 0 \tag{5.3.39}$$

を課せば，Killing スピノール方程式はフラックスがない場合と同じく

$$\nabla_\mu \epsilon = 0, \quad \nabla_m B^{1/2} \epsilon = 0 \tag{5.3.40}$$

に帰着される．特に，Y は conformally Calabi-Yau（$ds^2(Y)$ が CY）となる．ただし，Killing スピノールの数は，$H \neq 0$ なら一般には $32/2/4 = 4$ となる．また，$H = F = 0$ なら一般には条件が Killing spinor 方程式の整合性条件 $\hat{R}_{mnpq} \hat{\gamma}^{pq} \epsilon = 0$ のみとなるので，Killing スピノールの数は $4 \times 2 = 8$ 個．

§5.4
4 次元 $N=1$ 超重力理論

5.4.1　構成要素

カイラル場セクター

- スカラ多様体: $(z^\alpha) \in \mathscr{M}$: Kähler 多様体
- **Kähler ポテンシャル**: $K(z,\bar{z})$
- 超ポテンシャル: $W(z)$

  これらのポテンシャルは，Kähler 変換

$$K \to K' = K(z,\bar{z}) + f(z) + \overline{f(z)}, \tag{5.4.1a}$$
$$W \to e^{-f(z)} W \tag{5.4.1b}$$

  の任意性をもつ．

ゲージセクター

- ゲージ群: 構造定数 $f_{AB}{}^C \to G$
- ゲージ結合関数: $f_{AB}(z)$ (holomorphic)
- **Gauging Killing ポテンシャル**: $\mathscr{P}_A(z,\bar{z})$

  t_A を G の Killing ベクトル基底とするとき，

$$k_A^\alpha(z) = -ig^{\alpha\bar{\beta}}\partial_{\bar{\beta}}\mathscr{P}_A(z,\bar{z}); \quad \nabla_\alpha\partial_\beta\mathscr{P}_A(z,\bar{z}) = 0 \tag{5.4.2}$$

  と表される $(\mathscr{M},K)$ の holomorphic Killing vector k_A^α を用いて，gauging $G \subset \mathrm{Isom}(\mathscr{M})$ が $t_A \mapsto k_A^\alpha$ により定義される．群 G を生成する条件は，

$$g_{\alpha\bar{\beta}}\left(k_A^\alpha k_B^{\bar{\beta}} - k_B^\alpha k_A^{\bar{\beta}}\right) = if_{AB}{}^C\mathscr{P}_C. \tag{5.4.3}$$

  理論のゲージ不変性を保つため，K, W, f_{AB} はゲージ変換

$$\delta A^A = D\theta^A = d\theta^A + A^B\theta^C f_{BC}{}^A, \tag{5.4.4a}$$
$$\delta z^\alpha = \theta^A k_A^\alpha(z) \tag{5.4.4b}$$

に対して，次の変換性をもつことが要求される：

$$\delta K = \theta^A[r_A(z) + \overline{r_A(z)}]; \quad r_A = \partial_{k_A} K + i\mathscr{P}_A, \tag{5.4.5a}$$

$$\delta W = -\theta^A r_A W, \tag{5.4.5b}$$

$$\delta f_{AB} = \theta^C \left(2 f_{C[A}{}^D f_{B)D} + iC_{AB,C}\right). \tag{5.4.5c}$$

5.4.2 Lagrangian

$$\begin{aligned}
e^{-1}\mathscr{L} \;=\;& \frac{1}{2\kappa^2}\left[R(e) - \bar{\psi}_\mu R^\mu\right] \\
& -g_{\alpha\bar{\beta}}\left[\hat{D}_\mu z^\alpha \hat{D}^\mu \bar{z}^{\bar{\beta}} + \frac{1}{2}\bar{\chi}^\alpha \not{D}^{(0)}\chi^{\bar{\beta}} + \frac{1}{2}\bar{\chi}^{\bar{\beta}}\not{D}^{(0)}\chi^\alpha\right] - V \\
& -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(f_{AB})\left[F^A\cdot F^B + \bar{\lambda}^A \not{D}^{(0)}\lambda^B\right] \\
& +\left[\frac{1}{2}\mathrm{Im}\,(f_{AB})F^A\cdot\tilde{F}^B + \frac{i}{4}\hat{D}_\mu(\mathrm{Im}\,(f_{AB})\bar{\lambda}^A\gamma_*\gamma^\mu\lambda^B\right] \\
& +\frac{1}{8}\mathrm{Re}\,(f_{AB})\bar{\psi}_\mu\gamma^{ab}(F^A_{ab} + \hat{F}^A_{ab})\gamma^\mu\lambda^B \\
& +\frac{1}{\sqrt{2}}\left[g_{\alpha\bar{\beta}}\bar{\psi}_\mu \hat{\not{D}}\bar{z}^{\bar{\beta}}\gamma^\mu\chi^\alpha + \mathrm{h.c.}\right] \\
& +\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[f_{AB,\alpha}\bar{\lambda}^A\gamma^{ab}\hat{F}^B_{ab}\chi^\alpha + \mathrm{h.c.}\right] \\
& +\mathscr{L}_m + \mathscr{L}_{\mathrm{mix}} + \mathscr{L}_{4f}.
\end{aligned} \tag{5.4.6}$$

ここで，共変微分は

$$\hat{D}_\mu z^\alpha = \partial_\mu z^\alpha - A^A_\mu k^\alpha_A, \tag{5.4.7}$$

$$D^{(0)}_\mu \chi^\alpha = \left(\nabla_\mu + \frac{3}{2}i\mathscr{A}_\mu\right)\chi^\alpha - A^A_\mu \partial_\beta k^\alpha_A \chi^\beta + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\chi^\gamma \hat{D}_\mu z^\beta, \tag{5.4.8}$$

$$\nabla_\mu \chi^\alpha = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_{\mu ab}\gamma^{ab}\right)\chi^\alpha. \tag{5.4.9}$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = g^{\alpha\bar{\delta}}\partial_\beta g_{\gamma\bar{\delta}}, \tag{5.4.10}$$

$$\mathscr{A}_\mu = \frac{i\kappa^2}{6}\left(\partial_\mu z^\alpha \partial_\alpha K - \partial_\mu \bar{z}^\alpha \partial_{\bar{\alpha}} K\right) - \frac{\kappa^2}{3}A^A_\mu \mathscr{P}_A. \tag{5.4.11}$$

また，

$$R^\mu = \gamma^{\mu\rho\sigma}\left(\nabla_\rho - \frac{3}{2}i\mathscr{A}\rho\gamma_*\right)\psi_\sigma, \tag{5.4.12}$$

$$\hat{F}^A_{ab} = F^A_{ab} + e^\mu_a e^\nu_b \bar{\psi}_{[\mu}\gamma_{\nu]}\lambda^A. \tag{5.4.13}$$

スカラポテンシャル

$$V = V_- + V_+; \tag{5.4.14}$$
$$V_- = -3\kappa^2 e^{\kappa^2 K}|W|^2, \tag{5.4.15}$$
$$V_+ = e^{\kappa^2 K}(D_\alpha W)g^{\alpha\bar{\beta}}\overline{D_\beta W} + \frac{1}{2}(\mathrm{Re}\,(f)^{-1})^{AB}\mathscr{P}_A\mathscr{P}_B. \tag{5.4.16}$$

このポテンシャルは，

$$\mathscr{G} = \kappa^2 K + \log(\kappa^6|W|^2) \tag{5.4.17}$$

を用いて，

$$V = V_F + V_D; \tag{5.4.18}$$
$$\begin{aligned} V_F &= e^{\kappa^2 K}\left(-3\kappa^2|W|^2 + g^{\alpha\bar{\beta}}D_\alpha W\overline{D_\beta W}\right) \\ &= \kappa^{-4}e^{\mathscr{G}}\left(\mathscr{G}^{\alpha\bar{\beta}}\partial_\alpha\partial_{\bar{\beta}}\mathscr{G} - 3\right), \end{aligned} \tag{5.4.19}$$
$$V_D = \frac{1}{2}(\mathrm{Re}\,(f)^{-1})^{AB}\mathscr{P}_A\mathscr{P}_B \tag{5.4.20}$$

と書くことができる．ここで，$\mathscr{G}^{\alpha\bar{\beta}}$ は $\mathscr{G}_{\alpha\bar{\beta}} = \kappa^2 g_{\alpha\bar{\beta}}$ の逆転置行列．

フェルミオン質量項

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_m &= \frac{1}{2}m_{3/2}\bar{\psi}_\mu P_R\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu \\ &\quad -\frac{1}{2}m_{\alpha\beta}\bar{\chi}^\alpha\chi^\beta - m_{\alpha A}\bar{\chi}^\alpha\lambda^A - \frac{1}{2}m_{AB}\bar{\lambda}^A P_L\lambda^B + \mathrm{h.c.} \end{aligned} \tag{5.4.21}$$

ここで，

$$m_{3/2} = \kappa^2 e^{\kappa^2 K/2}W, \tag{5.4.22a}$$
$$\begin{aligned} m_{\alpha\beta} &= e^{\kappa^2 K/2}D_\alpha D_\beta W \\ &\equiv e^{\kappa^2 K/2}\left[\left(\partial_\alpha + \kappa^2\partial_\alpha K\right)D_\beta W - \gamma^\gamma_{\alpha\beta}D_\gamma W\right], \end{aligned} \tag{5.4.22b}$$
$$m_{\alpha A} = m_{A\alpha} = i\sqrt{2}\left[\partial_\alpha\mathscr{P}_A - \frac{1}{4}f_{AB,\alpha}(\mathrm{Re}\,(f)^{-1})^{BC}\mathscr{P}_C\right], \tag{5.4.22c}$$
$$m_{AB} = -\frac{1}{2}e^{\kappa^2 K/2}f_{AB,\alpha}g^{\alpha\bar{\beta}}\overline{D_\beta W}. \tag{5.4.22d}$$

また，グラヴィティーノとスピン 1/2 フェルミオンとの混合項は

$$\mathscr{L}_{\mathrm{mix}} = \bar{\psi}\cdot\gamma\left[\frac{1}{2}iP_L\lambda^A\mathscr{P}_A + \frac{1}{\sqrt{2}}\chi^\alpha e^{\kappa^2 K/2}D_\alpha W\right] + \mathrm{h.c.} \tag{5.4.23}$$

5.4.3　変換則

局所超対称変換＋ゲージ変換

$$\begin{aligned}
\delta e_\mu^a &= \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma^a\psi_\mu, &\text{(5.4.24a)}\\
\delta P_L\psi_\mu &= \left(\nabla_\mu - \frac{3}{2}i\mathscr{A}_\mu\right)P_L\epsilon + \frac{1}{2}\kappa^2\gamma_\mu e^{\kappa^2K/2}P_R\epsilon \\
&\quad +\frac{1}{4}\kappa^2 P_L\psi_\mu\theta^A(\bar{r}_A - r_A) + \text{cubic in fermions}, &\text{(5.4.24b)}\\
\delta z^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}\chi^\alpha + \theta^A k_A^\alpha, &\text{(5.4.24c)}\\
\delta\chi^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}P_L\left(\hat{\not{D}}z^\alpha - e^{\kappa^2K/2}g^{\alpha\bar{\beta}}\overline{D_\beta W}\right)\epsilon \\
&\quad +\theta^A\left[\partial_\beta k_A^\alpha\chi^\beta + \frac{1}{4}\kappa^2(r_A - \bar{r}_A)\chi^\alpha\right] + \text{cubic in fermions}, &\text{(5.4.24d)}\\
\delta A_\mu^A &= -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda^A + \partial_\mu\theta^A + \theta^C A_\mu^B f_{BC}{}^A, &\text{(5.4.24e)}\\
\delta\lambda^A &= +\left[\frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^A + \frac{1}{2}i\gamma_*(Re(f)^{-1})^{AB}\mathscr{P}_B\right]\epsilon \\
&\quad +\theta^B\left[\lambda^C f_{CB}{}^A + \frac{1}{4}\kappa^2\gamma_*(\bar{r}_B - r_B)\lambda^A\right] + \text{cubic in fermions} &\text{(5.4.24f)}
\end{aligned}$$

5.4.4　超対称真空

ある状態が超対称であるための条件は，局所超対称変換の構造より，

$$\langle\delta\chi^\alpha\rangle = 0 \;\Rightarrow\; D_\alpha W = 0, \tag{5.4.25a}$$

$$\mathscr{D}_\mu\epsilon \equiv \left(\nabla_\mu - \frac{3}{2}i\mathscr{A}_\mu\right)P_L\epsilon + \frac{1}{2}\kappa^2\gamma_\mu e^{\kappa^2K/2}P_R\epsilon = 0, \tag{5.4.25b}$$

$$\left[\frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^A + \frac{1}{2}i\gamma_*(\mathrm{Re}\,(f)^{-1})^{AB}\mathscr{P}_B\right]\epsilon = 0 \tag{5.4.25c}$$

これより，超対称性をもつ真空のエネルギーはゼロないし負となる：

$$V = e^K\left(K^{\alpha\bar{\beta}}D_\alpha W\overline{D_\beta W} - 3|W|^2\right) = -3|W|^2. \tag{5.4.26}$$

また，超対称真空は必ず安定となる．実際，$DW = 0$ を考慮すると

$$\begin{aligned}
2\delta^2 V &= e^K\left[K^{\alpha\bar{\beta}}d(D_\alpha W)d(\overline{D_\beta W}) - 3dz^k\bar{W}d(D_kW) + \text{cc}\right] \\
&= e^K K^{\alpha\bar{\beta}}X_\alpha\overline{X_\beta} + \Delta m^2 K_{\alpha\bar{\beta}}dz^\alpha d\bar{z}^\beta. &\text{(5.4.27)}
\end{aligned}$$

ここで，

$$X_\alpha = d(D_\alpha W) - \frac{3}{2}K_{\alpha\bar{\beta}}d\bar{z}^\beta W, \tag{5.4.28}$$

$$\Delta m^2 = \frac{9}{4}|W|^2 e^K. \tag{5.4.29}$$

これより，質量固有値の2乗 m_α^2 は

$$m_\alpha^2 > \Delta m^2 = -\frac{3}{4}|\Lambda| = \text{BF bound}. \tag{5.4.30}$$

（注）

$$X_\alpha = \partial_\beta(D_\alpha W)dz^\beta - \frac{1}{2}WK_{\alpha\bar{\beta}}d\bar{z}^\beta \tag{5.4.31}$$

5.4.5　η 問題

インフラトン Φ が標準的な運動項をもつとすると，

$$K = \Phi\bar{\Phi} + \cdots \;\Rightarrow\; K_{\Phi\bar{\Phi}} = 1 \;\Rightarrow\; e^{-1}\mathscr{L} = -D\Phi\cdot D\bar{\Phi} + \cdots \tag{5.4.32}$$

他の場が安定化されていて，スーパーポテンシャルが Φ に依存しないとすると，

$$\partial_\Phi W = 0 \;\Rightarrow\; V_F = e^{|\Phi|^2}\left(V_0 + |\Phi|^2|W|^2\right). \tag{5.4.33}$$

よって，Φ の質量は

$$m^2 = \begin{cases} V_F + e^{|\Phi|^2}|W|^2 \\ (1+2|\Phi|^2)V_F + e^{|\Phi|^2}(1+4|\Phi|^2)|W|^2 \end{cases} \geqslant V_F \simeq 3H^2 \tag{5.4.34}$$

したがって，η パラメータに対して次の制限を得る：

$$\eta = \frac{V''}{V} = \frac{m^2}{V_F} \geqslant 1 \tag{5.4.35}$$

シフト対称性　Φ の Kähler ポテンシャルが

$$K = F(\Phi \pm \bar{\Phi}) \tag{5.4.36}$$

という構造を持てば，Φ の実部ないし虚部の後方に対し η 問題は回避される．例えば，$K = -1/2(\Phi - \bar{\Phi})^2$ は標準的な運動項を生み出し，かつ η 問題を起こさない．

§5.5
KKLT

5.5.1　KKLT モデル

- 基本モデル
  - IIB 型理論の no scale ISD CY フラックスコンパクト化（複素モジュライ固定)[Giddings SB, Kachru S, Polchinski J 2002[38]]

$$K = -3\ln(\rho+\bar\rho)W = W(z) \Rightarrow V = e^K(K^{i\bar j}D_iWD_{\bar j}\bar W-|W|^2) = e^K K^{a\bar b}D_aWD_{\bar b}W \tag{5.5.1}$$

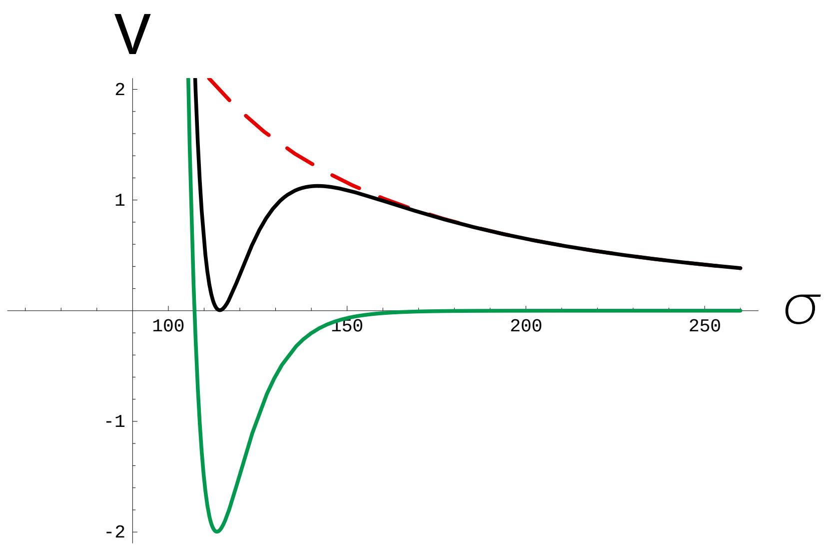
ここで，$i=(\rho,a)$.

- 非摂動論効果（インスタントン/gaugino 凝縮:Witten E 1996[65];Tripathy PK, Trivedi SP 2003[62];Gorlich L, Kachru S, Tripathy PK, Trivedi SP 2004[39]) ⇒ Kahler モジュライの安定化

$$K = -3\ln(\rho+\bar\rho), \quad W = W_0 + Ae^{-a\rho}\ (a=2\pi/N). \tag{5.5.2}$$

⇒ $N=1$ 超対称な adS 真空

- 反 D3 ブレインにより超対称性を破り Minkowski 真空（ないし dS 真空）を実現．または，磁化 D7 ブレインの誘起する超ポテンシャルの D 項により自発的に SUSY を破る．



5.5.2 Flux コンパクト化により得られる 4 次元超重力理論

II 型超重力理論では，RR フォームフラックスが存在しない直積型コンパクト化はモジュライに対する超ポテンシャルを生み出さない．しかし，フラックス存在すると，有限なポテンシャルが生じる．(Gukov S, Vafa C, Witten E 2000[40]; Giddings SB, Kachru S, Polchinski J 2002[38])

Moduli についての仮定 IIB 型理論において，計量が

$$ds^2 = e^{-4u(x)} ds^2(X_4) + e^{4u(x)} ds_2(Y_6) \tag{5.5.3}$$

の形をしていて，モジュライ場が次の構成（対応する $N = 1$ 超組）を持つとする：

- 重力場：$g_{\mu\nu}$
- dilaton-axion 場： $\tau = C_0 + ie^{-\Phi}$
- サイズモジュラス：$\rho = b/\sqrt{2} + ie^{4u}$. ここで，

$$C_{[4]} = a_{[2]} \wedge J \;\Rightarrow\; da_{[2]} = e^{-8u} *_X db \tag{5.5.4}$$

- 複素モジュライ： $z^a,\ a = 1, \cdots, h^{2,1}$

τ, ρ セクター このとき，10 次元作用積分より，τ, ρ に対する作用積分は

$$S = \frac{1}{2\kappa_4^2} \int_X d\mathrm{vol}(X) \left(R(X) - 2\frac{\nabla\tau \cdot \nabla\bar{\tau}}{|\tau - \bar{\tau}|^2} - 6\frac{\nabla\rho \cdot \nabla\bar{\rho}}{|\rho - \bar{\rho}|^2} \right) \tag{5.5.5}$$

ここで，

$$\kappa_4^2 = \frac{\kappa_{10}^2}{\mathrm{vol}(Y)} \tag{5.5.6}$$

これは，次の Kähler ポテンシャルに対応する：

$$\mathscr{K}_1 = -\ln\left[-i(\tau - \bar{\tau})\right] - 3\ln\left[-i(\rho - \bar{\rho})\right] \tag{5.5.7}$$

超ポテンシャルはゼロである．

複素構造モジュライセクター 一方，複素構造モジュライに対する Kähler ポテンシャルは，一般論より，

$$\mathscr{K}_2 = -\ln\left(-i\int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega}\right) \tag{5.5.8}$$

で与えられる．ポテンシャルを求めるため，上記のモジュライ場による表式を１０次元作用積分に代入すると，$G_{[3]}$ を含む項

$$S_G = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2}\int_X d\mathrm{vol}(X)\int_Y \frac{1}{\mathrm{Im}\,\tau}*_Y G_{[3]}\wedge\bar{G}_{[3]} \tag{5.5.9}$$

が残る．ここで，$G_{[3]}$ をカイラル分解する：

$$G_{[3]} = G_{[3]}^+ + G_{[3]}^-; \quad *_Y G_{[3]}^\pm = \mp i G_{[3]}^\pm, \tag{5.5.10}$$

すると，

$$\alpha_3^+\wedge\beta_3^+ = 0, \quad \alpha_3^-\wedge\beta_3^- = 0 \tag{5.5.11}$$

より

$$\begin{aligned} *_Y G\wedge\bar{G} &= i(-G^+ + G^-)\wedge(\bar{G}^+ + \bar{G}^-) = -2iG^+\wedge\bar{G}^+ + iG\wedge\bar{G} \\ &= -2iG^+\wedge\bar{G}^+ + 2(\mathrm{Im}\,\tau)H_{[3]}\wedge F_{[3]} \end{aligned} \tag{5.5.12}$$

よって， S_G は

$$S_G = \int_X d\mathrm{vol}(X)\left[-V - \int_Y H_{[3]}\wedge F_{[3]}\right] \tag{5.5.13}$$

ここで，第２項は $H_{[3}$ および $F_{[3]}$ のコホモロジー類のみで決まる位相的項．一方，V は

$$V = -\frac{i}{2\kappa_{10}^2\mathrm{Im}\,\tau}\int_Y G_{[3]}^+\wedge\bar{G}_{[3]}^+ \tag{5.5.14}$$

（$\mathrm{Im}\,\tau = 1/g_s = \mathrm{const}$ を仮定）．

このポテンシャルは，次の超ポテンシャル

$$W = \int_Y G_{[3]}\wedge\Omega \tag{5.5.15}$$

から導かれることを示す．まず，調和３形式が

$$*_Y\Omega = -i\Omega, \quad *_Y\chi_a = i\chi_a \tag{5.5.16}$$

となることに注意する．これより，

$$G_{[3]}^+ = w_0\Omega + \bar{w}^{\bar{a}}\bar{\chi}_{\bar{a}}; \quad w_0 = \frac{\int_Y G_{[3]}\wedge\bar{\Omega}}{\int_Y \Omega\wedge\bar{\Omega}},\ \bar{w}^{\bar{a}} = G^{\bar{a}b}\frac{\int_Y G_{[3]}\wedge\chi_b}{\int_Y\Omega\wedge\bar{\Omega}}. \tag{5.5.17}$$

よって，

$$V = \frac{\int_Y G_{[3]}\wedge\bar{\Omega}\int_Y\bar{G}_{[3]}\wedge\Omega + K^{a\bar{b}}\int_Y G_{[3]}\wedge\chi_a\int_Y\bar{G}_{[3]}\wedge\bar{\chi}_{\bar{b}}}{2(\mathrm{Im}\,\tau)\kappa_{10}^2(-i)\int_Y\Omega\wedge\bar{\Omega}}. \tag{5.5.18}$$

一方，

$$K = -\ln[-i(\tau - \bar{\tau})] - 3\ln[-i(\rho - \bar{\rho})] - \ln[-i\int \Omega \wedge \bar{\Omega}] \tag{5.5.19}$$

に対して，

$$\partial_\tau K = \frac{1}{\bar{\tau} - \tau}, \quad \partial_\rho K = \frac{3}{\bar{\rho} - \rho}, \quad \partial_a K = -k_a, \tag{5.5.20}$$

$$K_{\tau\bar{\tau}} = \frac{1}{|\bar{\tau} - \tau|^2}, \quad K_{\rho\bar{\rho}} = \frac{3}{|\bar{\rho} - \rho|^2} \tag{5.5.21}$$

より，

$$D_\tau W = \frac{1}{\bar{\tau} - \tau}\int_Y \bar{G} \wedge \Omega, \tag{5.5.22a}$$

$$D_\rho W = \frac{3}{\bar{\rho} - \rho} W, \tag{5.5.22b}$$

$$D_a W = \int_Y G \wedge \chi_a. \tag{5.5.22c}$$

よって，超ポテンシャルとポテンシャルの関係式は

$$\begin{aligned} V &= \frac{e^K}{\kappa^2}\left[K^{i\bar{j}} D_i W \overline{D_j W} - 3|W|^2\right] \\ &= \frac{e^K}{\kappa^2}\left[|\bar{\tau} - \tau|^2 |D_\tau W|^2 + K^{a\bar{b}} D_a W \overline{D_b W}\right] \\ &= \frac{\int_Y G_{[3]} \wedge \bar{\Omega} \int_Y \bar{G}_{[3]} \wedge \Omega + K^{a\bar{b}} \int_Y G_{[3]} \wedge \chi_a \int_Y \bar{G}_{[3]} \wedge \bar{\chi}_{\bar{b}}}{2(\mathrm{Im}\,\tau)(2\mathrm{Im}\,\rho)^3 \kappa^2 (-i) \int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega}} \end{aligned} \tag{5.5.23}$$

5.5.3 No-scale structure

CY に対する一般的な Kähler モジュライの定義　$D_j (j = 1, \cdots, h^{1,1})$ を $H_4(Y, \mathbb{R})$ の基底となる divisors, D_j^* をその Hodge 双対から得られる $H^2(Y, \mathbb{R})$ の基底とする．このとき，Y の Kähler 形式 ω は $h^{1,1}$ 個の実パラメータ t^j を用いて

$$\omega = \sum_j t^j D_j^* \tag{5.5.24}$$

と表される．このとき，t^j は D_j^* の双対となる $H_2(Y, \mathbb{R})$ の基底 σ_j の体積となり，

$$t^j = \int_{\sigma_j} \omega \tag{5.5.25}$$

Y の体積 $\mathscr{V}$ は

$$\mathscr{V} \equiv \frac{1}{3}\int_Y \omega^3 = \frac{1}{6}\kappa_{jkl} t^j t^k t^l. \tag{5.5.26}$$

また，divisor D_j の体積 τ_j は

$$\tau_j = \partial_{t_j}\mathscr{V} = \frac{1}{2}\kappa_{jkl}t^k t^l \tag{5.5.27}$$

この記法の元，複素 Kähler 変数 ρ_j を

$$\rho_j = b_j + i\tau_j \tag{5.5.28}$$

により定義する．ここで，アクシオン場 b_j は，RR 場 $C_{[4]}$ により

$$b_j = \int_{D_j} C_{[4]} \tag{5.5.29}$$

で定義される．

フラックスコンパクト化の no-scale 構造　一般に，フラックスコンパクトされた IIB 理論の 4 次元有効理論は，次の $N = 1$ 超重力理論で与えられる：

$$K = -\ln[-i(\tau - \bar{\tau})] - 2\ln[\mathscr{V}] - \ln[-i\int \Omega \wedge \bar{\Omega}], \tag{5.5.30a}$$

$$W = \int_Y G_{[3]} \wedge \Omega \tag{5.5.30b}$$

W は Kähler モジュライに依存しないので，この系のポテンシャルは no-scale 構造をもつ：

$$V = e^K \sum_{a,b} K^{a\bar{b}} D_a W D_{\bar{b}} \bar{W}. \tag{5.5.31}$$

ここで，a, b は axion-dilaton および複素モジュライを動く．

Proof. まず，

$$\begin{aligned} K_j \quad &= \quad \partial_{\rho_j}K = i\mathscr{V}^{-1}\partial_{\tau_j}\mathscr{V} = i\mathscr{V}^{-1}\frac{\partial t^m}{\partial \tau_j}\tau_m \\ &= 3 \quad i\mathscr{V}^{-1}\partial_{\tau_j}\mathscr{V} - i\mathscr{V}^{-1}t^j \end{aligned} \tag{5.5.32}$$

より，

$$K_j = \frac{i}{2\mathscr{V}}t^j. \tag{5.5.33}$$

また，

$$K_{j\bar{k}} = -\frac{1}{4\mathscr{V}}\frac{\partial t^j}{\partial \tau_k} + \frac{1}{8\mathscr{V}^2}t^j t^k \tag{5.5.34}$$

より，

$$K_{j\bar{k}}\tau^k = \frac{1}{4\mathscr{V}}t^j \;\Rightarrow\; K^{j\bar{k}}t^j = 4\mathscr{V}\tau_k. \tag{5.5.35}$$

よって，

$$|W|^{-2}K^{j\bar{k}}D_j W\overline{D_k W} = K^{j\bar{k}}K_j K_{\bar{k}} = \frac{1}{4\mathscr{V}^2}K^{j\bar{k}}t^j t^k = \frac{1}{\mathscr{V}}\tau_k t^k = 3. \tag{5.5.36}$$

Q.E.D.

5.5.4　複素モジュライの固定

基底状態では $V=0$ より，$G_{[3]}$ は ISD(imaginary self-dual) となる：

$$D_a W = 0 \;\Rightarrow\; G^+_{[3]} = 0 \;\Rightarrow\; *_Y G_{[3]} = i G_{[3]} \text{ ISD} \tag{5.5.37}$$

この条件は，

$$G_{[3]} \in \mathscr{H}^{2,1} \oplus \mathscr{H}^{0,3} \tag{5.5.38}$$

と同等で，複素構造モジュライ（+ dilaton-axion）に対する $h^{2,1}+1$ 個の拘束条件となるので，一般にそれらの値を完全に決定する．

ただし，超対称性はより強い条件 $D_\tau W = K_\tau D = 0$, $D_i W = K_i W = 0$（任意の i）を要求する．今のモデルでは，この条件は，$\mathscr{D}_\rho W = 0 \;\Rightarrow\; W = 0$，したがって，

$$G_{[3]} \in \mathscr{H}^{2,1} \tag{5.5.39}$$

を要求する．

また，この基底状態は，フラックス $G_{[3]}$ に依存するが，超ポテンシャルの形より，正確には $G_{[3]}$ のコホモロジー類にのみ依存する：

$$\int_{A_j} F_3 = 4\pi^2\alpha' M_j,\; \int_{B_j} H_3 = -4\pi^2\alpha' K_j \tag{5.5.40}$$

さらに，弦理論においては，これらの (M_j, K_j) は整数に量子化される．

5.5.5　非摂動論的量子効果

摂動論の範囲では，Kähler モジュライの超ポテンシャルはゼロであるが，非摂動論的効果を考慮すると自明でないポテンシャルが生成される可能性がある．例えば，IIB モデルの F 理論的記述において，１２次元の時空が 8 次元 CY_8 により 4 次元にコンパクト化される際に，CY_8 が算術種数 1 の divisor D を含む場合（$\chi(D, \mathscr{O}_D) = 1$)，超ポテンシャルにサイズモジュラスに依存した項が加わる：(Witten E 1996 [64])

$$W = W_0(z) + A(z)e^{ia\rho}; \quad a = 2\pi/n,\; n = 1, 2, \cdots. \tag{5.5.41}$$

このとき，対応するポテンシャル $V(\rho)$ は，$\sigma = e^{4u} = \mathrm{Im}\,\rho$ に関して最小点 ρ_m を持つようになる．この最小点は，$V(\rho_m) < 0$ より AdS^4 時空を与える (KKLT[45]. また，この基底状態は $N=1$ 超対称性を保つ．

ここで，真空はフラックスを特徴づける整数値の組 (M_j, N_j) ごとに決まり，宇宙項の値が準連続となる無限個の超対称な真空の集合を与える（ランドスケープ問題）．

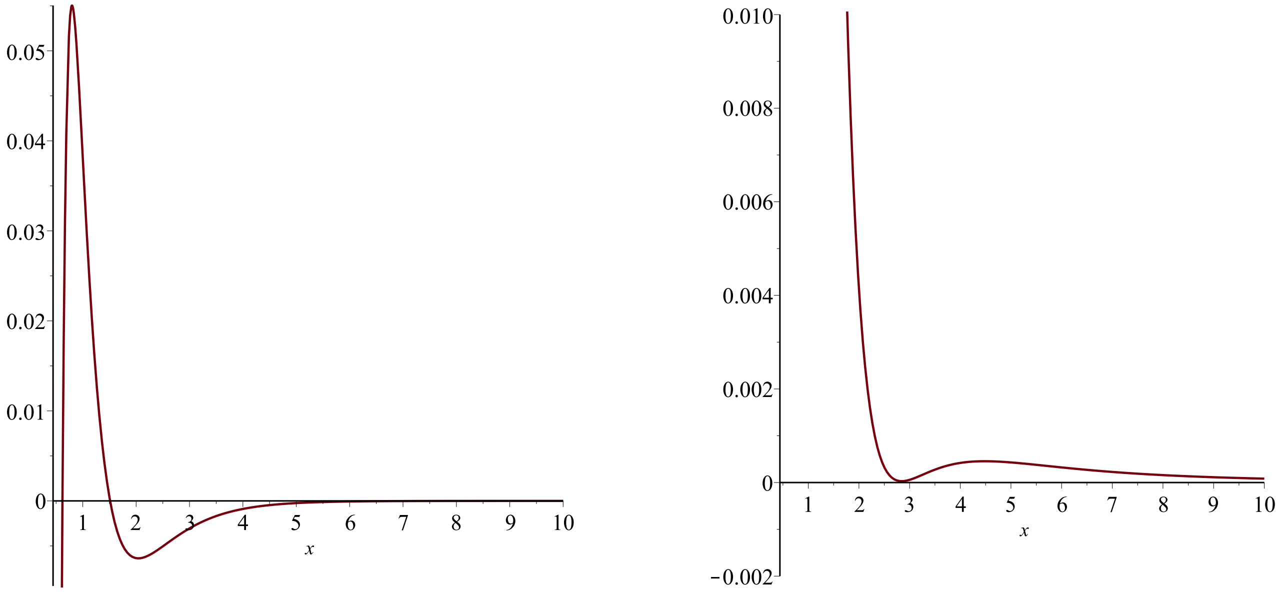


図 5.1: KKLT シナリオにおいて，複素構造モジュライを固定し，非摂動論的効果を加えたときのポテンシャル V/D（左），およびそれに反 D3 ブレーンを加えて uplift したポテンシャル $V/D + E/x^3$. $C/D = 3, E = 0.084$ の場合.

σ に対するポテンシャルは，複素構造モジュライ z が固定されたとすると，$b = \mathrm{Re}\,\rho$ について最小化して，

$$V = \frac{C}{x}e^{-2x} - \frac{D}{x^2}e^{-x}; \quad x = a\sigma, \tag{5.5.42}$$

$$C = \frac{a^3|A|^2}{6}, \quad D = \frac{a^3|A||W|}{2}. \tag{5.5.43}$$

このポテンシャルは，

$$\frac{C}{D} = \frac{|A|}{3|W|} > 2.5865\cdots \tag{5.5.44}$$

のとき極大点 $x = x_1$ と極小点 $x = x_2$ をもつ.

5.5.6　Vacuum uplift

References

- Kachru S, Pearson J, Verlinde H: jhep0206, 021 (2002)

  ”Brane/flux annihilation and the string dual of a non-supersymmetric field theory”

Fractional D3 ブレーン ($H \wedge F$) のみが存在する場合の Warped コンパクト化の突起部分を表す Klebanov-Strassler 解（deformed conifold) は，

$$\int_{S^3} F_3 = 4\pi^2 M \tag{5.5.45}$$

とすると，突起の先端近傍で

$$\begin{aligned} ds^2 &= h(r)^{-1/2} g(X_4) + h(r)^{1/2} g(CY_3) \\ &\simeq a_0^2 g(X_4) + g_s M b_0^2 \left(\frac{dr^2}{2} + d\Omega_3^2 + r^2 d\Omega_2^2 \right) \end{aligned} \tag{5.5.46}$$

とあらわされる．ここで，

$$a_0^2 \simeq \frac{\epsilon^{4/3}}{g_s M}, \quad b_0^2 \simeq 0.93266 \tag{5.5.47}$$

である．

いま，この空間に反 D3 ブレーンを入れると，F_5 フラックスによる力

$$F_r(r) = -2\mu_3 \partial_r (h^{-1}) \tag{5.5.48}$$

により突起の先端 $r = 0$ に引かれそこに溜る．一般に，反 $D3$ ブレーンの作用積分は

$$\begin{aligned} S_{\bar{D}3} &= \frac{\mu_3}{g_s} \int \mathrm{Tr} \sqrt{\det(G_{/\!/} + 2\pi g_s F) \det Q} \\ &\quad -2\pi\mu_3 \int \mathrm{Tr} I_\Phi I_\Phi B_6. \end{aligned} \tag{5.5.49}$$

これに apex 近傍での計量と場の値を代入し，adjoint スカラ Φ について極小化することにより次のポテンシャルを得る：

$$\tilde{V}_{\text{eff}} \simeq 2\frac{\mu_3}{g_s} \left(p - \frac{\pi^2}{6} g_s^8 f^4 p (p^2 - 1) \right) \simeq 2\frac{\mu_3 p}{g_s} \left(1 - \frac{8\pi^2 (p^2 - 1)}{3 b_0^{12} M^2} \right). \tag{5.5.50}$$

これにワープ因子を考慮すると，

$$V_{\text{eff}} \simeq \frac{a_0^4}{h(0)^3} \tilde{V}_{\text{eff}} = \frac{8D}{\sigma^3}; \tag{5.5.51}$$

$$D \simeq \frac{2 p a_0^4 \mu_3}{g_s^4} \tag{5.5.52}$$

($\sigma = \mathrm{Im}\,\tau = g_s^{-1} h$).

5.5.7　インフレーションモデル

1. モジュライインフレーション

Racetrack model

- Kähler モジュライが 1 個 $T = X + iY$ で，超ポテンシャルに非摂動論効果に起因する 2 種類の項が現れる場合に，axion 方向に沿って saddle point インフレーションが起きる．

- モデル

$$K = -3\ln(T+\bar{T}); \quad T = X + iY, \tag{5.5.53a}$$
$$W = W_0 + Ae^{-aT} + Be^{-bT} \tag{5.5.53b}$$

- 運動項と Uplifted ポテンシャル

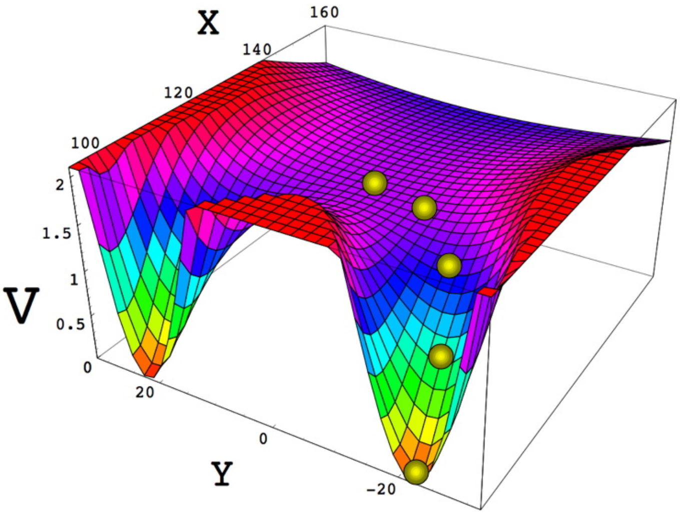
$$\mathscr{L}_k = \frac{3M_P^2}{4X^2}\left((\partial X)^2 + (\partial Y)^2\right), \tag{5.5.54}$$
$$V = V_F + \frac{E}{X^\alpha}; \tag{5.5.55}$$
$$\begin{aligned} V_F = {} & \frac{e^{-aX}}{6X^2}\left[aA^2(aX+3)e^{-aX} + 3W_0 aA\cos(aY)\right] \\ & + \frac{e^{-bX}}{6X^2}\left[bB^3(bX+3)e^{-bX} + 3W_0 bA\cos(bY)\right] \\ & + \frac{e^{-(a+b)X}}{6X^2}\left[AB(2abX + 3a + 3b)\cos((a-b)Y)\right]. \end{aligned} \tag{5.5.56}$$

このポテンシャルは，パラメータを適当に調整すると，2 つの最小点 (Mink/dS) と 1 つの鞍点をもつ．

- 例：$A = \frac{1}{50}, B = -\frac{35}{1000}, a = \frac{2\pi}{100}, b = \frac{2\pi}{90}, W_0 = -\frac{1}{25000}$

$$\text{saddle pt} \ : \ (X_s, Y_s) = (123.22, 0), \quad \epsilon_s = 0, \ \eta_s = -0.006097, \tag{5.5.57a}$$
$$\text{最小点} \ : \ (X_m, Y_m) = (96.130, \pm 22.146) \tag{5.5.57b}$$

- このモデルでは，$|W_0| \ll 1$, $|a-b| \ll 1$ と取ると，鞍点近傍で $\cos((a-b)Y)$ 項により (Natural inflation タイプの）インフレーションが起きる．ただし，さらに初期値の微調整が必要．



Better racetrack model

Kähler モジュライが 2 個の場合に，それぞれの非摂動論効果の組み合わせにより，やはり axion 方向に saddle point インフレーションが起きる．

- モデル：$\mathbb{C}P^4[1,1,1,6,9]$ コンパクト化

$$K = -2\ln\mathscr{V}; \quad \mathscr{V} = \frac{\sqrt{2}}{18}(X_2^{3/2} - X_1^{3/2}), \tag{5.5.58a}$$
$$W = W_0 + Ae^{-aT_1} + Be^{-bT_2}. \tag{5.5.58b}$$

- ポテンシャル

$$V = V_F + \frac{D}{162\mathscr{V}^2}; \tag{5.5.59}$$
$$V_F = \frac{216}{(X_2^{3/2} - X_1^{3/2})^2}\Big[P_1e^{-2aX_1} + P_2e^{-2bX_2} + W_0(P_3e^{-aX_1}\cos(aY_1) + P_4e^{-bX_2}\cos(bY_2) + P_5e^{-aX_1-bX_2}\cos(-aY_1+bY_2)\Big], \tag{5.5.60}$$
$$P_1 = aA^2(3X_1 + 2aX_2^{3/2}X_1^{1/2} + aX_1^2), \quad P_2 = P_1(a,A,1 \to b,B,2), \tag{5.5.61}$$
$$P_3 = 3aAX_1, \quad P_4 = 3bBX_2, \tag{5.5.62}$$
$$P_5 = 3AB(aX_1 + bX_2 + 2abX_1X_2). \tag{5.5.63}$$

- 例：$A = 0.56, B = 7.46666 \times 10^{-5}, a = 2\pi/40, b = 2\pi/258, D = 6.26019 \times$

$10^{-9}, W_0 = 5.22666 \times 10^{-6}$

$$\begin{aligned}
\text{mininum} \quad &: \quad X_1 = 98.75839,\ X_2 = 171.06117,\ Y_1 = 0,\ Y_2 = 129; \\
&\quad \mathscr{V}_s = 99, \quad m^2 = 10^{-6} \sim 10^{-7}, \qquad (5.5.64a) \\
\text{saddle point} \quad &: \quad X_1 = 108.96194,\ X_2 = 217,68875,\ Y_1 = 20,\ Y_2 = 129; \\
&\quad V = 3.35 \times 10^{-16} M_P^4. \qquad (5.5.64b) \\
\text{unstable direction} \quad &: \quad \delta X_1 = \delta X_2 = 0, \delta Y_1 = -0.6546,\ \delta Y_2 = 0.7560; \\
&\quad \eta \simeq -0.01 \qquad (5.5.64c)
\end{aligned}$$

インフレーションスケールは小さい !!

$$H_{\rm inf} \approx 10^{-8} M_P \ \Rightarrow\ r \approx 10^{-12} \qquad (5.5.65)$$

2. ブレーンインフレーション

ブレーンインフレーションの η 問題　D3-$\overline{D3}$ 系のエネルギーは，r をブレーン間の距離として

$$V(r) = 2T_3 \left(1 - \frac{1}{2\pi^3} \frac{T_3}{{m_{\rm pl}}_{10}^8 r^4}\right) = 2T_3 \left(1 - \frac{1}{2\pi^3} \frac{T_3^3}{{m_{\rm pl}}^2 \phi^4}\right) \qquad (5.5.66)$$

ここで，$\phi = T_3^{1/2} r$ は cannonically normalized field. $m_{\rm pl}$ と $m_{\rm pl10}$ の関係は $m_{\rm pl}^2 = {m_{\rm pl}}_{10}^8 L^6$ (L は CY のサイズ) となるので，η パラメータは

$$\eta = -\frac{10}{\pi^3} \left(\frac{L}{r}\right)^6 \sim -0.3 \left(\frac{L}{r}\right)^6 \qquad (5.5.67)$$

よって，

$$r < L \ \Rightarrow\ |\eta| > 0.3 \qquad (5.5.68)$$

KKLMMT

1. ポテンシャル : ρ をサイズモジュライ，ϕ を D3-反 D3 の距離パラメーターとして，

   $$K = -3 \ln(\rho + \bar{\rho} - k(\phi, \bar{\phi})) \qquad (5.5.69)$$

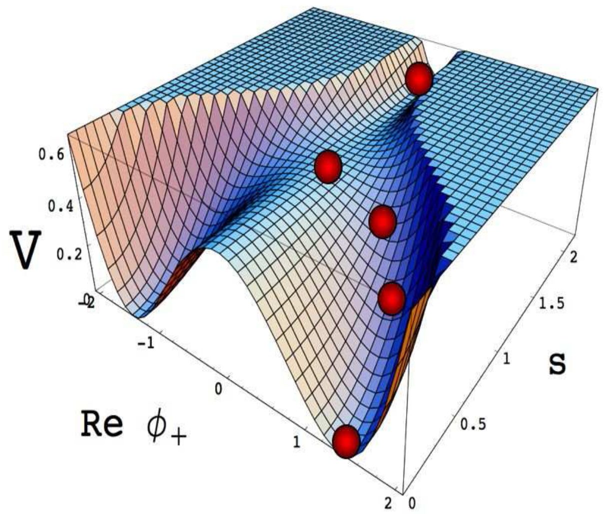
   超ポテンシャルが ϕ に依存しないとすると，ρ の安定点 $\rho = \rho_0$ 近傍で，$m_\phi^2 \sim H^2$ となりインフレーションは起こらない.

2. 超ポテンシャルに ϕ 依存性を持たせると，微調整により $m_\phi^2 = \mathrm{O}(10^{-2})\, H^2$ とでき，インフレーションが起きる.

D3/D7 ブレーンインフレーション

1. ポテンシャル
$$K = -3\ln(\rho+\bar{\rho}) - \frac{1}{2}(\phi-\bar{\phi})^2 \tag{5.5.70}$$
超ポテンシャルはϕに依存せず，$s = \mathrm{Re}\,\phi$がインフラトンとなる．sはD3-D7の距離を表す．

2. 他の hypermultiplet との相互作用は，量子効果としてsに log 型ポテンシャルを生成し，全体としては hybrid 型インフレーションが実現される．



文献ノート

1998 (ブレイン・反ブレインインフレーションモデル) (Dvali GR, Tye SHH [34])

2003 (**KKLT モデル**) すべてのモジュライが安定化され，準安定 dS 真空をもつ，IIB 理論のワープしたフラックスコンパクト化モデル (Kachru S, Kallosh R, Linde A, Trivedi S[45])．

(**KKLMMT モデル**) KKLT モデルと $D\bar{D}$ 対を用いたブレインインフレーションモデルおよびワープを組み合わせたインフレーションモデル．(Kachru S, Kallosh R, Linde A, Maldacena J, McAllister L, Trivedi S[44])

(*D*3/*D*7 ブレインインフレーションモデル) (Hsu JP, Kallosh R, Prokushkin S[42]; Koyama F, Tachikawa Y, Watari T[52]; Firouzjahi H, Tye SHH[35]; Hsu JP, Kallosh R 2004[41]; Dasgupta K, Hsu JP, Kallosh R, Linde A, Zagermann M 2004[28]; Chen P, Dasgupta K, Narayan K, Shmakova M, Zagermann M 2005[21])

(**DBI インフレーションモデル**) (Silverstein E, Tong D[59]; Alishahiha M, Silverstein E, Tong D 2004[3]; Chen XG 2005[23, 22])

2004 (**Racetrack モデル**) KKLT 型モデルでインスタントン効果に基づくサイズモジュラスポテンシャルとして，2 つの指数関数型ポテンシャルの和を用いると，スローロール条件を満たすモデルができることを指摘（ただし，fine-tuning が必要）．(Blanco-Pillado JJ, Burgess CP, Cline JM, Escoda C, Gomez-Reino M, Kallosh R, Linde A, Quevedo F [10])

2005 (**タキオンインフレーションモデル**) (Cremades D, Quevedo F, Sinha A[26])

(**N-flation**) (Dimopoulos S, Kachru S, McGreevy J, Wacker J [31])

ヘテロ理論・M理論でのインフレーション [Buchbinder EI 2005[14]; Becker K, Becker M, Krause A 2005[7]]

2006 (**改良版 Racetrack モデル**）CY orientifold $\mathbb{C}P^4_{[1,1,1,6,9]}$ を用いた racetrack モデル．WMAP3years と整合的なスペクトル指数 $n_s \approx 0.95$ を与える．(Blanco-Pillado JJ, Burgess CP, Cline JM, Escoda C, Gomez-Reino M, Kallosh R, Linde A, Quevedo F[11])

2007 ”A Delicate Universe”: D3-D7 モデルでの η 問題 (Baumann D, Dymarshy A, Klebanov IR, McAllister L, Steinhardt PJ 2007[6])

5.5.8 KKLT シナリオの問題点

- Kähler モジュライが 1 自由度の場合，ポテンシャルの極小値は最小値でなく，$\sigma \to 0$ で $V \to -\infty$
- Kähler モジュライが 2 自由度以上の場合，ポテンシャルが安定な最小点を持つ可能性はあるが，最小点の存在はフラックスや非摂動論効果のパラメータに敏感に依存し，最小点の存在はモデルやパラメーターごとに個別に確認が必要．
- ポテンシャルが極小となる内部空間サイズは一般的にストリングスケールとなり，古典論が適用可能な十分大きいサイズを実現するには，フラックスを微調整して，$|W^0| \lesssim 10^{-4}$ にしないといけない．

§5.6
LVS

概要　KKLT シナリオに Kähler ポテンシャルに対する α'^3 補正を加えることにより，W_0 のチューニングなしに Kähler モジュライを内部空間体積 $\mathscr{V}$ が大きな値となるよう安定化することが可能となる．また，このシナリオでは，ストリングスケール，KK スケール，モジュライ質量，$m_{3/2}$ が $\mathscr{V}$ のベキにより決まるヒエラルキーが実現される．

References

- Balasubramanian V, Berglund P, Conlon JP, Quevedo F: jhep 03, 007 (2005)

  ”Systematics of moduli stabilisation in CY flux compactification”

- Joseph P. Conlon, Fernando Quevedo and Kerim Suruliz: jhep 08, 007 (2005)

  ”Large-volume flux compactifications: moduli spectrum and D3/D7 soft supersymmetry breaking”

T2¿LVS

5.6.1　Large volume scenario

- 基本モデル
  - IIB 型理論の no scale ISD CY フラックスコンパクト化において，Kähler ポテンシャルに対する α'^3 補正を考慮 $\Rightarrow$ 複素モジュライ固定
- CY の位相についての制限：$h^{2,1} > h^{1,1} > 1$
- α'^3 補正＋非摂動論効果（インスタントン/gaugino 凝縮): $\Rightarrow$ Kähler モジュライの安定化

  CY の体積 $\mathscr{V}$ が大きい極限で，ポテンシャル V は負からゼロに近づき，Kähler モジュライ $\rho_j = b_j + i\tau_j$ の 1 つ $j = s$ 以外は $\tau_j \sim \mathscr{V}^{2/3}$ に従って増大，$\tau_s \sim \log(\mathscr{V})$ となる方向でポテンシャルが最小点をもつ．

  $\Rightarrow$ 超対称性の敗れた adS 真空

- 反 D3 ブレイン/magnetized D7 ブレーンにより Minkowski 真空（ないし dS 真空）を実現.

5.6.2　Kähler ポテンシャルに対する α'^3 補正

II 型超弦理論の低エネルギー極限の α' 展開の最初の補正は α'^3 次で現れる:

$$S_{\rm IIB} = S_{b,0} + \alpha'^3 S_{b,3} + \alpha'^4 S_{b,4} + \cdots + S_{\rm CS} + S_{l,0} + \alpha'^2 S_{l,2} + \cdots . \qquad (5.6.1)$$

ここで，$S_{b,0}$ と $S_{\rm CS}$ は通常の作用積分, $S_{l,0}$ は最低次のブレーン作用積分：

$$S_{b,0} = \frac{1}{(2\pi)^7\alpha'^4}\int d^{10}x\sqrt{-g}\left[e^{-2\phi}(R_s + 4(\nabla\phi)^2) - \frac{1}{2}F_1^2 - \frac{1}{2\cdot 3!}G_3\cdot\bar{G}_3 - \frac{1}{4\cdot 5!}\tilde{F}_5^2\right], \qquad (5.6.2a)$$

$$S_{\rm CS} = \frac{1}{4i(2\pi)^7\alpha'^4}\int e^{\phi}C_4\wedge G_3\wedge\bar{G}_3, \qquad (5.6.2b)$$

$$S_{l,0} = \sum_{\rm sources}\left(-\int d^{p+1}\xi T_p e^{-\phi}\sqrt{-g} + \mu_p\int C_{p+1}\right). \qquad (5.6.2c)$$

リーディングの補正は一般に次の形をもつ（完全には決定されていない）:

$$S_{b,3} \sim \frac{\alpha'^3}{\alpha'^4}\int d^{10}x\sqrt{-g}\Big[\mathscr{R}^4 + \mathscr{R}^3\left(G_3^2 + F_5^2 + (\nabla\tau)^2 + \nabla^2\tau\right) + \mathscr{R}^2((DG_3)^2 + (DG_5)^2 + G_3^4 + \cdots) + \mathscr{R}(G_3^6 + \cdots) + G_3^8 + \cdots\Big]. \qquad (5.6.3)$$

これらのうち，10 次元で $\mathscr{R}^4$ に比例する項が 4 次元有効理論において Kähler ポテンシャルに α'^3 の補正を生み出し，その具体的な形は次の式で与えられると予想されている :.

$$K = K_{\rm cs} - 2\ln\left(\mathscr{V} - \frac{\chi(Y)}{8(2\pi)^3}f^{(0,0)}_{3/2}(\tau,\bar\tau)\right). \qquad (5.6.4)$$

ここで，

$$f^{(0,0)}_{3/2}(\tau,\bar\tau) = \sum_{(m,n)\neq(0,0)}\frac{e^{-3\phi/2}}{|m+n\tau|^2} = \frac{2\zeta(3)}{e^{3\phi/2}} + \frac{2\pi^2}{3}e^{\phi/2} + \text{instanton terms}. \qquad (5.6.5)$$

KKLT との比較

Kähler モジュライが体積モジュライ ρ のみの場合，

$$\mathscr{V} = \frac{5}{6}t^3 = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}\sigma^{3/2} \quad (\sigma = -i(\rho-\bar\rho)/2) \qquad (5.6.6)$$

より，$\mathscr{V} \gg \xi$ で

$$V \approx e^K\left[\frac{4\sigma^2}{3}a^2|A|^2e^{-2a\sigma} - 4a|WAa|e^{-a\sigma} + \frac{3\sqrt{5}\xi|W|^2}{\sqrt{2}g_s^{3/2}\sigma^{3/2}}\right] \qquad (5.6.7)$$

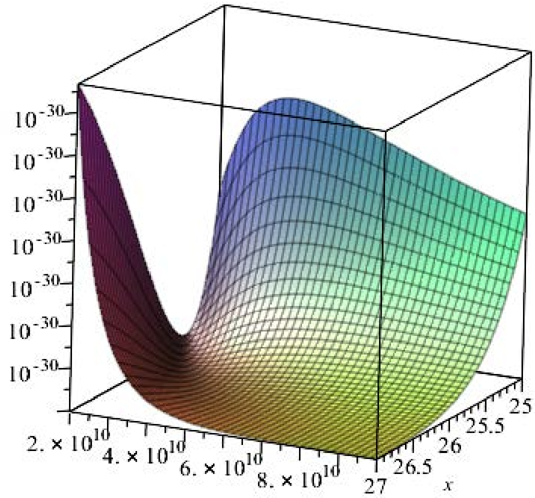


図 5.2: $\mathbb{C}P^4[1,1,1,6,9]$LVC で得られる 2 次元セクターでのポテンシャル．$a_1 = 2\pi, A_1 = 1, W_0 = 10$

となる．ここで，

$$\xi = -\frac{\zeta(3)}{2(8\pi)^3}\chi(Y). \tag{5.6.8}$$

よって，$\mathscr{V}$ が大きい極限および小さい極限の両方で，最後の補正項が支配的となる．これは，KKLT モデルが妥当でないことを意味する．CY に対し，

$$\chi(Y) = 2(h^{1,1} - h^{2,1}) \tag{5.6.9}$$

なので，$h^{2,1} > h^{1,1}$ なら $\xi > 0$.

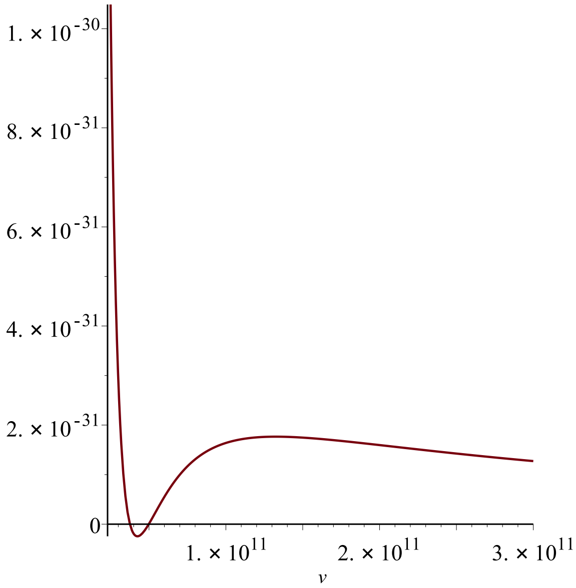
例：$\mathbb{C}P^4[1,1,1,6,9]$ の複素超曲面

例として，１８次の射影代数多様体 $\mathbb{C}P^4[1,1,1,6,9]$ の複素超曲面 Y で表される CY を考えると，モジュライの数は，$h^{1,1} = 2, h^{2,1} = 272$ である $(\chi(Y) = -540)$. この CY 族の中で $\Gamma = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{18}$ 不変性を持つものに限定すると，複素構造モジュライは ϕ と ψ の 2 個になる：

$$Y : z_1^{18} + z_2^{18} + z_3^{18} + z_4^3 + z_5^3 - 18\psi z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 - 3\phi z_1^6 z_2^6 z_3^6 = 0 \tag{5.6.10}$$

を考える．体積は

$$\mathscr{V} = \frac{t_2}{2}(t_1^2 + 6t_1 t_2 + 12t_2^2) \tag{5.6.11}$$



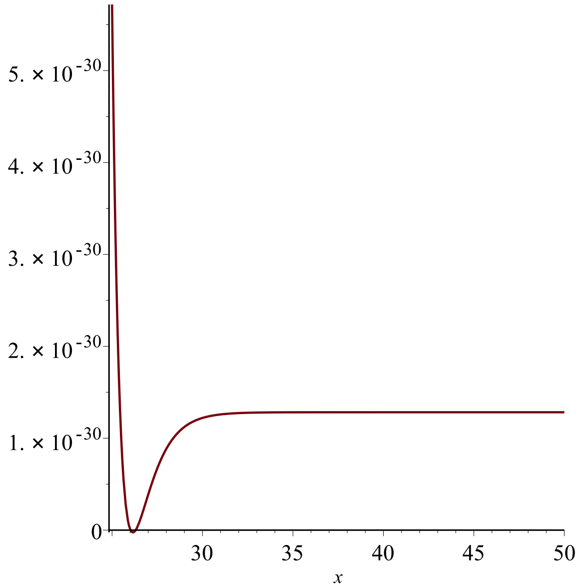


図 5.3: 図 5.2 の極小点を通る直線 $x = x_m$ および $v = v_m$ 上でのポテンシャル

と書けるので,

$$\tau_1 = \frac{1}{2}t_1^2, \quad \tau_2 = \frac{1}{2}(t_1 + 6t_2)^2, \tag{5.6.12}$$

$$\mathscr{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_2^{3/2} - \tau_1^{3/2}). \tag{5.6.13}$$

一方，すべての複素モジュライが固定されているとして，超ポテンシャルは

$$W = W_0 + A_1 e^{-(a_1/g_s)T_1} + A_2 e^{-(a_2/g_s)T_2}. \tag{5.6.14}$$

よって，ポテンシャルは $\mathscr{V}$ の大きい極限 $\tau_2 \gg \tau_1 \sim 1$ で

$$V = \frac{\lambda}{\mathscr{V}}x^{1/2}e^{-2x} - \frac{\mu}{\mathscr{V}^2}xe^{-x} + \frac{\nu}{\mathscr{V}^3}, \tag{5.6.15}$$

$$x = a_1 t_1/g_s, \tag{5.6.16}$$

$$\lambda = 24\sqrt{2}a_1^{3/2}|A_1|^2, \quad \mu = 4|A_1 W|, \quad \nu = \frac{3}{4}\xi|W|^2 \tag{5.6.17}$$

このポテンシャルは，一般に

$$x = x_m \sim \left(\frac{4\nu\lambda}{\mu^2}\right)^{2/3}, \quad \mathscr{V} = \mathscr{V}_m \sim \frac{\mu}{2\lambda}\sqrt{x_m}e^{x_m} \tag{5.6.18}$$

で最小値を取る．例えば

$$\xi = 1.3084\cdots, \quad a_1 = 2\pi, \quad A_1 = 1, \quad W_0 = 10 \tag{5.6.19}$$

に対して，

$$x_m = 26.15, \quad \mathscr{V}_m = 4.245 \times 10^{10} \Rightarrow V_m = 2.4517 \times 10^{-32}. \tag{5.6.20}$$

Reference

- Denef F, Douglas MR, Florea B: jhep0406, 034 (2004)

  "Building a Better Racetrack"

5.6.3　質量スペクトル

KK モードと複素構造モジュライ　ストリングスケールを

$$m_s = \frac{1}{\ell_s}; \quad \ell_s = 2\pi\sqrt{\alpha'} \tag{5.6.21}$$

とおくと，$R_s = R/\ell_s$, $\mathscr{V}_s = \mathscr{V}/\ell_s^6$ として，

$$M_P^2 = \frac{4\pi\mathscr{V}_s}{g_s^2\ell_s^2} \;\Rightarrow\; m_s = \frac{g_s}{\sqrt{4\pi\mathscr{V}_s}}M_P \tag{5.6.22}$$

より

- stringy excitations:
$$m_S^2 = \frac{n}{\alpha'} \;\Rightarrow\; m_S \sim 2\pi m_s \tag{5.6.23}$$

- KK modes:
$$m_{\rm KK}^2 = \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2R^2}{\alpha'^2} \;\Rightarrow\; m_{\rm KK} \sim \frac{m_s}{R_s} \approx \frac{2\pi m_s}{\mathscr{V}_s^{1/6}}, \quad m_W \sim (2\pi)^2R_sm_s \tag{5.6.24}$$

- complex structure moduli:
$$m_{\rm cs} = \mathrm{O}(1)\,\frac{g_sNm_s}{\sqrt{\mathscr{V}_s}} \tag{5.6.25}$$

ここで，N はフラックスの大きさ（量子数）である．

Kähler モジュライとフェルミ粒子　($\mathbb{C}P^4[1,1,1,6,9]$ モデル)
　Kähler モジュライの質量は

$$m_{\tau_2} = \mathrm{O}(1)\,\frac{g_s^2W_0}{\sqrt{4\pi}\mathscr{V}_s^{3/2}}M_P, \tag{5.6.26a}$$
$$m_{b_2} \approx e^{-a_2\tau_2} \sim \exp(-34\mathscr{V}_s^{2/3}), \tag{5.6.26b}$$
$$m_{\tau_1} = \mathrm{O}(1)\,\frac{a_1g_sW_0}{\sqrt{4\pi}\mathscr{V}_s}M_P, \tag{5.6.26c}$$
$$m_{b_1} = \mathrm{O}(1)\,\frac{a_1g_sW_0}{\sqrt{4\pi}\mathscr{V}_s}M_P. \tag{5.6.26d}$$

Scale	Mass
4-dimensional Planck mass	$\frac{4\pi\mathcal{V}_s^0}{g_s} m_s = M_P$
String scale m_s	$m_s = \frac{g_s}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$
Stringy modes m_S	$2\pi m_s = \frac{g_s\sqrt{\pi}}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}} M_P$
Kaluza-Klein modes m_{KK}	$\frac{2\pi}{\mathcal{V}_s^{\frac{1}{6}}} m_s = \frac{g_s\sqrt{\pi}}{(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{2}{3}}} M_P$
Gravitino $m_{3/2}$	$\frac{g_s W_0}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}} m_s = \frac{g_s^2 W_0}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$
Dilaton-axion m_τ	$\frac{g_s N}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}} m_s = \frac{g_s^2 N}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$
Complex structure moduli m_ϕ	$\frac{g_s N}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}} m_s = \frac{g_s^2 N}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$
'Small' Kähler modulus $m_{\tau_4}, m_{\tilde{\tau}_4}$	$\frac{W_0}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}} m_s = \frac{g_s W_0}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$
Modulinos $m_{\tilde{\tau}}, m_{\tilde{\phi}}$	$\frac{g_s W_0}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}} m_s = \frac{g_s^2 W_0}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$
'Large' volume modulus m_{τ_5}	$\frac{g_s W_0}{\mathcal{V}_s^0} m_s = \frac{g_s^2 W_0}{\sqrt{4\pi}(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{3}{2}}} M_P$
Volume axion m_{b_5}	$\exp(-(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{2}{3}}) M_P \sim 0$

表 5.1: $\mathbb{C}P^4[1,1,1,6,9]$ によるコンパクト化のモジュライ質量スペクトルの $\mathscr{V}$ 依存性

Scale	Mass	GUT	Intermediate	TeV
M_P	M_P	2.4×10^{18} GeV	2.4×10^{18} GeV	2.4×10^{18} GeV
m_s	$\frac{g_s}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$	1.0×10^{15} GeV	1.0×10^{12} GeV	1.0×10^{3} GeV
m_S	$2\pi m_s = \frac{g_s\sqrt{\pi}}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}} M_P$	6×10^{15} GeV	6×10^{12} GeV	6×10^{3} GeV
m_{KK}	$\frac{2\pi m_s}{(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{1}{6}}} = \frac{g_s\sqrt{\pi}}{(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{2}{3}}} M_P$	1.5×10^{15} GeV	1.5×10^{11} GeV	0.15 GeV
$m_{3/2}$	$\frac{g_s^2 W_0}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$	1.5×10^{12} GeV	1.5×10^{6}GeV	1.5×10^{-12}GeV
m_τ	$\frac{g_s N m_s}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}} = \frac{g_s^2 N}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$	1.5×10^{12} GeV	1.5×10^{6}GeV	1.5×10^{-12}GeV
m_{cs}	$\frac{g_s N m_s}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}} = \frac{g_s^2 N}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$	1.5×10^{12} GeV	1.5×10^{6}GeV	1.5×10^{-12}GeV
m_{τ_4}, m_{b_4}	$\frac{a_4 g_s W_0}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$	1.5×10^{11} GeV	1.5×10^{5}GeV	1.5×10^{-11}GeV
m_{τ_5}	$\frac{g_s^2 W_0}{\sqrt{4\pi}(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{3}{2}}} M_P$	2.2×10^{10} GeV	22 GeV	2.2×10^{-26} GeV
m_{b_5}	$\exp(-a_5\tau_5) M_P \sim 0$	$\sim 10^{-300}$ GeV	$\exp(-10^{6})$ GeV	$\exp(-10^{18})$ GeV

