

# ゆらぎ宇宙論

近畿大学理工学研究科  
2013年2月14日-16日

小玉 英雄

KEK 素粒子原子核研究所  
理論センター  
理論宇宙物理グループ

Copyright Hideo Kodama 2013.2.14

# 目次

<b>第 1 章 一様等方宇宙モデル</b>	<b>1</b>
1.1 基本観測情報	1
1.1.1 Hubble の法則	1
1.1.2 宇宙の銀河地図	3
1.1.3 宇宙背景放射	7
1.2 基礎方程式	10
1.3 単純な宇宙モデル	12
1.4 宇宙パラメーター	13
1.5 Friedmann モデル	14
1.6 宇宙年齢	15
1.7 特異点	16
1.8 Raychaudhuri 方程式	17
1.9 光の伝搬	18
1.10 ホライズン	19
<b>第 2 章 ダークエネルギー問題</b>	<b>20</b>
2.1 宇宙パラメーターの決定法	20
2.2 距離測定	22
2.2.1 方法	22
2.2.2 距離梯子	22
2.3 Hubble 定数	23
2.4 Extended Hubble diagram	24
2.4.1 赤方偏移-光度距離関係	24
2.4.2 パラメーター依存性	24
2.5 SNIa 観測	25
2.6 *物理的意味	25
2.7 *様々な理論モデル	27

<b>第 3 章 熱いビッグバン宇宙</b>	<b>28</b>
3.1 宇宙の物質組成	28
3.2 宇宙の熱史	30
3.3 熱化学平衡	32
3.4 Saha の式	33
3.5 非平衡反応による粒子数の変化	34
3.6 宇宙物質の中性化	36
3.6.1 水素の光電離・中性化反応	36
3.6.2 非平衡反応	37
3.6.3 宇宙の透明度	38
3.7 CMB と宇宙音波	40
3.7.1 Jeans 長	40
3.7.2 宇宙音波	41
3.8 CMB による観測	45
3.9 宇宙パラメーター	49
<b>第 4 章 宇宙摂動論</b>	<b>54</b>
4.1 一般論	54
4.1.1 摂動 Einstein 方程式	54
4.1.2 Gauge problem	54
4.1.3 Tensorial decomposition of perturbations	56
4.2 テンソル型摂動	58
4.2.1 Tensor harmonics	58
4.2.2 Perturbation equations	58
4.2.3 Behavior of cosmological tensor perturbations	59
4.3 スカラ型摂動	60
4.3.1 スカラ型調和テンソル	60
4.3.2 計量摂動のゲージ不変量	61
4.3.3 物質摂動に対するゲージ不変量	62
4.3.4 Einstein 方程式	64
4.3.5 ゲージ固定法との関係	65
4.3.6 エントロピー摂動	66
4.3.7 断熱モード	67
4.3.8 ホライズン内の摂動	67
4.3.9 曲率優勢時でのゆらぎの時間発展	67
4.3.10 ホライズンを超える波長のゆらぎ	68
4.3.11 宇宙項の効果	70
4.4 多成分系への拡張	71
4.4.1 Multi-Component Fluid System	71

4.5	Long-wavelength limit . . . . .	76
4.5.1	Basic equations . . . . .	76
4.5.2	$k \rightarrow 0$ limit . . . . .	77
4.6	Scalar Field System . . . . .	81
4.6.1	Basic Equations . . . . .	81
4.6.2	The $k \rightarrow 0$ limit . . . . .	82
4.6.3	Slow Roll Phase . . . . .	84
4.7	偏光の伝搬と生成 . . . . .	84
4.7.1	偏光の記述 . . . . .	85
4.7.2	EモードとBモード . . . . .	85
4.7.3	Flat sky 近似 . . . . .	86
4.7.4	フラックス強度テンソル . . . . .	87
4.7.5	偏光に対する Boltzmann 方程式 . . . . .	89
4.7.6	最終散乱面での偏光 . . . . .	89
<b>第5章 *インフレーション宇宙モデル</b>		<b>93</b>
5.1	ビッグバンモデルの諸問題 . . . . .	93
5.1.1	平坦性問題 . . . . .	93
5.1.2	ホライズン問題 . . . . .	94
5.1.3	宇宙構造の起源 . . . . .	94
5.2	インフレーション . . . . .	96
5.2.1	ホライズン問題と平坦性問題の解決 . . . . .	96
5.2.2	必要とされる指数膨張数 . . . . .	98
5.2.3	1成分インフラトンモデル . . . . .	100
5.3	ゆらぎの生成 . . . . .	105
5.3.1	密度ゆらぎ . . . . .	105
5.3.2	原始重力波 . . . . .	110
5.3.3	観測からの制限 . . . . .	114
5.4	ゆらぎの統計 . . . . .	116
5.4.1	(3 + 1) 分解 . . . . .	116
5.4.2	一様背景時空 . . . . .	117
5.4.3	ゲージ固定 . . . . .	117
5.4.4	2次の摂動計算 . . . . .	118
5.4.5	2次の作用積分 . . . . .	119
5.4.6	非ガウス性 . . . . .	120
5.4.7	観測よりの制限 . . . . .	122
5.4.8	Curvaton モデルでの非ガウス性 . . . . .	122
5.5	様々な一成分インフラトンモデル . . . . .	124
5.5.1	新インフレーションモデル . . . . .	125

5.5.2	べき型インフレーションモデル	127
5.5.3	カオティックインフレーションモデル	128
5.5.4	*DBI インフレーションモデル	131
5.5.5	$f(R)$ モデル	131
5.5.6	*G-インフレーションモデル	133
5.6	ハイブリッドインフレーション	133
5.7	*Curvaton モデル	138
5.8	Gyro インフレーションモデル	139
5.8.1	Chromo-Natural Inflation	139
5.8.2	CS 項がない場合 ( $\lambda = 0$ )	140
5.8.3	CS Inflation	141
5.8.4	数値解	142
5.8.5	一般論	147
5.9	*非等方インフレーションモデル	151
5.10	残された問題	152
5.10.1	バリオン数の起源と gravitino 問題	152
5.10.2	自然法則の統一理論に基づくインフレーションモデルの構築	153
<b>第 6 章 *第 1 原理宇宙論</b>		<b>155</b>
6.1	標準モデル	155
6.1.1	基本構造	155
6.1.2	実験的制限	157
6.1.3	問題点	157
6.2	ゲージセクターの統一	159
6.2.1	標準モデル $\Rightarrow$ 大統一理論	159
6.2.2	可能な大統一群 $G$	160
6.3	超対称理論	162
6.3.1	Super-Poincare algebra	162
6.3.2	大統一理論 $\Rightarrow$ SGUT	164
6.3.3	SGUT $\Rightarrow$ 超重力統一理論	165
6.3.4	SUGRA インフレーションモデル	168
6.4	高次元理論へ	170
6.4.1	Family repetition problem	171
6.4.2	(3 + 2) 分解	172
6.5	String phenomenology vs stabilisation	173
6.5.1	超弦理論のコンパクト化	173
6.6	宇宙の加速膨張に対する No-Go 定理	175
6.6.1	Bardeen の定理	175
6.6.2	SUGRA での強エネルギー条件	176

6.6.3	ブレーン	177
6.6.4	tadpole 条件	177
6.6.5	文献ノート	179
6.6.6	IIA 型超弦理論	179
6.7	超弦理論に基づく加速膨張モデル	183
6.7.1	インフレーション宇宙モデル	183
6.8	KKLT 型モデル	183
6.8.1	KKLT モデル	184
6.8.2	インフレーション	185
6.8.3	文献ノート	186
6.9	Monodromy influm	187
6.9.1	Basic ideas	187
6.9.2	Observational Predictions	188
6.9.3	Conditions for controlled inflation	189
6.9.4	Specific stringy model	189
6.9.5	Physical spectrum	190
6.9.6	Potential corrections	191
6.9.7	Backreaction on the geometry	192
6.9.8	Other conditions	192
6.9.9	Toy models	192
6.9.10	Summary	193
6.10	*LVC と Kahler uplifting	193
6.11	Gyro influm	194
6.11.1	IIB 理論	194
6.11.2	Chromo-Natural-type model	195
6.11.3	Mobile D3-brane type model	196

# 1

## 一様等方宇宙モデル

### §1.1

#### 基本観測情報

##### 1.1.1 Hubble の法則

- 変光星の光度・周期関係

- Henrietta Swan Leavitt: 小マゼラン星雲内の 25 個の Cepheid 型変光星 (1912) [H.S. Leavitt, Edward C. Pickering: Harvard Observatory Circular 173: 1-3 (1912)]

絶対等級  $M = -a \log P + b$

現在の公式は

$$\langle M_V \rangle = -3.53 \log P + 2.13(\langle B_0 \rangle - \langle V_0 \rangle) + f \quad (1.1.1)$$

ここで,  $f \sim -2.25$  はゼロポイント. 周期  $P$  は日単位.

- H. Shapley: 球状星団の RR Lyrae 型変光星 (1916)・銀河ハロー内の球状星団分布 (1918)

- 遠方の銀河の後退運動

- Vest M. Slipher: 系外銀河からの光のドップラー偏移の発見 (1912-)

- 銀河の距離測定



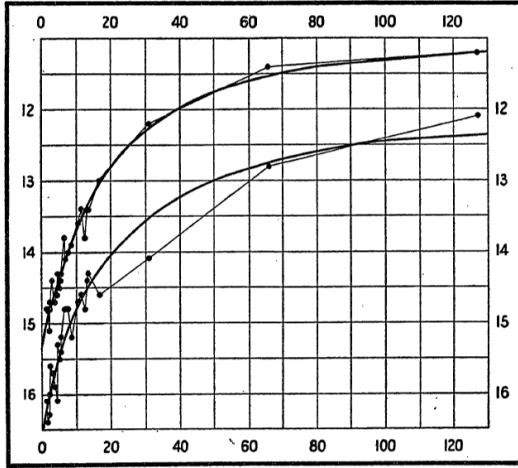


FIG. 1.

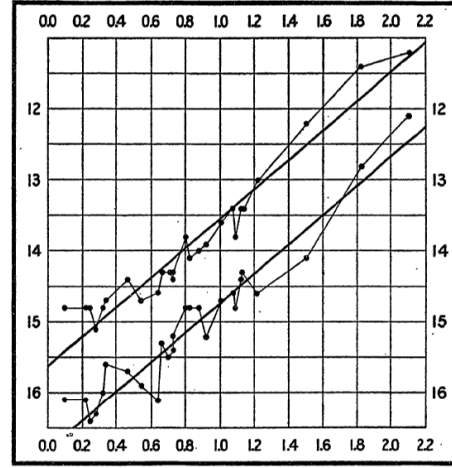


FIG. 2.

図 1.1: Leavitt が 25 個の Cepheid 型変光星の観測より導いた光度・周期関係

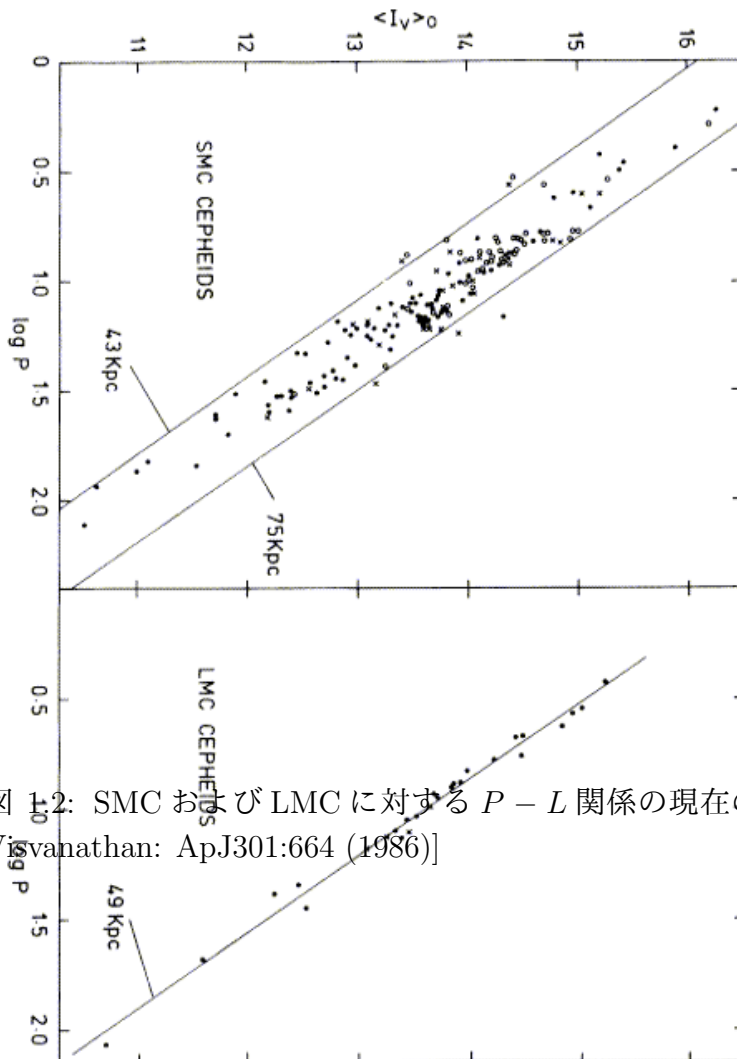


図 1.2: SMC および LMC に対する  $P - L$  関係の現在の観測 [Mathewson, Ford, Visvanathan: ApJ301:664 (1986)]

- Edwin Powell Hubble (1889-1953): Wilson 山天文台 2.5m 反射望遠鏡による遠距離天体観測  
変光星によるアンドロメダ銀河の距離決定
- Cepheid 法による 24 個の銀河 (2Mpc 以内) について距離と後退測度を決定 [E. Hubble: ApJ64, 321 (1926)].

- Hubble の法則

- G. Lemaitre (1926), E. P. Hubble (1929)

$$v = H_0 d : H_0 \approx 500 \text{ km/s/Mpc} \Rightarrow 70 \text{ km/s/Mpc} \quad (1.1.2)$$

[G. Lemaitre: Ann. Soc. Sci. Brux. 47A, 49 (1927); E.P. Hubble: Proc. Nat. Acad. Sc. (USA) 15, 168-73 (1929)].

Hubble の法則は, 宇宙の膨張とともに, 宇宙の空間的一様等方性を意味する.

$$\mathbf{v} = H_0 \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = H_0 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = H_0 \mathbf{r}'. \quad (1.1.3)$$

また,  $H_0$  は宇宙年齢の目安となる:

$$1/H_0 = 14 \text{ Gyr } h_{70}^{-1} \quad (1.1.4)$$

### 1.1.2 宇宙の銀河地図

**Galaxy redshift survey** Hubble の法則を逆に用いると, 赤方偏移を距離の目安として使うことができる.

$$d = \frac{v}{H_0} = z \frac{c}{H_0} = z \cdot 4300 h_{70}^{-1} \text{ Mpc} \quad (1.1.5)$$

宇宙の銀河地図を見ると, 100Mpc 以下 ( $\Delta z < 0.025$ ) では銀河の分布は決して一様でなく, 特徴的な cell/filament-void 構造を持っている. また, 200Mpc 以上のスケールでも一様性は明確でない. しかし, 相関関数を求めてみると, 「統計的等方性」が浮かび上がる.

銀河の数密度  $n$  を統計的変数と見たとき, その 2 点での相関関数

$$\xi(\mathbf{r}) = \langle (n(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - n_0)(n(\mathbf{x}) - n_0) \rangle \quad (1.1.6)$$

は, 銀河分布が統計的に一様なら,  $\mathbf{x}$  によらず,  $\mathbf{r}$  のみに依存す. さらに, 統計的に等方なら,  $r = |\mathbf{r}|$  にのみ依存する. また, 大きなスケールで一様なら,  $\xi(r)$  は  $r$  が大きいときにゼロに近づく.

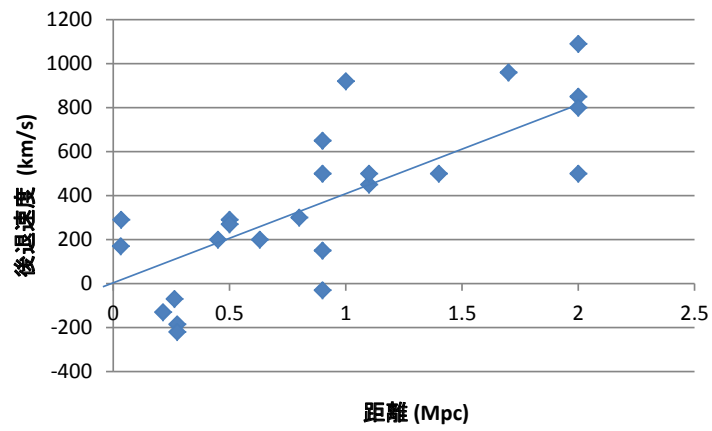


図 1.3: Hubble と Humason が 1929 年に発表した 24 個の銀河に対する距離と後退速度の相関

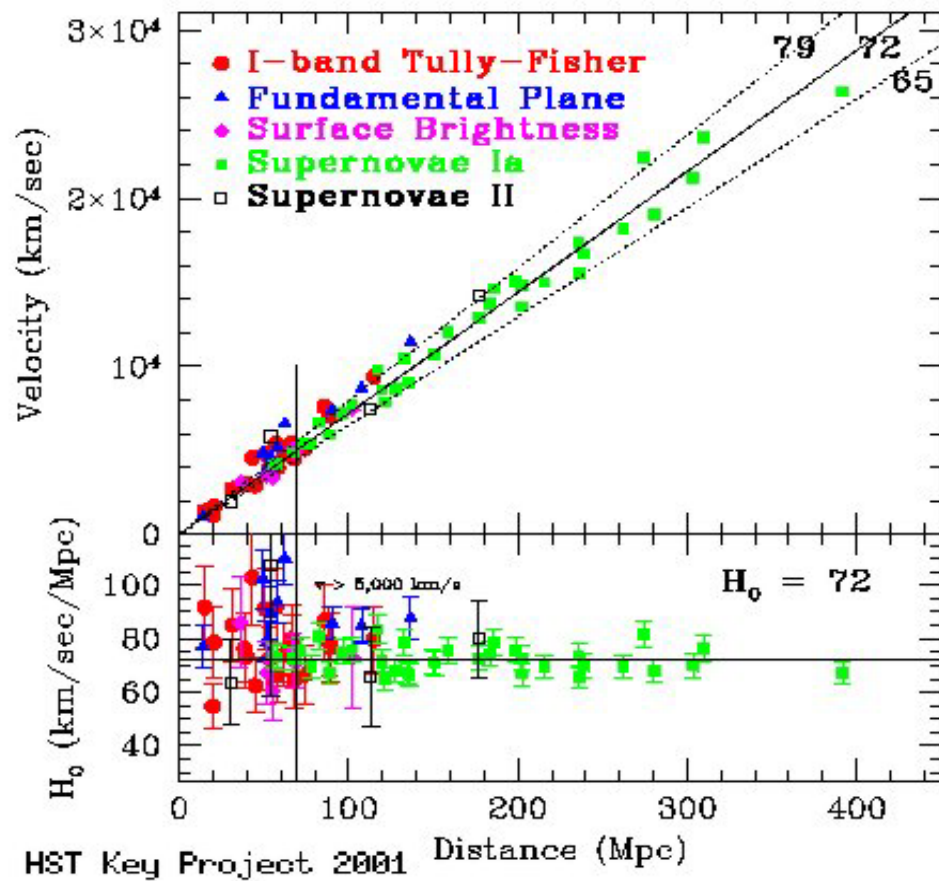


図 1.4: 現在の Hubble ダイアグラム

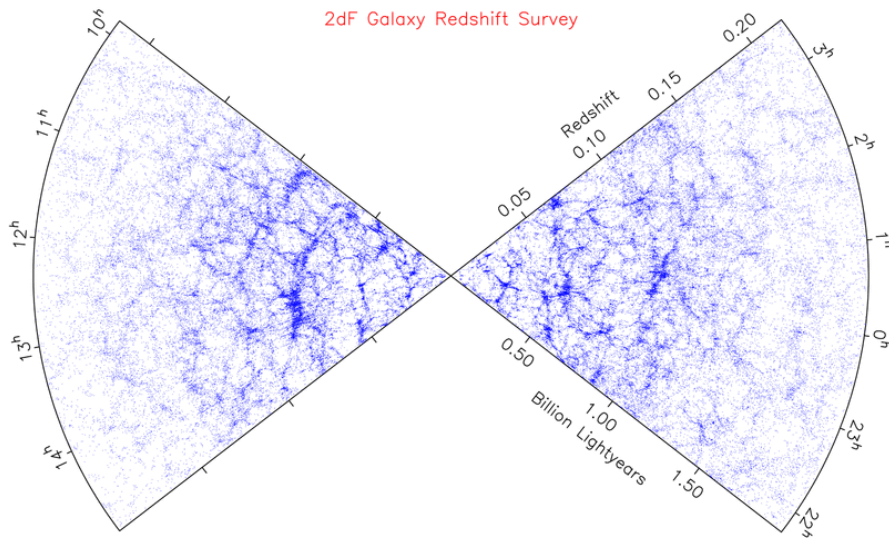


図 1.5: 2dF サーベイによる宇宙地図 [出典: 2dFGRS ホームページ <http://www2.aao.gov.au/TDFgg/>]

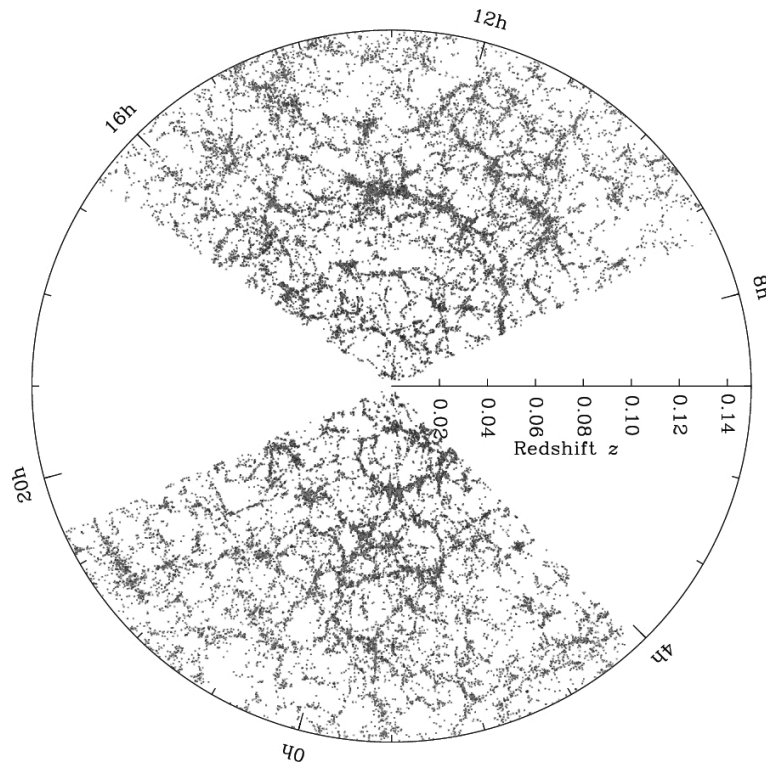


図 1.6: SDSS による宇宙地図 [出典: <http://www.sdss.org/legacy/> ©Michael Bolton and the SDSS]

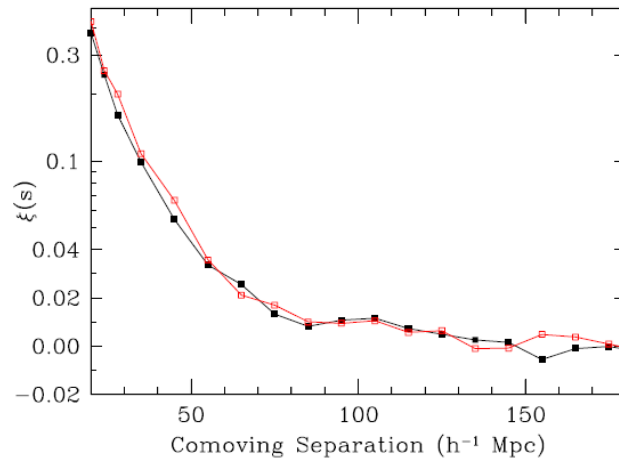


FIG. 4.— The correlation function for two different redshift slices,  $0.16 < z < 0.36$  (filled squares, black) and  $0.36 < z < 0.47$  (open squares, red). The latter is somewhat noisier, but the two are quite similar and both show evidence for the acoustic peak. Note that the vertical axis mixes logarithmic and linear scalings.

図 1.7: SDSS により得られた明るい銀河 (LRG) の相関関数.  $0.16 < z < 0.47$

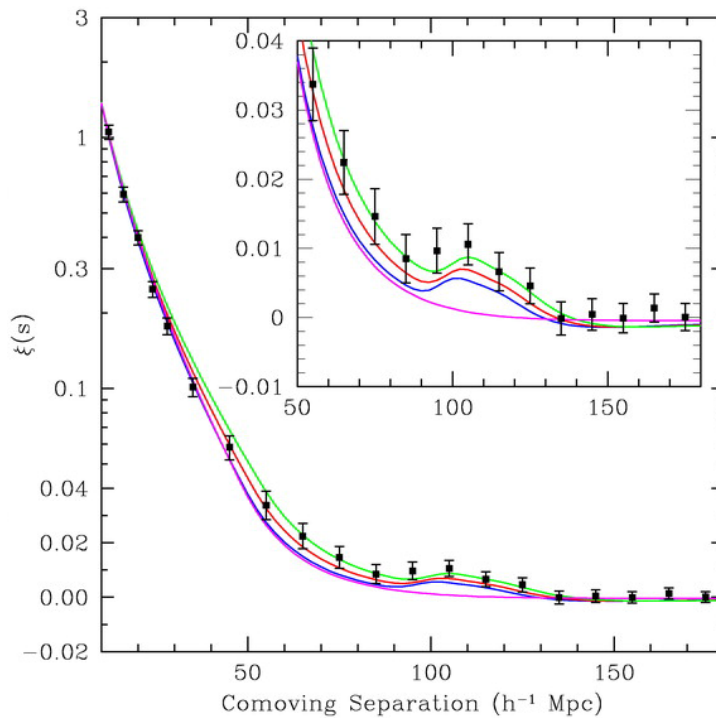


図 1.8: BAO シグナル. 実線は宇宙パラメーター  $\Omega_m h^2 = 0.12$  (top),  $0.13$  (second),  $0.14$  (third),  $\Omega_b h^2 = 0.024$ ,  $n_s = 0.98$  に対応する宇宙モデルの予言. 最下線は, BAO のない CDM モデル ( $\Omega_m h^2 = 0.105$ ). [Eisenstein D et al (SDSS collaboration) ApJ. 633, 560 (2005)]

プロジェクト名	期間	有効立体角	銀河数
CfA	1977-1982		
CfA2	1985-1995	34% (北天)	18,000 個
SSRS	-1998?	13% (南天)	5,400 個
LCRS	1987-1997	1.7% (南北銀河極近傍)	26,000 個
2dFGRS	1996-2003	3.6% (南天)	220,000 個
6dFGRS	2001-2006	(南天)	150,000 個
SDSSI	2000-2005	19% (主に北天)	657,000 個
SDSSII	2005-2008	20% (主に北天)	790,000 個

表 1.1: 銀河赤方偏移サーベイ

### 1.1.3 宇宙背景放射

宇宙全体に広く分布する明るい天体，銀河，さらに宇宙初期からの放射の等方性は，その源の分布の等方性をみる目安となる．一般に，源の共動座標での数密度を  $n(\chi, \Omega)$  とするとき，各方向から来る放射の強度は

$$I_\omega(\Omega)d\omega = \int_0^\infty d\chi \chi^2 f(\chi) n(\chi, \Omega; t(\chi)) W_{\omega'}(\chi, t_\chi) \frac{L_{\omega'}(\chi, \Omega; t(\chi)) d\omega'}{4\pi d_L(\chi)^2} \quad (1.1.7)$$

で与えられる．ここで， $\omega' = (1+z)\omega$  は源での放射の振動数， $f(\chi)$  は空間曲率で決まる関数， $d_L$  は光度距離（後述）， $W_\omega(\chi, t)$  は減衰因子である．

一般に，方向  $\Omega$  に依存したフラックス  $I(\Omega)$  に対して，その平均からのずれ  $\delta I$  は球面調和関数を用いて

$$\delta I(\Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_l^m(\Omega) \quad (1.1.8)$$

と展開される．輻射強度が統計的に等方的なら， $a_{lm}$  を確率変数として扱うとき，その相関は

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = C_l \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (1.1.9)$$

と表される．このとき，輻射強度の非等方性は

$$\sum_{m=-l}^l Y_l^m(\Omega_1) Y_l^{m*}(\Omega_2) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\Omega_1 \cdot \Omega_2) \quad (1.1.10)$$

より，

$$\langle \delta I(\Omega_1) \delta I(\Omega_2) \rangle = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l P_l(\Omega_1 \cdot \Omega_2). \quad (1.1.11)$$

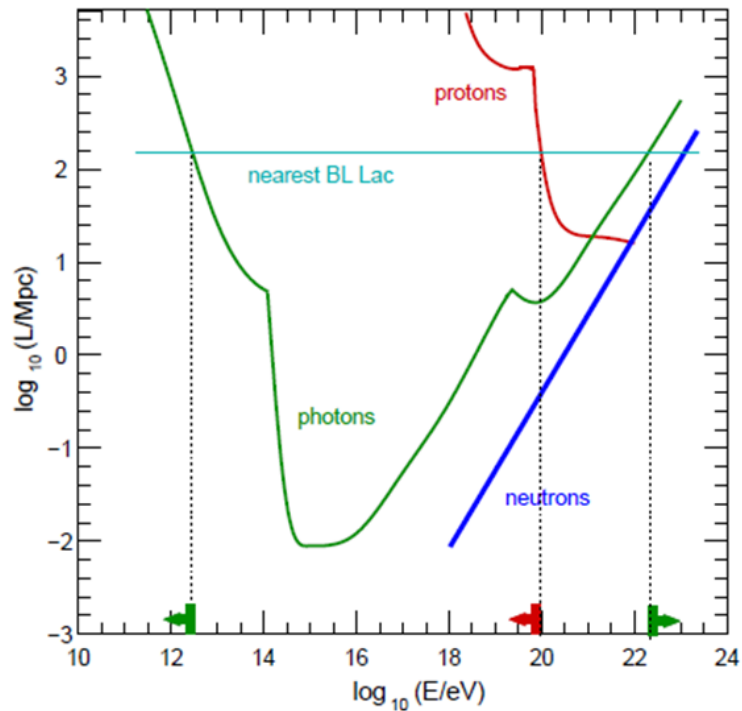


図 1.9: 電磁波および宇宙線に対する宇宙の透明度.[Fairbairn, Rashba, Troitsky: PRD84, 25019 (2011)]

#### 様々な背景放射の非等方性

- X線:  $10^{-4}$  程度の非等方性
- CMB:  $10^{-5}$  程度の非等方性
- 双極成分: ただし, すべての背景放射は  $10^{-3}$  程度の大きな双極非等方性をもつ. これは通常, 我々が背景放射に対して運動しているためと解釈されるが, この運動が局所的なものでなく, 800Mpc を超えるスケールの大域的なものであることを示唆する観測がある [review: Kashlinski A, Atrio-Barandela F, Ebeling H: arXiv:1202.0717]
- GRB

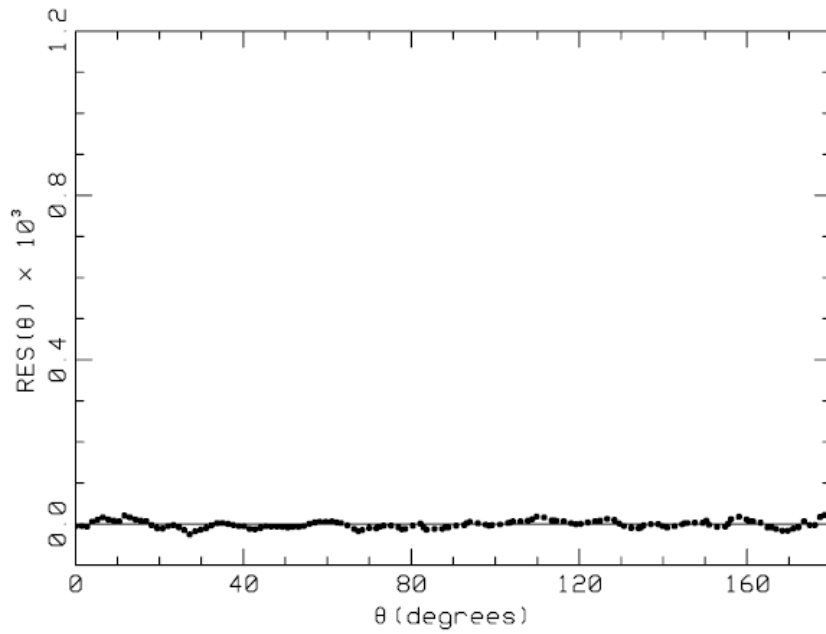


FIG. 4.—Residuals of the ACF fit from Fig. 3, after the shot noise, PSF, and a simple model of the intrinsic fluctuations have been removed.

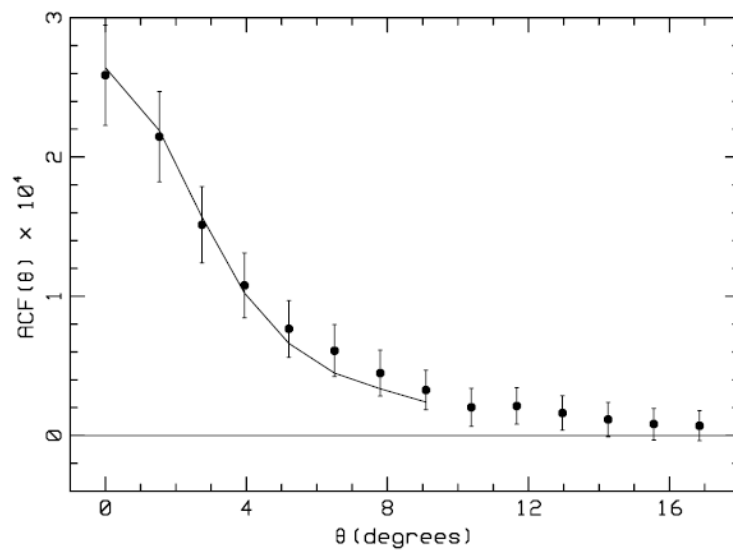


FIG. 5.—Intrinsic ACF, with shot noise and PSF fits removed. For comparison, a simple  $\theta^{-1}$  model for the intrinsic correlations is shown. The data beyond  $9^\circ$  is not used because of uncertainty due to the fitting of the large-scale structures. The model has been smoothed by the PSF and corrected for the removal of the large-scale structures, which suppresses the correlations on scales larger than  $10^\circ$ .

図 1.10: HEAO 衛星観測に基づく CXB の異方性 [Boughn SP, Crittenden RG, Koehrsen GP: ApJ580, 672 (2002)]



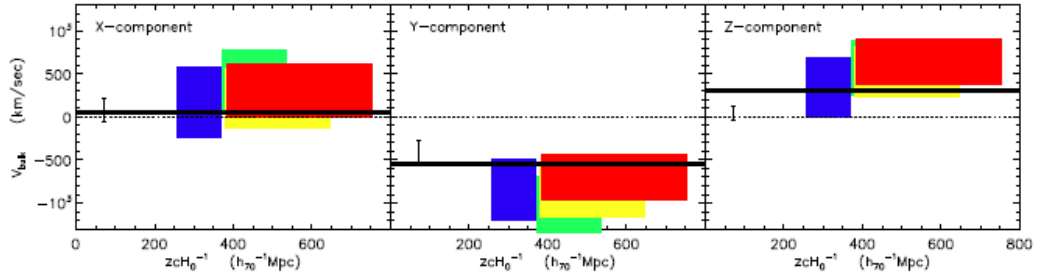


Fig. 10.19.— Three bulk velocity components from KAEK vs CMB dipole. Error bar shows the  $2\text{-}\sigma$  range from Feldman et al (2010), thick horizontal line shows the CMB dipole velocity after correcting for local motions from Table 3 of Kogut et al (1993). Colors are from KAEK as per Table 10.3. Note that the Feldman et al (2010) and Watkins et al (2009) derived flow does not account fully for the overall CMB dipole.

図 1.11: 銀河団の kSZ 効果から求めた大域的運動の双極成分 (dark flow) と CMB dipole の相関 [Kashlinski A, Atrio-Barandela F, Ebeling H: arXiv:1202.0717]

---

## §1.2

---

# 基礎方程式

---

時空次元  $D = 1 + n$

等長変換群  $G = \text{ISO}(n), \text{SO}(n + 1), \text{SO}(n, 1)$ : 空間は定曲率

$$\begin{aligned}
 d\sigma_K^2 &= d\chi^2 + f_K(\chi)^2 d\Omega_{n-1}^2; \quad f_K(\chi) = \begin{cases} \chi & K = 0 \\ K^{-1/2} \sin(K^{1/2}\chi) & K > 0 \\ |K|^{-1/2} \sinh(|K|^{1/2}\chi) & K < 0 \end{cases} \\
 &= \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega_{n-1}^2. \tag{1.2.1}
 \end{aligned}$$

時空計量

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\sigma_K^2 \tag{1.2.2}$$

宇宙膨張

$$d(t) = a(t)\chi \Rightarrow v(t) = \dot{d} = \dot{a}\chi = H(t)d(t); \quad H(t) = \dot{a}/a \tag{1.2.3}$$

エネルギー運動量テンソル

$$T_{tt} = \rho(t), \quad T_{tj} = 0, \quad T_j^i = P(t)\delta_j^i \tag{1.2.4}$$

Einstein 方程式  $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}$

$$G_{tt} : \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} - \frac{2\Lambda}{n(n-1)} = \frac{2\kappa^2}{n(n-1)}\rho \quad (1.2.5a)$$

$$G_j^i : \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{n-2}{2} \left\{ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} \right\} - \frac{\Lambda}{n-1} = -\frac{\kappa^2 P}{n-1} \quad (1.2.5b)$$

エネルギー保存則  $\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$

$$\dot{\rho} = -n(\rho + P)\frac{\dot{a}}{a} \quad (1.2.6)$$

§1.3

単純な宇宙モデル

$w = P/\rho$ が一定とすると，基礎方程式は

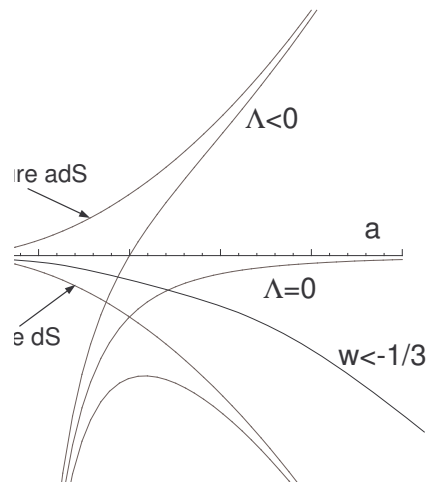
$$\rho \propto a^{-n(1+w)} \Rightarrow \dot{a}^2 + V(a) = -K \tag{1.3.1}$$

に帰着される．ここで，

$$V = -\frac{C}{a^{n(1+w)-2}} - \lambda a^2, \tag{1.3.2}$$

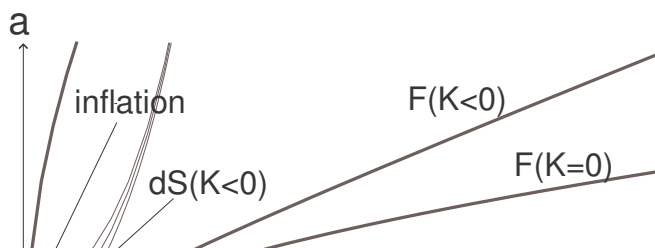
$$C = \frac{2k^2 \rho_0}{n(n-1)} = \Omega_M H_0^2 \tag{1.3.3}$$

$$\lambda = \frac{2\Lambda}{n(n-1)} = \Omega_\Lambda H_0^2. \tag{1.3.4}$$



特徴

- $\Lambda < 0$ の時，常に宇宙は有限時間で収縮を始める．
- $\Lambda = 0$ の時は， $K = 0$ ないし  $K < 0$ なら，宇宙は膨張を続ける．
- $\Lambda > 0$ の時， $K$ がある正の臨界値より大きいと，再収縮するとサイズが有限な最小値を持つ解の2つが存在．



---

 §1.4
 

---

 宇宙パラメーター
 

---

基礎方程式 (Friedmann 方程式)

- 膨張方程式

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho - \frac{K}{a^2} = \frac{\kappa^2}{3}\rho_M - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.4.1)$$

- エネルギー方程式

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a} \quad (1.4.2)$$

- 状態方程式

$$w = \frac{P}{\rho} \quad (1.4.3)$$

宇宙パラメーター

- Hubble 定数 :  $H_0$  ( $a(t_0) = 1$ )

- 密度パラメータ :

$$H_0^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho_{\text{cr}} \Rightarrow \Omega_E = \frac{\rho}{\rho_{\text{cr}}}, \quad \Omega_M = \frac{\rho_M}{\rho_{\text{cr}}}, \quad \Omega_K = -\frac{K}{H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad (1.4.4)$$

これらは, 関係式

$$1 = \Omega_E + \Omega_K, \quad \Omega_E = \Omega_M + \Omega_\Lambda \quad (1.4.5)$$

を満たす.