表 5.2: LVC でのモジュライ質量スペクトルの例

5.1 にあるように，一般に体積モジュライに付随するアクシオンは非常に小さな質量をもつ．

フェルミ粒子の質量は

$$m_{3/2} = e^{K/2}|W| = \frac{g_s^2|W_0|}{\sqrt{4\pi}\mathscr{V}_s}M_P, \tag{5.6.27a}$$

$$m_{\tilde{\tau}_1} \approx \frac{a_1 g_s^2|W_0|}{\mathscr{V}_s}M_P, \tag{5.6.27b}$$

$$m_{\tilde{\tau}_2} \approx 0 : \quad \text{Goldstino}, \tag{5.6.27c}$$

$$m_{\tilde{\phi}} \approx m_{\tilde{\tau}}\frac{g_s^2|W_0|}{\mathscr{V}_s}M_P. \tag{5.6.27d}$$

ここで，最後の 2 つは，dilatino および複素構造モジュライに付随するフェルミ粒子．また，Goldstino は gravitino に食われて質量を与える．

5.6.4　Kähler モジュライインフレーション

概要　Kähler モジュライが 3 個以上存在する LVS では，小体積サイクルに対する Kähler モジュライのアクシオンが分数ベキの Starobinsky タイプのポテンシャル const $- c\exp(-k\phi^{4/3})$ をもつ．分数ベキのため，インフレーションタイプは small field 型となる（$\epsilon \sim 10^{-12}$)．

References

- Conlon, JP, Quevedo F: jhep0601, 146 (2006) [hep-th/0509012]

  ”Kähler moduli inflation”

仮定

1. IIB 型 SST の Large volume fluxed CY コンパクト化
2. CY は，$h^{2,1} > h^{1,1} \geqslant 3$ を満たす．
3. Kähler モジュライの small cycle moduli の一つ T_s が他のモジュライと decouple:
$$\kappa_{sij} = \kappa_{ssi} = 0 \ (i, j \neq s) \tag{5.6.28}$$

帰結

1. $\tau_s(T = b + i\tau)$ が Starobinski 型ポテンシャルを生み出し，スローロルインフレーションを起こす．

2. 観測的予言は

$$\mathscr{V}_s = 10^5 \sim 10^7, \tag{5.6.29a}$$
$$H_{\rm inf} \sim 10^{13}\mathrm{GeV}, \tag{5.6.29b}$$
$$n_s \simeq 1 - \frac{2}{N} = 0.960 \sim 0.967, \tag{5.6.29c}$$
$$\frac{dn_s}{d\ln k} \simeq -(6 \sim 8) \times 10^{-4}, \tag{5.6.29d}$$
$$\epsilon < 10^{-12}. \tag{5.6.29e}$$

モデル　複素構造モジュライとディラトンは安定化しているとして，Kähler モジュライ $T_j = \tau_j + ib_j$ のみを考える：

$$\mathscr{V} = \alpha\left(\tau_1^{3/2} - \sum_{i=2}^{n}\lambda_i\tau_i^{3/2}\right), \tag{5.6.30a}$$
$$K = K_{\rm cs} - 2\ln\left(\mathscr{V} + \frac{\xi}{2}\right); \xi = -\frac{\zeta(3)\chi(Y)}{2(2\pi)^3}, \tag{5.6.30b}$$
$$W = W_0 + \sum_{j=1}^{n} A_j e^{-a_jT_j}. \tag{5.6.30c}$$

ポテンシャルは

$$V = \sum_j 8a_j^2A_j^2\sqrt{\tau_j}3\alpha\lambda_j\mathscr{V}e^{-2a_j\tau_j} - \sum_j \frac{4a_jA_j\tau_jW_0}{\mathscr{V}^2}e^{-a_j\tau_j} + \frac{3\xi W_0^2}{4\mathscr{V}^3} \tag{5.6.31}$$

$\mathscr{V}$ を固定したとき，τ_j について極値を取る条件は

$$\frac{a_j^{3/2}A_j\mathscr{V}}{3\alpha\lambda_jW_0} = \frac{1-x_j}{1-4x_j}\sqrt{x_j}e^{x_j};\quad x_j = a_j\tau_j. \tag{5.6.32}$$

この条件下で

$$V = V_{\rm np} \simeq -\frac{3W_0^2}{2\mathscr{V}^3}\left[\sum_{j=2}^{n}\frac{\lambda_j\alpha}{a_j^{3/2}}(\ln\mathscr{V})^{3/2} - \frac{\xi}{2}\right]. \tag{5.6.33}$$

このポテンシャルに IASD flux によるアップリフトを施して，極小点で $V=0$ とする：

$$V = V_{\rm np} + \frac{\gamma W_0^2}{\mathscr{V}^2}. \tag{5.6.34}$$

インフレーション　τ_n のみが安定化していない初期条件を考えると，

$$V \simeq V_0 - \frac{4a_n\tau_nA_nW_0}{\mathscr{V}^2}e^{-a_n\tau_n}. \tag{5.6.35}$$

τ_n の運動項を正規化すると

$$\phi = \sqrt{\frac{4\lambda}{3\mathscr{V}}}\tau_n^{3/4} \tag{5.6.36}$$

より，

$$V \simeq V_0 - \frac{4A_n W_0}{\mathscr{V}} c\phi^{4/3} e^{-c\phi^{4/3}}, \tag{5.6.37}$$

$$c = a_n \left(\frac{3\mathscr{V}}{4\lambda}\right)^{2/3}. \tag{5.6.38}$$

これより，$c\phi^{4/3} \gg 1$ のとき，

$$N \approx \frac{9\mathscr{V}}{4c^2\phi^2 B} e^{c\phi^{4/3}}, \tag{5.6.39a}$$

$$n_s - 1 \simeq 1 - \frac{2}{N}, \tag{5.6.39b}$$

$$\epsilon \simeq \frac{9}{32N^2}\phi^{4/3}, \tag{5.6.39c}$$

$$\xi \equiv M_P \frac{V'V'''}{V^2} \approx -\frac{2}{N^2}. \tag{5.6.39d}$$

5.6.5　LVS の問題点

1. Gravitino mass problem. KKLT では，一般に $H \lesssim m_{3/2}$ となるため，low scale SUSY breaking $m_{3/2} \sim 1$TeV を仮定すると，インフレーションスケールが非常に低くなる．LVS では，この制限はさらに強くなり，$H \lesssim m_{3/2}^{3/2}$ となる．$m_{3/2} \sim 1$TeV だと，$H \lesssim 10$keV となる．この問題は，KKLT の場合，racetrack 型モデルでの fine tuning により (KL モデル [Kallosh, Linde 2004, 2007])，また LVS の場合は，inflation pt 型 small field インフレーションと run away 型再加熱（前加熱）を組み合わせた特殊なモデルでは回避できる [Conlon JP et al 2008]．

2. Runaway problem: flux CY コンパクト化では，$\mathscr{V} \to 0$ でポテンシャルが必ずゼロとなる．

References

- Kallosh R, Linde A:jhep12, 004(2004)[hep-th/041101]

  ”Landscape, the scale of SUSY breaking, and inflation”

- ibid: jcap04,017 (2007)[0704.0647]

  ”Testing String Theory with CMB”

- Conlon JP, Kallosh R, Linde A, Quevedo F: jcap 09, 011 (2008)

  "Volume Modulus Inflation and the Gravitino Mass Problem"

§5.7
Kähler uplifting

概要　IIB 理論のフラックスコンパクト化において，α' 補正とＮＰ補正の双方を考慮すると，安定な極小臨界点が adS から dS に連続的につながる系列を作ることができる．特に，$\bar{D}3$ や磁荷 D7 ブレーンによる D 項を使わずに dS 真空が実現可能である．

References

- Westphal A: JHEP 03, 102 (2007) 102 [hep-th/0611332]

  "De Sitter string vacua from Kähler uplifting"

- Rummel M, Westphal A: jhep01, 02 (2012)

  "A sufficient condition for de Sitter vacua in type IIB string theory"

Model

- IIB SST の CY コンパクト化+3-form flux ＋ α'^3-補正 ＋ NP 効果
- CY: $h^{2,1} > h^{1,1}$
- $N \gg 1$: N は gaugino condensate を起こしている D7 ブレーンの枚数で，対応するゲージ場は SU(N).
- Kḧaler potential

$$K = -2\ln\left(\mathscr{V} + \frac{\hat{\xi}}{2}\right) - \ln(S+\bar{S}) - \ln\left(-i\int_Y \bar{\Omega}\wedge\Omega\right), \quad (5.7.1)$$

$$W = W_0 + \sum_i A_i e^{-a_i T_i}; \quad W_0 = \frac{1}{2\pi}\int_Y G_{[3]}\wedge\Omega, \quad (5.7.2)$$

$$\hat{\xi} = -\frac{\zeta(3)\chi(Y)}{4\sqrt{2}(2\pi)^3}(S+\bar{S})^{3/2} = \xi e^{-3\phi/2} \quad (5.7.3)$$

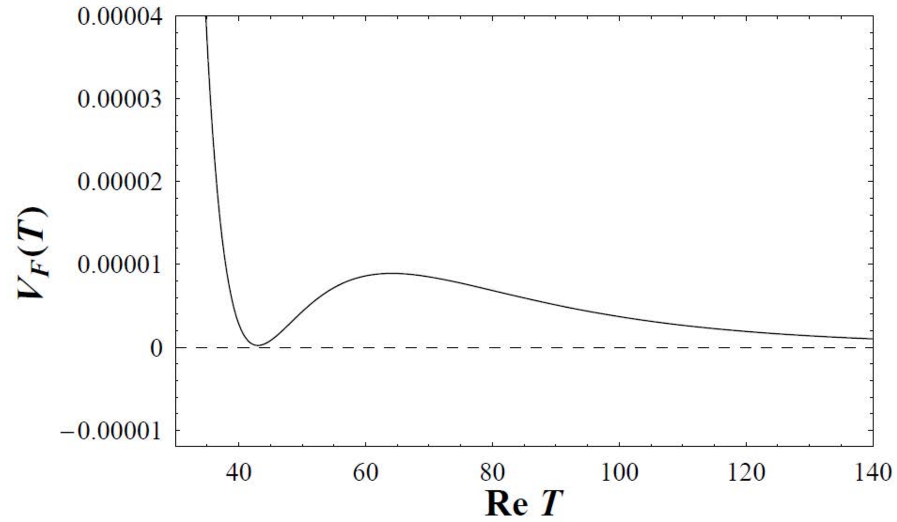


図 5.4: $\mathbb{C}P^4[1,1,1,1,1]$ の divisor への FCYC の Kähler uplifing で得られるポテンシャル． $a = 2\pi/100, A = 1, W_0 = -32.35, \hat{\xi} = 7.98$

5.7.1　例：$\mathbb{C}P^4[1,1,1,1,1]$ の divisor

$\mathbb{C}P^4[1,1,1,1,1]$ において，

$$z_1^5 + \cdots z_5^5 = 0 \tag{5.7.4}$$

により定義される CY に対して，

$$h^{1,1} = 1,\ h^{2,1} = 101,\ \chi = -200,\ \kappa = 5,\ \xi = 0.4845 \tag{5.7.5}$$

1. 複素構造モジュライとディラトンを固定した場合

ポテンシャルは

$$V(t) = e^K \left[K^{T\bar{T}} \left\{ a^2 A^2 e^{-2at} - 2\mathrm{Re}\left(aAe^{-at} \bar{W} \bar{K}_T \right) \right\} + U_{\alpha'} \right], \tag{5.7.6}$$

$$U_{\alpha'} = 3\hat{\xi} \frac{\mathscr{V}^2 + 7\hat{\xi}\mathscr{V} + \hat{\xi}^2}{(\mathscr{V} - \hat{\xi})(\hat{\xi} + 2\mathscr{V})^2} |W|^2, \tag{5.7.7}$$

$$\mathscr{V} = \gamma(T + \bar{T})^{3/2} = \gamma(2t)^{3/2} = \sqrt{6}\kappa t^{3/2}, \tag{5.7.8}$$

$$K^{T\bar{T}} = \gamma^{-4/3} \frac{\mathscr{V}^{1/3}(4\mathscr{V}^2 + \hat{\xi}\mathscr{V} + 4\hat{\xi}^2)}{12(\mathscr{V} - \hat{\xi})}. \tag{5.7.9}$$

このポテンシャルは次の scaling property をもつ：

$$a \to \lambda^{-1} a\ (N \to \lambda N),\ t \to \lambda t,\ \hat{\xi} \to \lambda^{3/2}\hat{\xi}\ \Rightarrow\ V \to \lambda^{-3} V. \tag{5.7.10}$$

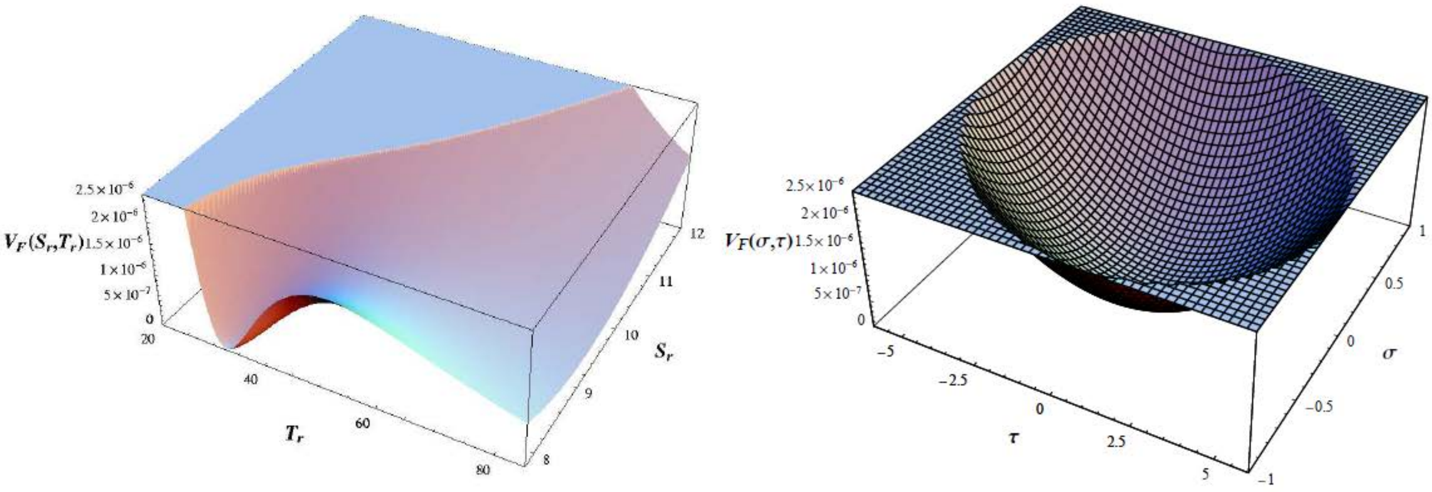


図 5.5: $\mathbb{C}P^4[1,1,1,1,1]$FCYC の Kähler uplifing で得られるポテンシャル.

dS 極小点の例

$$
\begin{aligned}
&A=1, a=2\pi/10, W_0=-1.7, \hat{\xi}=0.4 \;\Rightarrow\; \mathscr{V}_m \approx 2,\\
&A=1, a=2\pi/100, W_0=-1.7, \hat{\xi}=79.8 \;\Rightarrow\; \mathscr{V}_m \approx 376,\ T_m \approx 49,\ (\hat{\xi}/(2\mathscr{V}))_m \simeq 0.1,\\
&A=1, a=2\pi/100, W_0=-32.35, \hat{\xi}=7.98 \;\Rightarrow\; \mathscr{V}_m \approx 376,\ T_m \approx 43,\ (\hat{\xi}/(2\mathscr{V}))_m \simeq 0.01
\end{aligned}
$$

2. Kähler モジュライとディラトンを動かした場合

W_0 を

$$
W_0 = C_1 - C_2 S; \quad C_1 = \frac{1}{2\pi}\int_Y F\wedge\Omega, \quad C_2 = \frac{1}{2\pi}\int_Y H\wedge\Omega \tag{5.7.11}
$$

とおく.

$C_1=-13.743$, $C_2=1.4$, $A=1$, $a=2\pi/100$ のとき，極小点は

$$
t \approx 33.3, \quad s \approx 7.9, \quad \tau=\sigma=0 \tag{5.7.12}
$$

モジュライの質量は

$$
m_s^2 \approx 10^{-5}, \quad m_\sigma^2 \approx 5\cdot 10^{-6}, \quad m_t^2 \approx 6\cdot 10^{-8}, \quad m_\tau^2 \approx 1.4\cdot 10^{-7}. \tag{5.7.13}
$$

	$C\mathbb{P}^4_{1,1,1,1,1}$	$C\mathbb{P}^4_{2,1,1,1,1}$	$C\mathbb{P}^4_{4,1,1,1,1}$	$C\mathbb{P}^4_{5,2,1,1,1}$
$h^{2,1}$	101	103	149	145
χ	-200	-204	-296	-288
κ	5	3	2	1

表 5.3: $h^{1,1} = 1$ となる CY の例

5.7.2　dS 極小点が存在する条件

複素構造モジュライとディラトンが固定されたときのポテンシャルは，極点付近で

$$\begin{aligned} V(t) &\simeq \frac{3aA^2 + a^2A^2t}{6\gamma^2t^2}e^{-2at} + \frac{aAW_0}{2\gamma^2t^2}e^{-at} + \frac{3W_0^2\hat{\xi}}{64\sqrt{2}\gamma^3t^{9/2}} \\ &\approx \frac{-W_0a^3A}{2\gamma^2}\left(\frac{2C}{9x^{9/2}} - \frac{e^{-x}}{x^2}\right) \end{aligned} \tag{5.7.14}$$

と近似される．ここで，$x = at$ および

$$C \equiv \frac{-27W_0\hat{\xi}a^{3/2}}{64\sqrt{2}\gamma A}. \tag{5.7.15}$$

これより，

- $C < C_1 \simeq 3.65$:　adS 極小点
- $C_1 < C < C_2 \simeq 3.89$:　dS 極小点
- $C_2 < C$:　極小点なし．

となる．

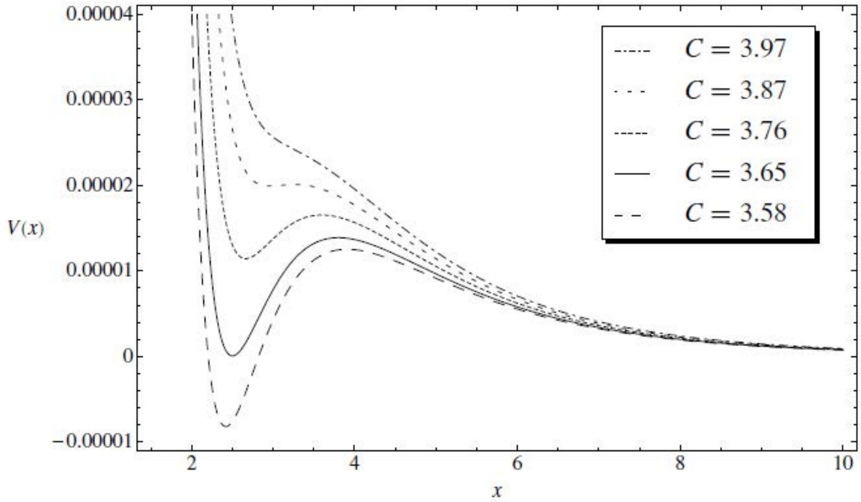


図 5.6: $\mathbb{C}P^4[1,1,1,1,1]$FCYC の Kähler uplifing で得られるポテンシャルのパラメータ C への依存性.

§5.8 Monodromy Inflation

概要　String 理論において，super-Planck excursion を自然な形で可能にし，large field inflation を実現する強力なアイデア．周期性をもつモジュライ変数が，ブレーンやフラックスとの相互作用により monodromy 的非周期性を獲得するというフレームワーク.

5.8.1　IIA 理論におけるモジュライ安定化

概要　IIA 理論では，IIB 理論と異なり，量子効果を用いない純粋の古典的なフラックスコンパクト化ですべてのモジュライが安定化される例が存在する.

References

- Scherk J, Schwarz H: NPB153, 61 (1979)

  How to get masses from extradimensions”

- Grimm TW, Louis J: NPB718, 153 (2005)

  ”The effective action of type IIA Calabi-Yau orientifolds”

- O DeWolfe, A Giryavets, S Kachru, W Taylor: jhep07, 066 (2005)

  ”Type IIA moduli stabilization”

- Derendinger JP, Kounas C, Petorpoulos PM, Zwirner F: NPB715, 211 (2005)

  ”Superpotentials in IIA compactifications with general fluxes”

- Villadoro G, Zwirner F: jhep 06, 047 (2005)

  ”$\mathcal{N} = 1$ effective potential from dual type-IIA D6/O6 orientifolds with general fluxes”

IIA 理論では，フラックスのみですべてのモジュライが安定化される場合がある．

1. DGKT モデル

[O DeWolfe, A Giryavets, S Kachru, W Taylor (2005)]

- 理論：Massive IIA
- コンパクト化：$Y = T^2 \times T^2 \times T^2/\mathbb{Z}_3^2$ orientifold

  [Dixon IJ,Harvey JA, Vafa C, Witten E: NPB261, 678 (1985)]

  - T^3: $z_i \sim z_i + 1 \sim z_i + \alpha$ ($\alpha = e^{i\pi/3}$).
  - $T^3/\mathbb{Z}_3$: orbifold

    $$T : (z_1, z_2, z_3) \to (\alpha^2 z_1, \alpha^2 z_2, \alpha^2 z_3) \tag{5.8.1}$$

    この orbifold は２７個の不動点をもち，CY($\chi = 72$) の特異極限．

  - $T^3/\mathbb{Z}_3^2$: free action Q による同一視

    $$Q : (z_1, z_2, z_3) \to \left(\alpha^2 z_1 + \frac{1+\alpha}{3}, \alpha^4 z_2 + \frac{1+\alpha}{3}, z_3 + \frac{1+\alpha}{3}\right) \tag{5.8.2}$$

    この orbifold は 9 個の $\mathbb{Z}_3$ 特異点をもち，CY($\chi = 24$) の特異極限で，$h^{2,1} = 0$, $h^{1,1} = 12$. $h^{1,1}$ のうち 9 個は blow up modulas, 残り 3 個は幾何学的な Kähler モジュライ．

  - Orientifolding $\mathscr{O} = \Omega_p(-1)^{F_L}\sigma$

    $$\sigma : z_i \to -\bar{z}_i \tag{5.8.3}$$

    Orientifold plane O6 は T^6 の y^i 方向の T^3 に巻き付く．

- モジュライ：Kähler 3 個 + axio-dilaton

$$\psi_j = b_j + iv_j \ (j = 1, \cdot, 4), \tag{5.8.4a}$$

$$\mathscr{V} = v_1 v_2 v_3, \tag{5.8.4b}$$

$$v_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\phi} \sqrt{\mathscr{V}}. \tag{5.8.4c}$$

ここで，v_j はトーラス T_j^2 のサイズ，$b_j (j = 1, 2, 3)$ は $B_2 = \sum_{j=1}^3 b_j w_j$ $(w_j \propto i dz^j \wedge d\bar{z}^j$ より，b_4 は $C_{[3]} = b_4 \alpha_0$ より生じる:

$$\Omega = 3^{1/4} i dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_0 + i\beta_0). \tag{5.8.5}$$

- Kähler ポテンシャル

$$K = -\ln(8\mathscr{V}^3 e^{4\phi}) = -\ln(32 v_1 v_2 v_3 v_4^4). \tag{5.8.6}$$

- Flux $H_3, F_2, F_4, F_6 \ \Rightarrow \ W$

$$W = \frac{f_6}{\sqrt{2}} + \sum_{i=1}^3 \frac{f_{4,i}}{\sqrt{2}} \psi_i - \frac{f_0}{\sqrt{2}} \psi_1 \psi_2 \psi_3 - 2 f_3 \psi_4. \tag{5.8.7}$$

ここで $f_6, f_{4,i}, f_0, f_3$ はフラックスの強度を表す整数で，次の量子化条件を満たす

$$f_0 f_3 = -2. \tag{5.8.8}$$

この超ポテンシャルは，Kähler ポテンシャルを一定に保つ変数の変換

$$\psi_i \to \frac{C}{|f_{4,i}} \psi_i \ (i = 1, 2, 3), \tag{5.8.9a}$$

$$\psi_4 \to \frac{C}{|f_3|} \psi_4 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{f_6}{f_3}, \tag{5.8.9b}$$

$$C = \sqrt{|f_0|^{-1} |f_{4,1} f_{4,2} f_{4,3}|} \tag{5.8.9c}$$

により

$$W = C \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\hat{f}_{4,i}}{\sqrt{2}} \psi_i - \frac{\hat{f}_0}{\sqrt{2}} \psi_1 \psi_2 \psi_3 - 2 \hat{f}_3 \psi_4 \right) \tag{5.8.10}$$

と全体のスケールを除いて連続パラメータを持たない形に書き換えられる．ここで，$\hat{f}_*$ は f_* の符号である．したがって，すべてのフラックスがゼロでないときには，ポテンシャルはフラックスに依存しなくなる．

- SUSY vacuum:このポテンシャルは

$$\delta = \mathrm{sign}(f_0 f_{4,1} f_{4,2} f_{4,3}) \tag{5.8.11}$$

として，$\delta = -1$ の時に超対称な adS 臨界点をもつ：

$$\hat{f}_{4,1} \psi_1 = \hat{f}_{4,2} \psi_2 = \hat{f}_{4,3} \psi_3 = i \sqrt{\frac{5}{3}}, \quad \hat{f}_3 \psi_4 = i \frac{2}{3} \sqrt{\frac{10}{3}}. \tag{5.8.12}$$

2. VZ model

[Viladoro G, Zwirner F (2005); Derendinger JP, Kounas C, Petorpoulos PM, Zwirner F (2005)]

- 内部空間：$Y = T^2 \times T^2 \times T^2/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2/\mathscr{O}$

  2 つの $\mathbb{Z}_2$ 変換は, $z^j = x^{2j+2} + ix^{2j+3} (j = 1, 2, 3)$ とするとき,

$$Z_2 \quad : \quad (z^1, z^2, z^3) \to (-z^1, -z^2, z^3), \tag{5.8.13a}$$

$$Z_2' \quad : \quad (z^1, z^2, z^3) \to (z^1, -z^2, -z^3) \tag{5.8.13b}$$

- Orientifold 変換 $\mathscr{O} = \Omega_p(-1)^{F_L}\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} : (z^1, z^2, z^3) \to (-\bar{z}^1, -\bar{z}^2, -\bar{z}^3) \tag{5.8.14}$$

各場のパリティは

	ϕ	B	C_1	C_3
$(-1)^{F_L}$	$+$	$+$	$-$	$-$
Ω_p	$+$	$-$	$+$	$-$

- 変換で不変なバルクスカラ場
  - dilaton: ϕ
  - Kähler moduli: t_A $(A = 1, 2, 3)$
  - CS moduli: u_A $(A = 1, 2, 3)$
  - axion fields:

$$B_{45}, B_{67}, B_{89} \ \Rightarrow \ \tau_A (A = 1, 2, 3), \tag{5.8.15a}$$

$$C_{579}; C_{568}, C_{478}, C_{469} \ \Rightarrow \ \sigma; \quad \nu_A (A = 1, 2, 3) \tag{5.8.15b}$$

ここで,

$$ds^2(M) = \frac{1}{\hat{s}}\tilde{g}_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu + \sum_{A=1}^{3} t_A \left(\hat{u}_A (dx^{2j+2})^2 + \frac{1}{\hat{u}_A}(dx^{2j+3})^2 \right) \tag{5.8.16a}$$

$$e^{-2\phi} = \frac{\hat{s}}{t_1 t_2 t_3}, \quad \hat{s} = s^2 \hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3, \tag{5.8.16b}$$

$$u_i = \frac{\sqrt{\hat{s}\hat{u}_1\hat{u}_2\hat{u}_3}}{\hat{u}_i}, \tag{5.8.16c}$$

$$B_{45|67|89} = \tau_{1|2|3}, \tag{5.8.16d}$$

$$C_{579} = \sigma, \quad C_{568|478|469} = -\nu_{1|2|3} \tag{5.8.16e}$$

- Chiral modui variables

$$S = s + i\sigma, \quad T_A = t_A + i\tau_A, \quad U_A = u_A + i\nu_A. \tag{5.8.17}$$

- Kähler ポテンシャル

$$K = -\ln Y; \quad Y = st_1t_2t_3u_1u_2u_3 = 3^{-4\phi}\mathscr{V}^3. \tag{5.8.18}$$

- BG fluxes
  - H_3-flux: $H_{(0)} = H_{468}$, $H_{(1)}^{1|2|3|} = H_{578|569|479}$
  - geometrical flu $f^a{}_{bc}$:

$$\omega_{(1)}^{1|2|3} = f_{597|759|975}, \tag{5.8.19a}$$

$$\omega_{(2)}^{1|2|3} = f_{586|748|964}, \tag{5.8.19b}$$

$$(\omega_{(3)}^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & f^4{}_{96} & f^4{}_{87} \\ f^6{}_{49} & 0 & ff^6{}_{58} \\ f^8{}_{74} & f^8{}_{65} & 0 \end{pmatrix} \tag{5.8.19c}$$

  - RR-flux:
    * F_0: $F_{(0)}$
    * F_2: $F_{(2)}^{1|2|3} = F_{45|67|89}$
    * F_4: $F_{(4)}^{1|2|3} = F_{6789|8945|4567}$
    * F_6: dual to $F_{\mu\nu\lambda\sigma} = F^{(6)}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}(X)$

- Super potetial

$$W = \frac{1}{4}\int_Y \boldsymbol{G} \wedge e^{iJ^c} - i(H - if\circ J^c) \wedge \Omega^c. \tag{5.8.20}$$

ここで,

$$J^c = J + iB; \quad J = \frac{i}{2}\sum_{A=1}^{3} dz^A \wedge d\bar{z}^A, \tag{5.8.21a}$$

$$\Omega^c = \mathrm{Re}\,(ie^{\phi}\Omega) + iC_{[3]}; \quad \Omega = dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3, \tag{5.8.21b}$$

$$(f\circ J^c)_{abd} = f^e_{ba}J^c_{ed}. \tag{5.8.21c}$$

具体的には

$$J^c_{45|67|b9} = T_{1|2|3}, \tag{5.8.22a}$$

$$\Omega^c_{579} = S, \quad \Omega^c_{568|478|469} = -U_{1|2|3} \tag{5.8.22b}$$

なので，

$$
\begin{aligned}
4W &= \sum_{A=1}^{3}(\omega^A_{(1)}T_AU_A - \omega^A_{(2)}ST_A) - \sum_{A,B=1}^{3}\omega^{AB}_{(3)}T_AU_B \\
&\quad + \sum_{A=1}^{3}(iF^A_{(4)}T_A - F^A_{(2)}T_BT_C) + F_{(6)} - iF_{(0)}T_1T_2T_3 \\
&\quad + i(H_{(0)}S - \sum_{A=1}^{3}H^A_{(1)}U_A). \qquad (5.8.23)
\end{aligned}
$$

- SUSY adS minimum: 理論が 3 つの T^2 の入れ替えについて対称で，BG flux が条件

$$\frac{1}{9}F_{(6)} = -t_0^2F_{(2)} = \frac{t_0u_0}{6}\omega_{(1)} = \frac{s_0t_0}{2}\omega_{(2)} = \frac{t_0u_0}{6}\omega_{(3)} = p, \quad (5.8.24a)$$

$$\frac{t_0}{2}F_{(4)} = \frac{t_0^3}{5}F_{(0)} = -\frac{s_0}{2}H_{(0)} = \frac{u_0}{2}H_{(1)} = q \qquad (5.8.24b)$$

を満たすとき，K と W は

$$K = -\ln(st^4u^3), \qquad (5.8.25a)$$

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{p}{4}\left\{906(\hat{S}+3\hat{U})\hat{T} + 3\hat{T}^3\right\} \\
&\quad + \frac{iq}{4}\left\{-2(\hat{S}+3\hat{U}) + 9\hat{T} - 5\hat{T}^3\right\} \qquad (5.8.25b)
\end{aligned}
$$

となり ($\hat{T} = T/t_0, \hat{U} = U/u_0, \hat{S} = S/s_0$)，安定な超対称 adS 最小点をもつ:

$$S = s_0(1-3ia),\ T_A = t_0,\ U_A = u_0(1+ia). \qquad (5.8.26)$$

ここで，a は任意の実数である．したがって，ポテンシャルは a の変化する方向に flat direction をもつ．

5.8.2　IIA 理論での dS 真空

概要　Massive IIA を $(\mathrm{Nil}/\Gamma)^2$ の orientifold にコンパクト化．モジュライは，$g \sim e^\phi \mathscr{V}^{1/4}$, $e^{6\sigma} \sim \mathscr{V}$ および Nil/Γ のねじれたトーラスの 2 つの周期 L_1, L_2. ポテンシャルとして，$R(Y) \to V_R$, $(O6, H_3, F_0) \to V_{OHm_0}$, $F_6 \to V_{F_6}$, KK5 brane→ V_{KK5} を考慮すると，安定な dS 真空が存在.

References

- Silverstein E: prd 77, 106006 (2008)

  "Simple de Sitter solutionS"

モデル

- 内部空間：$Y = \mathrm{Nil}^3 \times \tilde{\mathrm{Nil}}^3/\Gamma/\mathscr{O}$

$$\ell_s^{-2} ds^2(M) = g(\mathrm{Nil}) + g(\tilde{\mathrm{Nil}}); \tag{5.8.27a}$$
$$g(\mathrm{Nil}) = L_1^2(\eta^1)^2 + L_2^2(\eta^2)^2 + L_x^2(\eta_3)^2, \tag{5.8.27b}$$
$$\eta^1 = du_1, \quad \eta^2 = du_2, \eta^3 = dx + \frac{M}{2}(u_1 du_2 - u_2 u_1). \tag{5.8.27c}$$

コンパクト化に用いる離散群 Γ は各 Nil について，次の 3 つの等長変換により生成される：

$$t_x \quad : \quad (x, u_1, u_2) \to (x+1, u_1, u_2), \tag{5.8.28a}$$
$$t_1 \quad : \quad (x, u_1, u_2) \to \left(x - \tfrac{M}{2}u_2, u_1+1, u_2\right), \tag{5.8.28b}$$
$$t_2 \quad : \quad (x, u_1, u_2) \to \left(x + \tfrac{M}{2}u_2, u_1, u_2+1\right). \tag{5.8.28c}$$

これらの変換は次の関係式を満たす：

$$t_1 t_2 t_1^{-1} t_2^{-1} = t_x^M \tag{5.8.29}$$

また，orientifolding は $\mathscr{O} = \Omega_p(-1))^{F_L}\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} : \mathrm{Nil} \times \tilde{\mathrm{Nil}} \ni (X, \tilde{X}) \to (\tilde{X}, X) \tag{5.8.30}$$

これより，

$$\pi_1(Y) = \left\langle \gamma_1 = t_1\tilde{t}_1, \gamma_2 = t_2\tilde{t}_2, \gamma_x = t_x\tilde{t}_x; \gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1} = \gamma_x^M \right\rangle, \tag{5.8.31a}$$
$$H_1(Y, \mathbb{Z}) = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_x; M\gamma_x = 0\rangle \cong \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}_M, \tag{5.8.31b}$$
$$H^1(Y, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2. \tag{5.8.31c}$$

- モジュライ: g, L, L_1, L_2, σ

$$ds^2(M) = g(X_4) + g(Y_6), \tag{5.8.32a}$$
$$e^\phi = g_s e^{\tilde{\phi}}, \tag{5.8.32b}$$
$$\mathscr{V} = L^6/2 = L_1^2 L_2^2 L_x^2/2 = (L_0^6/2)e^{6\sigma}, \tag{5.8.32c}$$
$$g = \frac{e^\phi}{L^{3/2}} = \frac{g_s}{L_0^{3/2}} e^{\tilde{\phi}-3\sigma}, \tag{5.8.32d}$$
$$g^E(X_4) = e^{6\sigma-4\tilde{\phi}} g^s(X_4). \tag{5.8.32e}$$

- string フレームのポテンシャル V_s と Einstein フレームでのポテンシャル V の関係：

$$V_s = -\frac{1}{2\ell_s^4}\int_Y e^{-2\phi} R_s(Y) + \cdots \tag{5.8.33}$$

に対して，

$$V = m_{\mathrm{pl}}^4 \frac{e^{4\phi}}{(L^6/2)^2} V_s. \tag{5.8.34}$$

- 曲率

$$R_s(Y) = -\frac{L_x^2 M^2}{\ell_s^2 L_u^4}; \quad L_u^2 = L_1 L_2 \ \Rightarrow\ V_R = m_{\rm pl}^4 \frac{g^2 L_x^2 M^2}{2L^6}. \tag{5.8.35}$$

- Orientifold plane O6 と H_3 フラックス
  - O6 plane tension

$$V_{O6} = -2^3 \pi g^3. \tag{5.8.36}$$

  - Tadpole cancelation for H_3:

$$m_0 \int_{\Sigma_3} H = -2\sqrt{2}\mu_6 \kappa^2 n_{O6}. \tag{5.8.37}$$

ここで，orientifold projection で残る H_3 は

$$\begin{aligned} H_3 \ = \ & p_1(\eta_1 \wedge \eta^2 \wedge \eta^3 - \tilde\eta_1 \wedge \tilde\eta_2 \wedge \tilde\eta_3) \\ & + p_2(\tilde\eta_1 \wedge \eta^2 \wedge \tilde\eta^3 - \eta_1 \wedge \tilde\eta_2 \wedge \eta_3) \\ & + p_3(\eta_1 \wedge \tilde\eta^2 \wedge \tilde\eta^3 - \tilde\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3) \end{aligned} \tag{5.8.38}$$

量子化条件

$$m_0 = \frac{f_0}{2\sqrt{2}\pi\ell_s}; \quad f_0 \in \mathbb{Z}, \tag{5.8.39a}$$

$$p_i = -h_{3\,i}(2\pi)^2 \ell_s^2; \quad h_{3\,i} \in \mathbb{Z} \tag{5.8.39b}$$

を考慮すると，tadpole 相殺条件は

$$f_0 h_{3\,i}\ 2 \ \Rightarrow\ f_0 = 1, \quad h_{3,i} = h_3 = 2. \tag{5.8.40}$$

よって，O6, H_3 および F_0 のポテンシャルへの寄与は

$$m_{\rm pl}^{-4} V_{OHm0} = \frac{3p^2 g^2}{2\ell_s^4 L^6} - \frac{2\sqrt{2}}{\ell_s}|m_0 p| g^3 + \frac{\ell_s^2 m_0^2 g^4 L^6}{4}. \tag{5.8.41}$$

- F_6 フラックス

$$F_6 = \ell_s^5 K \eta^1 \wedge \eta^2 \wedge \eta^3 \wedge \tilde\eta^1 \wedge \tilde\eta^2 \wedge \tilde\eta^3, \tag{5.8.42}$$

$$K = f_6 (2\pi)^5/\sqrt{2}; \quad f_6 \in \mathbb{Z}, \tag{5.8.43}$$

$$V_{F_6} = m_{\rm pl}^4 g^4 \frac{K^2}{4L^6}. \tag{5.8.44}$$

- Discrete Wilson line

$$\tilde F_2 = dC_1 + m_0 B, \tag{5.8.45a}$$

$$B = \frac{q}{M}(2\pi)^2 \ell_s^2 dx \wedge d\tilde x + \frac{r}{M}(2\pi)^2 \ell_s^2 (dx \wedge \tilde\eta^1 - d\tilde x \wedge \eta^1) + \cdots \tag{5.8.45b}$$

$$V_{BWL} = 4\pi^4 m_{\rm pl}^4 m_0^2 \ell_s^2 \left(\frac{q}{M}\right)^2 g^4 + \cdots . \tag{5.8.45c}$$

- KK 5-branes : 4 次元時空 X および $\partial_x - \partial_{\tilde{x}}$, $\partial_{u_1} + \partial_{u_2} + \partial_{\tilde{u}_1} + \partial_{\tilde{u}_2}$ に巻きつく D5 ブレーンで，$\partial_x + \partial_{\tilde{x}}$ 方向の U(1) に関して KK 磁荷をもつ．

$$V_{KK5} = 4\yen mpl^2 g^2 n_K \frac{L_x^{5/2}}{L^{9/2}}. \tag{5.8.46}$$

- 全ポテンシャル

$$\begin{aligned} V &= m_{\rm pl}^4 \left(ag^2 - bg^3 + cg^4\right); \quad &(5.8.47)\\ a &= M^2 \frac{L_x^4}{2L^6} + 4n_K \frac{L_x^{5/2}}{L^{9/2}} + \frac{3p^2}{2\ell_s^4 L^6}, \quad &(5.8.48)\\ b &= \frac{2\sqrt{2}}{\ell_s} |pm_0|,, \quad &(5.8.49)\\ c &= \ell_s^2 \Big[\frac{m_0^2}{4} L^6 + 4\pi^4 m_0^2 \left(\frac{q}{M}\right)^2 \frac{L^6}{L_x^4} + \left(\frac{r}{M}\right)^2 \frac{16\pi^4 m_0^2 L^3}{L_x} \\ &\quad + \left(\frac{r}{M}\right)^4 \frac{(2\pi)^8 m_0^2}{L_x^2} + \frac{K^2}{4\ell_s^{12} L^6} \Big]. \quad &(5.8.50) \end{aligned}$$

このポテンシャルは

$$\delta = \frac{4ac}{b^2} - 1 \tag{5.8.51}$$

で定義される δ の最小値が

$$0 < \delta < 1/8 \tag{5.8.52}$$

を満たすことがいえることより，g に関して $V > 0$ となる極小点をもつ．

- Example: $n_K = M = 10, f_6 = 80, q = r = 1$ [Silverstein E (2008)]
  - Critical point

$$g \simeq 0.00015 \ \Rightarrow\ \delta = 0.005359, \tag{5.8.53a}$$

$$(L, L_x) = (15.45, 2.099) \ \Rightarrow\ V \simeq 2.4 \times 10^{-13}. \tag{5.8.53b}$$

Scaling　モジュライ変数を

$$L = K^{1/6}\hat{L}, \quad L_x = M^{-1/2}\hat{L}_x, \quad g = K^{-1}\hat{g} \tag{5.8.54}$$

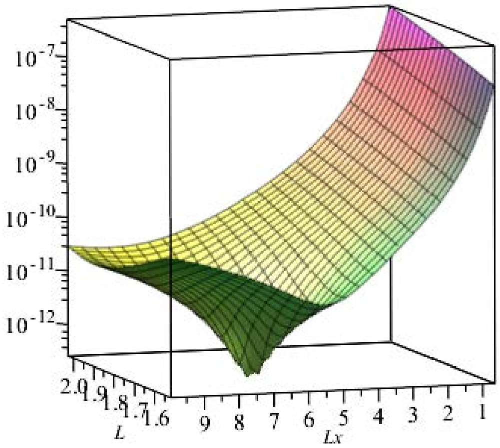


図 5.7: IIA 理論の Nil コンパクト化により得られた dS 真空の例

とスケールすると，ポテンシャルは次の形に書ける：

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{m_{\rm pl}^4}{K^3}\hat{g}^2(\hat{a}-\hat{b}\hat{g}+\hat{c}\hat{g}^2); &(5.8.55a)\\
\hat{a} &= \frac{\hat{L}_x^4}{2\hat{L}^6}+4n_K\frac{K^{1/4}}{M^{5/4}}\frac{\hat{L}_x^{5/2}}{\hat{L}^{9/2}}+\frac{6(2\pi)^4}{\hat{L}^6}, &(5.8.55b)\\
\hat{b} &= 8\pi, &(5.8.55c)\\
\hat{c} &= \frac{\hat{L}^6}{32\pi^2}+\frac{\pi^2q^2}{2}\frac{\hat{L}^6}{\hat{L}_x^4}+2\pi^2\left(\frac{r}{M}\right)^2\left(\frac{M}{K}\right)^{1/2}\frac{\hat{L}^3}{\hat{L}_x}\\
&\quad +32\pi^6\left(\frac{r}{M}\right)^4\frac{M}{K}\frac{1}{\hat{L}_x^2}+\frac{1}{4\hat{L}^6}. &(5.8.55d)
\end{aligned}
$$

5.8.3 Monodromy inflation in IIA

概要　Massive IIA 理論の Nil コンパクト化において，適当な Nil の S^1 に巻きつく D4 ブレーンを考えると，その別の S^1 方向の運動に対して モノドロミーが生じ，D4 ブレーンの位置がインフラトンとなる large field インフレーションモデルが構成できる．

References

- Silverstein E, Westphal A: prd78, 106003 (2008)

  “Monodromy in the CMB: Gravity waves and string inflation”

1. D4 ブレーンの作用積分

10 次元 IIA 理論の $Y_6 = \mathrm{Nil}/\Gamma \times \widetilde{\mathrm{Nil}}/\tilde{\Gamma}$ へのコンパクト化において，

$$x' = x - \frac{M}{2} u_1 u_2 \tag{5.8.56}$$

とおくと，Γ を生成する変換 t_x, t_1, t_2 は

$$t_x \ : \ (x', u_1, u_2) \to (x' + 1, u_1, u_2), \tag{5.8.57a}$$

$$t_1 \ : \ (x', u_1, u_2) \to (x' - M u_2, u_1 + 1, u_2), \tag{5.8.57b}$$

$$t_2 \ : \ (x', u_1, u_2) \to (x', u_1, u_2 + 1) \tag{5.8.57c}$$

となるので，Nil/Γ は $\mathrm{Nil}/\langle t_x, t_2\rangle \cong T^2 \times \mathbb{R}$ を t_1 で割ったものとなる．

いま，4 次元時空 X_4 に広がり，Nil/Γ の $x' = \mathrm{const}, u_1 = \mathrm{const}$ で決まる u_2 方向の S^1 に巻き付く D4 ブレーンを考える．この S^1 の長さは，u_1 の関数 $(L_2^2 + L_x^2 M - 2u_1^2)^{1/2}$ となり，$|u_1|$ の増大とともに限りなく増大する．D4 ブレーンのエネルギーはこの S^1 の長さに比例するので，large field inflaton の候補となる．

D4 ブレーンが u_1 方向のみに運動するとすると，D4 ブレーンの作用積分

$$S_{D4} = -\int_{\Sigma_5} \frac{d^5\xi}{(2\pi)^4 \ell_s^5} e^{-\phi} \sqrt{\det(G+B)} + \frac{1}{(2\pi)^4 \ell_s^5} \int_{\Sigma_5} C e^{-B + 2\pi \ell_s^2 F} \tag{5.8.58}$$

は，

$$S_{D4} = \frac{1}{(2\pi)^4 g_s \ell_s^4} \int d^4x \sqrt{-g_4} \sqrt{(L_2^2 + L_x^2 M^2 u_1^2)(1 - \ell_s L_1^2 \dot{u}_1^2)} \tag{5.8.59}$$

となる．これを $\dot{u}_1$ について展開し 2 次まで取り，運動項の正規化のために，変換

$$\frac{d\phi}{du_1} = \frac{L_u^{3/2} \beta^{-1/4}}{(2\pi)^2 \sqrt{g_s} \ell_s} \left(1 + \frac{M^2 L_x^2}{\beta L_u^2} u_1^2\right)^{1/4} \tag{5.8.60}$$

を行うと，

$$S_{D4} = \int d^4x \sqrt{-g_4} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V_{D4}(\phi)\right); \tag{5.8.61}$$

$$V_{D4} = \frac{\beta^{1/2} L_u}{(2\pi)^4 g_s \ell_s^4} \left(1 + \frac{M^2 L_x^2}{\beta L_u^2} u_1(\phi)^2\right)^{1/2} \tag{5.8.62}$$

を得る．ここで，

$$\beta \equiv L_2/L_1, \quad L_u^2 = L_1 L_2 \tag{5.8.63}$$

2. ポテンシャルの振る舞い

ϕ_{cr} を

$$\frac{\phi_{\mathrm{cr}}}{m_{\mathrm{pl}}} \approx (2\pi)^{3/2} \beta^{1/4} \frac{g_s^{1/2} L^{3/4}}{\sqrt{2} M L_x^{9/4}} \tag{5.8.64}$$

とすると，

- $\phi \ll \phi_{\rm cr}$ のとき：

$$V_{D4} \simeq \frac{1}{2} m^2 \phi^2; \quad m^2 = \frac{M^2 L_x^4}{\ell_s^2 L^6}. \tag{5.8.65}$$

Nil コンパクト化におけるモジュライポテンシャルのうち，曲率項の寄与を

$$V_{{\rm mod},R} \simeq m_{\rm pl}^4 \frac{(2\pi)^7}{4} g^2 \frac{M^2 L_x^2}{L^6} \tag{5.8.66}$$

とすると，

$$V_{D4} \sim \left(\frac{\phi}{m_{\rm pl}}\right)^2 V_{{\rm mod},R} \tag{5.8.67}$$

より，$\phi \gtrsim m_{\rm pl}$ の領域でこの近似が成り立つとすると，D4 ブレーンのエネルギーがモジュライ安定化に大きく影響することになる．したがって，次の $\phi \gg \phi_{\rm cr}$ の領域までブレーンのモジュライ安定化への影響が無視して上記のポテンシャルが使用できるためには，

$$\phi_{\rm cr} < m_{\rm pl} \tag{5.8.68}$$

が要求される．

- $\phi \gg \phi_{\rm cr}$ のとき：

$$\phi \approx \frac{M^{1/2} L_u L_x^{1/2}}{6\pi^2 g_s^{1/2} \ell_s \beta^{1/2}} u_1^{3/2} \tag{5.8.69}$$

より，

$$V_{D4} \simeq \mu^{10/3} \phi^{2/3}; \tag{5.8.70}$$

$$\mu^{10/3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (2\pi)^{-8/3} \frac{M^{2/3} \beta^{1/3} L_x}{\ell_s^{10/3} g_s^{2/3} L}. \tag{5.8.71}$$

3. 整合性

D4 の影響でモジュライ安定化が壊されないための条件　$V_{{\rm mod},R}$ をモジュライポテンシャルのうち曲率の寄与として，安定化が壊されないための必要条件は

$$V_{D4} < V_{{\rm mod},R} \;\Rightarrow\; \phi < \phi_{\rm max} \sim m_{\rm pl} \times (2\pi)^{21/2} \left(\frac{m_{\rm pl}}{\mu}\right)^5 \frac{M^3 g^3 L_x^6}{8L^9}. \tag{5.8.72}$$

Rescale したモジュライ変数で表すと

$$\frac{\phi_{\rm cr}}{m_{\rm pl}} \sim (2\pi)^{3/2} \beta^{1/4} \hat{g}^{1/2} \left(\frac{M}{K}\right)^{1/8} \left(\frac{\hat{L}}{\hat{L}_x}\right)^{9/4}, \tag{5.8.73a}$$

$$\frac{\phi_{\rm max}}{m_{\rm pl}} \sim \frac{\beta^{-1/2}}{3(2\pi)^3 \hat{g}} \left(\frac{K}{M}\right)^{1/4} \frac{\hat{L}}{\hat{L}_x}^{-9/2} \tag{5.8.73b}$$

これより，F_6 フラックスの大きさ K を大きく，または β を小さくなるパラメータ tuning をすれば，$\phi_{\rm cr}/m_{\rm pl} \ll 1$ かつ $\phi_{\rm max}/m_{\rm pl} \gtrsim 10$ という要請が満たされる．

【**Note 5.8.1**】

- KK5 ブレーンの生み出すポテンシャルは

$$
\begin{aligned}
V_{KK5} &\sim \frac{1}{\sqrt{\beta}} m_{\rm pl}^4 g^2 \frac{M L_x^{5/2}}{L^9/2} \\
&\sim \frac{m_{\rm pl}^4}{K^3}\frac{1}{\sqrt{\beta}}\left(\frac{K}{M}\right)^{1/4}\frac{\hat{L}_x^2}{\hat{L}^{9/2}}\hat{g}^2 \sim V_{{\rm mod},R}\times\frac{1}{\sqrt{\beta}}\left(\frac{K}{M}\right)^{1/4}\frac{\hat{L}^{3/2}}{\hat{L}_x^2}
\end{aligned}
\tag{5.8.74}
$$

  となるので，K^2/β を増大させると，KK5 ブレーンのエネルギーが支配的となり危険．

- Kallosh-Linde 問題

$$
m_{\rm pl}^2 H_{\rm inf}^2 \sim V_{D4} < V_{{\rm mod},R} \sim m_{\rm pl}^2 R_s(Y) \lesssim m_{\rm pl}^2 m_{3/2}^2 \tag{5.8.75}
$$

  より

$$
H_{\rm inf} \lesssim m_{3/2}. \tag{5.8.76}
$$

□

D4 ブレーンの反作用によるモジュライ極点のずれとインフレーション軌道のずれ
全ポテンシャルは，D4 ブレーンがない場合のモジュライ平衡点近傍で展開すると

$$
\begin{aligned}
V_{\rm tot} &= V_{\rm mod}(Le^\sigma) + V_{D4}(\phi, Le^\sigma) \\
&\simeq V_{\rm mod}(L) + \frac{1}{2}\partial_\sigma^2 V_{\rm mod}\sigma^2 + V_{D4}(\phi, L) \\
&\quad + \partial_\sigma V_{D4}\sigma + \frac{1}{2}\partial_\sigma^2 V_{D4}\sigma^2
\end{aligned}
\tag{5.8.77}
$$

ここで，

$$
V_{D4} \ll V_{\rm mod} \ll \partial_\sigma^2 V_{\rm mod} \tag{5.8.78}
$$

より，

$$
\sigma \approx \frac{\partial_\sigma V_{D4}}{\partial_\sigma^2 V_{\rm mod} + \partial_\sigma^2 V_{D4}} \sim \frac{V_{D4}}{V_{{\rm mod},R}}. \tag{5.8.79}
$$

これを考慮して $\partial_\phi^2 V$ を計算すると，

$$
\Delta\eta \sim \eta\frac{V_{D4}}{V_{{\rm mod},R}}. \tag{5.8.80}
$$

したがって，$V_{D4}/V_{{\rm mod},R} \ll 1$ なら，η への backreaction は無視できる．

D4 の 6 次元内部空間への影響　D4 ブレーンが u_1 の位置にあるとき，D4 ブレーンは u_2 方向に一定の間隔でずれながら，x' 方向に $N_w = Mu_1$ 回巻き付いた状態にある：

$$N_w = Mu_1 \sim \frac{V_{D4}}{V_{\mathrm{mod},R}} \frac{2L_x^3 M^2}{(2\pi)^3 g_s}. \tag{5.8.81}$$

そこで，Y_6 においｋて $u_2, x, \tilde{x}$ 方向を KK reduction し，$\tilde{u}_2 u_1, \tilde{u}_1$ 上の理論に落とすと，D4 ブレーンの重力ポテンシャルは

$$\Phi_{D4} \sim \frac{G_7 V_{D4}}{r}; \quad G_7 \sim (2\pi)^4 \frac{g_s^2 \ell_s^5}{L_x^2 L_2}. \tag{5.8.82}$$

これより，D4 ブレーンの曲率の影響領域の半径 r_c は $r_c \sim G_7 V_{D4}$. これを Y の半径と比較すると

$$\frac{r_c}{L_2 \ell_s} \sim \frac{V_{D4}}{V_{\mathrm{mod},R}} \frac{L_x^3 M^2}{\beta L^3 (2\pi)^2} \sim \frac{V_{D4}}{V_{\mathrm{mod},R}} \frac{1}{\beta (2\pi)^2} \sqrt{\frac{M}{K}}, \tag{5.8.83a}$$

$$\frac{r_c}{L_2 \ell_s} \sim \frac{V_{D4}}{V_{\mathrm{mod},R}} \frac{1}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{M}{K}}. \tag{5.8.83b}$$

ここで，

$$\frac{V_{D4}}{V_{\mathrm{mod},R}} \propto \beta^{1/3} \tag{5.8.84}$$

より，$K/M \gg 1$ としても β が小さすぎると，内部空間が古典的に扱える条件

$$\frac{r_c}{L_2 \ell_s} \ll 1, \quad \frac{r_c}{L_1 \ell_s} \ll 1 \tag{5.8.85}$$

が満たされなくなる．

4. 観測情報からの制限

一般に，$V \propto \phi^p$ のとき，

$$N \simeq \frac{1}{2p} \left\{ \left(\frac{\phi_N}{m_{\mathrm{pl}}} \right)^2 - 1 \right\} \tag{5.8.86}$$

より，スカラ曲率ゆらぎの振幅は

$$\Delta_R \simeq \left(\frac{V^3}{12\pi^2 m_{\mathrm{pl}}^6 V'^2} \right)^{1/2} \simeq \frac{(4/3)^{1/6}}{2\pi} N^{2/3} \left(\frac{\mu}{m_{\mathrm{pl}}} \right)^{5/3}. \tag{5.8.87}$$

COBE 規格化では

$$\mu_{\mathrm{obs}} \simeq 1.6 \times 10^{-3} \quad (N = 60). \tag{5.8.88}$$

整合性条件を rescale されたモジュライパラメータで表すと

$$\frac{\phi_{\rm cr}}{m_{\rm pl}} \sim (2\pi)^{3/2}\gamma^{-1/2}\frac{\hat{g}^{1/2}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{L}}{\hat{L}_x}\right)^{9/4} \ll 1, \tag{5.8.89a}$$

$$\frac{\phi_{\rm max}}{m_{\rm pl}} \sim \frac{\gamma}{3(2\pi)^3\hat{g}}\left(\frac{\hat{L}}{\hat{L}_x}\right)^{-9/2} > \frac{\phi_N}{m_{\rm pl}}, \tag{5.8.89b}$$

$$\frac{\phi_*}{m_{\rm pl}} \sim K^{9/8}\gamma^{1/4}, \tag{5.8.89c}$$

$$\Delta_R \sim 60^{2/3}\frac{(2\pi)^{7/2}}{2^{5/6}}K^{-3/2}\gamma^{-1/3}\hat{g}^{4/3}\frac{\hat{L}_x^{1/2}}{\hat{L}^{3/2}}. \tag{5.8.89d}$$

ここで，

$$\gamma \equiv \beta^{-1/2}\left(\frac{K}{M}\right)^{1/4}. \tag{5.8.90}$$

まず

$$\phi_{\rm max} > 9m_{\rm pl} \;\Rightarrow\; \gamma > 190 \; (N_{\rm total} > 60) \tag{5.8.91}$$

また，

$$\Delta_R \sim 5.4\times 10^{-5} \;\Rightarrow\; \gamma^{1/3}K^{3/2} \sim 1.9\times 10^{10}. \tag{5.8.92}$$

両者より，

$$K \leqslant 2.3\times 10^6 \;\Rightarrow\; f_6 \lesssim 310. \tag{5.8.93}$$

および

$$\beta M^{/2} \lesssim 0.04 \tag{5.8.94}$$

これは $M=1$ でも $\beta\sim 0.04$ 程度の fine tuning が必要であることを意味する．

（注）　Silverstein が dS 真空を求めたモデルでは，KK5 ブレーンは $\beta=1$ に安定化させる効果をもつ．

【Question 5.8.2】　IIA 理論の Nil コンパクト化において，D4 を $u_2-\tilde{u}_2$ 方向に巻き付け，$u_2+\tilde{u}_2$, u_1, $\tilde{u}_1$ の線形結合の方向に動くとする：

$$u_2=\sigma+cu_B(t),\quad \tilde{u}_2=-\sigma+cu_B(t),\quad u_1=au_B(t),\quad \tilde{u}_1=bu_B(t). \tag{5.8.95}$$

このとき，$u_B\gg 1$ で，$V_{D4}\propto\phi^{2/5}$ となることを示せ．　□

5.8.4 Axion monodromy inflation in IIB model

概要　IIB 理論における DBI 作用積分が生み出す D5-B 場アクシオン結合，NS5-C がアクシオン結合を用いると，大振幅で $V\propto\phi$ となる大振幅アクシオンインフレーションモデルが構成できる．このモデルは，IIA 理論の Nil コンパクト化に基づく monodromy influm の T 双対と見なすことができる（D4↔ D5/NS5, geometrical flux ↔ B/C 場).

References

- McAlister, Silverstein E, Westphal A: prd82, 046003 (2010)

  Gravity waves and linear inflation from axion monodromy”

axions　IIB 理論では、２種類のモデル依存 axions が生じる：

- $B_2 = \sum_I b_I \omega^I \;\;\Rightarrow\;\; b_I (I=1,\cdots,h^{1,1})$
- $C_p = \sum c^{(p)}_\alpha \omega^\alpha_{[p]} \;\;\Rightarrow\;\; c^{(p)}_\alpha\ (\alpha=1,\cdots,b_p)$

ブレーンが存在しないとき、これらの場はシフト対称性をもつ：

$$\phi_a \to \phi_a + (2\pi)^2 f_a \tag{5.8.96}$$

運動項は一般に、

$$S_{\rm kin} = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g_4}\gamma^{IJ}\partial a_I\cdot\partial a_j \tag{5.8.97}$$

の構造をもつ。ここで、

$$\gamma^{IJ} = \begin{cases} \frac{1}{6(2\pi)^7 g_s^2\ell_s^8}\int_Y *\omega_I\wedge\omega_J & ; b_I \\ \frac{1}{6(2\pi)^7\ell_s^8}\int_Y *\omega_I\wedge\omega_J & ; c_J \end{cases} \tag{5.8.98}$$

これより、

$$m_{\rm pl}^2 = \frac{2}{(2\pi)^7}\frac{\mathscr{V}}{g_s^2\ell_s^2}, \quad \mathscr{V} = {\rm Vol}(Y)/\ell_s^6 = L^6 \tag{5.8.99}$$

を考慮すると

$$\phi_b^2 \sim \frac{L^2b^2}{3g_s^2(2\pi)^7\ell_s^2} = \frac{1}{6}L^2m_{\rm pl}^2b^2 \;\;\Rightarrow\;\; f_a\sim\frac{L}{\sqrt{6}}m_{\rm pl}, \tag{5.8.100a}$$

$$\phi_c^2 \sim \frac{L^2c^2}{3(2\pi)^7\ell_s^2} = \frac{1}{6}g_s^2L^2m_{\rm pl}^2c^2 \;\;\Rightarrow\;\; f_a\sim\frac{g_sL}{\sqrt{6}}m_{\rm pl}. \tag{5.8.100b}$$

Brane-axion 相互作用　DBI作用積分より

$$D5 \quad : \quad V(b) = \frac{\epsilon}{g_s(2\pi)^5\ell_s^4}\sqrt{\ell^4 + b^2}, \tag{5.8.101a}$$

$$NS5 \quad : \quad V(b) = \frac{\epsilon}{g_s^2(2\pi)^5\ell_s^4}\sqrt{\ell^4 + g_s^2 c^2} \tag{5.8.101b}$$

両者はS双対変換により互いに移り変わる．いずれのモデルでも、$\phi_a \gg m_{\rm pl}$ のとき

$$V(\phi_a) \approx \mu_a^3 \phi_a \tag{5.8.102}$$

***B*-axion**　IIB理論のCYコンパクト化により、$N = 2$ の4D sugraが得られる。この際のモジュライは、orientifold射影のあと、

- Kähler: $T^A = \tau^A + i\theta^A; \quad \theta^A = \int_{\Sigma_A^{(4)}} C_4$

  $\Rightarrow$ T_+^α: $\mathscr{O}$-even

- Axionic: $G^I = g_s^{-1} b^I + i(c^I - C_0 b^I)$: $\mathscr{O}$-odd

このとき、

$$T_\alpha = \frac{3}{2}(\partial_{v_\alpha}\mathscr{V} + i\theta_\alpha) - \frac{3}{8}e^\phi c^{\alpha IJ} G_I (G + \bar{G})_J \tag{5.8.103}$$

より、Kählerポテンシャルは

$$K = -2\ln(e^{-3\phi/2}\mathscr{V}) = -3\ln\left(T_L + \bar{T}_L + \frac{3}{2}e^{-\phi}c^{LIJ}b_I b_J\right) \tag{5.8.104}$$

となる。この K の b 依存性のため、B-axionには η 問題が起こりインフラトンとなれない。

***C*-axion**　C-axionとNS5ブレーンの結合の場合、η 問題は起こらず、インフラトンとなることが可能。ただし、Euclidian D1ブレーンとの相互作用は危険で、抑制が必要。

例えば、$h_+^{1,1} = 2, h_-^{1,1} = 1$ となるコンパクト化では、

$$K = -2\ln\mathscr{V}_E; \quad \mathscr{V}_E = \frac{L^6}{g_s^{3/2}(2\pi)^6} = (T_L + \tilde{T}_L)^{3/2} - [T_+ + \bar{T}_+ + \frac{3}{8}g_s c_{+--}(G_- + \bar{G}_-)^2]^{3/2}, \tag{5.8.105a}$$

$$W = W_0 + A_1 e^{-a_+ T_+} + A_L e^{-a_L T_L} \tag{5.8.105b}$$

に対し、モデルパラメータを

$$A_L = -1,\ A_+ = 1,\ a_L = \frac{2\pi}{25},\ a_+ = \frac{2\pi}{3},\ W_0 = 3\times 10^{-2}\times W_0(\mathrm{KKLT}) \tag{5.8.106}$$

ととると、モジュライは安定化される：

$$T_L \sim 20,\ T_+ \sim 4, \quad b \sim 0. \tag{5.8.107}$$

さらに、NS5 ブレーンとの相互作用

$$V_{\rm NS5} = m_{\rm pl}^4 \frac{e^{4A_{\rm bottom}}}{(2\pi)^3 g_s \mathscr{V}_E^2}\sqrt{v_+^2 + g_s^2 c^2}, \tag{5.8.108}$$

$$v_+^2 = \frac{g_s}{2}\left\{T_+ + \bar{T}_+ + \frac{3}{8} g_s c_{+--}(G_- + \bar{G}_-)^2\right\}, \tag{5.8.109}$$

$$\phi_c \sim m_{\rm pl} e^{A_{\rm top}} \frac{c g_s}{L^2} \tag{5.8.110}$$

を考慮すると、c はインフラトンとなる。モデルパラメータとして

$$e^{A_{\rm bottom}} \sim 0.04, \quad e^{A_{\rm top}} \sim 1 \tag{5.8.111}$$

と取ると、巻きつき数は $N_w \sim 70$ となり、axion のモジュライへの反作用は無視できる。

5.8.5　様々な axion monodromy influms

- Stringy realisation
  - Baumann D, McAllister L: Inflation and String Theory (CUP, 2015) review
  - Westphal A: IJMPA30, 1530024 (2015) [1409.5350]
- D7-deformation moduli $\Rightarrow$ axion
  - Arends M, Hebecker A et al: FortPhys. 62, 647 (2014) [1405.0283]
- B-axion
  - McAllister L, Silverstein E, Westphal A, Wrase : jhpe09, 123 (2014) [1405.3652]
  - Franco S, Galloni D, Retolaza A, Uranga A: jhep02, 086 (2015) [1405.7044]
- NG flux + Kähler moduli $\Rightarrow$ axion
  - Hassler F, Lust D, Massai S: [1405.2325]
- Wilson line axion, MSSM D-brane position modulus
  - Ibanez LE, Valenzuela I: plb736, 226 (2014) [1404.5235]

- F-theory
  - Grimm TW: plb739, 201 (2014) [1404.4268]
- CS moduli
  - Garcia-Etxebarria I, Grimm TW, Valenzuela I: npb 899, 414 (2015) [1412.5537]

§5.9
Non-geometrical flux

5.9.1　T 双対変換

References

- Buscher TH: PLB194(1987)59.

  “A Symmetry of the String Background Field Equations’ ‘
- Buscher TH: PLB201(1988)466.

  “Path-integral derivation of quantum duality sigma-models’ ‘
- Bergshoeff E, Hull CM, Ortin T: NPB451(1995) 547.

  ”Duality in the Type–II Superstring Effective Action “
- Hassan SF: NPB568 (2000) 145.

  ”T-Duality, Space-time Spinors and R-R Fields in Curved Backgrounds”

1. NS sector

Nonlinear σ モデルアプローチ　[Buscher TH (1987, 1988)]
　ストリング作用積分

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int_{\Sigma_2} d^2\sigma\sqrt{h}\left[h^{ab}g(X)(\partial_a X, \partial_b X) + \epsilon^{ab}B(X)(\partial_a X, \partial_b X) + \alpha'^{(2)}R\phi(X)\right] \tag{5.9.1}$$

において，背景場が $k = \partial_x$ 方向に不変であるとする：

$$\partial_x g_{MN} = \partial_x B_{MN} = \partial_x\phi = 0 \tag{5.9.2}$$

このとき，この作用積分は次のものと同等である：

$$S_1 = S_0(\partial_a X^x \to V_a) + \frac{1}{4\pi\alpha'}\int_{\Sigma_2} X^x dV \tag{5.9.3}$$

この新たな作用積分で，Lagrange multiplier V_a を消去すると（Legendre 変換),

$$\hat{S} = S_0(g \to \hat{g}, B \to \hat{B}); \tag{5.9.4}$$
$$\hat{g} = g_{xx}^{-1}(dX^x + B_{(x)})^2 - g_{xx} g_{(x)}^2 + g' \tag{5.9.5}$$
$$\hat{B} = g_{(x)} \wedge (-dX^x + B_{(x)}) + B' \tag{5.9.6}$$
$$\hat{\phi} = \phi - \frac{1}{2}\log g_{xx} \tag{5.9.7}$$

を得る．ここで，

$$g_{(x)} = \frac{1}{g_{xx}} g_{xI} dX^I \tag{5.9.8a}$$
$$B_{(x)} = I_{\partial_x} B = B_{xI} dX^I \tag{5.9.8b}$$

この変換則は **Bucher ルール**と呼ばれる．

2. RR セクター

RR セクターのフォーム場

- IIA

$$\tilde{F}_2 = F_2 = dC_1, \tag{5.9.9a}$$
$$\tilde{F}_4 = dC_3 + C_1 \wedge H_3 \tag{5.9.9b}$$

- IIB

$$\tilde{F}_1 = F_1 = dC_0, \tag{5.9.10a}$$
$$\tilde{F}_3 = dC_2 - C_0 H_3, \tag{5.9.10b}$$
$$\tilde{F}_5 = *\tilde{F}_5 : \quad d\tilde{F}_5 = H_3 \wedge \tilde{F}_3 \tag{5.9.10c}$$

の T 双対変換は，

$$F_{n(x)} = I_{\partial_x} F_n = \frac{1}{(n-1)!} F_{xI_1 \cdots I_{n-1}} dX^{I_1} \wedge \cdots dX^{I_{n-1}} \tag{5.9.11}$$

とおくとき，

$$\tilde{F}_{[n](x)} = \tilde{F}'_{[n-1]} - g_{(x)} \wedge \tilde{F}_{[n-1](x)}, \tag{5.9.12a}$$
$$\tilde{F}'_{[n]} = \tilde{F}_{[n+1](x)} + B_{(x)} \wedge \tilde{F}_{[n](x)} \tag{5.9.12b}$$

で与えられる [Bergshoeff E, Hull CM, Ortin T (1995); Hassan SF (2000)].

5.9.2 Geometrical flux

概要　Nil 多様体など，ツィストしたトーラスによるコンパクト化は，ツィストを一種のフラックスと見なすことにより，広い意味でフラックストーラスコンパクト化と見なすことができ，通常のフラックスコンパクト化と T 双対変換により結びつく．

Reference

- Kachru S, Shulz MB, Tripathy PK, Trivedi SP: JHEP0303(2003)061

  " New supersymmetric string compactifications "

1. 簡単な例

H_3 フラックスをもつ直交トーラス

$$T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3: \quad (x,y,z) \sim (x+1,y,z) \sim (x,y+1,z) \sim (x,y,z+1); \tag{5.9.13}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{5.9.14}$$

$$B = Nz dx \wedge dy, \tag{5.9.15}$$

$$H_3 = dB = N dx \wedge dy \wedge dz; \quad N = \int_{T^3} H_3 \quad ((2\pi)^2 \alpha' = 1) \tag{5.9.16}$$

に対して，x 方向に T 双対変換を施すと，

$$g_{(x)} = 0, \quad B_{(x)} = Nz dy; \quad B' = 0 \tag{5.9.17}$$

より，トーラスは Nil 多様体に変化し，B 場は消える：

$$ds^2 = (dx + Nz dy)^2 + dy^2 + dz^2 \tag{5.9.18a}$$

$$B = 0 \ \Rightarrow \ H_3 = 0. \tag{5.9.18b}$$

この Nil 多様体の自明でない接続係数をもち，それから作られる 3 形式

$$\omega_3 = \omega_{ab} \wedge \theta^a \wedge \theta^b = N\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 \tag{5.9.19}$$

の成分は定数となる．この 3 形式は **geometric flux** と呼ばれる．

2. $T^2 \times T^2 \times T^2/\mathbb{Z}_2$ orientifold

IIB-1 + O3

- Geometry

$$T^6 = T^2 \times T^2 \times T^2 \ni ((x^1, y^1), (x^2, y^2), (x^3, y^3)); \tag{5.9.20}$$

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} \left[R_{xi}^2 (dx^i)^2 + R_{yi}^2 (dy^i)^2 \right] \tag{5.9.21}$$

- Flux

$$H_3 = -N_1(dx^{12} + dy^{12}) \wedge dx^3 \tag{5.9.22a}$$

$$F_3 = N_2(dx^{12} + dy^{12}) \wedge dy^3 \tag{5.9.22b}$$

$$F_1 = F_5 = 0 \tag{5.9.22c}$$

ここで，$N_1, N_2 \in \mathbb{Z}$.

- Moduli
  - Complex structure : $h^{1,2} = 9$ for full.

$$\tau_j = iR_{yj}/R_{xj} \quad (j = 1, \cdots, 3), \quad S = C_0 + ie^{-\Phi} \tag{5.9.23}$$

  - Kähler: $h^{1,1} = 9$ for full

$$\rho_j = iR_{xj}R_{yj} \quad (j = 1, 2, 3) \tag{5.9.24}$$

- 10D IIB field equations (warping is neglected)

$$G_3 = F_3 - SH_3 = (dx^{12} + dy^{12}) \wedge (N_2 dy^3 + N_1 S dx^3) \tag{5.9.25}$$

  - Axio-dilaton =const $\Rightarrow$ $G_3 \cdot G_3 = 0$ $\Rightarrow$ $S\tau_3 = N_2/N_1$
  - Imaginary self-duality: $*G_3 = iG_3$ $\Rightarrow$ $\tau_1\tau_2 = -1$
  - $\mathbb{Z}_2$ orientifolding: (x^i, y^i) $\Rightarrow$ $(-x^i, -y^i)$ $\Rightarrow$ $N = 4$ Susy, $2^6 = 64$ O3 + flux $\Rightarrow$ $N = 2$ Susy
  - RR-tadpole cancelation

$$N_{D3} + N_{\text{flux}} = \frac{1}{4} N_{O3} = 16;$$

$$N_{\text{flux}} = \frac{1}{(2\pi)^4 (\alpha')^2} \int_{Y_6} H_3 \wedge F_3 = 2N_1N_2/2 = N_1N_2 \tag{5.9.26}$$

- Superpotential

$$\Omega = (dx^1 + \tau_1 dy^1) \wedge (dx^2 + \tau_2 dy^2) \wedge (dx^3 + \tau_3 dy^3)$$

$$\Rightarrow \ W_{IIB} = \int G_3 \wedge \Omega = -(1 + \tau_1\tau_2)(N_2 - N_1 S\tau_3) \tag{5.9.27}$$

IIB-1+O3 $\Rightarrow$ IIA-2 + O4　x^1 方向の T 変換を施すと

$$g_{x^1x^1} = R_{x1}^2, \quad g_{(x^1)} = 0, \quad B_{(x^1)} = N_1 x^2 dx^3; \quad B' = N_1 y^2 dy^1 \wedge dx^3 \tag{5.9.28}$$

より、次の IIA 理論の oritentifold コンパクト化を得る：

- Geometry: $\mathrm{Nil}^3 \times T^3$

$$ds^2 = \tilde{R}_{x1}^2 \left(dx^1 + N_1 x^2 dx^3\right)^2 + R_{x2}^2 (dx^2)^2 + R_{x3}^2 (dx^3)^2 + \sum_{j=1}^{3} R_{yj}^2 (dy^j)^2, \tag{5.9.29}$$

$$\tilde{R}_{x^1} = 1/R_{x^1} \tag{5.9.30}$$

- Topology: Nil は $T^2 \times \mathbb{R}$ を次の変換で同一視したものである：

$$x^2 \to x^2 + 1, \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^3 \end{pmatrix} \to S \begin{pmatrix} x^1 \\ x^3 \end{pmatrix}; \tag{5.9.31}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N_1 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \gamma_1 & \to & \gamma_1 + N_1 \gamma_3 \\ \gamma_3 & \to & \gamma_3 \end{pmatrix} \tag{5.9.32}$$

これより、

$$N_1 \gamma_3 \sim 0 \;\Rightarrow\; H_1(Y_6) \cong \mathbb{Z}^5 \oplus \mathbb{Z}_{N_1} \;\Rightarrow\; b_1 = 5 \tag{5.9.33}$$

Kähler 多様体に対しては、$h^{0,1} = h^{1,0}$ より b_1 は偶数となるので、これは Y_6 が Kähler 多様体でないことを意味する。

- Form fluxes

$$H_3 = -N_1 dy^1 \wedge dy^2 \wedge dx^3 \tag{5.9.34a}$$

$$F_2 = N_2 dx^2 \wedge dy^3 \tag{5.9.34b}$$

$$F_4 = N_2 (dx^1 + N_1 x^2 dx^3) \wedge dy^{123} \tag{5.9.34c}$$

- Geometrical flux: 基底

$$\theta^1 = \tilde{R}_{x1}(dx^1 + N_1 x^2 dx^3), \quad \theta^2 = R_{x2} dx^2, \quad \theta^3 = R_{x3} dx^3, \quad \cdots \tag{5.9.35}$$

に対して、接続係数は

$$\omega^2{}_3 = -f\theta^1, \quad \omega^3{}_1 = f\theta^2, \quad \omega^1{}_2 = f\theta^3; \quad f = N_1 \frac{\tilde{R}_{x1}}{R_{x2} R_{x3}} \tag{5.9.36}$$

となるので、geometrical flux は

$$\omega_{[3]} := \frac{1}{2}\omega_{ab}\theta^a \wedge \theta^b = f\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 = N_1 R_{x1}^{-2} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \tag{5.9.37}$$

- 曲率

$$\mathscr{R}^2{}_3 = -3f^2\theta^2 \wedge \theta^3, \quad \mathscr{R}^3{}_1 = f^2\theta^3 \wedge \theta^1, \quad \mathscr{R}^1{}_2 = f^2\theta^1 \wedge \theta^2, \tag{5.9.38a}$$

$$R^1_1 = 2f^2, \quad R^2_2 = R^3_3 = -2f^2, \tag{5.9.38b}$$

$$R_s = -2f^2. \tag{5.9.38c}$$

- Moduli
  - Axio-dilaton: $\tilde{S} = R_{x^1}S$.
  - Complex structure: $\tilde{\tau}_1 = i\tilde{R}_{x1}/R_{y1} = -1/\rho_1, \quad \tilde{\tau}_2 = \tau_2, \quad \tilde{\tau}_3 = \tau_3$
  - Size: $\tilde{\rho}_1 = i\tilde{R}_{x1}R_{y1} = \tau_1, \quad \tilde{\rho}_2 = \rho_2, \quad \tilde{\rho}_3 = \rho_3$
  - Constraint

$$\tilde{\rho}_1\tilde{\tau}_2 = -1, \quad \tilde{R}_{x1}\tilde{S}\tilde{\tau}_3 = N_2/N_1 \tag{5.9.39}$$

- Superpotential

$$\Omega_{\mathrm{IIA}} = \eta^1 \wedge \eta^2 \wedge \eta^3; \quad \eta^j = \theta^j + \tilde{\tau}^j\theta^{j+3}\ (j = 1, 2, 3), \tag{5.9.40a}$$

$$G_{\mathrm{IIA}} = \tilde{F}_{4(x)} + k \wedge F_2 - \frac{i\tilde{R}_{x1}}{g_s^{\mathrm{IIA}}}\left(H_3 + \tilde{R}_{x1}^{-2}k \wedge dk\right); \quad k = g_{x^1\mu}dx^\mu \tag{5.9.40b}$$

より、

$$W_{\mathrm{IIA}} = \int G_{\mathrm{IIA}} \wedge \Omega_{\mathrm{IIA}} = -N_2(1 + \tilde{\rho}_1\tilde{\tau}_2) + N_1N_2\tilde{R}_{x1}\tilde{S}(\tilde{\tau}_3 + \tilde{\rho}_1\tilde{\tau}_2\tilde{\tau}_3)(= W_{\mathrm{IIB}}). \tag{5.9.41}$$

IIA-2 + O4 ⇒ IIB-3 + O5　IIA-2+O4 において、y^1 方向に T 変換を施すと、

$$g_{(y^1)} = 0, \quad B_{(y^1)} = N_1y^2dx^3; \quad B' = 0 \tag{5.9.42}$$

より、つぎのような IIB 理論のコンパクト化を得る：

- Geometry

$$ds^2 = \tilde{R}_{x1}^2(dx^1 + N_1x^2dx^3)^2 + R_{x2}^2(dx^2)^2 + R_{x3}^2(dx^3)^2 \tag{5.9.43}$$

$$+\tilde{R}_{y1}^2(dy^1 + N_2y^2dx^3)^2 + R_{y2}^2(dy^2)^2 + R_{y3}^2(dy^3)^2 \tag{5.9.44}$$

- Form flux

$$H_3 = 0 \tag{5.9.45a}$$

$$F_3 = -N_2(dx^1 + N_1x^2dx^3) \wedge dy^{23} + N_2(dy^1 + N_1y^2dx^3) \wedge dx^2 \wedge dy^3 \tag{5.9.45b}$$

- Geometrical flux

$$\omega^2{}_3 = -f\theta^1, \quad \omega^3{}_1 = f\theta^2, \quad \omega^1{}_2 = f\theta^3; \quad f = N_1\tilde{R}_{x1}/(R_{x2}R_{x3}) \tag{5.9.46a}$$

$$\omega^5{}_3 = -g\theta^4, \quad \omega^3{}_4 = g\theta^5, \quad \omega^4{}_5 = g\theta^3; \quad g = N_1\tilde{R}_{y1}/(R_{y2}R_{x3}) \tag{5.9.46b}$$

- Superpotential

$$\hat{J} = i\hat{j}_{i\bar{j}}\eta^i \wedge \eta^{\bar{j}} \Rightarrow \hat{\Omega} = \eta^1 \wedge \eta^2 \wedge \eta^3, \tag{5.9.47a}$$

$$\hat{G}_3 = \hat{F}_{5(yx)} + \hat{k}_{(x)} \wedge \hat{\tilde{F}}_{3(y)} - \hat{k}_{(y)} \wedge \hat{\tilde{F}}_{3(x)} + \hat{k}_{(x)} \wedge \hat{k}_{(y)} \wedge \hat{F}_1 \tag{5.9.47b}$$

$$-ie^{-\hat{\Phi}}\sqrt{\det_{xy}\hat{j}}\left(\hat{\mathscr{H}}_3 + \hat{j}^{-1}_{xx}\hat{k}_{(x)} \wedge d\hat{k}_{(x)} + \hat{j}^{-1}_{yy}\hat{k}_{(y)} \wedge d\hat{k}_{(y)}\right) \tag{5.9.47c}$$

より、

$$\hat{W}_{\mathrm{IIB}} = \int \hat{G}_3 \wedge \hat{\Omega} \tag{5.9.48}$$

5.9.3 Non-geometric flux

概要　H フラックス，幾何学的フラックス $\mathcal{F}$，非幾何学的フラックス $\mathcal{R}$, $\mathcal{Q}$ のすべてを考慮すると，IIA 理論のトーラスコンパクト化で得られる 4 次元有効理論と IIB 理論から得られる 4 次元有効理論は完全に T 双対性で対応するようになる．

Reference

- Wecht B: CQG 24 (2007) S773.

  “ Lectures on non-geometrical flux compactifications ”

- Shelton J, Taylor W, Wecht B: JHEP0510(2005)085.

  “Nongeometric flux compactifications’ ‘

- Shelton J, Taylor W, Wecht B: JHEP0702(2007)095.

  “Generalized flux vacua”

1. Simple example

3 次元 Nil 多様体 (=twisted torus)

$$ds^2 = (dx + Nzdy)^2 + dy^2 + dz^2, \quad B = 0 \tag{5.9.49}$$

に y 方向の T 双対変換を施すと

$$g_{yy}=1+N^2z^2,\quad g_{(y)}=\frac{Nz}{1+N^2z^2},\quad B_{(x)}=0;\quad B'=0 \tag{5.9.50}$$

より、

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{1+N^2z^2}+dz^2,\quad B=\frac{Nz}{1+N^2z^2}dx\wedge dy \tag{5.9.51}$$

を得る。この空間構造は局所的には確定するが、大域的には $z\to z+1$ での同一視の際に計量と B 場が混合するので、確定しない：

$$\rho=\int B+iV:\quad \rho^{-1}=Nz-i\to\rho^{-1}+N, \tag{5.9.52a}$$

$$(g+B)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -Nz & 0\\ Nz & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to(g+B)^{-1}+N\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{5.9.52b}$$

そこで、この配位は、非幾何学的 Q-フラックスをもつという:

$$Q^{xy}{}_z=N \tag{5.9.53}$$

2. $T^2\times T^2\times T^2/\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ **モデル**

IIB モデル

- Coordinates: $z^1=x^\alpha+\tau x^i, z^2=x^\beta+\tau x^j, z^3=x^\gamma+\tau x^k$
- metric : $ds^2=\sum_j dz^j d\bar{z}^j$
- Moduli
  - axio-dilaton: $S=C_0+ie^{-\phi}$
  - Kähler: $U=C_{\alpha i\beta j}+iV$
  - Complex structure: τ
- Kahler potential

$$K=-3\ln\left(-i(\tau-\bar\tau)\right)-3\ln\left(-i(U-\bar U)\right)-\ln\left(-i(S-\bar S)\right) \tag{5.9.54}$$

- Superpotential

$$W=P_1(\tau)+SP_2(\tau); \tag{5.9.55}$$
$$P_1(\tau)=a_0-3a_1\tau+3a_2\tau^2-a_3\tau^3, \tag{5.9.56}$$
$$P_2(\tau)=-b_0+3b_1\tau-3b_2\tau^2+b_3\tau^3 \tag{5.9.57}$$

Term	IIB flux	Integer flux
1	$\bar{F}_{ijk}$	a_0
τ	$\bar{F}_{ij\gamma}$	a_1
τ^2	$\bar{F}_{i\beta\gamma}$	a_2
τ^3	$\bar{F}_{\alpha\beta\gamma}$	a_3
S	$\bar{H}_{ijk}$	b_0
$S\tau$	$\bar{H}_{\alpha jk}$	b_1
$S\tau^2$	$\bar{H}_{i\beta\gamma}$	b_2
$S\tau^3$	$\bar{H}_{\alpha\beta\gamma}$	b_3

Term	IIA flux	Integer flux
1	$\bar{F}_{\alpha i\beta j\gamma k}$	a_0
τ	$\bar{F}_{\alpha i\beta j}$	a_1
τ^2	$\bar{F}_{\alpha i}$	a_2
τ^3	$F^{(0)}$	a_3
S	$\bar{H}_{ijk}$	b_0
$S\tau$	f^{α}_{jk}	b_1
U	$\bar{H}_{\alpha\beta k}$	c_0
$U\tau$	$f^{j}_{k\alpha},\ f^{i}_{\beta k},\ f^{\alpha}_{\beta\gamma}$	$\check{c}_1,\ \hat{c}_1,\ \tilde{c}_1$

表 5.4: IIB モデル（左）と IIA モデル（右）でのフラックスと超ポテンシャルの対応

これより得られるポテンシャルは no-scale 構造をもつ：

$$V = e^K \sum_{i,j=\tau,S} K^{i\bar{j}} D_i W (D_j W)^* \geqslant 0 \tag{5.9.58}$$

- Tadpole condition

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^4(\alpha')^2}\int H_3 \wedge F_3 = 16 \\ \Rightarrow\quad & a_0 b_3 - 3a_1 b_2 + 3a_2 b_1 - a_3 b_0 = 16 \end{aligned} \tag{5.9.59}$$

IIA モデル

- Geometric flux

$$ds^2 = \eta_{ab}\theta^a\theta^b; \quad d\theta^a = -f^a{}_{bc}\theta^b \wedge \theta^c, \tag{5.9.60a}$$

$$f^{\alpha}_{jk} = f^{\beta}_{ki} = f^{\gamma}_{ij}, \quad f^{i}_{j\gamma} = f^{j}_{k\alpha} = f^{k}_{i\beta}, \quad f^{j}_{i\gamma} = f^{k}_{j\alpha} = f^{i}_{k\beta}, \quad f^{\alpha}_{\beta\gamma} = f^{\beta}_{\gamma\alpha} = f^{\gamma}_{\alpha\beta} \tag{5.9.60b}$$

- Moduli
  - axio-dilaton: $S = C_{\alpha\beta\gamma} + ie^{-\phi}$
  - complex structure: $U = C_{ij\gamma} + i\tau_2$
  - Kähler: $\tau = B_{\alpha i} + iV$

Term	IIA flux	IIB flux	integer flux
1	$\bar{F}_{\alpha i\beta j\gamma k}$	$\bar{F}_{ijk}$	a_0
τ	$\bar{F}_{\alpha i\beta j}$	$\bar{F}_{ij\gamma}$	a_1
τ^2	$\bar{F}_{\alpha i}$	$\bar{F}_{i\beta\gamma}$	a_2
τ^3	$F^{(0)}$	$\bar{F}_{\alpha\beta\gamma}$	a_3
S	$\bar{H}_{ijk}$	$\bar{H}_{ijk}$	b_0
U	$\bar{H}_{\alpha\beta k}$	$Q_k^{\alpha\beta}$	c_0
$S\tau$	f^{α}_{jk}	$\bar{H}_{\alpha jk}$	b_1
$U\tau$	$f^{j}_{k\alpha}, f^{i}_{\beta k}, f^{\alpha}_{\beta\gamma}$	$Q_k^{\alpha j}, Q_k^{i\beta}, Q_\alpha^{\beta\gamma}$	$\check{c}_1, \hat{c}_1, \tilde{c}_1$
$S\tau^2$	$Q_k^{\alpha\beta}$	$\bar{H}_{i\beta\gamma}$	b_2
$U\tau^2$	$Q_\beta^{\gamma i}, Q_\gamma^{i\beta}, Q_k^{ij}$	$Q_\gamma^{i\beta}, Q_\beta^{\gamma i}, Q_k^{ij}$	$\check{c}_2, \hat{c}_2, \tilde{c}_2$
$S\tau^3$	$R^{\alpha\beta\gamma}$	$\bar{H}_{\alpha\beta\gamma}$	b_3
$U\tau^3$	$R^{ij\gamma}$	Q_γ^{ij}	c_3

表 5.5: IIB モデルと IIA モデルでのすべてのフラックスと超ポテンシャルの対応

- Superpotential

$$W = P_1(\tau) + S\tilde{P}_2(\tau) + U\tilde{P}_3(\tau); \tag{5.9.61}$$

$$\tilde{P}_2(\tau) = -b_0 + 3b_1\tau \tag{5.9.62}$$

$$\tilde{P}_3(\tau) = 3\{c_0 + (\hat{c}_1 + \check{c}_1 - \tilde{c}_1)\tau\} \tag{5.9.63}$$

この超ポテンシャルにより、すべてのモジュライが安定化される！

完全な T 双対性　H_{abc} フラックス、幾何学的フラックス $f^a{}_{bc}$、Q フラックス $Q^{ab}{}_c$ にさらに次のような T 双対変換

$$H_{abc} \overset{x^a}{\longleftrightarrow} f^a{}_{bc} \overset{x^b}{\longleftrightarrow} Q^{ab}{}_c \overset{x^c}{\longleftrightarrow} R^{abc} \tag{5.9.64}$$

で結ばれる R-フラックスを付け加えると, 表 5.5 に示した対応により、IIA および IIB 理論における超ポテンシャルは T 双対で 1 対 1 に対応することになる：

$$W = P_1(\tau) + SP_2(\tau) + UP_3(\tau): \tag{5.9.65}$$

$$P_1 = a_0 - 3a_1\tau + 3a_2\tau^2 - a_3\tau^3, \tag{5.9.66}$$

$$P_2 = -b_0 + 3b_1\tau - 3b_2\tau^2 + b_3\tau^3, \tag{5.9.67}$$

$$P_3 = 3\big\{c_0 + (\hat{c}_1 + \check{c}_1 - \tilde{c}_1)\tau - (\hat{c}_2 + \check{c}_2 + \tilde{c}_2)\tau^3 - c_3\tau^3\big\} \tag{5.9.68}$$

【Note 5.9.1】　この一般化されたフラックスを用いることにより、dS 真空やインフレーションを実現する $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ および $T^6/\mathbb{Z}_2$ オービフォールドコンパクト化が構成されている：

References

- B. de Carlos, A. Guarino and J. M. Moreno: JHEP 02 (2010) 076, [arXiv:0911.2876].

  “ Complete classification of Minkowski vacua in generalised flux models ”
- U. Danielsson and G. Dibitetto: JHEP 03(2013) 018, [arXiv:1212.4984].

  “ On the distribution of stable de Sitter vacua ”
- J. Blaback, U. Danielsson and G. Dibitetto: JHEP 08 (2013) 054, [arXiv:1301.7073].

  “ Fully stable dS vacua from generalised fluxes ”
- C. Damian, O. Loaiza-Brito, L. Rey and M. Sabid: JHEP 06 (2013) 109, [arXiv:1302.0529].

  “ Slow-Roll Inflation in Non-geometric Flux Compactification ”
- F. Catino, C. A. Scrucca and P. Smyth: JHEP 04 (2013) 056, [arXiv:1302.1754]

  “ Simple metastable de Sitter vacua in N=2 gauged supergravity ”
- C. Damian and O. Loaiza-Brito: Phys. Rev. D 88 (2013) 046008, [arXiv:1304.0792].

  “ More stable dS vacua from S-dual non-geometric fluxes ”

□

3. 一般的な定義

References

- Andriot D, Betz A: jhep 1312, 083 (2013) [arXiv:1306.4381].

  “b-supergravity: a ten-dimensional theory with non-geometric fluxes, and its geometric framework”
- Kaloper N, Myers RC: JHEP9905(1999)010.

  “ The O(dd) story of massive supergravity ”

Toroidal reduction　10 次元超重力理論の NS セクターの d 次元トーラスへのコンパクト化

$$g(M) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & \theta^m_\mu \\ \theta^n_\nu & \gamma_{mn} \end{pmatrix} \tag{5.9.69}$$

により、$\mathrm{O}(d,d)$ 不変な非線形シグマ型の D 次元理論が得られる。

- KK reduction: $M_{10} = X_D \times T^d$
  - Gauge fields ($2d$)

$$A^a : (A^a_\mu) = \begin{pmatrix} V^m_\mu = \theta^m_\mu \\ B_{\mu m} \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; F^a = dA^a \tag{5.9.70}$$

  - Moduli

$$M = \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & -\gamma^{-1}B \\ B\gamma^{-1} & \gamma - B\gamma^{-1}B \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(d,d)/(\mathrm{O}(d)\times\mathrm{O}(d)) \tag{5.9.71}$$

ここで、

$$M\Omega\,{}^T\!M = \Omega; \quad \Omega := \begin{pmatrix} 0_d & 1_d \\ 1_d & 0_d \end{pmatrix} \tag{5.9.72}$$

- Action

$$S_0 = \int d^Dx\sqrt{-g}e^{-\phi}\Big[R+(\nabla\phi)^2-\tfrac{1}{2}h\cdot h+\tfrac{1}{8}\mathrm{Tr}(\Omega\nabla_\mu M\Omega\nabla^\mu M)-\tfrac{1}{4}\,{}^T\!F_{\mu\nu}\Omega M\Omega F^{\mu\nu}\Big] \tag{5.9.73}$$

ここで、

$$h = db - \tfrac{1}{2}\Omega_{ab}A^a\wedge F^b, \quad b = \frac{1}{2}B_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu \tag{5.9.74}$$

- Duality group $\mathrm{O}(d,d)$

$$A \to TA, \quad M \to TM\,{}^T\!T; \quad T\Omega\,{}^T\!T = \Omega \Leftrightarrow T \in \mathrm{O}(d,d) \tag{5.9.75}$$

NG flux in terms of the moduli　Toroidal reduction で得られる d 次のモジュライ行列のパラメータを次のように変更する：

$$M = \begin{pmatrix} g - bg^{-1}b & -bg^{-1} \\ g^{-1}b & g^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{g} & \tilde{g}\beta \\ -\beta\tilde{g} & \tilde{g}^{-1} - \beta\tilde{g}\beta \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(d,d)/(\mathrm{O}(d)\times\mathrm{O}(d)) \tag{5.9.76}$$

この変換は、

$$(g+b)^{-1} = \tilde{g}^{-1} + \beta \tag{5.9.77}$$

と同等。

この β を用いて、Q-flux および R-flux を次のように定義することができる：

$$Q_c{}^{ab} = \partial_c\beta^{ab} - 2\beta^{d[a}f^{b]}{}_{cd}, \tag{5.9.78a}$$

$$\mathscr{R}^{abc} = 3\beta^{d[a}\nabla_e\beta^{bc]} \tag{5.9.78b}$$

5.9.4　Flux-scaling scenario

概要　IIB 理論の CY orientifold コンパクト化において，H-flux, geometrical flux $\mathcal{F}$, non-geometrical flux $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ のすべてを考慮した場合の 4 次元有効理論を $N=1$ 超重力理論の形式で具体的に書き下すことができる．この定式化を用いて，安定な SUSY adS 真空をもつ例，その $\bar{D}3$ uplift により non-susy Minkowski 真空を持つ例，D 項 uplift により axionic flat direction をもつ安定な Minkowski 真空の例を，ブレーンを導入せずに，作ることができる．これらの例では，真空でのモジュライの値はポテンシャルの値は，フラックスのべきの分数式となっており，その値の制御は容易である．しかし，インフレーションモデルを作るのは難しい．一つの可能性は，理論の S 双対性を NG フラックスに拡張することにより示唆される”P-flux” を導入することである．

References

- Blumenhagen R, Font A, Fuchs M, Herschmann D, Plauschinn E, Sekiguchi Y, Wolf F: npb 897, 500 (2015)

  “A flux-scaling scenario for high-scale moduli stabilization in string theory”

- Blumenhagen R, Domian C, Font A, Herschmann D, Sun R: Fortsch.Phys. 64 (2016) no.6-7, 536-550

  “The Flux-Scaling Scenario: De Sitter Uplift and Axion Inflation”

1. Model

以下、IIB 理論において、CY orientifold コンパクト化を考え、フラックスはそれに対する摂動とみなし、内部空間の構造への反作用は考えない。ただし、RR-tadpole 条件は考慮する。

このモデルでは、調和形式は、orientifold 作用 $\mathscr{O}=\Omega_p(-1)^{F_L}\mathscr{R}$ における内部空間での $\mathbb{Z}_2$ 作用 $\mathscr{R}$ 関するパリティにより次のように分類される：

$$\begin{aligned}
H^{1,1} &: \omega_A \Rightarrow \omega_\alpha\ (\alpha=1,\cdots,h^{1,1}_+),\quad \omega_a\ (a=1,\cdots,h^{1,1}_-), && (5.9.79)\\
H^{2,2} &: \tilde\omega^A \Rightarrow \tilde\omega^\alpha\ (\alpha=1,\cdots,h^{1,1}_+),\quad \tilde\omega^a\ (a=1,\cdots,h^{1,1}_-), && (5.9.80)\\
H^{2,1} &: \alpha_\Lambda \Rightarrow \alpha_{\hat\lambda}\ (\hat\lambda=1,\cdots,h^{2,1}_+),\quad \alpha_\lambda\ (\lambda=1,\cdots,h^{2,1}_-), && (5.9.81)\\
H^{1,2} &: \beta^\Lambda \Rightarrow \beta^{\hat\lambda}\ (\hat\lambda=1,\cdots,h^{2,1}_+),\quad \beta^\lambda\ (\lambda=1,\cdots,h^{2,1}_-) && (5.9.82)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\int_Y \omega_A\wedge\tilde\omega^B=\delta^A_B,\quad \int_Y \alpha_\Lambda\wedge\beta^\Sigma=\delta^\Sigma_\Lambda. \qquad (5.9.83)$$

また、

$$\tilde{\omega}^0 = 1, \quad \omega_0 = \Omega(Y)/\mathscr{V}(Y) \tag{5.9.84}$$

と約束する。

モジュライは

- Complexified Kähler: $T_\alpha = \tau_\alpha + i\rho_\alpha,\ \alpha = 1, \cdots, h_+^{1,1}$
- Purely axionic moduli: $G^a = Sb^a + ic^a,\ a = 1, \cdots, h_-^{1,1}$
- CS moduli: $U^\lambda = u^\lambda + iv^\lambda,\ \lambda = 1, \cdots, h_-^{2,1}$
- axio-dilaton: $S = e^{-\phi} - iC_0$

これらの chiral superfield に加えて、可換ゲージ場が生じる：

$$A_{\hat{\lambda}}:\ \hat{\lambda} = 1, \cdots, h_+^{2,1} \quad \Leftarrow C_{[4]} \tag{5.9.85}$$

2. Non-geometrical flux

H-flux, geometrical flux F, non-geometrical flux Q, R を記述するパラメータを、作用素

$$\mathscr{D} \equiv= d - H\wedge - F\circ - Q\circ - R\circ; \tag{5.9.86}$$

$$F\circ\omega_p = (F^i_{[j_1 j_2}\omega_{|i|j_3\cdots j_{p+1}]}) \in \mathscr{A}^{p+1}, \tag{5.9.87}$$

$$Q\circ\omega_p = (Q^{i_1 i_2}_{[j_1}\omega_{|i_1 i_2|j_2\cdots j_{p-1}]}) \in \mathscr{A}^{p-1}, \tag{5.9.88}$$

$$R\circ\omega_p = (R^{i_1 i_2 i_3}\omega_{|i_1 i_2 i_3|j_1\cdots j_{p-3}]}) \in \mathscr{A}^{p-3} \tag{5.9.89}$$

の微分形式の基底への作用により次のように定義する：

$$\mathscr{D}\alpha_\Lambda = q_\Lambda{}^A\omega_A + f_{\Lambda A}\tilde{\omega}^A, \tag{5.9.90a}$$

$$\mathscr{D}\beta^\Lambda = \tilde{q}^{\Lambda A}\omega_A + \tilde{f}^\Lambda{}_A\tilde{\omega}^A, \tag{5.9.90b}$$

$$\mathscr{D}\omega_A = -\tilde{f}^\Lambda{}_A\alpha_\Lambda + f_{\Lambda A}\beta^\Lambda, \tag{5.9.90c}$$

$$\mathscr{D}\tilde{\omega}^A = \tilde{q}^{\Lambda A}\alpha_\Lambda - q_\Lambda{}^A\beta^\Lambda. \tag{5.9.90d}$$

ただし、$A = 0$ に対応する係数は、H フラックスと R フラックスを表す：

$$f_{\Lambda 0} = r_A, \quad \tilde{f}^\Lambda{}_0 = \tilde{r}^A, \quad q_A{}^0 = h_\Lambda, \quad \tilde{q}^{\Lambda 0} = \tilde{h}^\Lambda. \tag{5.9.91}$$

これに orientifold 射影を施すと次の成分が残る：

$$\mathcal{F}(-) \ :\ f_\lambda, \quad \tilde{f}^\lambda \quad (2h_-^{2,1}), \tag{5.9.92a}$$

$$H(-) \ :\ h_\lambda, \quad \tilde{h}^\lambda \quad (2h_-^{2,1}), \tag{5.9.92b}$$

$$F(+) \ :\ f_{\hat{\lambda}\alpha}, \quad \tilde{f}^{\hat{\lambda}}{}_\alpha, \quad f_{\lambda a}, \quad \tilde{f}^\lambda{}_a \quad (2h_+^{1,1}h_+^{2,1} + 2h_-^{1,1}h_-^{2,1}), \tag{5.9.92c}$$

$$Q(-) \ :\ q_{\hat{\lambda}}{}^a, \quad \tilde{q}^{\hat{\lambda}a}, \quad q_\lambda{}^\alpha, \quad \tilde{q}^{\lambda\alpha} \quad (2h_+^{1,1}h_-^{2,1} + 2h_-^{1,1}h_+^{2,1}), \tag{5.9.92d}$$

$$R(+) \ :\ r_{\hat{\lambda}}, \quad \tilde{r}^{\hat{\lambda}} \quad (2h_+^{2,1}) \tag{5.9.92e}$$

これらのフラックスは Bianchi 恒等式、tadpole 条件より導かれる次の条件を満たすことが要求される：

$$\mathscr{D}^2 = 0. \tag{5.9.93}$$

3. 4D sugra

Superpotential　一般公式

$$W = \int_Y (\mathscr{F} + \mathscr{D}\Phi_c^{\rm ev})_3 \wedge \Omega \tag{5.9.94}$$

$$\Phi_c^{\rm ev} \equiv iS0iG^a\omega_a - iT_\alpha\tilde{\omega}\alpha \tag{5.9.95}$$

もフラックスの表式を代入すると

$$\begin{aligned} W &= -(f_\lambda X^\lambda - \tilde{f}^\lambda F_\lambda) + iS(h_\lambda X^\lambda - \tilde{h}^\lambda F_\lambda) \\ &\quad + iG^a(f_{\lambda a}X^\lambda - \tilde{f}^\lambda{}_a F_\lambda) - iT_\alpha({q_\lambda}^\alpha X^\lambda - \tilde{q}^{\lambda\alpha}F_\lambda). \end{aligned} \tag{5.9.96}$$

ここで、X^λ と F_λ は

$$\Omega = X^\lambda \alpha_\lambda - F_\lambda \beta^\lambda \tag{5.9.97}$$

により定義される CS モジュライの関数。

つぎに Kähler ポテンシャルは

$$K = -\ln\left(-i\int_Y \Omega\wedge\bar{\Omega}\right) - \ln(S+\bar{S}) - 2\ln\mathscr{V}; \tag{5.9.98}$$

$$\mathscr{V} = \frac{1}{6}\kappa_{\alpha\beta\gamma}t^\alpha t^\beta t^\gamma, \tag{5.9.99}$$

$$J = e^{\phi/2}t^\alpha\omega_\alpha, \quad B_2 = b^a\omega_a. \tag{5.9.100}$$

以上より、スカラポテンシャルは

$$V = V_F + V_D + V_{\rm tad}^{\rm NS}; \tag{5.9.101}$$

$$V_D = -\frac{m_{\rm pl}^4}{2}\left[({\rm Im}\,\mathscr{N})^{-1}\right]^{\hat{\lambda}\hat{\sigma}} D_{\hat{\lambda}} D_{\hat{\sigma}}, \tag{5.9.102}$$

$$D_{\hat{\lambda}} = \frac{1}{\mathscr{V}}\left[-r_{\hat{\lambda}}\left(e^\phi\mathscr{V} - \tfrac{1}{2}\kappa_{\alpha ab}t^\alpha b^a b^b\right) - {q_{\hat{\lambda}}}^a\kappa_{a\alpha b}t^\alpha b^b + f_{\hat{\lambda}\alpha}t^\alpha\right]. \tag{5.9.103}$$

ただし、$\tilde{r}^{\hat{\lambda}} = \tilde{q}^{\hat{\lambda}\alpha} = \tilde{f}^{\hat{\lambda}}{}_\alpha = 0$ とした。

4. $\overline{D3}$ uplifting

Toy model　簡単な例として、

$$h_+^{1,1} = 1, \quad h_-^{1,1} = 0, \quad h_-^{2,1} = 1, \quad h_+^{2,1} = 0 \tag{5.9.104}$$

となるモデルを考えると、複素モジュライ変数は T, U, S のみで、ゲージ場は現れない。ポテンシャルは

$$K = -\ln(S+\bar{S}) - 3\ln(T+\bar{T}) - 3\ln(U+\bar{U}), \tag{5.9.105a}$$
$$W = i(-fU + h_0 S - 3hSU^2 - qT) \tag{5.9.105b}$$

これより、直ちに、つぎの SUSY adS 極小点が存在することが分かる：

$$U = \frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\frac{h_0}{h}}, \quad S = -\frac{\sqrt{5}}{4}\frac{f}{\sqrt{h_0 h}}, \quad T = -\frac{\sqrt{5}f}{2q}\sqrt{\frac{h_0}{h}}, \tag{5.9.106a}$$
$$V = -\frac{9}{4\cdot 5^{5/2}}\frac{q^3 h^{5/2}}{f^2 h_0^{3/2}}\frac{m_{\rm pl}^4}{4\pi} \tag{5.9.106b}$$

この極点でのモジュライの質量は

$$m_{\rm mod}^2 = \mu_i \frac{q^3 h^{5/2}}{f^2 h_0^{3/2}}\frac{m_{\rm pl}^2}{4\pi}, \tag{5.9.107}$$
$$(\mu_i) \simeq [0.43, 0.24, 0.12; 0.56, 0.13, 0.04] \tag{5.9.108}$$

となるので，この極点は安定である．また，$s > 0$ より，フラックスの符号に対し

$$f < 0, \quad h_0, h, q > 0 \tag{5.9.109}$$

が要求される．

Uplifting　反 D3 ブレーンによりポテンシャルを uplift するとすると、

$$V_{\rm up} = \frac{A}{\mathscr{V}^{4/3}}\frac{m_{\rm pl}^4}{4\pi} \tag{5.9.110}$$

がポテンシャルに付け加わる．この新たなポテンシャルは次の Minkowski 極点をもつ：

$$S = \frac{1}{3^{3/4}}\frac{f}{\sqrt{hh_0}}, \quad U = \frac{1}{3^{1/4}}\left(\frac{h_0}{h}\right)^{1/2}, \quad T = \frac{f}{3^{1/4}q}\left(\frac{h_0}{h}\right)^{1/2}, \tag{5.9.111}$$
$$A = \frac{3^{1/4}}{2}\frac{qh^{3/2}}{h_0^{1/2}}. \tag{5.9.112}$$

ただし，この極点が存在する条件は

$$f, h_0, h, q > 0 \tag{5.9.113}$$

となるので，この極点は uplift する前の adS 極点と全く関係ないことが分かる．特に，この極点では SUSY は破れており，

$$\mu_{3/2} = 0.3135. \tag{5.9.114}$$

この曲点でのモジュライ質量は

$$(\mu_i) \simeq [0.80, 0.45, 0.03; 1.55, 0.21, 0.08] \tag{5.9.115}$$

また，

$$M_s^2 = \frac{3^{3/4}\pi}{2^{3/2}} \frac{q^{3/2}h}{f^2 h_0^{1/2}} m_{\rm pl}^2, \quad M_{\rm KK}^2 = \frac{3^{1/2}}{16\pi} \frac{q^2 h}{f^2 h_0} m_{\rm pl}^2 \tag{5.9.116}$$

より

$$\frac{M_{\rm KK}^2}{M_s^2} = \frac{(q/h_0)^{1/2}}{2^{5/2}3^{1/4}\pi^2}, \quad \frac{M_{\rm mod}^2}{M_{\rm KK}^2} = \mu_i \frac{4q}{3^{1/2}} \frac{h^{3/2}}{h_0^{1/2}} \tag{5.9.117}$$

となるので，$h, q = \mathrm{O}(1)\,, h_0 \sim f \gg 1$ と取れば，望ましい質量ヒエラルキー $M_s^2 > M_{\rm KK}^2 > M_{\rm mod}^2$ が得られる．ただし，インフラトンに対応する場は含まれない．

5. D-term uplifting

D-term による uplifting の可能性を見るため，

$$h_+^{2,1} = 1, \quad h_-^{2,1} = 1, \quad h_+^{1,1} = 1, \quad h_-^{1,1} = 0 \tag{5.9.118}$$

となる場合を考える．この場合，スカラ場 S, T, U に加えて可換ゲージ場が 1 個現れ，つぎの D-term ポテンシャルを生み出す：

$$V_D = \frac{\delta g^2}{u\tau^2}\left(1 + \frac{q}{3h}\frac{\tau}{s}\right)^2. \tag{5.9.119}$$

超ポテンシャルは

$$W = i(fU + \tilde{f}U^3 - hS + qT). \tag{5.9.120}$$

全ポテンシャルは次の安定な Minkowski 真空をもつ．

$$S = \gamma_1 \frac{f^{3/2}}{h\tilde{f}^{1/2}}, \quad T = \gamma_2 \frac{f^{3/2}}{q^t f^{1/2}}, \quad U = \gamma_3 \left(\frac{f}{\tilde{f}}\right)^{1/2}, \tag{5.9.121a}$$

$$\delta g^2 = \gamma_4 \frac{hg\tilde{f}}{f}, \tag{5.9.121b}$$

$$(\gamma_i) = [0.1545, 1.5701, 1.0718, 0.0044]. \tag{5.9.121c}$$

モジュライ質量は

$$M_{\rm mod}^2 = \mu_i \frac{hq^3\tilde{f}^{5/2}}{f^{9/2}} \frac{m_{\rm pl}^2}{4\pi}, \tag{5.9.122a}$$

$$(\mu_i) \simeq [0.69, 0.01, 0.17; 0.75, 0.05, 0] \tag{5.9.122b}$$

また，

$$\frac{M_s^2}{M_{\rm KK}^2} = 178 \frac{h^{1/2}}{h_0^{1/2}}, \quad \frac{M_{\rm KK}^2}{M_{\rm mod}^2} = \frac{0.1}{\mu_i} \frac{1}{hq} \left(\frac{f}{\tilde{f}}\right)^{3/2}. \tag{5.9.123}$$

より，mass hierarchy も実現できる．

目次へ

6. P-flux

Q-flux が存在するときに IIB 理論が S 双対性を持つためには、S 双対変換に対して

$$S:\begin{pmatrix}P & Q\end{pmatrix}\to \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\begin{pmatrix}P & Q\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\mathcal{F} & H\end{pmatrix}\to \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\begin{pmatrix}\mathcal{F} & H\end{pmatrix} \tag{5.9.124}$$

と変換する新たなフラックス P を導入する必要がある。P の作用は、p-形式 $\to$ $(p-1)$-形式で、基底に対する作用は

$$-P\circ\alpha_\Lambda = p_\Lambda{}^A\omega_A,\quad -P\circ\beta^\Lambda = \tilde{p}^{\Lambda A}\omega_A, \tag{5.9.125a}$$

$$-P\circ\omega_A = 0,\quad -P\circ\tilde{\omega}^A = -p^{\Lambda A}\alpha_\Lambda + p_\Lambda{}^A\beta^\Lambda \tag{5.9.125b}$$

と表される。

この P-フラックスが存在すると超ポテンシャルは次のように修正される：

$$W \;=\; W_0 + (ST_\alpha + \frac{1}{2}\kappa_{\alpha bc}G^bG^c)(p^\alpha_\lambda X^\lambda - \tilde{p}^{\lambda\alpha}F_\lambda). \tag{5.9.126}$$

7. Axion monodromy inflation

D-term uplifing model に P-flux を加えると，

$$W = \lambda W_0 - ipSTU. \tag{5.9.127}$$

このとき，Minkowski 真空でゼロ質量であったアクシオン場 $\theta\propto c$ に対して，有効ポテンシャル

$$V_{\rm eff} = B_1\theta^2 + B_2\theta^4; \tag{5.9.128a}$$

$$B_1 \sim \frac{\lambda p h^2 q^2 \tilde{f}^{5/2}}{f^{19/2}},\quad B_2 \sim \frac{p^2h^3q\tilde{f}^{5/2}}{f^{13/2}} \tag{5.9.128b}$$

が生じ，インフラトンとなることができる．ただし，

$$\frac{M_{\rm KK}^2}{M_\theta^2} \sim \frac{1}{\lambda p f^{1/2}\tilde{f}^{1/2}} \tag{5.9.129}$$

となるので，インフレーション時に 4 次元有効理論が適用できるためには，フラックス係数が非整数となる必要がある．

§5.10
*OMC

6 *電磁波による究極理論探査

§6.1 Axion emission processes

6.1.1 Overview

- Primakov process $\mathscr{L}_{\mathrm{a}\gamma\gamma}$: aEB + fluctuating plasma E/B.

$$\mathscr{L} = g_{a\gamma} a \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}. \tag{6.1.1}$$

（注）

$$g_{a\gamma} = \xi \frac{\alpha}{\pi f_a} \sim \frac{\xi}{430 f_a} \tag{6.1.2}$$

- Axion Bremstrahlung $\mathscr{L}_{\mathrm{aee}}$: aee+eZe 散乱
- Axion nuclon emission $\mathscr{L}_{\mathrm{aNN}}$: aqq+NN 散乱

$$\mathscr{L} = \frac{C_j}{2f_a} \partial_\mu a \bar{\psi}_j \gamma^\mu \gamma_5 \psi. \tag{6.1.3}$$

6.1.2 Primakoff process

References

- Primakoff H: ”Photon-production of neutral mesons in nuclear electric fields and the mean life of the neutral meson”, PR81(1951)899.
- Dicus DA, Kolb EW, Teplitz EW, Wagoner RV: ”Astrophysical bonds on the masses of axions and Higgs particles”, PRD18 (1978) 1829.

荷電粒子との衝突による変換断面積　CS 相互作用において，電場を荷電粒子（原子核 Z) による電場

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\phi(q)e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}; \quad \phi(q) = -\frac{1}{q^2} \tag{6.1.4}$$

に置き換え，$\boldsymbol{B}$ を入射光子の磁場

$$\boldsymbol{B} = \int \frac{d^3k_\gamma}{(2\pi)^3}\sum_\alpha \left[(\boldsymbol{k}_\gamma \times \boldsymbol{e}_\alpha)a_\alpha(\boldsymbol{k}_\gamma)e^{ik\cdot x} + \text{h.c.}\right] \tag{6.1.5}$$

と見なすと，

$$\frac{d\sigma_{\gamma\to a}}{d\Omega} = \frac{g_{a\gamma}^2 Z^2\alpha}{8\pi}\frac{|\boldsymbol{k}_\gamma \times \boldsymbol{k}_a|^2}{q^4}, \tag{6.1.6}$$

ここで，

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k}_\gamma - \boldsymbol{k}_a. \tag{6.1.7}$$

ただし，

$$\omega \equiv k_\gamma = E_a \equiv (k_a^2 + m_a^2)^{1/2} \tag{6.1.8}$$

より，

$$q \geqslant q_{\min} = \omega - \sqrt{\omega^2 - m_a^2} = \frac{m_a^2}{\omega + \sqrt{\omega^2 - m_a^2}}. \tag{6.1.9}$$

これは IR cut-off を与える．

$\gamma \to a$ 変換率

$$\Gamma_{\gamma\to a} = \frac{g_{a\gamma}^2 T k_s^2}{32\pi}\left[\left(1 + \frac{k_s^2}{4E^2}\right)\ln\left(1 + \frac{4E^2}{k_s^2}\right) - 1\right] \tag{6.1.10}$$

($\hbar = c = k_B = 1$)．ここで，スクリーニングスケール k_s は，Debye-Hückel 近似のもとで，次式で与えられる：

$$k_s^2 = \frac{4\pi\alpha}{T}\left(n_e + \sum_{\text{nuclei}} Z_j^2 n_j\right) \tag{6.1.11}$$

（n_e は電子数密度，n_j は電荷 Z_j のイオン数密度.）具体的な値は，

- 太陽：$(k_s/T)^2 \approx 12$（全体で一定）
- low mass He burning stars: $(k_s/T)^2 \approx 2.5$ (コア）

単位体積あたりのエネルギー放出率

$$Q = \int \frac{d^3\boldsymbol{k}_\gamma}{(2\pi)^3}\frac{\omega\Gamma_{\gamma\to a}}{e^{\omega/T}-1} = \frac{g_{a\gamma\gamma}^2 T^7}{4\pi}F(\kappa^2), \quad \kappa = \frac{k_S}{2T}. \tag{6.1.12}$$

ここで，

$$\begin{aligned} F(\kappa^2) &= \frac{\kappa^2}{2\pi^2}\int_0^\infty dx \left[(x^2+\kappa^2)\ln\left(1+\frac{x^2}{\kappa^2}\right) - x^2\right]\frac{x}{e^x-1} \\ &= \begin{cases} 0.98 & \kappa^2 = 2.5 \\ 1.84 & \kappa^2 = 12 \end{cases}. \end{aligned} \tag{6.1.13}$$

[Raffelt GG: "Plasmon decay into low mass bosons in stars", PRD37 (1988) 1356.]

全アクシオン光度

$$L_a = \int_0^R dr 4\pi r^2 \int_{\omega_{\rm pl}}^\infty dE \frac{4\pi k^2}{(2\pi)^3}\frac{dk}{dE}2Ef_B\Gamma_{\gamma\to a} \tag{6.1.14}$$

§6.2
Solar axion

6.2.1　基本公式

地球での全アクシオン数フラックス

$$\Phi_a = \frac{R_\odot^3}{4\pi D_\odot^2}\int_0^1 dr 4\pi r^2 \int_{\omega_{\rm pl}}^\infty dE \frac{4\pi k^2}{(2\pi)^3}\frac{dk}{dE}2f_B\Gamma_{\gamma\to a} \tag{6.2.1}$$

地球でのエネルギースペクトル

$$\frac{d\Phi_a}{dE} = (6.0\times 10^{10}{\rm cm}^{-2}{\rm s}^{-1}{\rm keV}^{-1})g_{10}^2 E^{2.481}e^{-E/1.205}. \tag{6.2.2}$$

ここで，E は keV 単位での数値，$g_{10} = g_{a\gamma\gamma}\times 10^{10}$GeV.

評価

- Axion flux: $\Phi_a = 3.75\times 10^{11} g_{10}^2 {\rm cm}^{-2}{\rm s}^{-1}$.
- Axion luminosity: $L_a = 1.85\times 10^{-3} g_{10}^2 L_\odot$.
- Average energy: $\langle E\rangle = 4.2$keV, $\langle E^2\rangle = 22.7{\rm keV}^2$.
- Peak energy: 3.0keV.

6.2.2　制限

Helioseismology　アクシオン放出による太陽構造変化が太陽振動に与える影響.

$$L_a \lesssim 0.20 L_\odot \;\Rightarrow\; g_{a\gamma\gamma} \lesssim 1\times 10^{-9}\mathrm{GeV}^{-1}. \tag{6.2.3}$$

[Schlatt2 H, Weiss A, Raffelt G: "Helioseismological constraint on solar axion emission", Astropart. Phys.10(1999)353.[hep-ph/9807476]]

Solar ν flux　太陽の構造を維持するため，アクシオン放出があると，太陽中心での全エネルギー生成率，したがって，太陽中心温度は上昇する．これは，太陽からのニュートリノ放出率を増大させる．最新の太陽モデルでの ^{8}B ニュートリノフラックスについての予言は

$$F_{\nu,^8\mathrm{B}} = (4.5-4.6)\times(1\pm 0.16)\times 10^6 \mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1}. \tag{6.2.4}$$

[Bahcall JN, Sereneli AM, Basu S: "New solar opacities, abundances, helioseismology, and neutrino fluxes", ApJ621(2005)L85.[astro-ph/0412440]].

観測値は

$$F_{\nu,^8\mathrm{B}} = 4.94\times(1\pm 0.088)\times 10^6 \mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1}. \tag{6.2.5}$$

これより，

$$L_a \lesssim 0.04 L_\odot \;\Rightarrow\; g_{a\gamma\gamma} \lesssim 5\times 10^{-10}\mathrm{GeV}^{-1}. \tag{6.2.6}$$

[Ahmad QR et al (SNO Coll.): PRL89 (2002) 011301.[nucl-ex/0204008]; PRC72 (2005)055502.[nucl-ex/0502021]].

Helioscope experiment

- CAST
  - $g_{a\gamma\gamma} < 1.16\times 10^{-10}\mathrm{GeV}^{-1}$ (95% CL) for $m_a \lesssim 0.02$eV. [Zioutas K et al (CAST coll.): PRL94(2005)12301.[hep-ex/0411033]].
  - $g_{a\gamma\gamma} < 8.8\times 10^{-11}\mathrm{GeV}^{-1}$ (95% CL) for $m_a \lesssim 0.02$eV. [CAST Coll: JCAP 04:010 (2007)]
  - $g_{a\gamma\gamma} \lesssim 2.3\times 10^{-10}\mathrm{GeV}^{-1}$ (95% CL) for 0.39eV $\lesssim m_a \lesssim$ 0.64eV. [Aune S et al (CAST coll.): PRL107(2011)261302.[arXiv:1106.3919[hep-ex]]].

§6.3
球状星団星からの放出

6.3.1　水平分枝星

HB 星は，ヘリウムコア燃焼段階の軽い星に対応.

- コア質量:約 $0.5M_{\odot}$
- エネギー生成率 $\epsilon \sim 80 \mathrm{ergg}^{-1}\mathrm{s}^{-1}$
- コア平均密度: $\rho \sim 10^4 \mathrm{gcm}^{-3}$
- コア平均温度：$T \sim 10^8$K.

これより，コアからのアクシオンによるエネルギー放出率は

$$\epsilon_a \sim 30 g_{10}^2 \mathrm{ergg}^{-1}\mathrm{s}^{-1}. \tag{6.3.1}$$

これにより HB ステージの寿命は

$$\frac{80}{80 + 30 g_{10}^2} \tag{6.3.2}$$

倍に縮む.

15 個の球状星団の観測より [Raffelt G1996B]，

$$g_{a\gamma\gamma} < 10^{-10}\mathrm{GeV}^{-1} \quad \text{for } m_a \lesssim 30\mathrm{keV}. \tag{6.3.3}$$

6.3.2　赤色巨星分枝星

RGB 星は，水素殻燃焼段階にある星で，縮退したヘリウムコアをもつ.

- コア平均密度: $\rho \sim 10^6 \mathrm{gcm}^{-3}$
- コア平均温度：$T \sim 10^8$K.

アクシオンへの変換が有意に起きると，ρ, T および星の半径は減少し，核反応率が低下する．これにより，He コア燃焼への移行が遅れる.

観測と理論の比較より，光子以外へのエネルギー放出率 $\Delta\epsilon$ に対して，

$$\Delta\epsilon < 10 \mathrm{ergg}^{-1}\mathrm{s}^{-1} \quad \text{for } T = 10^8\mathrm{K},\ \langle\rho\rangle = 2 \times 10^5 \mathrm{gcm}^{-3}. \tag{6.3.4}$$

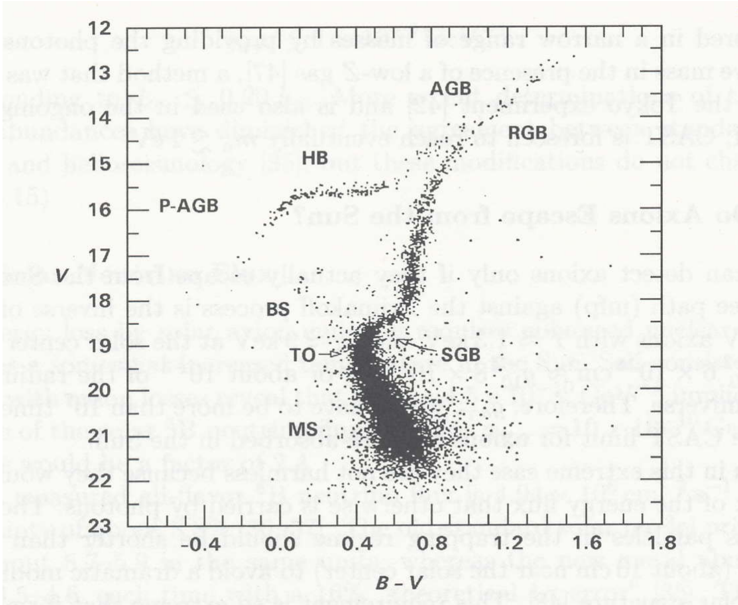


図 6.1: HR 図

また，ニュートリノの寄与は

$$\epsilon_\nu \approx 4\mathrm{erg}\mathrm{g}^{-1}\mathrm{s}^{-1} \tag{6.3.5}$$

一方，アクシオン制動放射

$$e + Ze \to Ze + e + a \tag{6.3.6}$$

によるエネルギー放出率は

$$\epsilon_{a,\mathrm{brems}} \approx 2 \times 10^{27} \alpha_{aee} \mathrm{erg}\mathrm{g}^{-1}\mathrm{s}^{-1} \tag{6.3.7}$$

よって，

$$\alpha_{aee} < 0.5 \times 10^{-26} \ \Rightarrow \ g_{aee} < 3 \times 10^{-13}\mathrm{GeV}^{-1}. \tag{6.3.8}$$

DFSZ 模型では

$$f_a/\cos^2\beta > 0.8 \times 10^9\mathrm{GeV}, \tag{6.3.9a}$$
$$m_a \cos^2\beta < 9\mathrm{meV}, \tag{6.3.9b}$$
$$g_{a\gamma\gamma} \cos^2\beta < 1.2 \times 10^{-12}\mathrm{GeV}^{-1}. \tag{6.3.9c}$$

$(\tan\beta = v_1/v_2)$.

§6.4
WD cooling

6.4.1　WD 光度関数

WD の光度関数の観測結果は，標準的な理論の予言と一致している．これより，WD cooling へのアクシオンの寄与が無視できる条件

$$\alpha_{aee} \lesssim 1 \times 10^{-26} \tag{6.4.1}$$

が得られる [Raffelt1996B]．

6.4.2　ZZ Ceti stars

ZZ Ceti star は脈動不安定性をもつ WD で，その周期変化率 $\dot{P}/P$ は冷却率に敏感である．G117-B15A の解析より，

$$\alpha_{aee} < 1.3 \times 10^{-27} \ \Leftrightarrow \ g_{aee} < 1.3 \times 10^{-13}. \tag{6.4.2}$$

DFSZ 模型では，これより

$$m_a \cos^2 \beta < 5\mathrm{meV}. \tag{6.4.3}$$

[Isern J, Garcia-Berro E: "White dwarf stars as particle physics laboratories", NPB suppl.114(2003)107.]

§6.5
SN1987A

6.5.1　高密度核物質からのアクシオン放出率

アクシオンと核子の相互作用は核スピンに依存し，$N + N \to N + N + a$ 過程は，スピンを変化させる NN 散乱でのみ起きる．このため，核スピンの時間相関情報が必要となる．

核子スピン時間相関構造関数を

$$S_\sigma(\omega, \boldsymbol{k}) = \frac{4}{3n_B} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t} \langle \boldsymbol{\sigma}(t, \boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(0, -\boldsymbol{k}) \rangle \tag{6.5.1}$$

とおくと，アクシオンの吸収率と体積エネルギー放出率は次式で与えられる：

$$\Gamma_a = \left(\frac{C_N}{2f_a}\right)^2 \frac{n_B}{2}\omega S_\sigma(\omega, k), \tag{6.5.2a}$$

$$Q_a = \left(\frac{C_N}{2f_a}\right)^2 \frac{n_B}{4\pi^2}\int_0^\infty d\omega\, \omega^4 S_\sigma(\omega, k). \tag{6.5.2b}$$

ここで，$k = |\boldsymbol{k}| \approx \omega$ はアクシオンの運動量.

S_σ が Lorentz 形で近似できるとすると，

$$S_\sigma(\omega) \approx \frac{\Gamma_\sigma}{\omega^2 + \Gamma_\sigma^2/4} s(\omega/T) \times \begin{cases} 1 & \text{for } \omega \geqslant 0, \\ e^{\omega/T} & \text{for } \omega < 0 \end{cases} \tag{6.5.3}$$

$(s(\omega) = s(-\omega), s(0) = 1$, $\epsilon_a = Q_a/\rho$ は

$$\epsilon_a = \left(\frac{C_N}{2f_a}\right)\frac{T^4}{\pi^2 m_N}F = 3.0\times 10^{37} C_N^2 \left(\frac{10^{10}\mathrm{GeV}}{f_a}\right)^2 \left(\frac{T}{30\mathrm{MeV}}\right)^4 F\mathrm{erg/gs} \tag{6.5.4}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned} F &= \int_0^\infty dx \frac{x^4 e^{-x}}{4}\frac{\Gamma_\sigma/T}{x^2 + (\Gamma_\sigma/2T)^2}s(x) \\ &\approx \frac{\Gamma_\sigma}{2T} \quad \text{for } \Gamma_\sigma/T \ll 1. \end{aligned} \tag{6.5.5}$$

一方，Γ_σ は次のように評価される：

$$\Gamma_\sigma \approx \frac{1}{4}\Gamma_\sigma^{\mathrm{OPE}} = \pi^{1/2}\alpha_\pi^2 \frac{n_B T^{1/2}}{m_N^5/2} = 450\mathrm{MeV}\left(\frac{\rho}{3\times 10^{14}\mathrm{gcm}^{-3}}\right)\left(\frac{T}{30\mathrm{MeV}}\right)^{1/2} \tag{6.5.6}$$

ここで，$\alpha_\pi = (2fm_N/m_\pi)^2/(4\pi) \approx 15$. これより

$$1 \lesssim \Gamma_\sigma/T \lesssim 10. \tag{6.5.7}$$

6.5.2　ν バースト時間

アクシオンの相互作用が十分弱い場合（$g_{aNN} < 10^{-9}\mathrm{GeV}^{-1}$)，超新星爆発時でのアクシオン冷却はコアの温度低下を速め，その結果，ニュートリノバーストが観測される時間が減少する．モデル計算に基づく値と観測とに比較により，$\rho = 3\times 10^{14}\mathrm{gcm}^{-3}$, $T = 30\mathrm{MeV}$ に対し，

$$\epsilon_a \lesssim 1\times 10^{19}\mathrm{ergg}^{-1}\mathrm{s}^{-1} \tag{6.5.8}$$

前節の計算より，KSVZ 模型に対して次の制限を得る：

$$f_a \gtrsim 4\times 10^8\mathrm{GeV}, \quad m_a \lesssim 16\,\mathrm{meV}. \tag{6.5.9}$$

6.5.3 SN1987A gamma-ray flux (Solar Maximum Mission satellite)

一般に ALP に対して，

$$M > 3 \times 10^{11}\text{GeV} \quad \text{for } m < 10^{-9}\text{eV}. \tag{6.5.10}$$

- Grifolds JA, Masso E, Toldra R:"Gamma rays from SN1987A due to pseudoscalar conversion", PRL77(1996)2372.[astro-ph/9606028]
- Brockway JW, Carlson ED, Raffelt GG: "SN 1987A gamma-ray limits on the conversion of pseudoscalars", PLB383(1996)439.[astro-ph/9605197]

§6.6
磁場中でのアクシオン-光子変換

6.6.1　基礎方程式

- axion-photon coupling

$$\mathscr{L}_{\phi\gamma} = -g_{\phi\gamma}\phi \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}. \tag{6.6.1}$$

- Maxwell 方程式

$$\partial_t \boldsymbol{D} = c\nabla\times\boldsymbol{H} - 4\pi\boldsymbol{j}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \tag{6.6.2a}$$
$$\partial_t \boldsymbol{B} = -c\nabla\times\boldsymbol{E}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0. \tag{6.6.2b}$$

- 運動方程式

$$\partial_t\rho_e + \nabla\cdot\boldsymbol{j}_e = 0, \tag{6.6.3a}$$
$$\partial_t\boldsymbol{j}_e = \frac{q}{m}\left(\rho_e\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{j}_e\times\boldsymbol{B}\right), \tag{6.6.3b}$$
$$\ddot{\phi} - \triangle\phi + m_\phi^2\phi = g_{\phi\gamma}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}. \tag{6.6.3c}$$

ここで，

$$\rho_e = q\delta n_e, \quad \rho = \rho_e + \frac{g_{\phi\gamma}}{4\pi}\nabla\phi\cdot\boldsymbol{B}, \tag{6.6.4a}$$
$$\boldsymbol{j}_e = qn_e\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_e - \frac{g_{\phi\gamma}}{4\pi}\left(\nabla\phi\times\boldsymbol{E} + \dot{\phi}\boldsymbol{B}\right). \tag{6.6.4b}$$

摂動方程式

- 背景磁場: $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \delta\boldsymbol{B}$.
- 誘電率と透磁率： $\boldsymbol{D} = \epsilon\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{H} = \mu^{-1}\boldsymbol{B}$.
- Fourier モード

$$\rho_e, \boldsymbol{j}_e,\ \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B},\ \phi \propto \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}). \tag{6.6.5}$$

- 線形摂動方程式

$$\epsilon\partial_t^2\boldsymbol{E} = -c^2\nabla\times(\mu^{-1}\nabla\times E) - 4\pi\partial_t\boldsymbol{j}, \tag{6.6.6a}$$
$$\partial_t\boldsymbol{j}_e = \frac{q}{m}\left(\rho_e\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{j}_e\times\boldsymbol{B}_0\right). \tag{6.6.6b}$$

- small mass 近似：$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{j}_e \propto \exp(-i\omega t + ikz)$ として，$\boldsymbol{j}_e$ の式を解いて，

$$4\pi(\omega^2 - \omega_g^2)\boldsymbol{j}_e = \omega_p^2 \left\{ i\omega \boldsymbol{E} - \omega_g \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{b} - i\frac{\omega_g^2}{\omega}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b} \right\}. \tag{6.6.7}$$

ここで，$\boldsymbol{B}_0 = B_0 \boldsymbol{b}$,

$$\omega_g = \frac{qB_0}{cm}, \tag{6.6.8a}$$

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n_e q^2}{m}. \tag{6.6.8b}$$

また，

$$\partial_t \boldsymbol{j}_\phi = -\frac{g_{\phi\gamma}}{4\pi}\omega\phi(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} - \omega\boldsymbol{B}) \simeq \frac{g_{\phi\gamma}}{4\pi}\omega^2 B_0 \phi. \tag{6.6.9}$$

よって，摂動方程式は

$$\begin{aligned} \epsilon\partial_t^2 \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{k}\times(\mu^{-1}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}) - \frac{\omega_p^2\omega^2}{\omega^2-\omega_g^2}\boldsymbol{E} \\ &\quad + \frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_g^2}\left\{ i\omega\omega_g \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{b} + \omega_g^2(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b} \right\} - g\omega^2\phi\boldsymbol{B}_0, \end{aligned} \tag{6.6.10}$$

$$\partial_t^2 \phi = -(k^2 + m_\phi^2)\phi + g\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}_0. \tag{6.6.11}$$

6.6.2　伝播方程式

波の伝搬方向を z として，伝搬速度が光速に近く，$|\omega/k - c|/c \ll 1$ のとき，

$$(\partial_t^2 - \partial_z^2)X(t,z) = (\partial_t - \partial_z)(\partial_t + \partial_z)X \simeq -2ik(\partial_t + \partial_z)X = -2ik\frac{dX}{dz} \tag{6.6.12}$$

となるので，２階の発展方程式は，近似的に伝搬に沿った１階の方程式で近似される：

$$\left(-i\frac{d}{dz} - \mathscr{M}\right)\begin{pmatrix} A_\perp \\ A_{/\!/} \\ \phi \end{pmatrix} = 0; \quad \mathscr{M} = \begin{pmatrix} \Delta_\perp & \Delta_R & 0 \\ \Delta_R & \Delta_{/\!/} & \Delta_B \\ 0 & \Delta_B & \Delta_a \end{pmatrix} \tag{6.6.13}$$

ここで，

$$\Delta_\perp = \Delta_{\rm pl} + \Delta_{\rm CM}^\perp, \quad \Delta_{/\!/} = \Delta_{\rm pl} + \Delta_{\rm CM}^{/\!/}, \quad \Delta_{\rm pl} = \omega_{\rm pl}^2/(2E) \tag{6.6.14a}$$

$$\Delta_B = g_{a\gamma}B_t/2, \quad \Delta_a \simeq m_a^2/(2E), \tag{6.6.14b}$$

$$\omega_{\rm pl} = \sqrt{\frac{4\pi\alpha n_e}{m_e}}. \tag{6.6.14c}$$

Δ_R は Faraday 回転，$\Delta_{\rm CM}$ は Cotton-Mouton 効果を表す.