- 物質組成 :

$$\begin{aligned} \Omega_M &= \Omega_{\text{DM}} + \Omega_{\text{b}} + \Omega_{\nu} + \Omega_{\gamma} + \Omega_{\text{GW}} + \Omega_{\text{DE}} + \dots \\ &\Rightarrow w = w(a). \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

---

## §1.5

---

# Friedmann モデル

---

基本仮定

$$D = 4, \quad \Lambda = 0, \quad \Omega_M = \Omega_n + \Omega_r. \quad (1.5.1)$$

曲率による違い

- $\Omega_M = 1$  (Einstein-de Sitter モデル:  $K = 0$ )

$$a = \Omega_n \xi^2 + 2\Omega_r^{1/2} \xi, \quad (1.5.2a)$$

$$H_0 t = \frac{2}{3} \Omega_n \xi^3 + 2\Omega_r^{1/2} \xi^2 \quad (1.5.2b)$$

$$H_0 t_0 = \frac{2}{3} \frac{1 + 2\Omega_r^{1/2}}{(1 + \Omega_r^{1/2})^2} \quad (1.5.2c)$$

- $\Omega_M < 1$  (Open モデル;  $K < 0$ )

$$a = \frac{\Omega_n}{2(1 - \Omega_M)} (\cosh \theta - 1) + \frac{\Omega_r^{1/2}}{\sqrt{1 - \Omega_M}} \sinh \theta, \quad (1.5.3a)$$

$$H_0 t = \frac{\Omega_n}{2(1 - \Omega_M)^{3/2}} (\sinh \theta - \theta) + \frac{\Omega_r^{1/2}}{1 - \Omega_M} (\cosh \theta - 1) \quad (1.5.3b)$$

$$H_0 t_0 = \frac{\Omega_n}{1 - \Omega_M} \left( \frac{1 + \Omega_r^{1/2}}{\Omega_M + 2\Omega_r^{1/2} + \Omega_r} - \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_M}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \Omega_M} + \Omega_r^{1/2}}{(\Omega_0 + 2\Omega_r^{1/2} + \Omega_r)^{1/2}} \right) + \frac{2\Omega_r^{1/2}}{\Omega_M + 2\Omega_r^{1/2} + \Omega_r} \quad (1.5.3c)$$

- $\Omega_M = 0$  (Milne 宇宙:  $K < 0$ )

$$ds^2 = -dt^2 + t^2 d\sigma_{-1}^2 \quad (1.5.4)$$

---

## §1.6

### 宇宙年齢

---

一般に，物質優勢宇宙では

$$\begin{aligned}
 t_0 &= \int_0^1 \frac{da}{aH} = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{da}{(\Omega_M a^{-1} + \Omega_K + \Omega_\Lambda a^2)^{1/2}} \\
 &= \frac{2}{3H_0} \int_0^1 \frac{da^{3/2}}{[1 - \Omega_K(1-a) - \Omega_\Lambda(1-a^3)]^{1/2}}.
 \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

平坦モデル

物質優勢 ( $4D, \Lambda = 0$ ):  $\gamma = 2/3$

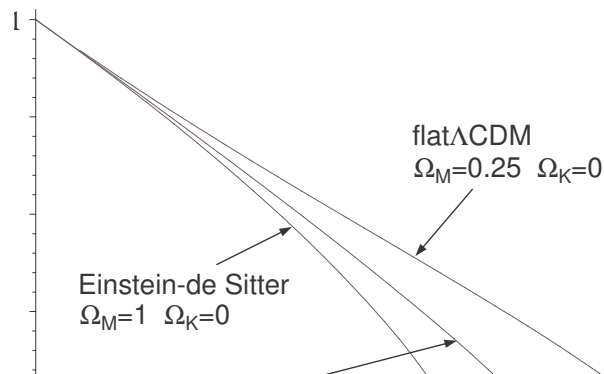
$$t_0 = 2/(3H_0) = 9.3\text{Gyrs}(0.7/h) \tag{1.6.2}$$

輻射優勢 ( $4D, \Lambda = 0$ ):  $\gamma = 1/2$

$$t_0 = 1/(2H_0) = 7\text{Gyrs}(0.7/h) \tag{1.6.3}$$

Flat $\Lambda$ CDM ( $4D, \Omega_M = 0.25$ ):

$$t_0 \simeq 1.01/H_0 = 14\text{Gyrs}(0.7/h) \tag{1.6.4}$$



---

## §1.7

### 特異点

---

宇宙膨張の加速度

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{(n-2)\kappa^2}{n(n-1)} \left( \rho + \frac{n}{n-2}P \right) + \frac{2\Lambda}{n(n-1)} \quad (1.7.1)$$

(宇宙項  $\Lambda$  は  $\rho = -P = \Lambda/\kappa^2$  と対応.)

宇宙の初期特異点 強エネルギー条件

$$P \geq -\frac{n-2}{n}\rho \Leftrightarrow w \geq -1 + \frac{2}{n} \quad (1.7.2)$$

が満たされれば、必ず有限な過去に  $a = 0$  となる。すなわち、宇宙は有限な年齢をもつ。

**Big-Rip 特異点**  $w < -1$  のとき、 $\alpha = -n(1+w)/2 (> 0)$  とおくと、

$$\rho \propto a^{2\alpha} \Rightarrow t = \int^a \frac{da}{aH} \propto \text{const} - \frac{1}{a^\alpha} \quad (1.7.3)$$

より、有限な時間でスケール因子も密度も発散

$$a \propto \frac{1}{(t_* - t)^{1/\alpha}}, \quad \rho \propto \frac{1}{(t_* - t)^2} \quad (1.7.4)$$



---

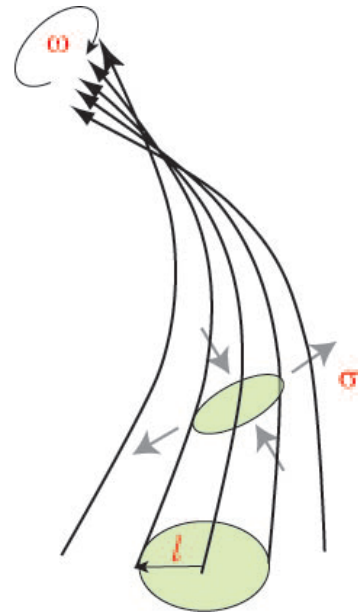
§1.8

---

Raychaudhuri 方程式

---

$$n \frac{\ddot{\ell}}{\ell} = -\sigma^2 + \omega^2 - R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \quad (1.8.1)$$



重力の引力性 これより，強エネルギー条件

$$R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \geq 0 \quad (1.8.2)$$

が満たされるとき，

- 重力は引力となる．
- 一旦収束し始めた非回転的光線束（時間的測地線束）は有限時間内に「一点」に収束する．

**Hawking-Penrose の特異点定理**

- 強エネルギー条件（+一般性条件）
- 因果性条件
- 強重力条件（捕捉的集合の存在）

の3つの条件が満たされるとき，無限に延長できない光的ないし時間的測地線が存在する．



---

## §1.9

---

# 光の伝搬

---

光波面の方程式 RW 計量が

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(d\chi^2 + r_K^2 d\Omega_{n-1}^2) \quad (1.9.1)$$

と表される座標系において,

$$d\eta := \frac{dt}{a(t)} = \pm d\chi \Rightarrow \chi = \chi_0 \pm (\eta - \eta_0) \quad (1.9.2)$$

宇宙論的赤方偏移 動径距離  $\chi$  の位置から時刻  $t$  および  $t + \Delta t$  に出た光が原点  $\chi = 0$  に到達する時刻をそれぞれ  $t_0, t_0 + \Delta t_0$  とすると

$$\Delta\eta = \Delta\eta_0 \Leftrightarrow \frac{\Delta t}{a(t)} = \frac{\Delta t_0}{a(t_0)} \Leftrightarrow \lambda_0 = \frac{a(t_0)}{a(t)}\lambda \Leftrightarrow \nu_0 = \frac{a(t)}{a(t_0)}\nu \quad (1.9.3)$$

これより, 時刻  $t$  に共動的天体から出た光の赤方偏移は

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1 \Leftrightarrow a(t) = \frac{a(t_0)}{1+z} \quad (1.9.4)$$

---

**§1.10**

---

**ホライズン**

---

粒子ホライズン 時刻  $t$  の観測者を頂点とする過去の光円錐は

$$\chi = \eta_0 - \eta = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_a^{a_0} \frac{da}{a^2 H} \quad (1.10.1)$$

時刻  $t$  までに観測できる球領域の共動半径  $L_H(t)$  は

$$L_H(t) = \int_0^{a(t)} \frac{da}{a^2 H} \quad (1.10.2)$$

$L_H$  は次の条件が満たされると有限となる。

$$\lim_{a \rightarrow 0} a^2 \rho = \infty \quad (1.10.3)$$

$L_H(t)$  は、初期面上の1点から出た光波面の時刻  $t$  での共動半径と一致する。

**Hubble ホライズン**

- ゆらぎの力学的振る舞いなどでは、Hubble ホライズン半径  $1/H$  が上記の  $L_H(t)$  より重要となる。
- Friedmann モデルでは、Hubble ホライズン半径は  $L_H(t)$  と同程度となり、時間  $t$  に比例して増大する。

## 2

## ダークエネルギー問題

## §2.1

## 宇宙パラメーターの決定法

## 幾何学測定

- 半径と円周長，半径と面積
- 半径と体積（例えば，距離と銀河数の関係）

$$V(r) = 4\pi \int_0^r d\chi f(\chi)^2 = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} r^3 & ; K = 0, \\ \pi R^3 \left( \frac{2r}{R} - \sin \frac{2r}{R} \right) & ; K = \frac{1}{R^2}, \\ \pi R^3 \left( \sinh \frac{2r}{R} - \frac{2r}{R} \right) & ; K = -\frac{1}{R^2}. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

## 物質の存在量，組成の観測

- 電磁波（電波・赤外線・光・X線観測） $\Rightarrow$  ガスの量
  - \* 宇宙背景電磁放射
 
$$h^2 \Omega_{\text{CMB}} = 2.38 \times 10^{-5} (T/2.73\text{K})^4$$

$$h^2 \Omega_{\text{IR/opt/UV}} \sim 5 \times 10^{-7}$$

$$h^2 \Omega_{\text{X}} \sim 6 \times 10^{-9}$$
- 銀河・銀河団の構造・運動，重力レンズ $\Rightarrow$  ダークマターの量
  - \* 銀河団 [12]
 
$$(M/L)_{\text{clusters}} = (295 \pm 53) h (M/L)_{\odot}$$

$$(M/L)_{\text{cr}} = (1025 \pm 140) h$$

$$\Rightarrow \Omega_M = 0.24 \pm 0.14$$

\* 銀河・銀河団形成（存在量）[3].

$$\Omega_M = 0.1 - 0.5$$

宇宙サイズの時間変化の観測

- 過去の宇宙膨張率  $H$  の測定
- 宇宙膨張（進化）に依存した物理量（の関係）の観測

一般に、実際の観測量では、これらは複雑に絡み合う。

---

## §2.2

---

# 距離測定

---

### 2.2.1 方法

#### 光度距離

固有光度  $L$ , 見かけの明るさ  $F_{\text{obs}} \Rightarrow L = 4\pi d_L^2 F_{\text{obs}} \Rightarrow$  光度距離  $d_L$

#### 角径距離

固有径  $D$ , 見込み角  $\theta \Rightarrow D = \theta d_D \Rightarrow$  角径距離  $d_D$

一般に固有量 + 見かけの量  $\Rightarrow$  天体までの (様々な) 距離

### 2.2.2 距離梯子

方法	適用距離
年周視差測定	0~100pc
星団視差法	100pc~10kpc
散開星団主系列星	100pc~50kpc
Cepheid 型変光星	10kpc~25Mpc
Tully-Fisher 法	10Mpc~200Mpc
SN Ia	60Mpc~4000Mpc

#### 高精度方位観測衛星

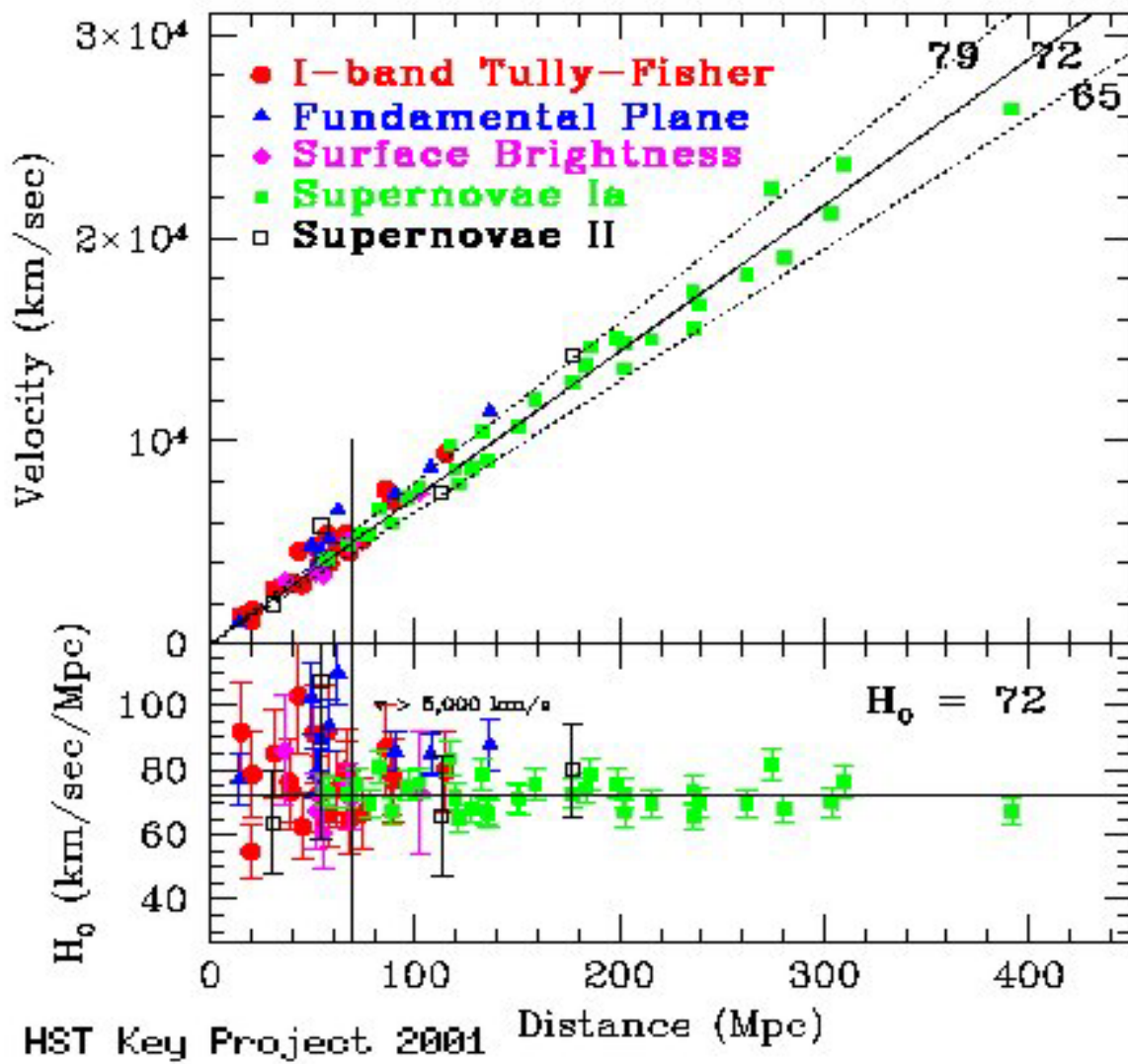
- Hipparcos (1989-1993): 1 m arcsec
- GAIA (2013?-): all star scan for  $m \leq 20\text{mag}$ . 角度分解能:  $24 \mu \text{ arcset}$  ( $m \leq 15\text{mag}$ ), 20% accuracy for distances at 8kpc (Galactic center) [[http://www.esa.int/Our\\_Activities/Space\\_Science/Gaia\\_overview](http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Gaia_overview)]
- JASMINE: Nano-Jasmine (3 mas at  $z \approx 7.5$ , 2014 年-), Small-Jasmin ( $10 \mu \text{as}$  at  $H \alpha < 11.5$ , 2016-), Jasmin ( $10 \mu \text{as}$  at  $K \alpha < 11$ , 2020 年代). [<http://www.jasmine-galaxy.org/index-ja.html>]

§2.3

Hubble 定数

観測値

$$H_0 = 71 \pm 10 \text{ km/s/Mpc} \quad (2.3.1)$$



## §2.4

# Extended Hubble digram

### 2.4.1 赤方偏移-光度距離関係

- 赤方偏移  $z$  と宇宙サイズ  $a$  の関係

$$a = \frac{1}{1+z} \tag{2.4.1}$$

- 距離と面積の関係

$$S = \pi\theta^2 f(r)^2; \quad f(r) = \begin{cases} r & K = 0 \\ R \sin(r/R) & K = 1/R^2 \\ R \sinh(r/R) & K = -1/R^2 \end{cases} \tag{2.4.2}$$

- $d_L - z$  関係

$$F = \frac{L}{4\pi f(r)^2 (1+z)^2} \Rightarrow d_L = (1+z)f(r), \tag{2.4.3}$$

$$adr = -cdt = \frac{cadz}{H} \Rightarrow r = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_m(z) + (1+z)^2 \Omega_K + \Omega_\Lambda}} \tag{2.4.4}$$

### 2.4.2 パラメーター依存性

Flat  $\Lambda$ CDM モデル

曲がった CDM モデル

縮退

Graph showing  $\frac{H_0}{c}$  vs  $z$  for Flat  $\Lambda$ CDM model. Three curves are shown for  $\Omega_M = 0.1, 0.25, 0.4$ . The y-axis ranges from 0.2 to 1.4, and the x-axis ranges from 0 to 1. The curves show that as  $\Omega_M$  increases, the Hubble constant  $H_0$  increases for a given redshift  $z$ .

Graph showing  $\frac{H_0}{c}$  vs  $z$  for curved CDM model. Three curves are shown for  $\Omega_M = 0.25$  and  $\Omega_K = -0.2, 0, +0.2$ . The y-axis ranges from 1 to 4, and the x-axis ranges from 0 to 1. The curves show that as  $\Omega_K$  increases, the Hubble constant  $H_0$  increases for a given redshift  $z$ .

Graph showing  $\frac{H_0}{c}$  vs  $z$  for degenerate case. Three curves are shown for  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0.12, 0.68), (0.25, 0.75), (0.38, 0.83)$ . The y-axis ranges from 0.2 to 1.4, and the x-axis ranges from 0 to 1. The curves are very close to each other, indicating that different combinations of  $\Omega_M$  and  $\Omega_\Lambda$  can result in similar Hubble constant values.

---

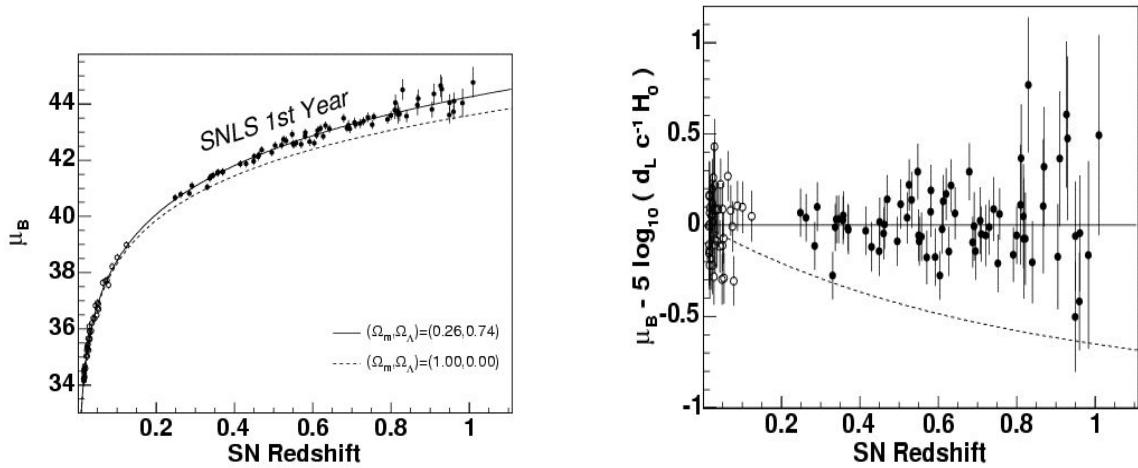
## §2.5

---

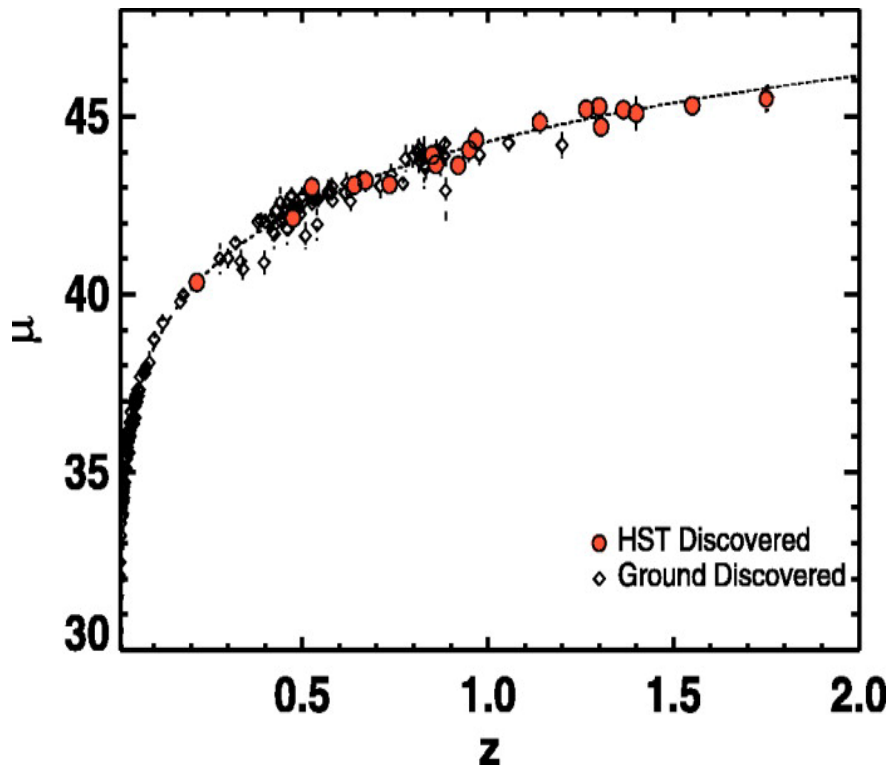
# SNIa 観測

---

SNLS collaboration [ A&A 447:31 ( 2006)]



HST observation[Riess et al]





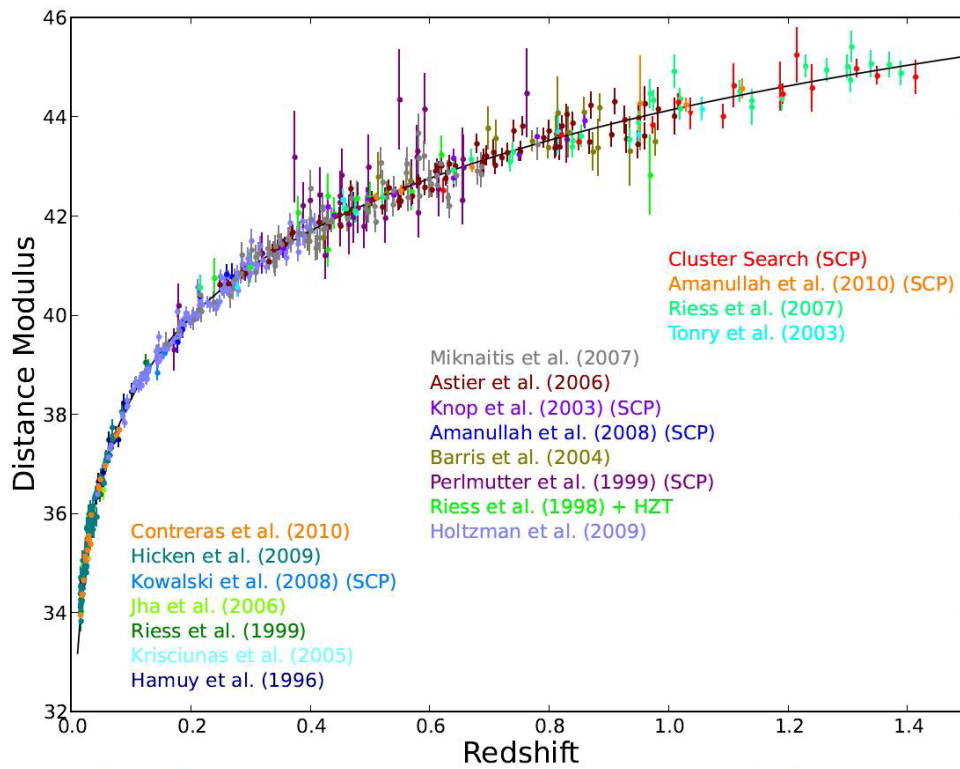


Figure 4. Hubble diagram for the Union2.1 compilation. The solid line represents the best-fit cosmology for a flat  $\Lambda$ CDM Universe for supernovae alone. SN SCP06U4 falls outside the allowed  $x_1$  range and is excluded from the current analysis. When fit with a newer version of SALT2, this supernova passes the cut and would be included, so we plot it on the Hubble diagram, but with a red triangle symbol.

図 2.1: HST Cluster SN Survey により得られた  $d_L - z$  プロット [Suzuki N et al: arXiv:1105.3470]

---

§2.6

\*物理的意味

---

---

§2.7

\*様々な理論モデル

---

## 3

## 熱いビッグバン宇宙

## §3.1

## 宇宙の物質組成

## エネルギー密度

## ● 相対論的物質

- 電磁波

$$T_{\text{CMB}} = 2.725 \pm 0.002\text{K} \Rightarrow h^2\Omega_{\text{CMB}} = 2.38 \times 10^{-5}(T/2.73\text{K})^4$$

- 重力波
- Dark radiation

## ● 非相対論的物質

- 原子物質:  $\Omega_b \simeq 0.04$  (BBN:  $0.017 < h^2\Omega_b < 0.024$ , WMAP 9yr:  $\Omega_b \simeq 0.046$ )
- ニュートリノ ( $m_\nu > 2 \times 10^{-4}\text{eV}$ )

$$\rho_{\nu+\bar{\nu},0} = \sum_i m_{\nu_i} c^2 n_{i,0} \simeq 112 \sum_i m_{\nu_i} c^2 \text{cm}^{-3} \Rightarrow h^2\Omega_\nu = \left( \sum_i m_{\nu_i} \right) / 94\text{eV} \lesssim 10^{-3}$$

- 冷たいダークマター:  $\Omega_{\text{DM}} \simeq 0.24$  [WMAP 9yr]

## ● その他

- 宇宙項/ダークエネルギー:  $\Omega_\Lambda \simeq 0.72$  [WMAP 9yr]
- Hidden sector objects/fields

エントロピー CMB が宇宙のエントロピーの主要部を担っている：

$$s_{\text{CMB}} = \frac{4\pi^2}{45} \left( \frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 = 1490 \left( \frac{T_{\text{CMB}}}{2.73\text{K}} \right)^3 \text{ cm}^{-3} \quad (3.1.1)$$

これを宇宙に存在する陽子の平均個数密度

$$n_b = 2.46 \cdot 10^{-7} \left( \frac{\Omega_b h^2}{0.022} \right) \text{ cm}^{-3} \quad (3.1.2)$$

で割ると、陽子一個あたりの CMB エントロピーは

$$s_{\text{CMB}}/n_b \simeq 6 \cdot 10^9 \quad (3.1.3)$$

C f. 太陽などの恒星がもつ陽子一個あたりのエントロピーは

$$(s/n)_{\text{star}} \sim 30 \quad (3.1.4)$$

程度で、CMB のエントロピーの  $1/10^8$  以下しかない。

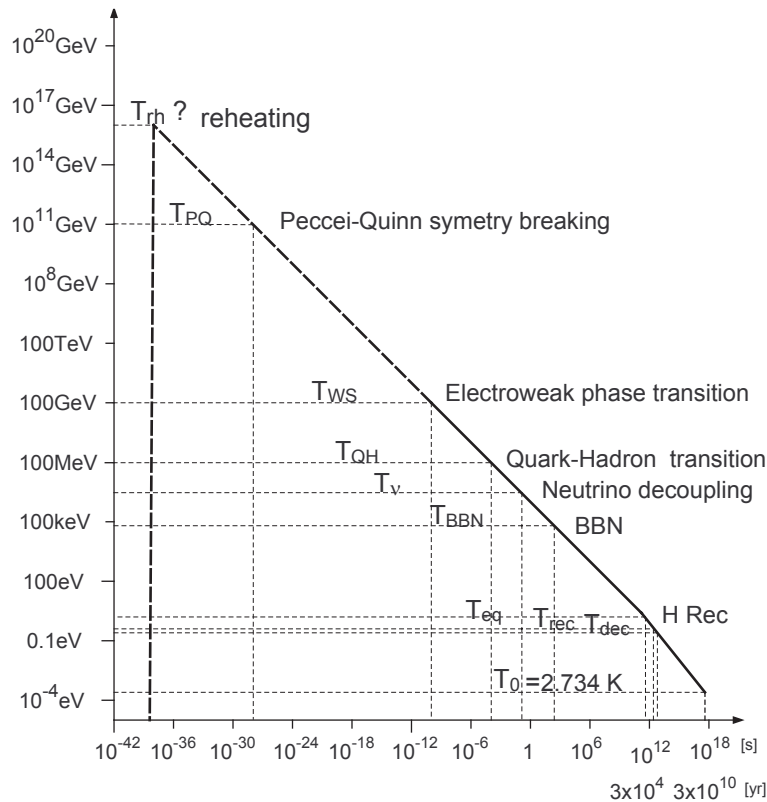


図 3.1: 宇宙の熱史

## §3.2

### 宇宙の熱史

**宇宙の温度** 激しい非可逆過程が宇宙全体で起こらない限り，CMB に対応する光子ガスのもつエントロピーは保存され，光子ガスの温度が宇宙初期ほど高温になる：

$$a^3 s_{\text{CMB}} \simeq \text{const} \Rightarrow T \propto 1/a \tag{3.2.1}$$

宇宙は最初，急速に膨張する熱い火の玉状態で始まり，宇宙膨張と共に温度が下がり，膨張速度が減速し現在の姿になったと考えられる．これが熱いビッグバン宇宙モデルである．

**物質組成の変化** 熱いビッグバンモデルでは，時間をさかのぼると，温度の上昇と共に物質がより基本的な構成要素に分解されてゆく．このため，宇宙のごく初期では，物質は最も基本的な素粒子からなる高温のプラズマ状態にある．このプ

原因	温度	時間	H	直後の主要粒子	$g(T)$
現在	2.725K	13.8Gyr	$1.5 \times 10^{-33}$ eV	$\gamma; 3\nu$	2(+21/11)
水素中性化	3800K	0.25Myr	$4.9 \times 10^{-29}$ eV	$\gamma; 3\nu$	2(+21/11)
$e^+$ 消滅	30keV	1450s	$2.2 \times 10^{-19}$ eV	$\gamma; 3\nu$	2(+21/11)
$e^+e^-$ 対消滅	0.5MeV	3.46s	$8.7 \times 10^{-17}$ eV	$\gamma, e^+, e^-; 3\nu$	2(+21/11)
$\nu_e$ の乖離	1.2MeV	0.56s	$5.6 \times 10^{-16}$ eV	$4\gamma, e^+, e^-; 3\nu$	5.5(+5.25)
$\nu_\mu, \nu_\tau$ の乖離	3MeV	0.085s	$3.8 \times 10^{-15}$ eV	$\gamma, e, \nu_e; 2\nu$	7.25(+3.5)
$\mu$ の対消滅	100MeV	43 $\mu$ s	$6.5 \times 10^{-12}$ eV	$\gamma, e, 3\nu$	10.75
QH 転移	200MeV	10 $\mu$ s	$3.0 \times 10^{-11}$ eV	$\gamma, e, \mu, 3\nu$	14.25
c の対消滅	1.2GeV	$1.7 \times 10^{-7}$ s	$1.7 \times 10^{-9}$ eV	$\gamma, 8G, e, \mu, 3\nu, u, d, s$	61.75
$\tau$ の対消滅	1.8GeV	$9.1 \times 10^{-8}$ s	$3.5 \times 10^{-9}$ eV	$\gamma, 8G, e, \mu, 3\nu, u, d, s, c$	72.25
b の対消滅	4.2GeV	$1.6 \times 10^{-8}$ s	$2.1 \times 10^{-8}$ eV	$\gamma, 8G, e, \mu, t, 3\nu, u, d, s, c$	75.75
WS 転移	100GeV	$2.5 \times 10^{-10}$ s	$1.3 \times 10^{-5}$ eV	$\gamma, 8G, 3l, 3n, u, d, s, b, c$	86.25
標準モデル 高温極限				$B, 3A, 8G, 4h, 3l, 3\nu, 6q$	106.75
MSSM 高温極限				$B, 3A, 8G, 8h, 3l, 3\nu, 6q$ $\tilde{B}, 3\tilde{A}, 8\tilde{G}, 8\tilde{h}, 3\tilde{l}, 3\tilde{\nu}, 6\tilde{q}$	228.75

表 3.1: 宇宙物質構成の変化と統計的重み

ラズマでは、光子を経由した粒子と反粒子の対生成・対消滅が盛んにおきる。

$$e^+ + e^- \leftrightarrow 2\gamma \leftrightarrow u + \bar{u}, \dots$$

---

### §3.3

---

## 熱化学平衡

---

熱交換に関する平衡だけでなく、粒子の種類を変化させる化学反応や素粒子反応に関しても平衡が成り立つとき、熱化学平衡にあるという。一般に熱化学平衡にあると、異なる種類の粒子数ないし化学ポテンシャルの間に一定の関係が成り立つようになる。

これを見るために、4種類の粒子 A, B, C, D が化学反応



により化学平衡にあるとする。  $k_A, \dots, k_D$  は整数である。このとき、各粒子の粒子数を  $N_A, N_B, N_C, N_D$  とすると、系の自由エネルギー  $F(N_A, N_B, N_C, N_D)$  は1回の反応により

$$\begin{aligned} \Delta F &= \pm (F(N_A - k_A, N_B - k_B, N_C + k_C, N_D + k_D) - F(N_A, N_B, N_C, N_D)) \\ &= \pm (-k_A \mu_A - k_B \mu_B + k_C \mu_C + k_D \mu_D). \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

ここで、 $\pm$  は反応の向きによる。ここで、平衡状態では両方の向きの反応は同じ割合で起きなければならないが、熱力学の基本法則より孤立系の  $F$  は決して増加しないので、 $\Delta F > 0$  の反応は禁止される。これは、 $\Delta F = 0$  となることを意味する。よって、

$$k_A \mu_A + k_B \mu_B = k_C \mu_C + k_D \mu_D \quad (3.3.3)$$

という関係式が得られる。

一般に、全体で  $a$  種類の粒子  $A_i$  が反応しているとする。起こりうる反応を、 $k_I = (k_I^i) (I = 1, \dots, b)$  を有理数の列として、

$$k_I \cdot A \equiv \sum_i k_I^i A_i = \sum_i k_I^i m_i c^2 \equiv Q_I \quad (3.3.4)$$

と表す。ベクトル列  $k_I$  は一次独立にとることができる。このとき、 $A_i$  の粒子数密度を  $n_i$  とし、 $c = \sum_i l^i n_i$  の反応による変化は、 $\Delta c \propto l \cdot k_I$  となるので、独立な保存量 (の密度)  $c_\alpha = l_\alpha \cdot n$  が  $a - b$  個存在する。よって、反応が化学平衡にある条件を考慮すると、 $a$  個の独立な式

$$k_I \cdot \mu = 0 \quad (I = 1, \dots, b), \quad l_\alpha \cdot n = c_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, a - b) \quad (3.3.5)$$

が成り立つ。これより、温度と保存量密度 ( $c_\alpha$ ) が与えられると、すべての種類の粒子数密度 ( $n_i$ ) (および化学ポテンシャル  $\mu_i$ ) が決まる。

---

**§3.4**

---

**Saha の式**

---

化学反応  $A + B + \cdots \rightarrow C + \cdots (+Q)$  に関して粒子数平衡が成り立つとき,

$$\mu_A + \mu_B + \cdots = \mu_C + \cdots \quad (3.4.1)$$

が成り立つ。これより, Boltzmann 近似が成り立つ非相対論的非縮対ガスに対して,

$$n \simeq \left( \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{\beta(\mu - mc^2)} \quad (3.4.2)$$

$$\frac{n_A \cdots}{n_C \cdots} = \frac{g_A \cdots}{g_C \cdots} \left( \frac{m_A kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \cdots \left( \frac{2\pi\hbar^2}{m_C kT} \right)^{3/2} \cdots e^{-\beta Q} \quad (3.4.3)$$

これと粒子数保存則を組み合わせると, 容易に平衡での各種類の粒子の数密度を決めることができる。



---

## §3.5

---

# 非平衡反応による粒子数の変化

---

種類  $i$  の粒子の数密度を  $n_i$ , その単位時間当たりの消滅率を  $\Gamma_i$ , 生成率を  $\Lambda_i$ , 宇宙膨張率を  $H$  とすると,

$$\dot{n}_i = -3Hn_i - \Gamma_i n_i + \Lambda_i \quad (3.5.1)$$

ここで,  $\Gamma_i$  と  $\Lambda_i$  は注目している相互作用系の温度  $T$ , (今考えている反応に対する) 保存量密度  $c = (c_\alpha)$  および  $n_i$  の関数.

宇宙膨張が無視でき, 完全な化学平衡にあるとき,  $n_i = n_{i,\text{eq}}(T, c)$  (熱化学平衡値) が成り立つ. これより,  $n_i$  が化学平衡値に近いなら, それらの間には

$$\Lambda_i = n_{i,\text{eq}}\Gamma_i \quad (3.5.2)$$

の関係が成り立つ. このとき, 上記の式は

$$\dot{n}_i = -3Hn_i - \Gamma_i (n_i - n_{i,\text{eq}}) \quad (3.5.3)$$

この方程式を厳密に解くことは一般的にはできないが, 定性的な議論は可能である. まず, 消滅率  $\Gamma$  が宇宙膨張率  $H$  と比べて十分大きい場合を考えよう. 以下, 簡単のため添え字  $i$  を省略する. この場合, 宇宙膨張は無視できるので, 各時刻で近似的に熱化学平衡が成り立つことが期待される. 実際,  $t_0$  を任意の初期時刻として, 方程式 (3.5.3) を

$$\begin{aligned} a(t)^3 n(t) &= a(t)^3 n_{\text{eq}}(t) + a(t_0)^3 (n(t_0) - n_{\text{eq}}(t_0)) \exp \left[ - \int_{t_0}^t \Gamma(t') dt' \right] \\ &\quad - \int_{t_0}^t \exp \left[ - \int_{t'}^t \Gamma(t'') dt'' \right] d [a(t')^3 n_{\text{eq}}(t')] \end{aligned}$$

と書き換えると, 右辺の第2項は宇宙膨張より速くゼロに近づく. また, 第3項と第1項の比は  $H/\Gamma$  の程度となるので,  $\Gamma/H \gg 1$  なら, 最初平衡からずれていてもすぐに  $n = n_{\text{eq}}$  が良い精度で成り立つようになる.