２成分近似　Farady 回転を無視したとき，

$$\begin{pmatrix} \Delta_{/\!/} & \Delta_B \\ \Delta_B & \Delta_a \end{pmatrix} = R(\theta)[\lambda_1, \lambda_2]R(-\theta) \tag{6.6.15}$$

$\Leftrightarrow$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \Delta_{/\!/} + \Delta_a, \tag{6.6.16}$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\cos(2\theta) = \Delta_{/\!/} - \Delta_a, \tag{6.6.17}$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\sin(2\theta) = 2\Delta_B. \tag{6.6.18}$$

と対角化すると，

$$\begin{pmatrix} A_{/\!/}(z) \\ \phi(z) \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} e^{i\lambda_1 z} & 0 \\ 0 & e^{i\lambda_2 z} \end{pmatrix} R(-\theta) \begin{pmatrix} A_{/\!/}(0) \\ \phi(0) \end{pmatrix}. \tag{6.6.19}$$

ここで，

$$\lambda = \frac{1}{2}\{\Delta_\gamma + \Delta_a \pm \Delta_{\rm osc}\}; \quad \Delta_{\rm osc}^2 = (\Delta_\gamma - \Delta_a)^2 + 4\Delta_B^2 \tag{6.6.20}$$

これらの固有値の gB への依存性は，図 6.2 の左図に示したようになる．また，対応する固有ベクトルの振る舞いは，図 6.2 の右図を用いると理解できる．特に，$g|B|E \gg m_a^2$ では，

$$\boldsymbol{e}_1 \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_a + \boldsymbol{e}_\gamma), \quad \boldsymbol{e}_2 \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(-\boldsymbol{e}_a + \boldsymbol{e}_\gamma) \tag{6.6.21}$$

となり混合は極大となる．

非共鳴遷移

$$P_{\gamma\to a} = P_0 := \sin^2(2\theta)\sin^2\frac{s\,\Delta_{\rm osc}}{2} = \frac{4\Delta_B^2}{\Delta_{\rm osc}^2}\sin^2\frac{s\,\Delta_{\rm osc}}{2} \tag{6.6.22}$$

ここで，

$$\Delta_{\rm osc} = (\Delta_{\rm CM} + \Delta_{\rm pl} - \Delta_a)^2 + 4\Delta_B^2. \tag{6.6.23}$$

CM 項が無視できる場合には，

$$P_0 = \frac{1}{1 + (E_*/E)^2}\sin^2\left(g_{a\gamma}B_t\left[1 + (E_*/E)^2\right]^{1/2}\frac{s}{2}\right), \tag{6.6.24}$$

$$E_* := \frac{|m_a^2 - \omega_{\rm pl}^2|}{2g_{a\gamma}B_t} \simeq 2.6\frac{|m_a^2 - \omega_{\rm pl}^2|}{(10^{-10}{\rm eV})^2}\left(\frac{10^{-9}{\rm G}}{B_t}\right)\left(\frac{g_{a\gamma}^{-1}}{10^{10}{\rm GeV}}\right){\rm GeV} \tag{6.6.25}$$

共鳴遷移

$$2\pi|\Delta'_{\rm pl} + \Delta'_{\rm CM}| \lesssim \Delta_B^2 \ \Rightarrow\ P_{\gamma\to a} = {\rm O}(1) \tag{6.6.26}$$

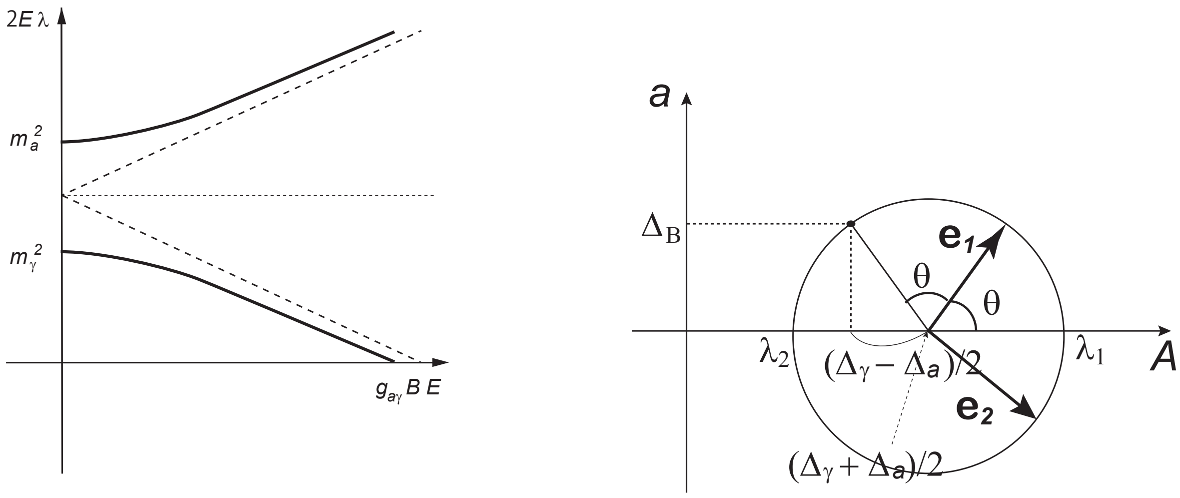


図 6.2: 磁場によるアクシオンと光子の混合

§6.7
*DM 崩壊

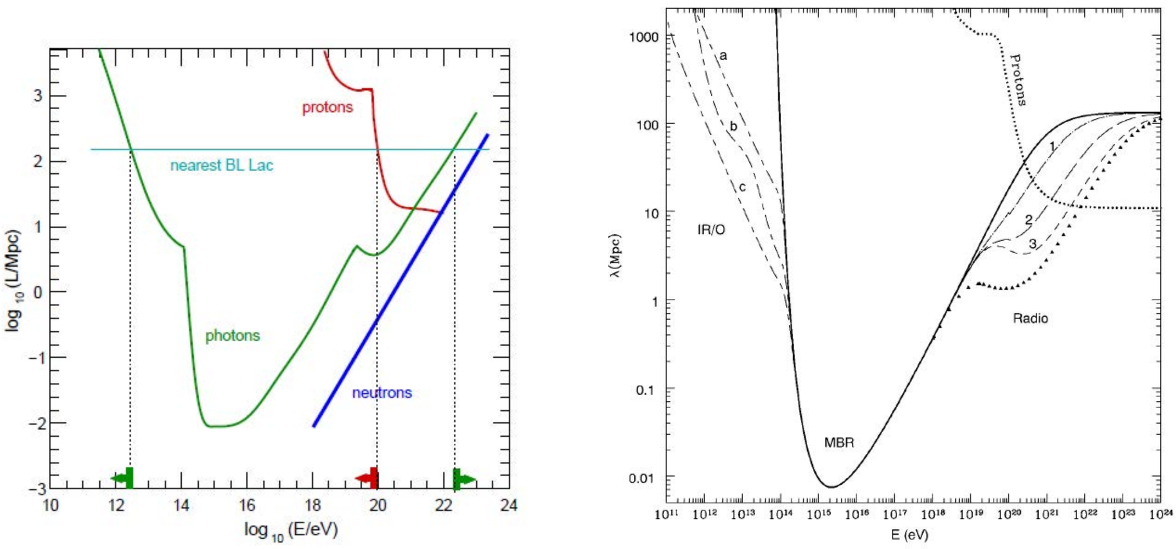


図 6.3: 光子および宇宙線に対する宇宙の透明度

§6.8
*宇宙の透明性問題

6.8.1　Gamma 線ホライズン

高エネルギー宇宙線は，エネルギー E が $E_{\mathrm{GZK}} \sim 5 \times 10^{19}\mathrm{eV}$ を超えると，CMB 光子と反応して π 中間子を作り，急速にエネルギーを失う：

$$p + \gamma \to p + \pi^0,\ n + \pi^+$$

このため，$E > E_{\mathrm{GZK}}$ の宇宙線が伝搬できる距離は E と共に急速に短くなる．

同様に，高エネルギーガンマ線は，電磁背景放射との相互作用により，電子・陽電子対生成を起こす様になると，伝搬距離は短くなる：

$$\omega_{\mathrm{HE}\gamma} \geqslant \frac{2.5 \times 10^{11}\mathrm{eV}^2}{\omega_{\mathrm{BG}\gamma}} \ \Rightarrow\ \gamma + \gamma \to e + e^+. \tag{6.8.1}$$

ただし，伝搬距離は各振動数での背景放射のエネルギー密度に大きく依存する (図 6.3）.

AGN のガンマ線スペクトルの観測から，ガンマ線に対する宇宙の透明度が実際に測られるようになっている：

- HESS observation: power-law fitting

Fig. 1. Measurement, at the 68 and 95% confidence levels (including systematic uncertainties added in quadrature), of the opacity $\tau_{\gamma\gamma}$ from the best fits to the Fermi data compared with predictions of EBL models. The plot shows the measurement at $z \approx 1$, which is the average redshift of the most constraining redshift interval (i.e., $0.5 \le z < 1.6$). The Fermi-LAT measurement was derived combining the limits on the best-fit EBL models. The downward arrow represents the 95% upper limit on the opacity at $z = 1.05$ derived in (*13*). For clarity, this figure shows only a selection of the models we tested; the full list is reported in table S1. The EBL models of (*49*), which are not defined for $E \ge 250/(1+z)$ GeV and thus could not be used, are reported here for completeness.

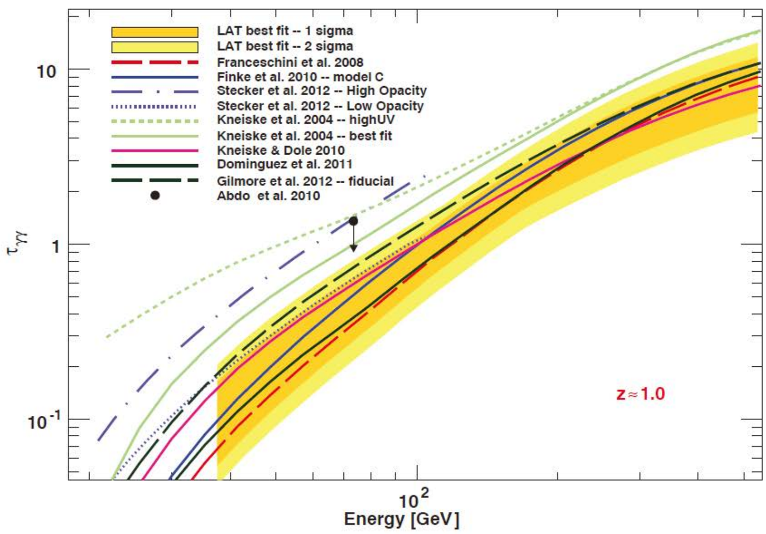


図 6.4: Blazar からのガンマ線に対する宇宙の透明度 (FermiLAT)

Two blazars with strong absorption were observed.

- Fermi-LAT observation: power-law fitting [Ackermann at al (Fermi Coll): Science 338, 1190 (2012)]

  The spectral deformation due to absorption has been observed for 150 blazars of BL Lac type. ($z = 0.03 - 1.6, E = 40\text{GeV} - 100\text{GeV}$)

- Multi-frequency observation: synchrotron/SSC model [Dominguez et al: apj770, 88 (2013)]

  Opacity around a TeV range is determined by observations of 15 blazars from radio to Gamma-ray (Fermi-LAT & IACTs).

  The opacity is consistent with the minimum EBL model. ($z = 0.031 - 0.5, E = 200\text{GeV} - 10\text{TeV}$)

6.8.2　CIRB 問題

従来から，赤外線背景放射の直接観測は，銀河からの寄与の総和に対する推定値より大きな値を与える傾向にあった．最近，この傾向が 1μm より短い波長帯でも続くのかどうかを検証するためのロケット実験（CIBER 実験）が行われ，銀河起源の EBL の 2 倍以上の観測値を得ている．

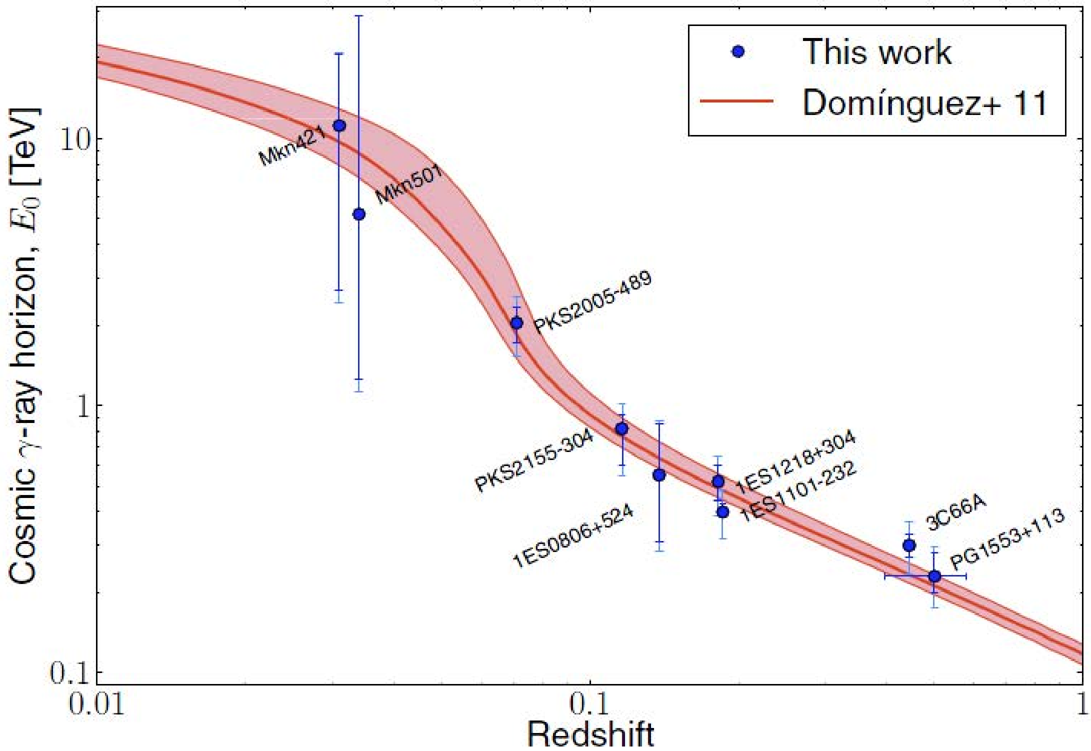


Figure 2. Estimation of the CGRH from every blazar in our sample plotted with blue circles. The statistical uncertainties are shown with darker blue lines and the statistical plus 20% of systematic uncertainties are shown with lighter blue lines. The CGRH calculated from the EBL model described in Domínguez et al. (2011a) is plotted with a red thick line. The shaded regions show the uncertainties from the EBL modeling, which were derived from observed data. (A color version of this figure is available in the online journal.)

図 6.5: Blazar からのガンマ線に対する宇宙の透明度 (Synchrotron/SSC model)

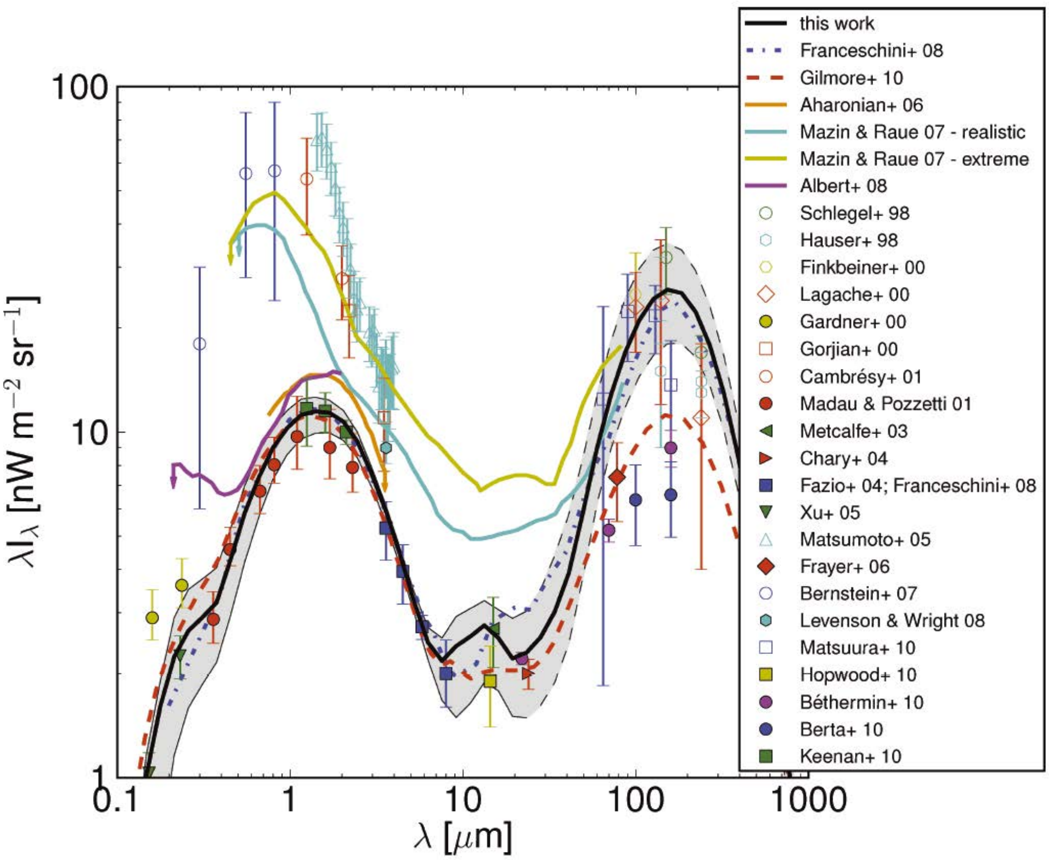

this work
Franceschini+ 08
Gilmore+ 10
Aharonian+ 06
Mazin & Raue 07 - realistic
Mazin & Raue 07 - extreme
Albert+ 08
Schlegel+ 98
Hauser+ 98
Finkbeiner+ 00
Lagache+ 00
Gardner+ 00
Gorjian+ 00
Cambrésy+ 01
Madau & Pozzetti 01
Metcalfe+ 03
Chary+ 04
Fazio+ 04; Franceschini+ 08
Xu+ 05
Matsumoto+ 05
Frayer+ 06
Bernstein+ 07
Levenson & Wright 08
Matsuura+ 10
Hopwood+ 10
Béthermin+ 10
Berta+ 10
Keenan+ 10
λI_λ [nW m^{-2} sr^{-1}]
100
10
1
0.1
1
10
100
1000
λ [μm]

図 6.6: EBL の観測値

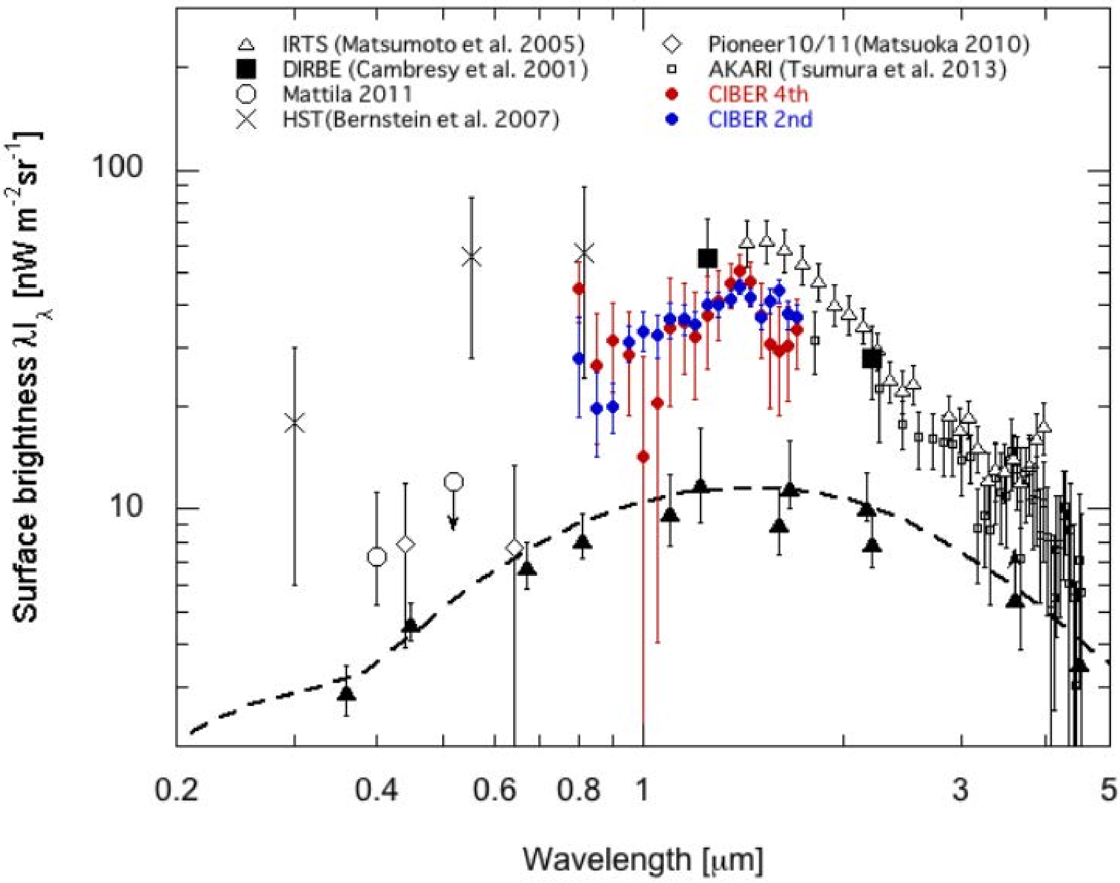


図 6.7: CIBER 実験で得られた赤外線背景放射スペクトル

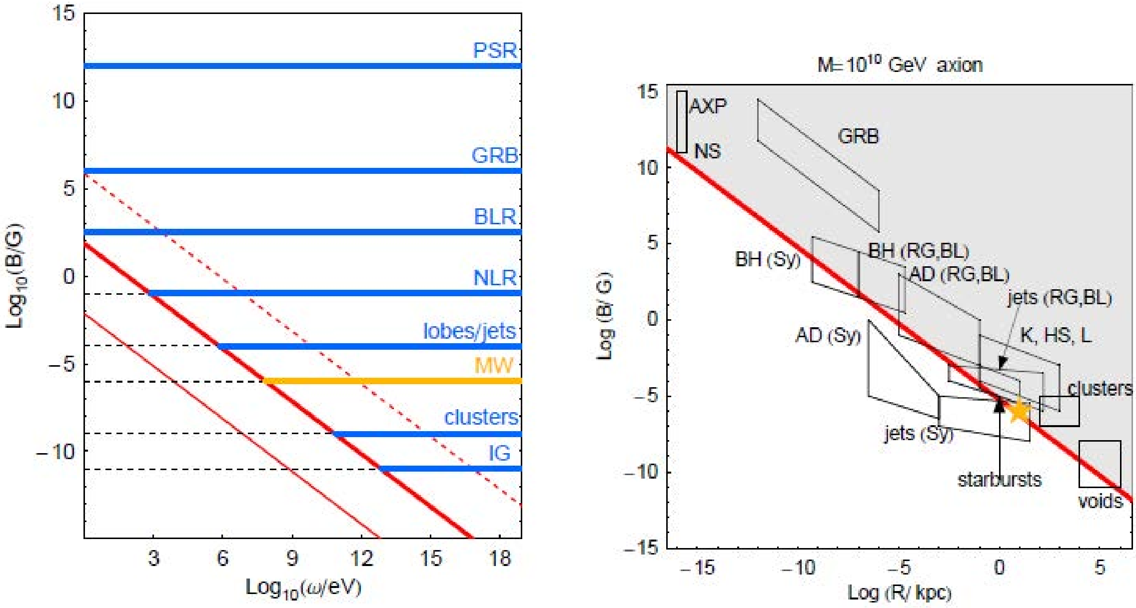


図 6.8: 強いアクシオン・光子混合が起きるための条件

6.8.3　観測可能性

Fermi 衛星　エネルギーが $E = 100\text{GeV} \sim 1\text{TeV}$，質量が $10^{-6} \sim 10^{-8}\text{eV}$、$g_{a\gamma} \sim 10^{-10}\text{GeV}^{-1}$ のとき，次の条件が満たされるなら，γ 線スペクトルが 10 %程度変形を受ける：

- 銀河間磁場：$L \sim 1\text{Mpc}$, $B = (1-5) \times 10^{-9}G$, $D = 200 \sim 500\text{Mpc}$
- 銀河団磁場: $L \sim 10\text{kpc}$, $B = 10^{-6}G$, $n_e \simeq 10^{-3}\text{cm}^{-3}$, $D = 1\text{Mpc}$
- 銀河磁場: $L \sim 10\text{kpc}$, $B = (2-4) \times 10^{-6}G$, $n_e \simeq 10^{-3}\text{cm}^{-3}$, $D = 1\text{Mpc}$.

  [De Angelis A, Mansutti O, Roncadelli M:Phys.Lett. B659 (2008) 847-855 [arXiv:0707.2695 [astro-ph]]]

強い混合が起きるための条件

- Near resonance

$$E \gtrsim E_* \;\Rightarrow\; g_{a\gamma} \cdot 10^{11}\text{GeV} \gtrsim 0.7 \left(\frac{m_a}{10^{-7}\text{eV}}\right)^2 \frac{1}{B_{10\mu\text{G}} E_{\text{TeV}}} \tag{6.8.2}$$

- 十分な振動

$$g_{a\gamma} BL \gtrsim \pi \;\Rightarrow\; g_{a\gamma} \cdot 10^{11}\text{GeV} \gtrsim 0.3 \frac{1}{B_{10\mu\text{G}} L_{10\text{kpc}}} \tag{6.8.3}$$

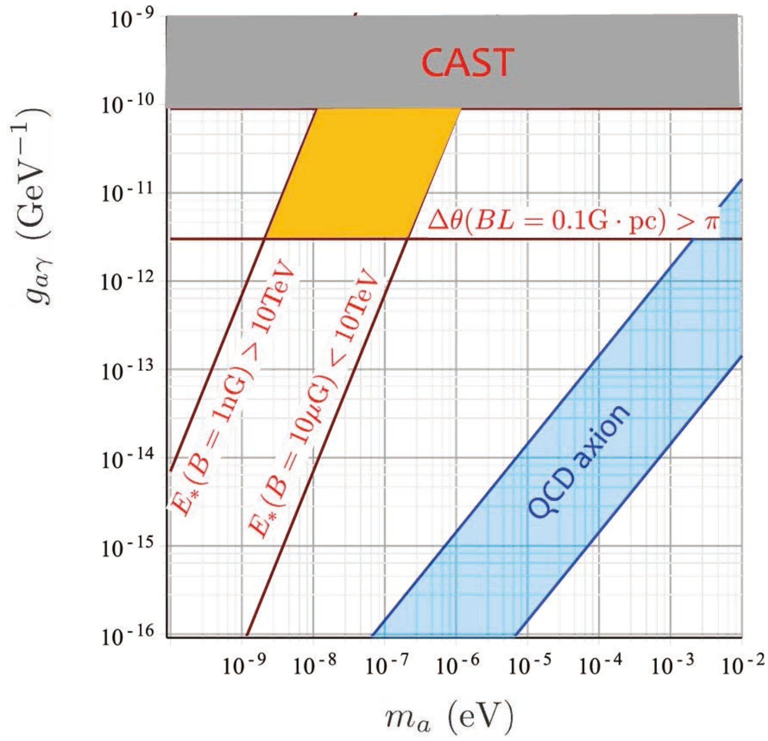


図 6.9: CIBER 実験で得られた axion パラメータへの制限

観測から得られた制限

- VHE γ 線 (> 100GEV) での宇宙の透明度. 26 個の高エネルギー天体の不透明波長帯を観測. [Meyer M, Horns D, Raue M: arXiv:1302.1208]

$$g_{a\gamma} \gtrsim 10^{-11}\mathrm{GeV}^{-1}: \quad 10^{-10}\mathrm{eV} < m_a < 10^{-7}\mathrm{eV}. \tag{6.8.4}$$

- VHE γ 線源のスペクトルがもつ乱雑さをアクシオン・光子変換に作用する磁場の乱雑さに起因するとした場合の制限 [Brun P, Wouters D (HESS Collaboration): arXiv: 1307.6068]

$$g_{a\gamma} \lesssim 5\times 10^{-11}\mathrm{GeV}^{-1}: \quad 10^{-9}\mathrm{eV} < m_a < 10^{-7}\mathrm{eV}. \tag{6.8.5}$$

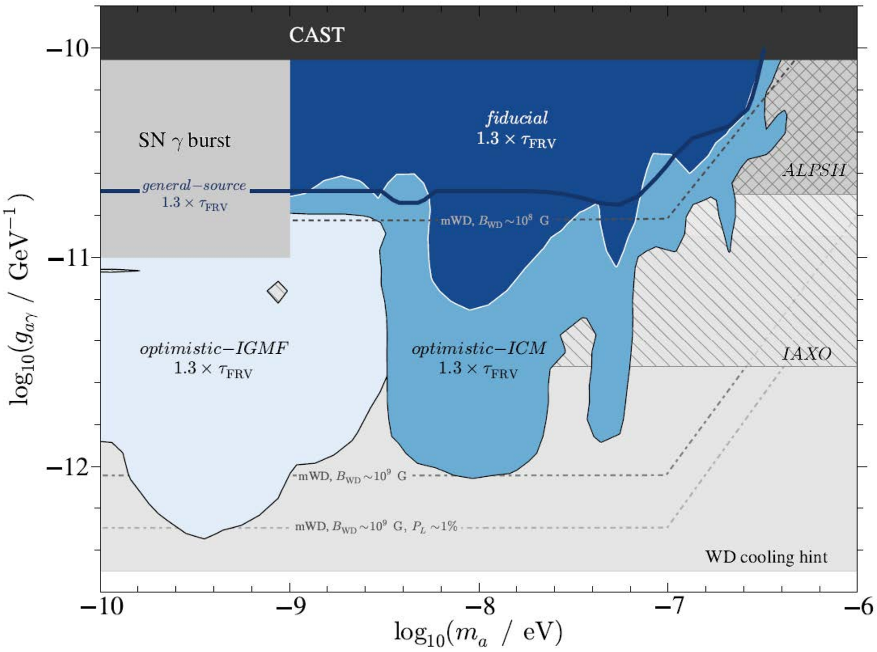


図 6.10: VHE γ 線に対する透明度より得られた $g_{a\gamma}$ への下限 [Meyer M, Horns D, Raue M: arXiv:1302.1208]

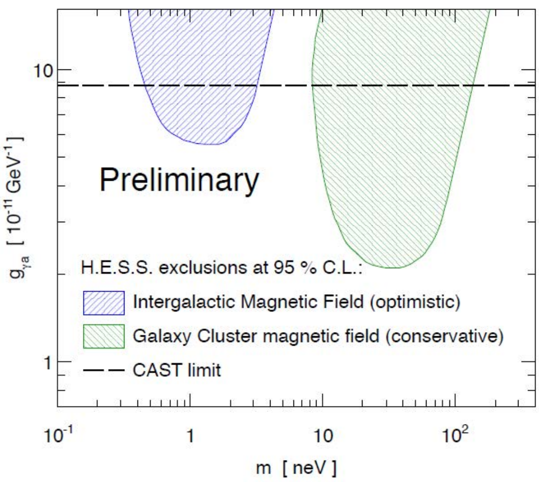


図 6.11: HESS により観測された BL Lac PKS 2155-304 の γ 線スペクトルの不規則性より得られた $g_{a\gamma}$ への制限 [Brun P, Wouters D (HESS Collaboration): arXiv: 1307.6068]

§6.9
*Dark radiation

References

- Tashiro H: PTEP 2014 (2014) 6, 06B107.

  "CMB spectral distortions and energy release in the early universe"

- PRISM Collaboration: JCAP1402 (2014)006 [arXiv:1310.1554 [astro-ph.CO]]

- Tashiro H, Silk J, Marsh DJE: PRD88 (2013) 125024 [arXiv:1308.0314] (PRISM/Pixie).

- Mirizzi A, Redondo J, Sisl G: JCAP0908 (2009)001 [arXiv:0905.4865] (COBE FIRAS).

6.9.1　CMB-axion conversion

Basic equation　アクシオン・光子変換の基礎方程式は

$$\left(-i\frac{d}{cdt} - M\right)\begin{pmatrix} A_{/\!/} \\ \phi \end{pmatrix} = 0; \tag{6.9.1}$$

$$M = \frac{1}{2\omega}\begin{pmatrix} m_\gamma^2 & 2\omega g B \\ 2\omega g B & m_a^2 \end{pmatrix}. \tag{6.9.2}$$

ここで,

$$m_\gamma^2 = \omega_p^2 + \left(\frac{1}{n^2} - 1\right)\omega^2, \tag{6.9.3a}$$

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi\alpha n_e}{m_e}. \tag{6.9.3b}$$

M は次のように対角化される：

$$M = R(\theta)\begin{pmatrix} m_-^2/2\omega & 0 \\ 0 & m_+^2/2\omega \end{pmatrix} R(-\theta), \tag{6.9.4}$$

$$m_\pm^2 = \frac{m_\gamma^2 + m_a^2}{2} \pm \left[\left(\frac{m_a^2 - m_\gamma^2}{2}\right)^2 + (\omega g B)^2\right]^{1/2}, \tag{6.9.5}$$

$$\cos(2\theta) = \frac{m_a^2 - m_\gamma^2}{\left[(m_a^2 - m_\gamma^2)^2 + (2\omega g B)^2\right]^{1/2}}. \tag{6.9.6}$$

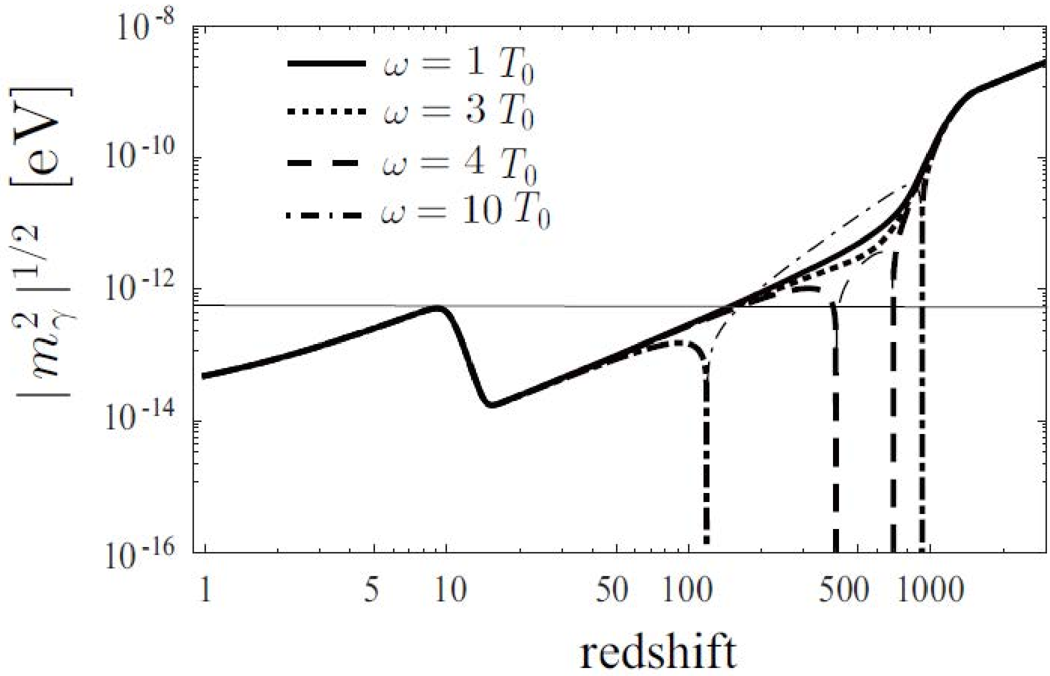


図 6.12: m_γ の時間変化

Non-resonant conversion

$$P = \frac{1}{1+(\omega_*/\omega)^2}\sin^2\left[\int dt \frac{gB}{2}\sqrt{1+(\omega_*/\omega)^2}\right]. \tag{6.9.7}$$

ここで，

$$\omega_* = \frac{|m_a^2 - m_\gamma^2|}{2gB} \simeq 0.7\mathrm{GeV}\frac{m_a^2 - m_\gamma^2}{(10^{-10}\mathrm{eV})^2}\left(\frac{1\mathrm{nG}}{B}\right)\left(\frac{g^{-1}}{10^{10}\mathrm{GeV}}\right), \tag{6.9.8a}$$

$$(gB)^{-1} \simeq 2.8\times 10^{24}\mathrm{cm}\left(\frac{g^{-1}}{10^{10}\mathrm{GeV}}\right)\left(\frac{1\mathrm{nG}}{B}\right) \simeq 0.92\mathrm{Mpc}\left(\frac{g^{-1}}{10^{10}\mathrm{GeV}}\right)\left(\frac{1\mathrm{nG}}{B}\right), \tag{6.9.8b}$$

$$ct_{\mathrm{ls}} \simeq 3.5\times 10^{23}\mathrm{cm}. \tag{6.9.8c}$$

よって，

$$\omega \sim 10^{-2}\mathrm{eV},\quad m_a \sim 10^{-10}\mathrm{eV},\quad g\sim 10^{-10}\mathrm{GeV}^{-1},\quad B\sim 1\mathrm{nG} \tag{6.9.9}$$

に対して，

$$P = \mathrm{O}\bigl(10^{-22}\bigr)!!. \tag{6.9.10}$$

Resonant conversion　進化の途中で，$m_a = m_\gamma$ となる場合には，共鳴変換が起きる：

$$P \approx 1 - p \approx \frac{k_r r}{2}\frac{\sin^2(2\theta_r)}{\cos(2\theta_r)}. \tag{6.9.11}$$

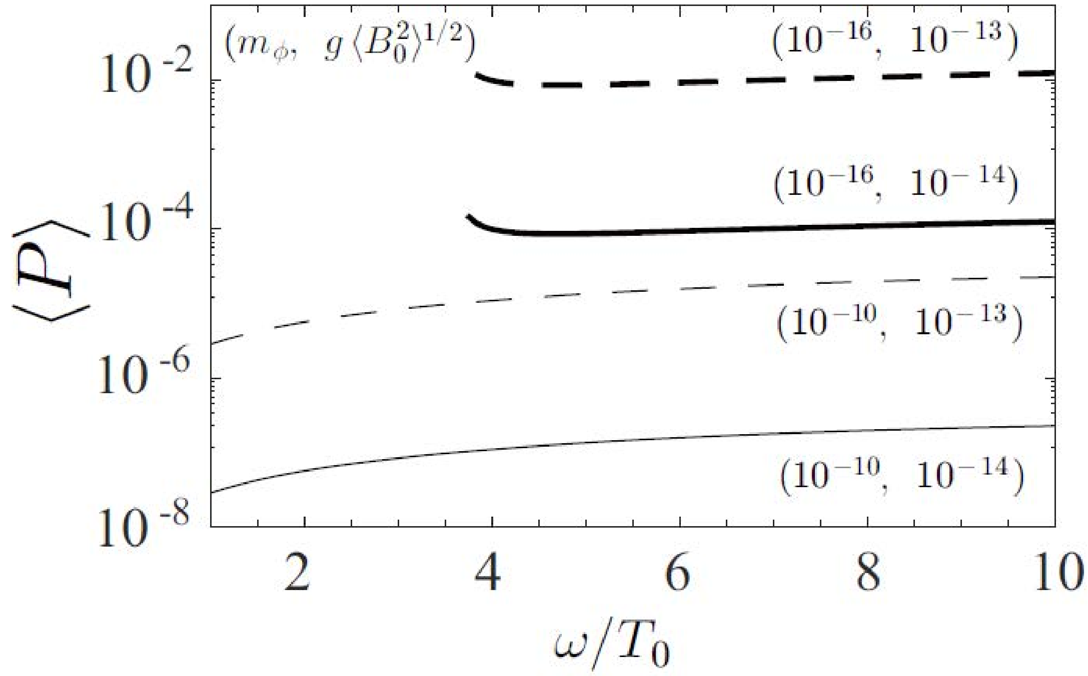


図 6.13: $P_{\gamma a}$ の m_a 依存性

ここで,

$$p = \exp\left(-\frac{k_r r}{2}\frac{\sin^2(2\theta_r)}{\cos(2\theta_r)}\right), \tag{6.9.12}$$

$$r = \left|\frac{d}{dt}\ln m_\gamma^2\right|^{-1}_{t=t_r}. \tag{6.9.13}$$

θ_r は

$$\cos(2\theta_r) = \frac{m_a^2}{(m_a^4 + (2\omega_r g B_r)^2)^{1/2}} \approx 1, \tag{6.9.14a}$$

$$\sin(2\theta_r) = \frac{2\omega_r g B_r}{(m_a^4 + (2\omega_r g B_r)^2)^{1/2}} \approx \frac{\omega_r}{\omega_*} \tag{6.9.14b}$$

よって,

$$k_r \sim 10^3\mathrm{cm}^{-1}, \quad r \sim 10^{23}\mathrm{cm} \ \Rightarrow\ P \simeq 1 \tag{6.9.15}$$

6.9.2　*Dark radiation とモジュライ問題

References for the Moduli Problem

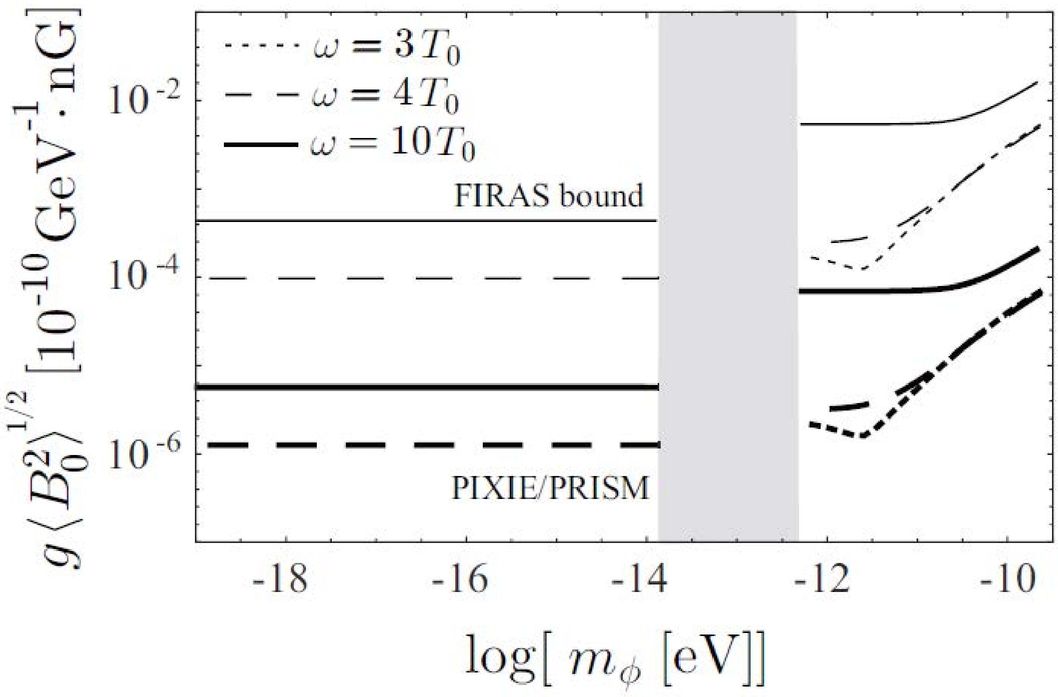


図 6.14: gB への制限

- 問題提起

  – G. Coughlan, W. Fischler, E.W. Kolb, S. Raby and G.G. Ross:
    Phys. Lett. B 131 (1983) 59.
    "Cosmological Problems for the Polonyi Potential"

  – A. Goncharov, A.D. Linde and M. Vysotsky:
    Phys. Lett. B 147 (1984) 279.
    "Cosmological problems for spontaneously broken supergravity"

  – J.R. Ellis, D.V. Nanopoulos and M. Quirós:
    Phys. Lett. B 174 (1986) 176.
    "On the Axion, Dilaton, Polonyi, Gravitino and Shadow Matter Problems in Supergravity and Superstring Models"

  – B. de Carlos, J. Casas, F. Quevedo and E. Roulet:
    Phys. Lett. B 318 (1993) 447 [hep-ph/9308325]
    "Model independent properties and cosmological implications of the dilaton and moduli sectors of 4 - D strings"

  – T. Banks, D.B. Kaplan and A.E. Nelson:
    Phys. Rev. D 49 (1994) 779 [hep-ph/9308292].

“Cosmological implications of dynamical supersymmetry breaking”

- 解決法

  - L. Randall and S.D. Thomas:
    Nucl. Phys. B 449 (1995) 229 [hep-ph/9407248]
    “Solving the cosmological moduli problem with weak scale inflation”
  - A.D. Linde:
    Phys. Rev. D 53 (1996) 4129[hep-th/9601083]
    “Relaxing the cosmological moduli problem”
  - D.H. Lyth and E.D. Stewart:
    Phys. Rev. D 53 (1996) 1784 [hep-ph/9510204]
    “Thermal inflation and the moduli problem”
  - M. Dine, Y. Nir and Y. Shadmi:
    Phys. Lett. B 438 (1998) 61 [hep-th/9806124].
    “Enhanced symmetries and the ground state of string theory,”
  - M. Kawasaki and F. Takahashi:
    Phys. Lett. B 618 (2005) 1 [hep-ph/0410158]
    “Late-time entropy production due to the decay of domain walls”
  - K. Nakayama, F. Takahashi and T.T. Yanagida:
    Phys. Rev. D 84 (2011) 123523 [arXiv:1109.2073]
    “On the Adiabatic Solution to the Polonyi/Moduli Problem”

- Moduli-induced gravitino problem

  - M. Endo, K. Hamaguchi and F. Takahashi:
    Phys. Rev. Lett. 96 (2006) 211301 [hep-ph/0602061]
    “Moduli-induced gravitino problem”
  - S. Nakamura and M. Yamaguchi:
    Phys. Lett. B 638 (2006) 389 [hep-ph/0602081]
    “Gravitino production from heavy moduli decay and cosmological moduli problem revived”
  - M. Dine, R. Kitano, A. Morisse and Y. Shirman:
    Phys. Rev. D 73 (2006) 123518 [hep-ph/0604140]
    “Moduli decays and gravitinos”
  - M. Endo, K. Hamaguchi and F. Takahashi:
    Phys. Rev. D 74 (2006) 023531 [hep-ph/0605091]
    “Moduli/Inflaton Mixing with Supersymmetry Breaking Field”

– K.S. Jeong, M. Shimosuka and M. Yamaguchi
  JHEP 09 (2012) 050 [arXiv:1112.5293]
  "Light Higgsino in Heavy Gravitino Scenario with Successful Electroweak Symmetry Breaking"

Moduli 粒子の寿命　Moduli 粒子 X の質量を m_X，崩壊粒子との結合係数を，$X \to$ 2 bosons のとき $\mu(=[1/L])$，$X \to$ 2 fermion のとき λ とするとき，

$$\Gamma \sim \begin{cases} \frac{\mu^2}{m_X} \\ \lambda^2 m_X \end{cases}. \tag{6.9.16}$$

一方，μ と λ は一般に，モジュライの場の質量スケールを M として，

$$\mu \sim \frac{m_X^2}{M}, \quad \lambda \sim g\frac{m_f}{M} \tag{6.9.17}$$

よって，2 boson 崩壊が主要プロセスとなり，

$$\Gamma \sim \frac{m_X^3}{M^2} \;\Rightarrow\; \tau \sim \frac{M^2}{m_X^3} \sim 24\mathrm{s}\left(\frac{M}{m_{\rm pl}}\right)^2\left(\frac{m_X}{10\mathrm{TeV}}\right)^{-2}. \tag{6.9.18}$$

BBN の特徴的な時間

- BBN の開始
$$T_D \simeq 74\mathrm{keV} = 8.6\times 10^8\mathrm{K} \;\Leftrightarrow\; t \simeq 240\mathrm{s}, \tag{6.9.19}$$

- p/n 比が化学平衡からずれ出す時期
$$T_n \simeq 0.74\mathrm{MeV} = 8.6\times 10^9\mathrm{K} \;\Leftrightarrow\; t \simeq 1.66\mathrm{s} \tag{6.9.20}$$

と比較すると，

$$m \gtrsim 3\mathrm{TeV} \tag{6.9.21}$$

の条件が満たされないと，BBN がモジュライの崩壊の影響を大きく受ける．

Dark radiation

- Moduli decay $\Rightarrow$ dark radition

  [Higaki, Nakayama, Takahashi: arXiv:1304.7987].

- DR/axion $\Rightarrow$ CMB スペクトル変形

  [Higaki, Nakayama, Takahashi: arXiv: 1306.6518]

$$g_{a\gamma}B_0 < 10^{-15}\mathrm{GeV}^{-1}\mathrm{nG} \quad \text{for} \quad \Delta N_{\rm eff} \sim 0.1. \tag{6.9.22}$$

§6.10
Cosmological birefringence

References

- Kosowsky, A.: Cosmic Microwave Background Polarization, Annals of Physics 246, 49-85 (1996).

6.10.1　偏光の記述

- 偏光テンソル

$$\rho_{pq} = e^i_p e^j_q \langle : E_i E_j : \rangle = \rho_{qp}, \quad \tilde{\rho}_{pq} = e^i_p e^j_q \langle : E_i \tilde{E}_j : \rangle = -\tilde{\rho}_{qp} \tag{6.10.1}$$

ここで，$\tilde{E}_i(t) = E_i(t + \pi/(2\omega))$.

- Stokes パラメーター

$$I = \rho^p_p, \quad Q = \rho_{11} - \frac{1}{2}I, \quad U = \rho_{12} \quad V = \tilde{\rho}_{12} \tag{6.10.2}$$

これより，偏光行列を

$$P = \left(\rho_{pq} - \frac{1}{2}I\delta_{pq}\right) = \begin{pmatrix} Q & U \\ U & -Q \end{pmatrix} \tag{6.10.3}$$

により定義すると，偏光ベクトルの回転に対して，

$$P \mapsto R(\theta)PR(\theta)^{-1} \tag{6.10.4}$$

と変換する．したがって，P は天球上の 2 階対称テンソルと見なすことができる．

6.10.2　E モードと B モード

天球上での放射強度のゆらぎ $\delta I(\Omega)$ は，調和関数を用いて

$$\delta I(\Omega) = g(\omega/T)\bar{I}\sum_{l,m}\Theta^m_l Y^m_l(\Omega); \quad g(x) = x\partial_x f(x)/f(x) \tag{6.10.5}$$

と展開される．ここで，Θ^m_l は温度ゆらぎ $\delta T/T$ の展開係数に相当する量である．

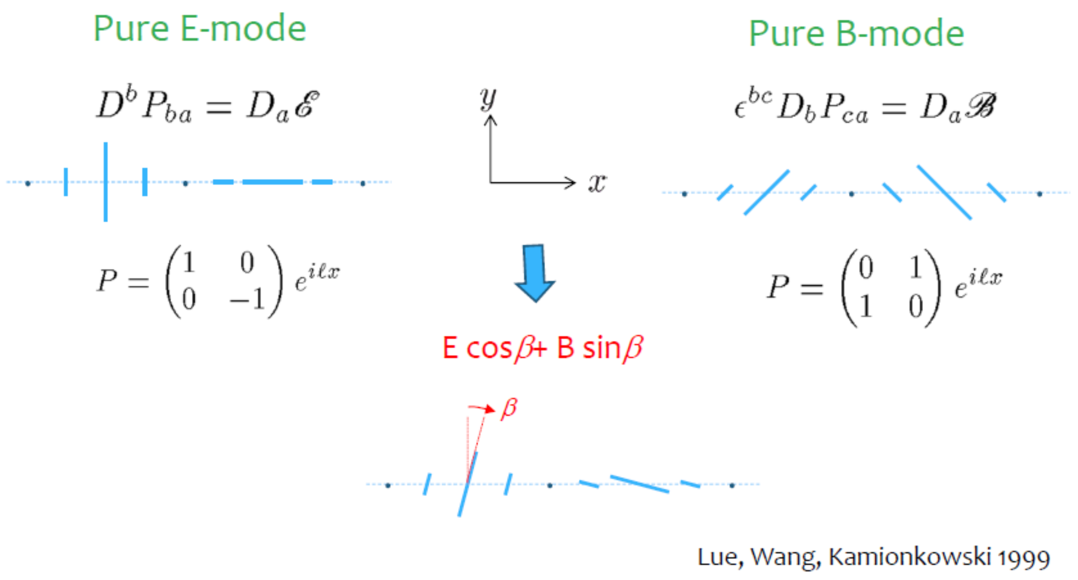


図 6.15: Flat sky 近似での E モードと B モード

同様に，偏光テンソルは，

$$\hat{\triangle}\mathscr{P}_l^m = -(l^2 + l - 4)\mathscr{P}_l^m, \quad \mathrm{Tr}(\mathscr{P}_l^m) = 0 \tag{6.10.6}$$

を満たす 2 階対称調和テンソル $\mathscr{P}_l^m$ を用いて，

$$P(\Omega) = g(\omega/T)\bar{I}\sum_{l,m}(E_l^m \mathscr{P}_{El}{}^m + B_l^m \mathscr{P}_{Bl}{}^m) \tag{6.10.7}$$

と展開される．ここで，$\mathscr{P}_E$ と $\mathscr{P}_B$ はそれぞれ

$$\hat{D}_b(\mathscr{P}_{El}{}^m)_a^b = -c_l \hat{D}_a Y_l^m, \tag{6.10.8a}$$

$$\hat{D}_b(\mathscr{P}_{Bl}{}^m)_a^b = -c_l \epsilon_{ab}\hat{D}^b Y_l^m \tag{6.10.8b}$$

を満たす parity even および odd な調和テンソルの独立な基底で，対応する偏光テンソル分布の各成分はそれぞれ E モードおよび B モードと呼ばれる．

6.10.3　Flat sky 近似

l の十分大きいモードでは天球の曲率を無視できる．このようなモードに対しては，局所的に球面調和関数の代わりに平面波を用いることができる：(赤道の近傍で)

$$\begin{aligned} Y_l^m &\propto P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi} \sim ((-1)^m\sqrt{\frac{2}{\pi\sin\theta}}\frac{\Gamma(l+m+1)}{\Gamma(l+3/2)}\cos\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\theta + \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right]e^{im\phi} \\ &\to e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \tag{6.10.9}$$

対応して，

$$\mathscr{P}_{ab} \to M_{ab} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\theta}} \tag{6.10.10}$$

とおくと，M_{ab} はトレースがゼロの対称行列で，E モードの条件は

$$M_{ab}k^b = -c_l k^a \ \Rightarrow\ M_E \propto \begin{pmatrix} (k^1)^2-(k^2)^2 & 2k^1k^2 \\ 2k^1k^2 & -(k^1)^2+(k^2)^2 \end{pmatrix}. \tag{6.10.11}$$

B モードの条件は

$$M_{ab}k^b = -c_l \epsilon_{ab} k^b \ \Rightarrow\ M_B \propto \begin{pmatrix} -2k^1k^2 & (k^1)^2-(k^2)^2 \\ (k^1)^2-(k^2)^2 & 2k^1k^2 \end{pmatrix} \tag{6.10.12}$$

特に，偏光ベクトルを $\epsilon_{1/\!/}\boldsymbol{k}$ と取ると，

$$M_E \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow\ U=0, \tag{6.10.13a}$$

$$M_B \propto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow\ Q=0. \tag{6.10.13b}$$

これは，この基底のもとで，直線偏光の方向が

- E-mode : $E_1 = 0$ or $E_2 = 0 \quad \Leftrightarrow\ \boldsymbol{E}/\!/\boldsymbol{k}$ or $\perp \boldsymbol{k}$.
- B-mode : $E_1 = \pm E_2 \quad \Leftrightarrow\ \boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{k}$ が 45°.

6.10.4　フラックス強度テンソル

電磁場のモード展開と偏光ベクトル　Lorentz ゲージのもとで，自由電磁場の 4 元ポテンシャル A_μ は，生成消滅演算子を用いて

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega}\sum_p \left(e_{p\mu}(\boldsymbol{k})a_p(\boldsymbol{k})e^{ik\cdot x} + e^*_{p\mu}(\boldsymbol{k})a_p(\boldsymbol{k})^\dagger e^{-ik\cdot x}\right), \tag{6.10.14}$$

と表される．ここで，$e_{p\mu}(\boldsymbol{k})$ は次の条件を満たす偏光ベクトルである：

$$e^\mu_p e^*_{q\mu} = \delta_{pq}, \quad k^\mu e_{p\mu} = 0. \tag{6.10.15}$$

k^μ に比例したベクトルを e^μ_p に加えることはゲージ変化にあたり，物理的な効果は無いことに注意する．また，a_p と $a^\dagger_p$ は次の通常の相対論的に規格化された交換関係を満たすものとする:

$$[a_p(\boldsymbol{k}), a_q(\boldsymbol{k}')] = 0, \quad [a_p(\boldsymbol{k}), a_q(\boldsymbol{k}')^\dagger] = (2\pi)^3 2\omega \delta_{pq}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'). \tag{6.10.16}$$

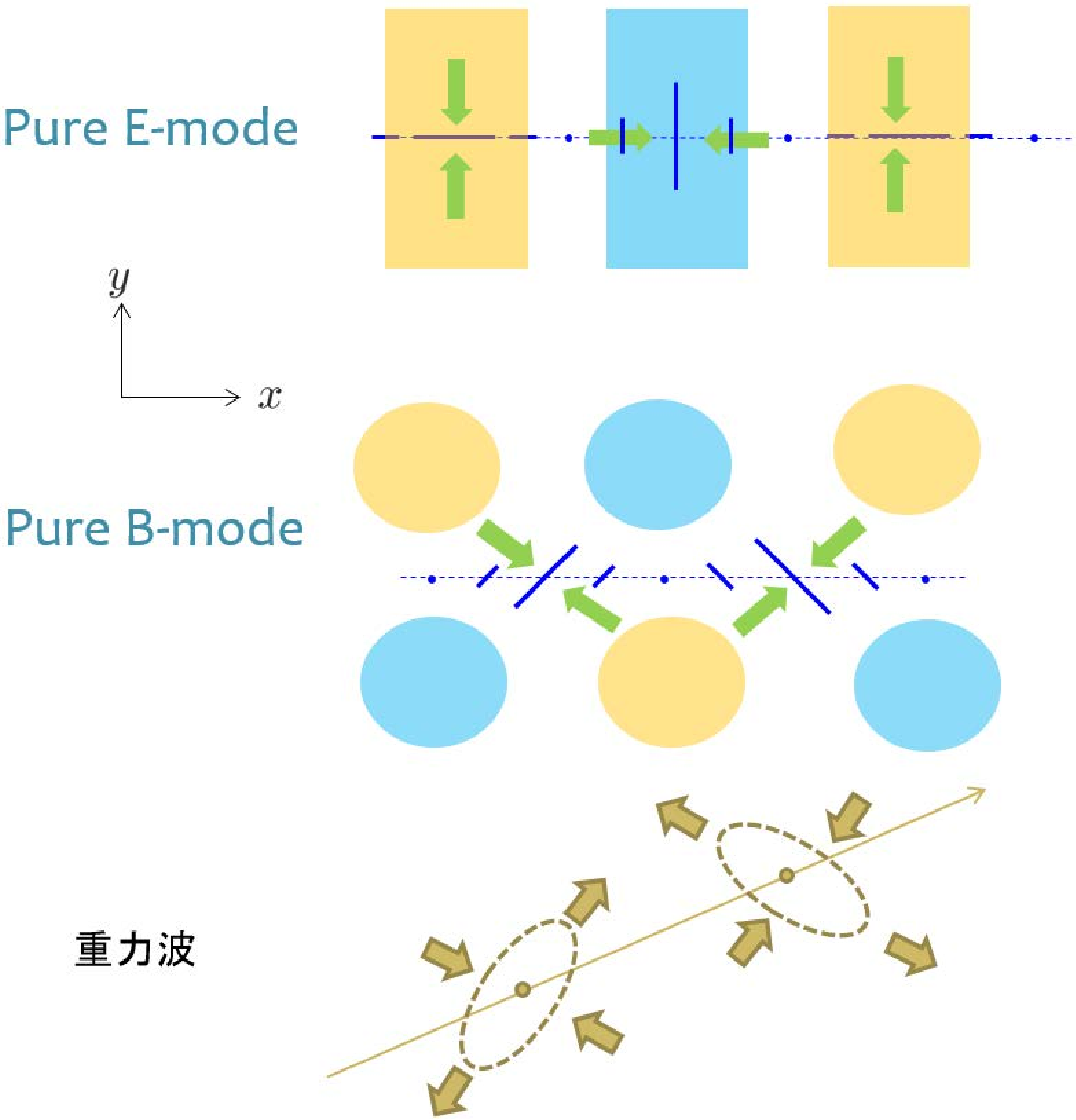


図 6.16: E-mode と B-mode

対応して，電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ は

$$\boldsymbol{E} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\sum_p \left(\boldsymbol{\epsilon}_p(\boldsymbol{k})a_p(\boldsymbol{k})e^{ik\cdot x} + \boldsymbol{\epsilon}_p^*(\boldsymbol{k})a_p(\boldsymbol{k})^\dagger e^{-ik\cdot x}\right), \tag{6.10.17a}$$

$$\boldsymbol{B} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega}\boldsymbol{k}\times\sum_p \left(\boldsymbol{\epsilon}_p(\boldsymbol{k})a_p(\boldsymbol{k})e^{ik\cdot x} + \boldsymbol{\epsilon}_p^*(\boldsymbol{k})a_p(\boldsymbol{k})^\dagger e^{-ik\cdot x}\right), \tag{6.10.17b}$$

と表される．ここで，ϵ_{pj} は

$$\epsilon_{pj} := e_{pj} - \frac{k_j}{\omega}e_{p0}, \tag{6.10.18}$$

で定義され，次の関係式を満たす:

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_p = 0, \quad \boldsymbol{\epsilon}_p^*\cdot\boldsymbol{\epsilon}_q = \delta_{pq}. \tag{6.10.19}$$

観測される電場成分　実際に観測される電場の偏光成分 $\mathscr{E}_p$ は，ウインドウ関数 $W(x)$ と検出器の偏光基底 $\boldsymbol{\epsilon}_p^o$ を用いて

$$\mathscr{E}_p = \int d^3x W(x)\boldsymbol{\epsilon}_p^o\cdot\boldsymbol{E}(t_0,\boldsymbol{x}). \tag{6.10.20}$$

と表される．これは，生成消滅演算子を用いて

$$\mathscr{E}_p = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\left[\sum_q a_q(\boldsymbol{k})(\boldsymbol{\epsilon}_p^o\cdot\boldsymbol{\epsilon}_q(\boldsymbol{k}))\hat{W}(\boldsymbol{k})e^{-i\omega t} + \mathrm{cc}\right], \tag{6.10.21}$$

と表される．ここで，

$$\hat{W}(\boldsymbol{k}) = \int d^3x e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}W(\boldsymbol{x}). \tag{6.10.22}$$

フラックス密度テンソルとフラックス偏光行列　電磁場の生成消滅演算子の相関がフラックス偏光行列 $\rho_{pq}(\boldsymbol{k})$ を用いて，次式で与えられるとする:

$$\langle a_p(\boldsymbol{k})a_q(\boldsymbol{k}')\rangle = 0, \quad \left\langle a_p(\boldsymbol{k})^\dagger a_q(\boldsymbol{k}')\right\rangle = 2(2\pi)^3\rho_{pq}(\boldsymbol{k})\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'). \tag{6.10.23}$$

観測される，電場の相関は

$$\langle : \mathscr{E}_p\mathscr{E}_q : \rangle = \epsilon_p^{ol}\epsilon_q^{oj}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}|\hat{W}(\boldsymbol{k})|^2\rho_{(lj)}(\boldsymbol{k}), \tag{6.10.24a}$$

$$\left\langle : \mathscr{E}_p\tilde{\mathscr{E}}_q : \right\rangle = \epsilon_p^{ol}\epsilon_q^{oj}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}|\hat{W}(\boldsymbol{k})|^2(-i)\rho_{[lj]}(\boldsymbol{k}), \tag{6.10.24b}$$

ここで

$$\rho_{ij}(\boldsymbol{k}) = \sum_{p,q}\epsilon_{pi}^*(\boldsymbol{k})\epsilon_{qj}(\boldsymbol{k})\rho_{pq}(\boldsymbol{k}), \tag{6.10.25}$$

また，$\tilde{\mathscr{E}}_p$ は $\mathscr{E}_p$ のモード展開で位相 $t\omega$ を $\pi/2$ 進めることにより得られる．

Stokes parameters

$$I = \sum_p \epsilon_p^{oj}\epsilon_p^{ol}\rho_{(jl)}, \quad Q = (\epsilon_1^{oj}\epsilon_1^{ol} - \epsilon_2^{oj}\epsilon_2^{ol})\rho_{(jl)}, \quad U = 2\epsilon_1^{oj}\epsilon_2^{ol}\rho_{(jl)}, \quad V = (-2i)\epsilon_1^{oj}\epsilon_2^{ol}\rho_{[jl]} \tag{6.10.26}$$

これより，フラックス密度テンソル $\rho_{ij}(\boldsymbol{k})$ は，輻射場の強度と偏光を偏光基底に依存せずに記述する方法を与える．

6.10.5　偏光に対する Boltzmann 方程式

曲がった時空での電磁場伝播（WKB) 近似　Maxwell 方程式

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0. \tag{6.10.27}$$

の WKB 近似解は

$$A_\mu(x) = a_\mu(x) e^{iS(x)}, \tag{6.10.28}$$

ここで， $k := \nabla S$, $a_\mu(x)$ および $S(x)$ は次式を満たす:

$$k := \nabla S \ \Rightarrow \ k \cdot k \approx 0 \ \Rightarrow \ \nabla_k k \approx 0, \tag{6.10.29}$$

$$\nabla_k a_\mu = -\frac{1}{2}\Box S a_\mu \approx 0. \tag{6.10.30}$$

4 次元フラックス密度テンソルに対する Boltzmann 方程式　4 次元的な偏光ベクトル $e^\mu(k,x)$

$$\nabla_k e^\mu(k,x) = 0, \quad k_\mu e^\mu(k,x) = 0, \tag{6.10.31}$$

を用いて，フラックス密度テンソル ρ_{jl} を 4 次元テンソル

$$\rho^{\mu\nu} = \sum_{p,q} e_p^\mu e_q^\nu \rho_{pq}. \tag{6.10.32}$$

に拡張すると，このテンソルは次の一般化された Boltzmann 方程式を満たす：

$$(k^\mu/k^0 \nabla_\mu + f^i \partial_{k^i})\rho^{\mu\nu}(x,\boldsymbol{k}) = C^{\mu\nu}(\rho), \tag{6.10.33}$$

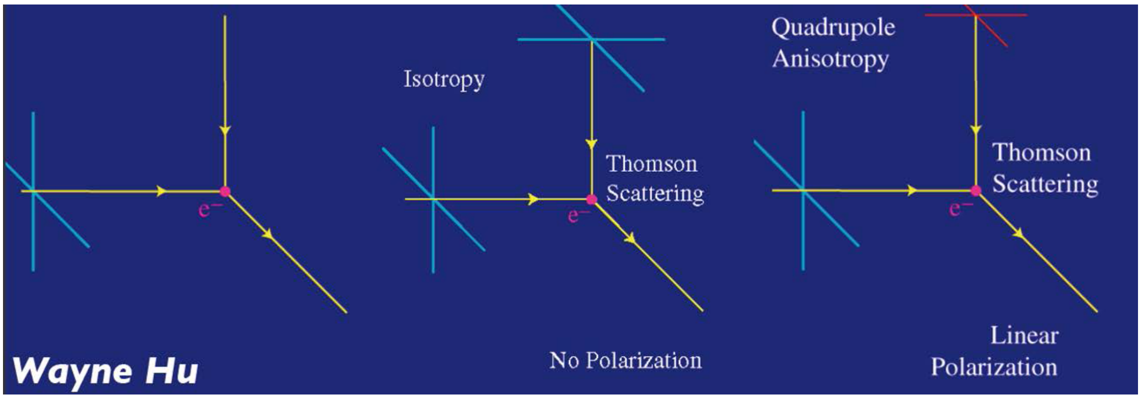


図 6.17: 電子との散乱による直線偏光の生成

6.10.6　最終散乱面での偏光

宇宙晴れ上がり以前の時期での標準偏光基底　$\boldsymbol{K}$ をゆらぎのモード関数 $(\propto \exp(i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x}))$ の波数ベクトルとして，

$$\boldsymbol{\epsilon}_p(k) = \frac{1}{a}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_p(k); \tag{6.10.34}$$

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1 = \frac{1}{\sqrt{1-(\hat{k}\cdot\hat{K})^2}}\left(\hat{K}-(\hat{k}\cdot\hat{K})\hat{k}\right), \tag{6.10.35}$$

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2 = \frac{1}{\sqrt{1-(\hat{k}\cdot\hat{K})^2}}\hat{K}\times\hat{k}, \tag{6.10.36}$$

ここで，

$$\hat{k} = \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|, \quad \hat{K} = \boldsymbol{K}/|\boldsymbol{K}|. \tag{6.10.37}$$

通常の球座標系を

$$\hat{K} = (0,0,1), \quad \hat{k} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta), \tag{6.10.38}$$

となるように取ると，偏光基底の成分は

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1 = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta), \tag{6.10.39a}$$

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2 = (-\sin\phi, \cos\phi, 0). \tag{6.10.39b}$$

ゆらぎのモード展開　輻射場の場の分布関数による記述がよい宇宙晴れ上がり以前の時期において，フラックス密度テンソルのゆらぎ $\delta\rho_{\mu\nu}$ を波数 $\boldsymbol{K}$ のフーリエモードに展開する：

$$\delta\rho_{\mu\nu}(t_{\rm ls}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}) = \int d^3K e^{i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x}}\rho^{(1)}_{\mu\nu}(\boldsymbol{K};\boldsymbol{k}). \tag{6.10.40}$$

上記のように偏光基底を選ぶと，各摂動モードについてすべてのベクトル摂動量は $\hat{K}$ に比例するので，

$$\rho_{pq}^{(1)} = \epsilon_1^{\mu *}\epsilon_2^{\nu}\rho_{\mu\nu}^{(1)}(\boldsymbol{K};\boldsymbol{k}) \tag{6.10.41}$$

で定義される $\rho_{pq}^{(1)}$ は ω と $\mu = \cos\theta = \hat{K}\cdot\hat{k}$ のみに依存する:

$$\rho_{pq}^{(1)} = \rho_{pq}^{(1)}(\boldsymbol{K};\omega,\mu). \tag{6.10.42}$$

これに注意して，Stokes パラメータに対応する偏光温度ゆらぎ $\Delta_X(X = I, Q, U, V)$ を次の様に定義する：

$$\Delta_I(\boldsymbol{K},q,\mu) = \left(\frac{\omega}{4}\frac{\partial\rho^{(0)}(\omega)}{\partial\omega}\right)^{-1}\left\{\rho_{11}^{(1)}(\boldsymbol{K};\omega,\mu)+\rho_{22}^{(1)}(\boldsymbol{K};\omega,\mu)\right\}, \tag{6.10.43a}$$

$$\Delta_Q(\boldsymbol{K},q,\mu) = \left(\frac{\omega}{4}\frac{\partial\rho^{(0)}(\omega)}{\partial\omega}\right)^{-1}\left\{\rho_{11}^{(1)}(\boldsymbol{K};\omega,\mu)-\rho_{22}^{(1)}(\boldsymbol{K};\omega,\mu)\right\}, \tag{6.10.43b}$$

$$\Delta_U(\boldsymbol{K},q,\mu) = \left(\frac{\omega}{4}\frac{\partial\rho^{(0)}(\omega)}{\partial\omega}\right)^{-1}\left\{\rho_{12}^{(1)}(\boldsymbol{K};\omega,\mu)+\rho_{21}^{(1)}(\boldsymbol{K};\omega,\mu)\right\}, \tag{6.10.43c}$$

$$\Delta_V(\boldsymbol{K},q,\mu) = -i\left(\frac{\omega}{4}\frac{\partial\rho^{(0)}(\omega)}{\partial\omega}\right)^{-1}\left\{\rho_{12}^{(1)}(\boldsymbol{K};\omega,\mu)-\rho_{21}^{(1)}(\boldsymbol{K};\omega,\mu)\right\}, \tag{6.10.43d}$$

ここで，$q = a\omega$.