逆に, 反応が宇宙膨張と比べて遅いと粒子数は凍結するようになる. これを見るために, 方程式 (3.5.3) を

$$\frac{d}{dt} (K(t, t_0) a^3 n) = a^3 n_{\text{eq}} \frac{d}{dt} K(t, t_0); \quad K(t, t_0) = \exp \int_{t_0}^t \Gamma(t') dt' \quad (3.5.4)$$

と書き換える.  $a^3 n$  が単調減少と仮定すると, この式より

$$(a^3 n)(t_0) < (a^3 n)(t) K(t, t_0) < (a^3 n)(t_0) + (a^3 n_{\text{eq}})(t_0) (K(t, t_0) - 1) \quad (3.5.5)$$

を得る。よって,

$$\int_{t_0}^t \Gamma(t') dt' = \int_{a_0}^a \frac{\Gamma}{H} \frac{da}{a} \ll 1 \quad (3.5.6)$$

となると,  $(a^3 n(t) = (a^3 n)(t_0))$  が良い精度で成り立ち, 粒子数は凍結される。

---

## §3.6

---

### 宇宙物質の中性化

---

熱いビッグバンモデルでは、高温の宇宙初期で完全電離していた宇宙プラズマは、宇宙の温度が低下すると中性化する。この時期に宇宙に存在する主要元素は水素とヘリウムであるが、これらが中性化する温度は元素ごとに異なる。

#### 3.6.1 水素の光電離・中性化反応

電離反応



に対し、体積  $V$  の共動領域内の水素原子、陽子、電子の数を  $N_H$ ,  $N_p$ ,  $N_e$ , 対応する数密度を  $n_H = N_H/V$ ,  $n_p = N_p/V$ ,  $n_e = N_e/V$  と表すと、この反応による粒子数の変化は

$$\frac{dN_e}{dt} = AN_H - Bn_pN_e \quad (3.6.2)$$

ここで、 $A$  は一個の水素原子  $H$  が単位時間あたりに光分解される確率、 $B$  は陽子と電子の結合反応の反応率  $\langle v\sigma \rangle$  である。

電荷の保存則と核子数の保存則より、

$$n_p = n_e, \quad n_p + n_H = n_{b,H} \quad (3.6.3)$$

ここで、 $n_{b,H}$  はヘリウムを除いたバリオン数密度で、 $1/a^3$  に比例して変化する。したがって、すべての数密度は電子の数密度  $n_e$  と  $n_{b,H}$  の現在の値  $n_{b,H}^0$  のみで決まる。

電離・再結合反応が宇宙膨張と比べて十分早く起きるとき、(3.6.2) の右辺をゼロとおいて良い。このとき、サハの式より、

$$\frac{n_H}{n_p n_e} = \frac{B}{A} = \left( \frac{m_e T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{Q_H/T} \quad (3.6.4)$$

ここで、

$$Q_H = (m_p + m_e - m_H)c^2 = 13.6\text{eV} \quad (3.6.5)$$

は水素原子の基底状態の結合エネルギーである。電離率

$$X_e = \frac{n_e}{n_{b,H}} \quad (3.6.6)$$

を用いると、この式は

$$\frac{X_e^2}{1 - X_e} = \left( \frac{0.017}{h^2 \Omega_{b,H}} \right) \left( \frac{T_{\text{rec}}}{T} \right)^{3/2} e^{Q_H/T_{\text{rec}} - Q_H/T} \quad (3.6.7)$$

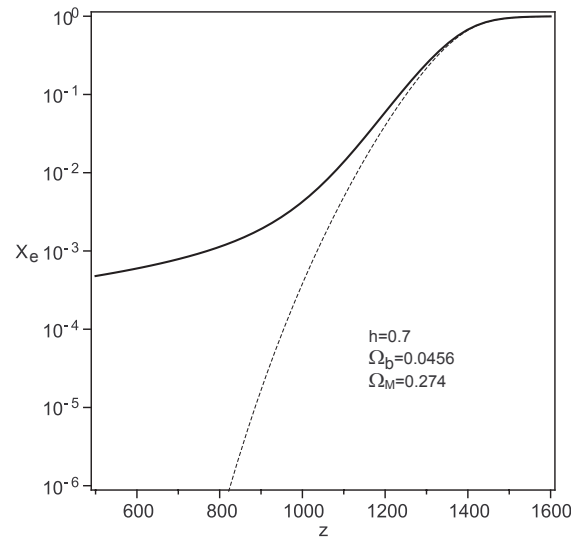


図 3.2: 宇宙晴れ上がり前後での電離率の変化

と表される。ここで、

$$T_{\text{rec}} \simeq 3800\text{K} \tag{3.6.8}$$

である。

これより、温度が  $T_{\text{rec}}$  ( $z = z_{\text{rec}} \simeq 1400$ ) を超えると電離率は急速に 1 に近づき、電子が非相対論的に扱える温度領域 ( $T \lesssim 100\text{keV}$ ) では、 $1 - X_e$  は  $10^{-9}$  以下にとどまる。逆に、温度が  $T_{\text{rec}}$  より下がると急速に電離率は小さくなり、水素が中性化する (図 3.2)。

(注) 中性化が瞬時に起きるのではない。例えば、 $X_e = 0.1$  となるのは、 $z \simeq 1200$  ( $T \simeq 3300\text{K}$ ) で、 $T_{\text{rec}}$  より 500 度ほど低い。このため、中性化の時刻には一般的には不定性があり、注目する物理過程ごとに時刻は変動する。例えば、電子による CMB 散乱が実質的に起こらなくなる温度は次に見るように、 $T_{\text{rec}}$  よりかなり低くなる。

### 3.6.2 非平衡反応

宇宙膨張により粒子数密度が時間と共に低下するため、上で仮定した電離平衡が次第に破れる。これを見るために、まず、電子数の時間変化の方程式 (3.6.2) を

$$\frac{dX_e}{dt} = -\Gamma X_e + \Lambda \tag{3.6.9}$$

と書き直す。ここで、 $\Gamma = Bn_e$ ,  $\Lambda = A(1 - X_e)$ 。厳密な熱化学平衡ではこの右辺がゼロとなるので、左辺と右辺の第 1 項の比  $\dot{X}_e/(\Gamma X_e)$  は熱化学平衡が成り立つ目安となる。特に、温度、密度が時間と共に変化し、熱平衡値が定数でない膨張

宇宙では、厳密な熱化学平衡は一般には成り立たない。そこで、(3.6.7) で求めた  $X_e$  に対する熱平衡値  $X_e^{\text{eq}}$  に対してこの量を評価すると、

$$\frac{1}{\Gamma X_e} \frac{dX_e}{dt} = -\frac{H}{\Gamma} \frac{T}{X_e} \frac{dX_e}{dT} = -\frac{H}{\Gamma} \left( -\frac{3}{4} + \frac{Q_H}{T} \right) \approx -\frac{58}{\Gamma/H} \quad (3.6.10)$$

となる。ここで、 $\Gamma/H$  は  $10 \ll z \lesssim 1000$  では近似的に

$$\frac{\Gamma}{H} \approx 5000 X_e \left( \frac{1+z}{1000} \right)^{0.89} \approx 1.5 \left( \frac{1+z}{1000} \right)^{0.14} e^{29(1-1000/(1+z))} \quad (3.6.11)$$

で与えられる [54]。ここで最後の等式は  $X_e = X_e^{\text{eq}}$  の場合の値である。

これより、 $z = 1400$  では  $\Gamma/H \approx 6000$  となり熱化学平衡が良い近似となるのに対して、 $z = 1200$  の頃に平衡が破れ始め、 $z = 1000$  では大きく熱化学平衡からずれることが分かる。正確な電離率の振る舞いは、時間発展方程式を解くことにより得られる。図 3.2 に示したように、実際の電離率は  $2 \times 10^{-4}$  程度の一定値に近づく。

ただし、現在の宇宙に存在する原子物質の大部分はほぼ完全に電離していることが知られている。したがって、もう一度電離が起こらねばならない。この電離は、 $z = 100 \sim 10$  の時期に最初にできた星々からの紫外線によって引き起こされたと考えられている。

**【問 3.6.1】** He 原子 HeI は、 $\text{HeI} + \gamma \rightarrow \text{HeII} + e^-$ ,  $\text{HeII} + \gamma \rightarrow \text{HeIII} + e^-$  と 2 段階で電離する ( $\text{HeII} = \text{He}^+$ ,  $\text{HeIII} = \text{He}^{++}$ )。この電離が起きる温度を求めよ。ただし、HeI および HeII の電離エネルギーの値は、それぞれ  $Q_{\text{HeI}} = 24.6\text{eV}$ ,  $Q_{\text{HeII}} = 54.0\text{eV}$  で与えられる。 □

### 3.6.3 宇宙の透明度

宇宙物質の中性化がもたらす最も大きな効果は、宇宙空間が電磁波に対して透明になることである。すなわち、宇宙の晴れ上がりをもたらす。

中性化した水素やヘリウムは、基底状態に近いエネルギーレベルの間の遷移エネルギーが大きいため、宇宙中性化の頃およびそれ以降の時期で、宇宙を満たす熱放射との相互作用が無視できるほど小さい。これに対して、自由電子は小さなエネルギーの光子とも相互作用する。このため、水素中性化の頃以降、宇宙背景放射と物質との主な相互作用は、電子による光子散乱となる。この確率を計算してみよう。

まず、光子のエネルギーおよび電子の運動エネルギーが電子の静止質量エネルギーと比べて十分小さいとき、光子の電子による散乱断面積は、トムソン断面積  $\sigma_T = 8\pi(\alpha\hbar/(m_e c))^2/3 = 0.66524\text{barn}$  で与えられる。したがって、1 個の光子が時

刻  $t$  (赤方偏移  $z$ ) から現在までに電子と衝突する確率は

$$\begin{aligned}\tau(z) &= \int_t^{t_0} n_e \sigma_T c dt = \frac{\sigma_T n_{H0} c}{H_0} \int_{1/(1+z)}^1 X_e \frac{H_0 da}{a^4 H} \\ &= 7 \times 10^{-2} \int_{1/(1+z)}^1 X_e \frac{H_0}{a^{3/2} H} \frac{da}{a^{5/2}}\end{aligned}\quad (3.6.12)$$

で与えられる。  $X_e$  として平衡値を使うと、  $x = T_{\text{rec}}/T$  として、

$$\tau \simeq 3583 \int_x^\infty dx x^{-7/4} e^{20.76(1-x)} \quad (3.6.13)$$

となる。これより、  $x = 1.228$  ( $z = 1135$ ) で  $\tau \simeq 1$  となる。光子が散乱を受けずに現在の観測者に届く確率は、  $e^{-\tau}$  で与えられるので、この結果は、平均的には、  $z = z_{\text{ls}} \simeq 1135$ 、温度にして  $T = T_{\text{ls}} \simeq 3094\text{K}$  の頃に光子と電子の最後の散乱が起きたと見なすことができる。この値は、WMAP衛星によるCMB観測とより詳細な宇宙モデルに基づいて求められた値、  $z_{\text{ls}} \simeq 1090$  ( $T_{\text{ls}} \simeq 2970\text{K}$ ) に近い値となる。  $x = 1.19$  とすると  $e^{-\tau} \sim 0.1$  となるので、この最終散乱面の厚みは、  $\Delta z/z = 0.02$  程度となる。この最終散乱面より前の時期の宇宙は、電磁波により直接観測することができない。

**【問 3.6.2】** 水素の電離プラズマには、電子と同じ数の陽子が存在する。光子と陽子の散乱が、電子との散乱に比べて無視できるのはなぜか？ \_\_\_\_\_□

---

## §3.7

---

# CMBと宇宙音波

---

### 3.7.1 Jeans 長

孤立したガス雲 半径  $L$ , 質量密度  $\mu$  のガス雲を考える. 流体の運動方程式

$$\mu \frac{dv}{dt} = -\nabla P - \mu \nabla \phi \quad (3.7.1)$$

より, ガス雲が力学的に平衡状態にあるためには, ガス雲の単位体積に働く重力  $\sim G\mu M/L^2 \approx G\mu^2 L$  と圧力勾配による力  $\sim P/L \approx c_s^2 \mu/L$  が釣り合う必要がある:

$$G\mu^2 L \approx \frac{c_s^2 \mu}{L} \quad (3.7.2)$$

これより得られる特徴的な長さ

$$L_J = \frac{c_s}{(G\mu)^{1/2}} \quad (3.7.3)$$

をこのガス雲の (Jeans 長) という.

$L < L_J$  となるガス雲は膨張し密度が減少する. このとき音速の変化が起こらなければ,  $L_J$  は増加し, さらにガス雲は膨張を続ける. 一方,  $L > L_J$  のガス雲は重力収縮しさらに密度  $\mu$  が上昇する. 密度  $\mu$  が上昇すると  $L_J$  がさらに減少し, この収縮は際限なく進むことなる. これはジーンズ (Jeans) 不安定と呼ばれる.

ただし, 現実のガス雲では一般に膨張収縮により温度が変化する. 例えば, 断熱的な場合には,  $C_P = C_V + k_B$  を一粒子あたりの定圧比熱として, 非相対論的ガスの音速は  $c_s^2 = dP/d\mu = C_P T / (mc^2 + C_P T)$ , 温度の体積依存性は  $T \propto V^{1-\gamma}$  ( $\gamma = C_P/C_V$ ) となるので,  $L_J/L$  は  $L$  の変化に対して

$$L_J/L \propto L^{-2(\gamma-4/3)} \quad (3.7.4)$$

と振る舞う. したがって,  $\gamma > 4/3$  で断熱的ならば, 最初  $L < L_J$  で膨張を始めると次第に  $L_J/L$  が減少し  $L = L_J$  に近づく. 逆に,  $L > L_J$  から出発すると, 最初は収縮するが次第に  $L = L_J$  に近づく. したがって,  $L = L_J$  が安定な平衡状態となる. 一方, 相対論的な場合  $\gamma = 4/3$  や断熱条件が破れると, 不安定が起こりうる (変光星, 星形成).

一様なガス雲の密度ゆらぎ 一様なガス雲の密度ゆらぎ  $\delta\mu$  に対して, 平衡条件は

$$G\delta\mu\mu/L^2 \approx c_s^2\delta\mu/L \Rightarrow L \approx L_J \quad (3.7.5)$$

この場合,  $c_s$  の変化が小さいとすると,

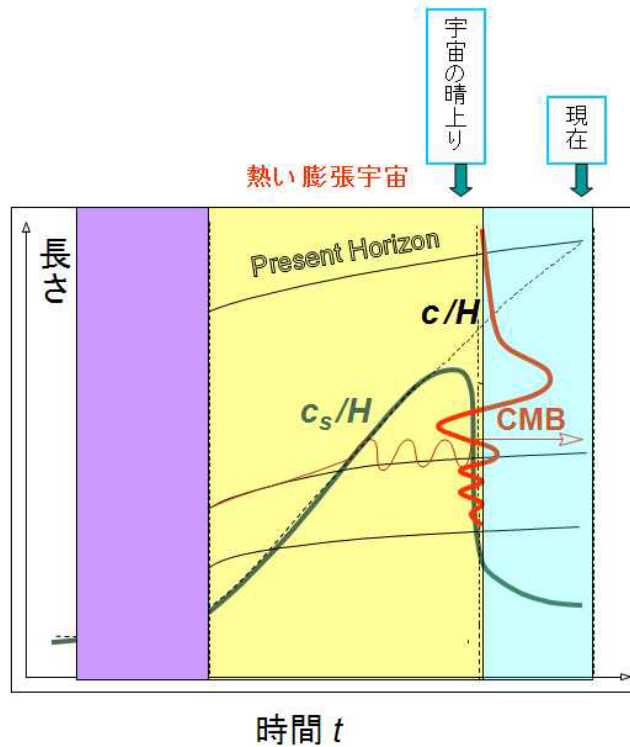


図 3.3: CMB の音波

- $L < L_J \Rightarrow$  ゆらぎは音波として伝播。(周りのガスの反作用)
- $L > L_J \Rightarrow$  重力収縮により限りなく増大 (Jeans 不安定) .

【問 3.7.1】 宇宙物質が電磁熱放射 (r) と物質 (b) (電子, 陽子プラズマ) の混合気体と見なされるとき, 両者の圧力の比  $P_b/P_r$  を求めよ. ただし, 輻射と物質は同じ温度とする. また,  $\Omega_{\text{CMB}} = 4.8 \cdot 10^{-5}$ ,  $\Omega_b = 0.046$ ,  $k_B T_{\text{CMB}} = 2.4 \cdot 10^{-4} \text{eV}$ ,  $m_p = 940 \text{MeV}/c^2$  とせよ. \_\_\_\_\_ □

【問 3.7.2】 問 3.7.1 と同じ仮定の下で, 宇宙物質のエネルギー密度  $\rho$  と圧力  $P$  をスケール因子の関数として求めよ. さらに, これを用いて, このガスの音速  $c_s = c(\dot{P}/\dot{\rho})^{1/2}$  をスケール因子の関数として求めよ. また, 原子物質が中性化して以降の音速を求めよ. \_\_\_\_\_ □

### 3.7.2 宇宙音波

宇宙の Jeans 長 水素再結合時  $t_{\text{rec}}$  以前の時期では, 放射とプラズマは一体となって運動し, 圧力とエネルギー密度は

$$\rho = \rho_r + n_b m_p^2, \quad P = \frac{1}{3} \rho_r + n_b T. \quad (3.7.6)$$



よって、音速は

$$c_s^2 = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} = 4 \frac{P}{4\rho_r + 3\rho_b} = \frac{1}{3} \frac{1 + 4n/s\gamma}{1 + a/a_*} \quad (3.7.7)$$

ここで、 $a_*$  は  $\rho_r = \rho_b$  となる時のスケール因子の値.

- $\rho_r \gg \rho_b$  の時期: 音速はほぼ  $c_s \approx c/\sqrt{3}$  となり, Jeans 長は共動座標で表して

$$\chi_J = a^{-1} L_J \approx \frac{c_s}{aH} \approx \frac{1}{\sqrt{3}Ha} \propto \frac{t}{a} \quad (3.7.8)$$

となる. すなわち,  $\chi_J$  は (共動座標で表した) Hubble ホライズン半径  $c/(aH)$  に比例して時間と共に増大.

- $\rho_r < \rho_b$  &  $T > T_{\text{rec}}$  の時期:

$$c_s^2 \simeq \frac{a_*}{3a} \quad (3.7.9)$$

より,

$$\chi_J \approx \frac{1}{\sqrt{3}Ha_*} \left(\frac{a_*}{a}\right)^{3/2} \approx \frac{1}{\sqrt{3}H_*a_*} \approx 0.033 \frac{c}{H_0} \simeq 140\text{Mpc} \quad (3.7.10)$$

- $T < T_{\text{rec}}$  の時期: 水素は中性化し, 水素ガスの Jeans 長はガス圧  $P_g = n_b k_B T$  のみで決まるようになる.

$$P_g/P_r \approx n_b/s \approx 10^{-9} \quad (3.7.11)$$

なので, 水素中性化により物質の Jeans 長は一挙に  $4/10^5$  倍程度に縮んでしまう.

以上の変化のため, 宇宙における共動座標で測った Jeans 長は水素中性化の頃に最大値  $\chi_{Jm} \sim 1/(aH)_{\text{dec}}$  をもつ. このため, 共動座標での波長を  $\lambda$  とするとき,

- $\lambda > \chi_{Jm}$  となる長波長のゆらぎ: Jeans 不安定により成長を続ける.
- $\lambda < \chi_{Jm}$  となる短波長ゆらぎ:  $\chi_J \sim c/(aH)$  が  $\lambda$  を超えると音波として振動を初め, 水素の中性化の後では, 水素ガス密度のゆらぎおよび CMB の温度ゆらぎとして現在まで残ることになる (図 3.3).

**BAO** これらのうち, 短波長の水素ガス密度のゆらぎはその後, 水素ガスから銀河ができる際に銀河の分布のゆらぎを生み出す. 銀河分布の主要部分はこの音響振動と結合しないダークマターの分布により決まる. このため, この水素 (バリオン) 音響振動 (**Baryon Acoustic Oscillation**) の影響は非常にわずかなものとなる.

このわずかな BAO が, SDSS サーベイにより得られた宇宙地図の銀河相関の解析により発見された (図 3.4[22]). この図は, 赤方偏移がある範囲にある銀河の角

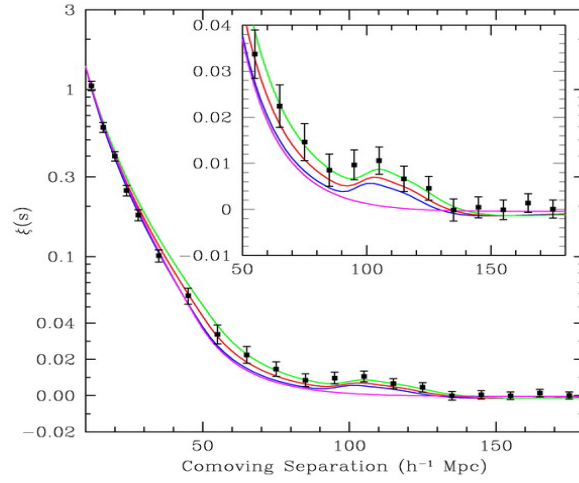


図 3.4: SDSS により発見されたバリオン音響振動 [出典: SDSS 観測データ [22]]

度 2 体相関  $\xi(s)$ , すなわち勝手な銀河を基準として天球上で角半径  $s$  の円を考えたとき, その円に含まれる銀河の個数の平均よりのずれの統計平均を  $s$  の関数としてプロットしたものである. 図を見ると, 確かに現在の距離 (共動距離) にして  $100h^{-1}\text{Mpc}$  あたりにふくらみがあるのが見て取れる.

これが BAO に対応することを確認するため, 宇宙晴れ上がり前での宇宙音波の振る舞いをもう少し詳しく見てみよう. まず, ダークマターの存在も考慮すると, ダークマターのエネルギーが宇宙膨張を支配する時期での電磁輻射と物質の混合気体を伝播する波数  $k/a$  の音波の方程式は,

$$\frac{d^2 X}{da^2} + \frac{k^2 c_r^2}{a^4 H^2} X \approx 0; \quad X = \left( \frac{H}{1 + w_r} \right)^{1/2} a^3 \rho_r \Delta_r \quad (3.7.12)$$

となる. ここで,  $\Delta_r$  は密度ゆらぎのコントラスト  $\delta\rho_r/\rho_r$  を表す量である. この WKB 解

$$\Delta_r = \frac{A}{a^2} \left( \frac{1 + w_r}{c_r \rho_r} \right)^{1/2} \sin \left( \int_0^a \frac{k c_r}{a^2 H} da \right) \quad (3.7.13)$$

の  $t = t_{\text{dec}}$  での値は, 次のように書き換えられる:

$$|\Delta_r|^2 \propto \frac{A^2(k)}{(1 + 10^3 a)^2} \sin^2 \left( \gamma \frac{k}{(aH)_{\text{dec}}} \right) \quad (3.7.14)$$

ここで,

$$\gamma = \int_0^1 \left( \frac{2}{(1+x)(4+3x)} \right)^{1/2} dx \simeq 0.5 \quad (3.7.15)$$

これより, 宇宙晴れ上がり時での音波の振幅  $|\Delta_r(t_{\text{dec}})|^2$  は, 離散的な波数

$$\frac{k_n}{(aH)_{\text{dec}}} = \frac{\pi}{2\gamma} (2n - 1) \simeq (2n - 1)\pi \quad (3.7.16)$$

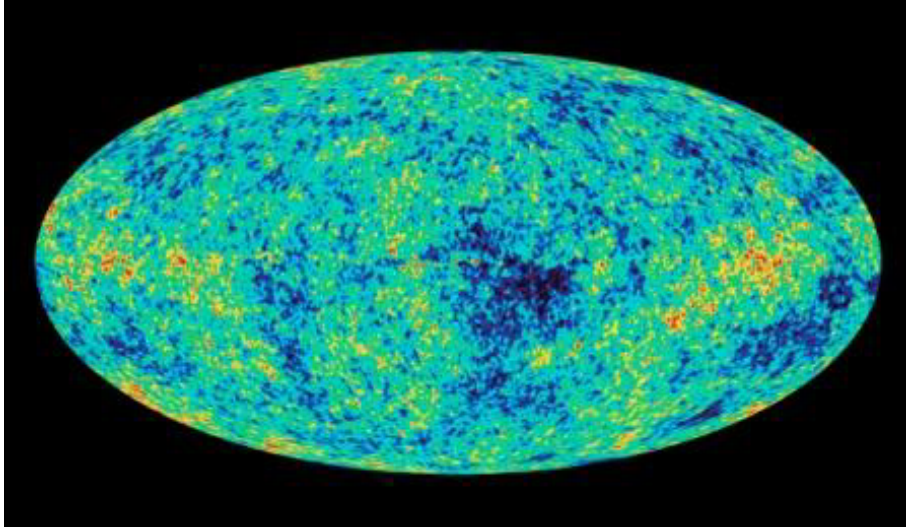


図 3.5: WMAP によって得られた CMB 温度地図 [出典: WMAP5yr データ [29]]

でピークをもつことが分かる.

$(aH)_{\text{dec}}$  を評価しよう. まず, CMB の最終散乱面  $t = t_{\text{dec}}$  で我々が観測できる領域の半径に相当する  $t = t_{\text{dec}}$  時での固有長  $r_{\text{plc}}(t_{\text{dec}})$  と対応する現在の長さ (共動長)  $\chi_{\text{plc}}(t_{\text{dec}})$  は,

$$\chi_{\text{plc}} = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a} = 3t_0 (1 - a^{1/2}) \quad (3.7.17)$$

より

$$\chi_{\text{plc}}(t_{\text{dec}}) \simeq 3t_0 = l_H(t_0), \quad (3.7.18a)$$

$$r_{\text{plc}}(t_{\text{dec}}) = 3t_0 a(t_{\text{dec}}) \quad (3.7.18b)$$

よって,  $r_{\text{plc}}(t_{\text{dec}})$  と  $l_H(t_{\text{dec}})$  の比は

$$\frac{r_{\text{plc}}(t_{\text{dec}})}{l_H(t_{\text{dec}})} \simeq \frac{t_0 a_{\text{dec}}}{t_{\text{dec}}} = z_{\text{dec}}^{1/2} \simeq 33. \quad (3.7.19)$$

この比は  $(aH)_{\text{dec}}/(aH)_0$  と等しいので,

$$\frac{c}{(aH)_{\text{dec}}} \simeq \frac{c}{33H_0} \simeq 100h^{-1}\text{Mpc} \quad (3.7.20)$$

を得る. (3.7.14) 式は,  $|\Delta_r|^2$  が波数  $k$  の空間で周期  $(aH/c)_{\text{dec}}$  を持っていることを表しており, この周期変動は  $|\Delta_r|^2$  の Fourier 変換に当たる相関関数  $\xi(s)$  に  $s \simeq c/(aH)_{\text{dec}}$  のあたりに 1 個のピークを生み出すことが示される [48]. これより, 図 3.4 に示されている相関関数の盛り上がりがまさに BAO に対応することが分かる.

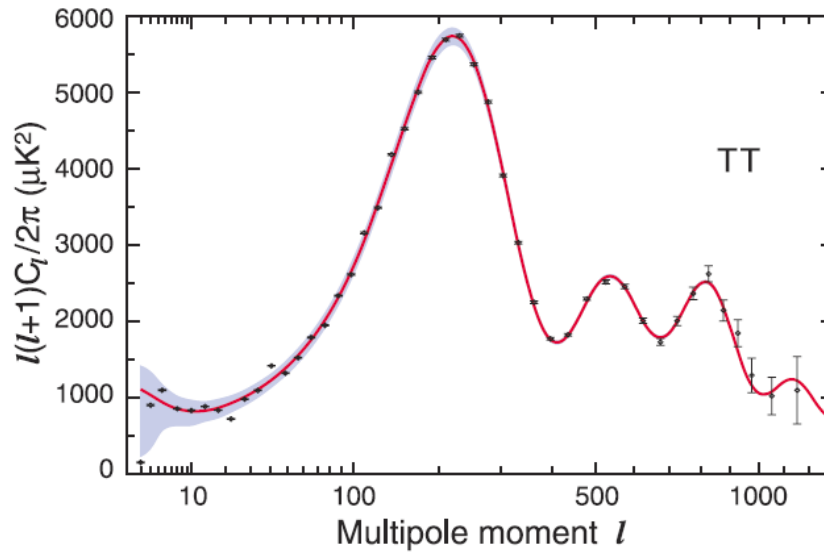


Fig. 32.— The nine-year WMAP TT angular power spectrum. The WMAP data are in black, with error bars, the best fit model is the red curve, and the smoothed binned cosmic variance curve is the shaded region. The first three acoustic peaks are well-determined.

図 3.6: WMAP 等により得られた最新の CMB 温度角度パワースペクトル [出典: WMAP9yr データ [?]]

---

### §3.8

---

## CMB による観測

---

光子最終散乱面での音響振動は、CMB の観測でも見ることができる。これは、光子ガスのエネルギー密度のゆらぎが  $\Delta_r = 4\delta T/T$  により温度のゆらぎと結びついているためである。観測的には、光子最終散乱面上の異なる位置で散乱された光は現在異なる方向から来る CMB に対応するので、この温度のゆらぎは CMB の温度が方向により異なるという現象を引き起こす。ただし、 $t_{\text{dec}}$  での温度ゆらぎは平均温度 2.723K の  $10^{-5}$  程度しかないので、観測される温度異方性も同程度の非常に小さなものである。この小さな温度異方性を最初に検出したのはスムート (G.F.Smoot) が率いる COBE 衛星 DMR 観測であるが (2006 年ノーベル賞)、その後より精密な測定が Boomerang および MAXIMA-1 による気球、さらに WMAP による専用衛星観測により行われた。図 3.5 は WMAP により得られた温度地図である。

この温度地図そのものでは何も分からないが、それから温度ゆらぎの角度相関関数を計算してみると図 3.6 が得られる [50]。見事に最終散乱面での音響振動に対

応する振動パターンが現れているのが分かる。ただし、この図では、角度相関関数  $\xi(s)$  を球面調和関数  $Y_\ell^m(s)$  で展開したときの展開係数の2乗（パワースペクトル）が  $\ell$  の関数として示されている。対応を見るため、宇宙膨張は平坦な物質優勢 LFRW モデルで近似できるとして、CMB の最終散乱面  $t = t_{\text{dec}}$  でのホライズンを見込む角度を求めてみよう。まず、最終散乱面で我々が観測する球面の赤道円の周長は  $2\pi r_{\text{plc}}(t_{\text{dec}})$  なので、それと  $t = t_{\text{dec}}$  でのホライズン直径の比は

$$\frac{2l_H(t_{\text{dec}})}{2\pi r_{\text{plc}}(t_{\text{dec}})} \simeq \frac{1}{100} \quad (3.8.1)$$

で与えられる。これより、音響振動の最初のピーク（第1Doppler peak）に対応する  $\ell$  の値は、対応する波長と上記の赤道円周長の比で与えられるので

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{k_1}{a} r_{\text{plc}}(t_{\text{dec}}) = \frac{k_1}{(aH)_{\text{dec}}} \frac{2r_{\text{plc}}(t_{\text{dec}})}{l_H(t_{\text{dec}})} \\ &= \frac{100}{\gamma} \simeq 200 \end{aligned}$$

となる。これは、図3.6のピークの位置とびったし一致することが分かる。

このピークの位置は宇宙のモデルパラメータに依存し、特に空間の曲率パラメータ  $\Omega_K$  に敏感である。上記の結果は、実は宇宙が非常に平坦であること

$$|\Omega_K| \lesssim 0.1 \quad (3.8.2)$$

を意味する [41]。さらに、2番目以降のピークの位置や詳細なパワースペクトルの形の情報と SNIa, BAO など他の観測情報を合わせると、多くの宇宙パラメータと宇宙初期のゆらぎについての情報を同時に決定することができる (図3.9)。

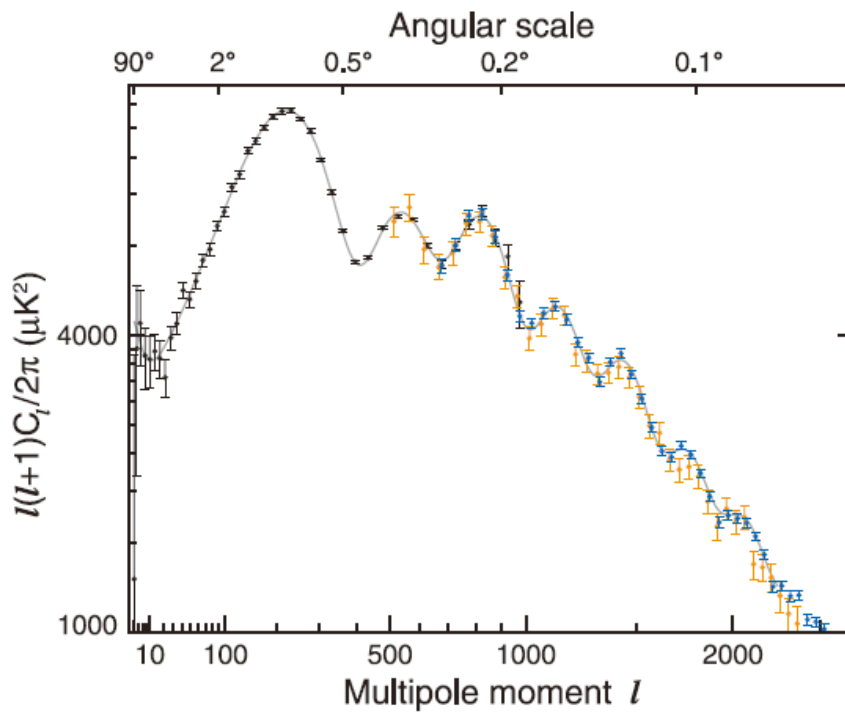


FIG. 1.— A compilation of the CMB data used in the nine-year WMAP analysis. The WMAP data are shown in black, the extended CMB data set – denoted ‘eCMB’ throughout – includes SPT data in blue (Keisler et al. 2011), and ACT data in orange, (Das et al. 2011). We also incorporate constraints from CMB lensing published by the SPT and ACT groups (not shown). The  $\Lambda$ CDM model fit to the WMAP data alone (shown in grey) successfully predicts the higher-resolution data.

図 3.7: WMAP 9r の観測と ACT および SPT の観測を合わせて得られる CMB 温度非等方性パワースペクトル

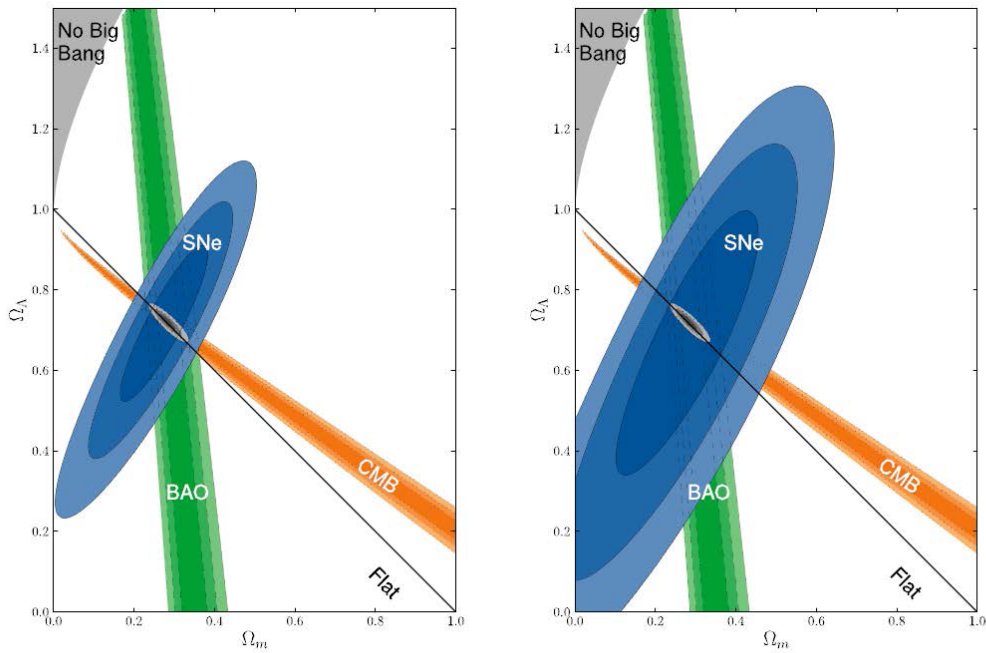


Figure 5.  $\Lambda$ CDM model: 68.3%, 95.4%, and 99.7% confidence regions of the  $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$  plane from SNe Ia combined with the constraints from BAO and CMB. The left panel shows the SN Ia confidence region only including statistical errors while the right panel shows the SN Ia confidence region with both statistical and systematic errors.

図 3.8: HST Cluster SN Survey + CMB + BAOにより得られた宇宙パラメーターへの制限 [Suzuki N et al: arXiv:1105.3470]

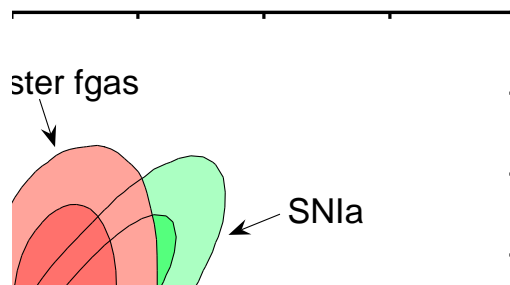


図 3.9: WMAP, BAO および X線観測から得られた宇宙パラメーターへの制限 [2]

TABLE 2  
MAXIMUM LIKELIHOOD  $\Lambda$ CDM PARAMETERS<sup>a</sup>

Parameter	Symbol	WMAP data	Combined data <sup>b</sup>
<b>Fit <math>\Lambda</math>CDM parameters</b>			
Physical baryon density	$\Omega_b h^2$	0.02256	0.02240
Physical cold dark matter density	$\Omega_c h^2$	0.1142	0.1146
Dark energy density ( $w = -1$ )	$\Omega_\Lambda$	0.7185	0.7181
Curvature perturbations, $k_0 = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$	$10^9 \Delta_{\mathcal{R}}^2$	2.40	2.43
Scalar spectral index	$n_s$	0.9710	0.9646
Reionization optical depth	$\tau$	0.0851	0.0800
<b>Derived parameters</b>			
Age of the universe (Gyr)	$t_0$	13.76	13.75
Hubble parameter, $H_0 = 100h \text{ km/s/Mpc}$	$H_0$	69.7	69.7
Density fluctuations @ $8h^{-1} \text{ Mpc}$	$\sigma_8$	0.820	0.817
Baryon density/critical density	$\Omega_b$	0.0464	0.0461
Cold dark matter density/critical density	$\Omega_c$	0.235	0.236
Redshift of matter-radiation equality	$z_{\text{eq}}$	3273	3280
Redshift of reionization	$z_{\text{reion}}$	10.36	9.97

<sup>a</sup> The maximum-likelihood  $\Lambda$ CDM parameters for use in simulations. Mean parameter values, with marginalized uncertainties, are reported in Table 4.

<sup>b</sup> “Combined data” refers to WMAP+eCMB+BAO+ $H_0$ .

図 3.10: WMAP 9r での 6 個の  $\Lambda$ CDM モデルパラメーターの最適値とそれから誘導される他のパラメータ値

## §3.9

# 宇宙パラメーター

### 観測値

- 空間曲率 (6 parameter model)
  - $\Omega_k = -0.0037_{-0.0042}^{+0.0044}$ : WMAP-9yr only.
  - $\Omega_k = -0.001 \pm 0.0012$  (68%CL): WMAP-9yr + eCMB
  - $\Omega_k = -0.0027_{-0.0038}^{+0.0039}$ : WMAP-9yr+eCMB+BAO+ $H_0$ .
- Neutrino 質量
  - $\sum_\nu m_\nu < 1.3\text{eV}$  (95%CL): WMAP-9yr.
  - $\sum_\nu m_\nu < 1.5\text{eV}$  (95%CL): WMAP-9yr+eCMB.
  - $\sum_\nu m_\nu < 0.56\text{eV}$  (95%CL): WMAP-9yr+eCMB+BAO.
  - $\sum_\nu m_\nu < 0.44\text{eV}$  (95%CL): WMAP-9yr+eCMB+BAO+ $H_0$ .
- 物質密度



- $\Omega_b = 0.0472 \pm 0.0010$ : WMAP-9yr+BAO+ $H_0$ .
- $\Omega_c = 0.229 \pm 0.015$ : WMAP-9yr+BAO+ $H_0$ .
- 状態方程式
  - $w = -1.023 \pm 0.090(\text{stat}) \pm 0.054(\text{sys})$  (flat,  $w = \text{const} + \text{BAO}$ )

### Reference

- Hinshaw G et al (2012) arXiv:1212.5226[astro-ph]: NINE-YEAR WILKINSON MICROWAVE ANISOTROPY PROBE (WMAP) OBSERVATIONS: COSMOLOGICAL PARAMETER RESULTS

TABLE 4  
SIX-PARAMETER  $\Lambda$ CDM FIT; WMAP PLUS EXTERNAL DATA<sup>a</sup>

Parameter	WMAP	+eCMB	+eCMB+BAO	+eCMB+ $H_0$	+eCMB+BAO+ $H_0$
Fit parameters					
$\Omega_b h^2$	$0.02264 \pm 0.00050$	$0.02229 \pm 0.00037$	$0.02211 \pm 0.00034$	$0.02244 \pm 0.00035$	$0.02223 \pm 0.00033$
$\Omega_c h^2$	$0.1138 \pm 0.0045$	$0.1126 \pm 0.0035$	$0.1162 \pm 0.0020$	$0.1106 \pm 0.0030$	$0.1153 \pm 0.0019$
$\Omega_\Lambda$	$0.721 \pm 0.025$	$0.728 \pm 0.019$	$0.707 \pm 0.010$	$0.740 \pm 0.015$	$0.7135^{+0.0095}_{-0.0096}$
$10^9 \Delta_{\mathcal{R}}^2$	$2.41 \pm 0.10$	$2.430 \pm 0.084$	$2.484^{+0.073}_{-0.072}$	$2.396^{+0.079}_{-0.078}$	$2.464 \pm 0.072$
$n_s$	$0.972 \pm 0.013$	$0.9646 \pm 0.0098$	$0.9579^{+0.0081}_{-0.0082}$	$0.9690^{+0.0091}_{-0.0090}$	$0.9608 \pm 0.0080$
$\tau$	$0.089 \pm 0.014$	$0.084 \pm 0.013$	$0.079^{+0.011}_{-0.012}$	$0.087 \pm 0.013$	$0.081 \pm 0.012$
Derived parameters					
$t_0$ (Gyr)	$13.74 \pm 0.11$	$13.742 \pm 0.077$	$13.800 \pm 0.061$	$13.702 \pm 0.069$	$13.772 \pm 0.059$
$H_0$ (km/s/Mpc)	$70.0 \pm 2.2$	$70.5 \pm 1.6$	$68.76 \pm 0.84$	$71.6 \pm 1.4$	$69.32 \pm 0.80$
$\sigma_8$	$0.821 \pm 0.023$	$0.810 \pm 0.017$	$0.822^{+0.013}_{-0.014}$	$0.803 \pm 0.016$	$0.820^{+0.013}_{-0.014}$
$\Omega_b$	$0.0463 \pm 0.0024$	$0.0449 \pm 0.0018$	$0.04678 \pm 0.00098$	$0.0438 \pm 0.0015$	$0.04628 \pm 0.00093$
$\Omega_c$	$0.233 \pm 0.023$	$0.227 \pm 0.017$	$0.2460 \pm 0.0094$	$0.216 \pm 0.014$	$0.2402^{+0.0088}_{-0.0087}$
$z_{\text{eq}}$	$3265^{+106}_{-105}$	$3230 \pm 81$	$3312 \pm 48$	$3184 \pm 70$	$3293 \pm 47$
$z_{\text{reion}}$	$10.6 \pm 1.1$	$10.3 \pm 1.1$	$10.0 \pm 1.0$	$10.5 \pm 1.1$	$10.1 \pm 1.0$

<sup>a</sup>  $\Lambda$ CDM model fit to WMAP nine-year data combined with a progression of external data sets.

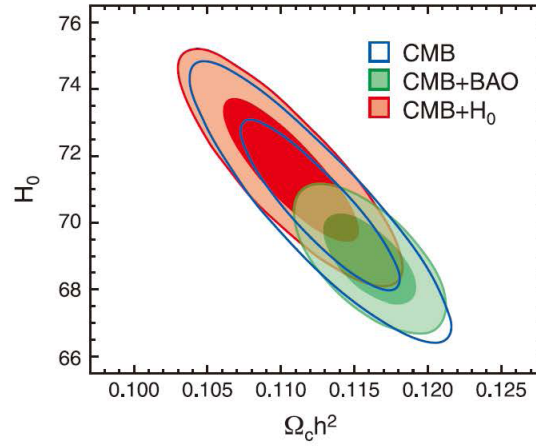


FIG. 5.— Measurements of  $\Omega_c h^2$  and  $H_0$  from CMB data only (blue contours, WMAP+eCMB), from CMB and BAO data (green contours, WMAP+eCMB+BAO), and from CMB and  $H_0$  data (red contours, WMAP+eCMB+ $H_0$ ). The two non-CMB priors push the constraints towards opposite ends of the range allowed by the CMB alone, but they are not inconsistent.

図 3.11: WMAP 9ry:  $H_0$  vs  $h^2\Omega_c$

TABLE 7  
RELATIVISTIC DEGREES OF FREEDOM AND BIG BANG NUCLEOSYNTHESIS<sup>a</sup>

Parameter	WMAP	+eCMB	+eCMB+BAO	+eCMB+BAO+ $H_0$
Number of relativistic species <sup>b</sup>				
$N_{\text{eff}}$	$> 1.7$ (95% CL)	$3.89 \pm 0.67$	$2.96 \pm 0.36$	$3.26 \pm 0.35$
$n_s$	$0.988 \pm 0.027$	$0.985^{+0.018}_{-0.019}$	$0.9563^{+0.0100}_{-0.0102}$	$0.9636 \pm 0.0094$
Primordial helium abundance <sup>b</sup>				
$Y_{\text{He}}$	$< 0.42$ (95% CL)	$0.299 \pm 0.027$	$0.295 \pm 0.027$	$0.299 \pm 0.027$
$n_s$	$0.973 \pm 0.016$	$0.982 \pm 0.013$	$0.973 \pm 0.011$	$0.977 \pm 0.011$
Big bang nucleosynthesis <sup>c</sup>				
$N_{\text{eff}}$	...	$2.92 \pm 0.79$	$2.47 \pm 0.37$	$2.83 \pm 0.38$
$Y_{\text{He}}$	...	$0.302^{+0.038}_{-0.039}$	$0.317^{+0.030}_{-0.031}$	$0.308^{+0.032}_{-0.031}$
$n_s$	...	$0.978 \pm 0.019$	$0.969 \pm 0.012$	$0.976 \pm 0.011$

<sup>a</sup> A complete list of parameter values for these models may be found at <http://lambda.gsfc.nasa.gov/>.

<sup>b</sup> The parameters  $N_{\text{eff}}$  and  $Y_{\text{He}}$  comprise one additional parameter each in these table sections.

<sup>c</sup> The parameters  $N_{\text{eff}}$  and  $Y_{\text{He}}$  are fit jointly in this section.

図 3.12: WMAP 9ry: BBN parameters

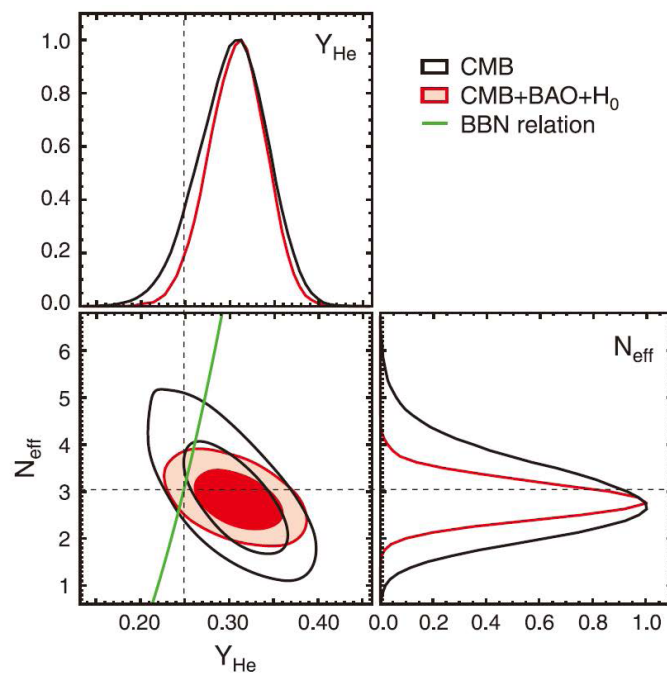


FIG. 9.— Joint, marginalized constraints (68% and 95% CL) on the primordial helium abundance,  $Y_{\text{He}}$ , and the energy density of “extra radiation species,” parameterized as an effective number of neutrino species,  $N_{\text{eff}}$ . These constraints are derived from the nine-year *WMAP*+eCMB data (black), and from *WMAP*+eCMB+BAO+ $H_0$  data (red). The green curve shows the predicted dependence of  $Y_{\text{He}}$  on  $N_{\text{eff}}$  from Big Bang Nucleosynthesis; the dashed lines indicate the standard model:  $N_{\text{eff}} = 3.04$ ,  $Y_{\text{He}} = 0.248$ .

図 3.13: WMAP 9ry:  $N_{\text{eff}}$  vs  $Y$

## 4

## 宇宙摂動論

## §4.1

## 一般論

## 4.1.1 摂動 Einstein 方程式

When the spacetime metric (and matter fields/variables) is expressed as the sum of a background part and a small deviation as

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \quad (4.1.1)$$

in terms of the variables

$$\delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}, \quad \psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h g_{\mu\nu} \quad (4.1.2)$$

the linearised Einstein equations can be written as

$$\begin{aligned} \Delta_L \psi_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\alpha \psi_\nu^\alpha + \nabla_\nu \nabla_\alpha \psi_\mu^\alpha - \nabla^\alpha \nabla^\beta \psi_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + R^{\alpha\beta} \psi_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - R \psi_{\mu\nu} \\ = 2\kappa^2 \delta T_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

where  $\Delta_L$  is the Lichnerowicz operator defined by

$$\Delta_L \psi_{\mu\nu} := -\square \psi_{\mu\nu} + R_{\mu\alpha} \psi_\nu^\alpha + R_{\nu\alpha} \psi_\mu^\alpha - 2R_{\mu\alpha\nu\beta} \psi^{\alpha\beta}. \quad (4.1.4)$$

## 4.1.2 Gauge problem

**Gauge freedom** : In order to describe the spacetime structure and matter configuration  $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{\Phi})$  as a perturbation from a fixed background  $(M, g, \Phi)$ , we



図 4.1: Gauge transformation

introduce a mapping

$$F : \text{background } M \rightarrow \tilde{M} \quad (4.1.5)$$

to define perturbation variables on the fixed background spacetime as follows:

$$h := \delta g = F^* \tilde{g} - g, \quad (4.1.6a)$$

$$\phi := \delta \Phi = F^* \tilde{\Phi} - \Phi. \quad (4.1.6b)$$

For a different mapping  $F'$ , these perturbation variables change their values, which has no physical meaning and can be regarded as a kind of gauge freedom. Because  $F$  and  $F'$  are related by a diffeomorphism, the corresponding changes of the variables are identical to the transformation of the variables with respect to the transformation  $f = F'^{-1}F$ . In the framework of linear perturbation theory, we can restrict considerations to infinitesimal changes of  $F$ . Hence,  $f$  is expressed in terms of an infinitesimal transformation  $\xi^\mu$  as

$$\bar{\delta}x^\mu = x^\mu(f(p)) - x^\mu(p) = \xi^\mu. \quad (4.1.7)$$

To be explicit, we have

$$\bar{\delta}h_{\mu\nu} = -\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} \equiv -\nabla_\mu \xi_\nu - \nabla_\nu \xi_\mu, \quad (4.1.8a)$$

$$\bar{\delta}\phi = -\mathcal{L}_\xi \Phi. \quad (4.1.8b)$$

### Two methods to remove the gauge freedom

- i) Gauge fixing method: this method is direct, but it is rather difficult to find relations between perturbation variables in different gauges in general.
- ii) Gauge-invariant method: this method describe the theory only in terms of gauge-invariant quantities. Such quantities have non-local expressions in terms of the original perturbation variables in general.

These two approaches are mathematically equivalent, and a gauge-invariant variable can be regarded as some perturbation variable in some special gauge in general. Therefore, the non-locality of the gauge-invariant variables implies that the relation of two different gauges are non-local.

### 4.1.3 Tensorial decomposition of perturbations

#### Metric perturbation

$$\delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} : h_{00} = -2\alpha, h_{0i} = \beta_i, h_{ij}. \quad (4.1.9)$$

#### Matter perturbation

$$\delta T_{\mu\nu} : \delta T_0^0 = -\delta\rho = \tau_0^0, \delta T_0^i = \tau_0^i, \delta T_j^i = \tau_j^i. \quad (4.1.10)$$

#### Algebraic tensorial type

- i) Spatial scalar:  $\alpha, \tau_0^0$
- ii) Spatial vector:  $\beta_i, \tau_0^i$
- iii) Spatial tensor:  $h_{ij}, \tau_j^i$

**Decomposition of a vector** Let  $\hat{D}$  be the covariant derivative on the constant curvature space  $\mathcal{K}$ . Then a vector field  $v_i$  on  $\mathcal{K}$  can be decomposed as

$$v_i = \hat{D}_i v^{(s)} + v_i^{(t)}; \quad (4.1.11a)$$

$$\hat{D}_i v^{(t)i} = 0, \quad (4.1.11b)$$

$$\hat{\Delta} v^{(s)} = \hat{D}_i v^i. \quad (4.1.11c)$$

**Decomposition of a tensor** Any symmetric tensor field of rank 2 on  $\mathcal{K}$  can be decomposed as

$$t_{ij} = \frac{1}{n}tg_{ij} + \hat{D}_i\hat{D}_js - \frac{1}{n}\hat{\Delta}sg_{ij} + \hat{D}_it_j + \hat{D}_jt_i + t_{ij}^{(tt)}; \quad (4.1.12a)$$

$$\hat{D}_it^i = 0, \quad t_i^{(tt)i} = 0, \quad \hat{D}_it_j^{(tt)i} = 0, \quad (4.1.12b)$$

$$t = t^i_i, \quad (4.1.12c)$$

$$\hat{\Delta}(\hat{\Delta} + nK)s = \frac{n}{n-1} \left( \hat{D}_i\hat{D}_jt^{ij} - \frac{1}{n}\hat{\Delta}t \right), \quad (4.1.12d)$$

$$[\hat{\Delta} + (n-1)K]t^i = (\delta_j^i - \hat{D}^i\hat{\Delta}^{-1}\hat{D}_j)(\hat{D}_mt^{jm} - n^{-1}\hat{D}^jt). \quad (4.1.12e)$$

**Note** When  $\mathcal{K}$  is compact and closed, this decomposition is well-defined. On the other hand, when  $\mathcal{K}$  is not compact, appropriate boundary conditions should be imposed on perturbation variables to make the decomposition well-define.

### Irreducible type

- i) Scalar type:  $v^i = \hat{D}^iv^{(s)}$ ,  $t_{ij} = \frac{1}{n}tg_{ij} + \hat{D}_i\hat{D}_js - \frac{1}{n}\hat{\Delta}sg_{ij}$ .
- ii) Vector type:  $v_i = v_i^{(t)}$ ,  $t = \hat{D}_it_j + \hat{D}_jt_i$ .
- iii) Tensor type:  $v^i = 0$ ,  $t_j^i = t_j^{(tt)i}$ .

In the linearised Einstein equations, through the covariant differentiation and tensor-algebraic operations, quantities of different algebraic tensorial types can appear in each equation. However, in the case in which  $\mathcal{K}$  is a constant curvature space, perturbation variables belonging to different irreducible tensorial types do not couple in the linearised Einstein equations, because there exists no quantity of the vector or the tensor type in the background except for the metric tensor. The same result holds even in the case in which  $\mathcal{K}$  is an Einstein space with non-constant curvature, because the only non-trivial background tensor other than the metric is the Weyl tensor that can only transform a 2nd rank tensor to a 2nd rank tensor.



---

## §4.2

---

### テンソル型摂動

---

#### 4.2.1 Tensor harmonics

**Definition** We define  $\mathbb{T}_{ij}$  as a generalised harmonic tensor that satisfies the condition

$$(\hat{\Delta}_L - \lambda_L)\mathbb{T}_{ij} = 0; \quad \mathbb{T}_i^i = 0, \quad \hat{D}_j \mathbb{T}_i^j = 0, \quad (4.2.1)$$

where  $\hat{\Delta}_L$  is the Lichnerowicz operator on  $\mathcal{K}$  defined by

$$\hat{\Delta}_L h_{ij} := -\hat{D} \cdot \hat{D} h_{ij} - 2\hat{R}_{ikjl} h^{kl} + 2(n-1)K h_{ij}. \quad (4.2.2)$$

When  $\mathcal{K}$  is a constant curvature space, this operator is related to the Laplace-Beltrami operator by

$$\hat{\Delta}_L = -\hat{\Delta} + 2nK. \quad (4.2.3)$$

Hence,  $\mathbb{T}_{ij}$  satisfies

$$(\hat{\Delta} + k^2)\mathbb{T}_{ij} = 0; \quad k^2 = \lambda_L - 2nK. \quad (4.2.4)$$

#### 4.2.2 Perturbation equations

**Harmonic expansion** Tensor type perturbations of the metric and the energy-momentum tensor can be expanded in terms of the tensor harmonics as

$$h_{00} = 0, \quad h_{0i} = 0, \quad h_{ij} = 2r^2 H_T \mathbb{T}_{ij}, \quad (4.2.5)$$

$$\tau_0^0 = 0, \quad \tau_0^i = 0, \quad \tau_j^i = \tau_T \mathbb{T}_j^i, \quad (4.2.6)$$

**Gauge-invariance** An infinitesimal coordinate transformation is represented as a vector field and has no tensor-type component:

$$\xi^M = \bar{\delta} z^M = 0 \quad (4.2.7)$$

Hence, the perturbation variables  $H_T$  and  $\tau_T$  are gauge invariant by themselves:

$$\bar{\delta} H_T = 0, \quad \bar{\delta} \tau_T = 0. \quad (4.2.8)$$

**Einstein equations** Only the  $(i, j)$ -component can have a tensor-type component. From

$$\delta G_0^0 = \delta G_j^0 = \delta G_0^i = 0, \quad (4.2.9a)$$

$$\delta G_j^i = \left[ \ddot{H}_T + n \frac{\dot{a}}{a} \dot{H}_T + \frac{k^2 + 2K}{a^2} H_T \right] \mathbb{T}_j^i, \quad (4.2.9b)$$

we obtain the single equation

$$\ddot{H}_T + n \frac{\dot{a}}{a} \dot{H}_T + \frac{k^2 + 2K}{a^2} H_T = \kappa^2 \tau_T. \quad (4.2.10)$$

### 4.2.3 Behavior of cosmological tensor perturbations

For  $\tau_T = 0$ , we have

$$\ddot{H}_T + n \frac{\dot{a}}{a} \dot{H}_T + \frac{k^2 + 2K}{a^2} H_T = 0. \quad (4.2.11)$$

This equation is equivalent to

$$(a^{n/2} H_T)'' + \left[ \frac{k^2 + 2K}{a^2} - \frac{n \ddot{a}}{2a} - \frac{n(n-2)}{4} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] (a^{n/2} H_T) = 0 \quad (4.2.12)$$

or with the help of the relation

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + (n-2 + nw) \left[ \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right] = 0; \quad w = P/\rho, \quad (4.2.13)$$

to

$$(a^{n/2} H_T)'' + \left[ \frac{k^2 + 2K}{a^2} + \frac{n^2 w}{4} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{n(n-2 + nw)K}{4a^2} \right] (a^{n/2} H_T) = 0. \quad (4.2.14)$$

From these equations, we see that for superhorizon modes with  $k/a, \sqrt{|K|}/a \ll \dot{a}/a$ ,  $H_T$  can be approximated by

$$H_T \simeq A + B \int \frac{dt}{a^n}, \quad (4.2.15)$$

while for subhorizon modes the WKB approximation gives

$$H_T \simeq a^{-(n-1)/2} (C \cos \Omega + D \sin \Omega); \quad \Omega = k \int \frac{dt}{a}. \quad (4.2.16)$$

Hence, roughly speaking, a tensor perturbation, i.e., a gravitational wave, has a constant amplitude on superhorizons, and exhibits slowly damped oscillations after it enters the horizon.

---

## §4.3

---

### スカラ型摂動

---

#### 4.3.1 スカラ型調和テンソル

##### Harmonic scalars

$$(\hat{\Delta} + k^2)\mathbb{S} = 0. \quad (4.3.1)$$

##### Harmonic vectors

$$\mathbb{S}_i = -\frac{1}{k}\hat{D}_i\mathbb{S}, \quad (4.3.2)$$

$$[\hat{\Delta} + k^2 - (n-1)K]\mathbb{S}_i = 0, \quad (4.3.3)$$

$$\hat{D}_i\mathbb{S}^i = k\mathbb{S}. \quad (4.3.4)$$

##### Harmonic tensors

$$\mathbb{S}_{ij} = \frac{1}{k^2}\hat{D}_i\hat{D}_j\mathbb{S} + \frac{1}{n}\gamma_{ij}\mathbb{S}, \quad (4.3.5)$$

$$\mathbb{S}_i^i = 0, \quad \hat{D}_j\mathbb{S}_i^j = \frac{n-1}{n}\frac{k^2 - nK}{k}\mathbb{S}_i, \quad (4.3.6)$$

$$[\hat{\Delta} + k^2 - 2nK]\mathbb{S}_{ij} = 0. \quad (4.3.7)$$

##### Properties

1. Spectrum: When  $\mathcal{K}^n$  is a compact Einstein space satisfying

$$R_{ij} = (n-1)Kg_{ij}$$

for  $Q_{ij}$  defined by

$$Q_{ij} := D_i D_j Y - \frac{1}{n}g_{ij}\Delta Y,$$

we have

$$Q_{ij}Q^{ij} = D^i(D^i Y D_i D_j Y - Y D_i \Delta Y - R_{ij} D^j Y) + Y[\Delta(\Delta + (n-1)K)]Y - \frac{1}{n}(\Delta Y)^2.$$

From this, we obtain the following constraint on the spectrum of  $k^2$ :

$$k^2 \geq \begin{cases} nK & K > 0 \\ 0 & K \leq 0 \end{cases} \quad (4.3.8)$$

2. For  $\mathcal{K}^n = S^n$ ,

$$k^2 = \ell(\ell + n - 1), \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.3.9)$$

3. Exceptional modes:

i)  $k = 0$ :  $\mathbb{S}_i \equiv 0, \mathbb{S}_{ij} \equiv 0$  (compact case).

ii)  $k^2 = nK$ :  $\mathbb{S}_{ij} \equiv 0$  ( $K > 0$ ).

### 4.3.2 計量摂動のゲージ不変量

スカラー型摂動は、調和関数で展開すると次のように表される：

$$h_{00} = -2A\mathbb{S}, \quad h_{0i} = -aB\mathbb{S}_i, \quad h_{ij} = 2a^2(H_L\gamma_{ij}\mathbb{S} + H_T\mathbb{S}_{ij}). \quad (4.3.10)$$

For the scalar-type gauge transformation

$$\xi^0 = T\mathbb{S}, \quad \xi_i = aL\mathbb{S}_i, \quad (4.3.11)$$

the metric perturbation coefficients transform as

$$\bar{\delta}A = -\dot{T}, \quad (4.3.12a)$$

$$\bar{\delta}B = a(L/a)\dot{} + \frac{k}{a}T, \quad (4.3.12b)$$

$$\bar{\delta}H_L = -\frac{k}{na}L - \frac{\dot{a}}{a}T, \quad (4.3.12c)$$

$$\bar{\delta}H_T = \frac{k}{a}L. \quad (4.3.12d)$$

From this, it follows that the combination

$$\mathcal{R} := H_L + \frac{1}{n}H_T \quad (4.3.13)$$

transform simply as

$$\bar{\delta}\mathcal{R} = -\frac{\dot{a}}{a}T. \quad (4.3.14)$$

This quantity is related to the perturbation of the scalar curvature of the  $t = \text{const}$  hypersurface as

$$\delta^n R = 2(n-1)a^{-2}(k^2 - nK)\mathcal{R}\mathbb{S}. \quad (4.3.15)$$

We can construct the combinations

$$\sigma_g := \frac{a}{k}\dot{H}_T - B, \quad (4.3.16)$$

$$\mathcal{K}_g := -A + \frac{k}{n\dot{a}}B + \frac{a}{\dot{a}}\dot{H}_L, \quad (4.3.17)$$

which transform similarly

$$\bar{\delta}\sigma_g = -\frac{k}{a}T, \quad (4.3.18)$$

$$\bar{\delta}\mathcal{K}_g = \frac{a}{\dot{a}} \left[ \frac{k^2}{na^2} - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) \cdot \right] T. \quad (4.3.19)$$

These quantities are related to the shear and the expansion of the unit normal  $\tilde{N}^\mu$  to the  $t = \text{const}$  hypersurface ( $\delta N_0 = -A\mathbb{S}$ ,  $\delta N_i = 0$ ) as

$$\delta\theta = n\frac{\dot{a}}{a}\mathcal{K}_g\mathbb{S}, \quad (4.3.20a)$$

$$\delta\sigma_{ij} = ak\sigma_g\mathbb{S}_{ij}, \quad \delta\sigma_{0\mu} = 0, \quad (4.3.20b)$$

$$\delta\omega_{\mu\nu} = 0, \quad (4.3.20c)$$

$$\delta a_j = -kA\mathbb{S}_j, \quad \delta a_0 = 0. \quad (4.3.20d)$$

Hence,  $\mathcal{K}_g$  and  $\sigma_g$  represents the perturbation of the volume expansion rate and the anisotropic expansion rate of the universe. Further,  $A$  represents the perturbation of the potential.

Utilising these transformation laws, we can easily construct two independent gauge-invariant combinations as

$$\mathcal{A} := A - [(\dot{a}/a)^{-1}\mathcal{R}], \quad (4.3.21a)$$

$$\mathcal{B} := \frac{k}{\dot{a}}\mathcal{R} - \sigma_g. \quad (4.3.21b)$$

We can construct any gauge invariant for the metric perturbation as a linear combination of these. For example, the following combinations are useful:

$$\Phi := \frac{\dot{a}}{k}\mathcal{B} = \mathcal{R} - \frac{\dot{a}}{k}\sigma_g, \quad (4.3.22a)$$

$$\Psi := \mathcal{A} + \frac{1}{k}(a\mathcal{B})\cdot = A - \frac{(a\sigma_g)\cdot}{k}, \quad (4.3.22b)$$

$$\mathcal{C} := -\mathcal{A} + \frac{a^2}{k\dot{a}}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\cdot\mathcal{B} = \mathcal{K}_g - \frac{a^2}{k\dot{a}}\left\{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\cdot - \frac{k^2}{na^2}\right\}\sigma_g. \quad (4.3.22c)$$

In the shear-free gauge  $\sigma_g = 0$ , these quantities represents the perturbation of the spatial scalar curvature, the gravitational potential and the Hubble expansion rate, respectively.

### 4.3.3 物質摂動に対するゲージ不変量

エネルギー運動量テンソルのスカラ型摂動は、次のように調和関数で展開される：

$$\tau_0^0 = -\rho\epsilon\mathbb{S}, \quad \tau_0^i = -\frac{1}{a}(\rho + P)v\mathbb{S}^i, \quad \tau_j^i = \delta\tau_L\delta_j^i\mathbb{S} + \tau_T\mathbb{S}_j^i. \quad (4.3.23)$$

The perturbation variables for matter transform as

$$\bar{\delta}\epsilon = n(1+w)\frac{\dot{a}}{a}T, \quad (4.3.24a)$$

$$\bar{\delta}\tau_L = nc_s^2(\rho + P)\frac{\dot{a}}{a}T, \quad (4.3.24b)$$

$$\bar{\delta}v = a(L/a)\dot{\phantom{v}}, \quad (4.3.24c)$$

$$\bar{\delta}\tau_T = 0. \quad (4.3.24d)$$

We can construct various gauge-invariant quantities from these matter variables and the metric variables. For example, as gauge-invariant variables representing the energy density perturbation, we can define

$$\Delta_s := \epsilon + n(1+w)\frac{\dot{a}}{k}\sigma_g, \quad (4.3.25a)$$

$$\Delta_g := \epsilon + n(1+w)\mathcal{R} = \Delta_s + n(1+w)\Phi, \quad (4.3.25b)$$

$$\Delta := \epsilon + n(1+w)\frac{\dot{a}}{k}(v - B) = \Delta_s + n(1+w)\frac{\dot{a}}{k}V. \quad (4.3.25c)$$

Similarly, we can construct a natural gauge-invariant quantity representing the velocity perturbation by

$$V := v - \frac{a}{k}\dot{H}_T. \quad (4.3.26)$$

This quantity is closely related to the shear of the fluid velocity field. In fact, for the fluid velocity, we have

$$\delta\theta = n\frac{\dot{a}}{a}\mathcal{K}_m\mathbb{S}, \quad (4.3.27a)$$

$$\delta\sigma_{ij} = -akV\mathbb{S}_{ij}, \quad \delta\sigma_{0\mu} = 0, \quad (4.3.27b)$$

$$\delta\omega_{\mu\nu} = 0, \quad (4.3.27c)$$

$$\delta a_j = -k\mathcal{A}_m\mathbb{S}_j, \quad \delta a_0 = 0, \quad (4.3.27d)$$

where

$$\mathcal{K}_m := -A + \frac{a}{\dot{a}}\dot{H}_L + \frac{k}{n\dot{a}}v, \quad (4.3.28a)$$

$$\mathcal{A}_m := A - \frac{1}{k}[a(v - B)]\dot{\phantom{v}}. \quad (4.3.28b)$$

Here,  $\mathcal{A}_m$  is gauge invariant as

$$\mathcal{A}_m = \Psi - \frac{1}{k}(aV)\dot{\phantom{v}}. \quad (4.3.29)$$

In contrast,  $\mathcal{K}_m$  is not gauge-invariant and transforms as

$$\bar{\delta}\mathcal{K}_m = -\frac{a}{\dot{a}}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\phantom{v}}T. \quad (4.3.30)$$

A natural gauge invariant constructed from this is

$$\mathcal{C}_m := \mathcal{H}_m - \frac{a^2}{k\dot{a}} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) \cdot \sigma_g = \mathcal{C} + \frac{k}{n\dot{a}} V. \quad (4.3.31)$$

Finally, we can construct a gauge-invariant combinations using only matter variables:

$$\Gamma := \tau_L - c_s^2 \rho \epsilon. \quad (4.3.32)$$

#### 4.3.4 Einstein 方程式

(*tt*)-component:

$$n \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Phi} + \frac{k^2 - nK}{a^2} \Phi - n \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \Psi = \frac{\kappa^2}{n-1} \rho \Delta_s. \quad (4.3.33)$$

(*ti*)-component:

$$\frac{k}{a} \left( \dot{\Phi} - \frac{\dot{a}}{a} \Psi \right) = -\frac{\kappa^2}{n-1} (\rho + P)V. \quad (4.3.34)$$

(*ij*)-component:

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi} + n \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Phi} + \frac{n-2}{n} \frac{k^2 - nK}{a^2} \Phi + \left[ \frac{k^2}{na^2} - (n-2) \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - 2 \frac{\ddot{a}}{a} \right] \Psi \\ = \frac{\kappa^2}{n-1} (\Gamma + c_s^2 \rho \Delta_s), \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

$$(n-2)\Phi + \Psi = -\frac{a^2}{k^2} \kappa^2 \tau_T. \quad (4.3.36)$$

From (4.3.33)-(4.3.34), we obtain the Poisson equation

$$\frac{k^2 - nK}{a^2} \Phi = \frac{\kappa^2}{n-1} \rho \Delta. \quad (4.3.37)$$

These equations lead to the closed evolution equations for the density and the velocity perturbations:

$$(a^n \rho \Delta) \cdot = -C_K a^{n-1} k (\rho + P)V - (n-1) C_K a^{n-1} \dot{a} \tau_T, \quad (4.3.38a)$$

$$(\rho + P)(aV) \cdot = k(c_s^2 \rho \Delta + \Gamma) + k(\rho + P)\Psi - k C_K \frac{n-1}{n} \tau_T. \quad (4.3.38b)$$

Here,  $C_K = 1 - nK/k^2$ .

Note that  $V$  appears only in the combination  $(\rho + P)V$  in the Einstein equation. Hence, this quantity may not vanish and has a definite meaning even if  $\rho + P = 0$ . In fact, the left-hand side of the equation for  $V$  can be written

$$(\rho + P)(aV) \cdot = [a(\rho + P)V] \cdot + n(1 + c_s^2) \frac{\dot{a}}{a} [a(\rho + P)V] \quad (4.3.39)$$

### 4.3.5 ゲージ固定法との関係

**Synchronous gauge** :  $A = 0, B = 0$ .

In this gauge, the fundamental gauge invariants are expressed as

$$\Phi = \mathcal{R} - \frac{\dot{a}}{k}\sigma_g, \quad \Psi = -\frac{1}{k}(a\sigma_g)', \quad (4.3.40a)$$

$$\Delta = \epsilon + n(1+w)\frac{\dot{a}}{k}v, \quad V = v - \sigma_g, \quad (4.3.40b)$$

$$\sigma_g = \frac{a}{k}\dot{H}_T, \quad \mathcal{R} = H_L + \frac{1}{n}H_T. \quad (4.3.40c)$$

Hence, this is a partial gauge fixing and leaves the residual gauge freedom parametrised by two arbitrary constants for each mode as

$$\bar{\delta}\sigma_g = \frac{C_1}{a}, \quad \bar{\delta}\mathcal{R} = C_1\frac{\dot{a}}{ka}, \quad (4.3.41a)$$

$$\bar{\delta}H_T = C_2 + kC_1\int\frac{dt}{a^2}, \quad \bar{\delta}H_L = -\frac{C_2}{n} - C_1\left(\frac{\dot{a}}{ka} + \frac{k}{n}\int\frac{dt}{a^2}\right), \quad (4.3.41b)$$

$$\bar{\delta}\epsilon = -n(1+w)\frac{\dot{a}}{ka}C_1, \quad \bar{\delta}v = -\frac{C_1}{a}. \quad (4.3.41c)$$

**Longitudinal gauge** :  $B = 0, H_T = 0$

From the gauge transformation law

$$\bar{\delta}B = a\left(\frac{L}{a}\right)' + \frac{k}{a}T, \quad \bar{\delta}H_T = \frac{k}{a}L, \quad (4.3.42)$$

This is a complete gauge. In this gauge,

$$\mathcal{R} = H_L, \quad \sigma_g = 0, \quad (4.3.43)$$

and the fundamental gauge invariants are expressed as

$$\Phi = H_L, \quad \Psi = A, \quad (4.3.44a)$$

$$\Delta = \epsilon + n(1+w)\frac{\dot{a}}{k}v, \quad V = v. \quad (4.3.44b)$$

In particular, the metric is written in terms of the gauge invariants  $\Psi$  and  $\Phi$  as

$$ds^2 = -(1 + 2\Psi\mathbb{S})dt^2 + a^2(1 + 2\Phi\mathbb{S})d\sigma_n^2. \quad (4.3.45)$$

**Velocity-orthogonal isotropic gauge** :  $v = B, H_T = 0$

From the gauge transformation law

$$\bar{\delta}(v - B) = -\frac{k}{a}T, \quad \bar{\delta}H_T = \frac{k}{a}L, \quad (4.3.46)$$



this is also a complete gauge. In this gauge, we have

$$\Phi = H_L + \frac{\dot{a}}{k}B, \quad \Psi = A + \frac{(aB)'}{k}, \quad (4.3.47a)$$

$$\Delta = \epsilon, \quad V = v = B = -\sigma_g. \quad (4.3.47b)$$

In particular,

$$\mathcal{R} = \Phi - \frac{\dot{a}}{k}V \equiv Z. \quad (4.3.48)$$

### 4.3.6 エントロピー摂動

When matter consists of photons and dust (baryons), the pressure and the energy density of matter can be written

$$\rho = \rho_r + \rho_d, \quad P = \frac{1}{n}\rho_r, \quad (4.3.49)$$

which yields

$$c_s^2 = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{n}{n+1}\frac{\rho_d}{\rho_r}}, \quad (4.3.50)$$

Hence, the gauge-invariant  $\Gamma$  is expressed as

$$\Gamma = c_s^2 \rho_d \left( \frac{n}{n+1} \frac{\delta\rho_r}{\rho_r} - \frac{\delta\rho_d}{\rho_d} \right). \quad (4.3.51)$$

Utilising the relations

$$\rho_r \propto T_r^{n+1}, \quad s_r \propto T_r^n, \quad \rho_d \propto n_b \quad (4.3.52)$$

where  $s_r$  and  $n_b$  are the entropy density of radiation and the number density of dust,  $\Gamma$  can be written

$$\Gamma = \frac{n+1}{n} \frac{\rho_d \rho_r}{n\rho + \rho_r} \left( \frac{\delta s_r}{s_r} - \frac{n_b}{n_b} \right) \rho \propto \frac{\delta(s_r/n_b)}{(s_r/b)} \frac{\rho_d \rho_r}{\rho} \quad (4.3.53)$$

Thus,  $\Gamma$  is roughly proportional to the perturbation of the photon-baryon ratio, i.e., the entropy per baryon, in this case with the weight proportional to the product of component densities.

This implies that  $\Gamma$  is of the order

$$\frac{|\Gamma|}{\rho} \sim \mathcal{O}\left(\frac{\rho_r \rho_d}{\rho^2} |\Delta|\right) \quad (4.3.54)$$

unless there is a delicate cancelation of fluctuations of component densities to make  $\Delta$  vanish with  $\Gamma \neq 0$  (cf. Isocurvature perturbations). Further, the influence of  $\Gamma$  becomes important only when the EOS of matter changes.

### 4.3.7 断熱モード

断熱モード ( $\Gamma = 0$ ) に対して,

$$\frac{d^2}{da^2}(fa^n\rho\Delta) + \frac{1}{a^2} \left[ C_K c_s^2 \left( \frac{k}{aH} \right)^2 - \frac{n-2}{n-1} \frac{\kappa^2(\rho+P)}{H^2} - a^2 \frac{f_{aa}}{f} \right] (fa^n\rho\Delta) = 0, \quad (4.3.55)$$

ここで,

$$f = \left( \frac{H}{a^{n-3}(\rho+P)} \right)^{1/2}. \quad (4.3.56)$$

### 4.3.8 ホライズン内の摂動

波長がホライズン半径より小さい場合,

$$c_s k/aH \gg 1, \quad c_s k \gg K \quad (4.3.57)$$

WKB 近似で

$$fa^n\rho\Delta \sim \left( \frac{kc_s}{a^2H} \right)^{-1/2} \exp i \int da \frac{c_s k}{a^2H}. \quad (4.3.58)$$

これより, 密度ゆらぎは

$$\Delta \simeq \left( \frac{1+w}{c_s a^{n+1} \rho} \right)^{1/2} (A \cos \theta + B \sin \theta); \quad \theta = k \int \frac{dt}{a} c_s \quad (4.3.59)$$

と振る舞う.

例えば, 物質が輻射とダストからなるとき,

- 輻射優勢時期:  $w \simeq c_s^2 = 1/n, \rho \propto 1/a^{n+1} \Rightarrow \Delta$  は一定の振幅を持つ.
- 物質優勢時期
  - 水素再結合前  $w, c_s^2 \propto 1/a, \rho \propto 1/a^n \Rightarrow \Delta$  の振幅  $\propto 1/a^{1/4}$ .
  - 水素中性化以降:  $\Delta \propto a^{n-2}$ .
- 曲率の支配的な時期:  $\Delta$  は一定.