スカラ型ゆらぎによる偏光　スカラ型ゆらぎに対しては，$\Delta_X = \Delta_X^s(t, K, q, \mu)$ の時間発展方程式は次式で与えられる [13, 51]：

$$\partial_t\Delta_I^s + \frac{iK\mu}{a}\Delta_I^s - 4\left(\partial_t\Phi + \frac{2iK\mu}{a}\Psi\right) = -\sigma_T\bar{n}_e\left[\Delta_I^s - \Delta_{I0}^s + 4v\mu - \frac{1}{2}P_2(\mu)\left(\Delta_{I2}^s + \Delta_{Q0}^s - \Delta_{Q2}^s\right)\right], \tag{6.10.44a}$$

$$\partial_t\Delta_Q^s + \frac{iK\mu}{a}\Delta_Q^s = -\sigma_T\bar{\mathrm{n}}_e\left[\Delta_Q^s + \frac{1}{2}(1-P_2(\mu))\left(\Delta_{I2}^s + \Delta_{Q0}^s - \Delta_{Q2}^s\right)\right], \tag{6.10.44b}$$

$$\partial_t\Delta_U^s + \frac{iK\mu}{a}\Delta_U^s = -\sigma_T\bar{n}_e\Delta_U^s, \tag{6.10.44c}$$

$$\partial_t\Delta_V^s + \frac{iK\mu}{a}\Delta_V^s = -\sigma_T\bar{n}_e\left(\Delta_V^s - \frac{3\mu}{2}\Delta_{V1}^s\right), \tag{6.10.44d}$$

ここで，v は速度ゆらぎ $\boldsymbol{v} = v\hat{K}$ の大きさ, また，$i = s, +, x$ と $X = I, Q, U, V$ に対し，

$$\Delta_{X\,l}^i(q) := \int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}P_l(\mu)\Delta_X^i(q,\mu). \tag{6.10.45}$$

この方程式より，スカラ型ゆらぎに対しては，$\Delta_U = \Delta_V = 0$ が成り立つ．すなわち，E モードのみを生成し，B モードは生成されない．

テンソル型ゆらぎ　テンソル型ゆらぎに対するゆらぎ偏光成分 Δ_X^t は，重力波の + 偏光と × 偏光に対応する decouple した 2 つのモード $\tilde{\Delta}_{X,\epsilon}^t(\epsilon = +, \times)$ の重ね合わせとなる：

$$\Delta_I^t = (1-\mu^2)\cos(2\phi)\tilde{\Delta}_{I,+}^t + (1-\mu^2)\sin(2\phi)\tilde{\Delta}_{I,\times}^t, \tag{6.10.46a}$$
$$\Delta_Q^t = (1+\mu^2)\cos(2\phi)\tilde{\Delta}_{Q,+}^t + (1+\mu^2)\sin(2\phi)\tilde{\Delta}_{Q,\times}^t, \tag{6.10.46b}$$
$$\Delta_U^t = -2\mu\sin(2\phi)\tilde{\Delta}_{U,+}^t + 2\mu\cos(2\phi)\tilde{\Delta}_{U,\times}^t, \tag{6.10.46c}$$

各成分 $\tilde{\Delta}_{X,\epsilon}^t$ の発展方程式は，

$$\partial_t\tilde{\Delta}_{I,\epsilon}^t + \frac{iK\mu}{a}\tilde{\Delta}_{I,\epsilon}^t - 2\partial_t h_\epsilon = -\sigma_T\bar{n}_e(\tilde{\Delta}_{I,\epsilon}^t + \tilde{\Lambda}_\epsilon), \tag{6.10.47a}$$
$$\partial_t\tilde{\Delta}_{Q,\epsilon}^t + \frac{iK\mu}{a}\tilde{\Delta}_{Q,\epsilon}^t = -\sigma_T\bar{n}_e(\tilde{\Delta}_{Q,\epsilon}^t - \tilde{\Lambda}_\epsilon), \tag{6.10.47b}$$
$$\tilde{\Delta}_{U,\epsilon}^t = \tilde{\Delta}_{Q,\epsilon}^t, \tag{6.10.47c}$$
$$\partial_t\tilde{\Delta}_{V,\epsilon}^t + \frac{iK\mu}{a}\tilde{\Delta}_{V,\epsilon}^t = -\sigma_T\bar{n}_e\tilde{\Delta}_{V,\epsilon}^t, \tag{6.10.47d}$$

ここで，

$$\tilde{\Lambda}_\epsilon := -\frac{3}{70}\tilde{\Delta}_{I4,\epsilon}^t + \frac{1}{7}\tilde{\Delta}_{I2,\epsilon}^t - \frac{1}{10}\tilde{\Delta}_{I0,\epsilon}^t + \frac{3}{70}\tilde{\Delta}_{Q4,\epsilon}^t + \frac{6}{7}\tilde{\Delta}_{Q2,\epsilon}^t + \frac{3}{5}\tilde{\Delta}_{Q0,\epsilon}^t. \tag{6.10.48}$$

これより，テンソル型ゆらぎは，一般に $\Delta_U \neq 0$．したがって B モードを生成する．

6.10.7　アクシオンによる B モード生成

Lagrangian　アクシオン場 ϕ が電磁場と CS 結合するとする：

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}*d\phi\wedge d\phi - \Lambda_a^2 U(\phi/f_a) - \frac{1}{2}*F\wedge F - \frac{g_{\phi\gamma}}{2}\phi F\wedge F \tag{6.10.49}$$

場の方程式

$$d*F + g_{\phi\gamma}d\phi\wedge F = 0 \;\Leftrightarrow\; \nabla^\nu F_{\nu\mu} - \frac{1}{2}g_{\phi\gamma}\nabla^\nu\phi\epsilon_{\nu\mu\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 0 \tag{6.10.50}$$

特に，$\phi = \phi(t)$ のとき，ゲージ条件

$$\boldsymbol{E} = \dot{\boldsymbol{A}}, \quad \boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}; \quad \nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0 \tag{6.10.51}$$

のもとで，空間的に平坦な FLRW モデルでの場の方程式は

$$(-\partial_\eta^2 + \triangle)\boldsymbol{A} + \frac{1}{2}g_{\phi\gamma}a\dot{\phi}\nabla\times\boldsymbol{A} = 0 \tag{6.10.52}$$

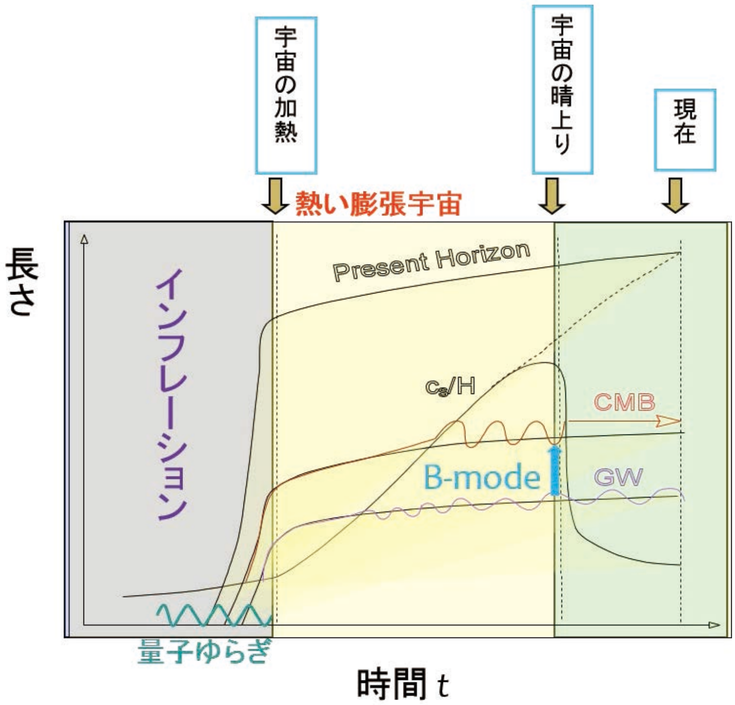


図 6.18: 宇宙晴れ上がり時における CMB B-mode 生成

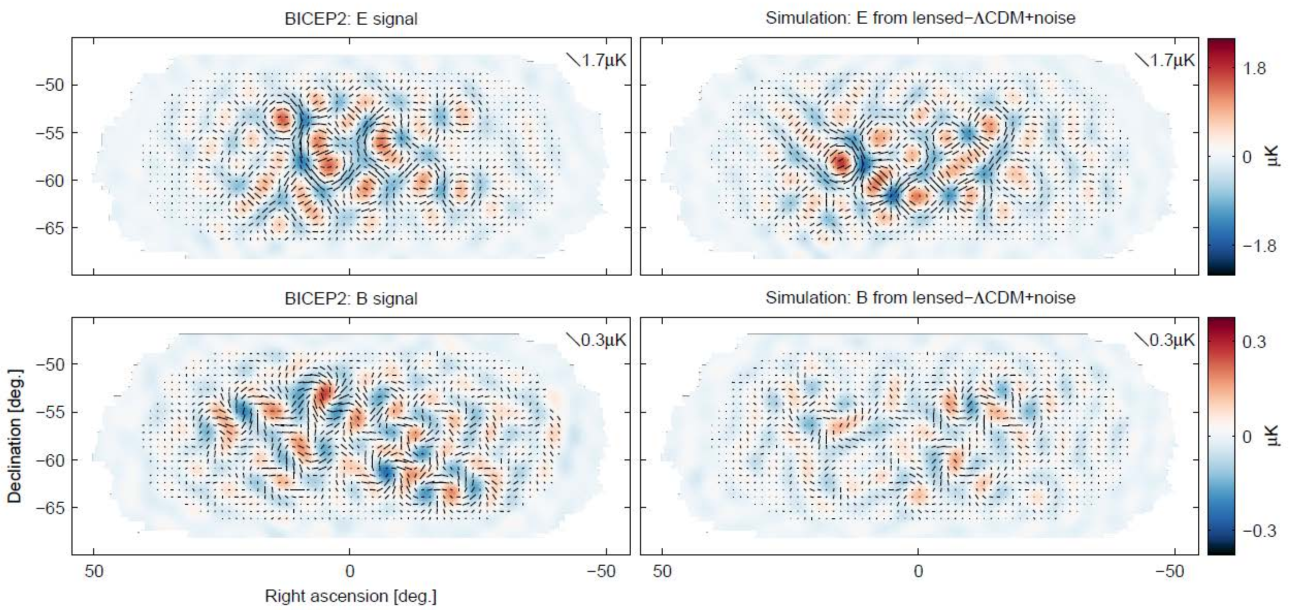


FIG. 3.— *Left:* BICEP2 apodized *E*-mode and *B*-mode maps filtered to $50 < \ell < 120$. *Right:* The equivalent maps for the first of the lensed-ΛCDM+noise simulations. The color scale displays the *E*-mode scalar and *B*-mode pseudoscalar patterns while the lines display the equivalent magnitude and orientation of linear polarization. Note that excess *B*-mode is detected over lensing+noise with high signal-to-noise ratio in the map ($s/n > 2$ per map mode at $\ell \approx 70$). (Also note that the *E*-mode and *B*-mode maps use different color/length scales.)

図 6.19: BICEP2 の観測した CMB B-mode パターン

平面波解　波が z 方向に伝搬しているとき，

$$\boldsymbol{A} = (a_x, a_y, 0)e^{ikz} \ \Rightarrow \ \left(\partial_\eta^2 + k^2 \pm \frac{1}{2} g_{\phi\gamma} ak\dot{\phi} f_a\right)(a_x \pm i a_y) = 0 \tag{6.10.53}$$

k が大きいときの WKB 解は

$$A_x \pm i A_y = \text{const} \cdot \exp\left\{-ik(\eta - z) \mp i\beta\right\} \tag{6.10.54}$$

ここで，

$$\beta = \frac{1}{4} g_{\phi\gamma} \int^t \dot{\phi} dt = \frac{1}{4} g_{\phi\gamma} \Delta\phi \tag{6.10.55}$$

B モード生成　これは，$\dot{\phi} \neq 0$ のとき，電磁波の偏光ベクトルが伝搬と共に回転することを示している．CMB の場合，最終散乱面から現在までの回転角は

$$\Delta\beta = \frac{1}{4} g_{\phi\gamma} \int_{t_{\rm ls}}^{t_0} \dot{\phi} dt = \frac{1}{4} g_{\phi\gamma} \left(\phi(t_{\rm ls}) - \phi(t_0)\right) \tag{6.10.56}$$

ϕ の振動周期 $2\pi/m$ が，最終散乱面の厚み $\delta t_{\rm ls} \sim 10$kpc に比べてが大きく，かつ宇宙年齢以下のとき，すなわち

$$10^{-33}\text{eV} < m < 10^{-27}\text{eV} \tag{6.10.57}$$

のとき，この回転は E モードから B モードを生成する．

その割合を決める $\Delta\beta$ の大きさは，axion decay constant f_a に依存しないことが特徴的である．

$$\Delta\beta \lesssim \frac{\pi}{4\sqrt{3}} f_a g_{\phi\gamma} \sim \frac{\alpha}{4\sqrt{3}} \sim 10^{-3} \tag{6.10.58}$$

上記の条件を満たすアクシオン場が N 種あると，一般に $\Delta\beta$ は $\sqrt{N}$ 倍となる．

観測よりの制限

- Current limit: $\Delta\beta < 2^\circ = 3.5 \times 10^{-2}$.
- Planck: accuracy $< 0.1^\circ$

7 *重力波による究極理論探査

§7.1 ブラックホールによる束縛状態と散乱

7.1.1 ブラックホール近傍での粒子の運動

Schwarzschild black hole

ブラックホールの周りでの粒子の運動は，粒子の質量がゼロか有限かで異なる．例えば，Schwarzschild BH の周りでの運動方程式は次の 2 式に帰着される．

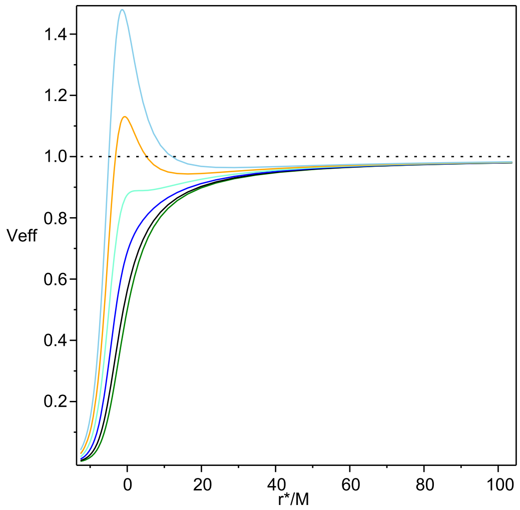
$$E = -u \cdot \xi = -u_t = f(r)\dot{t}, \quad L = u \cdot \eta = u_\phi = r^2\dot{\phi}, \tag{7.1.1a}$$

$$-\epsilon = -f\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{f} + r^2\dot{\phi}^2, \tag{7.1.1b}$$

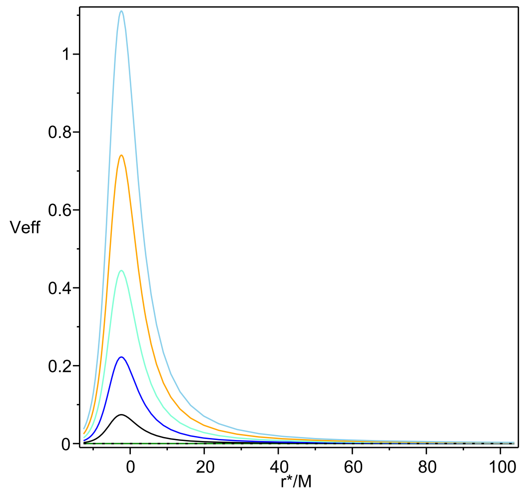
ここで，有質量の場合 $\epsilon = 1$，ゼロ質量の場合 $\epsilon = 0$ である．運動の振る舞いは，有効ポテンシャル $V(r)$ で決ま（図 7.1):

$$\dot{r}^2 + V(r) = E^2; \quad V(r) = \left(\epsilon + \frac{L^2}{r^2}\right) f(r). \tag{7.1.2}$$

これより，有質量の場合とことなり，ゼロ質量粒子は安定な束縛軌道がないことがわかる．5 次元以上では，有質量粒子も安定な束縛軌道を持たなくなる．



Massive particle



Massless particle

図 7.1: The effective potential for a particle with $L = 0, \cdots, 5$ around the 4D Schwarzschild BH

Kerr ブラックホール

赤道面上の軌道に限定すると，

$$E = -g_{tt}\dot{t} - g_{t\phi}\dot{\phi}, \quad L = g_{\phi t}\dot{t} + g_{\phi\phi}\dot{\phi}, \tag{7.1.3a}$$

$$-\epsilon = g_{tt}\dot{t}^2 + 2g_{t\phi}\dot{t}\dot{\phi} + g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 + \frac{r^2}{\Delta}\dot{r}^2, \tag{7.1.3b}$$

対応する有効ポテンシャルは

$$\dot{r}^2 + V(r) = E^2; \quad V(r) = \frac{\epsilon\Delta}{r^2} - \frac{a^2E^2 - L^2}{r^2} - \frac{2M(aE-L)^2}{r^3}, \tag{7.1.4}$$

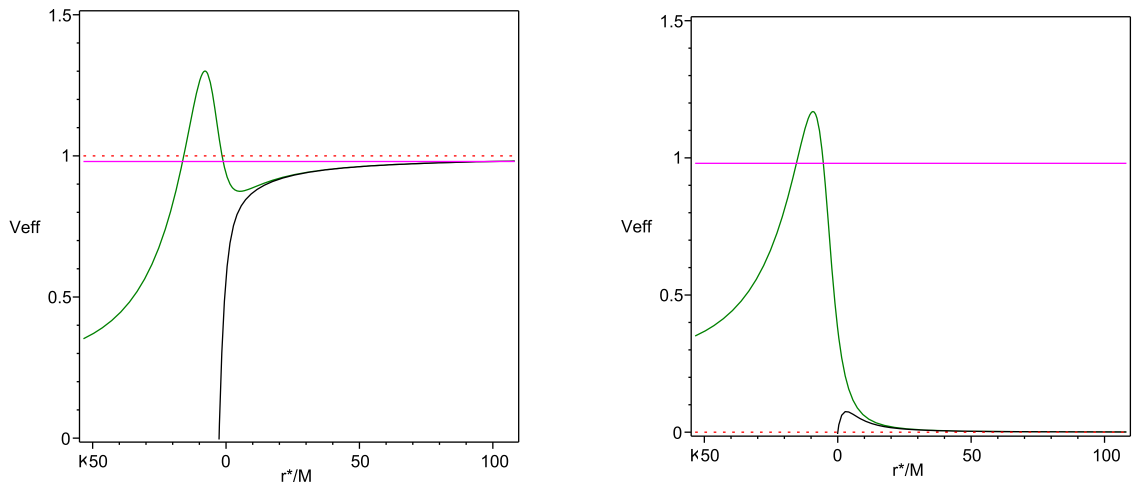
ここで， 図 7.2 に示したように，粒子の運動は，回転がブラックホールの回転と同じ向きか，反対向きかで大きく異なる．特に，同方向に回転する方が遠心力が弱くなる．

7.1.2　Kerr BH でのゼロ質量場

フラックス保存

波動性のため，BH 近傍での場の振る舞いは粒子と大きく異なる．例えば，軸対称定常 BH での Klein-Gordon 場を考える：

$$D^\mu D_\mu \phi = 0; \quad D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu, \tag{7.1.5}$$



Massive particle　　Massless particle

図 7.2: The effective potential for particles with $L = 3$ (corotating) and $L = -3$ (counter-rotating) around the Kerr BH with $a = 0.999$. r^* is the tortoise coordinate defined by $dr^* = (r^2 + a^2)dr/\Delta$.

ここで，A_μ は電磁ポテンシャル，q は粒子の電荷である．この方程式より，Klein-Gordon 内積

$$N(\phi_1, \phi_2) = -i \int_\Sigma \left(\bar\phi_1 D^\mu \phi_2 - (\bar D^\mu \bar\phi_1)\phi_2\right) d\Sigma_\mu \tag{7.1.6}$$

が DOC の Cauchy 面 Σ の取り方によらないことが示される．これより，図 7.3 の散乱問題において，無限遠からの入射フラックス $I_{\mathscr{I}^-}$, ブラックホールに落ち込むフラックス $I_{\mathscr{H}^+}$ および無限遠に放出されるフラックス $I_{\mathscr{I}^+}$ の間に次の関係が成り立つ：

$$I_{\mathscr{I}^-} = I_{\mathscr{I}^+} + I_{\mathscr{H}^+} \tag{7.1.7}$$

増幅反射

スカラ場は無限遠で

$$\phi \approx \int d\omega \sum_m \frac{1}{r}\left(A^- e^{-i\omega u_-} + A^+ e^{+i\omega u_+}\right) e^{im\varphi}; \quad u_\pm = t \mp \int dr/f, \tag{7.1.8}$$

と振る舞うので，無限遠でもフラックスは

$$I_{\mathscr{I}^\pm} = i \int du_\pm \int_{S^2} d\Omega_2 \lim_{r\to\infty} r^2 (\bar\phi \overleftrightarrow{\partial}_{u_\pm} \phi) = \sum_m \int d\omega\omega \langle |A^\pm_{\omega,m}|^2 \rangle_{S^2}, \tag{7.1.9}$$

ここで，$\langle Q \rangle_{S^2}$ は S^2 での Q の平均．

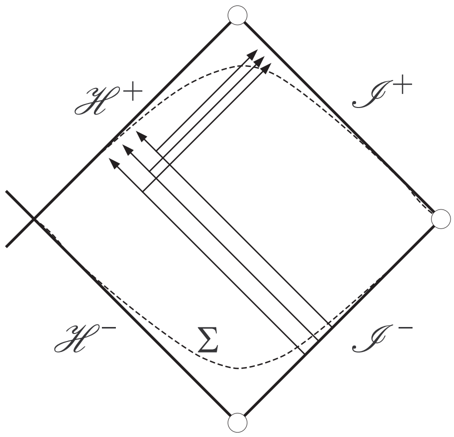


図 7.3: Scattering of an incidental wave by an AF black hole

次に，ホライズン $\mathscr{H}^+$ 近傍では

$$\begin{aligned}\phi &= \phi(r,\theta)e^{-i\omega t+im\varphi} = \phi(r,\theta)e^{-i\omega_* t+im\tilde{\varphi}} \\ &= \phi(r,\theta)e^{i\omega_* r^*}e^{-i\omega_* v_+ +im\tilde{\varphi}} \approx C(\theta)e^{-i\omega_* v_+ +im\tilde{\varphi}},\end{aligned} \tag{7.1.10}$$

ここで，$\omega_* := \omega - m\Omega_h$,　$\tilde{\varphi} = \varphi - \Omega_h t$,　$v_+ = t + \int dr(r^2+a^2)/\Delta$.

v_+ と $\tilde{\varphi}$ は $\mathscr{H}^+$ 近傍で正則な座標なので, C は θ の有界関数でないといけない. したがって，$\mathscr{H}^+$ を横切るフラックスは

$$\begin{aligned}I_{\mathscr{H}^+} &= i\int dv_+ \int_{S^2} d^{D-2}\sigma\left(\bar{\phi}(\overleftrightarrow{\partial}_{v_+} + 2iq\Phi)\phi\right)_{\mathscr{H}^+} \\ &= \sum_m \int d\omega(\omega_* - q\Phi_h)(r_h^2+a^2)\langle|C_{\omega,m}|^2\rangle_{S^2}.\end{aligned} \tag{7.1.11}$$

これらを (7.1.7) に代入して

$$\omega\langle|A^-_{\omega,m}|^2\rangle = \omega\langle|A^+_{\omega,m}|^2\rangle + (\omega - m\Omega_h - q\Phi_h)(r_h^2+a^2)\langle|C_{\omega,m}|^2\rangle. \tag{7.1.12}$$

透過率 T と反射率 R を

$$T := I_{\mathscr{H}^+}/I_{\mathscr{I}^-}, \quad R := I_{\mathscr{I}^+}/I_{\mathscr{I}^-}, \tag{7.1.13}$$

により定義すると，$R+T=1$ なので，次の条件が満たされるとき $R>1$ となる：

$$\omega_* - q\Phi_h = \omega - m\Omega_h - q\Phi_h < 0 \tag{7.1.14}$$

ここで，Φ_h はブラックホールの静電ポテンシャルである.

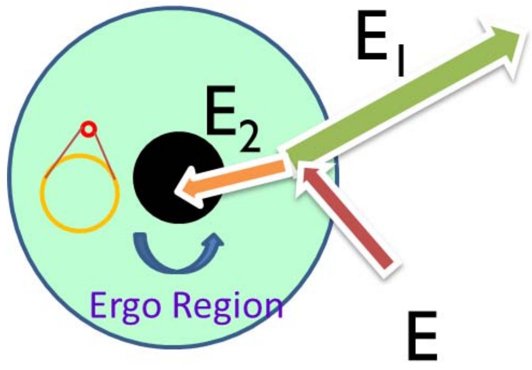


図 7.4: The Penrose process in the ergo region

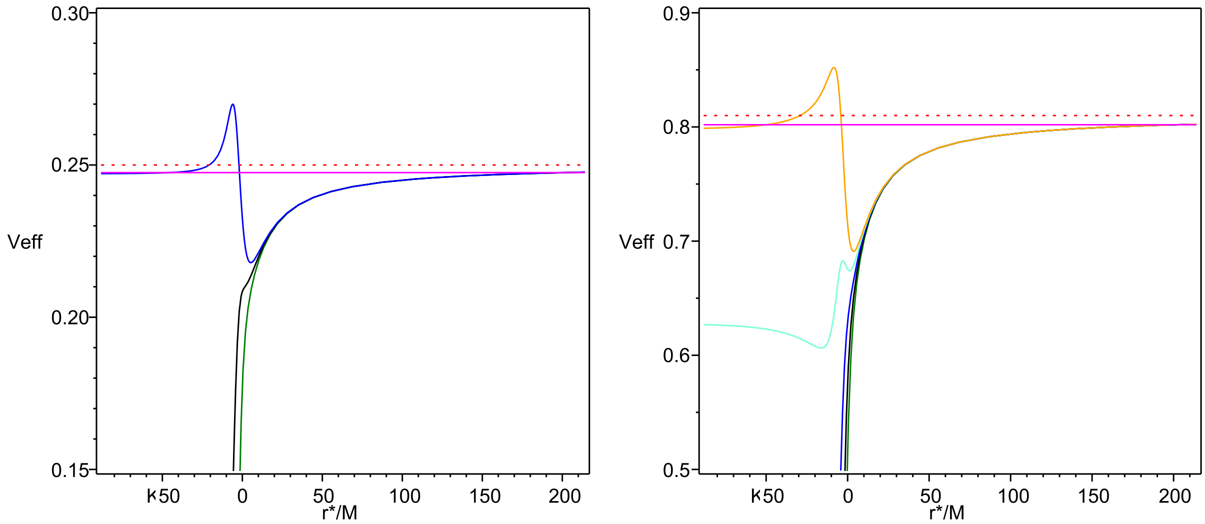
Penrose 過程

エルゴ領域では，Penrose 過程と呼ばれる興味深い現象が起きる [55]．エルゴ領域では， 時間推進 Killing ベクトル ξ が空間的となり，p^μ が時間的でも，無限遠に対するエネルギー $E = -p \cdot \xi$ はふとなり得る．このため，エルゴ領域に入射した粒子が 2 つ以上の粒子に分裂すると，その一部が入射粒子より大きなエネルギーをもって，エルゴ領域から出ることが可能となる．

増幅反射条件は

$$k \cdot p > 0, \quad p_\mu \phi = (-i\partial_\mu - qA_\mu)\phi, \tag{7.1.15}$$

と表されるので，増幅反射は Penrose 過程と同じ機構で起きる．ここで，$k = \partial_t + \Omega_h \partial_\varphi$ はホライズン $\mathscr{H}^+$ の光的接ベクトルである．この式は， p が過去向きの時間的ベクトルであることを示している．



$\mu M = 0.5,\, l = 1$　　　$\mu M = 0.9,\, l = 2$

図 7.5: The effective potential for a massive scalar field around the Kerr BH with $a = 0.999$.

§7.2 増幅反射不安定

増幅反射が引き起こすブラックホール不安定

- BH bomb: 球形の反射壁でブラックホールを取り囲む [67, 57, 18]
- 有限な質量をもつボーズ場 [27]
- adS-Kerr ブラックホール [19]

7.2.1 Kerr BH 時空での有質量スカラ場の方程式

- 有質量自由スカラ場の方程式：

$$(\Box - \mu^2)\Phi = 0 \tag{7.2.1}$$

- 変数分離

$$\Phi = R_{lm}(r)S_{lm}(\theta)\exp(-i\omega t + im\phi), \tag{7.2.2}$$

とおくと，

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS_{lm}}{d\theta}\right)+\left[a^2(\omega^2-\mu^2)\cos^2\theta-\frac{m^2}{\sin^2\theta}+\Lambda_{lm}\right]S_{lm}=0, \quad (7.2.3)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\left(\Delta\frac{dR_{lm}}{dr}\right)+\Bigg[&\quad \frac{\omega^2(r^2+a^2)^2-4Mam\omega r+m^2a^2}{\Delta} \\ &-(\omega^2a^2+\mu^2r^2+\Lambda_{lm})\Bigg]R_{lm}=0. \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

- 角度モード関数と分離定数 Λ_{lm}: $S_{lm}=S_l^m(\cos\theta;c)(c=a(\omega^2-\mu^2)^{1/2})$ と書けるので，Λ_{lm} は $l,m(l=0,1,2,\cdots)$ と c のみ依存し，$c\to 0$ の極限で

$$S_l^m\to P_l^m, \quad \Lambda_{lm}\to l(l+1). \quad (7.2.5)$$

- 動径モード関数の有効ポテンシャル：$u=(r^2+a^2)^{1/2}R_{lm}$ とおくと，

$$\frac{d^2u}{dr^{*2}}+\left[\omega^2-V(r,\omega)\right]u=0, \quad (7.2.6)$$

ここで，有効ポテンシャル V は，

$$\begin{aligned} V &= \frac{\mu^2\Delta}{r^2+a^2}+\frac{4am\omega Mr-a^2m^2+\Delta[\Lambda_{lm}+(\omega^2-\mu^2)a^2]}{(r^2+a^2)^2} \\ &\quad +\frac{\Delta(2Mr^3+a^2r^2-4Ma^2r+a^4)}{(r^2+a^2)^4}. \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

V の漸近挙動は

$$V\to\begin{cases}\mu^2 & ;r=\infty, \\ \omega^2-\omega_*^2 & ;r=r_+\end{cases}. \quad (7.2.8)$$

(Fig. 7.5).

- 境界条件：

$$\text{At infinity} \ : \ R_{lm}\sim\frac{B_{lm}}{r}e^{+ikr^*}, \quad k=(\omega^2-\mu^2)^{1/2}. \quad (7.2.9a)$$

$$\text{At horizon} \ : \ R_{lm}\sim C_{lm}e^{-i\omega_*v_++im\tilde\phi}\sim C_{lm}e^{-i\omega_*r^*}e^{-i\omega t+im\phi}. \quad (7.2.9b)$$

7.2.2　増大率

単位系 $c=\hbar=G=1$.

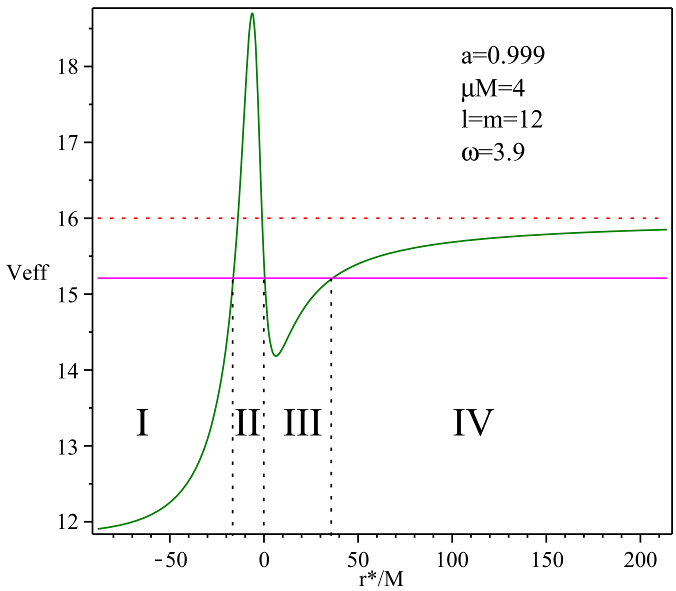


図 7.6: Division into four regions for the WKB approximation

1) 質量が大きい場合:$\mu M \gg 1$（**WKB 近似**）

Reference

- T.J.M. Zouros and D.M. Eardley(1979)[68]

WKB 近似解　準束縛状態 $\omega^2 < \mu^2$ を考える．ポテンシャル障壁の影響が最小で，不安定性が最大となる $\omega_R \simeq \mu$ に限定し，解を 4 つの領域に分けて考える：I($r < r_1$), II($r_1 < r < r_2$), III($r_2 < r < r_3$), IV($r > r_3$) (Fig.7.6)

- 振動的領域 I, III: $\omega^2 > V(r)$ なので，　動径モードに対する WKB 解は，

$$R_{lm} = (r^2 + a^2)^{-1/2} u, \tag{7.2.10a}$$
$$u = k(r^*)^{-1/2} \left\{ A_+ e^{i\Theta(r)} + A_- e^{-i\Theta(r)} \right\}, \tag{7.2.10b}$$

ここで，$A_\pm$ は定数で，

$$\Theta(r) = \int_{r_0^*}^{r^*} k(u) du, \quad k(r^*) = (\omega^2 - V(r))^{1/2}. \tag{7.2.11}$$

ただし，　r_0^* は反射点 $\omega^2 = V(r)$ での r^* 座標の値．

- トンネル領域 II, IV: $\omega^2 < V(r)$ なので，　動径モードに対する WKB 解は，

$$u = \kappa(r^*)^{-1/2} \left\{ B_- e^{-I(r)} + B_+ e^{I(r)} \right\}, \tag{7.2.12}$$

ここで， $B_\pm$ は定数で

$$I(r) = \int_{r_0^*}^{r^*} \kappa(u)du, \quad \kappa(r^*) = (V(r) - \omega^2)^{1/2}. \tag{7.2.13}$$

- Airy 関数法：接続点 (inflection pt) 近傍でのポテンシャルを線形近似すると，振動領域では

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{|\Theta|}{k}}\left\{C_+ J_{1/3}(|\Theta|) + C_- J_{-1/3}(|\Theta|)\right\} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\left[\left(C_+ e^{-\frac{5\pi i}{12}} + C_- e^{-\frac{\pi i}{12}}\right) e^{i|\Theta|} + \left(C_+ e^{\frac{5\pi i}{12}} + C_- e^{\frac{\pi i}{12}}\right) e^{-i|\Theta|}\right] \end{aligned} \tag{7.2.14}$$

トンネル領域では

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{|I|}{\kappa}}\left\{-C_+ I_{1/3}(|I|) + C_- I_{-1/3}(|I|)\right\} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa}}\left[(C_- - C_+)\, e^{|I|} + \left(C_- e^{-\frac{\pi i}{6}} - C_+ e^{-\frac{5\pi i}{6}}\right) e^{-|I|}\right]. \end{aligned} \tag{7.2.15}$$

.

- 解の接続：領域 I で infalling 条件 $A_+^I = 0$ を課し，得られた解を Airy 関数法で接続すると

$$A_-^{\rm I} = A_0, \quad A_+^{\rm I} = 0, \tag{7.2.16a}$$
$$B_+^{\rm II} = e^{-\pi i/4} A_0, \quad B_-^{\rm II} = 0, \tag{7.2.16b}$$
$$A_+^{\rm III} = -iA_-^{\rm III} = -ie^{I_{\rm II}} A_0, \tag{7.2.16c}$$
$$B_-^{\rm IV} = e^{-3\pi i/4} e^{I_{\rm II} + i\Theta_{\rm III}} A_0, \tag{7.2.16d}$$
$$(e^{\pi i/3} - 1) B_+^{\rm IV} = 2e^{5\pi i/12} e^{I_{\rm II}} \cos\Theta_{\rm III}, \tag{7.2.16e}$$

ここで，

$$I_{\rm II} = \int_{r_1^*}^{r_2^*} \kappa(r) dr^*, \quad \Theta_{\rm III} = \int_{r_2^*}^{r_3^*} k(r) dr^*. \tag{7.2.17}$$

- 固有値方程式：　束縛状態を考えているので， $B_+^{\rm IV}$．これは，振動数に対する Bohr-Sommerfeld の量子化条件を与える．

$$\omega = \omega_n : \quad \int_{r_2^*}^{r_3^*} k(r) dr^* = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad n = 0, 1, \cdots. \tag{7.2.18}$$

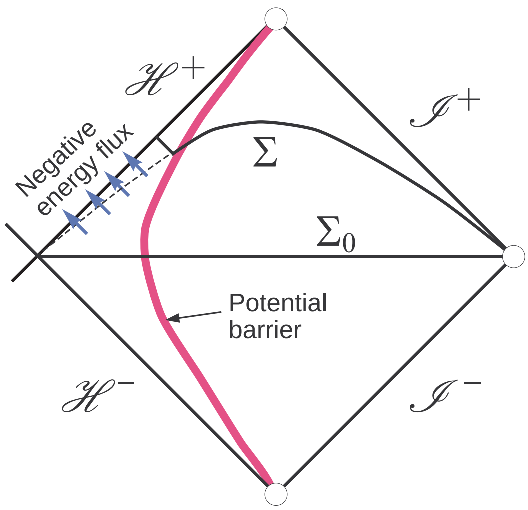


図 7.7: Flux integral to estimate the growth rate

不安定性増大率の評価　図 7.7 のような超曲面を考え，フラックス保存から，その上の KG ノルムの時間推進による変化率を求めると

$$-\omega_*(r_h^2 + a^2)|\tilde{R}|^2 = 2\omega_I N_{\Sigma'}(\Phi, \Phi). \tag{7.2.19}$$

これより, ω_I は次のように評価される：

$$\omega_I = \frac{1}{2}\gamma e^{-2I_{\rm II}}, \tag{7.2.20}$$

$$\gamma^{-1} \simeq \int_{r_2^*}^{r_3^*} \frac{dr^*}{k(r)} 4\cos^2\left(\Theta - \frac{\pi}{4}\right)\left\{\omega_n\left(1 - \frac{a^2\zeta\Delta}{(r^2+a^2)^2}\right) - \frac{2maMr}{(r^2+a^2)^2}\right\} \tag{7.2.21}$$

Zouros と Eardley は，パラメータ $a/M, \mu M, l, m, \omega$ の広い領域で ω_I をこの式を用いて数値的に計算し，成長率が次の時に最大となることをすることを見いだした:

i) l が最小,

ii) m が最大, i.e., $m = l$,

iii) a/M が最大, i.e., $a/M \simeq 1$,

iv) ω_R が最大, i.e., $\omega_R \sim 0.98\mu < m\Omega_h$.

得られた成長率の最大値は, 各 μM の値に対して,

$$M\omega_I \sim 10^{-7}\exp\left(-1.84\mu M\right), \tag{7.2.22}$$

小さな因子 10^{-7} は (7.2.20) の γ に起因する.

2) 小質量の場合：$\mu M \ll 1$(MAE 法)

- References
  - Detweiler S (1980)[30](Cf. Rosa J (2010)[58])

- $r \gg M$ での近似解

  この領域では，$R = R_{lm}(r)$ の方程式 (7.2.4) は，水素原子に対する Schrödinger 方程式と同じ形の方程式

$$\frac{d^2(rR)}{dr^2} + \left(\omega^2 - \mu^2 + \frac{2M\mu^2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)(rR) \approx 0, \tag{7.2.23}$$

  で近似できる．したがって，$\sigma^2 = \mu^2 - \omega^2 > 0$ のとき，準束縛状態の系列

$$R = \frac{A}{x} W_{\nu,l+1/2}(x) \sim e^{-x/2} x^\nu \quad (x = 2\sigma r \gg 1), \tag{7.2.24}$$

$$\nu = M\mu^2/\sigma = l + n + 1 + \delta\nu, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{7.2.25}$$

  を解として持つ．ここで，$\delta\nu$ は水素原子の厳密な束縛状態からのずれを表す複素数である．この解は，領域 $\sigma M \ll x \ll 1$ では次のように振る舞う：

$$R \approx A(-1)^n \frac{(2l+1+n)!}{(2l+1)!} x^l + A(-1)^{n+1} n!(2l)!\delta\nu x^{-l-1}. \tag{7.2.26}$$

- $\mu r \ll l$ での近似解

  この領域では，微分方程式 (7.2.4) は

$$z(z+1)\frac{d}{dz}\left[z(z+1)\frac{dR}{dz}\right] + \left\{P^2 - l(l+1)z(z+1)\right\} R = 0, \tag{7.2.27}$$

  と近似できる．ここで，

$$z = \frac{r - r_+}{r_+ - r_-}, \quad P = -\frac{2Mr_+}{r_+ - r_-}\omega_* \tag{7.2.28}$$

  この方程式は厳密に解けて，ホライズンに落ち込む解は

$$R = C\left(\frac{z}{z+1}\right)^{iP} F(-l, l+1, 1+2iP; -z). \tag{7.2.29}$$

  この解は，領域 $1 \ll z \ll l/(\omega_R M)$ では次のように近似される：

$$R \approx C\frac{(2l)!\Gamma(1+2iP)}{l!\Gamma(l+1+2iP)} z^l + C(-1)^{l+1}\frac{l!\Gamma(1+2iP)}{(2l+1)!\Gamma(-l+2iP)} z^{-l-1}. \tag{7.2.30}$$

- 成長率

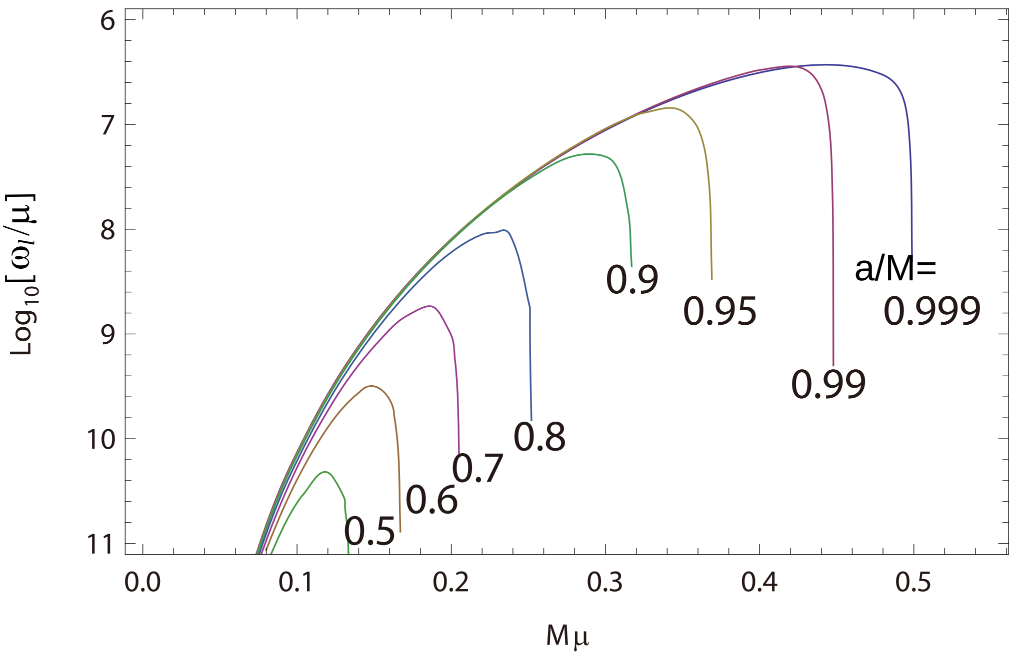


図 7.8: The instability growth rate for $l = m = 1$.

これら 2 つの領域での漸近近似解が共通領域で一致することを要請すると，

$$\delta\nu = 2iP\left[2\sigma(r_+ - r_-)\right]^{2l+1}\frac{(2l+1+n)!}{n!}\left[\frac{l!}{(2l)!(2l+1)!}\right]^2\prod_{j=1}^{l}(j^2+4P^2). \tag{7.2.31}$$

これより，成長率が

$$\omega_R \simeq \mu\left\{1-\left(\frac{\mu M}{l+1+n}\right)^2\right\}^{1/2} \approx \mu \tag{7.2.32a}$$

$$\omega_I = 2\gamma\mu r_+(m\Omega_h - \mu)(\mu M)^{4l+4}, \tag{7.2.32b}$$

と決まる．ここで，

$$\gamma = \frac{2^{4l+2}(2l+1+n)!}{n!(l+1+n)^{2l+4}}\left(\frac{l!}{(2l)!(2l+1)!}\right)^2\prod_{j=1}^{l}\left[j^2\left(1-a^2/M^2\right)+4r_+^2(\mu - m\Omega_h)^2\right]. \tag{7.2.33}$$

この成長率は， $l = m = 1$ かつ $a/M \sim 1$ で次の最大値を取る:

$$\omega_I \approx \frac{a}{24M^2}(\mu M)^9. \tag{7.2.34}$$

3) 数値計算による評価

- References
  - Cardoso V, Yoshida (2005):最初の計算 [20]
  - Leaver E (1985):Leaver 法 [54]
  - Dolan S:[32].
  - 高次元ブラックホールの QNM [20, 50]
  - 高次元 adS 単純回転ブラックホールの SR 不安定 [48, 47].
- 動径モード関数 R の級数展開

$$R(r) = \frac{x^{-i\sigma}}{(r-r_-)^{\chi-1}} e^{-\sigma r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad x = \frac{r-r_+}{r-r_-}, \tag{7.2.35}$$

ここで

$$q = \frac{2r_+(\omega - m\Omega_h)}{r_+ - r_-}, \quad \sigma = (\mu^2 - \omega^2)^{1/2}, \quad \chi = -(\mu^2 - 2\omega^2)/\sigma. \tag{7.2.36}$$

- 展開係数の漸化式
これを動径方程式 (7.2.4) に代入すると，展開係数 a_n に対する 3 項漸化式

$$\alpha_n a_{n+1} + \beta_n a_n + \gamma_n a_{n-1} = 0. \tag{7.2.37}$$

を得る．ここで，

$$\alpha_n = (n+1)(n+c_0), \quad \beta_n = -2n^2 + (c_1+2)n + c_3, \quad \gamma_n = n^2 + (c_2-3)n + c_4,$$

ただし， $c_1, \cdots, c_4$ は ω, σ, m と Λ_{lm} で決まる定数.

- 連分数解
$n \to \infty$ で a_{n+1}/a_n がゼロに収束するとき，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} + \alpha_{n+1}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}} = -\frac{\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1}-} \frac{\alpha_{n+1}\gamma_{n+2}}{\beta_{n+2}-} \frac{\alpha_{n+2}\gamma_{n+3}}{\beta_{n+3}-} \cdots. \tag{7.2.38}$$

$a_1/a_0 = -\beta_0/\alpha_0$ なので，この方程式で $n=0$ とおくと，$\omega = \omega_R + i\omega_I$ に対する固有値方程式が得られる:

$$\beta_0 - \frac{\alpha_0\gamma_1}{\beta_1-} \frac{\alpha_1\gamma_2}{\beta_2-} \frac{\alpha_2\gamma_3}{\beta_3-} \cdots = 0. \tag{7.2.39}$$

この連分数は収束が早く，適当な n で打ち切ることにより，良い精度で固有値 ω^2 を求めることができる．図 7.8 は，$l=m=1$ に対する解の例である．

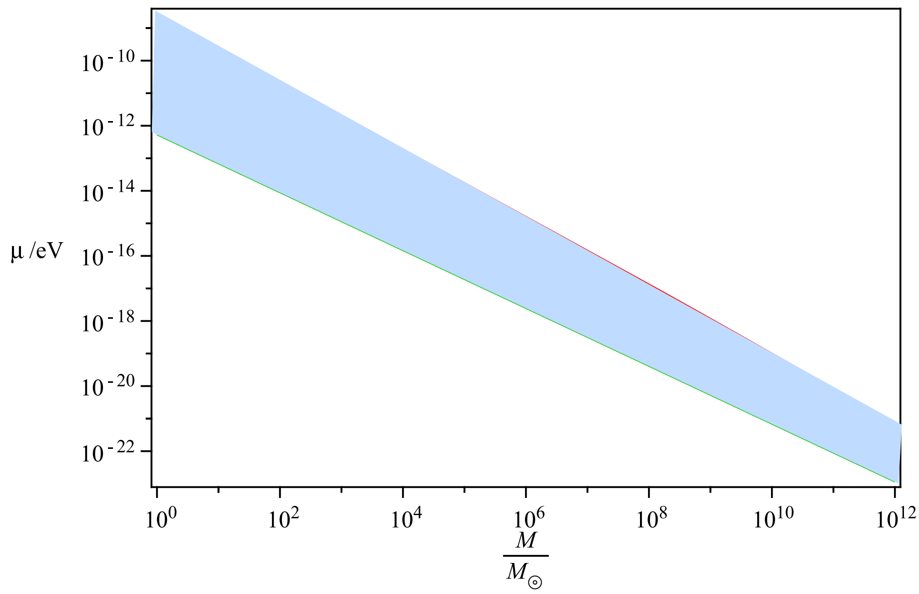


図 7.9: 不安定性成長時間が宇宙年齢以下となる $\mu - M$ の帯状領域

§7.3 *BH-axion 系の時間発展

References

- the axiverse paper[4]
- Arvanitaki A, Dubovsky A[5]

7.3.1 BH spin down (no bosenova case)

増幅反射不安定の成長率（まとめ）

$$\frac{\tau}{GM} \approx \begin{cases} 10^7 e^{1.84\alpha_g} & ;\alpha_g \gg 1,\ a=1 \\ 24\left(\frac{a}{M}\right)^{-1}(\alpha_g)^{-9} & ;\alpha_g \ll 1, \end{cases} \tag{7.3.1}$$

ここで

$$\alpha_g := GM\mu = \frac{\mu}{1.34\cdot 10^{-10}\mathrm{eV}}\cdot\frac{M}{M_\odot}. \tag{7.3.2}$$

成長率は $\alpha_g \sim 1$ で最大：

$$\tau_{\rm sr} \approx 0.2\cdot 10^7 GM;\quad \alpha_g \simeq 0.44,\ a/M \simeq 0.999. \tag{7.3.3}$$

不安定性の起きる質量

- スカラ場の質量が 10^{-10}eV のとき，太陽質量 $M \sim M_\odot$ のブラックホールで不安定が実際に起きる．
- この質量は，QCD アクシオンの場合 $f_a \sim 10^{16}$GeV に対応．
- ただし，現在の存在量が観測と整合的となるには，アクシオン場の初期振幅を $10^{-3}f_a$ 程度に小さく調整しないといけない．

不安定性の時間発展

- 不安定性の成長は，BH の角運動の減少をもたらす．
- このため，ある程度不安定性が成長すると，成長時間が宇宙年齢を超え，安定化する．

不安定帯

- 不安定性の成長率は，パラメーター $\alpha_g = \mu M$ に非常に敏感．
- このため，成長率が宇宙年齢以下となるパラメータ領域は，$\mu - M$ 平面で狭い帯状の領域となる．(図 7.9)
- 例えば，アクシオンの質量が $\mu \approx 10^{-14}$eV のとき，質量が $10^2 M_\odot - 10^5 M_\odot$ の範囲にある BH のみが不安定性を引き起こす．このため，この帯域の BH の角運動量は，他の質量の BH より小さい角運動量を持つことになる．

7.3.2　G-atom

- 不安定性が大きくなる束縛状態 $\omega \approx \mu$ では，μM が小さい場合のエネルギーレベルは (7.2.32a) より，

$$\omega_R^2 \simeq \mu^2 \left(1 - \frac{\alpha_g^2}{2n^2}\right), \quad \omega_R < m\Omega_h, \tag{7.3.4}$$

  ここで，$n = n' + l + 1$ $(n' = 0, 1, 2 \cdots)$.

- 最も不安定となるモード $n' \sim 0$ に対し, n は

$$n \simeq l \sim \frac{\mu}{\Omega_h} = \alpha_g \frac{2r_h}{a}. \tag{7.3.5}$$

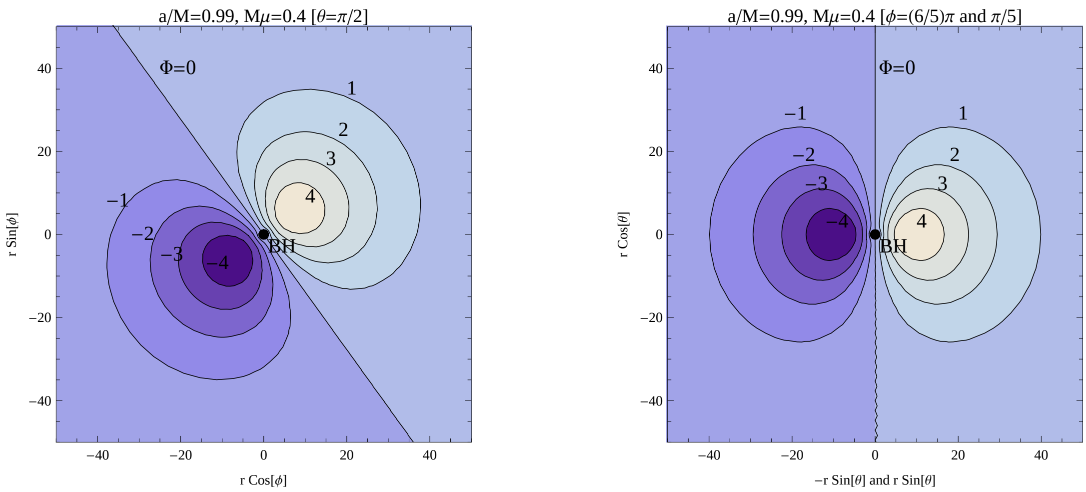


図 7.10: 最も不安定なモード ($l = m = 1$) の波動関数の分布．左は赤道面，右は z 軸を含む面での振幅．

- したがって，モード関数のピークはエルゴ領域の外に有り，ホライズンから遠い：

$$\frac{r}{R_g} \sim \frac{n^2}{\alpha_g^2} \sim 4\left(\frac{r_h}{a}\right)^2 \;\Rightarrow\; \mu r \sim 4\alpha_g\left(\frac{r_h}{a}\right)^2 \sim 1 \tag{7.3.6}$$

これは，$a \sim M$ の場合，最も不安定な束縛状態は完全に量子的な状態となることを意味している．従って，増幅反射不安定は，中心のブラックホールをアクシオンの量子雲が取り囲む重力原子 (G-atom）を生み出す.（図 7.10）

7.3.3　*ボーズノバ

準解析的な解析

- 自己相互作用

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - 2\mu^2 f_a^2 \sin^2\left(\frac{\phi}{2f_a}\right)\right]. \tag{7.3.7}$$

- 非相対論的近似

$$\phi \simeq \frac{1}{\sqrt{2\mu}}\left(e^{-i\mu t}\psi + e^{i\mu t}\psi^*\right). \tag{7.3.8}$$

とおくと，$|\phi|/f_a \ll 1$ のとき，

$$S_{\rm NR} = \int d^4x\left[i\psi^*\partial_t\psi - \frac{1}{2\mu}\partial_i\psi\partial_i\psi^* - \mu\Phi_g\psi^*\psi + \frac{1}{16f_a^2}(\psi^*\psi)^2\right]. \tag{7.3.9}$$

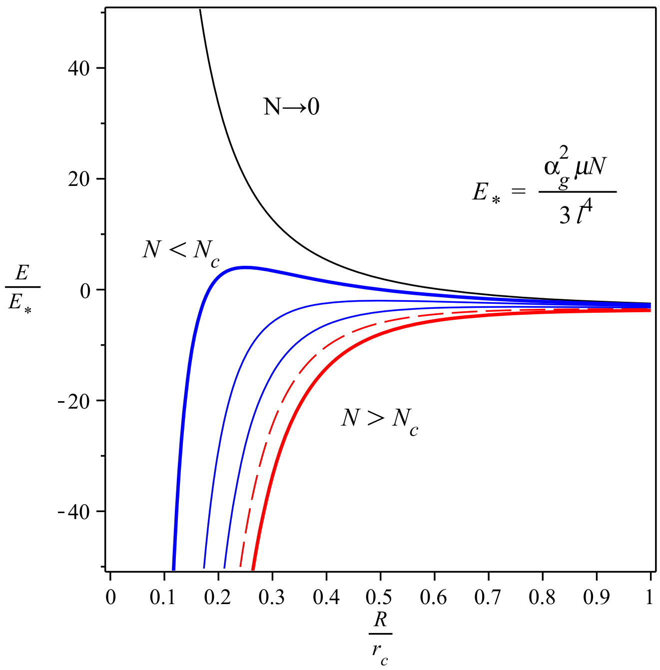


図 7.11: アクシオン雲のエネルギーのサイズ R 依存性

- 最後の項が，小振幅の時の主要な非線形効果を現す．この相互作用は引力なので，アクシオン雲が十分成長し高密となると，ボーズ・アインシュタイン凝縮の場合と同様，ボーズノバといわれる爆縮現象が起きることが予想される [5].