### 4.3.9 曲率優勢時でのゆらぎの時間発展

$w = c_s^2 = 0, K < 0$  とする. 曲率優勢時期では

$$H^2 \simeq -\frac{K}{a^2}, \quad f \propto a \quad (4.3.60)$$

より，発展方程式は近似的に

$$\frac{d^2}{da^2}(fa^n\rho\Delta) \simeq 0. \quad (4.3.61)$$

したがって

$$\Delta \simeq C_1 + \frac{C_2}{a}. \quad (4.3.62)$$

### 4.3.10 ホライズンを超える波長のゆらぎ

条件

$$|K|/(H^2a^2) \ll 1, \quad k \gg |K|, \quad \tau_T = 0, \quad (4.3.63)$$

を仮定する．このとき，摂動方程式は

$$\mathcal{A} := A - (\mathcal{R}/H) \cdot = \Psi - (\Phi/H) \cdot, \quad (4.3.64)$$

$$Z := \mathcal{R} - \frac{aH}{k}(v - B) = \Phi - \frac{aH}{k}V \quad (4.3.65)$$

を用いて，

$$\mathcal{A} = -\frac{n}{2}(1+w)Z, \quad (4.3.66)$$

$$\frac{\dot{Z}}{H} = -\frac{2c_s^2}{n(1+w)} \left(\frac{k}{aH}\right)^2 \Phi - \frac{\Gamma}{\rho + P}. \quad (4.3.67)$$

これより，

$$\Gamma = O(\Delta) = O((k^2/a^2)\Phi), \quad (4.3.68)$$

を仮定すると，

$$\frac{\dot{Z}}{H} = O\left(c_s^2 \frac{k^2}{a^2 H^2}\right). \quad (4.3.69)$$

よって， $c_s^2(k/aH)^2 \ll 1$  のとき  $Z$  は定数となる．

このとき，関係式  $\Psi = -(n-2)\Phi$  と  $\mathcal{A}$  の定義より，

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{a^{n-2}} \left(\frac{a^{n-2}\Phi}{H}\right) \cdot. \quad (4.3.70)$$

$\Phi$  について解くと，

$$\Phi = \frac{H}{a^{n-2}} \left[ C + \frac{n}{2} \int dt(1+w)a^{n-2}Z \right]. \quad (4.3.71)$$

さらに，関係式

$$\Delta = \frac{1}{n} \left(\frac{k}{aH}\right)^2 \Phi, \quad V = -\frac{k}{aH}(Z - \Phi), \quad (4.3.72)$$

$$\dot{H} = -\frac{n}{2}(1+w)H^2 \quad (4.3.73)$$

を用いると

$$\Phi \simeq C \frac{H}{a^{n-2}} + Z \left( 1 - (n-2) \frac{H}{a^{n-2}} \int da \frac{a^{n-3}}{H} \right), \quad (4.3.74a)$$

$$\Delta \simeq C \frac{k^2}{nHa^n} + \frac{1}{n} \left( \frac{k}{aH} \right)^2 Z \left( 1 - (n-2) \frac{H}{a^{n-2}} \int da \frac{a^{n-3}}{H} \right), \quad (4.3.74b)$$

$$V \simeq C \frac{k}{a^{n-1}H} - (n-2)Z \frac{k}{a^{n-1}} \int da \frac{a^{n-3}}{H}. \quad (4.3.74c)$$

例えば,  $w = \text{const}$  のとき,

$$\rho \propto a^{-n(1+w)} \Rightarrow H \propto a^{-n(1+w)/2} \quad (4.3.75)$$

および

$$\int da \frac{a^{n-3}}{H} = \frac{2}{n(3+w)-4} \frac{a^{n-2}}{H} \quad (4.3.76)$$

より,

$$\Phi \simeq C \frac{H}{a^{n-2}} + \frac{n(1+w)}{n(3+w)-4} Z, \quad (4.3.77a)$$

$$\Delta \simeq C \frac{k^2}{na^n H} + \frac{1+w}{n(3+w)-4} \left( \frac{k}{aH} \right)^2 Z, \quad (4.3.77b)$$

$$V \simeq C \frac{k}{a^{n-1}H} - \frac{2(n-2)}{n(3+w)-4} \left( \frac{k}{aH} \right) Z. \quad (4.3.77c)$$

いくつかの場合, superhorizon 摂動に対して厳密解がある. 例えば, 4次元ダスト ( $n=3$ ) に対し,

$$\Delta = AU_G + BU_D, \quad (4.3.78)$$

ここで,  $U_D$  と  $U_G$  は次式で与えられる  $\zeta = a/a_{\text{eq}}$  の関数:

$$U_D = \frac{1}{\zeta(1+\zeta)^{1/2}}, \quad (4.3.79a)$$

$$U_G = \zeta + \frac{8-7\zeta}{9(1+\zeta)} - \frac{16}{9} \frac{1}{1+\zeta + (1+\zeta)^{1/2}} \quad (4.3.79b)$$

近似的に

$$U_G \approx \begin{cases} 10\zeta^2/9 & ; \zeta \ll 1, \\ \zeta & ; \zeta \gg 1 \end{cases} \quad (4.3.80a)$$

## 4.3.11 宇宙項の効果

ダスト ( $c_s^2 = 0$ ) の場合,  $\Lambda \neq 0$  でも摂動方程式は厳密解をもつ. 実際, 非等方圧力摂動がないとすると, 摂動方程式は

$$H\dot{\mathcal{A}} + (2\dot{H} + nH^2)\mathcal{A} = 0, \quad (4.3.81a)$$

$$\mathcal{A} + \frac{1}{a^{n-2}} \left( \frac{a^{n-2}}{H} \Phi \right)' = 0, \quad (4.3.81b)$$

$$A + \frac{n}{2}Z - \frac{K}{a^2 H^2} \Phi = 0, \quad (4.3.81c)$$

$$\Delta = \frac{(n-1)(k^2 - nK)}{\kappa^2 a^2 \rho} \Phi. \quad (4.3.81d)$$

最初の式より

$$\mathcal{A} = \frac{C_0}{a^n H^2}, \quad (4.3.82)$$

ここで,  $C_0$  は積分定数. この式を他の方程式に代入して解くと

$$\Phi = \frac{H}{a^{n-2}} \left( C_1 - C_0 \int \frac{dt}{a^2 H^2} \right), \quad (4.3.83a)$$

$$Z = \frac{2K}{na^n H} C_1 - \frac{2C_0}{na^n H^2} \left( 1 + KH \int \frac{dt}{a^2 H^2} \right). \quad (4.3.83b)$$

$$\Delta = \frac{(n-1)(k^2 - nK)H}{n^2 a^n \rho} \left( C_1 - C_0 \int \frac{dt}{a^2 H^2} \right), \quad (4.3.83c)$$

$$V = \frac{k}{a^{n-1} H} \left( 1 - \frac{2K}{n\dot{a}^2} \right) C_1 + \frac{kC_0}{na^{n+1} H^3} \left\{ 2 - (na^2 H^2 - 2K) \int \frac{dt}{a^2 H^2} \right\}. \quad (4.3.83d)$$

明らかに,  $C_0$  に比例する項は減衰モードを表し,  $C_1$  に比例する項は成長モードを表す. 宇宙項が支配的となると, ゆらぎの振幅は一定値に漸近する.

---

 §4.4
 

---

 多成分系への拡張
 

---

## 参考文献

- Kodama H, Sasaki M: *Cosmological Perturbation Theory*, Prog. Theor. Phys. Suppl. 78, 1-166 (1984).
- Kodama H: *Generation and evolution of the density fluctuation in the evolving universe. I. - The effect of weak transient phenomena -*, Prog. Theor. Phys. **71**, 946-959 (1984).
- Kodama H: *Generation and evolution of the density fluctuation in the evolving universe. II. - The radiation-dust universe -* Prog. Theor. Phys. **73**, 674-682 (1985).
- Kodama H. and Sasaki M.: *Evolution of isocurvature perturbations I: Photon-baryon universe*, Int. J. Mod. Phys. **A1**, 265-301 (1986).
- Kodama H. and Sasaki M.: *Evolution of isocurvature perturbations II. Radiation-dust universe* Int. J. Mod. Phys. **A2**, 491-560 (1987).
- Kodama H, Hamazaki T: *Evolution of Cosmological Perturbations in the Long Wavelength Limit*, Phys. Rev. **D57**, 7177-85 (1998).

## 4.4.1 Multi-Component Fluid System

In this section, we assume that the cosmic matter consists of multiple components labeled by the index  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ ,  $\dots$ . We only consider the scalar-type perturbation.

**Perturbation variables for each component** The scalar perturbation of the energy-momentum tensor of each component can be expanded in terms of the scalar harmonics as

$$\delta T_{(\alpha)\nu}^{\mu} = \tau_{(\alpha)\nu}^{\mu} : \quad \tau_{(\alpha)0}^0 = -\rho_{\alpha}\epsilon_{\alpha}\mathbb{S}, \quad \tau_{(\alpha)0}^j = -\frac{1}{a}h_{\alpha}v_{\alpha}\mathbb{S}^j, \quad \tau_{(\alpha)j}^i = \tau_{L\alpha}\delta_j^i\mathbb{S} + \tau_{T\alpha}\mathbb{S}_j^i, \quad (4.4.1)$$

where

$$h_{\alpha} = \rho_{\alpha} + P_{\alpha}. \quad (4.4.2)$$

These perturbation variables are related to those for the total system by

$$\rho\epsilon = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}\epsilon_{\alpha}, \quad hv = \sum_{\alpha} h_{\alpha}v_{\alpha}, \quad \tau_L = \sum_{\alpha} \tau_{L\alpha}, \quad \tau_T = \sum_{\alpha} \tau_{T\alpha}. \quad (4.4.3)$$

In contrast to the whole system, the energy-momentum tensor of each component does not need to be conserved separately due to interactions among components:

$$\tilde{\nabla}^{\nu}\tilde{T}_{(\alpha)\mu\nu} = \tilde{Q}_{(\alpha)\mu}, \quad (4.4.4)$$

where the source terms have to satisfy

$$\sum_{\alpha} \tilde{Q}_{(\alpha)\mu} = 0. \quad (4.4.5)$$

In the background, these source terms take the form

$$(Q_{(\alpha)\mu}) = (-Q_{\alpha}, \mathbf{0}) \quad (4.4.6)$$

due to isotropy, and accordingly, the energy equation can be written

$$\dot{\rho}_{\alpha} = -n\frac{\dot{a}}{a}(1 - q_{\alpha})h_{\alpha} \quad (4.4.7)$$

where

$$q_{\alpha} := \frac{Q_{\alpha}}{n\frac{\dot{a}}{a}h_{\alpha}}. \quad (4.4.8)$$

Taking account of this modification, the gauge-invariant variables describing the perturbation of each component can be defined as follows:

$$V_{\alpha} := v_{\alpha} - \frac{a}{k}\dot{H}_T, \quad (4.4.9a)$$

$$\Delta_{c\alpha} := \epsilon_{\alpha} + n(1 + w_{\alpha})(1 - q_{\alpha})\frac{\dot{a}}{k}(v - B), \quad (4.4.9b)$$

$$\Gamma_{\alpha} := \tau_{L\alpha} - c_{\alpha}^2\epsilon_{\alpha}\rho_{\alpha}, \quad (4.4.9c)$$

$$\tau_{T\alpha}. \quad (4.4.9d)$$

These quantities are related to the corresponding quantities for the whole system by

$$\rho\Delta = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha}\Delta_{c\alpha}, \quad hV = \sum_{\alpha} h_{\alpha}V_{\alpha}, \quad (4.4.10a)$$

$$\Gamma = \Gamma_{\text{int}} + \Gamma_{\text{rel}}, \quad \tau_T = \sum_{\alpha} \tau_{T\alpha}, \quad (4.4.10b)$$

where

$$\Gamma_{\text{int}} = \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha}, \quad \Gamma_{\text{rel}} = \sum_{\alpha} (c_{\alpha}^2 - c_s^2)\delta\rho_{\alpha}. \quad (4.4.11)$$

**Perturbation variables for energy-momentum transfers** In order to write down the perturbation equation for each component, we have to introduce gauge-invariant variables describing the interactions. First, the scalar perturbation of transfer term can be written

$$\tilde{Q}_{(\alpha)\mu} = \tilde{Q}_\alpha \tilde{u}_\mu + \tilde{f}_{(\alpha)\mu}; \quad \tilde{u}^\mu \tilde{f}_{(\alpha)\mu} = 0, \quad (4.4.12)$$

$$\delta Q_\alpha = \eta_\alpha \mathbb{S}, \quad \delta f_{(\alpha)j} = a f_\alpha \mathbb{S}_j \quad (4.4.13)$$

Under the scalar-type gauge transformation,  $\eta_\alpha$  and  $f_\alpha$  transform as

$$\bar{\delta}\eta_\alpha = -T\dot{Q}_\alpha, \quad \bar{\delta}f_\alpha = 0. \quad (4.4.14)$$

Hence,  $f_\alpha$  is gauge invariant by itself, and a natural gauge-invariant for  $\eta_\alpha$  is

$$E_\alpha := \eta_\alpha - \frac{a}{k}\dot{Q}_\alpha(v_\alpha - B), \quad (4.4.15)$$

or

$$E_{c\alpha} := \eta_\alpha - \frac{a}{k}\dot{Q}_\alpha(v - B) = E_\alpha + \frac{a}{k}\dot{Q}_\alpha(V_\alpha - V). \quad (4.4.16)$$

These quantities have to satisfy the constraints

$$\sum_\alpha E_{c\alpha} = 0, \quad \sum_\alpha f_\alpha = 0. \quad (4.4.17)$$

**Equation of motion for each component** The scalar perturbation of the equations of motion for each component can be expressed in terms of the gauge-invariant variables defined above as

$$h_\alpha(aV_\alpha)^\cdot = kh_\alpha\Psi + k(c_\alpha^2\rho_\alpha\Delta_\alpha + \Gamma_\alpha) - \frac{n-1}{n}C_k k\tau_{T\alpha} + aF_\alpha, \quad (4.4.18a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^n}(a^n\rho_\alpha\Delta_\alpha)^\cdot &= \frac{n}{n-1}\frac{\kappa^2 ah}{k}h_\alpha(V - V_\alpha) - C_K\left[\frac{k}{a}h_\alpha V_\alpha + (n-1)\frac{\dot{a}}{a}\tau_{T\alpha}\right] \\ &+ E_\alpha + F_\alpha, \end{aligned} \quad (4.4.18b)$$

where

$$\Delta_\alpha = \Delta_{c\alpha} + n(1+w_\alpha)(1-q_\alpha)\frac{\dot{a}}{k}(V_\alpha - V), \quad (4.4.19)$$

$$F_\alpha = f_\alpha - Q_\alpha(V_\alpha - V). \quad (4.4.20)$$

### Adiabatic vs. Isocurvature Modes

**Evolution of entropy perturbations** In the case in which the energy transfer among components can be neglected, the relative contribution to  $\Gamma$  in the multi-component system can be written in terms of the relative entropy perturbation defined by

$$S_{\alpha\beta} = \frac{\Delta_{c\alpha}}{1+w_\alpha} - \frac{\Delta_{c\beta}}{1+w_\beta}, \quad (4.4.21)$$



as

$$\Gamma_{\text{rel}} = \sum_{\alpha,\beta} \frac{h_\alpha h_\beta}{2h} (c_\alpha^2 - c_\beta^2) S_{\alpha\beta}. \quad (4.4.22)$$

The perturbation equations for each component yield the following equations for  $S_{\alpha\beta}$ :

$$\dot{S}_{\alpha\beta} = -\frac{k}{a} V_{\alpha\beta} - n \frac{\dot{a}}{a} \Gamma_{\alpha\beta}, \quad (4.4.23a)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\alpha\beta} + \left(1 - \frac{n}{2}(c_\alpha^2 + c_\beta^2)\right) \frac{\dot{a}}{a} V_{\alpha\beta} - n(c_\alpha^2 - c_\beta^2) \frac{\dot{a}}{a} \sum_{\gamma \neq \alpha, \beta} \frac{h_\gamma}{2h} (V_{\alpha\gamma} + V_{\beta\gamma}) \\ = \frac{k}{a} \left[ (c_\alpha^2 - c_\beta^2) \left\{ \frac{\Delta}{1+w} + \sum_\gamma \frac{h_\gamma}{2h} (S_{\alpha\gamma} + S_{\beta\gamma}) \right\} + \frac{c_\alpha^2 + c_\beta^2}{2} S_{\alpha\beta} \right] \\ + F_{\alpha\beta} + \frac{k}{a} \left( \Gamma_{\alpha\beta} - C_K \frac{n-1}{n} \Pi_{\alpha\beta} \right), \end{aligned} \quad (4.4.23b)$$

where  $V_{\alpha\beta}$  is the relative velocity defined by

$$V_{\alpha\beta} = V_\alpha - V_\beta, \quad (4.4.24)$$

and

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \frac{\Gamma_\alpha}{h_\alpha} - \frac{\Gamma_\beta}{h_\beta}, \quad \Pi_{\alpha\beta} = \frac{\tau_{T\alpha}}{h_\alpha} - \frac{\tau_{T\beta}}{h_\beta}, \quad (4.4.25)$$

$$F_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{h_\alpha} - \frac{f_\beta}{h_\beta}. \quad (4.4.26)$$

For simplicity, let us assume that the intrinsic stress perturbations vanish:  $\Gamma_{\alpha\beta} = \Pi_{\alpha\beta} = 0$ . Then, from these equations, we find that in the strongly coupled era where  $V_{\alpha\beta} = 0$  due to the force  $F_{\alpha\beta}$ , the entropy perturbation  $S_{\alpha\beta}$  does not change. Even in the case of weakly coupled case when  $F_{\alpha\beta}$  can be neglected, the change of  $S_{\alpha\beta}$  is very small for superhorizon perturbations because

$$a \frac{d}{da} S_{\alpha\beta} = -\frac{k}{a} V_{\alpha\beta}, \quad (4.4.27a)$$

$$a \frac{d}{da} V_{\alpha\beta} + \left(1 - \frac{n}{2}(c_\alpha^2 + c_\beta^2)\right) V_{\alpha\beta} = \frac{k}{a} \mathcal{O}(\Delta, S) + \mathcal{O}(V). \quad (4.4.27b)$$

Here, note that  $k/\dot{a}$  is identical to the ratio of the Hubble radius to the perturbation wavelength.

**Generation of adiabatic perturbations** If there exist no entropy perturbation initially, e.g. in the early universe, the perturbation remains adiabatic until it enters the horizon irrespective of interactions, and continues to be adiabatic

even inside horizon if the fluid is strongly coupled. This is the situation where the concept of the adiabatic perturbation is good.

The situation is similar on superhorizon scale even if there exists non-vanishing entropy perturbation initially. In this case, however, the situation is subtle. In particular, the isocurvature perturbation for which the curvature perturbation amplitude  $\Phi$  vanishes initially generates a curvature perturbation with cosmic expansion. In fact, from the equation for  $Z$ , we have

$$\delta Z \simeq - \int \sum_{\alpha\beta} \frac{h_\alpha h_\beta}{2h^2} (c_\alpha^2 - c_\beta^2) S_{\alpha\beta} \frac{da}{a}. \quad (4.4.28)$$

For the photon-dust system, for example, this integral can be explicitly estimated as

$$\delta Z \simeq - \frac{\zeta}{4 + 3\zeta} S_{\gamma d}, \quad (4.4.29)$$

where  $\zeta$  is the cosmic scale factor normalised at the equal time  $\zeta = a/a_{\text{eq}}$ .

---

## §4.5

---

# Long-wavelength limit

---

Intuitively, we expect that the long-wavelength limit of solutions to the perturbation equations corresponds to spatially homogeneous perturbations of the background solution. We examine this correspondence for the spatially flat background universe ( $K = 0$ ).

### 4.5.1 Basic equations

**Basic variables** In order to see the correspondence between long-wavelength perturbations and spatially homogeneous perturbations, it is convenient to work in the longitudinal gauge  $B = H_T = 0$  or in terms of gauge-invariant quantities whose definition do not contain negative powers of the wavelength  $k$  in that gauge. Therefore, we adopt

$$\mathcal{A} = A - (\mathcal{R}/H), \quad \Phi = \mathcal{R} - \frac{aH}{k}\sigma_g \quad (4.5.1)$$

as the fundamental gauge-invariant variables for the metric perturbation. We further assume that matter perturbations are described by a set of scalar-type variables  $\chi_I$  and a set of vector-type variables  $v_P$ , whose gauge transformation laws are

$$\bar{\delta}\chi_I = -\dot{S}_I T, \quad \bar{\delta}v_P = a\dot{L}. \quad (4.5.2)$$

For these variables, we adopt the following gauge invariants:

$$X_I := \chi_I - \frac{\dot{S}_I}{H}\mathcal{R}, \quad V_P := v_P - \frac{a}{k}\dot{H}_T, \quad (4.5.3)$$

both of which have regular  $k \rightarrow 0$  limit in the longitudinal gauge. Finally, we use

$$\rho\Delta_g := \delta\rho + n(\rho + P)\mathcal{R} \quad (4.5.4)$$

as the gauge-invariant density perturbation amplitude.

**Einstein equations** In terms of these quantities, the linearised Einstein equations are expressed as

$$\tilde{G}_0^0 = \kappa^2 \tilde{T}_0^0 : \mathcal{A} + \frac{\kappa^2 \rho}{n(n-1)H^2} \Delta_g = \frac{k^2}{na^2 H^2} \Phi, \quad (4.5.5a)$$

$$\tilde{G}_j^0 = \kappa^2 \tilde{T}_j^0 : k \left[ \mathcal{A} + \frac{n}{2}(1+w)Z - \frac{K}{\dot{a}^2} \Phi \right] = 0, \quad (4.5.5b)$$

$$\tilde{G}_j^j = \kappa^2 \tilde{T}_j^j : H \dot{\mathcal{A}} + (2\dot{H} + nH^2) \mathcal{A} = \frac{\kappa^2}{n-1} (\Gamma + c_s^2 \rho \Delta_g) - \frac{\kappa^2}{n} \Pi, \quad (4.5.5c)$$

$$k^2 \left[ \mathcal{A} + \frac{1}{a^{n-2}} \left( \frac{a^{n-2}}{H} \Phi \right) \right] = -\kappa^2 a^2 \Pi, \quad (4.5.5d)$$

where

$$Z = \Phi - \frac{aH}{k} V = \mathcal{R} - \frac{aH}{k} (v - B). \quad (4.5.6)$$

Note that the first and third of these equations with  $k = 0$  provide the perturbation equations for the homogeneous perturbation, and the second and fourth do not exist for it.

### 4.5.2 $k \rightarrow 0$ limit

In this subsection, we only consider the case of  $K = 0$ .

**Constraints** We have two extra equations for perturbations in the limit  $k \rightarrow 0$ , in addition to the equations for  $k = 0$  perturbations:

$$\mathcal{A} + \frac{n}{2}(1+w)Z = 0, \quad (4.5.7a)$$

$$\mathcal{A} + \frac{1}{a^{n-2}} \left( \frac{a^{n-2}}{H} \Phi \right) = 0. \quad (4.5.7b)$$

The second of these can be integrated to yield

$$\Phi = \frac{H}{a^{n-2}} \left( C - \int_{t_0} a(t)^{n-2} \mathcal{A}(t) dt \right). \quad (4.5.8)$$

Hence, this can be regarded as the equation that determines  $\Phi$  and does not impose any condition on the homogeneous perturbation, because the equations for the homogeneous perturbation do not contain  $\Phi$ . Similarly, if the limit of  $(v - B)/k$  cannot be expressed in terms of other homogeneous quantities, the first equation does not impose any condition on the homogeneous perturbation as well. In this case, then, there is one-to-one correspondence between the  $k \rightarrow 0$  limit and the  $k = 0$  perturbation.

On the other hand, if the limit of  $(v - B)/k$  is expressed in terms of other homogenous quantities with the help of the perturbation equations for matter components, (4.5.7a) provides a constraint for a  $k = 0$  perturbation to be the  $k \rightarrow 0$  limit of a  $k \neq 0$  solution. The scalar field system belongs to this class, as we see later.

**Universal adiabatic solutions** Finally, we note that utilising this correspondence between the  $k \rightarrow 0$  limit of perturbations and the  $k = 0$  perturbations, we can show that there universally exist two independent solutions that are adiabatic in the  $k \rightarrow 0$  limit.

To see this, let  $a(t)$  and  $S_I(t)$  be an exactly homogeneous solution describing the background. Then, since the scale factor  $a(t)$  comes into the evolution equations only through  $H = \dot{a}/a$ ,  $(1 + \lambda)a(t)$  and  $S_I(t)$  also gives an exactly homogeneous solution to the Einstein equation where  $\lambda$  is a constant.

If we regard this solution as an exactly homogeneous perturbation, all the corresponding gauge-variant perturbation variables for matter vanish, and the metric perturbation is given by

$$A = B = 0, \quad H_L = \lambda, \quad \chi_I = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R} = \lambda. \quad (4.5.9)$$

From this we obtain

$$\mathcal{A} = -\left(\frac{\mathcal{R}}{H}\right)' = -\frac{n}{2} \frac{1+w}{1+\Lambda/(\kappa^2\rho)} \lambda. \quad (4.5.10)$$

Equation (4.5.8) determines  $\Phi$  from this as

$$\Phi = C \frac{H}{a^{n-2}} + \frac{n}{2} \lambda \frac{H}{a^{n-2}} \int_{t_0} \frac{1+w}{1+\Lambda/(\kappa^2\rho)} a(t)^{n-2} dt. \quad (4.5.11)$$

If there exists a dynamical vector field describing matter, this equation and (4.5.7a) determines  $Z$  as

$$Z = -\frac{2}{n(1+w)} \mathcal{A} = \lambda. \quad (4.5.12)$$

On the other hand, if the matter is described only by scalar fields,  $v - B$  is written as  $v - B = k\chi$  where  $\chi$  is a combination of the scalar field perturbations  $\chi_I$  which does not contain a negative power of  $k$ . Since the matter perturbation vanishes in the present case, this term should vanish, which implies that  $Z = \lambda - aH\chi = \lambda$ . Hence the condition (4.5.7a) is satisfied.

Thus we find that the perturbation equations have always two solution for which the  $k \rightarrow 0$  limits of  $\mathcal{A}$ ,  $\Phi$  and  $Z$  are given by (4.5.10), (4.5.11) and (4.5.12). Since

the matter is not perturbed,  $\Gamma = 0$  for them. Hence they represent adiabatic modes in the  $k \rightarrow 0$  limit. Clearly the solution proportional to  $C$  is a decaying mode, while that proportional to  $\lambda$  is a growing mode because the Bardeen parameter  $Z$  is a non-vanishing constant. Note that these solutions are universal in the sense that they are valid for any matter contents and interactions.

We can determine the  $k \rightarrow 0$  limit of other gauge-invariant quantities for these solutions. For example, for fluid, the density perturbation and the velocity perturbation are given by the same expression as in (4.3.74):

$$\Delta = \frac{(n-1)H k^2}{\kappa^2 \rho} \frac{1}{a^n} \left\{ C + \lambda \frac{a^{n-2}}{H} - \lambda(n-2) \int da \frac{a^{n-3}}{H} \right\}, \quad (4.5.13a)$$

$$V = \frac{k}{a^{n-1}H} \left\{ C - (n-2)\lambda \int da \frac{a^{n-3}}{H} \right\}. \quad (4.5.13b)$$

The corresponding quantities for each component are determined as follows. First, since the solution is an adiabatic mode, the density perturbation amplitude of each component,  $\Delta_{cI}$  is easily determined by the relation

$$\rho \Delta = \sum_I \rho_I \Delta_{cI}; \quad \frac{\Delta_{cI}}{(1+w_I)(1-q_I)} = \frac{\Delta_{cJ}}{(1+w_J)(1-q_J)}, \quad (4.5.14)$$

when the energy exchange among components can be neglected. Next, the velocity of each component in the  $k \rightarrow 0$  limit follows the equation

$$\left( \frac{h_I Z_I}{H} \right)' + n h_I Z_I + h_I \mathcal{A} + \Gamma_I + c_I^2 \rho_I \Delta_{gI} = \frac{Q_I}{H} Z + \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_I}{k}, \quad (4.5.15)$$

where

$$Z_I := \Phi - \frac{aH}{k} V_I = \mathcal{R} - \frac{aH}{k} (v_I - B). \quad (4.5.16)$$

In the case in which  $\lim_{k \rightarrow 0} f_I/k$  vanishes,  $Z_I$  is determined as

$$h_I Z_I = \frac{H}{a^n} \left( C_I + \lambda \frac{a^3 h_I}{H} \right). \quad (4.5.17)$$

**Bardeen Parameter** As we have seen in the above, the Bardeen parameter  $Z$  is conserved with a good accuracy on superhorizon scale. We can define a similar quantity for each component.

Let us define  $\zeta_\alpha$  by

$$\zeta_\alpha := \mathcal{R} - \frac{H}{\dot{\rho}} \delta \rho_\alpha = -\frac{\Delta_{c\alpha}}{1+w_\alpha} - nZ. \quad (4.5.18)$$

Then, assuming that no interaction among components, for  $K = 0$  and  $\tau_T = 0$ , we have

$$\dot{Z} = -\frac{Hc_s^2}{1+w}\Delta - \frac{H\Gamma}{\rho+P}, \quad (4.5.19)$$

$$\left(\frac{\Delta_{c\alpha}}{1+w_\alpha}\right)' = -\frac{k}{a}V_\alpha + nHc_s^2\frac{\Delta}{1+w} + nH\frac{\Gamma}{\rho+P} - nH\frac{\Gamma_\alpha}{\rho_\alpha+P_\alpha}. \quad (4.5.20)$$

From this, it follows that

$$\dot{\zeta}_\alpha = \frac{k}{a}V_\alpha + nH\frac{\Gamma_\alpha}{\rho_\alpha+P_\alpha} \quad (4.5.21)$$

Hence, for a superhorizon perturbation,  $\zeta_\alpha$  is conserved individually, provided that each component has no intrinsic entropy perturbation.

---

## §4.6

# Scalar Field System

---

In this section, we consider cosmological perturbations of a universe dominated by a scalar field  $\phi = (\phi_I)$  that may have multiple components. The Lagrangian is given by

$$\mathcal{L} = -\sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \cdot \partial_\nu \phi + U(\phi) \right], \quad (4.6.1)$$

where  $U(\phi)$  is a potential. The corresponding energy-momentum tensor is given by

$$T_\nu^\mu = \nabla^\mu \phi \cdot \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu (\nabla^\lambda \phi \cdot \nabla_\lambda \phi + 2U), \quad (4.6.2)$$

### 4.6.1 Basic Equations

**Homogeneous background** For a homogeneous background the energy density  $\rho$  and the pressure  $P$  are expressed as

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + U(\phi), \quad p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - U(\phi), \quad (4.6.3)$$

where  $\dot{\phi}^2 = \dot{\phi} \cdot \dot{\phi}$ . The background equation of motion is given by

$$\ddot{\phi} + nH\dot{\phi} + DU = 0, \quad (4.6.4)$$

where  $DU = (\partial U / \partial \phi_I)$ .

Note that the ratio  $w = P/\rho$  may change from 1 to -1. Further, the sound velocity

$$c_\phi^2 = 1 + \frac{2\dot{\phi} \cdot DU}{nH\dot{\phi}^2} \quad (4.6.5)$$

diverges when  $\dot{\phi}$  vanishes and may become negative.

**Perturbation** A useful gauge-invariant perturbation variable for the scalar field is given by the Mukhanov-type variable

$$X = \delta\phi - \frac{\dot{\phi}}{H} \mathcal{R}. \quad (4.6.6)$$

The perturbation of the scalar field equation can be written in terms of this quantity as

$$L(X) + \frac{k^2}{a^2} X = 0, \quad (4.6.7)$$



where

$$L(X) := \ddot{X} + nH\dot{X} + \left[ D^2U - \frac{\kappa^2}{a^n} \left( \frac{a^n}{H} \dot{\phi} \circ \dot{\phi} \right) \cdot \right] X. \quad (4.6.8)$$

Hence, the evolution of a perturbation of the scalar field can be determined independently from the spacetime perturbation.

Once a solution to this equation is given, we can determine the corresponding spacetime perturbation by solving the Einstein equations. The required source terms are determined as follows. First, the perturbation variables for the energy-momentum tensor are expressed as

$$\delta\rho = -A\dot{\phi}^2 + \dot{\phi}\dot{\delta\phi} + DU \cdot \delta\phi, \quad (4.6.9a)$$

$$(\rho + P)(v - B) = \frac{k}{a} \dot{\phi} \cdot \delta\phi, \quad (4.6.9b)$$

$$\delta P = -A\dot{\phi}^2 + \dot{\phi}\dot{\delta\phi} - DU \cdot \delta\phi. \quad (4.6.9c)$$

Hence  $\Delta_g$  and  $Z$  are expressed in terms of  $X$  as

$$\rho\Delta_g = -\mathcal{A}\dot{\phi}^2 + \dot{\phi} \cdot \dot{X} + DU \cdot X, \quad (4.6.10)$$

$$Z = -H \frac{\dot{\phi} \cdot X}{\dot{\phi}^2}. \quad (4.6.11)$$

Inserting this expression for  $\Delta_g$  into (4.5.5a), we obtain

$$2U\mathcal{A} + \dot{\phi} \cdot \dot{X} + DU \cdot X = \frac{(n-1)k^2}{\kappa^2 a^2} \Phi. \quad (4.6.12)$$

This equation together with (4.5.5d), which in the present case reduces to

$$\mathcal{A} + \frac{1}{a^{n-2}} \left( \frac{a^{n-2}}{H} \Phi \right) \cdot = 0, \quad (4.6.13)$$

give a closed system of evolution equations for  $\mathcal{A}$  and  $\Phi$ , when  $X(t)$  is given.

### 4.6.2 The $k \rightarrow 0$ limit

From the basic perturbation equations, the  $k \rightarrow 0$  limit of  $X$  satisfies the 2nd-order system of equations

$$L(X) = 0. \quad (4.6.14)$$

However, all solutions to the equations for homogeneous perturbations do not satisfy this equation, because the  $k \rightarrow 0$  limit of  $Z$  can be written in terms of the  $k \rightarrow 0$  limit of basic perturbation variable  $X$ .

In fact, from the background equations

$$H^2 = \frac{2\kappa^2}{n(n-1)}\rho, \quad \ddot{\phi} + nH\dot{\phi} + DU = 0, \quad (4.6.15)$$

the gauge-invariant amplitude  $\mathcal{X}$  for the spatially homogeneous perturbation of  $\phi$ ,

$$\mathcal{X} = \delta\phi - \frac{\dot{\phi}}{H}H_L; \quad H_L = \frac{\delta a}{a} \quad (4.6.16)$$

satisfies the two equations

$$\ddot{\mathcal{X}} + nH\dot{\mathcal{X}} + D^2U(\mathcal{X}) - \dot{\phi}\dot{\mathcal{A}} + 2DU\mathcal{A} = 0, \quad (4.6.17a)$$

$$2U\mathcal{A} + \dot{\phi} \cdot \dot{\mathcal{X}} + DU \cdot \mathcal{X} = 0, \quad (4.6.17b)$$

where  $D^2U(\mathcal{X}) = (\mathcal{X}_J \partial^2 U / \partial \phi_I \partial \phi_J)$ . Here note that  $\mathcal{X} = \dot{\phi}/H$  and  $\mathcal{A} = 3\dot{\phi}^2/(3\rho) = 3(1+w)/2$  is a solution to this equation, which corresponds to the adiabatic growing mode obtained in the previous section.

Eliminating  $\mathcal{A}$  from these equations we obtain the following second-order differential equation for  $\mathcal{X}$ :

$$L(\mathcal{X}) = -\frac{H^2}{U} \left( \frac{\dot{\phi}}{H} \right) \cdot W \left( \frac{\dot{\phi}}{H}, \mathcal{X} \right), \quad (4.6.18)$$

where

$$W(X_1, X_2) := X_1 \cdot \dot{X}_2 - \dot{X}_1 \cdot X_2. \quad (4.6.19)$$

Hence, a homogeneous perturbation  $\mathcal{X}$  becomes the  $k \rightarrow 0$  limit of some perturbation with  $k \neq 0$  only when the condition  $W(\dot{\phi}/H, \mathcal{X}) = 0$  is satisfied.

This is consistent with the general argument on the  $k \rightarrow 0$  limit in the previous subsection. In fact, from the expression for  $Z$  and the background field equation, we have

$$\mathcal{A} + \frac{n}{2}(1+w)Z = -\frac{H}{2U}W \left( \frac{\dot{\phi}}{H}, X \right) + \frac{(n-1)k^2}{\kappa^2 a^2 U} \Phi, \quad (4.6.20)$$

Hence, the condition ((4.5.7a)) is expressed as

$$\lim_{k \rightarrow 0} W \left( \frac{\dot{\phi}}{H}, X \right) = 0. \quad (4.6.21)$$

Here note that from the equation for  $\mathcal{X}$ ,  $W = W(\dot{\phi}/H, \mathcal{X})$  follows the differential equation

$$\dot{W} - \left( nwH + \frac{1}{U}DU \cdot \dot{\phi} \right) W = 0. \quad (4.6.22)$$

From this it follows that if  $W$  vanishes at an initial time  $t = t_0$ , it vanishes at any time. Hence (4.6.21) reduces to the condition on the initial value of solutions to (4.6.18). Thus, we find that for a  $N$ -component scalar field system  $(2N - 1)$  independent solutions to (4.6.18) satisfying the condition  $W(\dot{\phi}/H, \mathcal{X})$  correspond to the  $(2N - 1)$  independent  $k \rightarrow 0$  limit of solutions to the perturbation equation with  $k \neq 0$ , which include the universal adiabatic growing mode corresponding to  $\mathcal{X} = \dot{\phi}/H$ . The missing solution corresponds to the universal decaying mode, for which  $\lim_{k \rightarrow 0} X$  vanishes.

### 4.6.3 Slow Roll Phase

The entropy perturbation  $\Gamma$  for the scalar field is expressed in terms of  $X$  as

$$\Gamma = -\frac{2\rho}{nh\dot{\phi}^2U}(\dot{\phi} \cdot DU)(\dot{\phi} \cdot \dot{X} + DU \cdot X) - 2DU \cdot X. \quad (4.6.23)$$

In the long wavelength limit in which

$$0 = W(\dot{\phi}/H, X) \equiv \frac{1}{H}(\dot{\phi} \cdot \dot{X} + DU \cdot X) + \frac{nU}{\rho}X \cdot \dot{\phi}, \quad (4.6.24)$$

$\Gamma$  can be written as

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{2}{\dot{\phi}^2}(X \cdot \dot{\phi})(\dot{\phi} \cdot DU) - 2DU \cdot X \\ &= 2\ddot{\phi} \cdot X - 2\frac{\dot{\phi} \cdot \ddot{\phi}}{\dot{\phi}^2}(X \cdot \dot{\phi}). \end{aligned} \quad (4.6.25)$$

Hence,

$$|\Gamma| = \mathcal{O}\left(|X||\ddot{\phi}|\right). \quad (4.6.26)$$

Under the same condition  $W(\dot{\phi}/H, X) = 0$ , the density contrast  $\Delta_g$  can be written

$$\rho\Delta_g = \frac{\rho}{U}(\dot{\phi} \cdot \dot{X} + DU \cdot X) = nHX \cdot \dot{\phi}. \quad (4.6.27)$$

From this, we find that in the slow roll phase in which

$$|\ddot{\phi}| \ll H|\dot{\phi}| \quad (4.6.28)$$

the effect of the entropy perturbation can be neglected, and the adiabaticity of the perturbation is well preserved:

$$\frac{\dot{Z}}{H} \approx -\frac{\Gamma}{\rho + P} = -\frac{\Gamma}{\dot{\phi}^2} \ll \mathcal{O}\left(\frac{|X|}{|\dot{\phi}|/H}\right) = \mathcal{O}(Z). \quad (4.6.29)$$

In contrast, in the oscillatory phase, a significant amount of entropy perturbation may be generated, which eventually turns to adiabatic mode after preheating (cf. Curvaton scenario).

---

## §4.7

---

# 偏光の伝搬と生成

---

### References

- Kosowsky, A.: Cosmic Microwave Background Polarization, *Annals of Physics* 246, 49-85 (1996).

### 4.7.1 偏光の記述

- 偏光テンソル

$$\rho_{pq} = e_p^i e_q^j \langle : E_i E_j : \rangle = \rho_{qp}, \quad \tilde{\rho}_{pq} = e_p^i e_q^j \langle : E_i \tilde{E}_j : \rangle = -\tilde{\rho}_{qp} \quad (4.7.1)$$

ここで,  $\tilde{E}_i(t) = E_i(t + \pi/(2\omega))$ .

- Stokes パラメーター

$$I = \rho_p^p, \quad Q = \rho_{11} - \frac{1}{2}I, \quad U = \rho_{12} \quad V = \tilde{\rho}_{12} \quad (4.7.2)$$

これより, 偏光行列を

$$P = \left( \rho_{pq} - \frac{1}{2}I\delta_{pq} \right) = \begin{pmatrix} Q & U \\ U & -Q \end{pmatrix} \quad (4.7.3)$$

により定義すると, 偏光ベクトルの回転に対して,

$$P \mapsto R(\theta)PR(\theta)^{-1} \quad (4.7.4)$$

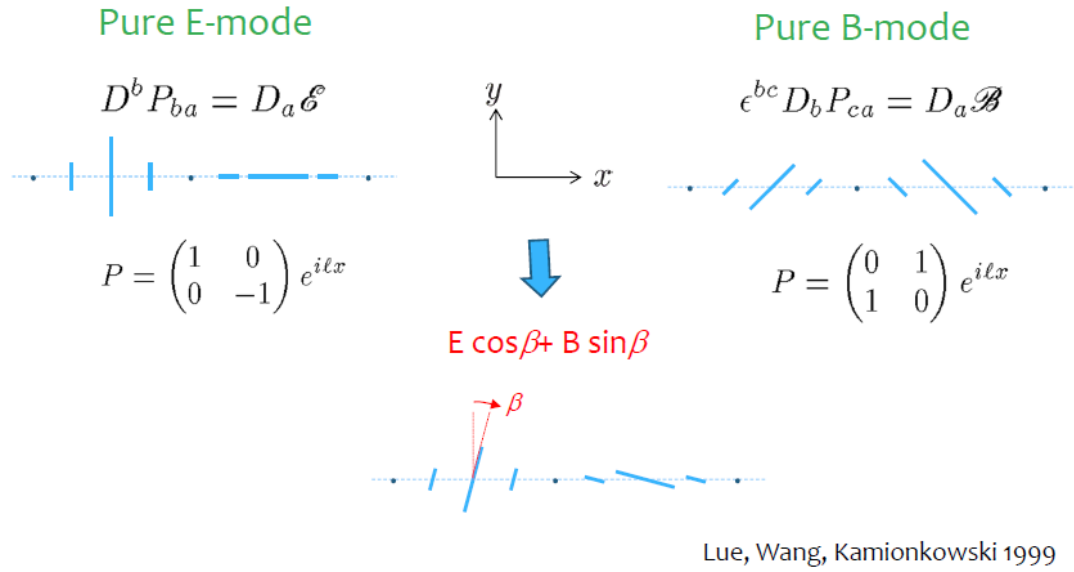
と変換する. したがって,  $P$  は天球上の 2 階対称テンソルと見なすことができる.

### 4.7.2 EモードとBモード

天球上での放射強度のゆらぎ  $\delta I(\Omega)$  は, 調和関数を用いて

$$\delta I(\Omega) = g(\omega/T)\bar{I} \sum_{l,m} \Theta_l^m Y_l^m(\Omega); \quad g(x) = x\partial_x f(x)/f(x) \quad (4.7.5)$$

と展開される. ここで,  $\Theta_l^m$  は温度ゆらぎ  $\delta T/T$  の展開係数に相当する量である.



Lue, Wang, Kamionkowski 1999

図 4.2: Flat sky 近似での E モードと B モード

同様に，偏光テンソルは，

$$\hat{\Delta} \mathcal{P}_l^m = -(l^2 + l - 4) \mathcal{P}_l^m, \quad \text{Tr}(\mathcal{P}_l^m) = 0 \quad (4.7.6)$$

を満たす 2 階対称調和テンソル  $\mathcal{P}_l^m$  を用いて，

$$P(\Omega) = g(\omega/T) \bar{I} \sum_{l,m} (E_l^m \mathcal{P}_{E_l^m} + B_l^m \mathcal{P}_{B_l^m}) \quad (4.7.7)$$

と展開される．ここで， $\mathcal{P}_E$  と  $\mathcal{P}_B$  はそれぞれ

$$\hat{D}_b (\mathcal{P}_{E_l^m})_a^b = -c_l \hat{D}_a Y_l^m, \quad (4.7.8a)$$

$$\hat{D}_b (\mathcal{P}_{B_l^m})_a^b = -c_l \epsilon_{ab} \hat{D}^b Y_l^m \quad (4.7.8b)$$

を満たす parity even および odd な調和テンソルの独立な基底で，対応する偏光テンソル分布の各成分はそれぞれ E モードおよび B モードと呼ばれる．

### 4.7.3 Flat sky 近似

$l$  の十分大きいモードでは天球の曲率を無視できる．このようなモードに対しては，局所的に球面調和関数の代わりに平面波を用いることができる：(赤道の近傍で)

$$\begin{aligned} Y_l^m &\propto P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \sim ((-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \theta}} \frac{\Gamma(l+m+1)}{\Gamma(l+3/2)}) \cos \left[ \left( l + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right] e^{im\phi} \\ &\rightarrow e^{ik \cdot \theta} \end{aligned} \quad (4.7.9)$$

対応して,

$$\mathcal{P}_{ab} \rightarrow M_{ab} e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\theta}} \quad (4.7.10)$$

とおくと,  $M_{ab}$  はトレースがゼロの対称行列で, Eモードの条件は

$$M_{ab} k^b = -c_l k^a \Rightarrow M_E \propto \begin{pmatrix} (k^1)^2 - (k^2)^2 & 2k^1 k^2 \\ 2k^1 k^2 & -(k^1)^2 + (k^2)^2 \end{pmatrix}. \quad (4.7.11)$$

Bモードの条件は

$$M_{ab} k^b = -c_l \epsilon_{ab} k^b \Rightarrow M_B \propto \begin{pmatrix} -2k^1 k^2 & (k^1)^2 - (k^2)^2 \\ (k^1)^2 - (k^2)^2 & 2k^1 k^2 \end{pmatrix} \quad (4.7.12)$$

特に, 偏光ベクトルを  $\epsilon_{1\parallel\mathbf{k}}$  と取ると,

$$M_E \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow U = 0, \quad (4.7.13a)$$

$$M_B \propto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Q = 0. \quad (4.7.13b)$$

これは, この基底のもとで, 直線偏光の方向が

- E-mode :  $E_1 = 0$  or  $E_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$  or  $\perp \mathbf{k}$ .
- B-mode :  $E_1 = \pm E_2 \Leftrightarrow \mathbf{E}$  と  $\mathbf{k}$  が  $45^\circ$ .

#### 4.7.4 フラックス強度テンソル

In the Lorentz gauge, the free electromagnetic potential  $A_\mu$  can be written in terms of the creation and annihilation operators as

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} \sum_p (e_{p\mu}(\mathbf{k}) a_p(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot x} + e_{p\mu}^*(\mathbf{k}) a_p(\mathbf{k})^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot x}), \quad (4.7.14)$$

where  $e_{p\mu}(\mathbf{k})$  is the polarisation basis satisfying

$$e_p^\mu e_{q\mu}^* = \delta_{pq}, \quad k^\mu e_{p\mu} = 0. \quad (4.7.15)$$

Note that the addition of vectors proportional to  $k^\mu$  to  $e_p^\mu$  has no physical significance, because it corresponds to a gauge transformation and produces no physical effect in the exact quantum formulation.  $a_p$  and  $a_p^\dagger$  satisfy the standard relativistic commutation relations

$$[a_p(\mathbf{k}), a_q(\mathbf{k}')] = 0, \quad [a_p(\mathbf{k}), a_q(\mathbf{k}')^\dagger] = (2\pi)^3 2\omega \delta_{pq} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (4.7.16)$$

The electric field  $\mathbf{E}$  and magnetic field  $\mathbf{B}$  are

$$\mathbf{E} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sum_p (\boldsymbol{\epsilon}_p(\mathbf{k}) a_p(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} + \boldsymbol{\epsilon}_p^*(\mathbf{k}) a_p(\mathbf{k})^\dagger e^{-ik \cdot x}), \quad (4.7.17a)$$

$$\mathbf{B} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} \mathbf{k} \times \sum_p (\boldsymbol{\epsilon}_p(\mathbf{k}) a_p(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} + \boldsymbol{\epsilon}_p^*(\mathbf{k}) a_p(\mathbf{k})^\dagger e^{-ik \cdot x}), \quad (4.7.17b)$$

where

$$\epsilon_{pj} = e_{pj} - \frac{k_j}{\omega} e_{p0}, \quad (4.7.18)$$

which satisfies

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_p = 0, \quad \boldsymbol{\epsilon}_p^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_q = \delta_{pq}. \quad (4.7.19)$$

Now, let us define the measured components of the Electric field,  $\mathcal{E}_p$ , in terms of the sensitivity function  $W(x)$  and the detector polarisation basis  $\boldsymbol{\epsilon}_p^o$  as

$$\mathcal{E}_p = \int d^3x W(x) \boldsymbol{\epsilon}_p^o \cdot \mathbf{E}(t_0, \mathbf{x}). \quad (4.7.20)$$

Then, for the free field,  $\mathcal{E}_p$  can be expressed as

$$\mathcal{E}_p = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \left[ \sum_q a_q(\mathbf{k}) (\boldsymbol{\epsilon}_p^o \cdot \boldsymbol{\epsilon}_q(\mathbf{k})) \hat{W}(\mathbf{k}) e^{-i\omega t} + \text{cc} \right], \quad (4.7.21)$$

where

$$\hat{W}(\mathbf{k}) = \int d^3x e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} W(\mathbf{x}). \quad (4.7.22)$$

Now, assume that

$$\langle a_p(\mathbf{k}) a_q(\mathbf{k}') \rangle = 0, \quad \langle a_p(\mathbf{k})^\dagger a_q(\mathbf{k}') \rangle = 2(2\pi)^3 \rho_{pq}(\mathbf{k}) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (4.7.23)$$

Then, the observed correlation of the electric fields can be written

$$\langle : \mathcal{E}_p \mathcal{E}_q : \rangle = \epsilon_p^{ol} \epsilon_q^{oj} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\hat{W}(\mathbf{k})|^2 \rho_{(lj)}(\mathbf{k}), \quad (4.7.24a)$$

$$\langle : \mathcal{E}_p \tilde{\mathcal{E}}_q : \rangle = \epsilon_p^{ol} \epsilon_q^{oj} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\hat{W}(\mathbf{k})|^2 (-i) \rho_{[lj]}(\mathbf{k}), \quad (4.7.24b)$$

where

$$\rho_{ij}(\mathbf{k}) = \sum_{p,q} \epsilon_{pi}^*(\mathbf{k}) \epsilon_{qj}(\mathbf{k}) \rho_{pq}(\mathbf{k}), \quad (4.7.25)$$

and  $\tilde{\mathcal{E}}_p$  is obtained from  $\mathcal{E}_p$  by advancing the phase  $t\omega$  by  $\pi/2$  for each mode. Note that the Stokes parameters are

$$I = \sum_p \epsilon_p^{oj} \epsilon_p^{ol} \rho_{(jl)}, \quad Q = (\epsilon_1^{oj} \epsilon_1^{ol} - \epsilon_2^{oj} \epsilon_2^{ol}) \rho_{(jl)}, \quad U = 2\epsilon_1^{oj} \epsilon_2^{ol} \rho_{(jl)}, \quad V = (-2i) \epsilon_1^{oj} \epsilon_2^{ol} \rho_{[jl]} \quad (4.7.26)$$

Thus,  $\rho_{ij}(\mathbf{k})$  provides a polarisation-basis-independent description of the radiation field polarisation and intensity. We call  $\rho_{ij}$  and  $\rho_{pq}$  the flux density tensor and the flux polarisation matrix, respectively.

### 4.7.5 偏光に対する Boltzmann 方程式

In a curved spacetime, the above mode functions for the expansion of the electromagnetic fields should be replaced by corresponding vector fields satisfying

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0. \quad (4.7.27)$$

Accordingly, it is rather difficult to treat wavefunctions and polarisation vectors independently. However, such a treatment is allowed for modes for which the WKB approximation is good. For such modes, the mode function can be written

$$A_\mu(x) = a_\mu(x)e^{iS(x)}, \quad (4.7.28)$$

where for  $k := \nabla S$ ,  $a_\mu(x)$  and  $S(x)$  satisfy

$$k := \nabla S \Rightarrow k \cdot k \approx 0 \Rightarrow \nabla_k k \approx 0, \quad (4.7.29)$$

$$\nabla_k a_\mu = -\frac{1}{2}\square S a_\mu \approx 0. \quad (4.7.30)$$

Hence, by generalising the polarisation basis to spacetime dependent vectors  $e^\mu(k, x)$  such that

$$\nabla_k e^\mu(k, x) = 0, \quad k_\mu e^\mu(k, x) = 0, \quad (4.7.31)$$

the flux density tensor  $\rho_{jl}$  can be generalised to

$$\rho^{\mu\nu} = \sum_{p,q} e_p^\mu e_q^\nu \rho_{pq}. \quad (4.7.32)$$

This tensor is independent of the polarisation basis and satisfies the generalised Boltzmann equation

$$(k^\mu/k^0 \nabla_\mu + f^i \partial_{k^i}) \rho^{\mu\nu}(x, \mathbf{k}) = C^{\mu\nu}(\rho), \quad (4.7.33)$$

### 4.7.6 最終散乱面での偏光

At the last scattering surface, up to the linear order in perturbations,  $\delta\rho_{\mu\nu}$  on the last scattering surface can be Fourier decomposed into the contribution of each perturbation mode with the wave-vector  $\mathbf{K}$  as

$$\delta\rho_{\mu\nu}(t_{\text{ls}}, \mathbf{x}, \mathbf{k}) = \int d^3K e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}} \rho_{\mu\nu}^{(1)}(\mathbf{K}; \mathbf{k}). \quad (4.7.34)$$



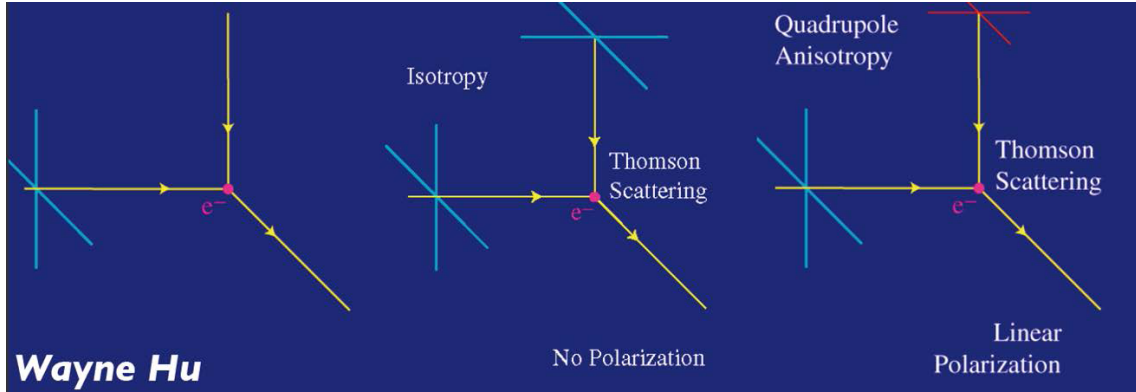


図 4.3: 電子との散乱による直線偏光の生成

In this situation, it is customary to adopt the following polarisation basis:

$$\epsilon_p(k) = \frac{1}{a} \hat{\epsilon}_p(k); \quad (4.7.35)$$

$$\hat{\epsilon}_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - (\hat{k} \cdot \hat{K})^2}} \left( \hat{K} - (\hat{k} \cdot \hat{K}) \hat{k} \right), \quad (4.7.36)$$

$$\hat{\epsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - (\hat{k} \cdot \hat{K})^2}} \hat{K} \times \hat{k}, \quad (4.7.37)$$

where

$$\hat{k} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|, \quad \hat{K} = \mathbf{K}/|\mathbf{K}|. \quad (4.7.38)$$

In the spherical coordinates corresponding to the Cartesian coordinates in which

$$\hat{K} = (0, 0, 1), \quad \hat{k} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad (4.7.39)$$

the polarisation basis has the following components:

$$\hat{\epsilon}_1 = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta), \quad (4.7.40a)$$

$$\hat{\epsilon}_2 = (-\sin \phi, \cos \phi, 0). \quad (4.7.40b)$$

For this choice of the polarisation basis, because all vector-like quantities for a perturbation is parallel to  $\hat{K}$ ,  $\rho_{pq}^{(1)}$  defined by

$$\rho_{pq}^{(1)} = \epsilon_1^{\mu*} \epsilon_2^\nu \rho_{\mu\nu}^{(1)}(\mathbf{K}; \mathbf{k}) \quad (4.7.41)$$

depends only on  $\omega$  and  $\rho_{pq}^{(1)} = \mu = \cos \theta = \hat{K} \cdot \hat{k}$ :

$$\rho_{pq}^{(1)} = \rho_{pq}^{(1)}(\mathbf{K}; \omega, \mu). \quad (4.7.42)$$

Let us introduce the quantities  $\Delta_\alpha$  ( $\alpha = I, Q, U, V$ ) by

$$\Delta_I(\mathbf{K}, q, \mu) = \left( \frac{\omega}{4} \frac{\partial \rho^{(0)}(\omega)}{\partial \omega} \right)^{-1} \left\{ \rho_{11}^{(1)}(\mathbf{K}; \omega, \mu) + \rho_{22}^{(1)}(\mathbf{K}; \omega, \mu) \right\}, \quad (4.7.43a)$$

$$\Delta_Q(\mathbf{K}, q, \mu) = \left( \frac{\omega}{4} \frac{\partial \rho^{(0)}(\omega)}{\partial \omega} \right)^{-1} \left\{ \rho_{11}^{(1)}(\mathbf{K}; \omega, \mu) - \rho_{22}^{(1)}(\mathbf{K}; \omega, \mu) \right\}, \quad (4.7.43b)$$

$$\Delta_U(\mathbf{K}, q, \mu) = \left( \frac{\omega}{4} \frac{\partial \rho^{(0)}(\omega)}{\partial \omega} \right)^{-1} \left\{ \rho_{12}^{(1)}(\mathbf{K}; \omega, \mu) + \rho_{21}^{(1)}(\mathbf{K}; \omega, \mu) \right\}, \quad (4.7.43c)$$

$$\Delta_V(\mathbf{K}, q, \mu) = -i \left( \frac{\omega}{4} \frac{\partial \rho^{(0)}(\omega)}{\partial \omega} \right)^{-1} \left\{ \rho_{12}^{(1)}(\mathbf{K}; \omega, \mu) - \rho_{21}^{(1)}(\mathbf{K}; \omega, \mu) \right\}, \quad (4.7.43d)$$

where  $q = a\omega$ . Then, for scalar perturbations,  $\Delta_U = \Delta_V = 0$  for scalar perturbations, because  $\Delta_X = \Delta_X^s(t, K, q, \mu)$  satisfy the evolution equations[9, 42]

$$\begin{aligned} \partial_t \Delta_I^s + \frac{iK\mu}{a} \Delta_I^s - 4 \left( \partial_t \Phi + \frac{2iK\mu}{a} \Psi \right) \\ = -\sigma_T \bar{n}_e \left[ \Delta_I^s - \Delta_{I0}^s + 4v\mu - \frac{1}{2} P_2(\mu) (\Delta_{I2}^s + \Delta_{Q0}^s - \Delta_{Q2}^s) \right] \end{aligned} \quad (4.7.44a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \Delta_Q^s + \frac{iK\mu}{a} \Delta_Q^s \\ = -\sigma_T \bar{n}_e \left[ \Delta_Q^s + \frac{1}{2} (1 - P_2(\mu)) (\Delta_{I2}^s + \Delta_{Q0}^s - \Delta_{Q2}^s) \right], \end{aligned} \quad (4.7.44b)$$

$$\partial_t \Delta_U^s + \frac{iK\mu}{a} \Delta_U^s = -\sigma_T \bar{n}_e \Delta_U^s, \quad (4.7.44c)$$

$$\partial_t \Delta_V^s + \frac{iK\mu}{a} \Delta_V^s = -\sigma_T \bar{n}_e \left( \Delta_V^s - \frac{3\mu}{2} \Delta_{V1}^s \right), \quad (4.7.44d)$$

where  $v$  is the amplitude of the velocity perturbation  $\mathbf{v} = v\hat{K}$ , and for  $i = s, +, x$  and  $X = I, Q, U, V$ ,

$$\Delta_{Xl}^i(q) := \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} P_l(\mu) \Delta_X^i(q, \mu). \quad (4.7.45)$$

For tensor perturbations, in contrast,  $\Delta U$  does not vanish in general, and the evolution equation for  $\Delta_X^i$  can be expressed in terms of the quantities  $\tilde{\Delta}_X^i$  defined by

$$\Delta_I^+ = (1 - \mu^2) \cos(2\phi) \tilde{\Delta}_I^+, \quad \Delta_I^x = (1 - \mu^2) \sin(2\phi) \tilde{\Delta}_I^x, \quad (4.7.46a)$$

$$\Delta_Q^+ = (1 + \mu^2) \cos(2\phi) \tilde{\Delta}_Q^+, \quad \Delta_Q^x = (1 + \mu^2) \sin(2\phi) \tilde{\Delta}_Q^x, \quad (4.7.46b)$$

$$\Delta_U^+ = -2\mu \sin(2\phi) \tilde{\Delta}_U^+, \quad \Delta_U^x = 2\mu \cos(2\phi) \tilde{\Delta}_U^x, \quad (4.7.46c)$$

as

$$\partial_t \tilde{\Delta}_I^+ + \frac{iK\mu}{a} \tilde{\Delta}_I^+ - 2\partial_t h^+ = -\sigma_T \bar{n}_e (\tilde{\Delta}_I^+ + \tilde{\Lambda}^+), \quad (4.7.47a)$$

$$\partial_t \tilde{\Delta}_Q^+ + \frac{iK\mu}{a} \tilde{\Delta}_Q^+ = -\sigma_T \bar{n}_e (\tilde{\Delta}_Q^+ - \tilde{\Lambda}^+), \quad (4.7.47b)$$

$$\tilde{\Delta}_U^+ = \tilde{\Delta}_Q^+, \quad (4.7.47c)$$

$$\partial_t \tilde{\Delta}_V^+ + \frac{iK\mu}{a} \tilde{\Delta}_V^+ = -\sigma_T \bar{n}_e \tilde{\Delta}_V^+, \quad (4.7.47d)$$

where

$$\tilde{\Lambda}^+ := -\frac{3}{70} \tilde{\Delta}_{I4}^+ + \frac{1}{7} \tilde{\Delta}_{I2}^+ - \frac{1}{10} \tilde{\Delta}_{I0}^+ + \frac{3}{70} \tilde{\Delta}_{Q4}^+ + \frac{6}{7} \tilde{\Delta}_{Q2}^+ + \frac{3}{5} \tilde{\Delta}_{Q0}^+. \quad (4.7.48)$$

## 5

## \*インフレーション宇宙モデル

## §5.1

## ビッグバンモデルの諸問題

## 5.1.1 平坦性問題

前節で見たように、CMBによる宇宙音響振動の観測は、現在の宇宙の空間曲率が非常に小さく、空間はほぼ平坦であることを示している。ところが、通常のビッグバン宇宙モデルではこれは非常に不思議なことである。これを見るために、Planck時間  $t = t_{\text{pl}} \sim 10^{-44}\text{s}$  を出発点として空間曲率の振る舞いを見てみよう。ここで、Planck時間は基本定数  $c, G, \hbar$  から作られる時間で、宇宙の時間・空間構造を古典的に記述できる時期の始まりと見なされる。次元解析から、この時期での空間曲率  $k_{\text{pl}}$  は Planck長  $L_{\text{pl}} \sim 10^{-33}\text{cm}$  に対応する  $k_{\text{pl}} \sim 1/L_{\text{pl}}^2$  程度とするのが自然である。

さて、素粒子や光子が宇宙物質の主要構成要素となるビッグバンモデルでは、宇宙膨張の方程式

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho - \frac{c^2 K}{a^2} \quad (5.1.1)$$

において、エネルギー密度は放射優勢時期では  $1/a^4$  に、物質優勢時期では  $1/a^3$  に比例して減少する。これはエネルギー密度が曲率項より速く減少することを意味し、このため時間と共に曲率項の寄与は急速に増大する。詳しく計算すると、現在の曲率パラメータ  $\Omega_K$  は

$$|\Omega_K| \approx 10^{60} \left( \frac{\rho_K}{\rho_m} \right)_{t=t_{\text{pl}}} \quad (5.1.2)$$

となる。したがって、観測の制限  $|\Omega_K| < 0.01$  を満たすには、Planck時 ( $t = t_{\text{pl}}$ )

での空間曲率がそのときの自然な値と比べ異常に小さいことが要求される：

$$\text{Planck 時の空間曲率} < \left( \frac{10^{-31}}{L_{\text{pl}}} \right)^2. \quad (5.1.3)$$

これは平坦性問題と呼ばれる。この問題は、宇宙初期に宇宙のエネルギー密度が曲率項 ( $\propto 1/a^2$ ) より緩やかに減少する時期が十分長く続けば解消される。これは、 $d(a^2\rho)/dt \propto d(a^2 H^2)/dt \propto d^2 a/dt^2 > 0$ ，すなわち宇宙が加速膨張することを要求する。

### 5.1.2 ホライズン問題

3.7節で見たように、光子最終散乱面のうち我々がCMBで観測できる領域の半径は、その時点でのホライズン半径  $l_H(t_{\text{dec}})$  の33倍もある ((3.7.19)式)。ホライズン半径は宇宙誕生後からその時点までに因果的に相関を持つことのできる領域の半径なので、CMB観測は半径にしてその33倍もの領域で温度が一様にそろっていることを示している。この因果的に相関がない領域が相関を持っているように見える問題をホライズン問題という。

図5.1に示したように、宇宙晴れ上がり以前の熱いビッグバン宇宙では、観測光円錐に当たる過去の光円錐の共動半径  $R_{\text{plc}}(t)$  はほぼ一定となる。このため、ホライズン問題を解決するには、熱いビッグバンの前に、ホライズン半径がこの一定値を超えるような時期が必要となる。時刻  $t_i$  に出た光の光円錐の時刻  $t_*$  での共動半径は

$$R = \int_{t_i}^{t_*} \frac{dt}{a} = \int_{a_i}^{a_*} \frac{da}{a\dot{a}} \quad (5.1.4)$$

とかけるので、宇宙の誕生時  $a \approx 0$  から熱いビッグバン宇宙が始まる時刻  $t = t_*$  までにホライズン半径が十分増大する条件は、 $\dot{a} \rightarrow 0$  ( $a \rightarrow 0$ ) となる。これは、この時期に  $\dot{a}$  が時間と共に増大することを要求する。

**【問 5.1.1】** Planck 時刻  $t = t_{\text{pl}}$  に相当する同時刻面が直接観測可能とすると、現在見える領域の半径はその時刻で  $L_{\text{pl}}$  の何倍か？ \_\_\_\_\_ □

### 5.1.3 宇宙構造の起源

宇宙の誕生時には、量子効果により時間空間は大きく揺らいでいると予想される。このゆらぎのスケールは、Planck 時で Planck 長  $L_{\text{pl}}$  程度と考えられる。ビッグバンモデルでは、ホライズン問題で触れたように、現在観測できる宇宙初期の領域はその時刻でのホライズンを遙かに超えている。これは、Planck 時でも同様である。この領域のサイズを  $L$  とすると、その時点でのホライズンサイズ  $L_{\text{pl}}$  程度の各領域は全く独立にエネルギーが揺らぐことになる。したがって、各  $L_{\text{pl}}$  サイ

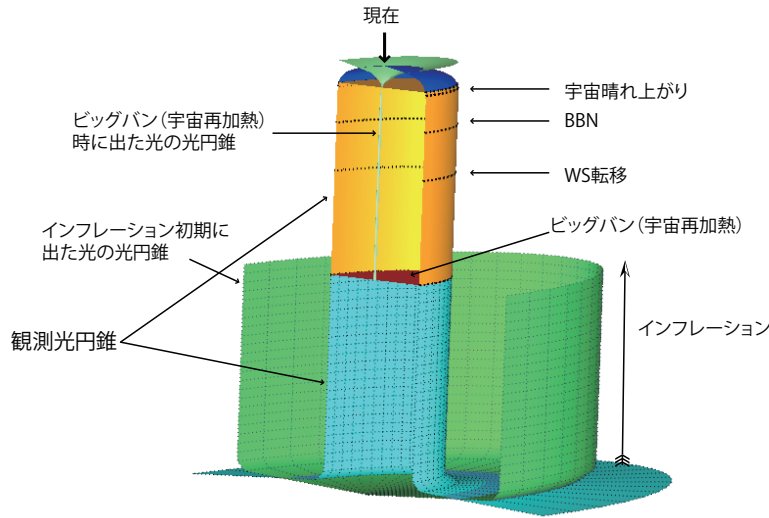


図 5.1: 共動座標系でみた観測光円錐とホライズン. この図の縦軸は  $\log(a)$ , 水平平面は空間の共動座標と対応.

ズ領域の重力ポテンシャルのゆらぎを  $\epsilon$  とすると, サイズ  $L$  の全領域での平均重力ポテンシャルのゆらぎ  $\delta\phi$  は,  $N = (L/L_{\text{pl}})^3$  として,

$$\delta\phi \sim \epsilon\sqrt{N}(L/L_{\text{pl}})^{-1} = \epsilon(L/L_{\text{pl}})^{1/2} \quad (5.1.5)$$

となる. したがって,

$$\frac{l_H(t_{\text{dec}})}{l_H(t_{\text{pl}})} \times \frac{a(t_{\text{pl}})}{a(t_{\text{dec}})} \sim \frac{t_{\text{dec}} T_{\text{dec}}}{t_{\text{pl}} T_{\text{pl}}} \sim \left(\frac{t_{\text{dec}}}{t_{\text{eq}}}\right)^{1/3} \left(\frac{t_{\text{eq}}}{t_{\text{pl}}}\right)^{1/2}$$

より,  $t = t_{\text{dec}}$  でのホライズンスケールでの重力ポテンシャルのゆらぎは

$$\delta\phi \sim 10^{14}\epsilon \lesssim 10^{-5} \Rightarrow \epsilon \lesssim 10^{-19} \quad (5.1.6)$$

となる. すなわち, 宇宙誕生時に宇宙は非常に均一でないといけない.

さらに, (5.1.5) 式に従うと, 同時刻面での宇宙初期のゆらぎは, 曲率のゆらぎ (これはほぼ重力ポテンシャルのゆらぎに相当) で表すと

$$\text{曲率ゆらぎ} \propto L^2 \frac{\delta\rho}{\rho} \propto L^{1/2} \quad (5.1.7)$$

となる. すなわち, 大きな波長のゆらぎほど振幅が大きくないといけない. これは CMB も含めた多くの観測が Harrison-Zeldovich スペクトル, すなわち曲率ゆらぎが波長にほとんど依存しないという結果を与えていることと矛盾する.

---

## §5.2

---

# インフレーション

---

### 5.2.1 ホライズン問題と平坦性問題の解決

前節で述べた諸問題は、実は宇宙が初期に十分長い時間加速膨張をしたとすると解決される。例えば、時刻  $t = t_s$  から  $t = t_e$  の間、宇宙の膨張率  $H$  が一定であったとする。このとき、スケール因子は

$$\frac{\dot{a}}{a} = H \Rightarrow a = a_s e^{H(t-t_s)} \quad (5.2.1)$$

と指数関数的に増大する。このため、各時刻で情報が伝わるサイズを特徴付ける Hubble ホライズン半径  $c/H$  より小さい領域もすぐにこのホライズンサイズより大きくなる。膨張率一定の時期が  $t = t_e$  に終了し、その後はビッグバンモデルと同様に宇宙膨張が減速するとすると、この各領域は十分時間がたつと再び Hubble ホライズンサイズより小さくなる (図 5.2, 図 5.5 参照)。我々が現在観測する領域がこのようにインフレーションの時期  $t_s < t < t_e$  に Hubble ホライズンを横切ったとすると、この領域は最初、Hubble ホライズンより小さな時期に十分相互作用ができるので、それらが均一であるという観測と矛盾しない。したがって、ホライズン問題は解決される。

以上では簡単のため、宇宙膨張率  $H$  が定数の場合 (指数関数的インフレーション) を考えたが、必ずしも  $H$  が定数である必要はない。インフレーションの本質は加速膨張にある。実際、すでに述べたように、平坦性問題の解決のためには、インフレーションの時期に

$$\frac{d}{dt} \frac{K/a^2}{H^2} = -2K \frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} < 0 \quad (5.2.2)$$

となる必要があるが、これも  $\ddot{a} > 0$  を与える。また、ホライズン問題はインフレーションの時期に宇宙が Hubble ホライズンより速く膨張することを要求するが、この条件は

$$\frac{d}{dt} \frac{a}{1/H} = \frac{d(aH)}{dt} = \ddot{a} > 0 \quad (5.2.3)$$

となる。

もちろん、このような加速膨張がいつまでも続いたのでは我々の現在の宇宙は生まれえない。必ずインフレーションは有限な時間で終了し、宇宙の加速膨張を生み出した場 (インフラトン) のエネルギーが通常の物質に転化することにより、熱いビッグバン宇宙へ移行しないとイケない。この過程は宇宙再加熱と呼ばれる<sup>1</sup>。

<sup>1</sup> 「再」という文字がついているのは、初期のモデルでは最初熱い宇宙から出発し途中でインフ

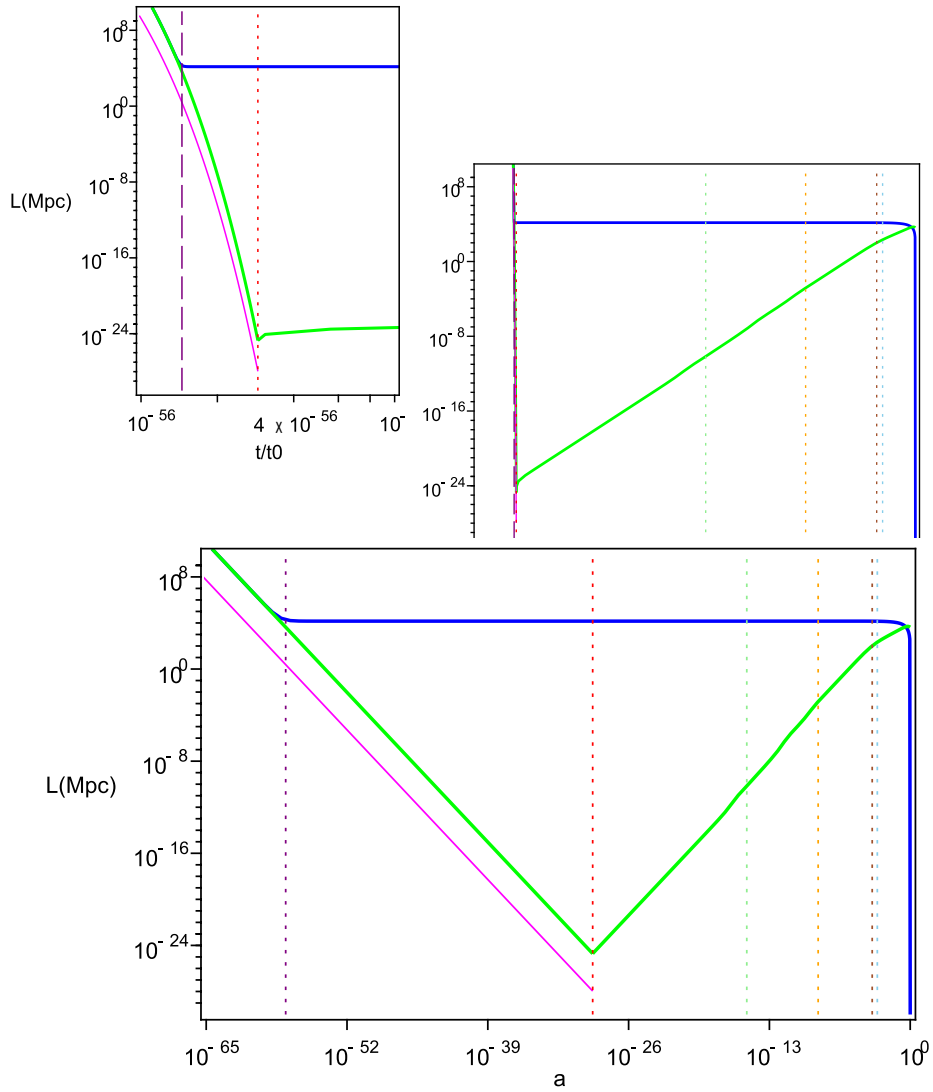


図 5.2: 共動座標系でみた観測光円錐半径（実線）とハッブルホライズン半径（波線）の振る舞い. 上の図は横軸が  $\log(t/t_0)$ , 下の図は横軸が  $\log(a)$ . 縦軸は Mpc 単位での共動半径. 一点鎖線は各時刻で Planck 長  $L_{pl}$  に対応する共動長を表す.