- アクシオン雲の全エネルギー

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{V}{2\mu}\left\langle |\nabla\psi|^2 \right\rangle + \mu\Phi_g V\left\langle |\psi|^2 \right\rangle - \frac{V}{16 f_a^2}\left\langle |\psi|^4 \right\rangle \\
&\approx \frac{N}{2\mu}\left(\frac{l^2}{r^2} + \frac{1}{R^2}\right) - \frac{\alpha_g N}{r} - \frac{N^2}{16 f_a^2 R^3},
\end{aligned}
$$

ここで，r は雲の中心と BH 中心の距離, R は雲の広がりのサイズ．E が極小となる r を求めると, アクシオン雲に対する Kepler 半径が得られる：

$$
r_c \approx \frac{l^2}{\alpha_g \mu} \ \Rightarrow \ E \approx \frac{N}{2\mu R^2} - \frac{N^2}{16 f_a^2 R^3} - \frac{\alpha_g N}{2 r_c}. \tag{7.3.10}
$$

- ボーズノバ

このエネルギーは,

$$
R = R_m \equiv \frac{3\mu N}{16 f_a^2} \tag{7.3.11}
$$

で極大となる．このサイズが $R_m < r_c$ を満たすときは，, 雲のサイズは $R \sim r \sim r_c$ で安定化する．しかし，図 7.11 に示したように，$r_c < R_m$ となると，$R < r_c$ でエネルギー E は R の単調増加関数となり，最初 $R \sim r$ であった雲は不安定となり急速につぶれる．これは，雲の質量が臨界値

$$r_c < R_m \;\Leftrightarrow\; \mu N > \frac{16 l^2 f_a^2}{3\alpha_g \mu} \;\Leftrightarrow\; \epsilon = \frac{\mu N}{M} > \frac{l^2 f_a^2}{\alpha_g^2 m_{\rm pl}^2} \approx 10^{-4}. \qquad (7.3.12)$$

を超えると起きる．

数値シミュレーション

概要　実際のアクシオン相互作用は 4 次ではなく，$\cos(\phi/f_a)$ に比例し，$|\phi|/f_a$ が 1 のオーダーとなると飽和する．したがって，実際にボーズノバが起きるかどうか，また，その様子を知るには周知シミュレーションが必要となる．

References

- Yoshino H, Kodama H (2012) [66]

モデルとパラメーター　線形理論における SR 不安定解のうち，$l = m = 1, n = 1$ となるモードに以下の振幅を与えて初期値とする．

Simulations	Initial condition	$E/[(f_a/M_p)^2 M]$	nonlinearlity
(A)	KG bound state, $\varphi^{(A)}_{\rm peak}(0) = 0.60$	1430	weak
(B)	KG bound state, $\varphi^{(B)}_{\rm peak}(0) = 0.70$	1862	strong

結果

- $\phi \sim f_a \;\Leftrightarrow\; \epsilon \sim 10^{-4}$ となると，実際にボーズノバに対応するアクシオン雲の崩壊が起きる．(図 7.12)
- 臨界値より十分小さい振幅の線形解を初期値とすると，雲の位置および広がりの長周期振動が起きるが，崩壊は起こらない．この振動は，SR 不安定成長率を増大させる傾向をもつ．
- アクシオン雲の崩壊が起きると，SR 不安定成長はとまり，BH に正のエネルギーが落下する．ただし，BH の角運動量は減少し続ける．これは，$l = 1, m = -1$ のモードが生成されることを意味する．
- アクシオン雲の崩壊に伴い，外に向かってエネルギーが放出される．

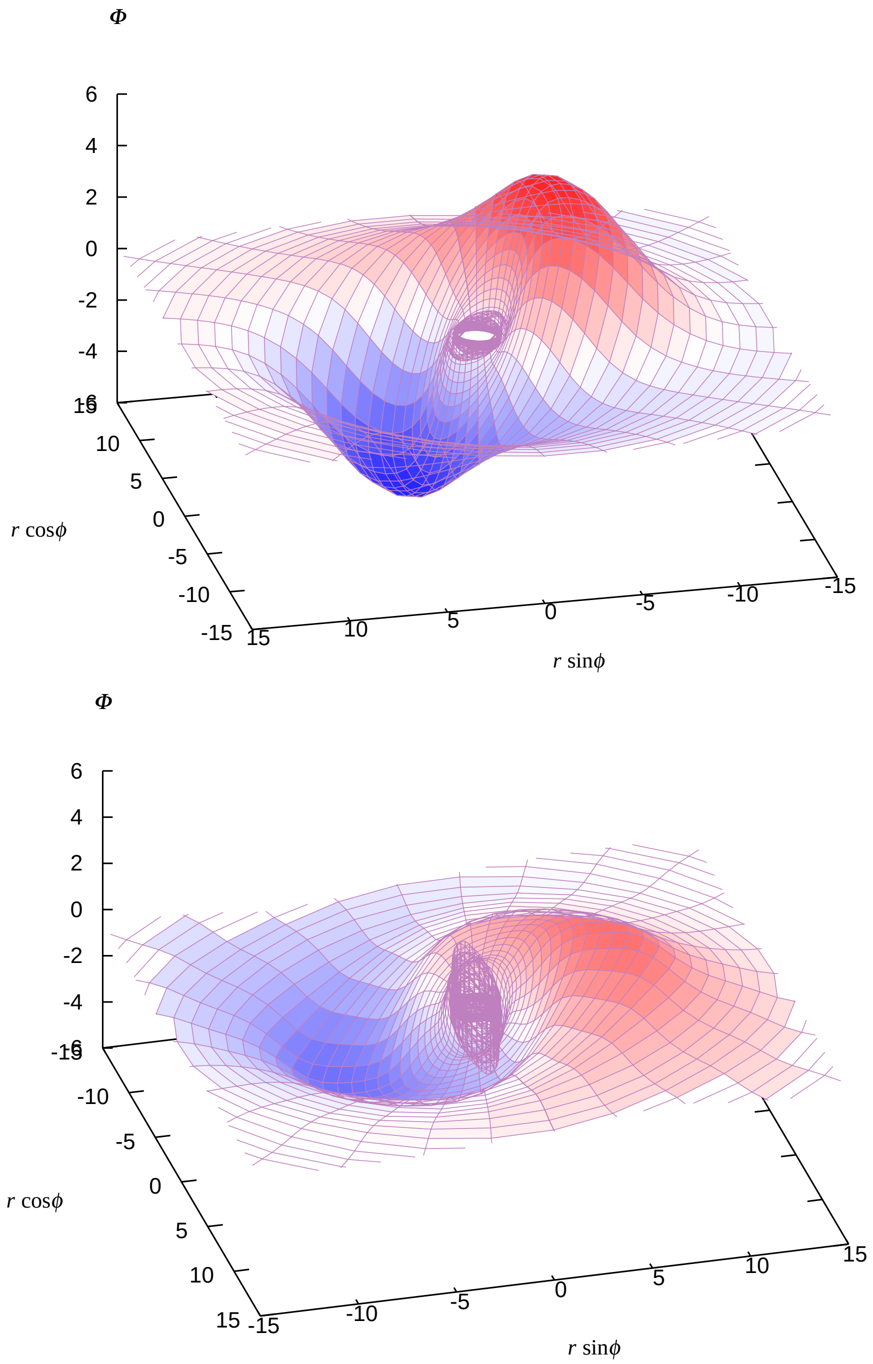


図 7.12: 数値シミュレーションにおけるボーズノバ現象のスナップショット（上は起きる前，下は起きた直後）

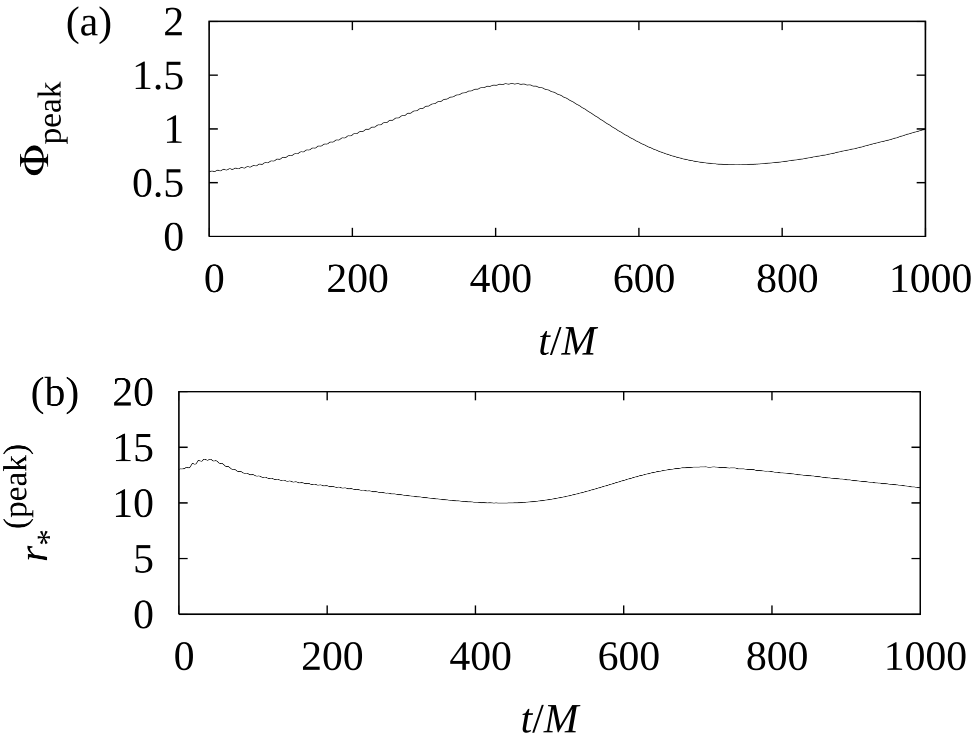


図 7.13: モデル (A)[$\varphi_{\rm peak}(0) = 0.6$]:ピークの高さ $\varphi_{\rm peak}$ と位置 $r_*^{\rm (peak)}$ の振る舞い．

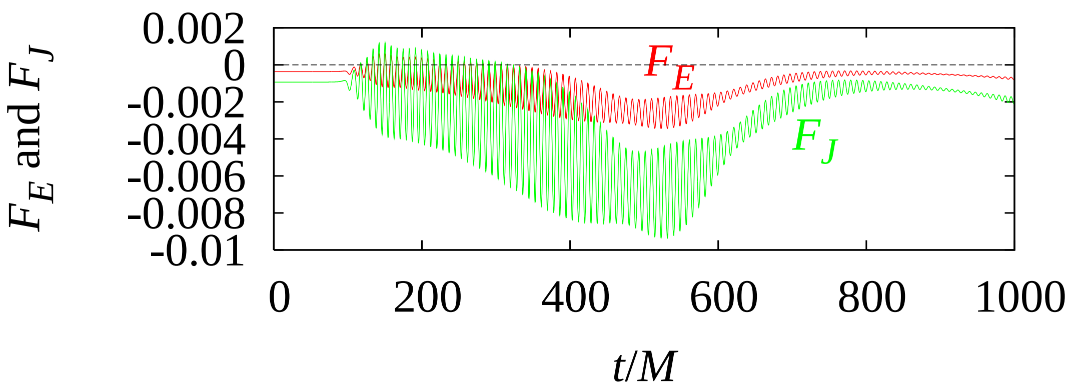


図 7.14: モデル (A): BH ホライズンに落ち込むエネルギーフラックス F_E と角運動量フラックス F_J． 非線形効果はＢＨからのエネルギーと角運動量の取り出しを増大させる．

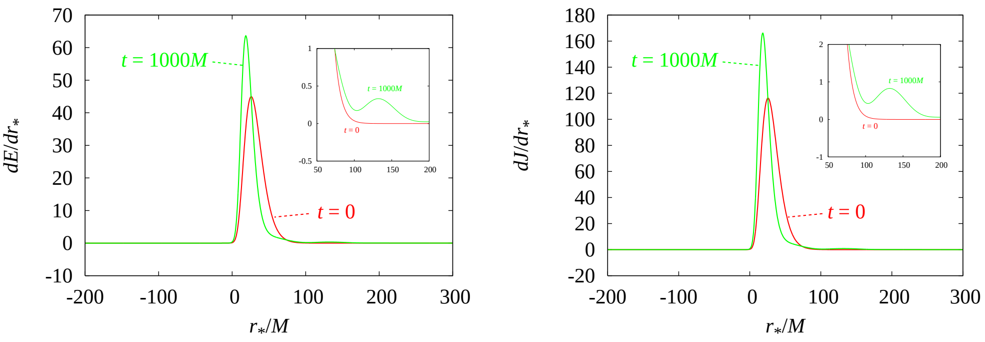


図 7.15: モデル (A)： $t/M = 0$ および 1000 におけるエネルギー密度 dE/dr_* (左) と角運動量密度 dJ/dr_* (右).

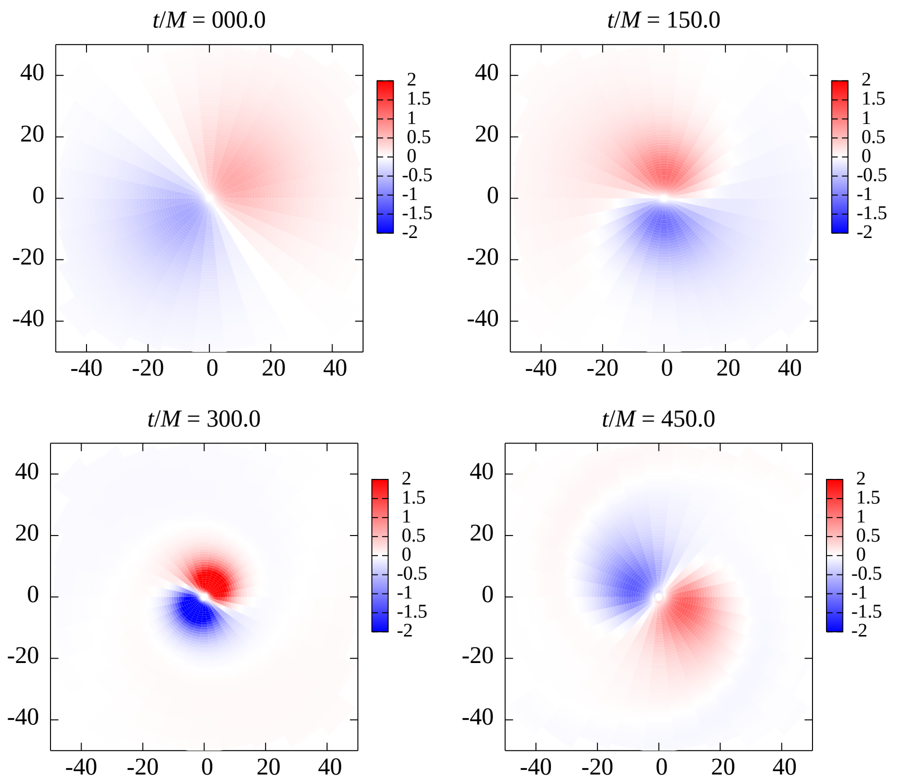


図 7.16: モデル (A)：赤道面 $(r\cos\phi, r\sin\phi)$ におけるアクシオン場の振幅 φ の分布．時間は，順に，$t/M = 0$, 150, 300, and 450. アクシオン場は時計と反対回りに回転．

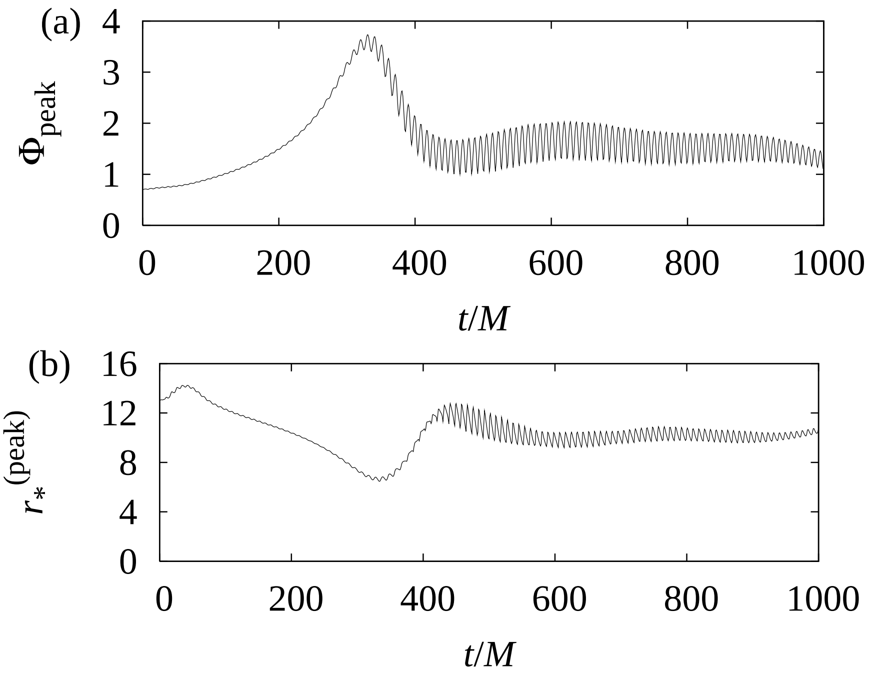


図 7.17: モデル (B)[$\varphi_{\rm peak}(0) = 0.7$]: $t \simeq 350M$ の頃，ピークの位置 $r_*^{\rm (peak)}$ はホライズンに非常に近づき，ピーク振幅 $\varphi_{\rm peak}$ は 4 倍程度まで増大．その直後にボーズノバが起きる．

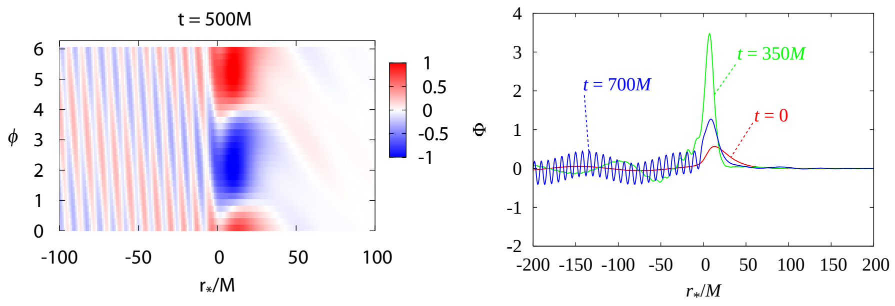


図 7.18: モデル (B): $t = 500M$ での赤道面（$(r_*/M, \phi)$ 座標系）でのスナップショット（左）と $t/M = 0, 350, 700$ における赤道面の $\phi = 0$ 線上の場の値．

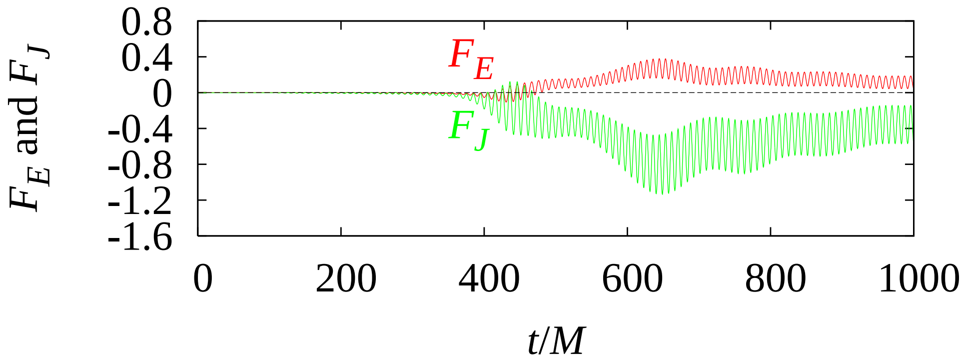


図 7.19: モデル (B):F_E と $F_K J$. $t \simeq 350M$ でボーズノバが発生.

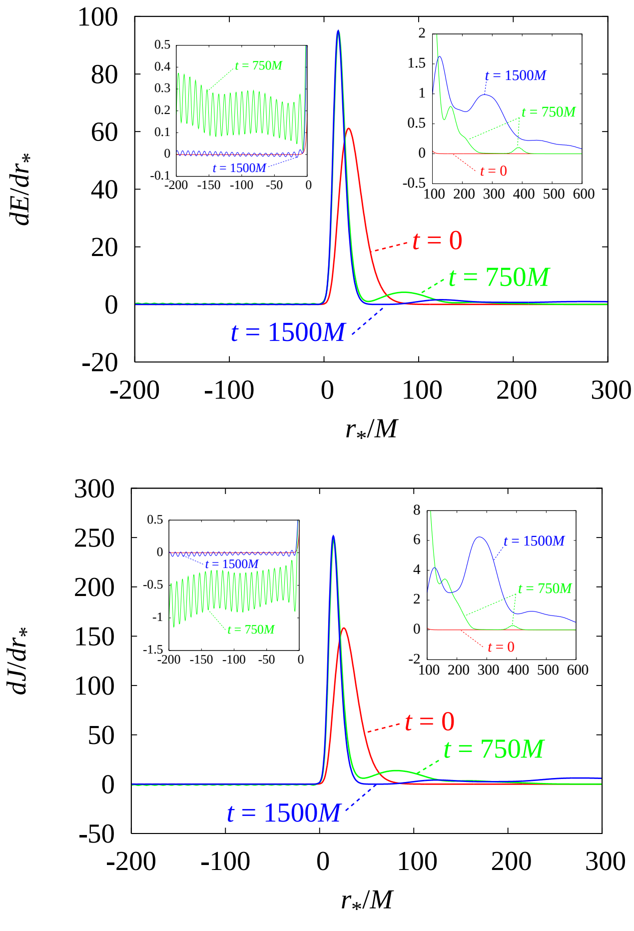


図 7.20: モデル (B): dE/dr_* (左) と dJ/dr_* (右). $t/M = 0, 750, 1500$

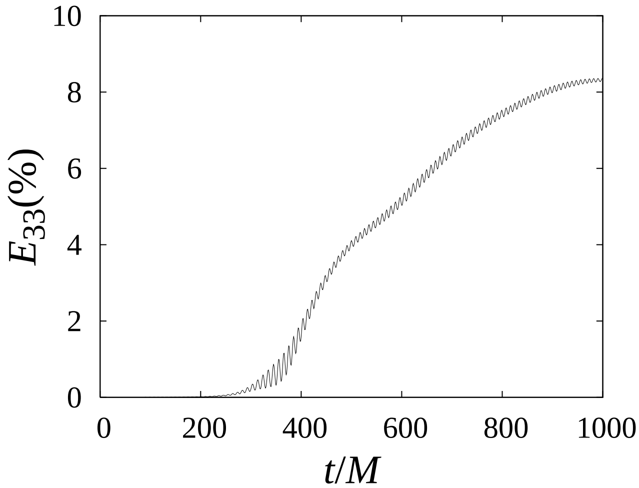


図 7.21: 非線形効果により生成された $(\ell, m) = (3, \pm 3)$ モードのエネルギー E_{33} が全エネルギーに占める割合の時間変化.

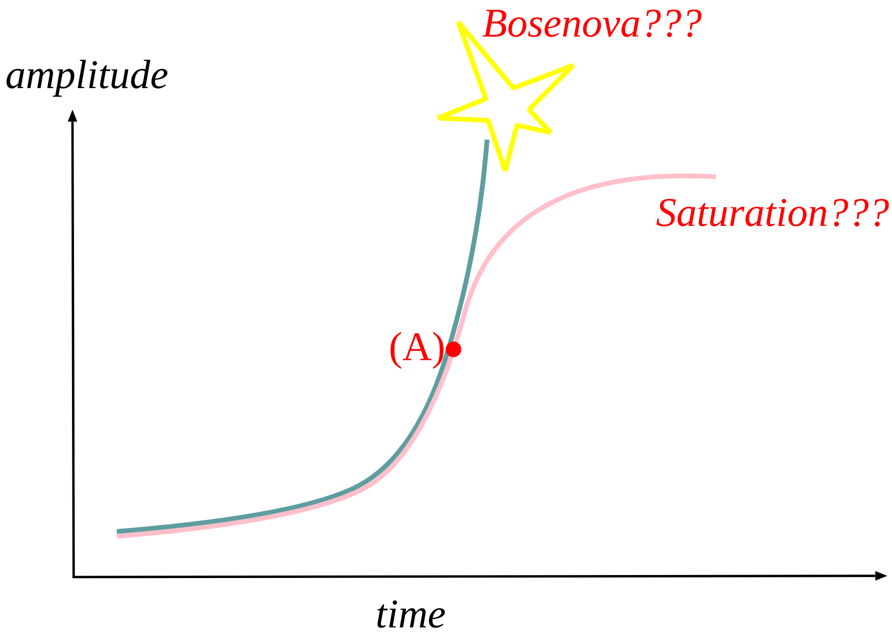


図 7.22: アクシオン場の振幅の時間発展に対する 2 つの可能性.

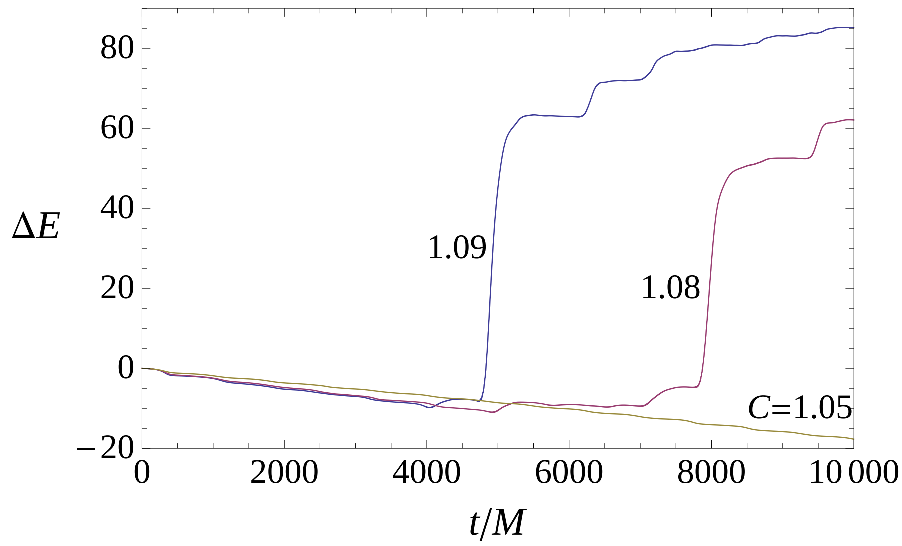


図 7.23: BH に吸収された全エネルギー ΔE の時間変化．$C = 1.05,\ 1.08,\ 1.09$

有効ポテンシャルによる解析

- $\varphi = \Phi/f_a$ に対する相対論的な作用積分

$$\hat{S} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - \mu^2\left(\frac{\varphi^2}{2} + \hat{U}_{\mathrm{NL}}(\varphi)\right)\right], \tag{7.3.13}$$

$$\hat{U}_{\mathrm{NL}}(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2} - \cos\varphi = -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}. \tag{7.3.14}$$

- 非相対論的近似

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\mu}}\left(e^{-i\mu t}\psi + e^{i\mu t}\psi^*\right). \tag{7.3.15}$$

とおくと，ニュートン近似で，ψ に対する作用は

$$\hat{S}_{\mathrm{NR}} = \int d^4x\left[\frac{i}{2}\left(\psi^*\dot{\psi} - \psi\dot{\psi}^*\right) - \frac{1}{2\mu}\partial_i\psi\partial_i\psi^* + \frac{\alpha_g}{r}\psi^*\psi - \mu^2\tilde{U}_{\mathrm{NL}}(|\psi|^2/\mu)\right] \tag{7.3.16}$$

$$\tilde{U}_{\mathrm{NL}}(x) = -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1/2)^n}{(n!)^2}x^n. \tag{7.3.17}$$

ここで，$\alpha_g := M\mu$,

- 集団変数: アクシオン波動関数 ψ として次の形のものを考える：

$$\psi = A(t,r,\nu)e^{iS(t,r,\nu)+m\phi}, \tag{7.3.18}$$

$$A(t,r,\nu) \approx A_0\exp\left[-\frac{(r-r_p)^2}{4\delta_r r_p^2} - \frac{(\nu-\nu_p)^2}{4\delta_\nu}\right],, \tag{7.3.19}$$

$$S(t,r,\nu) \approx S_0(t) + p(t)(r-r_p) + P(t)(r-r_p)^2 + \pi_\nu(t)(\nu-\nu_p)^2 + \tag{7.3.20}$$

以下では，$m = 1, \nu_p = 0$ とおく．集団座標の意味は

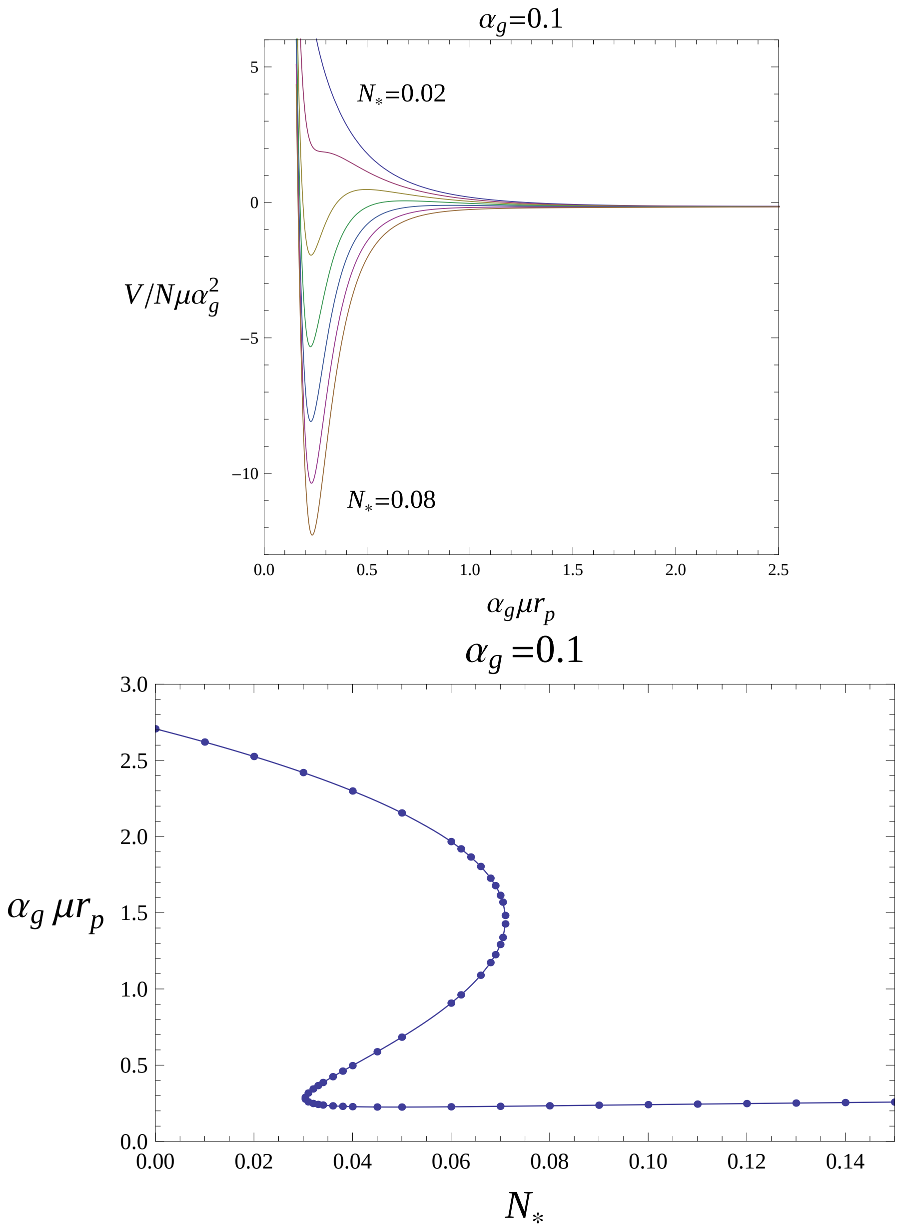


図 7.24: $\alpha_g = 0.1$: $\alpha_g \mu r_p$ の関数としての有効ポテンシャル V（上）とポテンシャルの臨界点（下）のパラメータ N_* への依存性 $N_* = 0.02,...,0.08$ で 0.01 刻み.

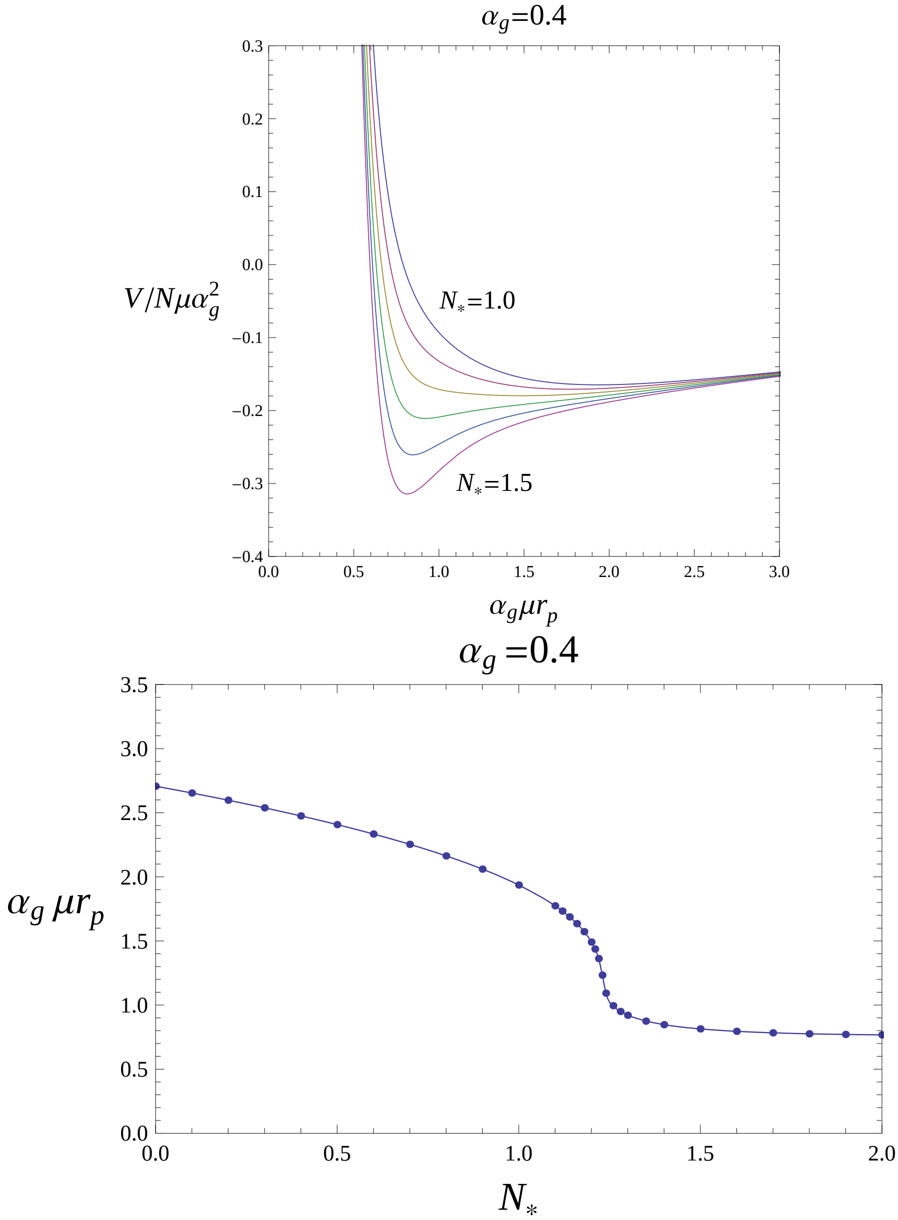


図 7.25: $\alpha_g = 0.4$: $\alpha_g \mu r_p$ の関数としての有効ポテンシャル V（上）とポテンシャルの臨界点（下）のパラメータ N_* への依存性 $N_* = 1.0$,...,1.5 で 0.1 刻み.

- $\delta_r(t)$: 波束の動径方向の広がり．
- $\delta_\nu(t)$: 波束の θ 方向の広がり．
- $(r_p(t), \nu_p(t))$: 波束のピーク位置の座標．

- 有効作用：総アクシオン数を

$$N = \int d^3x A^2 \approx 4\pi^2 A_0^2 \sqrt{\delta_r \delta_\nu} r_p^3 (1+\delta_r). \tag{7.3.21}$$

で定義すると，集団変数に対する有効作用は，

$$L = -\dot{S}_0 N + p\dot{r}_p N + (\dot{p} - 2P\dot{r}_p) 2r_p \frac{\delta_r}{1+\delta_r} N - \dot{P} r_p^2 \delta_r \frac{1+3\delta_r}{1+\delta_r} N - \dot{\pi}_\nu \delta_\nu N - H, \tag{7.3.22a}$$

$$H = T + V; \tag{7.3.22b}$$

$$T = \frac{N}{2\mu}\left[p^2 + 8pPr_p \frac{\delta_r}{1+\delta_r} + 4P^2 r_p^2 \delta_r \frac{1+3\delta_r}{1+\delta_r} + 4\pi_\nu^2 \frac{\delta_\nu}{r_p^2(1+\delta_r)}\right], \tag{7.3.22c}$$

$$\frac{V}{N\mu\alpha_g^2} = \frac{1}{2(\alpha_g \mu r_p)^2 (1+\delta_r)}\left(1 + \delta_\nu + \frac{1}{4\delta_r} + \frac{1}{4\delta_\nu}\right) - \frac{1}{(\alpha_g \mu r_p)(1+\delta_r)} \tag{7.3.22d}$$

$$-\alpha_g^{-2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1/2)^n}{(n!)^2 n} \left[\frac{N_*}{\sqrt{\delta_r \delta_\nu}(\alpha_g \mu r_p)^3 (1+\delta_r)}\right]^{n-1}, \tag{7.3.22e}$$

ここで

$$N_* = (\alpha_g^3 \mu^2 / 4\pi^2) N. \tag{7.3.23}$$

ただし，δ_ν について 1 次の項のみを残した．

- これは次の様に書き換えられる：

$$L = T - V; \tag{7.3.24a}$$

$$T = \frac{1}{2} A \dot{\delta}_r^2 + B \dot{\delta}_r \dot{r}_p + \frac{1}{2} C \dot{r}_p^2 + \frac{1}{2} D \dot{\delta}_\nu^2, \tag{7.3.24b}$$

ここで，

$$A = \frac{1}{4} N\mu r_p^2 \frac{1 + 45\delta_r + 198\delta_r^2 + 126\delta_r^3 + 45\delta_r^4 + 9\delta_r^5}{(1+\delta_r)^3 \delta_r (1+3\delta_r^2)}, \tag{7.3.25a}$$

$$B = \frac{1}{2} N\mu r_p \frac{-7 - 30\delta_r + 54\delta_r^2 + 30\delta_r^3 + 9\delta_r^4}{(1+\delta_r)^2 (1+3\delta_r^2)}, \tag{7.3.25b}$$

$$C = N\mu \frac{1 + 6\delta_r - 26\delta_r^2 + 18\delta_r^3 + 9\delta_r^4}{(1+\delta_r)(1+3\delta_r^2)}, \tag{7.3.25c}$$

$$D = \frac{1}{4} N\mu r_p^2 \frac{(1+\delta_r)}{\delta_\nu}. \tag{7.3.25d}$$

- ポテンシャルの N_* 依存性：3 次元の変数空間 $(\delta_r, \delta_\nu, \alpha_g\mu r_p)$ における極点は，元のポテンシャルの形や N_* の値によらず，常の次の関係式で決まる曲線上に載ることが占めさえる：

$$\delta_r = \frac{-1 + 4\delta_\nu^2 + \sqrt{1 - 8\delta_\nu + 8\delta_\nu^2 + 64\delta_\nu^3 + 16\delta_\nu^4}}{2(-2 + 4\delta_\nu + 16\delta_\nu^2)}, \tag{7.3.26a}$$

$$\alpha_g\mu r_p = 4\delta_\nu - \frac{1}{2\delta_\nu} + \frac{1}{4\delta_r} + 1. \tag{7.3.26b}$$

この曲線上でのポテンシャルの振る舞いと極点の位置をプロットしたのが図 7.24 と図 7.25 である．

- 極小点における振動周期
  - $\alpha_g = 0.4, N_* = 1.1.$

$$\left(\frac{\omega_{\mathrm{EG}}}{\mu\alpha_g^2}\right)^2 = 1.141,\ 0.249,\ \text{and } 0.0166, \tag{7.3.27}$$

$$\Delta q_i = \begin{pmatrix} 0.110 \\ -0.027 \\ 0.994 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.075 \\ 0.724 \\ 0.686 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -0.378 \\ -0.005 \\ 0.925 \end{pmatrix} \tag{7.3.28}$$

第 3 の固有振動は長周期振動を説明する：

$$\Delta t = 761M. \tag{7.3.29}$$

  - $\alpha_g = 0.4, N_* = 1.3$

$$\left(\frac{\omega_{\mathrm{EG}}}{\mu\alpha_g^2}\right)^2 = 14.06,\ 5.59,\ \text{and } 0.175, \tag{7.3.30}$$

$$\Delta q_i = \begin{pmatrix} 0.218 \\ -0.030 \\ 0.975 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.070 \\ 0.927 \\ 0.367 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -0.640 \\ -0.085 \\ 0.763 \end{pmatrix} \tag{7.3.31}$$

第 1 の固有振動は短周期振動を説明する：

$$\Delta t = 26M. \tag{7.3.32}$$

7.3.4　*$l \geqslant 2$ のモードに対する非線形効果

§7.4
*重力波放出

図 7.10 に示したように, G 原子のアクシオン雲は非球対称で回転している．このため，G 原子は重力波を放出する．

7.4.1　4 重極公式による評価

- (7.3.6) より，雲は $r_c \sim M(l+1)^2/\alpha_g^2$ 程度の半径をもち, $\Omega = (M/r_c^3)^{1/2}$ 程度の角速度で回転している．これより，4 重極公式を使うと，単位時間あたりにアクシオン雲から放出される重力波のエネルギーは

$$P = \frac{G}{45}|\dddot{Q}|^2 \sim \frac{G}{45}(r_c^2 \epsilon M)^2 \Omega^6 \sim \frac{\epsilon^2 \alpha_g^{10}}{45G(l+1)^{10}} = G\frac{N^2\alpha_g^{12}}{45(l+1)^{10}(GM)^4}, \tag{7.4.1}$$

ここで，N は雲に含まれるアクシオン量子の数, $\epsilon = \mu N/M$ は雲の質量とBHの質量の比.

- 4 重極公式は，アクシオン雲の異なる量子レベルの間の遷移により放出される重力波の評価となっている．したがって，$l \geqslant 2$ が必要で，重力波によるエネルギー放出で系のエネルギーが変化する時間スケールは

$$\tau_{\rm GW} \sim \frac{\epsilon M}{P} \approx \frac{45GM(l+1)^{10}}{\epsilon \alpha_g^{10}} \approx 10^{14} GM \left(\frac{10^{-4}}{\epsilon}\right)\left(\frac{l+1}{3}\right)^{10}\left(\frac{0.44}{\alpha_g}\right)^{10}. \tag{7.4.2}$$

これより，$\epsilon \sim 10^{-4}, \alpha_g \gtrsim 1$ に対し

$$\tau_{\rm GW}/\tau_{\rm sr} \approx 0.1 \times e^{-1.844(\alpha_g-2)}\,(2/\alpha_g)^{10}. \tag{7.4.3}$$

- 時間発展
  - $\alpha_g < 2$: GW 放出は SR 不安定の成長を妨げない．
  - $\alpha_g > 2$: $\epsilon \sim 10^{-4}$ のとき，$\tau_{\rm GW} = \tau_{\rm sr}$. すなわち，$\epsilon \sim 10^{-4}$ に達すると，SR 不安定にもかかわらずアクシオン雲は成長を止める．一般に，α_g が大きいほど，小さな ϵ で定常状態に達する．
- GW の観測可能性

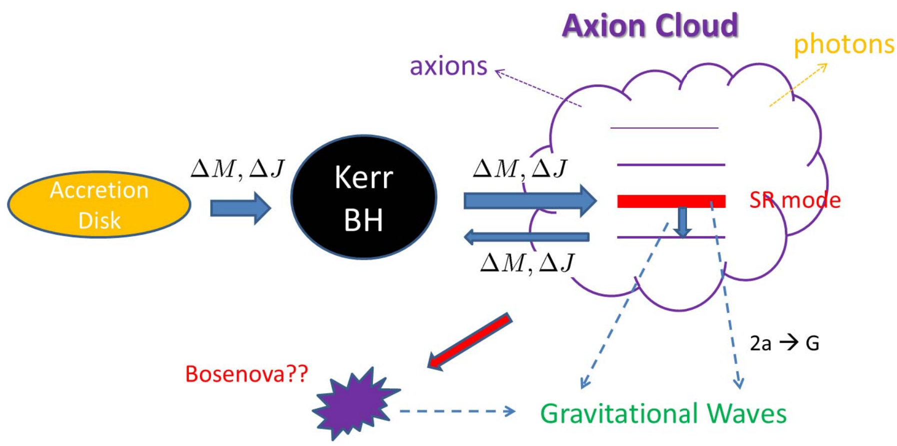


図 7.26: The fate of an axion cloud around a black hole formed by instability.

(7.4.1) より，観測される GW の振幅は

$$h \approx 10^{-22}\left(\frac{\epsilon}{10^{-4}}\right)\left(\frac{c^3}{GM\omega}\right)\left(\frac{100\mathrm{Mpc}}{d}\right)\left(\frac{M}{10^5 M_\odot}\right)\left(\frac{\alpha_g}{2}\right)^5\left(\frac{3}{l+1}\right)^5 \tag{7.4.4}$$

これより，質量が $10^{-15}\mathrm{eV} \lesssim \mu \lesssim 10^{-20}\mathrm{eV}$ の範囲にあるアクシオンが存在すると，増幅反射不安定により放出された GW が advanced LIGO などで検出可能となる．

7.4.2　定常重力波放出量の評価

無限遠でのエネルギーフラックス　TT ゲージ条件を満たす重力波型摂動 h^{TT}_{ij} に対し，そのエネルギー運動量テンソルを

$$4\kappa^2 T^{\mathrm{GW}}_{\mu\nu} = \partial_\mu h^{\mathrm{TT}ij}\partial_\nu h^{\mathrm{TT}}_{ij} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial_\lambda h^{\mathrm{TT}ij}\partial_\lambda h^{\mathrm{TT}}_{ij}) \tag{7.4.5}$$

により定義する．いま，$\mathscr{I}^+$ 近傍で h_{ij} が

$$h^{\mathrm{TT}}_{rr}, \frac{1}{r}h^{\mathrm{TT}}_{rA} \sim \mathrm{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \tag{7.4.6}$$

$$(h^{\mathrm{TT}})^B_A(r\Omega, t) \sim \frac{1}{r}\sum_{\omega,s,l,m}\left[A_{slm}(\omega)(Y^{(s)}_{lm})_{AB}(\Omega)e^{-i\omega u} + \mathrm{cc}\right], \tag{7.4.7}$$

$$\int_{S^2} d\Omega Y^{(s)}_{lm}(Y^{(s')}_{l'm'})^* = C^s_{lm}\delta^{ss'}\delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{7.4.8}$$

と振る舞うとき，無限遠に放出されるエネルギーは

$$\begin{aligned} E_{\mathscr{I}^+} &= \int_{\mathscr{I}^+} T^t_\mu d\Sigma^\mu \\ &= \lim_{r\to\infty} r^2 \int du \int_{S^2} d\Omega(-T^t_t + T^t_r) \\ &= \frac{1}{8\kappa^2} \lim_{r\to\infty} r^2 \int du \int_{S^2} d\Omega(\partial_u h^{\mathrm{TT}^i_j})^2 \\ &= \frac{T}{4\kappa^2} \sum_{lms,\omega} \omega^2 |A^s_{lm}(\omega)|^2. \end{aligned} \tag{7.4.9}$$

重力波放出率　一般に，$u^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu}$ を真空での波動方程式

$$\Box h_{\mu\nu} = 0 \tag{7.4.10}$$

の TT-gauge での任意の解，$\psi_{\mu\nu}$ を源のある波動方程式

$$\triangle_L \psi_{\mu\nu} = -\Box\psi_{\mu\nu} - 2R_{\mu\alpha\nu\beta}\psi^{\alpha\beta} = -2\kappa^2 T_{\mu\nu} \tag{7.4.11}$$

の解とする．このとき，任意の時空領域 D に対して，

$$\begin{aligned} N_{\partial D}(u^{\mathrm{TT}}, \psi) &:= i\int_{\partial D} d\Sigma_\mu u^{\mathrm{TT}*}_{\alpha\beta} \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi^{\alpha\beta} = i\int_D d^4x u^{\mathrm{TT}*}_{\alpha\beta} \triangle_L \psi^{\alpha\beta} \\ &= -2i\kappa^2 \int_D d^4x u^{\mathrm{TT}*}_{\mu\nu} T^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{7.4.12}$$

この式で D の境界を $\mathscr{I}^+$ まで押しやると，左辺への無限遠よりの寄与は ψ のゲージ変換に対して不変で（後述），

$$N_{\mathscr{I}^+}(u^{\mathrm{TT}}, \psi) = N_{\mathscr{I}^+}(u^{\mathrm{TT}}, h) = N_{\mathscr{I}^+}(u^{\mathrm{TT}}, h^{\mathrm{TT}}). \tag{7.4.13}$$

よって，u^{TT} として，$\mathscr{I}^+$ で

$$u^{\mathrm{TT}}_{\omega,s,l,m} \sim \frac{1}{r}(Y^{(s)}_{lm})e^{-i\omega u}, \tag{7.4.14}$$

ホライズン $\mathscr{H}^+$ でゼロとなる複素基本解を用いると，

$$T \times 2\omega C^s_{lm} A^s_{lm} = -2i\kappa^2 \int_D d^4x\sqrt{-g} u^{\mathrm{TT}\mu\nu}_{\omega,s,l,m}{}^* T_{\mu\nu}. \tag{7.4.15}$$

以上より,,

$$\langle u, T\rangle := \frac{1}{T}\int_D d^4x\sqrt{-g}u^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \tag{7.4.16}$$

と定義すると，

$$\dot{E}_{\mathscr{I}^+} = \frac{\kappa^2}{4}\sum_{lms,\omega} |C^s_{lm}|^{-2} \left|\left\langle u^{\mathrm{TT}}_{lms,\omega}, T\right\rangle\right|^2. \tag{7.4.17}$$

平坦背景時空近似

背景時空を平坦時空で近似すると，$u^{\mathrm{TT}}_{lms,\omega}$ および Φ を具体的に求めることができ，重力波放出率を準解析的に求めることができる．ただし，この近似は $\mu M \ll 1$ の時にのみ良い近似となり，特に Φ は

$$\hat{\Phi} = -\frac{\sqrt{2E_a}}{\omega}(2k)^{3/2}\sqrt{\frac{(n-\ell-1)!}{2n(n+\ell)!}}e^{-i\omega t}e^{-kr}(2kr)^{\ell}L^{2\ell+1}_{n-\ell-1}(2kr)Y_{\ell m}(\theta,\phi). \quad (7.4.18)$$

ただし，

$$k := \sqrt{\mu^2-\omega^2} = \frac{M\mu^2}{n}; \quad n := \ell+1+n_r,\ n_r = 0,1,2,\cdots. \quad (7.4.19)$$

また，E_a はアクシオンの全エネルギーを表す量：

$$E_a = \int T_{tt}r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi. \quad (7.4.20)$$

- ベクトル型摂動：このときは $\dot{P} = 0$.
- スカラ型摂動：

$$\frac{dE_{\mathrm{GW}}}{dt} = C_{n\ell}\left(\frac{E_a}{M}\right)^2(\mu M)^{Q_\ell}, \quad (7.4.21a)$$

$$Q_\ell = \begin{cases} 16, & (\ell = 1), \\ 4\ell+10, & (\ell \geqslant 2), \end{cases} \quad (7.4.21b)$$

$$C_{n\ell} = \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{160}\dfrac{(n^2-1)^2}{n^{10}}, & (\ell = 1), \\ \dfrac{16^{\ell+1}\ell(\ell-1)^2[(\ell+n)!]^2\Gamma(2\ell)^2}{(2\ell-1)(\ell+1)(\ell!)^4\Gamma(4\ell+3)\Gamma(n-\ell)^2 n^{4\ell+8}}, & (\ell \geqslant 2). \end{cases} \quad (7.4.21c)$$

*Kerr 時空での評価

7.4.3　*バースト重力波放出の評価

7.4.4　*観測からの制限

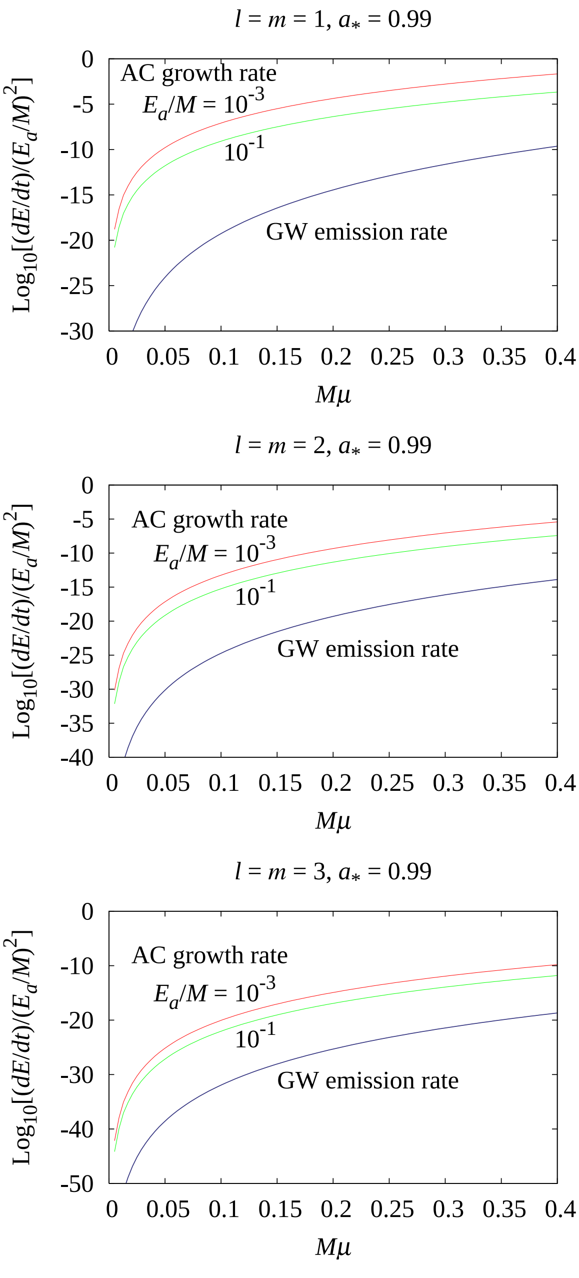
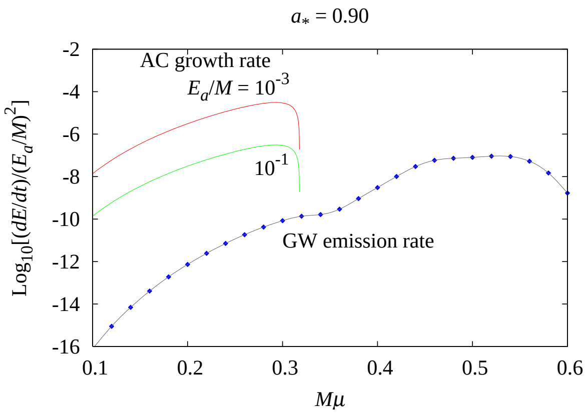


図 7.27: 平坦近似：$(E_a/M)^2$ を単位とした重力波によるエネルギー放出率とアクシオン増幅反射不安定成長率の比較．$\ell = m = 1, 2, 3,\ n_r = 0,\ a_* = 0.99$.



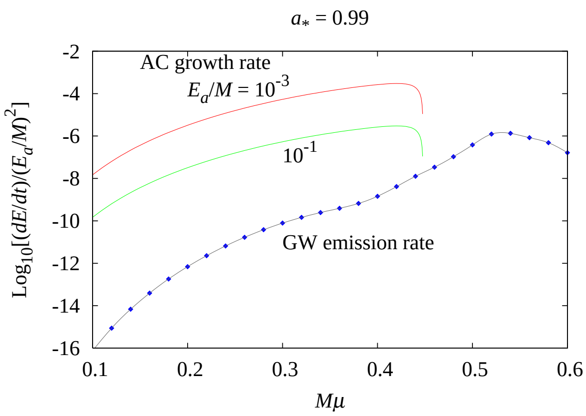
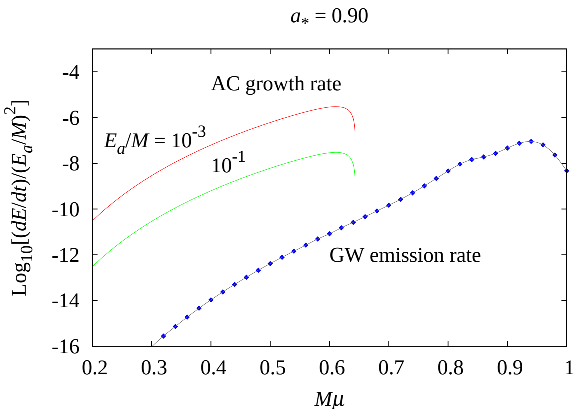


図 7.28: Kerr 時空での GW エネルギー放出率： $(\ell, m) = (1, 1)$. $a_* = 0.90, 0.99$. $\tilde{\ell} = 2, 3, 4, 5$.



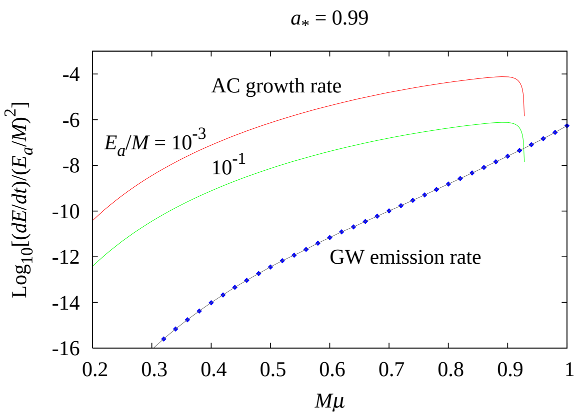


図 7.29: Kerr 時空での GW エネルギー放出率： $(\ell, m) = (2, 2)$. $a_* = 0.90, 0.99$. $\tilde{\ell} = 4, 5, 6, 7$.

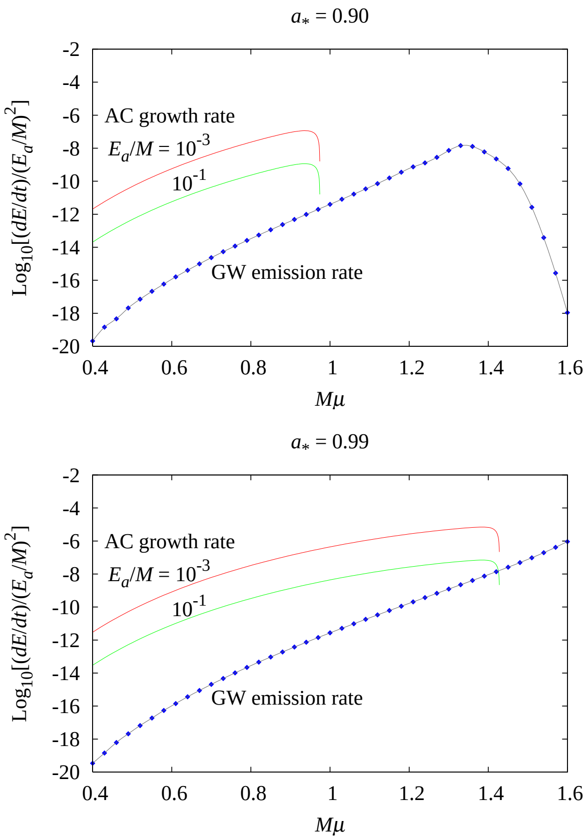


図 7.30: Kerr 時空での GW エネルギー放出率： $(\ell, m) = (3, 3)$. $a_* = 0.90, 0.99$. $\tilde{\ell} = 6, 7, 8, 9$.

A カイラルアノーマリー

§A.1 Chiral Anomaly

要約: カイラルカレントは，それを構成しているフェルミ粒子がゲージ相互作用すると，一般的に量子効果によりアノーマリーが生じ，カレントの保存則に位相的なゲージ補正項が加わる [Bell JS, Jackiw R (1969); Adler SL (1969)].

参考文献

- Harvey JA: "TASI 2003 Lecturenotes on Anamalies" [arXiv:hep-th/0509097]
- Adler SL: "Anomalies" [arXiv:hep-th/0411038]

可換ゲージ場の Triangle Anomaly

- Lagrangian

$$\mathscr{L} = -i\bar{\psi}(\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{A.1.1}$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \tag{A.1.2}$$

- 古典的対称性: 一般に，

$$\psi \mapsto e^{i\alpha}\psi \tag{A.1.3}$$

質量 $m=0$ のとき，さらに

$$\psi \mapsto e^{i\beta\gamma_5}\psi \tag{A.1.4}$$

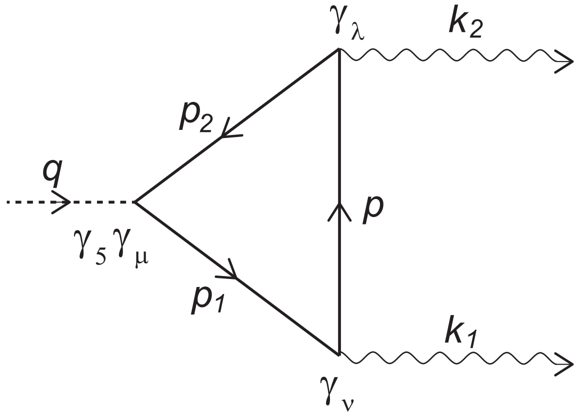


図 A.1: Triangle Digram

- 保存則（量子論）

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad : \quad \partial_\mu J^\mu = 0, \tag{A.1.5a}$$

$$J_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \quad : \quad \partial_\mu J_5^\mu = -2m\bar{\psi}\gamma_5\psi + \frac{e^2}{8\pi^2}F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}. \tag{A.1.5b}$$

ここで，

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \ *F_{\mu\nu} := \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}F^{\lambda\sigma}. \tag{A.1.6}$$

Adler-Bardeen-Jackiw(ABJ) anomaly

- 不可避性：正則化においてベクトルカレントの保存を要請すると，軸性ベクトルカレントの保存則には anomaly が発生し，その値は正則化の方法に依存しない．

- 非くり込み定理：くり込みにより形を変えない．[Adler-Bardeen の定理]

- 普遍性：非可換ゲージ場，重力場との結合もカイラルアノマリーを生む．

$$\begin{aligned} & D_\mu = \nabla_\mu - igt_aA_\mu^a, \quad J_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5 t\psi \\ \Rightarrow \quad & \partial_\mu J_5^\mu = \cdots + \frac{g^2}{8\pi^2}\mathrm{Tr}(tt_at_b)F_{\mu\nu}^a\tilde{F}^{b\mu\nu} + \frac{1}{384\pi^2}\mathrm{Tr}(t)R_{\mu\nu\lambda\sigma}\tilde{R}^{\mu\nu\lambda\sigma} \end{aligned} \tag{A.1.7}$$

- 物理的には，アノマリーはインスタントンとスピノール場の相互作用により引き起こされる．

- 様々な証明法

- Cut off による正則化.
- Pauli-Villars 正則化.
- Point-splitting 正則化.
- 藤川による経路積分法:PI measure の正則化と Athiya-Singer 指数定理.

§A.2 Anomaly 公式の証明

A.2.1 経路積分法による証明（藤川和夫 1979）

ゲージ場 A 中でのスピノ-ル場 ψ に対する分配関数 Z は経路積分で

$$Z[A] = \int [d\psi][d\bar{\psi}] e^{iS(\psi,\bar{\psi};A)} \tag{A.2.1}$$

と表される．この経路積分において，変換

$$\begin{aligned} \psi &\to U\psi, & \text{(A.2.2a)} \\ \bar{\psi} &\to \bar{\psi}(\gamma_4 U^\dagger \gamma_4), \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4, \quad \gamma_4 = i\gamma^0, & \text{(A.2.2b)} \end{aligned}$$

に対して，スピノール場の経路積分測度は次のように変換する：

$$[d\psi][d\bar{\psi}] \to [\det \mathscr{U} \det \bar{\mathscr{U}}]^{-1} [d\psi][d\bar{\psi}], \tag{A.2.3}$$

$$\mathscr{U}_{xn,ym} = U(x)_{nm} \delta^4(x-y), \tag{A.2.4}$$

$$\bar{\mathscr{U}}_{xn,ym} = (\gamma_4 U(x)^\dagger \gamma_4)_{nm} \delta^4(x-y). \tag{A.2.5}$$

特に，$U(x) = e^{i\alpha(x)t}$ に対しては，$\bar{\mathscr{U}}\mathscr{U} = 1$ より，$[d\psi][d\bar{\psi}]$ は不変となる．一方，$U(x) = e^{i\alpha(x)t\gamma_5}$ に対しては，$\bar{\mathscr{U}} = \mathscr{U}$ となるので，測度は不変とならない：

$$\begin{aligned} [d\psi][d\bar{\psi}] &\to (\det \mathscr{U})^{-2} [d\psi][d\bar{\psi}] \\ &= \exp\left\{ i \int d^4x\, \alpha(x) \mathscr{P}(x) \right\} [d\psi][d\bar{\psi}]. \end{aligned} \tag{A.2.6}$$

したがって，Z 全体は

$$Z \to \int [d\psi][d\bar{\psi}] \exp\left[i \int d^4x \left(\alpha(x)\mathscr{P}(x) + J_5^\mu(x) \partial_\mu \alpha(x) \right) \right]. \tag{A.2.7}$$

Z は積分変数の変換では変化しないので，これより，

$$\langle \partial_\mu J_5^\mu(x) \rangle_A = \mathscr{P}(x). \tag{A.2.8}$$

Anomaly $\mathscr{P}(x)$ は形式的には不定となる：

$$\mathscr{P}(x) = -2\mathrm{Tr}(\gamma_5 t)\delta^4(x-x). \tag{A.2.9}$$

そこで，次のように正則化する：

$$\mathscr{P}(x) = \lim_{M\to\infty}\left[-2\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5 t f(-\not{D}_x^2/M^2)\right\}\delta^4(x-y)\right]_{y\to x}. \tag{A.2.10}$$

ここで，$f(u)$ は $f(0)=1$ となるなめらかなコンパクト台の関数．また，

$$D_\mu = \partial_\mu - i t_a A_\mu^a(x). \tag{A.2.11}$$

Fourier 変換により

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(x) &= \lim -2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5 t f(-\not{D}_x^2/M^2)e^{ik(x-y)}\right\}\right]_{y=x}\\ &= \lim -2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5 t f(-(i\not{k}+\not{D})^2/M^2)\right\}\right]\\ &= \lim -2M^4\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5 t f(-(i\not{k}+\not{D}/M)^2)\right\}\right]\\ &= -\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}f''(k^2)\left[\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5 t\not{D}^4\right\}\right]\end{aligned} \tag{A.2.12}$$

ここで，Wick 回転により

$$\int d^4k\, f''(k^2) = i\pi^2\int_0^\infty ds\, s f''(s) = i\pi^2. \tag{A.2.13}$$

また，

$$\not{D}^2 = D^2 - \frac{i}{2}t_a F_{\mu\nu}^a\gamma^{\mu\nu}, \tag{A.2.14}$$

$$\mathrm{Tr}\left\{t\gamma_5\not{D}^4\right\} = 2i\mathrm{Tr}(t_a t_b t)F_{\mu\nu}^a\tilde{F}^{b\mu\nu}. \tag{A.2.15}$$

以上より，

$$\langle\partial_\mu J_5^\mu(x)\rangle_A = \mathscr{P}(x), \tag{A.2.16}$$

$$\mathscr{P}(x) = \frac{1}{8\pi^2}F_{\mu\nu}^a\tilde{F}^{b\mu\nu}\mathrm{Tr}(t_a t_b t). \tag{A.2.17}$$

この式は，

$$\mathrm{Tr}(t_a t_b t) = N\delta_{ab} \tag{A.2.18}$$

となる場合には，次のような保存系に書き直すことができる：

$$\partial_\mu K^\mu = 0;\quad K^\mu = \langle J_5^\mu\rangle_A + 2NG^\mu, \tag{A.2.19}$$

$$G^\mu := -\frac{1}{8\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\left[A_\nu^a\partial_\lambda A_\rho^a + \tfrac{1}{3}f_{abc}A_\nu^a A_\lambda^b A_\rho^c\right]. \tag{A.2.20}$$

§A.3 クォークモデルにおけるカイラルアノーマリー

A.3.1　$\pi^0 \to 2\gamma$ 崩壊

要点：　π^0 はカイラルな U(1) 変換に対する擬 Goldstone ボゾンであるが，その 2 光子崩壊は，このカイラル対称性のアノーマリーにより引き起こされる．

軸性カイラルカレントのアノーマリーによる Goldstone ボゾンの Chern-Simons 相互作用　一般に，大域的なカイラル変換

$$e^{i\alpha\gamma_5 t} \tag{A.3.1}$$

に対して，アノーマリーのため，分配関数は経路積分測度の変換より

$$Z \to \int [d\psi][d\bar{\psi}] \exp\left[iS + i\int d^4x \alpha \mathscr{P}(x)\right] \tag{A.3.2}$$

と変換．ここで

$$\mathscr{P}(x) = \frac{g^2}{8\pi^2} F^a_{\mu\nu} \tilde{F}^b_{\mu\nu} \mathrm{Tr}(tt_a t_b). \tag{A.3.3}$$

この変換に対する（擬）Goldstone ボゾンを B とすると，

$$\left\langle \mathrm{Vac} \mid J^0_5(x) \mid B \right\rangle = -\frac{i}{2} F e^{ip_B \cdot x} \tag{A.3.4}$$

より，

$$-i \left\langle \mathrm{Vac} \mid [Q_5, B(x)] \mid \mathrm{Vac} \right\rangle = -2\mathrm{Im} \int \frac{d^3p_B}{(2\pi)^3} \int d^3y \left\langle \mathrm{Vac} \mid J^0_5(y) \mid B \right\rangle e^{-ip_B \cdot x} = F. \tag{A.3.5}$$

よって，

$$\delta \left\langle B \right\rangle = -i\alpha \left\langle [Q_5, B] \right\rangle = \alpha F. \tag{A.3.6}$$

したがって，アノーマリーは，次のような有効相互作用 (Chern-Simons 相互作用）を生み出す：

$$S_{\text{eff}} = S + \int d^4x \, \frac{1}{F} B \mathscr{P}(x). \tag{A.3.7}$$

π^0 への応用　π^0 をカイラル変換 $\exp(i\alpha\gamma_5\tau_3)(\tau_3 = \sigma_3 = 2t_3)$ に対する擬 Goldstone ボゾンと見なして，以上の議論を適用すると，カイラルアノーマリーは次のような π^0 と電磁場の有効相互作用を生み出す:

$$\delta\mathscr{L} = \frac{1}{F_\pi}\pi^0\frac{e^2}{8\pi^2}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \times N_c\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) = \frac{e^2N_c}{24\pi^2F_\pi}\pi^0F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}. \quad \text{(A.3.8)}$$

この有効相互作用による π^0 崩壊率は

$$\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma) = \frac{N_c^2\alpha^2m_\pi^3}{144\pi^3F_\pi^2} = \left(\frac{N_c}{3}\right)^2 \times 1.11 \cdot 10^{16}\mathrm{s}^{-1}. \quad \text{(A.3.9)}$$

これは $N_c = 3$ に対して，実験値を良く再現する：

$$\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma)_{\mathrm{exp}} = (1.19 \pm 0.08) \cdot 10^{16}\mathrm{s}^{-1}. \quad \text{(A.3.10)}$$

A.3.2　インスタントンと $\mathrm{U}(1)_A$ 問題の解決

ゲージ場の Pontrjagin 数　クォークのカイラル変換はアノーマリーにより見かけ上破れている：

$$e^{i\alpha\gamma_5 t} \mapsto \delta\mathscr{L} = \alpha\mathscr{P}(x); \quad \mathscr{P}d^4x = -\sum_j \frac{1}{4\pi^2}\mathrm{Tr}(t\mathscr{F}^{(j)} \wedge \mathscr{F}^{(j)}). \quad \text{(A.3.11)}$$

$(\mathscr{A} = -igA_\mu^a t_a dx^\mu,\ \mathscr{F} = d\mathscr{A} + \mathscr{A} \wedge \mathscr{A})$. しかし，カイラル変換がゲージ変換と可換のとき，$\mathscr{P}(x)$ は

$$\mathscr{P}(x)d^4x = d\mathscr{K}; \quad \mathscr{K} = -\sum_j q_j\frac{1}{4\pi^2}\mathrm{Tr}\left(d\mathscr{A} \wedge \mathscr{A} + \frac{2}{3}\mathscr{A} \wedge \mathscr{A} \wedge \mathscr{A}\right)^{(j)} \quad \text{(A.3.12)}$$

と書けるので，この項の作用積分への影響は無いように見える．

しかし，実はそうではない．一般に，

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\mathscr{K} = \int_{S^3_\infty} \mathscr{K} \quad \text{(A.3.13)}$$

となるが，無限遠でゲージ場の強度 F がゼロに近づくとしても，右辺がゼロとは限らない．実際，G をゲージ群として

$$A \to U^{-1}dU, \quad U : S^3 \to G \quad \text{(A.3.14)}$$

とすると，

$$\int_{S^3_\infty} \mathscr{K} = \sum_j \frac{q_j}{12\pi^2}\int_{S^3} \mathrm{Tr}(U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU)^{(j)} \quad \text{(A.3.15)}$$

この右辺の被積分関数は，G の不変体積要素から誘導される 3 次元体積要素と一致するので，その積分は，G 内での S^3 の像のこの測度に関する体積 V を表す．この体積は，U の連続変形では代わらない．実際，

$$\delta(U^{-1}dU) = d(U^{-1}\delta U) + [U^{-1}dU, U^{-1}\delta U] \tag{A.3.16}$$

より，

$$\begin{aligned}\delta V &= 3\int_{S^3} \mathrm{Tr}\left\{d(U^{-1}\delta U)\wedge U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU\right\} \\ &= -3\int_{S^3} \mathrm{Tr}\left\{U^{-1}\delta U \wedge d(U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU)\right\} = 0. \end{aligned} \tag{A.3.17}$$

したがって，この積分値は離散的な値を取る位相不変量となる（**winding number**）.