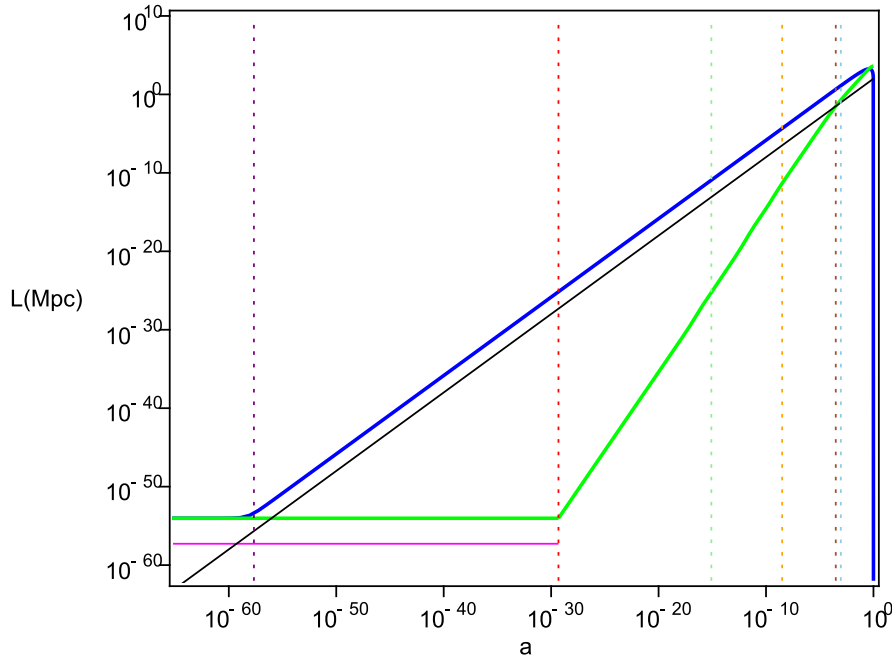


図 5.3: 固有長で計った観測光円錐半径（実線）とハッブルホライズン半径（波線）の振る舞い。横軸は  $\log(a)$ 。縦軸は Mpc 単位での固有長。また、斜めの実線は共動長が 100Mpc に相当する領域の固有長、一点鎖線は各時刻で Planck 長  $L_{pl}$  を表す。

### 5.2.2 必要とされる指数膨張数

観測と整合的な宇宙の一様性や平坦性を説明するためには、インフレーションが十分な時間続く必要がある。そこで、どの程度インフレーションの時期が続く必要があるか評価してみよう。現在の観測者が観測できる領域（観測光円錐）の共動半径は、FLRW モデルでは宇宙の晴れ上がり以前にほぼ一定値 ( $\sim 1/H_0$ ) となる。この共動領域がインフレーションの始まりでそのときのハッブルホライズンより小さければ、ホライズン問題は解消され则认为られる。この条件は

$$\frac{1}{H_0} \times a_i < \frac{1}{H_i} \Leftrightarrow e^{-N_t} \frac{H_i a_f}{H_0} < 1. \quad (5.2.4)$$

ここで、 $N_t$  はインフレーションの始まるときのスケール因子の値  $a_i$  と終了するときの値  $a_f$  を用いて

$$e^{N_t} = \frac{a_f}{a_i} \quad (5.2.5)$$

インフレーションが起きると考えられていたためである。現在の多くのモデルではインフレーションが宇宙誕生とほぼ同時に起きると考えられており、この場合、「再加熱」より「初期加熱」という言葉の方がふさわしい。

で定義され、インフレーションの全指数膨張数と呼ばれる。関係式

$$H_0^2 \simeq H_f^2 \frac{\rho_{\text{eq}}}{\rho_f} \frac{H_0^2}{H_{\text{eq}}^2} = a_f^4 \frac{H_f^2}{\Omega_R} \left( \frac{g_{e,r}}{g_{e,\text{eq}}} \right)^{1/3} \left( \frac{g_{e,\text{eq}}}{g_{s,\text{eq}}} \right)^{4/3} \quad (5.2.6)$$

を用いて  $a_f$  を消去すると、この条件は

$$e^{2N_t} > \frac{\sqrt{\Omega_R} H_i^2}{H_0 H_f} \left( \frac{g_{e,\text{eq}}}{g_{e,r}} \right)^{1/6} \left( \frac{g_{s,\text{eq}}}{g_{e,\text{eq}}} \right)^{2/3} \simeq 10^{53} \left( \frac{H_i}{H_f} \right)^2 \left( \frac{H_f}{2 \times 10^{14} \text{GeV}/\hbar} \right) \quad (5.2.7)$$

と書き換えられる。ここで、 $g_e$  はエネルギー密度に対する統計的重み、 $g_s$  はエントロピー密度に対する統計的重みで、添え字 eq, f はそれぞれ  $t = t_{\text{eq}}$  およびインフレーション終了時での値を意味する。ただし、インフレーション終了後直ちに放射優勢の宇宙（熱いビッグバン宇宙）に移行するとした ( $H_f = H_r$ )。また、 $g_{e,r}$  は宇宙再加熱直後の物質の統計的重みで 107 程度と仮定した (表 3.1 参照)。したがって、インフレーションの全指数膨張数が条件

$$N_t > N_o = 61 + \ln \left[ \frac{H_i}{H_f} \left( \frac{H_f}{2 \times 10^{14} \text{GeV}/\hbar} \right)^{1/2} \right] \quad (5.2.8)$$

を満たせば、ホライズン問題は解決される。ここで、 $e^{N_o}$  はインフレーション終了時での観測光円錐の半径とハッブルホライズン半径の比と一致し、現在の観測領域（正確にはインフレーション後での観測可能領域）がハッブルホライズンより大きくなって以降でのインフレーション率を表す。

次に平坦性問題を見てみよう。まず、空間曲率とスケール因子の 2 乗の積は保存されるので、

$$\Omega_k = -\frac{k_0}{H_0^2} = -\frac{k_i a_i^2}{H_0^2} = -e^{-2N_t} \frac{k_i a_f^2}{H_0^2}. \quad (5.2.9)$$

一様性の議論と同様の方法で  $a_f$  を消去すると、これより

$$|\Omega_k| = e^{-2N_t + 2N_o} \frac{|k_i|}{H_i^2}. \quad (5.2.10)$$

よって、 $\Omega_k$  に対する観測的制限 (WMAP7yr+BAO+H<sub>0</sub>)[?]

$$-0.0133 < \Omega_k < 0.0084 \quad (95\% \text{CL}) \quad (5.2.11)$$

を考慮すると、インフレーションの全指数膨張数が条件

$$\begin{aligned} N_t &> N_o + \ln \left( \frac{|k_i|^{1/2}}{|\Omega_k|^{1/2} H_i} \right) \\ &= 63.3 + \ln \left[ \frac{0.1}{|\Omega_k|^{1/2}} \frac{|k_i|^{1/2}}{H_r} \left( \frac{H_f}{2 \times 10^{14} \text{GeV}/\hbar} \right)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

を満たせば、観測された平坦性が説明される。ただし、この制限は初期の曲率  $k_i$  に依存し、 $|k_i| \gg H_i$  なら一様性からの制限 (5.2.8) より強くなる。

また、いくつかのモデルでは、インフレーション終了後、インフラトンの崩壊が緩やかで、放射優勢の宇宙（熱いビッグバン宇宙）に移行するまで時間がかかる場合がある。この期間は宇宙前加熱期と呼ばれ、後ほど述べるように、多くのモデルでは  $1/a^3$  に比例して減少するインフラトンのエネルギーが宇宙膨張を支配する。この場合、 $N_o$  の表式は

$$N_o = 61 + \ln \left[ \frac{H_i}{H_f} \left( \frac{H_f}{2 \times 10^{14} \text{GeV}/\hbar} \right)^{1/3} \left( \frac{g(T_r)}{216} \right)^{1/12} \left( \frac{T_r}{10^{16} \text{GeV}} \right)^{1/3} \right] \quad (5.2.13)$$

となる。ただし、 $H_f \geq H_r$  より、再加熱温度  $T_r$  は次の条件を満たさなければならない。

$$\frac{H_f}{2 \times 10^{14} \text{GeV}/\hbar} \geq \left( \frac{g(T_r)}{216} \right)^{1/2} \left( \frac{T_r}{10^{16} \text{GeV}} \right)^2 \quad (5.2.14)$$

【問 5.2.1】 (5.2.6) と (5.2.13) を導け。 \_\_\_\_\_ □

【問 5.2.2】 インフレーション時の宇宙膨張率  $H$  が一定で、時刻  $t = t_f$  にインフレーションが終了し直ちに輻射優勢 LFRW モデルに移行するとする。宇宙再加熱温度  $T_r$  が  $10^{16} \text{GeV}$  であるとして、ホライズン問題が解決される、すなわちインフレーションの始まりに現在の観測領域が  $c/H$  以下のサイズであるためには、インフレーションが続く時間  $\Delta t$  がいくら以上必要か？  $H\Delta t$  の値で答えよ。また、 $k_i = 1/L_{\text{pl}}^2$  とするとき、平坦性問題が解決されるには、 $H\Delta t$  がいくら以上である必要があるか？ \_\_\_\_\_ □

### 5.2.3 1成分インフラトンモデル

ここで問題になるのが果たしてこのようなことが起きるのかという問題である。例えば、宇宙定数  $\Lambda$  が非常に大きな値を持つとすると、物質のエネルギー密度は宇宙膨張で急速に減少するので、次第に宇宙は  $H$  が一定値  $(\Lambda/3)^{1/2}$  の de Sitter 宇宙に近づく。しかし、宇宙定数は定数であるので、この宇宙は永遠にインフレーションの続く空っぽの宇宙になり、現在のビッグバン宇宙に移行しない。

この困難は、宇宙項の代わりに平坦なポテンシャルをもつスカラー場（インフラトンと呼ばれる）のエネルギーを利用することにより解決できる (図 5.8)。例えば簡単のため、ポテンシャル  $V(\phi)$  をもつ 1成分の実スカラー場  $\phi$  を考えると、空間的に一様なとき、その圧力とエネルギーは

$$P = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad \rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (5.2.15)$$

で与えられる。したがって、場がゆっくりと変化する時期（スローロール）には、 $\dot{\phi} \approx 0$ とにおいて、

$$P \approx -\rho \approx -V(\phi) \quad (5.2.16)$$

となり、宇宙項と同じ状態方程式が得られる。しかし、場の値がポテンシャルの谷に近づくと $\dot{\phi}$ は大きくなり、最終的には $\phi$ はポテンシャルの谷で振動を始める。この振動エネルギーが相互作用により通常の素粒子に転化すると宇宙再加熱が起き、インフレーションは終了して熱いビッグバン宇宙が生まれる。

**スローロールインフレーション** もう少し定量的に評価してみよう。まず、膨張宇宙においてポテンシャル $V(\phi)$ をもつ空間的に一様なスカラ場 $\phi$ は

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (5.2.17)$$

に従って変化する。このスカラ場のエネルギーが宇宙膨張を支配しているとする  
と、宇宙膨張の方程式は

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V \right) \quad (5.2.18)$$

で与えられるので、特に、

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2} \dot{\phi}^2. \quad (5.2.19)$$

これより、

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = \frac{\kappa^2}{3} (V - \dot{\phi}^2) \quad (5.2.20)$$

となり、 $\dot{\phi}^2 < V$ なら加速膨張が実現される。

ただし、この条件が長い間保たれるには、一般には、 $|\ddot{\phi}|$ が $3H|\dot{\phi}|$ と比べて小さい必要がある。そこで、 $\ddot{\phi}$ が無視できる条件を求めてみよう。まず、(5.2.17)においてこの項を無視すると

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi) \quad (5.2.21)$$

この解に対して、

$$\epsilon := \frac{m_{\text{pl}}^2 (V')^2}{2V^2} \ll 1 \quad (5.2.22)$$

が成り立つ時期では、加速膨張が起これるか $H$ の変化が緩やかになる：

$$\frac{|\dot{H}|}{H^2} = \frac{\kappa^2 \dot{\phi}^2}{2H^2} \simeq \frac{m_{\text{pl}}^2 (V')^2}{2V^2} = \epsilon \ll 1 \quad (5.2.23)$$

さらに、

$$\eta := \frac{m_{\text{pl}}^2 V''}{V} \quad (5.2.24)$$

とおくと, (5.2.21) の時間微分より

$$\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \simeq \epsilon - \eta \quad (5.2.25)$$

となるので,

$$|\eta| \ll 1 \quad (5.2.26)$$

なら,  $\ddot{\phi}$  を無視する近似が正当化される. そこで, 条件 (5.2.22), (5.2.26) はインフラトンに対するスローロール (slow roll) 条件と呼ばれる.

1 成分インフラトンモデルにおいて, 時刻  $t$  からインフレーション終了時  $t = t_f$  までの指数膨張数  $N$  は, 一般に

$$N = \int_t^{t_f} H dt = \int_{\phi}^{\phi_f} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \quad (5.2.27)$$

となるので, スローロール近似が良い場合には,  $N$  を時刻の代わりにそのときの  $\phi$  の値の関数と見なすと

$$N(\phi) \simeq \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{3H^2}{V'} d\phi \simeq \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{V}{m_{\text{pl}}^2 V'} d\phi = \pm \int_{\phi}^{\phi_f} \frac{d\phi}{m_{\text{pl}} \sqrt{2\epsilon}} \quad (5.2.28)$$

と表される. したがって, ポテンシャル  $V$  が与えられると容易に  $N(\phi)$  を計算することができる.

インフレーションの終了 極小点をもつポテンシャルでは, 一般に極小点で  $\epsilon, |\eta| \rightarrow \infty$  となるので, インフラトンが極小点に近づくと必ずスローロール近似は破れ, 極小点の近傍で振動するようになる. この状況を具体的に見るために, 極小点 (簡単のため,  $\phi = 0$  とする) の近傍でポテンシャルを  $V \simeq m^2 \phi^2 / 2$  と近似する. このとき, インフラトンの運動方程式は

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m^2\phi = 0 \quad (5.2.29)$$

となる. この方程式の基本解は  $e^{\lambda t}$  の形をもち,  $\lambda$  は

$$\lambda^2 + 3H\lambda + m^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-3H \pm \sqrt{9H^2 - 4m^2}}{2} \quad (5.2.30)$$

で与えられる. スローロール条件が破れると  $H/m = 1/(2\sqrt{3\epsilon}) \ll 1$  となるので, 一般解は

$$\phi \simeq e^{-3Ht/2} (A \sin(mt) + B \cos(mt)) = \frac{1}{a^{3/2}} A \sin(mt + \alpha) \quad (5.2.31)$$

となり, 確かにインフラトンは減衰振動に移行する. この減衰は宇宙膨張により引き起こされる (断熱減衰). 興味深いことに, この減衰振動時期でのエネルギー密度を計算すると

$$\rho = \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2) \simeq \frac{A^2}{2a^3} \quad (5.2.32)$$

となり、非相対論的物質と同じ振る舞いをする事が分かる。これは、一様に角振動する  $m$  で振動するスカラ場が、量子論の観点から見ると、質量  $m$  の静止した粒子の集団と同等であることによる。

宇宙再加熱 したがって、このままではフリードマン宇宙には移行するが冷たい膨張宇宙になってしまう。しかし、現実にはインフラトンと通常物質場の相互作用のため、このインフラトンの振動エネルギーは物質場のエネルギーに移行する。量子論的には、この相互作用は、質量  $m$  のインフラトン粒子が遙かに小さな質量をもつ標準モデルの粒子（あるいは大統一理論で現れる重い粒子）に崩壊する反応と見ることができる。この崩壊率を  $\Gamma$  とすると、インフラトンのエネルギー密度  $\rho_\phi$  と崩壊して得られる相対論的物質のエネルギー密度  $\rho_r$  の変化は

$$\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt}(a^3 \rho_\phi) = -\Gamma \rho_\phi, \quad (5.2.33a)$$

$$\frac{1}{a^4} \frac{d}{dt}(a^4 \rho_r) = \Gamma \rho_\phi \quad (5.2.33b)$$

で与えられる。振動の始まる時間を  $t_f$ 、正確には  $H_f = 2/(3t_f)$  とおくと、この解は

$$a^3 \rho_\phi = (a^3 \rho_\phi)_f e^{-\Gamma(t-t_f)}, \quad (5.2.34a)$$

$$a^4 \rho_r = (a^3 \rho_\phi)_f \Gamma \int_{t_f}^t dt a e^{-\Gamma(t-t_f)} \quad (5.2.34b)$$

となる。 $a$  の時間変化は

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}(\rho_\phi + \rho_r) = \frac{H_f^2}{\rho_{\phi,f}}(\rho_\phi + \rho_r) \quad (5.2.35)$$

で決まるが、初期の  $\rho_\phi > \rho_r$  の時期では物質優勢の膨張則  $a = a_f(t/t_f)^{2/3}$  に従うとしてよい。この近似のもとで、 $\rho_r$  と  $\rho_\phi$  の比は

$$\frac{\rho_r}{\rho_\phi} = \gamma \frac{t}{t_f} \int_{t_f/t}^1 du u^{2/3} e^{(1-u)\gamma t/t_f} \quad (5.2.36)$$

に従って時間変化する。ここで、

$$\gamma := t_f \Gamma = \frac{2\Gamma}{3H_f}. \quad (5.2.37)$$

$t/t_f \gg 1$  のとき、 $\rho_r/\rho_\phi$  は  $\gamma t/t_f$  のみに依存し、 $\gamma t/t_f \simeq 1.073$  のとき 1 となる。これより、放射優勢  $\rho_r > \rho_\phi$  となる時刻  $t_r$  とそのときの温度は、 $\gamma \ll 1$  のとき

$$t_r \simeq \frac{t_f}{\gamma} = \frac{1}{\Gamma} \Rightarrow H_r \simeq \Gamma, \quad (5.2.38a)$$

$$\rho_r \simeq \frac{\gamma^2}{e} \rho_{\phi,f}$$

$$\Rightarrow T_r \simeq 4.5 \times 10^{15} \text{GeV} \left( \frac{g(T_r)}{107} \right)^{-1/4} \left( \frac{\Gamma}{10^{14} \text{GeV}/h} \right)^{1/2} \quad (5.2.38b)$$

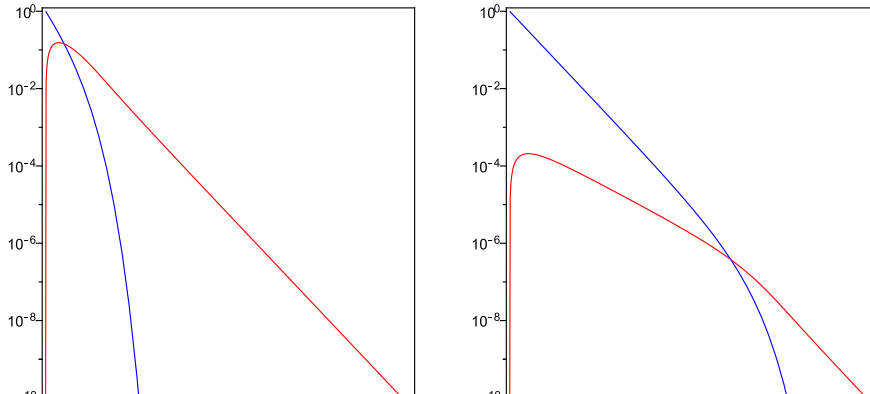


図 5.4: 宇宙の再加熱. 左はインフレーションが振動を始める時点で  $\gamma_{10} = 1$ , 右は  $\gamma = 0.001$  の場合. 右では長い前加熱時期の後に放射優勢になっている.

で与えられることが分かる. 図 5.4 に示したように, これは正確な計算とも一致する. このように, 宇宙再加熱が単純なインフラトンの崩壊により起きる場合には, 再加熱温度は崩壊率のみで決定される.

この結果は,  $\Gamma \ll H_f$  のとき, インフレーション終了後, 再加熱までにインフラトンの振動エネルギーが宇宙膨張を支配する物質優勢膨張宇宙の時期が長く続くことを意味する. この時期は前加熱期と呼ばれる. 前加熱期は必ずしも冷たいわけではない. 実際, 上記のエネルギー密度の発展方程式より, 放射のエネルギー密度  $\rho_r$ , したがって宇宙の温度  $T$  は,

$$4H\rho_r = \Gamma\rho_\phi \Rightarrow t - t_f \simeq \frac{1}{4H_f} \simeq \frac{3}{8}t_f \quad (5.2.39)$$

の頃に最大値

$$T_p \simeq 5 \times 10^{15} \text{GeV} \left( \frac{g(T_r)}{107} \right)^{-1/4} \left( \frac{\sqrt{\Gamma H_f}}{10^{14} \text{GeV}/h} \right)^{1/2} \quad (5.2.40)$$

を取り, その後, 放射優勢期に移行するまで単調に減少することがわかる (図 5.4 参照). ただし, この時期での  $\rho_r$  の振る舞いは

$$a^4 \rho_r \approx \frac{3\gamma}{5} a_f (a^3 \rho_\phi)_f \left( \frac{a}{a_f} \right)^{5/3} \quad (5.2.41)$$

となり,  $aT$  が時間と共に増大するため, 宇宙のエントロピーは増加を続ける.

**【問 5.2.3】** 式 (5.2.39) と式 (5.2.40) を導け. \_\_\_\_\_ □

---

## §5.3

---

### ゆらぎの生成

---

このように、インフレーション宇宙モデルは、ビッグバンモデルでは解決できない問題を解消すると共に、ビッグバン宇宙そのものの生成をも説明する。実は、インフレーションにはさらに驚くべき効果がある。

#### 5.3.1 密度ゆらぎ

一般に、量子論では基底状態でも場は零点振動をしている。この零点振動は通常は観測できないが、膨張宇宙では状況が異なる。例えば、インフラトンも小さいスケールでは様々な波長の零点振動をもつが、この零点振動の波長はインフレーションにより急速に引き延ばされ、ついには Hubble ホライズンスケールより長くなる。ところが、各時刻で力学的に影響を及ぼすスケールが Hubble ホライズンスケールなので、それより長くなった量子ゆらぎは振動できず、振幅が凍結されてしまう。このゆらぎは宇宙の再加熱の際に、物質のエネルギー密度のゆらぎへと変化する。これらのゆらぎは、ビッグバン宇宙に移行した後も宇宙膨張と共にスケールが増大し続け、その一部は現在の銀河からホライズンに相当する長さに引き延ばされる。この零点振動起源のゆらぎが重力不安定により成長することにより、現在観測される銀河やその分布を生み出すことができるのである。この理論の大きな特徴は、インフレーションの短い時期に銀河スケール以上の波長を持つゆらぎが生成されるため、その振幅がほとんど波長によらないことにある (Harrison-Zeldovich スペクトル)。これは、観測をよく説明する。実際、図 3.6 の実線はこのような理論の予言に対応するものである。

**ゆらぎの量子論** 1成分インフラトンモデルで、この議論をもう少し定量的に見てみよう。まず、時空のゆらぎを無視して、インフラトンのみが空間的にゆらぐとしよう。一般的なインフラトンの方程式

$$\square\phi - V'(\phi) = 0 \tag{5.3.1}$$

より、空間的に一様な膨張宇宙では、インフラトンのゆらぎ成分  $X = \delta\phi(t, \mathbf{x})$  は、

$$\ddot{X} + 3H\dot{X} - \frac{1}{a^2}\Delta X + V''(\phi)X = 0 \tag{5.3.2}$$



に従う。場の量子論では、このゆらぎ  $X$  は、次のように波数ベクトル  $\mathbf{k}$  を添え字として持つ消滅生成演算子  $a_{\mathbf{k}}$  を用いて

$$X(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi^3)^{1/2}} \left[ a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] \quad (5.3.3)$$

と表される。ここで、 $u_{\mathbf{k}}(t)$  は方程式

$$\ddot{u}_{\mathbf{k}} + 3H\dot{u}_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}}^2 u_{\mathbf{k}} = 0; \quad (5.3.4)$$

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 = V''(\phi) + \frac{k^2}{a^2}, \quad (5.3.5)$$

の解である。ただし、 $a_{\mathbf{k}}$  が標準的な交換関係

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = 0 \quad (5.3.6)$$

を満たすためには、 $u_{\mathbf{k}}$  は次の規格化条件を満たさねばならない：

$$u_{\mathbf{k}}^* \dot{u}_{\mathbf{k}} - u_{\mathbf{k}} \dot{u}_{\mathbf{k}}^* = -i a(t)^{-3} \quad (5.3.7)$$

すべての  $\mathbf{k}$  に対してモード関数  $u_{\mathbf{k}}$  を指定すると、対応するフォック真空  $|0\rangle$  が条件

$$a_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{k} \quad (5.3.8)$$

により定まる。この真空に対して、ゆらぎの相関関数は

$$\langle X(t, \mathbf{x}_1) X(t, \mathbf{x}_2) \rangle = \int \frac{d^3k}{4\pi k^3} \mathcal{P}_\phi(\mathbf{k}; t) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \quad (5.3.9)$$

と表される。ここで、 $\mathcal{P}_\phi(\mathbf{k}; t)$  は

$$2\pi^2 \mathcal{P}_\phi(\mathbf{k}; t) := k^3 |u_{\mathbf{k}}(t)|^2 \quad (5.3.10)$$

で定義され、

$$\langle X(t, \mathbf{x})^2 \rangle = \int \frac{d^3k}{4\pi k^3} \mathcal{P}_\phi(\mathbf{k}; t) \quad (5.3.11)$$

より、零点振動による  $X$  の量子ゆらぎの各フーリエ成分の大きさ（の2乗）、すなわちパワースペクトルを表す。

**Minkowski 時空での量子ゆらぎ** Minkowski 時空での自由場 ( $V = V_0 + m^2\phi^2/2$ ) では、スケール因子  $a$  は定数で  $p = k/a$  が運動量に当たるので、 $\omega_{\mathbf{k}} = (m^2 + p^2)^{1/2}$  は時間に依らず、

$$u_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}} a^3}} (\alpha_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} + \beta_{\mathbf{k}} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}) \quad (5.3.12)$$

となる。ここで、

$$|\alpha_{\mathbf{k}}|^2 - |\beta_{\mathbf{k}}|^2 = 1. \quad (5.3.13)$$

標準的な Minkowski 真空は  $|\alpha_{\mathbf{k}}| = 1, \beta_{\mathbf{k}} = 0$  に当たる. この真空では, ゆらぎのパワースペクトルは

$$\mathcal{P}_\phi(k; t) = \frac{p^3}{4\pi^2\omega_k} \quad (5.3.14)$$

となる. 特に,  $k$  が大きい極限では  $\mathcal{P}_\phi \approx p^2/(2\pi)^2$  となる. この振る舞いは,  $\phi$  がエネルギーの次元を持つことに起因する.

ド・ジッター宇宙での量子ゆらぎ 膨張宇宙では, この Minkowski 時空の場合の結果で  $a$  を時間の関数に変えれば定性的に良い近似が得られると予想される. この予想が正しいと, 量子ゆらぎの各モードの振幅は  $p = k/a(t) \propto 1/a(t)$  に従って急速に減少することになる. しかし, この予想は正しくない. それを見るために,  $H$  が一定となる指数関数的インフレーション宇宙 (ド・ジッター宇宙) において, ポテンシャル  $V$  が 2 次関数となる自由スカラー場の振る舞いを厳密に求めてみよう:

$$V = V_0 + \frac{m^2}{2}\phi^2. \quad (5.3.15)$$

ただし,  $m^2$  は負でもよい. この場合, モード関数に対する方程式 (5.3.4) は, 固有時間  $t$  の代わりに共形時間  $\eta = -1/(aH)$  を用いると

$$\frac{d^2 u_{\mathbf{k}}}{d\eta^2} - \frac{2}{\eta} \frac{du_{\mathbf{k}}}{d\eta} + \left( k^2 + \frac{m^2}{H^2\eta^2} \right) u_{\mathbf{k}} = 0 \quad (5.3.16)$$

と書ける. この一般解はハンケル関数を用いて

$$u_{\mathbf{k}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} H(-\eta)^{3/2} \left[ \alpha_{\mathbf{k}} H_\nu^{(1)}(-k\eta) + \beta_{\mathbf{k}} H_\nu^{(1)}(-k\eta)^* \right] \quad (5.3.17)$$

と表される. ここで,

$$\nu = \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{4m^2}{9H^2} \right)^{1/2} = \nu_1 + i\nu_2 \quad (\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}). \quad (5.3.18)$$

また, 規格化条件 (5.3.7) は, (5.3.13) 式と一致する.

各モード関数は,  $a = 1/(-H\eta) \rightarrow 0$  ( $p = k/a \rightarrow \infty$ ) の極限で

$$u_{\mathbf{k}} \approx \frac{1}{\sqrt{2(k/a)a^3}} e^{-\pi\nu_2/2} \left( \alpha_{\mathbf{k}} e^{-ik\eta - i\delta} + \beta_{\mathbf{k}} e^{ik\eta + i\delta} \right) \quad (5.3.19)$$

( $\delta = (2\nu_1 + 1)\pi/4$ ) と振る舞うので,  $|\alpha_{\mathbf{k}}| = 1, \beta_{\mathbf{k}} = 0$  となる真空を選ぶと短波長極限で Minkowski 真空とうまく対応する. そこで, 通常, この **Bunchi-Davis 真空** と呼ばれる真空が宇宙で実現されていると仮定する. 以下でも, この仮定を採用する. このとき, ゆらぎの波長がハッブルホライズンを超え  $k/(aH) = -k\eta \ll 1$  となると, モード関数は

$$u_{\mathbf{k}} \approx -i \frac{H}{k^{3/2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\pi\nu_2/2} \left[ \Gamma(\nu) \left( \frac{-k\eta}{2} \right)^{3/2-\nu} + \Gamma(-\nu) e^{-i\nu\pi} \left( \frac{-k\eta}{2} \right)^{3/2+\nu} \right] \quad (5.3.20)$$

と振る舞う。これより、 $m \gg H$  のとき、 $\nu \simeq im/H$  より、ゆらぎのパワースペクトルは

$$\mathcal{P}_\phi(k; t) \approx \frac{k^3}{4\pi^2 m a^3} = \frac{p^3}{4\pi^2 m} \quad (5.3.21)$$

となり、Minkowski 時空の場合と一致している。しかし、 $|m^2| \ll H^2$  の場合には、 $\nu \simeq 3/2 - m^2/(3H^2)$  より、

$$\mathcal{P}_\phi(k; t) \simeq \frac{H^2}{4\pi^2} \left( \frac{k}{2aH} \right)^{2m^2/(3H^2)} \quad (5.3.22)$$

が成り立つ。特に、 $m = 0$  のとき、ハッブルホライズン半径を超えるスケールではゆらぎのスペクトルは完全に平坦になる。

一般のスローロールインフレーションでのゆらぎ 以上のド・ジッター宇宙での議論と結果は、少しの修正で一般的なスローロール近似が成り立つインフレーションに対しても成り立つ。これを見るうえで、まず必要なことは、時空（あるいは重力場）のゆらぎを取り入れることである。時空計量のゆらぎを扱うときに大切なことは、空間的に一様な宇宙の計量  $g_{\mu\nu}$  からのずれとしてのゆらぎ  $\delta g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}$  が、非一様な宇宙と基準となる一様な宇宙の対応付けに依存することである。これは例えば、Minkowski 時空でも一般的な座標系で計量を表すと非一様に見えることから予想できる。このような対応付けへの依存性は物理的には意味をもたないので、そのような自由度（ゲージ自由度）を除去するために、対応付け（ゲージ）に依存しない量（ゲージ不変量）のみを用いてゆらぎを記述することがしばしば行われる。各ゲージ不変量は、何らかの対応付けでのゆらぎと対応している。

たとえば、空間計量のゆらぎがゼロとなるゲージでのスカラ場のゆらぎ  $\delta\phi$  に対応するゲージ不変量のフーリエ成分を  $X_{\mathbf{k}}$  とする。このとき、時空のゆらぎを考慮すると、(5.3.1) の摂動方程式が、

$$\ddot{X}_{\mathbf{k}} + 3H\dot{X}_{\mathbf{k}} + \left[ \frac{k^2}{a^2} + \tilde{m}^2 \right] X_{\mathbf{k}} = 0 \quad (5.3.23)$$

で与えられることが示される [49, 37, 38]. ここで、 $\tilde{m}^2$  は

$$\tilde{m}^2 := V'' - \frac{\kappa^2}{a^3} \left( \frac{a^3}{H} \dot{\phi}^2 \right) \quad (5.3.24)$$

で定義される時間の関数で、スローロール近似では

$$\frac{\tilde{m}^2}{H^2} \approx 3\eta - 6\epsilon \quad (5.3.25)$$

が成り立つ。したがって、スローロールインフレーションの時期にハッブルホライズンを出た量子ゆらぎはほぼ一定のパワースペクトル

$$\mathcal{P}_\phi(k; t) \approx \frac{H^2}{4\pi^2} \left( \frac{k}{2aH} \right)^{2\eta-4\epsilon} \quad (5.3.26)$$

を持つことになる。

曲率ゆらぎ 以上で求めたインフラトンのゆらぎは、インフレーション終了後、ビッグバン宇宙における物質密度の断熱的ゆらぎへと受け継がれる。このゆらぎの時間発展は一般に複雑であるが、ハッブルホライズンより波長が長い時期での振る舞いは、密度ゆらぎそのものではなく、その生み出す空間曲率のゆらぎに着目すると容易に得られる。まず、この空間曲率のゆらぎ  $\Phi$  は適当なゲージ条件のもとで、計量のゆらぎと次のように結びつけられる [40].

$$ds^2 = -(1 + 2\Psi)dt^2 + a^2(1 + 2\Phi)d\mathbf{x}^2. \quad (5.3.27)$$

ここで、 $\Psi$  は重力ポテンシャルのゆらぎで、アインシュタイン方程式より、 $\Phi$  との間に  $\Psi = -\Phi$  の関係がある。同じゲージでの物質速度のゆらぎ、正確には

$$T_{ij} = (\rho + P)\frac{H}{a}\partial_j v \quad (5.3.28)$$

により定義される速度ポテンシャル  $v$  と  $\Phi$  からゲージ不変量(バーディーン (Bardeen) パラメータ)

$$Z := \Phi - v \quad (5.3.29)$$

を定義する。一般に、密度ゆらぎには成長するモードと減衰するモードが存在するが、インフレーションの時期に生み出されたゆらぎのうち、現在の宇宙に影響するのは成長モードのみである。この成長モードに対しては、 $Z$  のフーリエ成分  $Z_{\mathbf{k}}$  が  $k/a \ll H$  のとき良い精度で保存されることが示される [4, 40, 37]. 各ゆらぎの共動波長  $2\pi/k$  は変化しないので、インフレーション中にハッブルホライズンの外に出たゆらぎは、フリードマン宇宙に移行したあと、再びハッブルホライズンの内側に入る。このときの密度ゆらぎの振幅は、 $Z_{\mathbf{k}}$  と同程度となることが示される。

インフレーション中では、バーディーンパラメータは、スカラ場のゆらぎを表すゲージ不変量  $X$  を用いて

$$Z = -\frac{H}{\dot{\phi}}X \quad (5.3.30)$$

と表される。したがって、 $Z_{\mathbf{k}}$  が  $k/(aH) < 1$  で変化しなくなることと上の評価より、 $Z$  に関するパワースペクトルは

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \frac{H^2}{\dot{\phi}^2} \Big|_{t=t_k} \mathcal{P}_\phi(k; t_k) \simeq \left( \frac{H^2}{2\pi\dot{\phi}} \right)_{t=t_k}^2 \simeq \left( \frac{H^2}{8\pi^2\epsilon m_{\text{pl}}^2} \right)_{t=t_k} \quad (5.3.31)$$

となる。ここで、 $t_k$  は  $k/a = H$  となる時刻である。このパワースペクトルをある時刻近傍で近似的に

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \mathcal{P}_\zeta(k_*)(k/k_*)^{n_s-1} \quad (5.3.32)$$

と書くと、

$$\frac{dt_k}{d \ln k} = \frac{dt}{d \ln(aH)} = \frac{1}{H - \dot{H}/H} = \frac{1}{(1 + \epsilon)H} \quad (5.3.33)$$

より, スペクトル指数  $n_s - 1$  は

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_\zeta(k)}{d \ln k} \simeq 2\eta - 6\epsilon \quad (5.3.34)$$

で与えられる. すなわち, 非常に平坦なスペクトルが得られる. これはスローロールインフレーションに特有の結果である. 特に,  $\epsilon = \eta = 0$  の極限では,  $n_s = 1$  となる. このような完全に平坦なスペクトルはハリソン・ゼルドヴィッチスペクトルないしスケール不変スペクトルと呼ばれる.

例えば, 観測領域に対応する時期のポテンシャルが

$$V = V_0 \left[ 1 - \left( \frac{\phi}{v} \right)^p \right] \quad (p < 0, 2 < p) \quad (5.3.35)$$

と近似できるとき,

$$N \simeq \frac{1}{p(p-2)} \frac{v^2}{m_{\text{pl}}^2} \left( \frac{\phi}{v} \right)^{2-p}, \quad (5.3.36a)$$

$$\epsilon \simeq \frac{p^2}{2} \frac{m_{\text{pl}}^2}{v^2} \left( \frac{\phi}{v} \right)^{2(p-1)}, \quad (5.3.36b)$$

$$\eta \simeq -p(p-1) \frac{m_{\text{pl}}^2}{v^2} \left( \frac{\phi}{v} \right)^{p-2} \quad (5.3.36c)$$

となる. 特に,  $v \ll m_{\text{pl}}$  で  $p > 2$  の時には,  $\phi/v \ll 1$  となるので,  $\epsilon \ll |\eta|$ . よって,

$$n_s - 1 \simeq -\frac{2}{N} \frac{p-1}{p-2}. \quad (5.3.37)$$

スペクトル指数  $n_s$  は一般には波数  $k$  とともに変化する (running). この変化率は

$$\frac{1}{H} \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} \simeq -2\eta + 4\epsilon, \quad (5.3.38a)$$

$$\frac{1}{H} \dot{\eta} = -\xi + 2\epsilon\eta \quad (5.3.38b)$$

より,

$$n'_s := \frac{dn_s}{d \ln k} = -2\xi + 14\epsilon\eta - 24\epsilon^2 \quad (5.3.39)$$

となる. ここで,

$$\xi := m_{\text{pl}}^4 \frac{V'V^{(3)}}{V^2}. \quad (5.3.40)$$

### 5.3.2 原始重力波

インフレーションの時期には, インフラトンだけでなく時空計量そのもののゆらぎもホライズンを超えるスケールに引き延ばされ, その振動は凍結される. この時空ゆらぎは波長が再びホライズン内にはいると振動を始め, 重力波として伝搬する.

振幅とスペクトル 重力波の振る舞いは、上で見たスカラ場のゆらぎと類似している。まず、重力波は計量の空間成分のゆらぎ

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j \quad (5.3.41)$$

で表される。ただし、横波条件より、

$$h_i^i = \partial^j h_{ji} = 0 \quad (5.3.42)$$

が要求される。アインシュタイン方程式より、この摂動  $h_{ij}$  は波動方程式

$$\ddot{h}_j^i + 3H\dot{h}_j^i + \frac{k^2}{a^2}h_j^i = 0 \quad (5.3.43)$$

に従う。各成分は互いに独立に振る舞うので、この方程式はスカラ場のゆらぎに対する方程式で  $m = 0$  とした場合と完全に一致する。特に、インフレーション中に生成された量子ゆらぎの振幅  $h_{ij}$  は、波長がハッブルホライズン半径を超えると変化しなくなり、フリードマン宇宙に移行後、再びハッブルホライズンの内側に入るまで一定に保たれる。また、

$$\langle h_j^i h_i^j \rangle = \int \frac{d^3k}{4\pi k^3} \mathcal{P}_h(k; t) \quad (5.3.44)$$

により定義される原始重力波のパワースペクトル  $\mathcal{P}_h(k; t)$  は、 $k/a < H$  では  $t$  に依存せず、(5.3.26) より

$$\mathcal{P}_h(k) \simeq 8\kappa^2 \left( \frac{H}{2\pi} \right)_{t=t_k}^2 = 8 \left( \frac{H}{2\pi m_{\text{pl}}} \right)_{t=t_k}^2 \quad (5.3.45)$$

で与えられる。この式は、インフレーションモデルの詳細に依らず、非常に一般性の高いものである。

ここで、余分な係数  $8\kappa^2$  は次のような理由で現れる。まず、重力波を表す  $h_j^i$  に対する作用積分は

$$S = \int dt \int d^3x \frac{1}{8\kappa^2} \left( a^3 \dot{h}_j^i \dot{h}_i^j - a D h_j^i D h_i^j \right) \quad (5.3.46)$$

となる。重力波は2つの偏光に対応して自由度が2なので、その平面波解の偏光テンソルを

$$e_{\alpha j}^i(\mathbf{k}) \ (\alpha = +, \times): \quad e_{\alpha i}^i = 0, \quad k^j e_{\alpha i}^j = 0, \quad e_{\alpha i}^j e_{\beta j}^i = 4\delta_{\alpha\beta} \quad (5.3.47)$$

とおくと、 $h_j^i$  は(5.3.6)に対応する標準的な生成・消滅演算子  $a_{\alpha\mathbf{k}}$  を用いて

$$\frac{1}{\kappa} h_j^i = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\alpha=+, \times} (e_{\alpha j}^i(\mathbf{k}) u_{\mathbf{k}}(t) a_{\alpha\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \text{h.c.}) \quad (5.3.48)$$

と展開される。これより、

$$\langle h_j^i h_i^j \rangle = \kappa^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} 2 \times 4 |u_{\mathbf{k}}|^2 \quad (5.3.49)$$

となり、エネルギー次元をもつ1成分スカラ場の場合の  $8\kappa^2$  倍となる。

テンソル-スカラ比とライス (Lyth) 上限 重力波のスペクトル指数  $n_t$  を

$$\mathcal{P}_h(k) = \mathcal{P}_h(k_*)(k/k_*)^{n_t} \quad (5.3.50)$$

で定義すると、密度ゆらぎの場合と同様にして、 $\epsilon = |\dot{H}|/H^2 \ll 1$  の場合には、 $n_t$  は

$$n_t = -2\epsilon \quad (5.3.51)$$

で与えられる。

原始重力波の振幅は、しばしば曲率ゆらぎの振幅との比

$$r := \frac{\mathcal{P}_h}{\mathcal{P}_\zeta} \quad (5.3.52)$$

で表現される。この比はテンソル-スカラ比(と)と呼ばれる。スローロール近似が成り立つ1成分インフラトンモデルでは、この比は

$$r \simeq \frac{8\dot{\phi}^2}{H^2 m_{\text{pl}}^2} = 16\epsilon \quad (5.3.53)$$

と表される。特に、 $r$  と  $n_t$  には

$$n_t = -\frac{1}{8}r \quad (5.3.54)$$

という関係式が成り立つ。この関係式はスローロール1成分インフラトンモデルに対する整合性条件(と)呼ばれ、それが観測により確認されれば、このモデルが良い精度でインフレーションを記述している証拠となる。

1成分インフラトンモデルでは、(5.2.28)式と(5.3.53)式から $\epsilon$ を消去すると、観測されるスケールで

$$r \lesssim 8 \left( \frac{\Delta\phi}{N_o m_{\text{pl}}} \right)^2 \approx 2 \times 10^{-3} \left( \frac{\Delta\phi}{m_{\text{pl}}} \right)^2 \quad (5.3.55)$$

が成り立つ(ライス(D. Lyth)上限[46, ?])。ここで、 $\Delta\phi$ は現在の観測領域がハッブルホライズンより大きくなって以降の時期でのインフラトン場の値の変化である。

**【問 5.3.1】** (5.3.51)式を導け。 \_\_\_\_\_ □

**原始重力波の観測** これらインフレーション起源の原始重力波を直接検出することは今の技術では不可能であるが、間接的に検出することは可能である。その一つは、重力波が宇宙晴れ上がりの時、物質の温度の密度ゆらぎに伴う非等方性とは性質の異なるCMB温度の非等方性を生み出すことに着目する方法である。しかし、この方法は他の効果との分離が難しい。もう一つの方法は、原始重力波が

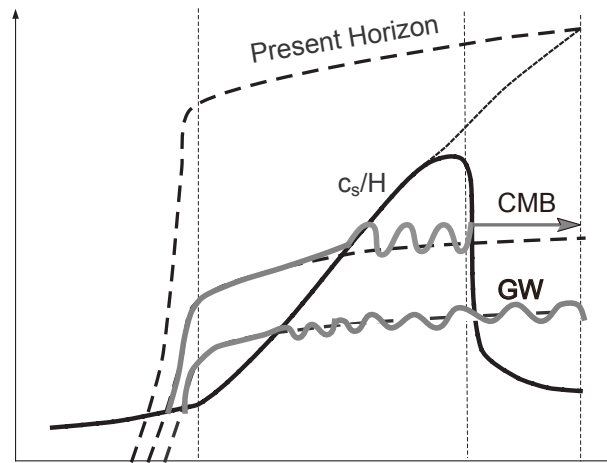


図 5.5: インフレーション宇宙におけるゆらぎの生成と現在への影響.