値を計算するために，まず，

$$\pi_3(\mathrm{SU}(n)) = \mathbb{Z}, \quad n \geqslant 2 \tag{A.3.18}$$

となることに注意する．これより，$\mathrm{SU}(2) \subset \mathrm{SU}(n)$ $(n \geqslant 2)$ を考慮すると，$G = \mathrm{SU}(2)$ の場合に計算すれば良いことがわかる．そこで，写像 U を

$$U : S^3 \to \mathrm{SU}(2), \tag{A.3.19}$$

$$U(x) = \frac{1}{r}\left(x^4\sigma_0 + ix^j\sigma_j\right) \tag{A.3.20}$$

とおくと，

$$U^{-1}dU = i\omega^j\sigma_j, \tag{A.3.21}$$

$$\omega^j = \frac{1}{r^2}\left(\epsilon_{jkl}x^k dx^l + x^4 dx^j - x^j dx^4\right) \tag{A.3.22}$$

より，

$$\begin{aligned} V &= i^3 \int_{S^3} \omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^l \mathrm{Tr}(\sigma_j\sigma_k\sigma_l) \\ &= 12\int_{S^3} \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \end{aligned} \tag{A.3.23}$$

を得る．ここで，SU(2) の $U(x)$ への左作用は，S^3 の推移的な等長変換を与え，$U^{-1}dU$ はこの作用で不変となるので，ω^j は S^3 上の不変 1 形式となる．ところが，S^3 の北極 $(0,0,0,1)$ で

$$\omega^j = dx^j \tag{A.3.24}$$

となるので，$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$ は S^3 の標準体積要素と一致する．よって，

$$V = 24\pi^2. \tag{A.3.25}$$

すなわち，$\mathscr{K}$ の積分は整数（の 2 倍）となる．元のゲージ場で表すと，$F_{\mu\nu}$ が無限遠でゼロに近づくとき，

$$p_1 = -\frac{1}{8\pi^2}\int d^4x \mathrm{Tr}(\mathscr{F} \wedge \mathscr{F}) \in \mathbb{Z} \tag{A.3.26}$$

となる．ただし，Tr はベクトル表現に関するものである．

インスタントン解　Pontrjagin 数がゼロでないゲージ配位は次のようにして構成することができる．時間を虚時間に変え，時空をユークリッド化して考える．このとき，任意の 2 形式 $\mathscr{F} \in A^2$ に対し，

$$* * \mathscr{F} = \mathscr{F} \tag{A.3.27}$$

が成り立つので，2 形式の空間は $*$ の固有空間に直和分解される：

$$A^2 = A^2_+ + A^2_- : \quad *\mathscr{F} = \pm\mathscr{F} \text{ for } \mathscr{F} \in A^2_\pm. \tag{A.3.28}$$

このとき，$\mathscr{F} \in A^2_\pm$ に対して，ゲージ場の方程式は，

$$D\mathscr{F} := d\mathscr{F} + \mathscr{A} \wedge \mathscr{F} - \mathscr{F} \wedge \mathscr{A} = 0 \;\Leftrightarrow\; D * \mathscr{F} = 0 \tag{A.3.29}$$

に帰着する．さらに，

$$d^4x \frac{1}{2}\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}^{\mu\nu} = *\mathscr{F} \wedge \mathscr{F} = \mathscr{F} \wedge \mathscr{F} \tag{A.3.30}$$

より，$\mathscr{F} \neq 0$ ならば，

$$\int d^4x \mathscr{F} \wedge \mathscr{F} \neq 0 \tag{A.3.31}$$

となる．このような解は，**インスタントン解**と呼ばれる．

SU(2) ゲージ理論での $p_1 = 1$ のインスタントン解は次のように構成することができる [Belavin AA, Polyakov AM, Schwarz AS, Tyupkin YuS (1975)]. ゲージ配位が，上記の $U(x) \in \mathrm{SU}(2)$ を用いて

$$\mathscr{A} = f(r)U^{-1}dU \tag{A.3.32}$$

と書けるとする．ただし，

$$f(r) = \mathrm{O}\big(r^2\big) \text{ at } r = 0, \quad \lim_{r\to\infty} f(r) = 0. \tag{A.3.33}$$

このとき，

$$\begin{aligned}\mathscr{F} &= f'dr \wedge U^{-1}dU + f(f-1)U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU \\ &= i\left\{f'r \wedge \omega^j + f(1-f)\epsilon_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l\right\}\sigma_j\end{aligned} \tag{A.3.34}$$

構成法より自動的に $D\mathscr{F}=0$ なので，$*\mathscr{F}=\mathscr{F}$ が満たされればよい．$dr, r\omega^j (j=1,2,3)$ が正規直交系となるので，

$$*dr\wedge\omega^j=\frac{r}{2}\epsilon_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l \tag{A.3.35}$$

これより，

$$*\mathscr{F}=i\left\{\frac{f'}{2}\epsilon_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l+2f(1-f)\frac{1}{r}dr\wedge\omega^j\right\}\sigma_j. \tag{A.3.36}$$

よって，自己双対性条件は

$$rf'=2f(1-f). \tag{A.3.37}$$

この一般解は，R を積分定数として

$$f=\frac{r^2}{r^2+R^2}. \tag{A.3.38}$$

で与えられる．

$\mathrm{SU}(2)_A$ のアノマリー　$t\in\mathrm{SU}(2)_A$ とすると，$\mathrm{Tr}(tt_{(a}t_{b)})$ は t_a,t_b が $\mathrm{U}(1)_Y$, $\mathrm{SU}(2)$, $\mathrm{SU}(3)$ のいずれに属する場合もゼロとなる．唯一，$\pi^0\to2\gamma$ のところで見たように，$t_a,t_b\in\mathrm{U}(1)_{\mathrm{EM}}$ のみが $\mathrm{SU}(2)_A$ に対してアノマリーを生む (mixed anomaly)．しかし，$\pi_3(\mathrm{U}(1))=0$ なので，$\mathrm{U}(1)$ はインスタントン解を持たず，アノマリーは対称性を破らない．

$\mathrm{U}(1)_A$ のアノマリー　一方，$\mathrm{U}(1)_A$ の変換に対しては，$\mathrm{Tr}(tt_{(a)}t_{b))}\propto\mathrm{Tr}(t_at_b)$ なので，$\mathrm{U}(1),\mathrm{SU}(2),\mathrm{SU}(3)$ のすべてのゲージ場がアノマリーを生む．したがって，カイラル対称性 $\mathrm{U}(1)_A$ はインスタントン効果で破れる．これにより，$\mathrm{U}(1)_A$ 問題は解決される．

§A.4
QCD 真空と QCD CP 問題

A.4.1　θ 真空

QCD において，真空基底状態での SU(3) ゲージ場は，

$$\mathscr{F}_{\mu\nu}=0\ \Rightarrow\ \mathscr{A}=U^{-1}dU,\quad U(x)\in\mathrm{SU}(3) \tag{A.4.1}$$

と表される．いま，空間的無限遠で $U\to1$ を要請すると，各時刻 t でのゲージ場配位は，

$$U:S^3\to\mathrm{SU}(3) \tag{A.4.2}$$

と見なすことができる．これらのうち，互いに連続変形で移れるものは同一視すると，配位は U のホモトピー類で分類され，その全体は $\pi_3(\mathrm{SU}(3)) \cong \mathbb{Z}$ と対応する．具体的には，この対応は，巻き付き数

$$\begin{aligned} n &:= -\frac{1}{8\pi^2}\int d^3x \mathrm{Tr}\left\{d\mathscr{A}\wedge\mathscr{A}+\frac{2}{3}\mathscr{A}\wedge\mathscr{A}\wedge\mathscr{A}\right\} \\ &= \frac{1}{24\pi^2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathrm{Tr}(U^{-1}dU\wedge U^{-1}dU\wedge U^{-1}dU)\in\mathbb{Z} \end{aligned} \tag{A.4.3}$$

で与えられる．

巻き付き数の時間変化は，

$$\Delta n = n(t=\infty)-n(t=-\infty) = \int_{\mathbb{R}^4} d\mathscr{K} = \int_{\mathbb{R}^4} -\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}(\mathscr{F}\wedge\mathscr{F}). \tag{A.4.4}$$

これより，インスタントンは巻き付き数の変化を引き起こす．いま，巻き付き数 n の真空を $|n\rangle$ と表すと，

$${}_+\langle n+q|n,t\rangle_- = C\int [dA]_q\cdots e^{-S_E} = A_q. \tag{A.4.5}$$

よって，新たな真空の基底 $|\theta\rangle$ を

$$|\theta\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-in\theta}|n\rangle, \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi) \tag{A.4.6}$$

により定義すると，

$${}_+\langle\theta'|\theta\rangle_- = 2\pi\delta(\theta-\theta')\sum_{q\in\mathbb{Z}} A_q e^{i\theta q}. \tag{A.4.7}$$

したがって，この θ 真空がエネルギー固有状態を与える．

A.4.2　強い相互作用における CP の破れ

各 θ 真空での Lagrangian は

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} = \mathscr{L}+\theta\mathscr{P}^{(3)}; \tag{A.4.8}$$

$$\mathscr{P}^{(3)} = -\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}(\mathscr{F}^{(3)}\wedge\mathscr{F}^{(3)}) = \frac{g_3^2}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}). \tag{A.4.9}$$

と表される．この θ に依存する補正項は $\theta\neq 0$ のとき，CP を破る．

Chiral anomaly のため，この θ に依存した CP の破れとクォーク質量項の複素位相による CP の破れは密接に関連する．以下，$q=(u,d,s)$ の 3 クォークモデルで考える．このとき，$\mathrm{U}(3)_R\times\mathrm{U}(3)_L$ 対称性のうち，$\mathrm{U}(1)_b$ は厳密な対称性，$\mathrm{SU}(3)_R\times\mathrm{SU}(3)_L = \mathrm{SU}(3)_V\ltimes\mathrm{SU}(3)_A$ 対称性はクォーク質量項により弱く破れた近似的対称性となる．ただし，$\mathrm{SU}(3)_A$ はクォーク凝縮により自発的に破れる．また，残る

$\mathrm{U}(1)_A$ は chiral anomaly で破れる．$it\gamma_5$ を対応する無限小カイラル変換とするとき，アノマリー関数は，一般に

$$\begin{aligned}\mathscr{P} &= \frac{g_1^2}{4\cdot 8\pi^2}\mathrm{Tr}(tY^2)F^{(1)}\cdot\tilde{F}^{(1)} + \frac{g_1 g_2}{2\cdot 4\pi^2}\mathrm{Tr}(tYt_a^{(2)})F^{(1)}\cdot\tilde{F}^{(2)a} \\ &\quad + \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}(t)\left(g_2^2 F^{(2)}\cdot\tilde{F}^{(2)} + g_3^2 F^{(3)}\cdot\tilde{F}^{(3)}\right). \end{aligned} \tag{A.4.10}$$

ここで，2 形式の内積において，$F\cdot G = F_{\mu\nu}G^{\mu\nu}/2$.　また，次の規格化を採用：

$$\mathrm{Tr}(t_a^{(2)}t_b^{(2)}) = \delta_{ab}, \quad \mathrm{Tr}(t_\alpha^{(3)}t_\beta^{(3)}) = \delta_{\alpha\beta}. \tag{A.4.11}$$

これより，$\mathrm{Tr}(t)\neq 0$ となるカイラル変換 $U=\exp(i\alpha t\gamma_5)$ に対して，θ パラメーターは

$$\theta\frac{g_3^2}{8\pi^2}F^{(3)}\cdot\tilde{F}^{(3)} \to (\theta+\alpha\mathrm{Tr}(t))\,\frac{g_3^2}{8\pi^2}F^{(3)}\cdot\tilde{F}^{(3)} \tag{A.4.12}$$

と変化する．一方，クォークの質量行列は

$$\bar{q}_L\mathscr{M}q_R + \mathrm{h.c.} \to \bar{q}_L e^{i\alpha t}\mathscr{M}e^{i\alpha t}q_R + \mathrm{h.c.} \tag{A.4.13}$$

と変換する．これより，$\mathscr{M}$ の全位相は

$$\det\mathscr{M} \to e^{i\alpha\mathrm{Tr}(t)}\det\mathscr{M} \tag{A.4.14}$$

と変化する．よって，最初，この変換で $\det\mathscr{M}\in\mathbb{R}$ としておき，そのときの θ を θ_0 とおく．このとき，$\mathrm{SU}(3)_R\times\mathrm{SU}(3)_L$ 変換で $\mathscr{M}$ を非負固有値 $[m_u,m_d,u_s]$ をもつ実対角行列に対角化できる．この表示から出発して，カイラル変換 $U=\exp(i\alpha t\gamma_5)$ を施して，$\theta\to 0$ とすると，

$$0=\theta_0+\alpha\mathrm{Tr}(t)=0. \tag{A.4.15}$$

このとき，クォークの質量行列は

$$\mathscr{M} = e^{i\alpha t}[m_u,m_d,m_s]e^{i\alpha t}. \tag{A.4.16}$$

$|\theta_0|\ll 1$ とすると，

$$\mathscr{M} \simeq [m_u,m_d,m_s] + i\alpha\{t,[m_u,m_d,m_s]\}. \tag{A.4.17}$$

この第 2 項が CP の破れを生む:

$$\mathscr{L}_{\mathrm{CPV}} = i\alpha\bar{q}(t\mathscr{M}_0+\mathscr{M}_0 t)\gamma_5 q. \tag{A.4.18}$$

この CP の破れの量子効果を考える際に，$\mathscr{L}_{\mathrm{CPV}}$ がカイラル SU(3) の擬 Goldston bosons B_a に対応する成分をもつと，量子効果は真空の再定義（$\langle\bar{q}\lambda_a q\rangle,\langle\bar{q}\lambda_a\gamma_5 q\rangle$

の値の変化）を生み出す．これを避けるには，$\mathscr{L}_{\rm CPB}$ がカイラル SU(3) に関する真空整列条件

$$\delta_\alpha \mathscr{L}_{\rm CPV} = \alpha \bar{q}[\tfrac{1}{2}\lambda_\alpha, t\mathscr{M}_0 + \mathscr{M}_0 t]q = 0 \ (\alpha = 1, \cdots, 8) \tag{A.4.19}$$

を満たせば良い．解は，

$$t\mathscr{M}_0 + \mathscr{M}_0 t = cI_3 \ \Leftrightarrow \ t = \frac{c}{2}\mathscr{M}_0^{-1}. \tag{A.4.20}$$

よって，条件 (A.4.15) を考慮して，

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\rm CPV} &= -i\frac{\theta_0}{{\rm Tr}\mathscr{M}_0^{-1}}\bar{q}\gamma_5 q \\ &= -i\theta_0 \frac{m_u m_d m_s}{m_u m_d + m_d m_s + m_u m_s}\left(\bar{u}\gamma_5 u + \bar{d}\gamma_5 d + \bar{s}\gamma_5 s\right). \end{aligned} \tag{A.4.21}$$

A.4.3　中性子電気双極子モーメント

References

- Baluni V: "CP-nonconservation effects in quantum chronodynamics", PRD19 (1979)19.
- Crewther RJ, Di Vecchia P, Veneziano G, Witten E: "Chiral estimate of the electric dipole moment of the neutron in quantum chromodynamics", PLB88 (1979) 123.

双極子モーメントの計算法　一般に，フェルミ粒子に対して，

$$u(p) = \begin{pmatrix} (E - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\chi \\ m\chi \end{pmatrix}, \tag{A.4.22a}$$

$$\begin{aligned} u(p')^\dagger \gamma^j u(p) &= m\left\{i(E'-E)\delta^j_l - \epsilon_{jkl}(p'+p)^k\right\}\chi^\dagger\sigma^l\chi \\ &\quad -imq_j\chi^\dagger\chi, \end{aligned} \tag{A.4.22b}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\gamma^{jk}u(p) &= m\epsilon^{jkl}\left\{(E'+E)\delta^n_l + i\epsilon_{lkn}q^k\right\}\chi^\dagger\sigma_n\chi \\ &\quad +m\epsilon^{jkl}(p'+p)_l\chi^\dagger\chi \end{aligned} \tag{A.4.22c}$$

より $(q = p' - p)$、

$$-i\bar{u}(p')\gamma_{\mu\nu}q^\nu u(p)A^\mu(q) = \frac{1}{2}\bar{u}(p')\gamma_{\mu\nu}u(p)F^{\mu\nu}(q) \to \sigma_j B^j.$$

よって、このフェルミ粒子の磁気モーメントを

$$\mu^j = \mu\sigma^j \tag{A.4.23}$$

と置くと,

$$\langle p'|T(j_\mu(0)e^{iS_{\rm int}})|p\rangle \to i\mu\bar{u}(p')\gamma_{\mu\nu}q^\nu u(p)+\cdots. \tag{A.4.24}$$

例えば,

$$e\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p) = i\frac{e}{2m}\bar{u}(p')\left[(p+p')_\mu + \gamma_{\mu\nu}q^\nu\right]u(p) \tag{A.4.25}$$

より，自由荷電粒子の磁気モーメントは

$$\mu^j = \frac{e}{2m}\sigma^j. \tag{A.4.26}$$

同様にして,

$$\gamma_{\mu\nu}\gamma_5 = i\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\gamma^{\lambda\sigma} \tag{A.4.27}$$

より,

$$-\bar{u}(p')\gamma_{\mu\nu}\gamma_5 q^\nu u(p)A^\mu(q) = \frac{1}{2}\bar{u}(p')\gamma_{\mu\nu}u(p)\tilde{F}^{\mu\nu}(q) \to \sigma_j E^j$$

よって，フェルミ粒子が電気双極子モーメント

$$D^j = D\sigma^j \tag{A.4.28}$$

をもつとすると,

$$\langle p'|T(j_\mu(0)e^{iS_{\rm int}})|p\rangle \to D\bar{u}(p')\gamma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5 u(p)+\cdots. \tag{A.4.29}$$

中性子の電気双極子モーメント　一般論より，中性子の電気双極子モーメント D_n は

$$-\langle n(p')|T(J_\mu(0)\int d^4x i\mathscr{L}_{\rm CPV})|n(p)\rangle \to D_n\bar{u}(p')\gamma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5 u(p)+\cdots \tag{A.4.30}$$

により決定される．Crewther らの結果は,

$$D_n \simeq g_{\pi NN}\bar{g}_{\pi NN}\frac{1}{4\pi^2 m_N}\ln\left(\frac{m_N}{m_\pi}\right). \tag{A.4.31}$$

ここで,

$$\mathscr{L}_{\pi NN} = \boldsymbol{\pi}\cdot\bar{N}\boldsymbol{\tau}\left(i\gamma_5 g_{\pi NN}+\bar{\gamma}_{\pi NN}\right)N, \tag{A.4.32a}$$

$$g_{\pi NN} \simeq 13.4, \tag{A.4.32b}$$

$$\bar{g}_{\pi NN} \simeq -\theta_0\frac{(m_\Xi - m_N)m_u m_d}{F_\pi(m_u+m_d)(2m_s-m_u-m_d)}, \tag{A.4.32c}$$

$$\simeq -0.038\theta_0. \tag{A.4.32d}$$

よって,

$$D_n \simeq 5.2\times 10^{-16}\theta_0 e{\rm cm}. \tag{A.4.33}$$

Bag モデルによる Baluni の結果も近い値となる:

$$D_n \simeq 2.7\times 10^{-16}\theta_0 e{\rm cm}. \tag{A.4.34}$$

実験により得られた上限値は

$$|D_n| < 3\times 10^{-26} e{\rm cm} \ \Rightarrow\ |\theta_0| \lesssim 10^{-9}. \tag{A.4.35}$$

B 微分幾何学からの準備

§B.1 Complex Structure

B.1.1 複素多様体

【**Definition B.1.1** (複素構造)】

1. 連結 Hausdorff 空間 $\mathscr{M}$ に対して，その開被覆 $\{\mathscr{U}_j\}$ と各 $\mathscr{U}_j$ から $\mathbb{C}^n$ の中への同相写像 ϕ_i が与えられ，
$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(\mathscr{U}_i \cap \mathscr{U}_j) \to \phi_j(\mathscr{U}_i \cap \mathscr{U}_j) \tag{B.1.1}$$
が正則写像であるとき，$\{\mathscr{U}_j, \phi_j\}$ は $\mathscr{M}$ 上の**局所複素座標系**という．

2. $\mathscr{M}$ 上の２つの局所複素座標系 $\{\mathscr{U}_j, \phi_j\}$，$\{\mathscr{V}_k, \psi_k\}$ は，$\mathscr{U}_j \cap \mathscr{V}_k \neq \varnothing$ となる任意の j, k に対して $\psi_k \circ \phi_j^{-1}$ が双正則写像となるとき，**正則同値**であるという．

3. 連結 Hausdorff 空間上の局所複素座標系の正則同値類を**複素構造**，複素構造 X が定義されている連結 Hausdorff 空間を**複素多様体**といい，同じ記号 X で表す．

□

【**Definition B.1.2** (正則写像)】

1. ２つの複素多様体 X, Y の間の写像 $f : X \to Y$ は，それぞれの局所複素座標系 $\{U_j, \phi_j\}$，$\{\mathscr{V}_k, \psi_k\}$ に対して，$\psi_k \circ f\phi_j^{-1}$ が正則写像となるとき**正則**であるという．

2. 正則写像 f が逆写像をもちそれも正則となるとき**双正則**であるという．特に，２つの複素多様体の間に双正則な同相写像が存在するとき，それらは**双正則同値**であるという．

□

【**Definition B.1.3** (解析的集合と部分多様体)】

1. S を複素多様体 X^n の閉部分集合とする．S の各点 p に対して，p の開近傍 $\mathscr{U}(p)$ とその上で定義された正則関数の組 $f_p^1, \cdots, f_p^\nu$ が存在して
$$S \cap \mathscr{U}(p) = \left\{ q \in U(p) \,\middle|\, f_p^1(q) = \cdots = f_p^\nu(q) = 0 \right\} \tag{B.1.2}$$
が成り立つとき，S を X^n の**解析的部分集合**，$f_p^1, \cdots, f_p^\nu$ をその p における**局所方程式**という．

2. 解析的部分集合 S の点 p に対して，p における局所複素座標系を $(z^1, \cdots, z^n)$ とするとき，p で
$$\mathrm{rank}\frac{\partial(f^1, \cdots, f^\nu)}{\partial(z^1, \cdots, z^n)} = \nu \tag{B.1.3}$$
となる局所方程式 $f^1, \cdots, f^\nu$ が存在するとき，S は p でなめらかであるといい，$n - \nu$ を S の p における次元という．

3. 解析的部分集合 S が点 p においてなめらかでないとき，p を S の**特異点**という．

4. 複素多様体の特異点を持たない解析的部分集合を**部分多様体**という．

□

B.1.2　概複素多様体

【**Definition B.1.4** (概複素構造)】

1. $2n$ 次元多様体 $\mathscr{M}$ の接バンドル $T(\mathscr{M})$ から自分自身への（ベクトルバンドルとしての）バンドル写像 J，すなわち可逆な $(1,1)$ 型テンソル場 J が $J^2 = -1$ を満たすとき，J を $\mathscr{M}$ の**概複素構造**という．また，組 $(\mathscr{M}, J)$ を**概複素多様体**という．

2. $\mathbb{C}^n \ni (z^1, \cdots, z^n)$ に対して，$z^j = x^j + iy^j$ とおくとき，写像
$$J : \partial/\partial x^j \to \partial/\partial y^j, \quad \partial/\partial y^j \to \partial/\partial x^j \tag{B.1.4}$$
を $\mathbb{C}^n$ の**標準複素構造**という．

3. 概複素多様体 $(\mathscr{M}, J)$ の**自然な向き**を $(X_1, \cdots, X_m, JX_1, \cdots, JX_m)$ により定義する．$\mathbb{C}^m$ の場合，この向きは $(x^1, \cdots, x^m, y^1, \cdots, y^m)$ に対応する．

3. 複素多様体 X の局所複素座標系を $\{(\psi, \mathscr{U})\}$ とするとき，$\psi : \mathscr{U} \to \mathbb{C}^n$ による $\mathbb{C}^n$ の標準複素構造の引き戻しは X 上に概複素構造 J を定義する．これを，X の複素構造に付随する概複素構造という．

□

【Proposition B.1.5 (積分可能性)】　概複素構造 J は次の 3 つの互いに同値な条件のいずれかが成り立つとき**積分可能**であるという．

i) 任意の $(1,0)$ 型 1 形式 θ に対して，$d\theta$ が $(0,2)$ 型成分を持たない．

ii) 次式により定義される $(1,2)$ 型テンソル場 N がゼロとなる：

$$\frac{1}{2}N(X,Y) = [JX, JY] - [X,Y] - J[X, JY] - J[JX, Y] \tag{B.1.5}$$

N は **Nijenhuis テンソル**または**複素捻れテンソル**と呼ばれる．

iii) $(1,0)$ 型ベクトル場の交換子が常に $(1,0)$ 型ベクトル場となる．

□

【Theorem B.1.6】　$2n$ 次元多様体 $\mathscr{M}$ の概複素構造 J が $\mathscr{M}$ のある複素構造に付随するための必要十分条件は，J が積分可能であることである．□

B.1.3　複素多様体上のテンソル

【Definition B.1.7 (複素接バンドル)】

1. 概複素多様体 $(\mathscr{M}, J)$ に対して，$\mathscr{M}$ の複素接バンドル $T^c(\mathscr{M}) = T(\mathscr{M}) \otimes \mathbb{C}$ の部分複素ベクトルバンドルを

$$\begin{aligned} T'(\mathscr{M}) &= T^{1,0}(\mathscr{M}) = \{V \in T^c(\mathscr{M}) \mid JV = iV\}, & \text{(B.1.6a)} \\ T''(\mathscr{M}) &= T^{0,1}(\mathscr{M}) = \{V \in T^c(\mathscr{M}) \mid JV = -iV\}, & \text{(B.1.6b)} \end{aligned}$$

により定義すると，

$$T^c(\mathscr{M}) = T'(\mathscr{M}) \oplus T''(\mathscr{M}). \tag{B.1.7}$$

2. 複素余接バンドル $T^{*c}(\mathscr{M})$ に対して，

$$
\begin{aligned}
A^{1,0}(\mathscr{M}) &= \{\omega \in T^{*c}(\mathscr{M}) \mid J\omega = i\omega\}, && \text{(B.1.8a)} \\
A^{0,1}(\mathscr{M}) &= \{\omega \in T^{c}(\mathscr{M}) \mid J\omega = -i\omega\}, && \text{(B.1.8b)}
\end{aligned}
$$

と定義すると，

$$A^1(\mathscr{M}) = T^{c*}(\mathscr{M}) = A^{1,0}(\mathscr{M}) \oplus A^{1,0}(\mathscr{M}). \tag{B.1.9}$$

$\bigwedge T^{c*}(\mathscr{M})$ の部分ベクトルバンドルを

$$A^{p,q}(\mathscr{M}) = (\bigwedge^p A^{1,0}(\mathscr{M})) \wedge (\bigwedge^q A^{0,1}(\mathscr{M})) \tag{B.1.10}$$

により定義すると，

$$A^n(\mathscr{M}) = \bigwedge^n T^{c*}(\mathscr{M}) = \sum_{p+q=n} A^{p,q}(\mathscr{M}). \tag{B.1.11}$$

このとき，$A^{p,q}(\mathscr{M})$ の（局所）断面を (p,q) 次の複素微分形式といい，その全体を $\mathscr{A}^{p,q}(\mathscr{M})$ と表す．

□

【Proposition B.1.8】　複素多様体 X^n の局所複素座標系を $(z^1, \cdots, z^n)$ とする．

1. $T^{1,0}(X)$ の局所断面，すなわち $(1,0)$ 型複素ベクトル場の基底は

$$\partial/\partial z^j = \frac{1}{2}\left(\partial/\partial x^j - i\partial/\partial y^j\right), \tag{B.1.12}$$

で，$T^{0,1}(X)$ の局所断面，すなわち $(0,1)$ 型複素ベクトル場の基底は

$$\partial/\partial \bar{z}^j = \frac{1}{2}\left(\partial/\partial x^j + i\partial/\partial y^j\right), \tag{B.1.13}$$

で与えられる．

2. $\mathscr{A}^{p,q}$ の基底は

$$dz^I \wedge d\bar{z}^J;\ I = (i_1, \cdots, i_p),\ J = (j_1, \cdots, j_q) \tag{B.1.14}$$

で与えられる．

□

【Definition B.1.9 (正則ベクトル場と正則微分形式)】

1. 複素多様体 X 上の $(1,0)$ 型複素ベクトル場 V を局所複素座標系 $(z^1,\cdots,z^n)$ を用いて局所的に
$$V=\sum_j V^j\partial/\partial z^j \tag{B.1.15}$$
と表すとき，$V^1,\cdots,V^n$ が常に正則関数となるならば V を正則ベクトル場という．

2. 複素多様体 X 上の $(p,0)$ 次微分形式 ω を局所複素座標系 $(z^1,\cdots,z^n)$ を用いて局所的に
$$\omega=\sum_{I=(i_1,\cdots,i_p)}\omega_I dz^I \tag{B.1.16}$$
と表すとき，ω_I が常に正則関数となるならば ω を p 次正則微分形式という．

□

【**Proposition B.1.10 (Dolbeault 微分)**】

1. 複素多様体 X 上の (p,q) 次複素微分形式 ω に対して，直和分解
$$d\omega=\partial\omega+\bar\partial\omega\in\mathscr{A}^{p+1,q}(X)+\mathscr{A}^{p,q+1}(X) \tag{B.1.17}$$
により写像
$$\partial\ :\ \mathscr{A}^{p,q}(X)\to\mathscr{A}^{p+1,q}(X), \tag{B.1.18}$$
$$\bar\partial\ :\ \mathscr{A}^{p,q}(X)\to\mathscr{A}^{p,q+1}(X), \tag{B.1.19}$$
を定義すると，
$$\partial^2=0,\ \bar\partial^2=0,\ \partial\bar\partial+\bar\partial\partial=0. \tag{B.1.20}$$

2. $\omega\in\mathscr{A}^{p,0}(X)$ が正則であるための必要十分条件は，$\bar\partial\omega=0$.

□

§B.2
複素構造の変形

【Proposition B.2.1】　複素構造 J の無限小変形を $\dot{J}$ と表すと

$$\dot{J}J + J\dot{J} = 0$$

が成り立つ．この条件は，

$$\begin{aligned}&\dot{J} = I + \bar{I};\\ &I = I^a{}_{\bar{b}}\partial_a \otimes d\bar{z}^b \in \mathscr{T}^{1,0} \otimes \mathscr{A}^{0,1}(M).\end{aligned}$$

このとき，

$$\begin{aligned}&\dot{N} = -2(i+J)\bar{\partial}I + 2(i-J)\partial\bar{I},\\ &\pounds_X J = 2i(\bar{\partial}X' - \partial X'').\end{aligned}$$

ここで，N は Nijenhuis テンソル．また，$X = X' + X'' \in \mathscr{T}^{1,0} \oplus \mathscr{T}^{0,1}(M)$.　□

【Definition B.2.2 (可微分族)**】**　$\mathbb{R}^m$ 内の領域 B の各点 t に対しコンパクト複素多様体 $M_t = M_t^n$ が与えられているとする．このとき，次の条件を満たす可微分多様体 $\mathscr{M}$ と $\mathscr{M}$ を B の上に写す $\mathscr{C}^\infty$ 写像 ϖ が存在するならば，集合 $\{M_t \mid t \in B\}$ をコンパクト多様体の**可微分族** (differentiable family) とよぶ：

(i) $\mathscr{M}$ の各点において $\mathscr{C}^\infty$ 写像 ϖ の Jacobi 行列の階数は m に等しい．

(ii) 各点 $t \in B$ に対して，$\varpi^{-1}(t)$ は $\mathscr{M}$ のコンパクトな連結部分集合である．

(iii) $\varpi^{-1}(t) = M_t$

(iv) $\mathscr{M}$ の局所開被覆 $\{\mathscr{U}_j \mid j = 1,2,3,\cdots\}$ と $\mathscr{U}_j$ 上の複素数値 $\mathscr{C}^\infty$ 関数 $z_j^a(p)$ $(a = 1,\cdots,n,\ j = 1,2,3,\cdots)$ が存在して，各 t に対して複素多様体 M_t の局所複素座標系をなす．

[小平邦彦著「複素多様体論」(岩波書店，1992)]　□

【Definition B.2.3 (可微分族の同値性)**】**　領域 $B \subset \mathbb{R}^m$ を底空間とする 2 つの可微分族 $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ と $(\mathscr{N}, B, \pi)$ が与えられたとき，$\mathscr{M}$ を $\mathscr{N}$ の上に写す可微分同相写像 Φ が存在して，各 $t \in B$ に対して Φ が $M_t = \varpi^{-1}(t)$ を $N_t = \pi^{-1}(t)$ の上に双正則に写すならば，可微分族 $\mathscr{M}$ と $\mathscr{N}$ は**同値**であるという．　□

【Definition B.2.4 (自明な可微分族)**】**　可微分族 $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ が $(M \times B, B, \pi)$ $(M = \varpi^{-1}(t_0), t^0 \in B)$ と同値であるとき，$(\mathscr{M}, B, \varpi)$ は**自明**であるという．□

【Theorem B.2.5 (Frölicher-Nijenhuis の定理 (1957))**】**　コンパクト複素多様体の可微分族 $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ (B は $\mathbb{R}^m$ 内の領域で $0 \in B$) において，$H^1(M_0, \Theta^0) = 0, M_0 = \varpi^{-1}(0)$ ならば，十分小さい開多重区間 I ($0 \in I \subset B$) に対して $(\mathscr{M}_I, I, \varpi)$ は自明である．
[Frølicher A, Nijenhuis A: *A theorem on stability of complex structures*, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) 43: 239-41 (1957)]　□

【Theorem B.2.6】　複素構造の無限小変形の自由度は $H^1(M, \Theta)$ と 1 対 1 に対応する．ここで，Θ は正則ベクトル場の層．□

【Note B.2.7 (説明)**】**　複素構造の無限小変形と $H^1(M, \Theta)$ との対応は次のようにして得られる．

1. 可微分族 $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ において，$t \in B$ 近傍での複素局所座標系 $(\mathscr{U}_j, z_j^a(a = 1, \cdots, n))$ に対し，各 t での座標変換を $z_j = f_{ji}(z_i, t)$ とおく．このとき，$\mathscr{U}_j \cap \mathscr{U}_i$ での正則ベクトル場 $\theta_{ji}(t)$ を
$$\theta_{ji}(t) = \frac{f_{ji}^a(z_i, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_i^a} \tag{B.2.1}$$
により定義すると，座標変換の結合則
$$f_{ki}(z_i, t) = f_{kj}(f_{ji}(z_i, t), t) \tag{B.2.2}$$
より
$$\theta_{ki}(t) = \theta_{kj}(t) + \theta_{ji}(t), \quad \theta_{ij}(t) = -\theta_{ji}(t) \tag{B.2.3}$$
が成り立つ．したがって，対応 $\mathscr{U}_j \cap \mathscr{U}_i \mapsto \theta_{ji}(t)$ は M_t 上の正則ベクトル場の層 Θ_t に係数をもつ Cech コホモロジーにおける 1 コサイクルを定義する．

2. このコサイクルがコバウンダリーとなるとき，すなわち各 $\mathscr{U}_i$ 上の正則ベクトル場 $\theta_i(t)$ が存在して
$$\theta_{ji} = \theta_j - \theta_i \tag{B.2.4}$$
となる条件は，新たな座標系 $Z_j = g(z_j, t)$ を
$$\frac{\partial g(z_j, t)}{\partial t} = \theta_j(z_j, t) \tag{B.2.5}$$
により定めるとき，Z_j の変換が t に依存しない $(Z_j = F_{ji}(Z_i))$ ことと同等である．

3. 以上より，複素構造の変形の自由度は $H^1(M_t, \Theta_t)$ と対応する．

□

【**Definition B.2.8** (複素解析族)】　$\mathbb{C}^m$ 内の領域 B の各点 t に対しコンパクト複素多様体 $M_t = M_t^n$ が与えられているとする．このとき，次の条件を満たす複素多様体 $\mathscr{M}$ と $\mathscr{M}$ を B の上に写す正則写像 ϖ が存在するならば，M_t は t に**正則に依存する**といい，集合 $\{M_t \mid t \in B\}$ をコンパクト多様体の**複素解析族** (complex analytic family) とよぶ：

(i) $\mathscr{M}$ の各点において正則写像 ϖ の Jacobi 行列の階数は m に等しい．

(ii) 各点 $t \in B$ に対して，$\varpi^{-1}(t)$ は $\mathscr{M}$ のコンパクトな部分多様体である．

(iii) $\varpi^{-1}(t) = M_t$

[小平邦彦著「複素多様体論」（岩波書店，1992)]　□

【**Theorem B.2.9** (微分同相性)】　コンパクト多様体の複素解析族 $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ において，任意の $t, s \in B$ に対して M_t と M_s は微分同相である．[小平邦彦著「複素多様体論」（岩波書店，1992)]　□

【**Definition B.2.10** (完備性)】　複素解析族 $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ が $p \in B$ で**完備**であるとは，点 $q \in C$ と双正則同型 $\phi : N_q \to M_p$ が存在するような任意の族 $(\mathscr{N}, C, \pi)$ に対して，q の近傍 $\mathscr{U}$ と正則写像 $f : T' \to B, h : \pi^{-1}(\mathscr{U}) \to \mathscr{M}$ が存在して，次の 3 条件を満たすことである．

i) $f \circ \pi = \varpi \circ h$

ii) $f(q) = p$

iii) N_q 上で $h = \phi$.

このとき，$\mathscr{U}$ を十分小さく取ると，h は各ファイバー N_t から $M_{f(t)}$ 上への双正則同型を与えている．したがって，p で完備な族は，M_p のすべての微小変形を含んでいるといえる．　□

【**Definition B.2.11** (効果的パラメーター)】　複素解析族 $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ の点 $p \in B$ において，小平-Spencer 写像

$$\rho_p : T_p B \to H^1(M_p, \Theta) \tag{B.2.6}$$

が単射となるとき，$(\mathscr{M}, B, \varpi)$ は p で**効果的にパラメータ付けされている**という．

□

【**Theorem B.2.12** (倉西の基本定理 (1964))】　任意のコンパクト複素多様体 M に対し，次の条件を満たす複素解析族 $(\mathscr{M}, B, \varpi)$ と $p \in B$ が存在する：

i) B の各点で完備.

ii) p で効果的にパラメーター付けされている.

iii) $M_p = M$.

このとき，B を**倉西空間** (Kuranishi space) または M の**局所モジュライ空間** (local moduli space) と呼ぶ. □

§B.3
エルミート多様体

B.3.1　エルミート計量

【Definition B.3.1】

1. 概複素多様体 $(\mathscr{M}, J)$ の Riemann 計量 g が任意のベクトル場 X, Y に対して

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \tag{B.3.1}$$

を満たすとき，**エルミート計量**という．

2. エルミート計量を与えられた概複素多様体を**概エルミート多様体**，エルミート計量を与えられた複素多様体を**エルミート多様体**という．

□

【Definition B.3.2 (Kähler 形式)】　概エルミート多様体 $(\mathscr{M}, J, g)$ に対して，

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y) \tag{B.3.2}$$

により定義される 2 次微分形式 Φ を**基本 2 形式**ないし **Kähler 形式**という．成分表示では，$\omega_{jk} = g_{kl}J^l{}_j = J_{kj} = -J_{jk}$ である．(注：Kobayashi-Nomizu の定義 Φ との対応は，$\Phi = -\omega$.)　□

【Proposition B.3.3】

1. エルミート計量 g を複素接バンドルに拡張すると次の性質を持つ：
   i) 任意の複素ベクトル場 Z, W に対して，$g(\bar{Z}, \bar{W}) = \overline{g(Z, W)}$.
   ii) 任意のゼロでない複素ベクトル場 Z に対して，$g(Z, \bar{Z}) > 0$.
   iii) $(1,0)$ 型ベクトル場 Z と $(0,1)$ 型ベクトル場 W に対して，$g(Z, \bar{W}) = 0$.

   特に，$h(Z, W) = 2g(Z, \bar{W})$ は $T'(\mathscr{M})$ 上の正値エルミート計量を与える．

2. 逆に，$T'(\mathscr{M})$ の正値エルミート計量 $h(*, *)$ が与えられると，$2g(Z, \bar{W}) = h(Z, W)(Z, W \in T'_p(\mathscr{M}))$ と 1.i)-iii) を満たす複素接バンドルの対称双線形形式 g が一意的に存在し，その実接バンドル $T(\mathscr{M})$ への制限は $\mathscr{M}$ のエルミート計量を与える．

3. $T'(\mathscr{M})$ の断面，すなわち $(1,0)$ 型複素ベクトル場の基底を $f_1, \cdots, f_n$，$\mathscr{A}^{1,0}(\mathscr{M})$ の双対基底を $\phi^1, \cdots, \phi^n$ とおく．すなわち，$\phi^j(f_k) = \delta^j_k$．このとき，$T'(\mathscr{M})$ のエルミート計量 h を

$$h = h_{ij}\phi^i\bar{\phi}^j;\ h_{ij} = h(f_i, f_j) = 2g(f_i, \bar{f}_j) \tag{B.3.3}$$

とおくと，h_{ij} はエルミート行列で，基本 2 形式 ω は

$$\omega = \frac{i}{2}h_{ij}\phi^i \wedge \bar{\phi}^j \tag{B.3.4}$$

と表される．

□

【Note B.3.4】　Riemann 計量 g を $T^{*\mathbb{C}}(\mathscr{M})$ に拡張したものは，形式的に

$$ds^2 = g_{jk}dz^j \otimes dz^k + g_{j\bar{k}}dz^j \otimes d\bar{z}^k + g_{\bar{j}k}d\bar{z}^j \otimes dz^k + g_{\bar{j}\bar{k}}d\bar{z}^j \otimes d\bar{z}^k \tag{B.3.5}$$

と表される．ここで，計量が対称形式である条件は $g_{jk} = g_{kj}, g_{j\bar{k}} = g_{\bar{k}j}, g_{\bar{j}\bar{k}} = g_{\bar{k}\bar{j}}$，計量が実接空間 $T^*(\mathscr{M})$ 上で実である条件は $g_{\bar{j}\bar{k}} = \bar{g}_{jk}, g_{\bar{j}k} = \bar{g}_{j\bar{k}}$ と表されので，

$$ds^2 = g_{jk}dz^j \otimes dz^k + \bar{g}_{jk}d\bar{z}^j \otimes d\bar{z}^k + g_{j\bar{k}}(dz^j \otimes d\bar{z}^k + d\bar{z}^k \otimes dz^j). \tag{B.3.6}$$

このとき，Hermite 計量である条件は，$g_{jk} = 0$．よって，Hermite 計量は，

$$ds^2 = g_{j\bar{k}}(dz^j \otimes d\bar{z}^k + d\bar{z}^k \otimes dz^j). \tag{B.3.7}$$

ただし，$\bar{g}_{j\bar{k}} = g_{k\bar{j}}$．したがって，$h_{jk} = 2g_{j\bar{k}}$ を用いると，

$$ds^2 = \tfrac{1}{2}h_{jk}(dz^j \otimes d\bar{z}^k + d\bar{z}^k \otimes dz^j) \tag{B.3.8}$$

この式はしばしば，

$$ds^2 = h_{jk}dz^jd\bar{z}^k \tag{B.3.9}$$

と表される．たとえば，

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \ \Rightarrow\ ds^2 = dzd\bar{z}. \tag{B.3.10}$$

また，

$$ds^2 = \mathrm{Re}(h_{jk}dz^j \otimes d\bar{z}^k), \quad \omega = -\mathrm{Im}(h_{jk}dz^j \otimes d\bar{z}^k). \tag{B.3.11}$$

特に，

$$\omega = \frac{i}{2}h_{jk}dz^j \wedge d\bar{z}^k. \tag{B.3.12}$$

□

§B.4 Kähler 多様体

【**Definition B.4.1**】

1. 概エルミート多様体 $(\mathscr{M}, J, g)$ は，基本 2 形式 Φ が閉形式となるとき，**概 Kähler 多様体**という．
2. 概 Kähler 多様体は，その概複素構造が積分可能であるとき，すなわち，複素多様体で J がその複素構造から決まる概複素構造となるとき，**Kähler 多様体**という．

□

【**Note B.4.2**】　様々な定義の関係

$\Phi\backslash J$	N/A	$\exists$(almost complex)	$N=0$(complex)
$\exists$		almost Hermitian	Hermitian
$d\Phi=0$	almost symplectic	almost Kähler	Kähler

□

【**Theorem B.4.3**】　概エルミート多様体 $(\mathscr{M}, J, g)$ が Kähler 多様体となるための必要十分条件は，g が概複素的すなわち，$\nabla J=0$ となることである． □

【**Theorem B.4.4**】　エルミート多様体が Kähler 多様体となるための必要十分条件は，各点 p の近傍で

$$ds_p^2 = dz^i d\bar{z}^i, \quad D(\partial_{z_i})|_p = 0$$

となる複素座標が存在することである． □

B.4.1 曲率テンソル

【**Proposition B.4.5**】　Kähler 多様体の曲率テンソル R と Ricci テンソル Ric は次の性質をもつ：

1. $R(X,Y)\circ J = J\circ R(X,Y), \quad R(JX,JY) = R(X,Y).$
2. $\mathrm{Ric}(JX,JY) = \mathrm{Ric}(X,Y).$

3. $\mathrm{Ric}(X,Y)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(J\circ R(X,JY))$.

□

【**Definition B.4.6 (Ricci 形式)**】　Kähler 多様体の Ricci 曲率から定義される

$$\rho(X,Y)=\mathrm{Ric}(JX,Y)$$

は 2 形式となり，**Ricci 形式**と呼ばれる．□

【**Proposition B.4.7 (成分表示)**】　$e_1,\cdots,e_n,e_{\tilde{1}},\cdots,e_{\tilde{n}}(e_{\tilde{k}}=Je_k)$ を $T_x(M)$ の基底，$\theta^1,\cdots,\theta^n,\theta^{\tilde{1}},\cdots,\theta^{\tilde{n}}(\theta^{\tilde{k}}=-J\theta^k)$ をその双対基底として，

$$\phi^j=(1-iJ)\theta^j,\quad f_j=\frac{1}{2}(1-iJ)e_j,$$
$$\Psi^j_k=\phi^j(\mathscr{R}f_j)=\mathscr{R}^j{}_k-i\mathscr{R}^j{}_{\tilde{k}}$$

とおくと，

$$\mathscr{R}^{\tilde{j}}{}_{\tilde{k}}=\mathscr{R}^j{}_k,\quad \mathscr{R}^{\tilde{j}}{}_k=-\mathscr{R}^j{}_{\tilde{k}}$$

より，

$$\rho=i\Psi^j_j$$

が成り立つ．□

B.4.2　座標成分表示

【**Proposition B.4.8**】　複素座標系 z^j に関する成分表示のもとで次の諸式が成り立つ：

1. 計量

$$ds^2=2g_{i\bar{j}}dz^id\bar{z}^j$$

ただし，$\bar{g}_{i\bar{j}}=g_{j\bar{i}}$.

2. Kähler 形式

$$\omega=ig_{i\bar{j}}dz^i\wedge d\bar{z}^j$$

3. 接続係数

$$\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}=g^{i\bar{l}}\frac{\partial g_{\bar{l}j}}{\partial z^k},$$
$$\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}}=\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{k}\bar{j}}=g^{\bar{i}l}\frac{\partial g_{l\bar{j}}}{\partial\bar{z}^k}$$

他の成分はゼロ．

4. 曲率テンソル

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = g_{m\bar{j}}\frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial \bar{z}^l} = \frac{\partial^2 g_{i\bar{j}}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} - g^{m\bar{n}}\frac{\partial g_{i\bar{n}}}{\partial z^k}\frac{\partial g_{\bar{j}m}}{\partial \bar{z}^l}$$

およびこれと Riemann 曲率テンソルの代数的対称性から決まるもの以外はゼロ．

5. Ricci 曲率と Ricci 形式

$$\begin{aligned} &R_{i\bar{j}} = -\frac{\partial^2 \ln G}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}, \\ &\rho = -i\partial\bar{\partial}\ln G, \\ &G = \det(g_{i\bar{j}}). \end{aligned}$$

特に，Ricci 形式は複素構造と体積要素のみで決まる．

□

B.4.3　標準直線バンドル

【Definition B.4.9 (標準直線バンドル)】　n 次元複素多様体 M に対して，$\wedge^n(T'M)^*$ を**標準直線バンドル**といい K で表す．また，$\wedge^n T'M$ を**反標準直線バンドル**といい，K^* で表す．□

【Theorem B.4.10】　Kähler 多様体の Ricci 形式 ρ は，標準直線バンドル（反標準直線バンドル）に誘導される接続の曲率テンソルの i 倍（$-i$ 倍）となる．特に，$\rho = 0$ となる条件は，標準直線バンドルが平行な局所断面を持つことと同等である．このとき，対応する断面は正則である．□

B.4.4　ホロノミー

【Theorem B.4.11 (Iwamoto)】　複素次元 n の Kähler 多様体に対して，制限線形ホロノミー群が $SU(n)$ に含まれるための必要十分条件は，Ricci テンソルが恒等的にゼロとなることである．□

B.4.5　Chern 類

【Theorem B.4.12 (曲率形式による表現)】　Kähler 多様体 M の Kähler 形式を ω，曲率形式を $\mathscr{R}$ とすると，その p 次 Chern 類 $c_p(M)$ は，

$$c_p(M) = [\frac{1}{(p!)^2} I^p_\omega(\mathscr{R} \wedge \cdots \mathscr{R})]$$

と表される．特に，ρ を Ricci 形式として

$$c_1(M) = [\frac{1}{2\pi}\rho]$$

□

B.4.6　Kähler-Einstein 多様体

一般的性質

【Definition B.4.13（２次コホモロジー類の符号)】　$H^2(M, \mathbb{R})$ のコホモロジー類は，正（負）の $(1,1)$ 型部分形式を代表元としてもつとき，正（負）であるという．この符号は代表元に依存せず，コホモロジー類のみで決まる．ここで $\alpha \in \mathscr{A}_{1,1}(M)$ が正（負）であるとは，$a(X,Y) = \alpha(X, JY)$ により定義される J 不変実対称双線形形式 a が正（負）であることを意味する．□

【Proposition B.4.14 (Kähler-Einstein 多様体のスカラ曲率の符号)】　Kähler-Einstein 多様体 M のスカラ曲率 s の符号は複素構造のみにより定まる．さらに，s の値は，M の複素次元を n, V を体積として

$$Vs^n = \frac{4\pi n^n}{n!} c_1^n \tag{B.4.1}$$

により定まる．ここで，c_1^n は複素構造のみで決まる Chern 特性数である．□

【Note B.4.15 (第１ Chern 類の符号)】

1. $\mathbb{C}P^N$ ないの $d_j (j = 1, \cdots, p)$ 次同次多項式により定義される超曲面の交わりにより定義される代数多様体 M の第 1 Chern 類は，超曲面が一般の位置にあるとき，$d = d_1 + \cdots + d_p$ として

   $$c_1(M) = (N + 1 - d)h$$

   で与えられる．ここで，h は $H^2(\mathbb{C}P^N, \mathbb{Z})$ の正の生成元の M への制限である．

2. 小平の定理より，第 1 Chern 類が正ないし負のコンパクト複素多様体は複素射影空間への正則埋め込みをもつ．

3. 複素曲面に対しては，$c_1(M)$ が定符号となるのは $c_1^2(M)$ が非負の場合に限る．一方，複素曲面を 1 点でブローアップすると，$c_1^2(M)$ は 1 だけ減少する．したがって，十分多くの点でブローアップして得られる曲面の第 1 Chern 類は定符号でなくなる．例えば，$\mathbb{C}P^2$ を r 回ブローアップした曲面 Σ_r に対して，$c_1^2(\Sigma_r) = 9 - r$．また，$0 \leqslant r \leqslant 8$ のとき，Σ_r は正の第 1 Chern 類をもち，正の第 1 Chern 類をもつ複素曲面はそれらと $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ に限られる．これらのうち，$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ には Kähler-Einstein 計量が入らないことが示される．$\Sigma_r(4 \leqslant r \leqslant 8)$ については，Kähler-Einstein 計量が入るかどうかは不明．[Besse AL 1987]

□

Calabi-Yau 予想

【**Theorem B.4.16** (**Calabi-Yau の定理**)】　M をコンパクト Kähler 多様体，ω をその Kähler 形式，$c_1(M)$ を第 1 Chern 類とする．このとき，コホモロジー類 $2\pi c_1(M)$ に属する任意の $(1,1)$ 型実閉形式は，Kähler 形式が ω と同じコホモロジー類に属する Kähler 計量の Ricci 形式となり，そのような Kähler 計量は一意的である．□

【**Theorem B.4.17** (**Calabi-Yau 多様体**)】　コンパクト複素多様体 M に対して，次の 3 つの条件は同等である．

i) 第 1 Chern 類がゼロで Kähler 計量をもつ．

ii) Ricci 平坦な Kähler 計量をもつ．

iii) 標準直線バンドルに誘導される接続が局所平坦となる Kähler 計量をもつ．

□

【**Theorem B.4.18** (**Aubin-Calabi-Yau の定理**)】　第 1 Chern 類が負となる任意のコンパクト複素多様体は,（スカラ曲率が負の）Kähler-Einstein 計量をもつ．そのような計量は，定数倍の除いて一意的である．□

【**Note B.4.19** (例)】

1. 任意のコンパクト単連結一様 Kähler 多様体は正スカラ曲率の Kähler-Einstein 計量をもつ．これは，1987 年時点で，唯一の正スカラ曲率 Kähler-Einstein 多様体の例である [Besse AL 1987]

□

B.4.7　Calabi-Yau 多様体

【Definition B.4.20 (Calabi-Yau 多様体)】　コンパクト Kähler 多様体 M の標準直線バンドルが自明で 1 次元 Betti 数がゼロであるとき，M を（非特異）Calabi-Yau 多様体という． □

【Proposition B.4.21 (ホロノミーによる特徴付け)】　(M, J, g) を単連結，既約，コンパクト，Ricci 平坦な（複素）m 次元 Kähler 多様体とする．このとき，$m \geqslant 2$ かつ $\mathrm{Hol}(g) = \mathrm{SU}(m)$，または m は 4 以上の偶数かつ $\mathrm{Hol}(g) = \mathrm{Sp}(m/2)$ となる．逆に，(M, J, g) が複素 m 次元コンパクト Kähler 多様体で $\mathrm{Hol}(g)$ が $\mathrm{SU}(m)$ か $\mathrm{Sp}(m/2)$ と一致すれば，g は Ricci 平坦，既約でその基本群は有限群となる．(Joyce DD 2000[43]) □

【Proposition B.4.22 (平行微分形式)】　(M, J, g) をコンパクト，Ricci 平坦な Kähler 多様体，ξ を滑らかな $(p, 0)$ 形式とする．このとき，$d\xi = 0$ と $\nabla\xi = 0$ は同等となる．したがって，$H^{p,0}(M)$ は平行 $(p, 0)$ 形式の空間と同型となる．(Joyce DD 2000[43]) □

【Proposition B.4.23 (標準線バンドル)】　(M, J, g) をコンパクト，Ricci 平坦な複素 m 次元 Kähler 多様体とする．このとき，$\mathrm{Hol}(g) \subset \mathrm{SU}(m)$ となるための必要十分条件は，M の標準線バンドル K_M が自明となることである．(Joyce DD 2000[43]) □

【Proposition B.4.24 (コホモロジー)】　n 次元 Calabi-Yau 多様体 M に対して，$h^{p,q} = \dim H^{p,q}(M)$ とおくと，

$$h^{0,p} = h^{p,0} = h^{n,p} = h^{p,n} = 0 \ (0 < p < n), \tag{B.4.2a}$$

$$h^{0,0} = h^{0,n} = h^{n,0} = h^{n,n} = 1. \tag{B.4.2b}$$

(¡ Joyce DD 2000[43]) □

【Theorem B.4.25 (代数性定理)】　複素次元が 3 以上の Calabi-Yau 多様体は射影的である．(Joyce DD 2000[43]) □

B.4.8　３次元 Calabi-Yau 多様体の Hodge ダイアモンド

$$\begin{array}{ccccccc} & & & h^{3,3} & & & \\ & & h^{3,2} & & h^{2,3} & & \\ & h^{3,1} & & h^{2,2} & & h^{1,3} & \\ h^{3,0} & & h^{2,1} & & h^{1,2} & & h^{0,3} \\ & h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} & \\ & & h^{1,0} & & h^{0,1} & & \\ & & & h^{0,0} & & & \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\ 1 & & h^{2,1} & & h^{2,1} & & 1 \\ & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

B.4.9 Hyperkähler 多様体

【Definition B.4.26 (Hyperkähler 多様体)】　$4k$ 次元 Riemann 多様体 (M,g) が $IJ=-JI=K$ を満たす 3 つの概複素構造 I,J,K をもち，かつ g が I,J,K のいずれに関してもエルミートであるとき，(M,g) を **hyperkähler** 多様体という. □

§B.5
Hodge 理論

B.5.1　de Rham コホモロジー

【Definition B.5.1 (de Rham コホモロジー)】　d 次元多様体 M の k 次微分形式の全体 $\boldsymbol{A}^k(M)$ から作られるコチェイン複体

$$0 \longrightarrow A^0 \xrightarrow{d} A^1 \xrightarrow{d} \cdots A^{k-1} \xrightarrow{d} A^k \xrightarrow{d} A^{k+1} \cdots \tag{B.5.1}$$

のコホモロジー

$$H^k_{\mathrm{DR}}(M) = \mathrm{Ker}\ d_k / \mathrm{Im}\ d_{k-1} \tag{B.5.2}$$

を M の de Rham コホモロジーという．□

【Theorem B.5.2 (de Rham の定理)】　M を（パラコンパクトで）なめらかな多様体とする．

1. M の単体分割を K とすると，

$$\check{H}^*(M,\mathbb{Z}) \cong H^*(K,\mathbb{Z}) \cong H^*_{\mathrm{sing}}(M,\mathbb{Z}).$$

2. $\check{H}^*(M,*)$ は完全なコホモロジー関手で，

$$\check{H}^*(M,*) = H^*(M,*).$$

3. (**Poincaré の補題**）定数層 $\mathbb{R}$ の次の層分解は完全である：

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathscr{A}^0 \xrightarrow{d} \mathscr{A}^1 \xrightarrow{d} \mathscr{A}^2 \to \cdots .$$

4. $\mathscr{A}^p$ は散布層である．したがって，

$$H^k(M,\mathscr{A}^p) = 0,\ k \geqslant 1.$$

5. M 上のコホモロジー環に対して，

$$H^*_{\mathrm{DR}}(M,\mathbb{R}) \cong \check{H}^*(M,\mathbb{R}) \cong H^*_{\mathrm{sing}}(M,\mathbb{R}).$$

□

【Definition B.5.3 (調和形式)】　Riemann 多様体上の微分形式 ω に対して，$\triangle\omega = 0$ が成り立つとき，ω を調和形式という．ここで，

$$\triangle = d\delta + \delta d, \quad \delta\omega_p = \pm(-1)^{pd} * d * \omega_p. \tag{B.5.3}$$

である．条件は

$$d\omega = 0, \quad \delta\omega = 0 \tag{B.5.4}$$

と同等である．p 次調和形式の全体を $\mathscr{H}^p(M)$ で表す．□

【Theorem B.5.4】　H を $\boldsymbol{A}^p(M)$ の L^2 完備化 $\hat{A}^p(M)$(における調和形式の作る部分空間への射影作用素，G を $HG = GH = 0, H + \triangle G = 1$ を満たす Green 作用素とすると，任意の $\phi \in A^p$ に対して，

$$\phi = H\phi + G\delta d\phi + d\delta G\phi \tag{B.5.5}$$

が成り立つ．特に，

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M) \cong \mathscr{H}^p(M) \tag{B.5.6}$$

が成り立つ．□

B.5.2　Dolbeault コホモロジー

【Definition B.5.5 (Dolbeault コホモロジー)】　複素多様体 M 上で大域的に定義された微分形式の線形空間 $A^{p,q} = \Gamma(M, \mathscr{A}^{p,q})$ から定義される双対複体

$$0 \xrightarrow{\bar\partial} A^{p,0} \xrightarrow{\bar\partial} A^{p,1} \xrightarrow{\bar\partial} \cdots$$

のコホモロジーを **Dolbeault コホモロジー**といい，$H^{p,q}_{\bar\partial}(M)$ と表す．□

【Theorem B.5.6 ($\bar\partial$-Poicaré 補題)】　Δ^n を原点を中心とする $\mathbb{C}^n$ の多重円盤，$\Delta^{*n} = \Delta^n - \{0\}$ とする．このとき，

$$H^{p,q}_{\bar\partial}(\delta^{*k} \times \delta^l) = 0, \quad q \geqslant 1. \tag{B.5.7}$$

□

【Theorem B.5.7 (Dolbeault の定理)】　M を複素多様体とする．

1. $\check{H}^*(M, *)$ は完全なコホモロジー関手で，

$$\check{H}^*(M, *) = H^*(M, *).$$

2. ($\bar{\partial}$**-Poicaré 補題**）層 Ω^p の次の層分解は完全である：

$$0 \to \Omega^p \to \mathscr{A}^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{A}^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{A}^{p,2} \to \cdots .$$

3. $\mathscr{A}^{p,q}$ は散布層である．したがって，

$$H^k(M, \mathscr{A}^{p,q}) = 0,\ k \geqslant 1.$$

4. M 上のコホモロジー環に対して，

$$H^q(M, \Omega^p) \cong H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M). \tag{B.5.8}$$

□

【Definition B.5.8 ($\bar{\partial}$-調和形式)】　$A^{p,q}$ の L^2 完備化 $\hat{A}^{p,q}$ として，$\bar{\partial} : A^{p,q} \to A^{p,q+1}$ の共役作用素を $\bar{\partial}^* : A^{p,q+1} \to A^{p,q}$ とおく．このとき，

$$\triangle_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial} \tag{B.5.9}$$

に対して，$\triangle_{\bar{\partial}}\phi = 0$ となる微分形式を $\bar{\partial}$-調和形式という．この条件は，

$$\bar{\partial}\phi = 0, \quad \bar{\partial}^*\phi = 0 \tag{B.5.10}$$

と同等である．$\bar{\partial}$-調和 (p, q) 形式の全体を $\mathscr{H}^{p,q}(M)$ と書く．　□

【Theorem B.5.9 (Hodge の定理)】　M をコンパクト複素多様体とする．

1. $\dim \mathscr{H}^{p,q}(M) < \infty$.
2. $\mathscr{H} : A^{p,q}(M) \to \mathscr{H}^{p,q}(M)$ を関数空間としての垂直射影とするとき，次の性質をもつ Green 作用素

$$G : A^{p,q}(M) \to A^{p,q}(M)$$

が一意的に存在する：

$$G(\mathscr{H}^{p,q}(M)) = 0, \tag{B.5.11}$$

$$\bar{\partial}G = G\bar{\partial},\ \bar{\partial}^*G = G\bar{\partial}^*, \tag{B.5.12}$$

$$I = \mathscr{H} + \Delta_{\bar{\partial}}G. \tag{B.5.13}$$

3. 自然な写像 $\mathscr{H}^{p,q}(M) \to H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M)$ は同型である．

□

【Theorem B.5.10 (Kodaira-Serre 双対定理)】　M を n 次元コンパクト複素多様体とする．

1. $H^n(M, \Omega^n) \cong \mathbb{C}$.
2. 双線形写像
$$H^p(M; \Omega^q) \otimes H^{n-p}(M; \Omega^{n-p}) \to H^n(M; \Omega^n)$$
は非退化である．

□

【Theorem B.5.11 (Hodge 分解)】　コンパクト Kähler 多様体 M の複素係数コホモロジーは次の関係式を満たす：

$$H^r(M, \mathbb{C}) \cong \oplus_{p+q=r} H^{p,q}(M), \tag{B.5.14a}$$
$$H^{p,q}(M) \cong \overline{H^{q,p}(M)}. \tag{B.5.14b}$$

□

【Corollary B.5.12】　複素次元 n のコンパクト Kähler 多様体 M に対して，

$$b_r = \dim_{\mathbb{C}} H^r(M, \mathbb{C}), \quad h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(M)$$

とおくとき，次の関係式が成り立つ：

$$b_r = \sum_{p+q=r} h^{p,q}, \tag{B.5.15}$$
$$h^{p,q} = h^{q,p}, \quad h^{p,q} = h^{n-p,n-q}. \tag{B.5.16}$$

□

§B.6
Einstein 空間

1. コンパクト多様体上では，Einstein 計量のモジュライ空間 $\mathscr{E}(M)$ の次元は局所有限である [Besse A (1987)].
2. $\mathscr{E}(M)$ は計量構造空間 $\mathscr{M}/\mathscr{D}$ 内のなめらかな多様体の解析的 Hausdorff 部分集合である．[Koiso N]

B.6.1　一般論

Banach 多様体 X から Banach 空間 B へのなめらかな写像を F とする：

$$F : X \to B$$

このとき，T_xX は Banach 空間となり，$dF_x : T_xX \to B$ は有界写像となる．
【Definition B.6.1 (形式的積分可能性)**】**　X はその接空間の開集合と同一視できるとする．この仮定のもとで，$x \in X$ の近傍での形式的ベキ級数

$$x(t) = x + tv_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} v_k$$

に対して，

$$F(x(t)) = F(x) + tF_x^1(v_1) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} F_x^k(v_1, \cdots, v_k)$$

により，$F_x^k(v_1, \cdots, v_k)$ $(k = 0, 1, \cdots)$ を定義する．このとき，$v_1 \in \mathrm{Ker}\ F_x^1$ に対して，適当な形式的ベキ級数 $x(t)$ が存在して，$F(x(t)) = 0$ となるとき，v_1 は**形式的に積分可能**であるという．□

【Proposition B.6.2】

1. $F_x^k(v_1, \cdots, v_k)$ は次の構造をもつ．

$$F_x^k(v_1, \cdots, v_k) = F_x^1(v_k) + P_x^k(v_1, \cdots, v_{k-1}).$$

   ここで，P_x^k は多項式である．

2. $x \in X$ の近傍 U で，$\mathrm{Im}\ F_y^1 \subset \mathrm{Ker}\ C_y (y \in U)$ となる T_yX から B への線形作用素 C_y が存在し，C_y は y になめらかに依存するとする．このとき，

$$F_x^j(v_1, \cdots, v_j) = 0 \ (0 \leqslant j \leqslant k)$$

を満たす $v_1, \cdots, v_k$ に対して，

$$C_x(P^{k+1}(v_1, \cdots, v_k)) = 0$$

が成り立つ．したがって，$\mathrm{Im}\, F_x^1 = \mathrm{Ker}\, C_x$ が成り立てば，

$$F^{k+1}(v_1, \cdots, v_{k+1}) = 0$$

を満たす v_{k+1} が存在する．

□

【Definition B.6.3 (障害空間)**】**　前命題において，$\mathrm{Ker}\, F_x^1/\mathrm{Im}\, C_x$ を，積分可能条件 C に従う方程式 $F(x) = 0$ の**障害空間**という．□

B.6.2　Einstein 構造の変形

【Definition B.6.4】　コンパクト Riemann 多様体 M に対して，

$$\mathscr{M} := \{M \text{ 上のなめらかな Riemann 計量の全体}\},$$
$$\mathscr{M}_1 = \left\{g \in \mathscr{M} \,\middle|\, \int \mu_g = 1\right\},$$
$$S^2M := \{M \text{ 上の 2 階対称共変テンソルのバンドル}\}$$

とおく．このとき，$\mathscr{M}$ の接空間 $T_g\mathscr{M}$ は Hilbert 空間 $L^2(S^2M, g)$，$\mathscr{M}_1$ の接空間 $T_g\mathscr{M}_1$ は $\int_M \mu_g \mathrm{Tr}_g h = 1$ となる $h \in T_g\mathscr{M}$ の全体と一致する．□

【Definition B.6.5】　作用素 $\delta_g : S^2M \to A^1M$ およびその共役作用素 $\delta_g^* : A^1M \to S^2M$ を

$$(\delta h)_\mu = \nabla^\nu h_{\nu\mu},$$
$$(\delta^* v)_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu v_\nu + \nabla_\nu v_\mu)$$

により定義する..　□

【Proposition B.6.6】

1. $\mathrm{Im}\ \delta_g^*$ は $T_g(\mathscr{M}_1)$ の閉部分空間となり，次の直和分解が成り立つ [Besse AL 1987]：
$$T_g\mathscr{M}_1 = \mathrm{Im}\ (\delta_g^*) \oplus [T_g\mathscr{M}_1 \cap \mathrm{Ker}\ \delta_g].$$
（注：$\mathrm{Im}\ \delta_g^*$ は，g における $\mathrm{Diff}(M)$ 軌道の接空間である.）

2. $T_g\mathscr{M}_1 \cap \mathrm{Ker}\,\delta_g$ は，つぎの性質をもつ $\mathscr{M}_1$ の実解析的部分多様体 $\mathfrak{S}_g$（スライス）の g における接空間となる（Slice Theorem [Ebin DG 1968]）：

- $\mathfrak{S}_g$ は $\mathrm{Isom}(M,g)$ の作用に対して不変で，$\phi \in \mathrm{Diff}(M)$ に対して $\phi^*\mathfrak{S}_g \cap \mathfrak{S}_g \neq \varnothing$ なら，$\phi \in \mathrm{Isom}(M,g)$．
- 局所断面 $\chi : \mathrm{Diff}(M)/\mathrm{Isom}(M,g) \to \mathrm{Diff}(M)$ が剰余類 I_g の近傍で存在し，それから誘導される局所写像 $\mathrm{Diff}(M)/\mathrm{Isom}(M,g) \times \mathfrak{S}_g \to \mathscr{M}_1$ が g の近傍で局所微分同相となる．特に，写像 $\mathrm{Isom}(M,g)\backslash\mathfrak{S}_g \to \mathrm{Diff}(M)\backslash\mathscr{M}_1$ は g の近傍の Riemann 構造への同相写像を与える．

□

【**Definition B.6.7** (Einstein 構造の前モジュライ空間)】　g を M 上の Einstein 計量とする．$\mathscr{M}_1$ の g におけるスライス $\mathfrak{S}_g$ に含まれる Einstein 計量の全体を，g の近傍における Einstein 構造の**前モジュライ空間**という．□

【**Note B.6.8**】　スカラ曲率 $S(g)$ がゼロないし負なら，$\mathrm{Isom}_0(M,g)$ の前モジュライ空間への作用は自明である [Besse AL 1987]．したがって，モジュライ空間は g の近傍で orbifold となる．□

【**Definition B.6.9** (Einstein 作用素)】　Einstein 作用素 $E : \mathscr{M}_1 \to \mathscr{S}^2M$ を

$$E(g) = \mathrm{Ric}_g - \frac{1}{n} g \int_M \mu_g S_g$$

により定義する．ここで，n は多様体の次元，S_g はスカラ曲率である．このとき，E の線形化 $E'_g = E^1_g : T_g\mathscr{M}_1 \to \mathscr{S}^2M$ は次のように表される：

$$2E'_g(h) = D^*_g D_g h - 2\delta^*_g\delta_g h - D_g d(\mathrm{Tr}h) - 2\mathring{R}_g h.$$

ここで，D_g は g に関する共変微分作用素，D^*_g はその形式的共役作用素，$\mathring{R}$は代数的線形作用素

$$(\mathring{R}h)_{\mu\nu} = -R_{\mu\alpha\nu\beta}h^{\alpha\beta}$$

である．□

【**Definition B.6.10** (無限小 Einstein 変形)】　Einstein 計量 g に対して，次の条件を満たす $h \in T_g\mathscr{M}_1$ を**無限小 Einstein 変形**といい，その全体を $\epsilon(g)$ で表す：

$$E'_g(h) = 0, \quad \delta_g h = 0, \quad \int_M \mu_g \mathrm{Tr}_g h = 0.$$

□

【**Theorem B.6.11**】　$h \in \mathscr{S}^2 M$ が無限小 Einstein 変形であるための必要十分条件は，

$$(D_g^* D_g - 2\mathring{R}_g)h = 0, \quad \delta_g h = 0, \quad \mathrm{Tr}_g h = 0$$

で与えられる．特に，$\epsilon(g)$ は有限次元である．□

【**Theorem B.6.12** (Koiso N 1980)】　g を M 上の Einstein 計量とする．このとき，スライス $\mathfrak{S}_g$ は g を含み次の性質をもつ有限次元実解析的部分多様体 Z を含む：

i) Z の g における接空間は $\epsilon(g)$ と一致する．

ii) Z は g の近傍での前モジュライ空間を実解析的部分集合として含む．

さらに，$h \in \epsilon(g)$ を接ベクトルとする前モジュライ空間内のなめらかな曲線が存在するための必要十分条件は，h が形式的積分可能であることである．□

【**Note B.6.13**】　Einstein 作用素は縮約 Bianchi 恒等式 β_g を積分可能条件としてもつ．この条件に関する障害空間は,.

$$\mathrm{Ker}\ \beta_g = \mathrm{Im}\ E'_g \oplus \epsilon(g).$$

より，$\epsilon(g)$ と同型となる．したがって，決してゼロとならない．このため，前モジュライ空間は Z の真部分集合となることがある．例えば，対称空間 $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^{2k}$ の対称計量 g_0 に対して，$\dim \epsilon(g_0) = 4(4k^2 - 1)$ となるが，$[g_0]$ は前モジュライ空間の孤立点となる．□

B.6.3　Einstein 空間の体積

【**Theorem B.6.14** (体積値分布の離散性)】　与えられた多様体 M 上の Einstein 構造のモジュライ空間は，局所弧状連結で，各連結成分の上で（体積=1 と規格化した）スカラ曲率は一定である．また，可能なスカラ曲率の値は高々可算個である．□

【**Note B.6.15** (モジュライ空間の連結性)】

1. $S^{4n+3} (n \geqslant 2)$ 上の Einstein 構造のモジュライ空間は，少なくとも 2 つの連結成分をもつ．また，S^{15} に対しては，連結成分の数は 3 以上である．

2. 曲率がゼロでない 3 次元定曲率空間の Einstein 構造は一意的である．3 次元および 4 次元局所平坦コンパクト空間のモジュライ空間は連結である．K3 面と微分同相な 4 次元コンパクト多様体の Einstein 構造のモジュライ空間は連結である．

3. $2m$-次元 Kähler-Einstein 多様体 (M, J, g) の体積は，規格化条件 $\mathrm{Ric} = \pm(2m-1)g$ のもとで，
$$\mathrm{Vol}(g) = \left(\frac{2\pi}{2m-1}c_1(J)\right)^m$$
で与えられる．特に，M が $\mathbb{C}P^{m+1}$ ないの次数 $d > m+1$ の超曲面と双正則であるとき，体積は
$$\mathrm{Vol}(g) = d\left(2\frac{d-m-2}{2m-1}\right)^m \mathrm{Vol}(\mathbb{C}P^m).$$

4. 偶数次元定曲率空間の体積は Euler 特性数に比例し,（曲率で規格化された）その値の全体は離散的な閉集合となる．

5. 奇数次元定曲率空間の（曲率で規格化された）体積は，正曲率なら，任意の小さい値を取りうる．一方，負曲率の場合は，４次元以上では体積値の全体は離散的な閉集合となる．ただし，３次元の場合は，有限な下限 $(\simeq 0.98)$ に収束する集合となる．

6. 正曲率 Einstein 空間の体積は，Bishop の不等式より標準球面の体積以下となる．

□

B.6.4　Einstein 構造の剛性

【**Definition B.6.16** (剛性)】　モジュライ空間の孤立点に対応する Einstein 構造は剛性をもつという．□

【**Theorem B.6.17** (Koiso N 1979)】　M 上の Einstein 計量 g に対して，
$$a_0 := \sup\left\{\langle \mathring{R}h, h\rangle / \|h\|_2^2, h \in C^\infty(S_0^2 M)\right\}$$
とおくとき，条件
$$a_0 < \max\left\{-\frac{S(g)}{n}, \frac{S(g)}{2n}\right\}$$
が満たされるなら，計量 g は無限小 Einstein 変形を持たない．□

【**Theorem B.6.18** (Bourguignon JP)】　n 次元 Einstein 計量 g の断面曲率の最大値を $K_{\max}$，最小値を $K_{\min}$ とするとき，条件
$$K_{\min} > \frac{n-2}{3n}K_{\max}$$
が満たされれば，g に対応する Einstein 構造は剛性をもつ．□

【Theorem B.6.19】 負の断面曲率をもつ Einstein 構造は 3 次元以上では剛性をもつ． □

【Theorem B.6.20】 正曲率の定曲率空間に対応する Einstein 構造は剛性をもつ． □

【Theorem B.6.21 (Koiso N 1979)**】**

1. 非コンパクトな局所対称 Einstein 空間は，局所的に 2 次元因子を持たないなら，剛性をもつ．
2. コンパクト既約対称 Einstein 空間は，次のものを除いて剛性をもつ：
   - $\mathrm{SU}(p+q)/S(U(p)\times U(q))$ $(p \geqslant q \geqslant 2)$
   - $\mathrm{SU}(m)/\mathrm{SO}(m)$
   - $\mathrm{SU}(2m)/\mathrm{Sp}(m)$
   - $\mathrm{SU}(m)$ $(m \geqslant 3)$
   - E_6/F_4.

□

B.6.5 モジュライ空間の次元

【Theorem B.6.22 (Gallot S 1983)**】** 直径 d の n 次元 Einstein 多様体 (M,g) が条件 $d^2K_{\min} \geqslant k$ を満たせば，その無限小 Einstein 変形の次元 $\dim(\epsilon(g))$ は $\eta(n,k)$ 以下となる．ここで，

$$\eta(n,k) = Nf\left(\frac{2(n-1)\pi^2 - 2nk}{\Gamma(k)^2}\right); \quad N = \frac{n(n+1)}{2} - 1,$$

$$f(x) = \prod_{j=0}^{\infty}\left[1 + \frac{\alpha(n)\beta^j x^{1/2}}{(2\beta^j - 1)^{1/2}}\right]^{2/\beta^j},$$

$$\alpha(n) = \frac{2n^{(n-2)/2n}}{(n-2)^{1/2}}\left(\frac{\mathrm{Vol}(S^{n-1})}{\mathrm{Vol}(S^n)}\right)^{1/n} + 2^{1-1/n}.$$

ただし，$n \geqslant 3$ に対して $\beta = n/(n-2)$, $n = 2$ に対して $\beta = 100$．また，

$$\Gamma(\alpha) = \begin{cases} 2^{-1/n}H(\alpha) & \alpha \geqslant 0, \\ |\alpha|^{1/2n}\left[\int_0^{|\alpha|^{1/2}}\left(\frac{\cosh(t)}{H(\alpha)} + \frac{\sinh(t)}{n|\alpha|^{1/2}}\right)^{n-1} dt\right]^{-1/n} & \alpha < 0, \end{cases}$$

$$H(\alpha) = \begin{cases} \alpha^{1/2}\left(\int_0^{\alpha^{1/2}/2}\cos(t^{n-1})dt\right)^{-1} & \alpha > 0, \\ 2 & \alpha = 0, \\ |\alpha|^{1/2}\left(\int_0^{|\alpha|^{1/2}/2}\cosh(t^{n-1})dt\right)^{-1} & \alpha < 0 \end{cases}.$$

□

【**Theorem B.6.23** (Gallot S 1981, 1983)】　各次元 n に対して正の数 $\tilde{\alpha}(n)$ が存在して，条件

$$(n-1)S(g) - n^2 K_{\min} \leqslant \tilde{\alpha}(n) d^2$$

(d は直径）を満たす Einstein 多様体 (M,g) の無限小 Einstein 変形の全体 $\epsilon(g)$ の次元は平坦なトーラスに対する値 $N = n(n+1)/2 - 1$ を超えない．□

§**B.7**
G 構造

B.7.1　一般論

【**Definition B.7.1** (G 構造)】　M を n 次元多様体，F をそのフレームバンドルとすると，F は M 上の $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 主バンドルとなる．このとき，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ の Lie 部分群 G に対して，G を構造群とする F の部分主バンドル P を G **構造** (G structure) という．□

【**Example B.7.2** (G 構造)】

1. Riemann 多様体 M^n : $G = \mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$
2. 概複素多様体 M^{2m}: $G = \mathrm{GL}(m,\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}(n=2m,\mathbb{R})$

□

【**Definition B.7.3** (固有トーション)】　G を $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ の Lie 部分群，$V = \mathbb{R}^n$ とする．G の Lie 代数 $\mathfrak{g} \subset V \otimes V^*$ と見なして，写像 $\sigma : \mathfrak{g} \otimes V^* \to V \otimes \bigwedge^2 V^*$ を $\sigma(t^a_{bc}) = t^a_{bc} - t^a_{cb}$ により定義する．さらに，これを用いて線形空間 $L_1, \cdots, L_4$ を

$$L_1 = V \otimes \bigwedge^2 V^*, \quad L_2 = \mathrm{Im}\,\sigma, \quad L_3 = L_1/L2, \quad L_4 = \mathrm{Ker}\sigma$$

により定義し，対応する G の $L_1, \cdots, L_4$ への表現を $\rho_j : G \to \mathrm{GL}(L_j)$ とおく．

P を M 上の G 構造とすると，ρ_j は M 上のベクトルバンドル $\rho_j(P)$ を与える．P の接続 ∇ に対してトーション $T(\nabla)$ は $C^\infty(\rho_1(P))$ に，また 2 つの接続 ∇, ∇' に対し，$T(\nabla) - T(\nabla)'$ は $C^\infty(\rho_2(P))$ に属する．したがって，$T(\nabla)$ の $C^\infty(\rho_3)$ への像 $T^i(P)$ は P のみに依存し，∇ の取り方に依存しない．そこで，$T^i(P)$ を G 構造 P の**固有トーション** (intrinsic torsion) という．また，$T^i(P) = 0$ となるとき，P をトーションのない (torsion free)G 構造という．□

【**Definition B.7.4** (トーションのない G 構造)】

1. Riemann 多様体：$\mathrm{O}(n)$ 構造は常に torsion free.
2. 複素構造：トーションのない $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ 構造
3. シンプレクティック構造：トーションのない $\mathrm{Sp}(m, \mathbb{R})$ 構造.
4. Kahler 構造：トーションのない $U(m)$ 構造

□

C 特性類と指数定理

§C.1 特性類

一般に，GL$(k,\mathbb{C})$ の多項式関数 $P(\alpha)$ が，GL$(k,\mathbb{C})$ の部分群 G の作用

$$\mathrm{ad}(g) : \alpha \mapsto g\alpha g^{-1} \tag{C.1.1}$$

に対して不変であるとき，P を G-特性多項式と呼ぶ．

一般に，$P(\alpha)$ を G-特性多項式とするとき，G を構造群とする多様体 M 上の k 次元ベクトルバンドル（係数体は $\mathbb{R}$ ないし $\mathbb{C}$)V の線形 G 接続 (Ω,ω) に対して，$P(\Omega)$ は次の性質をもつ：

i) ゲージ不変な閉微分形式.

ii) 対応するコホモロジー類は，接続 Ω に依存せず，バンドル構造のみで決まる．

C.1.1 Euler 類

E を多様体 M 上の向き付けられた $2p$ 次元実ベクトルバンドル，Ω^{ij} をその計量に関する線形接続の曲率形式とするとき，E の Euler 類は

$$e(E) = \frac{1}{2^{2p}\pi^p p!}\sum \epsilon_{i_1\cdots i_{2p}}\Omega^{i_1 i_2} \wedge \cdots \wedge \Omega^{i_{2p-1}i_{2p}} \tag{C.1.2}$$

により与えられる．

【**Example C.1.1** ($T(S^2)$)】　２次元球面

$$ds^2 = A^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{C.1.3}$$

に対して，直交基底

$$\theta^1 = A d\theta, \quad \theta^2 = A\sin\theta\, d\phi \tag{C.1.4}$$

に対する接続形式は，

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\chi, \quad \chi = -\cos\theta d\phi. \tag{C.1.5}$$

曲率形式は

$$\mathscr{R} = d\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} d\chi, \tag{C.1.6}$$

$$d\chi = \theta^1 \wedge \theta^2. \tag{C.1.7}$$

よって，Euler 類は

$$e(T(S^2)) = \frac{1}{2\pi}\theta^1 \wedge \theta^2. \tag{C.1.8}$$

これより，

$$\chi(S^2) = \int_{S^2} e(T(S^2)) = 2. \tag{C.1.9}$$

□

C.1.2　Chern 類

E を多様体 M 上の p 次元複素ベクトルバンドル，Ω をその計量に関する線形接続の反 Hermite な曲率形式とするとき，E の全 Chern 類は

$$c(E) = \det\left(1 + \frac{i\Omega}{2\pi}\right) = 1 + c_1(E) + \cdots + c_p(E) \tag{C.1.10}$$

で与えられる．ただし，

$$c_j(E) \in H^{2j}(M, \mathbb{Z}). \tag{C.1.11}$$

特に，

$$c_1(E) = \frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}\Omega, \tag{C.1.12a}$$

$$c_2(E) = \frac{1}{8\pi^2}\left(\mathrm{Tr}\Omega^2 - (\mathrm{Tr}\Omega)^2\right), \tag{C.1.12b}$$

$$c_p(E) = e(E_{\mathbb{R}}). \tag{C.1.12c}$$

また，

$$\mathrm{ch}(\Omega) = \mathrm{Tr} e^{i\Omega/2\pi} = p + c_1(\Omega) + \cdots \tag{C.1.13}$$

を Chern 特性形式という．

【Example C.1.2 ($T(\mathbb{C}P^1)$)**】**　$\mathbb{C}P^1$ の標準計量 ($[x:1] \in \mathbb{C}P^1$)

$$ds^2 = \phi\bar{\phi}; \quad \phi = 2A\frac{dz}{|z|_1^2} \tag{C.1.14}$$

（本来の Fubini-Study 計量では $A = 1$）に対して，

$$d\phi = -\chi \wedge \phi, \quad \bar{\chi} = -\chi \tag{C.1.15}$$

より U(1) 接続形式は

$$\chi = \frac{zd\bar{z} - \bar{z}dz}{|z|^2 + 1}. \tag{C.1.16}$$

よって，曲率形式は

$$F = d\chi = \frac{2}{(|z|^2 + 1)^2} dz \wedge d\bar{z}. \tag{C.1.17}$$

Chern 類は

$$c_1 = i\frac{F}{2\pi} \ \Rightarrow \ \int_{\mathbb{C}P^1} c_1 = 2. \tag{C.1.18}$$

□

C.1.3　Pontrjagin 類

E を多様体 M 上の向き付けられた k 次元実ベクトルバンドル，Ω^{ij} をその計量に関する線形接続の曲率形式とするとき，E の Pontrjagin 類は

$$P(E) = \det\left(1 - \frac{\Omega}{2\pi}\right) = 1 + p_1(E) + \cdots + p_{[k/2]}(E) \tag{C.1.19}$$

ただし，

$$p_j(E) = (-1)^j c_{2j}(E \otimes \mathbb{C}) \in H^{4j}(M, \mathbb{Z}). \tag{C.1.20}$$

また，$k = 2m$ のとき，

$$p_m(E) = e(E)^2. \tag{C.1.21}$$

接続形式 Ω を

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \left[\begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ -x_1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & x_{2r} \\ -x_{2r} & 0 \end{pmatrix}\right] \tag{C.1.22}$$

と標準化すると，

$$p_1(E) = \sum_a x_a^2, \tag{C.1.23a}$$

$$p_2(E) = \sum_{ab} x_a^2 x_b^2 \tag{C.1.23b}$$

接続 Ω の A-roof 種数を

$$\hat{A}(\Omega) = \prod_a \frac{x_a/2}{\sinh(x_a/2)} = 1 - \frac{p_1}{24} + \frac{1}{16}\left(\frac{7p_1^2}{360} - \frac{p_2}{90}\right)\cdots \tag{C.1.24}$$

で定義する．また，Hirzebruch L-多項式を

$$L(\Omega) = \prod_a \frac{x_a/2}{\tanh(x_a/2)} = 1 + \frac{p_1}{3} + \frac{1}{45}\left(7p_2 - p_1^2\right)\cdots \tag{C.1.25}$$

により定義する．

§C.2
指数定理

C.2.1　一般 Atiyah-Singer 指数定理

$2n$ 次元のスピン多様体のスピノールバンドルを $\mathscr{S}$, ゲージ群 G に関するベクトルバンドルを E とする．このとき，$\mathscr{S}$ のスピノール接続 (R,ω) と E のゲージ場 (F,A) により，バンドル $\mathscr{S}\otimes E$ の接続が定義され，対応して，Dirac 作用素

$$\not{D} = \gamma^\mu D_\mu : \mathscr{S}\otimes E \to \mathscr{S}\otimes E \tag{C.2.1}$$

が定義される．このゼロモードの右巻き成分の数を n_+，左巻き成分の数を n_- とするとき，

$$n_+ - n_- = \int_M \left[\mathrm{ch}(F)\hat{A}(R)\right]_{2n}. \tag{C.2.2}$$

D Kaluza-Klein 次元低下

§D.1 高い対称性を持つ多様体によるコンパクト化

高次元時空 M^D が局所的に積構造 $X \times Y \ni (x^\mu y^m)$ という構造をもち，閉じた Lie 代数をなす Y のベクトル場の組を $K_I = (K_I^m)(I = 1, \cdots, N)$ とする：

$$[K_I, K_J] = f^L{}_{IJ} K_L. \tag{D.1.1}$$

D 次元計量 $\tilde{g}_{MN}$ が

$$(\tilde{g}_{MN}) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x) + h_{IJ} A^I_\mu(x) A^J_\nu(x) & -A^I_\mu(x) K_{Im} \\ -A^I_\nu(x) K_{In} & \tilde{g}_{mn}(x, y) \end{pmatrix} \tag{D.1.2}$$

という構造を持つとする．ここで,

$$K_{Im} = \tilde{g}_{mn} K^n_I, \tag{D.1.3a}$$

$$h_{IJ} = K^m_I K_{Jm} \tag{D.1.3b}$$

このとき，座標変換

$$\delta x^\mu = \xi^\mu(x), \quad \delta y^m = -\lambda^I(x) K^m_I(y) \tag{D.1.4}$$

はこの計量の形を保ち，計量成分は

$$\delta\tilde{g}_{\mu\nu} = -\pounds_\xi g_{\mu\nu} - 2h_{IJ} D_{(\mu} \lambda^I A^J_{\nu)}, \tag{D.1.5a}$$

$$\delta\tilde{g}_{mn} = -\pounds_\xi \tilde{g}_{mn} + \lambda^I \pounds_{K_I} \tilde{g}_{mn}, \tag{D.1.5b}$$

$$\delta\tilde{g}_{m\mu} = -\pounds_\xi \tilde{g}_{\mu m} + D_\mu \lambda^I K_{Im} - A^I_\mu \lambda^J K^n_I \pounds_{K_J} \tilde{g}_{mn}. \tag{D.1.5c}$$

よって，X 上の場 $g_{\mu\nu}(x), \phi_i(x), A^I_\mu(x)$ は次のように変換する：

$$\delta g_{\mu\nu} = -\pounds_\xi g_{\mu\nu}, \tag{D.1.6a}$$
$$\delta \tilde{g}_{mn} = -\pounds_\xi \tilde{g}_{mn} + \lambda^I \pounds_{K_I} \tilde{g}_{mn}, \tag{D.1.6b}$$
$$\delta A^I_\mu = -\pounds_\xi A^I_\mu - D_\mu \lambda^I. \tag{D.1.6c}$$

ここで，

$$D_\mu \lambda^I = \partial_\mu \lambda^I + f^I_{JK} A^J_\mu \lambda^K. \tag{D.1.7}$$

$\tilde{g}_{MN}$ に対応するフォーム基底は

$$(\tilde{\theta}_M{}^A) = \begin{pmatrix} \theta^\alpha_\mu(x) & -A^I_\mu(x) K^m_I(y) \tilde{\theta}^a_m \\ 0 & \tilde{\theta}^a_m \end{pmatrix} \tag{D.1.8}$$

ここで，

$$\delta_{ab} \tilde{\theta}^a_m \tilde{\theta}^b_n = \tilde{g}_{mn}. \tag{D.1.9}$$

$\tilde{g}_{mn}$ が K_I で不変な計量に限定すると標準的な KK 次元低下が得られる．

§D.2
Scherk-Schwarz コンパクト化

References

- Scherk J, Schwarz H: NPB153, 61 (1979)

  How to get masses from extradimensions”

D.2.1　Flat group

時空が局所的に $M = X^D \times Y^E$ と表され，かつ Y が群多様体で，群 G が Y に単純推移的に作用するとする．

KK 次元低下の ansatz

$$(\tilde{\theta}_M{}^A) = \begin{pmatrix} \delta^\gamma \theta^\alpha_\mu(x) & -2\kappa A^b_\mu(x) K^m_b(y) \tilde{\theta}^a_m \\ 0 & \tilde{\theta}^a_m \end{pmatrix} \tag{D.2.1}$$

において，$K_a = K^m_a \partial_m \ (a = 1, \cdots, E)$ として，

$$\tilde{\theta}^a_n(x,y) = (K^{-1})_n{}^b(y) \Phi^a_b(x), \quad \tilde{g}_{mn} = (K^{-1})_m{}^a (K^{-1})_n{}^b h_{ab}(x) \tag{D.2.2}$$

と取ると，

$$\pounds_{K_c}\tilde{g}_{mn} = -(K^{-1})_m{}^a(K^{-1})_n{}^b(f^d{}_{ca}h_{bd} + f^d{}_{cb}h_{ad}) \tag{D.2.3}$$

より，h_{ab} は次のように変換する：

$$\delta h_{ab} = -\pounds_\xi - \lambda^c(f^d{}_{ca}h_{bd} + f^d{}_{cb}h_{ad}) \tag{D.2.4}$$

すなわち，スカラ場 $h_{ab}(x)$ がゲージ変換に対して adjoint[2] に従って変換し，ゲージ場 A^a に関して電荷を持つことになる（gauging!!).

作用積分は

$$\begin{aligned} S &= \int d^Dx|\theta|(L_2 + L_1 + L_0); && \text{(D.2.5)}\\ L_2 &= \frac{R}{4\kappa^2}, && \text{(D.2.6)}\\ L_1 &= -\frac{1}{4}\delta^{\frac{2}{D-2}}F^{a\mu\nu}F^b_{\mu\nu}h_{ab}, && \text{(D.2.7)}\\ L_0 &= \frac{1}{16\kappa^2}g^{\mu\nu}D_\mu h_{ab}D_\nu h^{ab} - \frac{1}{4\kappa^2(D-2)}g^{\mu\nu}\partial_\mu\ln(\delta)\partial_\nu\ln(\delta) - V, && \text{(D.2.8)}\\ V &= \frac{1}{16\kappa^2}\delta^{-\frac{2}{D-2}}f^a{}_{bc}\left[2f^b{}_{ac'}h^{cc'} + f^{a'}{}_{b'c'}h_{aa'}h^{bb'}h^{cc'}\right]. && \text{(D.2.9)} \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} &\delta = \sqrt{\det(h_{ab})}, \quad h^{ab} = (h^{-1})^{ab}, && \text{(D.2.10)}\\ &D_\mu h_{ab} = \partial_\mu h_{ab} - 4\kappa f^d{}_{c(a}A^c_\mu h_{b)d}, && \text{(D.2.11)}\\ &F^a = dA^a + 2\kappa f^a{}_{bc}A^b \wedge A^c. && \text{(D.2.12)} \end{aligned}$$

この作用積分に現れるスカラポテンシャルが非負で $h_{ab} = \delta_{ab}$ に対してゼロとなるとき，対応するゲージ群は平坦であるという．

D.2.2　Twisted torus

$M \in \mathrm{SL}(E, \mathbb{R})$ を

$$M = 0_1 \oplus \hat{M}; \quad \hat{M} \in \mathrm{SO}(E-1) \tag{D.2.13}$$

として，

$$K_a = (e^{-My^1})_a{}^m\partial_m \tag{D.2.14}$$

とおくと，

$$[K_1, K_a] = -\hat{M}_a{}^bK_b, \quad [K_a, K_b] = 0\ (a, b \neq 1) \tag{D.2.15}$$

ポテンシャルは

$$V = 2h^{11}\mathrm{Tr}(M^2 - MhMh^{-1}) - 2M_a{}^bM_{a'}{}^{b'}h_{bb'}h^{1a}h^{1a'}. \tag{D.2.16}$$

内部空間の計量は，p, q, r, s が $2, \cdots, E$ を動くとき，

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{mn}dy^m dy^n &= \sum_{a,b} h_{ab}dy^m (e^{My^1})_m{}^a dy^n (e^{My^1})_n{}^b \\ &= h_{11}(\hat{\theta}^1)^2 + \sum_{p,q\neq 1}\hat{h}_{pq}\tilde{\theta}^p\hat{\theta}^q. \end{aligned} \tag{D.2.17}$$

ここで，

$$\hat{\theta}^1 = dy^1 + v_p\hat{\theta}^p\hat{\theta}^p; \quad v_p \equiv \frac{h_{1p}}{h_{11}}, \tag{D.2.18a}$$

$$\hat{\theta}^p = d\hat{y}^p - \hat{y}^q \hat{M}_q{}^p dy^1, \tag{D.2.18b}$$

$$\hat{y}^p = y^q e^{\hat{M}y^1})_q{}^p, \tag{D.2.18c}$$

$$\hat{h}_{pq} = h_{pq} - h_{11}v_p v_q. \tag{D.2.18d}$$

基底 $\hat{\theta}^a$ に関する接続係数は

$$\hat{\omega}^1{}_{p1} = -\hat{M}_p{}^q v_q, \tag{D.2.19a}$$

$$\hat{\omega}^1{}_{pq} = -v_{[p}\hat{M}_{q]}{}^r v_r - h^{11}\hat{M}_{(pq)}, \tag{D.2.19b}$$

$$\hat{\omega}^p{}_{q1} = h_{11}v_q\hat{M}^{pr}v_s + \hat{h}^{pr}\hat{M}_{[rq]}, \tag{D.2.19c}$$

$$\hat{\omega}^p{}_{qr} = \hat{h}^{ps}\left\{v_s\hat{M}_{(qr)} - v_q\hat{M}_{(sr)} - v_r\hat{M}_{[sq]}\right\}. \tag{D.2.19d}$$

ここで，$\mathscr{M}$ の添え字の上げ下げは $\hat{h}_{pq}$ で行うものとする．

D.2.3　例：E:odd

E が奇数で $\hat{M}$ が

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & m_1 \\ -m_1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} 0 & m_p \\ -m_p & 0 \end{pmatrix} \quad (E = 2p+1) \tag{D.2.20}$$

という構造をもつとき ($m_i \neq 0$)，質量スペクトルは次のようになる．

- Tensor: $g_{\mu\nu}$
- Vector: A^a
  - A^1: massless
  - $A^{2i}, A^{2i+1}(i = 1, \cdots, p)$: $m = m_i$
- Scalar: h_{ab}
  - $2p$ 個：NG boson
  - $p+1$ 個：massless
  - $2p^2$ 個：massive

D.2.4　Supersymmetry の自発的破れ

M理論の 4 次元への 7 次元 twisted torus によるコンパクト化（Scherk-Schwarz コンパクト化）に手寄与すると，スピン 3/2 の場に対する作用積分

$$S = -\frac{i}{2}\int d^4x \int d^7|\tilde{\theta}|\bar{\psi}_A\tilde{\Gamma}^{ABC}D_B\psi_C, \tag{D.2.21}$$

$$D_A\psi_B = \left(\tilde{\theta}_A{}^M\partial_M + \frac{1}{4}\tilde{\omega}_{ACD}\tilde{\Gamma}^{CD}\right)\psi_B + \tilde{\omega}_{AB}{}^C\psi_C \tag{D.2.22}$$

において，ω_{cab} はポテンシャルの極小点 $h_{ab} = \delta_{ab}$ において

$$\omega_{cab} = \frac{1}{2}(f^c{}_{ab} + f^b{}_{ac} - f^a{}_{bc}) \tag{D.2.23}$$

となり，質量項を生み出す．質量スペクトルは

- 8 個の Majorana spin 3/2 場 $\psi_\mu^{i,k}(i = 1, 2, k = 1, \cdots, 4)$

  $\Rightarrow$ 4 個の spin 3/2 Dirac 場: $M^k_{3/2} = \frac{1}{2}(m_1 \pm m_2 \pm m_3)$.

- 8 個の NG spin 1/2 Majorana spinor: massless

- 48 個の spin 1/2 Majorana spinor: $m = \left|\frac{1}{2}|m_1 + m_2 + m_3| + m_j\right|$.

したがって，超対称性は基底状態の Minkowski 時空で完全に破れる．

E Calabi-Yau多様体

§E.1 Conifold

Reference

- P Candelas, XC de la Ossa: NPB 342, 246 (1990)

  ”Comments on Conifolds”

E.1.1 Ricci flat metric on a cone space

B_n をベースとするコーンスペース $C(B_n)$ の計量

$$ds^2 = dr^2 + f(r)^2 g(B_n) \tag{E.1.1}$$

が Ricci flat となる条件は

$$R_{rr} = -n\frac{f''}{f}, \quad R_{ij} = R_i j(B) - \left(\frac{f''}{f} + (n-1)(f')^2\right) g_{ij}(B) \tag{E.1.2}$$

より，

$$f = ar, \quad R_{ij}(B) = (n-1)a^2 g_{ij}(B). \tag{E.1.3}$$

例えば，B が $S^2 \times S^2$ 上の U(1) バンドルで計量

$$ds^2 = \lambda^2(d\psi + p\cos\theta_1 d\phi_1 + q\cos\theta_2 d\phi_2)^2 + \Lambda_1^{-1}(d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 d\phi_1^2) + \Lambda_2^{-1}(d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\phi_2^2) \tag{E.1.4}$$

を持つとすると，$C(B)$ が Ricci 平坦となる条件は

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{1}{2}\lambda^2 \left\{(p\Lambda_1)^2 + (q\Lambda_2)^2\right\} \\ &= \Lambda_1 - \frac{1}{2}(\lambda p\Lambda_1)^2 = \Lambda_2 - \frac{1}{2}(\lambda q\Lambda_2)^2 \end{aligned} \tag{E.1.5}$$

特に，

$$(p,q) = (1,0) \quad : \quad \lambda^2 = 1/8, \quad \Lambda_1 = 8, \quad \Lambda_2 = 4 \tag{E.1.6a}$$
$$(p,q) = (1,1) \quad : \quad \lambda^2 = 1/9, \quad \Lambda_1 = 6, \quad \Lambda_2 = 6 \tag{E.1.6b}$$

E.1.2　Conifold の位相

【Theorem E.1.1】　$\mathbb{C}^4$ の超曲面

$$M^\sharp : \sum_{A=1}^4 (w^A)^2 = 0 \tag{E.1.7}$$

は，$C(S^2 \times S^3)$ に同相.　□

Proof. $\sum_{A=1}^4 |w^A|^2 = r^2$ により定義される断面 $B(r)$ は，$w = (w^A) = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R}^4)$ を用いて

$$x \cdot x = y \cdot y = \frac{1}{2}r^2, \quad x \cdot y = 0 \tag{E.1.8}$$

と表される．これは，B が S^3 $(x \cdot x = r^2/2)$ の単位接バンドル $U(S^3)$ であることを意味する．ところが，S^3 は平行化可能なので $(S^3 \cong \mathrm{SU}(2))$, $T(S^3)$ は自明，したがって $U(S^3)$ も自明となる：$B \simeq U(S^3) \simeq S^3 \times S^2$.　Q.E.D.

E.1.3　Conifold の Ricci 平坦計量

2 次の行列 W を

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{A=1}^4 w^A \sigma_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} w^3 + iw^4 & w^1 - iw^2 \\ w^1 + iw^2 & -w^3 + iw^4 \end{pmatrix}, \tag{E.1.9}$$
$$(\sigma_A) = (\sigma_j, iI_2) \tag{E.1.10}$$

により定義すると

$$\det W = -\frac{1}{2} \sum_{A=1}^4 (w^A)^2, \quad \mathrm{Tr} W^\dagger W = \sum_{A=1}^4 |w^A|^2 \tag{E.1.11}$$

より，$Z = W/r$ とおくと，空間 B は

$$\det Z = 0, \quad \mathrm{Tr} Z^\dagger Z = 1 \tag{E.1.12}$$

と表される．

この解は，一般に

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{E.1.13}$$

を用いて

$$Z = L Z_0 R^\dagger; \quad L, R \in \mathrm{SU}(2) \tag{E.1.14}$$

と表される．$Z = Z_0$ となるのは，$L = R^\dagger = \Theta = [e^{i\theta}, e^{-i\theta}]$ の時なので，結局

$$B \cong (\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2))/\mathrm{U}(1) \cong (S^3 \times S^3)/\mathrm{U}(1) (\simeq S^2 \times S^3) \tag{E.1.15}$$

となることが分かる．

したがって，

$$L = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} k & -\bar{l} \\ l & \bar{k} \end{pmatrix}, \tag{E.1.16}$$

$$a = \cos\frac{\theta_1}{2} e^{\frac{i}{2}(\psi_1 + \phi_1)}, \quad b = \sin\frac{\theta_1}{2} e^{\frac{i}{2}(\psi_1 - \phi_1)}, \tag{E.1.17}$$

$$k = a(1 \to 2), \quad l = b(1 \to 2) \tag{E.1.18}$$

において，

$$\psi_1 = \frac{\psi + \chi}{2}, \quad \psi_2 = \frac{\psi - \chi}{2} \tag{E.1.19}$$

と置くと，Θ の作用は $\chi \to \chi + \theta$ となるので，$(\psi, \phi_1, \theta_1, \phi_2, \theta_2)$ が B の座標系となり，$S^3 \times S^3$ において ∂_χ に垂直な計量成分が B の軽量を与える．

例えば，$S^3 \times S^3$ の $\mathrm{U}(1)$ 不変計量

$$ds^2 = u \mathrm{Tr}(dZ^\dagger dZ) + v |\mathrm{Tr}(Z^\dagger dZ)|^2 \tag{E.1.20}$$

から得られる B の計量は

$$ds^2 = \frac{u+v}{8}(d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2)^2 + \frac{u}{4}(g(S_1^2) + g(S_2^2)) \tag{E.1.21}$$

となる．特に，$u = 2/3, v = 2/9$ と取ると，$T^{1,1}$ 計量が得られる．

F Calabi-Yau コンパクト化におけるモジュライ

§F.1 ４次元有効理論：直積型 Calabi-Yau コンパクト化

F.1.1 モジュライ自由度

１０次元超重力論・超弦理論に含まれるゼロ質量ボゾン場は，次の２つに分類される．

1) 重力セクター： g_{MN}, B_{MN}, Φ（すべてに共通）

2) ゲージセクター：

   i) I 型理論： 非可換ゲージ場 A_M

   ii) II 型理論： $\{C_p\}$ (RR-form 場）

これらのうち，重力セクターはすべての理論に共通で，CY コンパクト化におけるゼロモードは次の２種類のモジュライを生み出す (Candelas, Horowitz, Strominger, Witten 1985[17]; Candelas P, de la Ossa XC 1991[15])．

1) 複素モジュライ＋ dilaton-axion： $h^{2,1}+1$ コの chiral 場

2) Kähler モジュライ： $h^{1,1}$ コの chiral 場

一方，ゲージセクターからの寄与は I 型と I I 型で異なる．まず，IIA, IIB のいずれに対しても，CY コンパクト化により得られるモジュライ場に対する 4 次元理論は，$N=2$ 超対称性をもつゲージ結合のない超重力理論 (ungauged sugra) となる．登場する massless の超組（超場）は以下の通りである

- IIA 型理論
  - 重力超組：$(g_{\mu\nu}, \psi_\mu^{(+)}, \psi_\mu^{(-)}, C^0_{[1]})$
  - ベクトル超組 (Kahler モジュライ)：$(C^a_{[1]}, \psi^{a(-)}, \psi^{a(+)}, w^a = b^a + iv^a)$ $(a = 1, \cdots, h^{1,1})$
  - ハイパー超組 (複素モジュライ):$(\psi^{k(+)}, z^k, \psi^{k(-)}, \xi^k + i\tilde{\xi}_k)$ $(k = 1, \cdots, h^{2,1})$
  - テンソル超組：$(\lambda^{(-)}, \phi + ia, \lambda^{(+)}, \xi^0 + i\tilde{\xi}_0)$ $(*db = da)$
- IIB 型理論
  - 重力超組：$(g_{\mu\nu}, \psi_\mu^{(1)}, \psi_\mu^{(2)}, V^0_{[1]})$
  - ベクトル超組 (複素モジュライ)：$(V^k_{[1]}, \psi^{k(2)}, \psi^{k(1)}, z^k)$ $(k = 1, \cdots, h^{2,1})$
  - ハイパー超組（Kahler モジュライ)：$(\psi^{a(1)}, w^a = b^a + iv^a, \psi^{a(2)}, c^a + i\rho^a)$ $(a = 1, \cdots, h^{1,1})$
  - テンソル超組：$(\lambda^{(1)}, \phi + ia, \lambda^{(2)}, C_0 + ic)$ $(*dC_2 = dc, *db = da)$

I 型に対しては，$H^1(\mathrm{End}T)$ の自由度を除くと，重力セクターのモジュライと相似的な構造をもつ（カラーを持つ点のみが異なる）.

注　$N=2$ SUSY での massless 超組は

hypermultiplet: $\left(-\frac{1}{2}, 0^2, \frac{1}{2}\right)$

vector multiplet: $\left(-1, -\frac{1}{2}^2, 0\right) + \left(0, \frac{1}{2}^2, 1\right)$

supergravity multiplet: $\left(-2, -\frac{3}{2}^2, -1\right) + \left(1, \frac{3}{2}^2, 2\right)$

F.1.2　複素モジュライ

複素構造の変形　複素構造の変形は，$\dot{J}$ により記述され，次の条件を満たす：

$$\dot{J}J + J\dot{J} = 0, \quad N'_J(\dot{J}) = 0. \tag{F.1.1}$$

これらの条件は次のように書き換えられる：

$$\dot{J} = I + \bar{I}; \quad I = I^a{}_{\bar{b}}\partial_a \otimes d\bar{z}^b \in \mathscr{T}^{1,0} \otimes \mathscr{A}^{0,1}, \tag{F.1.2a}$$

$$(i + J)\bar{\partial} I = 0. \tag{F.1.2b}$$

また，無限小変換 $X = (Z + \bar{Z})/2$ ($Z \in \mathscr{T}^{1,0}(M)$) に対して，

$$\pounds_X J = i(\bar{\partial} Z - \partial \bar{Z}) \ \Leftrightarrow\ \delta_X I = i\bar{\partial} Z. \tag{F.1.3}$$

以上より，正則ベクトル場の層 Θ の散布層分解

$$0 \to \Theta \to \mathscr{T}^{1,0} \to \mathscr{T}^{1,0} \otimes \mathscr{A}^{0,1} \to \mathscr{T}^{1,0} \otimes \mathscr{A}^{0,2} \to \cdots \tag{F.1.4}$$

において，複素構造の変形自由度は 1 次の Dolbeault コホモロジー群 $H^{0,1}_{\bar{\partial}}(M, \mathscr{T}^{1,0})$ と一致する．これは Dolbeault の定理より，層係数コホモロジー群 $H^1(M, \Theta)$ と同型となる．

Calabi-Yau 多様体では，標準線バンドルの大域断面 Ω を用いると，同型対応

$$X = X^a \partial_a \in \Gamma_U(\Theta) \mapsto \omega = X^a \Omega_{abc} dz^b \wedge dz^c \in \Gamma_U(\Omega^2) \tag{F.1.5}$$

が存在するので，

$$H^1(M, \Theta) \cong H^1(M, \Omega^2) \cong H^{2,1}_{\bar{\partial}}(M) \tag{F.1.6}$$

となる．

Kähler ポテンシャル　CY_6 の複素構造を $\hat{J}$，対応する Kähler 形式を J，$\hat{J}$ から決まる正則 3 形式を $\Omega(\hat{J})$，複素モジュライのパラメーターを z^a とすると，次の小平の公式が成り立つ：

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z^a} = k_a(z)\Omega + \chi_a \in \mathscr{H}^{3,0} \oplus \mathscr{H}^{2,1}. \tag{F.1.7}$$

ここで，χ_a は複素構造の変形と

$$\chi_{aij\bar{k}} = -\frac{1}{2}\Omega_{ij}{}^{\bar{l}} \frac{\partial g_{\bar{k}\bar{l}}}{\partial z^a} \tag{F.1.8}$$

の関係にある．これより，モジュライ空間の計量

$$\begin{aligned} G_{a\bar{b}} \delta z^a \delta z^{\bar{b}} &:= \frac{1}{4V} \int_Y d\mathrm{vol}(Y) g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} \delta g_{ik} \delta g_{\bar{j}\bar{l}} \\ &= -\frac{i}{V\|\Omega\|^2} \delta z^a \delta z^{\bar{b}} \int_Y \chi_a \wedge \bar{\chi}_{\bar{b}} \end{aligned} \tag{F.1.9}$$

は

$$G_{a\bar{b}} = -\frac{\int_Y \chi_a \wedge \bar{\chi}_{\bar{b}}}{\int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega}} = \partial_a \bar{\partial}_b \mathscr{K}(z, \bar{z}) \tag{F.1.10}$$

となる．ここで，

$$\mathscr{K} = -\log\left(i \int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega}\right) \tag{F.1.11}$$

は複素モジュライに対する Kähler ポテンシャルである．

つぎに，(A^a, B_b) $(a, b = 0, \cdots, h^{2,1})$ を $H_3(Y, \mathbb{Z})$ の基底，(α_a, β^b) をその双対基底とする：

$$\int_{A^b} \alpha_a = \int_Y \alpha_a \wedge \beta^b = \delta_a^b, \quad \int_{B_a} \beta_b = \int_Y \beta^b \wedge \alpha_a = -\delta_a^b. \tag{F.1.12}$$

いま，

$$z^a := \int_{A^a} \Omega, \quad \mathscr{G}_a := \int_{B_a} \Omega \tag{F.1.13}$$

とおくと，z^a は複素構造モジュライ空間の（済次）複素座標となり，$\mathscr{G}_a$ は $\hat{J}$ で決まる z^a の関数となる：

$$\Omega = z^a \alpha_a - \mathscr{G}_a(z) \beta^a. \tag{F.1.14}$$

小平の関係式より，$\mathscr{G}_a$ は２次の済次正則関数を用いて

$$\mathscr{G}_a = \partial_a \mathscr{G}, \quad \mathscr{G}(\lambda z) = \lambda^2 \mathscr{G}(z) \tag{F.1.15}$$

と書けることが示される．

$$e^{-\mathscr{K}} = -i \left(z^a \bar{\partial}_a \bar{\mathscr{G}} - \bar{z}^a \partial_a \mathscr{G} \right) \tag{F.1.16}$$

が導かれる．

超ポテンシャル　フラックスがない場合，II 型理論ではこのポテンシャルは存在しない．

一方，ヘテロ型理論の場合，ゲージ超組のゼロモード $a_{\bar{i},\bar{j}\bar{x}}(x,y)$, $\lambda_{\bar{i},\bar{j}\bar{x}}(x,y)$ を $\mathscr{H}^{2,1}(Y)$ の基底 $\chi_a(y)$ で

$$a_{\bar{i},\bar{j}\bar{x}}(x,y) = \frac{1}{2} \sigma^a_{\bar{x}}(x) \chi_{a\,kl\bar{i}}(y) \bar{\Omega}^{kl}_{\bar{j}}(y), \tag{F.1.17a}$$

$$\lambda_{\bar{i},\bar{j}\bar{x}}(x,y) = \frac{1}{2} \lambda^a_{\bar{x}}(x) \chi_{a\,kl\bar{i}}(y) \bar{\Omega}^{kl}_{\bar{j}}(y), \tag{F.1.17b}$$

$$\tag{F.1.17c}$$

と展開し，１０次元理論の湯川結合項

$$\int d^6 y \, \mathrm{Tr}_v \left(\bar{\lambda} \Gamma^m [A_m, \lambda] \right) \tag{F.1.18}$$

に代入すると，

$$d^{\bar{x}\bar{y}\bar{z}} \bar{\lambda}^a_{\bar{x}} \lambda^b_{\bar{y}} \sigma^c_{\bar{z}} \kappa_{abc}, \tag{F.1.19}$$

$$\kappa_{abc} = -\int_Y \Omega \wedge \chi^i_a \wedge \chi^j_b \wedge \chi^k_c \Omega_{ijk} \tag{F.1.20}$$

を得る (Strominger A, Witten E 1985[60])．ここで，

$$\chi_a^i = \frac{1}{2\|\Omega\|^2}\bar{\Omega}^{ijk}\chi_{ajk\bar{l}}dx^{\bar{l}} = \chi_a{}^i_{\bar{j}}dx^{\bar{j}}. \tag{F.1.21}$$

この湯川結合係数は，うえの前ポテンシャル $\mathscr{G}$ を用いて

$$\kappa_{abc} = -\partial_a\partial_b\partial_c\mathscr{G} \tag{F.1.22}$$

と表される．したがって，$\mathscr{H}^{2,1}$ セクターの超ポテンシャルは

$$W(z,\sigma) = \frac{\sigma^a\sigma^b\sigma^c}{3!}\partial_a\partial_b\partial_c\mathscr{G}(z) \tag{F.1.23}$$

F.1.3　Kähler モジュライ

Kähler 変形　Einstein 計量の変形は，次の条件をみたす 2 階対称テンソル $h = \delta g$ により記述される (全体的なスケールを含む共形変形を除く)：

$$\nabla^2 h_{mn} + 2R_m{}^p{}_n{}^q h_{pq} = 0, \quad \nabla^m h_{mn} = 0, \quad h^m_m = 0. \tag{F.1.24}$$

一方，特に h が Kahler 計量の変形のとき，h は

$$h = {}^TJhJ \tag{F.1.25}$$

を満たし，

$$\psi_{mn} = h_{ml}J^l{}_n \tag{F.1.26}$$

とおくと，

$$\psi_{mn} = -\psi_{nm} \in \mathscr{A}^{1,1}(Y), \quad J^{mn}\psi_{mn} = 0 \tag{F.1.27}$$

すなわち primitive $(1,1)$ 形式となる．これを上記の条件に代入すると，Kähler 多様体に対して

$$\nabla J = 0, \tag{F.1.28}$$

$$R_{abpd}J^p{}_c = -R_{abcp}J^p{}_d \tag{F.1.29}$$

が成り立つことより，

$$\begin{aligned}\triangle\psi_{mn} &= (\triangle h_{np})J^p{}_n = -2R_{mrps}h^{rs}J^p_n = 2R_{mrnp}h^{rs}J^p{}_s \\ &= -2R_m{}^r{}_n{}^p\psi_{rp} = -R_{mn}{}^{pq}\psi_{pq}.\end{aligned} \tag{F.1.30}$$

よって，

$$(d\delta+\delta d)\psi = -\triangle\psi - \frac{1}{2}\mathscr{R}\psi + \frac{2s}{n}\psi = \frac{2s}{n}\psi. \tag{F.1.31}$$

を得る．ここで s はスカラ曲率，n は実次元である．したがって，特に，Calabi-Yau 多様体に対しては，変形の自由度は，調和的 primitive $(1,1)$ 形式の自由度となる．Hodge 理論よりこれは，$h^{1,1}-1$ と一致する（全体のスケール変形を加えると $h^{1,1}$）．

Kähler ポテンシャ　$\rho, \sigma, \tau \in \mathscr{H}^{1,1}$ に対して，

$$G(\rho, \sigma) := \frac{1}{2V} \int_Y \rho \wedge *\sigma, \tag{F.1.32a}$$

$$\kappa(\rho, \sigma, \tau) := \int_Y \rho \wedge \sigma \wedge \tau \tag{F.1.32b}$$

とおく．さらに，$e_A (A = 1, \cdots, h^{1,1})$ を $H^2(Y, \mathbb{Z})$ の基底として，

$$J + iB = w^A e_A; \quad w^A = v^A + ib^A \tag{F.1.33}$$

により Kähler モジュライ空間の複素座標 w^A を導入する．このとき，Y の位相構造のみで決まる w の正則関数

$$P(w) = \frac{1}{3!} \kappa_{ABC} w^A w^B w^C : \quad \kappa_{ABC} = \kappa(e_A, e_B, e_C) \tag{F.1.34}$$

を用いて，モジュライ空間の Kähler 計量は

$$G_{A\bar{B}} = \partial_A \bar{\partial}_{\bar{B}} \mathscr{K}'(w, \bar{w}), \tag{F.1.35}$$

$$\mathscr{K}' = -\log(\kappa(J, J, J)) = -\log P(v) \tag{F.1.36}$$

と表される．

注：

- 値としては，$\kappa(J, J, J) = 3\mathscr{V}$ である．
- $\{e_A\}$ の Poincare 双対にあたる $H_4(Y, \mathbb{Z})$ の基底を $\{C_A\}$ とおくと，

  $$\kappa(e_A, e_B, e_C) = \#(C_A, C_B, C_C) : \text{intersection number} \tag{F.1.37}$$

  が成り立つ．
- Kähler 計量 $\partial_A \partial_{\bar{B}} \mathscr{V}$ の符号は $(1, h^{1,1} - 1)$ [Candelas P, de la Ossa X: NPB355, 455 (1991)]

超ポテンシャル：　一般に，超ポテンシャル（F 項）は Kähler モジュライに依存しない．また，ゼロフラックスの II 型理論では，超ポテンシャルはゼロとなる．

一方，ヘテロ型理論の場合，ゲージ超組のゼロモード $a_{i,\bar{j}\bar{x}}(x, y)$, $\lambda_{i,\bar{j}\bar{x}}(x, y)$ を $\mathscr{H}^{1,1}(Y)$ の基底 $e_{Ai\bar{j}}(y)$ で

$$a_{i,\bar{j}\bar{x}}(x, y) = \phi^A_{\bar{x}}(x) e_{Ai\bar{j}}(y), \tag{F.1.38a}$$

$$\lambda_{i,\bar{j}\bar{x}}(x, y) = \lambda^A_{\bar{x}}(x) e_{Ai\bar{j}}(y), \tag{F.1.38b}$$

と展開し，１０次元理論の湯川結合項

$$\int d^6y\,\mathrm{Tr}_v\left(\bar{\lambda}\Gamma^m[A_m,\lambda]\right) \tag{F.1.39}$$

に代入すると，

$$d^{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}\bar{\lambda}^A_{\bar{x}}\lambda^B_{\bar{y}}\sigma^C_{\bar{z}}\kappa_{ABC} \tag{F.1.40}$$

を得る．したがって，ゲージセクターでの超ポテンシャル $W(\phi)$ は，

$$W(\phi) = d^{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}\phi^A_{\bar{x}}\phi^B_{\bar{y}}\phi^C_{\bar{z}}\kappa_{ABC} \tag{F.1.41}$$

で与えられる．このポテンシャルはゲージ群と Y の位相のみにより決まり，複素構造や Kähler モジュライに依存しない．

非繰り込み定理:　超ポテンシャルは，摂動論の範囲では，σ-モデル量子補正を受けない (Witten E 1986 [63])．

関連図書

[1] Adler, S.: Axial-Vector Vertex in Spinor Electrodynamics, *Phys. Rev.* **177**, 2426 (1969).

[2] Aldazabal, G., Franco, S., Ibanez, L., Rabadan, R. and Uranga, A.: D = 4 chiral string compactifications from intersecting branes., *J. Math. Phys.* **42**, 3103–3126 (2001).

[3] Alishahiha, M., Silverstein, E. and Tong, D.: DBI in the Sky, *Phys. Rev. D* **70**, 123505 (2004).

[4] Arvanitaki, A., Dimopoulos, A., Dubovsky, S., Kaloper, N. and March-Russell, J.: String Axiverse, *Phy. Rev. D* **81**, 123530 (2010).

[5] Arvanitaki, A. and Dubovsky, S.: Exploring the string axiverse with precision black hole physics, *Phys. Rev. D* **83**, 044026 (2011).

[6] Baumann, D., Dymarsky, A., Klebanov, I., McAllister, L. and Steinhardt, P.: A Delicate Universe, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 141601 (2007).

[7] Becker, K., Becker, M. and Krause, A.: M-Theory Inflation from Multi M5-Brane Dynamics, *Nucl. Phys. B* **715**, 349–371 (2005).

[8] Belavin, A., Polyakov, A., Schwartz, A. and Tyupkin, Y.: Pseudoparticle Solutions of the Yang-Mills Equations, *Phys. Lett. B* **59**, 85 (1975).

[9] Bell, J. and Jackiw, R.: A PCAC puzzle: $\pi^0 \to \gamma\gamma$ in the sigma model., *Nuovo Cimento A* **60**, 47–61 (1969).

[10] Blanco-Pillado, J., Burgess, C., Cline, J., Escoda, C., Gomez-Reino, M., Kallosh, R. and Li, : Racetrack Inflation, *JHEP* **0411**, 063 (2004).

[11] Blanco-Pillado, J., et al.: Inflating in a Better Racetrack, *JHEP* **0609**, 002 (2006).

[12] Blumenhagen, R., Braun, V., Kors, B. and Lust, D.: Orientifolds of K3 and Calabi-Yau Manifolds with Intersecting D-branes, *JHEP* **0207**, 026 (2002).

[13] Bond, J. and Efstathiou, G.: Cosmic background radiation anisotropies in universes dominated by nonbaryonic dark matter, *Astrophys. J. Lett.* **285**, 45–48 (1984).

[14] Buchbinder, E.: Five-Brane Dynamics and Inflation in Heterotic M-Theory, *Nucl. Phys. B* **711**, 314–344 (2005).

[15] Candelas, P. and Ossa, de la X.: Moduli Space of Calabi-Yau Manifolds, *Nucl. Phys. B* **355**, 455–81 (1991).

[16] Candelas, P. and de la Ossa, X. C.: Comments on Conifolds, *Nucl. Phys. B* **342**, 246–268 (1990).

[17] Candelas, P., Horowitz, G., Strominger, A. and Witten, E.: Vacuum configurations for superstrings, *Nucl. Phys. B* **258**, 46–74 (1985).

[18] Cardoso, V., Dias, O., Lemos, J. and Yoshida, S.: The Black hole bomb and superradiant instabilities (Erratum: Phys. Rev. D70:049903, 2004), *Phys. Rev. D* **70**, 044039 (2004).

[19] Cardoso, V., Dias, O. and Yoshida, S.: Classical instability of Kerr-AdS black holes and the issue of final state, *Phys. Rev. D* **74**, 044008 (2006).

[20] Cardoso, V. and Yoshida, S.: Superradiant instabilities of rotating black branes and strings, *JHEP* **0507**, 009 (2005).

[21] Chen, P., Dasgupta, K., Narayan, K., Shmakova, M. and Zagermann, M.: Brane Inflation, Solitons and Cosmological Solutions: I, *JHEP* **0509**, 009 (2005).

[22] Chen, X.: Inflation from warped space, *JHEP* **0508**, 045 (2005).

[23] Chen, X.: Running non-Gaussianities in DBI inflation, *Phys. Rev. D* **72**, 123518 (2005).

[24] Cicoli, M., Goodsell, M. and Ringwald, A.: The type IIB string axiverse and its low-energy phenomenology, *JHEP* **1210**, 146 (2012).

[25] Conlon, J.: The QCD axion and moduli stabilisation, *JHEP* **0605**, 078 (2006).

[26] Cremades, D., Quevedo, F. and Sinha, A.: Warped Tachyonic Inflation in Type IIB Flux Compactifications and the Open-String Completeness Conjecture, *JHEP* **0510**, 106 (2005).

[27] Damour, T., Deruelle, N. and Ruffini, R.: *Nuovo Cimento Lett.* **15**, 257 (1976).

[28] Dasgupta, K., Hsu, J., Kallosh, R., Linde, A. and Zagermann, M.: D3/D7 brane inflation and semilocal strings, *JHEP* **0408**, 030 (2004).

[29] Defni, T., et al.: An update on the Axion Helioscopes front: current activities at CAST and the IAXO project, *Nuclear and Particlle Physics Proceedings* **273**, 244 (2016).

[30] Detweiler, S.: Klein-Gordon Equation And Rotating Black Holes., *Phys. Rev. D* **22**, 2323–6 (1980).

[31] Dimopoulos, S., Kachru, S., McGreevy, J. and Wacker, J.: N-flation, *hep-th/0507205* (2005).

[32] Dolan, S.: Instability of the massive Klein-Gordon field on the Kerr spacetime, *Phys. Rev. D* **76**, 084001 (2007).

[33] Douglas, M. and Kachru, S.: Flux Compactification, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 733–96 (2007).

[34] Dvali, G. and Tye, S.: Brane Inflation, *Phys. Lett. B* **450**, 72–82 (1999).

[35] Firouzjahi, H. and Tye, S.-H. H.: Closer towards inflation in string theory, *Phys. Lett. B* **584**, 147–54 (2004).

[36] Fradkin, E. and Tseytlin, A.: Nonlinear Electrodynamics from Quantized Strings., *Phys. Lett. B* **163**, 123 (1985).

[37] Fujikawa, K.: On the Evaluation of Chiral Anomaly in Gauge Theories with γ_5 Couplings., *Phys. Rev. D* **29**, 285–292 (1984).

[38] Giddings, S. B., Kachru, S. and Polchinski, J.: Hierarchies from Fluxes in String Compactifications, *Phys. Rev. D* **66**, 106006 (2002).

[39] Görlich, L., Kachru, S., Tripathy, P. and Trivedi, S.: Gaugino condensation and nonperturbative superpotentials in flux compactifications, *JHEP* **0412**, 074 (2004).

[40] Gukov, S., Vafa, C. and Witten, E.: CFT's From Calabi-Yau Four-folds (Erratum: ibid B608:477-478 (2001)), *Nucl. Phys. B* **584**, 69–108 (2000).

[41] Hsu, J. and Kallosh, R.: Volume Stabilization and the Origin of the Inflaton Shift Symmetry in String Theory, *JHEP* **0404**, 042 (2004).

[42] Hsu, J., Kallosh, R. and Prokushkin, S.: On Brane Inflation With Volume Stabilization, *JCAP* **0312**, 009 (2003).

[43] Joyce, D.: *Compact Manifolds with Special Holonomy*, Oxford Univ. Press (2000).

[44] Kachru, S., Kallosh, R., Linde, A., Maldacena, J., McAllister, L. and Trivedi, S. P.: Towards Inflation in String Theory, *JCAP* **0310**, 013 (2003).

[45] Kachru, S., Kallosh, R., Linde, A. and Trivedi, S.: de Sitter Vacua in String Theory, *Phys. Rev. D* **68**, 046005 (2003).

[46] Klebanov, I. R. and Strassler, M. J.: Supergravity and a Confining Gauge Theory: Duality Cascades and χSB-Resolution of Naked Singularities, *JHEP* **0008**, 052 (2000).

[47] Kodama, H.: Superradiance and Instability of Black Holes, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **172**, 11–20 (2008).

[48] Kodama, H., Konoplya, R. and A, Z.: Gravitational stability of simply rotating Myers-Perry black holes: Tensorial perturbations., *Phys. Rev. D* **81**, 044007 (2010).

[49] Kodama, H. and Uzawa, K.: Comments on the four-dimensional effective theory for warped compactification, *JHEP* **0603**, 053 (2006).

[50] Konoplya, R. and Zhidenko, A.: Quasinormal modes of black holes: From astrophysics to string theory, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 793–836 (2011).

[51] Kosowsky, A.: Cosmic Microwave Background Polarization, *Annals of Physics* **246**, 49–85 (1996).

[52] Koyama, F., Tachikawa, Y. and Watari, T.: Supergravity Analysis of Hybrid Inflation Model from D3–D7 System, *Phys. Rev. D* **69**, 106001 (2004).

[53] Kreuzer, M.: Toric Geometry and Calabi-Yau Compacti cations, *Ukr. J. Phys.* **55**, 613 (2010).

[54] Leaver, E.: An analytic representation for the quasi-normal modes of Kerr black holes, *Proc. R. Soc. London A* **402**, 285 (1985).

[55] Penrose, R. and Floyd, R. M.: Extraction of rotational energy from a black hole, *Nature* **229**, 177–179 (1971).

[56] Polchinski, J.: *String Theory*, Cambridge Univ. Press (1998).

[57] Press, W. and Teukolsky, S.: *Nature* **238**, 211 (1972).

[58] Rosa, J.: The Extremal black hole bomb., *JHEP* **1006**, 015 (2010).

[59] Silverstein, E. and Tong, D.: Scalar Speed Limits and Cosmology: Acceleration from D-cceleration, *Phys. Rev. D* **70**, 103505 (2004).

[60] Strominger, A. and Witten, E.: New Manifolds for Superstring Compactification, *Comm. Math. Phys.* **101**, 341–61 (1985).

[61] Svrcek, P. and Witten, E.: Axions In String Theory, *JHEP* **0606**, 051 (2006).

[62] Tripathy, P. and Trivedi, S.: Compactification with flux on K3 and tori, *JHEP* **0303**, 028 (2003).

[63] Witten, E.: New issues in manifolds of $su(3)$ holonomy, *Nucl. Phys. B* **268**, 79 (1986).

[64] Witten, E.: Nonperturbative Superpotentials in String Theory, *Nucl. Phys. B* **474**, 343–360 (1996).

[65] Witten, E.: Strong coupling expansion of Calabi-Yau compactification, *Nucl. Phys. B* **471**, 135 (1996).

[66] Yoshino, H. and Kodama, H.: Bosenova collapse of axion cloud around a rotating black hole, *Prog. Theor. Phys.* **128**, 153 (2012).

[67] Zel'dovich, Y.: *Sov. Phys. JETP Lett.* **14**, 180 (1971).

[68] Zouros, T. and Eardley, D.: Instabilities Of Massive Scalar Perturbations Of A Rotating Black Hole., *Ann. Phys.* **118**, 139–55 (1979).