CMBにBモードと呼ばれる独特の偏光パターンを刻印することを利用することである。そのメカニズムは次のようなものである。

一般に、光が電子で散乱されると、散乱面に垂直な方向に直線偏光が生じる。これは最終散乱面での光子にも当てはまる。ただし、光子が電子に入射する方向はランダムであるので、宇宙が完全に一様等方なら、平均するとこの偏光は打ち消される。しかし実際の宇宙では、温度に空間的なゆらぎがある。この場合、平均した後もわずかな偏光が残ることになる。この偏光は、偏光の方向による違いを天球上のベクトル場として表現するとき、非回転的なパターン（Eモード）となることが示される。このタイプの偏光パターンはEモードと呼ばれる。これに対して、もし重力波が存在すると、たとえ温度が一様でも、散乱光子が電子に入射する方向によって異なった赤方偏移を受ける。その結果、強度を重みとして平均したとき、やはりCMBに偏光が残ることになる。ただし、この場合の偏光の天球上でのパターンには回転的（ベクトル場としての発散がゼロ）成分が含まれることが示される。この偏光パターンはBモードと呼ばれ、密度ゆらぎからは決して生み出されないため、銀河サイズ以上の原始重力波を検出する強力な手段を与える。原始重力波の振幅が分かると、インフレーション時の宇宙膨張率（あるいはインフレーション終了時のビッグバン宇宙の初期温度）を決定することができる。このため、現在、世界中でこのBモード探査の地上観測実験が進められている。また、10年後には専用衛星による観測が計画されている。インフレーションを直接観測することが可能となる時代も間近である。

【問 5.3.2】 インフレーション終了後直ちに再加熱が起きるとして、インフレーション時に生成される重力波の振幅を宇宙の再加熱温度で表せ。 \_\_\_\_\_□



### 5.3.3 観測からの制限

第??章で見たように、現在、WMAP 衛星ならびに Quad や ACT などの地上観測実験による CMB の非等方性観測により、宇宙晴れ上がりの時期でのゆらぎについては、現在のハッブルホライズンスケールからその 3000 分の 1 程度のスケールまで詳しい情報が得られている。その特徴は次のようにまとめられる。[?]

1. (ゆらぎの振幅) 宇宙晴れ上がり時点で、ホライズンスケールでの曲率ゆらぎは  $10^{-5}$  程度である。より正確には、

$$\mathcal{P}_\zeta^2(k_0) \simeq (2.427_{-0.079}^{+0.078}) \times 10^{-9} \quad (k_0 = 0.002 \text{Mpc}) \text{ [WMAP9yr+BAO+H}_0\text{]}$$

2. (平坦なスペクトル) 宇宙晴れ上がり時でのゆらぎから推定される宇宙初期密度ゆらぎのスペクトル指数  $n_s$  は 1 よりわずかに小さい：

$$n_s = 0.9636 \pm 0.0084 \text{ [WMAP 9yr+ACT+SPT+BAO+H}_0\text{]} \quad (5.3.56)$$

3. (テンソル-スカラ比) 原始重力波の CMB への影響は検出されておらず、テンソル-スカラ比  $r$  に対する上限のみが得られている：

$$r < 0.13(95\% \text{ CL}) \text{ [WMAP9yr+ACT+SPT + BAO+H}_0\text{]} \quad (5.3.57)$$

4. (断熱性) ゆらぎのスケールがハッブルホライズンを超えている時期で、ゆらぎの 90% 以上の成分は断熱的である。
5. (ガウス性) ゆらぎの統計的性質は、観測の精度の範囲で、ガウ斯的である。

ここで、ゆらぎが断熱的であるとは、密度ゆらぎ  $\delta\rho$ 、圧力のゆらぎ  $\delta P$ 、音速の 2 乗  $c_s^2 = \dot{P}/\dot{\rho}$  の間に  $\delta P = c_s^2 \delta\rho$  の関係があることを意味する。これは、宇宙物質を構成する各成分の密度  $\rho_i$ 、圧力  $P_i$ 、密度ゆらぎ  $\delta\rho_i$  の間に、

$$S_{ij} := \frac{\delta\rho_i}{\rho_i + P_i} - \frac{\delta\rho_j}{\rho_j + P_j} = 0 \quad (i \neq j) \quad (5.3.58)$$

の関係が成り立つことと同等である。熱いビッグバン宇宙のすべての物質成分が同じインフラトンの崩壊により生み出され、崩壊物質が相対論的かつ崩壊率がほかの場のゆらぎの影響を受けない場合は、宇宙再加熱後の宇宙に存在する密度ゆらぎは断熱的となる。これに対して、インフレーション時にインフラトン以外の場が存在し、それが宇宙再加熱後に崩壊する場合などには、非断熱的なゆらぎが生み出されることがある。このような場合、ゆらぎは空間曲率（ないし重力ポテンシャル）のゆらぎを伴う成分（曲率ゆらぎ）と曲率のゆらぎに寄与しない成分（等曲率ゆらぎ）の重ね合わせとなる。これらのうち、断熱的な曲率ゆらぎ成分は波長がハッブルホライズン半径より十分大きいときに断熱性を保つ。一方、等曲率ゆらぎは振幅（正確には、 $S_{ij}$  の値）は一定に保たれるが、宇宙膨張と共に次第に曲率ゆらぎを生成する。さらに波長がハッブルホライズン半径程度となるとこれらの成分は互いに結合し、力学的な分離はできなくなる

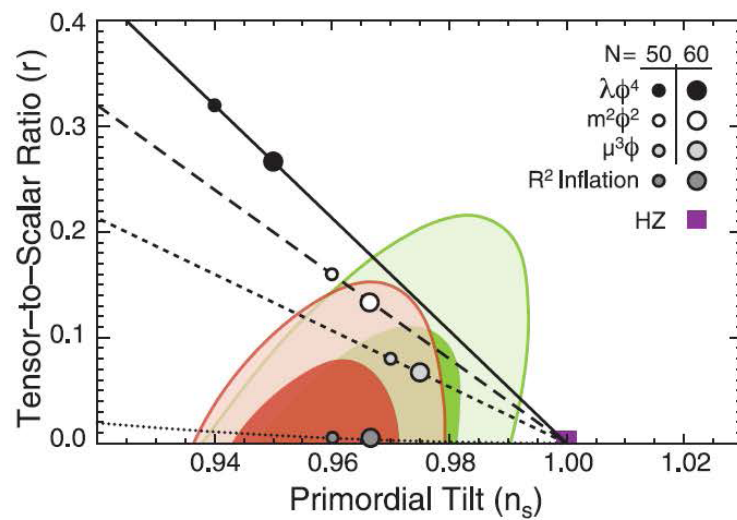


FIG. 7.— Two-dimensional marginalized constraints (68% and 95% CL) on the primordial tilt,  $n_s$ , and the tensor-to-scalar ratio,  $r$ , derived with the nine-year *WMAP* in conjunction with: eCMB (green) and eCMB+BAO+ $H_0$  (red). The symbols and lines show predictions from single-field inflation models whose potential is given by  $V(\phi) \propto \phi^\alpha$  (Linde 1983), with  $\alpha = 4$  (solid),  $\alpha = 2$  (long-dashed), and  $\alpha = 1$  (short-dashed; McAllister et al. 2010). Also shown are those from the first inflation model, which is based on an  $R^2$  term in the gravitational Lagrangian (dotted; Starobinsky 1980). Starobinsky’s model gives  $n_s = 1 - 2/N$  and  $r = 12/N^2$  where  $N$  is the number of  $e$ -folds between the end of inflation and the epoch at which the scale  $k = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$  left the horizon during inflation. These predictions are the same as those of inflation models with a  $\xi\phi^2 R$  term in the gravitational Lagrangian with a  $\lambda\phi^4$  potential (Komatsu & Futamase 1999). See Appendix A for details.

図 5.6: CMB 非等方性観測から得られた  $n_s$  と  $r$  への制限. ACT 観測と WMAP 観測に基づく [?].

---

## §5.4

---

### ゆらぎの統計

---

#### References

- Maldacena J: JHEP0305:013 (2003) "Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models"

#### 5.4.1 (3 + 1) 分解

作用積分は,

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [R - (\nabla\phi)^2 - 2V]. \quad (5.4.1)$$

計量を

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + q_{ij} (dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) \quad (5.4.2)$$

と (3 + 1) 分解すると, 作用積分は

$$S = \frac{1}{2} \int dt d^3x \sqrt{q} \left[ N ({}^3R - 2V - q^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi) + N^{-1} \left\{ E_{ij} E^{ij} - E^2 + (\dot{\phi} - \beta^i \partial_i \phi)^2 \right\} \right] \quad (5.4.3a)$$

ここで,

$$E_{ij} = -NK_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{q}_{ij} - D_i \beta_j - D_j \beta_i), \quad (5.4.4a)$$

$$E = E_i^i = q^{ij} E_{ij}. \quad (5.4.4b)$$

これより得られる拘束条件は

$$\text{HC} : N^2 \{ {}^3R - 2V - q^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi \} = E_j^i E_i^j - E^2 + (\dot{\phi} - \beta^j \partial_j \phi)^2, \quad (5.4.5a)$$

$$\text{MC} : ND_j [N^{-1} (E_i^j - E \delta_i^j)] = (\dot{\phi} - \beta^j \partial_j \phi) \partial_i \phi. \quad (5.4.5b)$$

運動方程式は,

- $\frac{1}{\sqrt{q}} (\partial_t - D \cdot \beta) \left[ N^{-1} \sqrt{q} (\dot{\phi} - \beta \cdot D\phi) \right] - D \cdot (ND\phi) + NV' = 0, \quad (5.4.6a)$

- $-\frac{1}{\sqrt{q}} q_{ik} q_{jl} \partial_t \left[ N^{-1} \sqrt{q} (E^{kl} - E q^{kl}) \right] - 2N^{-1} (E_{il} E_j^l - E E_{ij}) + D_i D_j N - \Delta N q_{ij} - N^3 R_{ij} + ND_i \phi D_j \phi + \frac{1}{2} q_{ij} \left[ N ({}^3R - 2V - (D\phi)^2) + N^{-1} \left\{ E_j^i E_i^j - E^2 + (\dot{\phi} - \beta \cdot D\phi)^2 \right\} \right] = 0. \quad (5.4.6b)$

### 5.4.2 一様背景時空

背景時空と背景場を

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 dx^2, \quad a = e^\alpha, \quad (5.4.7a)$$

$$\phi = \phi(t) \quad (5.4.7b)$$

とおくと、拘束条件と場の方程式は

$$H^2 = \frac{1}{6} (\dot{\phi}^2 + 2V), \quad (5.4.8a)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{3} V - \dot{\phi}^2, \quad (5.4.8b)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0. \quad (5.4.8c)$$

これより、特に

$$\ddot{\alpha} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2. \quad (5.4.9)$$

### 5.4.3 ゲージ固定

上記一様背景時空解において、摂動に対するゲージ条件を

$$\delta\phi = 0, \quad (5.4.10a)$$

$$q_{ij} = e^{2\alpha+2\zeta} \hat{q}_{ij}; \quad \hat{q}_{ij} = \delta_{ij} + \gamma_{ij} + \frac{1}{2} \gamma_{il} \gamma_{jl} + \dots, \quad (5.4.10b)$$

$$\gamma_{ii} = 0, \quad \partial_j \gamma_{ji} = 0 \quad (5.4.10c)$$

とおくと、 $\det \hat{q} = 1$ .  $\hat{q}^{ij}$  は

$$\hat{q}^{ij} = \delta_{ij} - \gamma_{ij} + \frac{1}{2} \quad (5.4.11)$$

拘束条件は

$$\text{HC} : N^2({}^3R - 2V) = \mathbf{E}^2 - E^2 + \dot{\phi}^2, \quad (5.4.12a)$$

$$\text{MC} : D_j [N^{-1}(E_i^j - E\delta_i^j)] = 0. \quad (5.4.12b)$$

運動方程式は、

- $\frac{N}{\sqrt{q}} \partial_t (N^{-1} \sqrt{q} \dot{\phi}) - \dot{\phi} D \cdot \beta + \frac{\dot{\phi}}{N\sqrt{q}} \beta^j \partial_j (\sqrt{q} N) + N^2 V' = 0, \quad (5.4.13a)$

- $-\frac{1}{\sqrt{q}} q_{ik} q_{jl} \partial_t [N^{-1} \sqrt{q} (E^{kl} - E q^{kl})]$   
 $+ D_i D_j N - \Delta N q_{ij} - N^3 R_{ij} - \frac{2}{N} (E_i^l E_{jl} - E q_{ij})$   
 $+ N^{-1} q_{ij} (\mathbf{E}^2 - E^2 + \dot{\phi}^2) = 0. \quad (5.4.13b)$

作用積分は,

$$S = \frac{1}{2} \int dt d^3x \sqrt{q} \left[ N({}^3R - 2V) + N^{-1}(\mathbf{E}^2 - E^2 + \dot{\phi}^2) \right]. \quad (5.4.14)$$

#### 5.4.4 2次の摂動計算

空間計量  $q_{ij}$  の Christoffel は

$$\begin{aligned} {}^3\Gamma_{jk}^i &= \delta^i j \partial_k \zeta + \delta_k^i \partial_j \zeta - \hat{q}^{jl} \partial_l \zeta \hat{q}_{ik} \\ &\quad + \hat{H}^i{}_{jk} - \gamma_l^i \hat{H}^l{}_{jk} + \dots \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

ここで,

$$\hat{H}^i{}_{jk} = \frac{1}{2} \left( \partial_j \hat{h}_{ik} + \partial_k \hat{h}_{ji} - \partial_i \hat{h}_{jk} \right), \quad (5.4.16)$$

$$\hat{h}_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{1}{2} \gamma_{il} \gamma_{jl}. \quad (5.4.17)$$

これより,

$$\begin{aligned} E_i^j &= (\dot{\alpha} + \dot{\zeta}) \delta_{ij} + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} + \frac{1}{4} (\gamma \dot{\gamma} - \dot{\gamma} \gamma)_{ij} \\ &\quad - \frac{1}{2} (\partial_i \beta^j + \partial_j \beta^i) - (\delta_{ji} \beta \cdot \partial \zeta + \beta^j \partial_i \zeta - \beta_i \partial_j \zeta + \beta \cdot \partial \gamma_{ij}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\gamma_{ik} \partial_j \beta^k - \gamma_{jk} \partial_i \beta^k), \end{aligned} \quad (5.4.18a)$$

$$E = 3(\dot{\alpha} + \dot{\zeta}) - (\partial \cdot \beta + 3\beta \cdot \partial \zeta). \quad (5.4.18b)$$

特に,

$$\begin{aligned} E_i^j - E \delta_i^j &= -2\dot{\alpha} \delta_i^j \\ &\quad - 2\dot{\zeta} \delta_i^j - \frac{1}{2} (\partial_i \beta_1^j + \partial_j \beta_1^i - 2\partial \cdot \beta_1 \delta_i^j) + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} \\ &\quad + 2\delta_i^j \beta \cdot \partial \zeta - \beta^j \partial_i \zeta + \beta^i \partial_j \zeta - \frac{1}{2} (\partial_i \beta_2^j + \partial_j \beta_2^i - 2\partial \cdot \beta_2 \delta_i^j) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\gamma \dot{\gamma} - \dot{\gamma} \gamma)_{ij} - \frac{1}{2} (\gamma_{ik} \partial_j \beta^k - \gamma_{jl} \partial_i \beta^l) - \beta \cdot \partial \gamma_{ij}. \end{aligned} \quad (5.4.19)$$

これらの2乗は,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^2 &= 3\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}(6\dot{\zeta} - 2\partial \cdot \beta) \\ &\quad + 3\dot{\zeta}^2 - 2\dot{\zeta} \partial \cdot \beta + \frac{1}{4} (\dot{\gamma}_{ij})^2 + \frac{1}{2} \partial_i \beta^j (\partial_i \beta^j + \partial_j \beta^i) \\ &\quad - \dot{\gamma}_{ij} \partial_i \beta^j - 6\dot{\alpha} \beta \cdot \partial \zeta, \end{aligned} \quad (5.4.20a)$$

$$\begin{aligned} E^2 &= 9\dot{\alpha}^2 + 6\dot{\alpha}(3\dot{\zeta} - \partial \dot{\beta}) \\ &\quad + 9\dot{\zeta}^2 - 6\dot{\zeta} \partial \cdot \beta + (\partial \cdot \beta)^2 - 18\dot{\alpha} \beta \cdot \partial \zeta. \end{aligned} \quad (5.4.20b)$$

よって,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^2 - E^2 &= -6\dot{\alpha}^2 \\
&+ \dot{\alpha}(-12\dot{\zeta} + 4\partial \cdot \beta) \\
&- 6\dot{\zeta}^2 + 4\dot{\zeta}\partial \cdot \beta + 12\dot{\alpha}\beta \cdot \partial\zeta \\
&+ \frac{1}{2}\partial_i\beta^j(\partial_i\beta^j + \partial_j\beta^i) - (\partial \cdot \beta)^2 \\
&+ \frac{1}{4}(\dot{\gamma}_{ij})^2 - \dot{\gamma}_{ij}\partial_i\beta^j - 6\dot{\alpha}\beta \cdot \partial\zeta.
\end{aligned} \tag{5.4.21}$$

次に, 3次元スカラ曲率は, Weyl 変換により

$$e^{2\alpha}{}^3R = e^{-2\zeta}{}^3\hat{R} - 4\Delta\zeta + 8\zeta\Delta\zeta - 2(D\zeta)^2 - 2\gamma_{ij}\partial_i\partial_j\zeta. \tag{5.4.22}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
{}^3\hat{R} &= e^{2\alpha} \left[ \partial_i\partial_j\hat{h}^{ij} - \hat{\Delta}\hat{h} + \hat{h}^{ij} \left( \partial_i\partial_j\hat{h} - \partial_i\partial_k\hat{h}_{kj} + \hat{\Delta}\hat{h}_{ij} - \partial_k\partial_j h_{jk} \right) \right. \\
&\quad \left. - \hat{H}_i\hat{H}^i + \hat{H}_{ijk}\hat{H}^{ijk} + \dots \right] \\
&= -\frac{1}{4}(\partial_i\gamma_{jk})^2.
\end{aligned} \tag{5.4.23}$$

よって,

$$e^{2\alpha}{}^3R = -\frac{1}{4}(\partial_i\gamma_{jk})^2 - 4\Delta\zeta + 8\zeta\Delta\zeta - 2(D\zeta)^2 - 2\gamma_{ij}\partial_i\partial_j\zeta. \tag{5.4.24}$$

### 5.4.5 2次の作用積分

Hamiltonian 拘束条件を摂動展開すると

$$0 \text{ 次} : -2V = \dot{\phi}^2 - 6\dot{\alpha}^2, \tag{5.4.25a}$$

$$1 \text{ 次} : 4VN_1 = \dot{\alpha}(12\dot{\zeta} + 4\partial \cdot \beta_1) + 4e^{-2\alpha}\Delta\zeta, \tag{5.4.25b}$$

$$\begin{aligned}
2 \text{ 次} : & -4VN_2 - 2VN_1^2 + \frac{1}{4}e^{-2\alpha}(\partial_i\gamma_{jk})^2 \\
&= -6\dot{\zeta}^2 + 4\dot{\zeta}(\partial \cdot \beta) - (\partial \cdot \beta)^2 + 12\dot{\alpha}\beta \cdot \partial\zeta \\
&+ \frac{1}{4}(\dot{\gamma}_{ij})^2 + \frac{1}{2}\partial_i\beta^j(\partial_i\beta^j + \partial_j\beta^i) \\
&- \dot{\gamma}_{ij}\partial_i\beta^j + 4\dot{\alpha}\partial \cdot \beta_2 \\
&- e^{-2\alpha} (8\zeta\Delta\zeta - 2(\partial\zeta)^2 - 2\gamma_{ij}\partial_i\partial_j\zeta).
\end{aligned} \tag{5.4.25c}$$

運動量拘束条件の1次摂動は

$$\Delta\beta^i - \partial_i\partial \cdot \beta = 4\partial_i(\dot{\alpha}N_1 - \dot{\zeta}) \tag{5.4.26}$$

これより,

$$N_1 = \frac{\dot{\zeta}}{\dot{\alpha}}, \quad (5.4.27a)$$

$$\beta_1^i = \partial_i \psi \quad (5.4.27b)$$

これを HC の 1 次部分に代入して,

$$\Delta \left( \psi + \frac{e^{-2\alpha}}{\dot{\alpha}} \zeta \right) = \frac{\dot{\phi}^2}{2\dot{\alpha}^2} \dot{\zeta}. \quad (5.4.28)$$

よって,  $\psi$  は,

$$\psi = \chi - \frac{e^{-2\alpha}}{\dot{\alpha}} \zeta, \quad (5.4.29a)$$

$$\Delta \chi = \frac{\dot{\phi}^2}{2\dot{\alpha}^2} \dot{\zeta}. \quad (5.4.29b)$$

特に,

$$\partial \cdot \beta_1 = \frac{\dot{\phi}^2}{2\dot{\alpha}^2} \dot{\zeta} - \frac{e^{-2\alpha}}{\dot{\alpha}} \Delta \zeta. \quad (5.4.30)$$

これを作用積分に代入すると,

$$S_2 = \frac{1}{2} \int dt d^3x \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} \left( a^3 \dot{\zeta}^2 - a(\partial \zeta)^2 \right) + \frac{1}{4} \left( a^3 (\dot{\gamma}_{ij})^2 - a(\partial_k \gamma_{ij})^2 \right) \right] \quad (5.4.31)$$

対応する線形摂動の方程式は,

$$\frac{H^2}{\dot{\phi}^2} \partial_t \left( \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} a^3 \dot{\zeta} \right) - a \Delta \zeta = 0, \quad (5.4.32a)$$

$$\ddot{\gamma}_{ij} + 3H \dot{\gamma}_{ij} - a^{-2} \Delta \gamma_{ij} = 0. \quad (5.4.32b)$$

## 5.4.6 非ガウス性

### 3 次の相互作用項

$$S_3 = S_{S^3} + S_{S^2T} + S_{ST^2} + S_{T^3} \quad (5.4.33)$$

ここで

$$S_{S^3} = \int dt d^3x \left[ \frac{\dot{\phi}^4}{H^4} a^5 H \dot{\zeta}_c^2 \partial^{-2} \dot{\zeta}_c + \dots \right], \quad (5.4.34a)$$

$$S_{S^2T} = \int dt d^3x \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{2H^2} a \gamma_{ij} \partial_i \zeta \partial_j \zeta + \dots \right], \quad (5.4.34b)$$

$$S_{ST^2} = \int dt d^3x \left[ \frac{\dot{\phi}^2}{4H^2} a^5 H (\dot{\gamma}_{ij})^2 \partial^{-2} \dot{\zeta}_c + \dots \right], \quad (5.4.34c)$$

$$S_{T^3} \subset \frac{1}{2} \int dt d^3x a^2 \left[ \hat{R} + E_j^i E_i^j \right]. \quad (5.4.34d)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_c + \frac{\ddot{\phi}}{2H\dot{\phi}}\zeta_c^2 + \frac{\dot{\phi}^2}{8H^2}\zeta_c^2 + \frac{\dot{\phi}^2}{4H^2}\partial^{-2}(\zeta_c\partial^2\zeta_c) \\ &\quad - \frac{1}{32}\gamma_{ij}\gamma_{ij} + \frac{1}{16}\partial^{-2}(\gamma_{ij}\partial^2\gamma_{ij}) + \dots \end{aligned} \quad (5.4.35)$$

**3点相関** 曲率ゆらぎ $\zeta$ およびテンソルゆらぎ $\gamma_{ij}$ を

$$\zeta(t, x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \zeta_k(t) e^{ik \cdot x}, \quad (5.4.36a)$$

$$\gamma_{ij}(t, x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{s=\pm} \epsilon_{ij}^s \gamma_k^s(t) e^{ik \cdot x} \quad (5.4.36b)$$

自由場では

$$\langle \zeta_{\mathbf{k}}(t) \zeta_{\mathbf{k}'} \rangle \simeq (2\pi) \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \frac{1}{2k^3} \left[ \frac{H^2}{m_{\text{pl}}^2} \frac{H^2}{\dot{\phi}^2} \right]_{t=t_k}, \quad (5.4.37a)$$

$$\langle \gamma_{\mathbf{k}}^s \gamma_{\mathbf{k}'}^{s'} \rangle \simeq (2\pi) \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \frac{1}{2k^3} \left[ \frac{H^2}{m_{\text{pl}}^2} \right]_{t=t_k} \delta_{ss'}. \quad (5.4.37b)$$

3次の相互作用を考慮すると,

$$\langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \rangle = \frac{H^4}{m_{\text{pl}}^4} \frac{1}{\epsilon} \delta^3(\sum \mathbf{k}_i) \mathcal{M}_1, \quad (5.4.38a)$$

$$\langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \gamma_{\mathbf{k}_3} \rangle = \frac{H^4}{m_{\text{pl}}^4} \frac{1}{\epsilon} \delta^3(\sum \mathbf{k}_i) \mathcal{M}_2, \quad (5.4.38b)$$

$$\langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \gamma_{\mathbf{k}_2} \gamma_{\mathbf{k}_3} \rangle = \frac{H^4}{m_{\text{pl}}^4} \delta^3(\sum \mathbf{k}_i) \mathcal{M}_3, \quad (5.4.38c)$$

$$\langle \gamma_{\mathbf{k}_1} \gamma_{\mathbf{k}_2} \gamma_{\mathbf{k}_3} \rangle = \frac{H^4}{m_{\text{pl}}^4} \delta^3(\sum \mathbf{k}_i) \mathcal{M}_4. \quad (5.4.38d)$$

ここで,  $\mathcal{M}_i$  は次数 $-6$ の $k$ の同次関数.

例えば,

$$\langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\sum \mathbf{k}_i) \frac{H_*^4}{m_{\text{pl}}^4} \frac{H_*^4}{\dot{\phi}_*^4} \frac{\mathcal{A}_*}{\prod_i (2k_i^3)}, \quad (5.4.39)$$

$$\mathcal{A} = \frac{2\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \sum_i k_i^3 + \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} \left[ \frac{1}{2} \sum_i k_i^3 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} k_i k_j^2 + 4 \frac{\sum_{i>j} k_i^2 k_j^2}{k_t} \right]. \quad (5.4.40)$$

ここで,  $k_t = k_1 + k_2 + k_3$ .



Local limit  $k_3 \rightarrow 0$  での有効  $f_{\text{NL}}$ :

$$\zeta = \zeta_g - \frac{3}{5} f_{\text{NL}} \zeta_g^2 \quad (5.4.41)$$

を求めると,

$$\begin{aligned} -f_{\text{NL}} &\sim \frac{5}{c} \frac{\mathcal{A}_*}{4 \sum_i k_i^3} = \frac{5}{12} \left[ \frac{2\ddot{\phi}_*}{H_* \dot{\phi}_*} + \frac{\dot{\phi}_*^2}{H^2} (2 + f(k)) \right] \\ &= -\frac{5}{12} (n_s - 1 + f(k) n_t). \end{aligned} \quad (5.4.42)$$

ここで,  $0 \leq f \leq 5/6$ .

### 5.4.7 観測よりの制限

観測との比較では, 次のような非ガウス性のパラメーター化が行われる.

$$\begin{aligned} \langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \rangle &= [f_{\text{NL}}^{\text{loc}} B_{\text{loc}}(k_1, k_2, k_3) + f_{\text{NL}}^{\text{eq}} B_{\text{eq}}(k_1, k_2, k_3) + f_{\text{NL}}^{\text{orth}} B_{\text{orth}}(k_1, k_2, k_3)] \\ &\quad \times (2\pi)^3 \delta^3(\sum \mathbf{k}_i) \end{aligned} \quad (5.4.43)$$

ここで,

$$B_{\text{loc}}(k_1, k_2, k_3) = \frac{6}{5} [P_\zeta(k_1) P_\zeta(k_2) + 2 \text{ perms}], \quad (5.4.44a)$$

$$\begin{aligned} B_{\text{eq}}(k_1, k_2, k_3) &= \frac{3}{5} [6 P_\zeta(k_1) P_\zeta(k_2)^{2/3} P_\zeta(k_3)^{1/3} - 3 P_\zeta(k_1) P_\zeta(k_2) \\ &\quad - 2 P_\zeta(k_1)^{2/3} P_\zeta(k_2)^{2/3} P_\zeta(k_3)^{2/3} + 5 \text{ perms}], \end{aligned} \quad (5.4.44b)$$

$$\begin{aligned} B_{\text{orth}}(k_1, k_2, k_3) &= \frac{3}{5} [18 P_\zeta(k_1) P_\zeta(k_2)^{2/3} P_\zeta(k_3)^{1/3} - 9 P_\zeta(k_1) P_\zeta(k_2) \\ &\quad - 8 P_\zeta(k_1)^{2/3} P_\zeta(k_2)^{2/3} P_\zeta(k_3)^{2/3} + 5 \text{ perms}]. \end{aligned} \quad (5.4.44c)$$

これらに対する WMAP 9yr 観測よりの制限は,

- $f_{\text{NL}}^{\text{loc}} = 37.2 \pm 19.9$  ( $-3 < f_{\text{NL}}^{\text{loc}} < 77$  at 95% CL)
- $f_{\text{NL}}^{\text{eq}} = 51 \pm 136$  ( $-221 < f_{\text{NL}}^{\text{eq}} < 323$  at 95% CL)
- $f_{\text{NL}}^{\text{orth}} = -245 \pm 100$  ( $-445 < f_{\text{NL}}^{\text{orth}} < -45$  at 95% CL)

### 5.4.8 Curvaton モデルでの非ガウス性

Curvaton モデルでは, Curvaton の崩壊により曲率ゆらぎが作られる. インフラトンの崩壊により生成された輻射が Curvaton のエネルギー密度より大きいときに崩壊が起こると, その大きさは,

$$Z \sim \frac{h_c}{h} (c_s^2 - c_c^2) \sigma \simeq \frac{\rho_c}{\rho} \sigma \quad (5.4.45)$$

となる。ここで、 $\sigma$  はエントロピー摂動である。この曲率ゆらぎがインフラトンから生成された曲率ゆらぎより大きいとき、

$$\zeta \simeq \frac{\rho_c}{\rho}(\sigma + \xi\sigma^2) \simeq \zeta_g + \xi \frac{\rho}{\rho_c} \zeta_g \quad (5.4.46)$$

となる。すなわち、

$$f_{\text{NL}} \sim \xi \frac{\rho}{\rho_c} \sim \xi \frac{\sigma}{\zeta}. \quad (5.4.47)$$

したがって、 $\sigma \gg \zeta/\epsilon$  なら観測にかかる local タイプの非ガウス性が生じる。

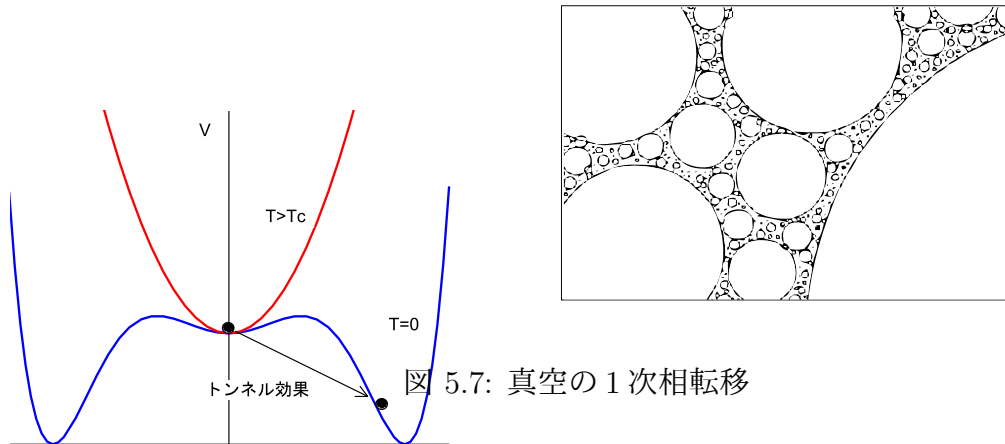


図 5.7: 真空の1次相転移

---

## §5.5

### 様々な一成分インフラトンモデル

---

インフレーションモデルは最初、大統一理論における対称性の自発的破れに伴う真空の相転移という現象を背景として提案された。この最初のモデルでは、図5.7に示したように、高温では $\phi = 0$ がポテンシャルの最小点となるが、低温では $\phi = v \neq 0$ が最小となる状況を考える。このような状況は、ポテンシャルに対する量子論的な温度補正を考慮すると自然に生じる。このモデルで、現在の宇宙での真空のエネルギー（ポテンシャルの値）をゼロと取ると、高温の時期には $V_0 = V(0) > 0$ となる。真空の状態は高温では対称性の回復した $\phi = 0$ から出発するが、温度が下がると対称性の破れた状態 $|\phi| = v$ に移ろうとする。ところが、低温でのポテンシャル $V$ が $\phi = 0$ 近傍に山を持つと、古典的には真空は $\phi = 0$ にとどまることになり、そのエネルギー $V_0$ がインフレーションを引き超す。このモデルでは、真空の状態がトンネル効果によりポテンシャルの山をすり抜け、 $|\phi| = v$ 近傍に遷移することによりインフレーションが終了する。この遷移は1次相転移となるため、相転移の進行は対称性の破れた泡状の領域がいろいろなところでランダムに発生し、次第に膨張し、最終的に泡同士がつながると相転移が終了する。

この最初のモデルは、十分なインフレーションを起こそうとすると、泡の発生率が低くなりすぎ、図5.7に示したようにフラクタル的な不均一さを持った宇宙が生まれることが判明し破棄された。その後、このインフレーションの終了問題を解決する様々なモデルが提案された。ここでは、その中の代表的なものをいくつか取り上げ、その基本的な特徴と観測からの制限について概観する。

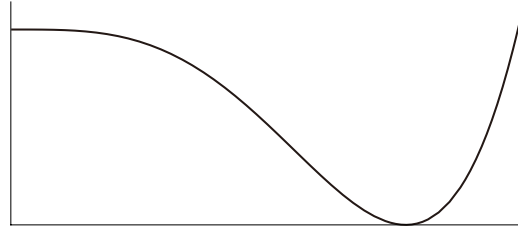


図 5.8: Coleman-Weinberg ポテンシャル

### 5.5.1 新インフレーションモデル

最初のインフレーションモデルの後、スムーズなビッグバン宇宙への移行を実現するモデルとして最初に提案されたのが、現在、新インフレーションモデルと呼ばれるタイプのモデルである [44]。このモデルでは通常、コールマン・ワインバーグ (Coleman-Weinberg) 型ポテンシャル

$$V = \lambda \phi^4 \ln \frac{\phi^2}{v^2} + \frac{\lambda}{2} (v^4 - \phi^4) \quad (5.5.1)$$

を用いる。このポテンシャルは図 5.8 に示したように、 $\phi^2 = v^2$  で最小となるが、原点付近では非常に平坦となる：

$$V' = 4\lambda \phi^3 \ln \frac{\phi^2}{v^2}, \quad V'' = 12\lambda \phi^2 \left( \ln \frac{\phi^2}{v^2} + \frac{2}{3} \right) \quad (5.5.2)$$

したがって、原点付近では宇宙膨張率はほぼ一定となり

$$H \simeq \sqrt{\frac{\lambda}{6} \frac{v^2}{m_{\text{pl}}^2}}, \quad (5.5.3)$$

インフレーションが起きる。以下、 $v \lesssim m_{\text{pl}}$  の場合に限定し、 $\phi \geq 0$  とする。 $v \gg m_{\text{pl}}$  の場合は、後ほど述べるカオティックインフレーションと同様の結果になる。

$\epsilon, |\eta| \ll 1$  となるのは  $\phi \ll v$  のときで、そのとき

$$\epsilon \simeq 32 \frac{m_{\text{pl}}^2 \phi^6}{v^8} \left( \ln \frac{\phi^2}{v^2} \right)^2, \quad \eta \simeq 24 \frac{m_{\text{pl}}^2 \phi^2}{v^4} \left( \ln \frac{\phi^2}{v^2} + \frac{2}{3} \right) \quad (5.5.4)$$

より、スローロール条件が満たされる領域は

$$\phi \lesssim \frac{v^2}{8m_{\text{pl}} |\ln(m_{\text{pl}}^2/v^2)|^{1/2}}. \quad (5.5.5)$$

この条件下で、

$$\frac{\epsilon}{|\eta|} \simeq \frac{4\phi^4}{3v^4} \left| \ln \frac{\phi^2}{v^2} \right| \ll 1, \quad (5.5.6a)$$

$$|\eta| \lesssim \frac{3 \{x - \ln(8x^{1/2})\}}{8x} \lesssim 1 \quad (x := \ln(m_{\text{pl}}^2/v^2) > \ln 4). \quad (5.5.6b)$$

インフレーション指数膨張数は

$$N(\phi) = \frac{v^2}{8m_{\text{pl}}^2} \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{v^2 d\phi}{\phi^3 \ln(\phi^2/v^2)} \simeq \frac{v^2}{16m_{\text{pl}}^2} \frac{v^2/\phi^2}{\ln(v^2/\phi^2)}. \quad (5.5.7)$$

後ほど述べるように、インフラトンはハッブルホライズンスケールで常に  $H$  程度の量子ゆらぎを伴っている。したがって、インフレーションが起きるためには、 $\phi$  の初期値は  $H$  以上となる必要がある。この条件 ( $H \lesssim \phi$ ) は、 $H$  で表すと

$$\frac{H}{m_{\text{pl}}} \lesssim \frac{v^2}{4m_{\text{pl}}^2} \left[ N \ln \left( \frac{16m_{\text{pl}}^2}{v^2} N \right) \right]^{-1/2}, \quad (5.5.8)$$

$\lambda$  で表すと、

$$\lambda \lesssim \frac{3}{2} \left[ N \ln \left( \frac{16m_{\text{pl}}^2}{v^2} N \right) \right]^{-1}. \quad (5.5.9)$$

となる。例えば、 $v = 0.01m_{\text{pl}} (\approx 10^{16} \text{GeV})$ ,  $N = 65$  に対して、

$$\frac{H}{m_{\text{pl}}} \lesssim 7.7 \times 10^{-7}, \quad \lambda \lesssim 1.4 \times 10^{-3} \quad (5.5.10)$$

となるので、GUT スケールでのインフラトンが十分なインフレーションを起こすためには、自己相互作用が原点  $\phi = 0$  近傍で弱い必要がある。現実の GUT モデルでは、量子補正のためこの条件を満たすことは難しい。これが契機となり、大統一理論より大きなエネルギースケールでのインフレーションモデル（始原的インフレーション）が主流となった。

生成されるゆらぎの振幅やスペクトル指数に対する観測情報を考慮すると、これより強い制限が得られる。まず、スローロールパラメータをインフラトン場の値  $\phi$  の代わりに指数膨張数  $N$  の関数として表すと、

$$\frac{v^2}{\phi^2} \simeq 16N \frac{m_{\text{pl}}^2}{v^2} \ln \left( \frac{v^2}{\phi^2} \right) \approx x \ln x; \quad x = 16N \frac{m_{\text{pl}}^2}{v^2} \quad (5.5.11)$$

より、

$$\epsilon \approx \frac{1}{128N^3 \ln x} \left( \frac{v^2}{m_{\text{pl}}^2} \right)^2, \quad \eta \approx -\frac{3}{2N} \frac{\ln x - 2/3}{\ln x} \approx -\frac{3}{2N} \quad (5.5.12)$$

となる。これより、 $N = N_o \approx 60$  に対して

$$\frac{H}{m_{\text{pl}}} \simeq \sqrt{8\pi^2 \epsilon \mathcal{P}_\zeta} \approx 10^{-5} \frac{v^2}{m_{\text{pl}}^2} \frac{3.4}{\ln(31m_{\text{pl}}/v)}, \quad (5.5.13a)$$

$$\lambda = 6 \left( \frac{H}{m_{\text{pl}}} \right)^2 \left( \frac{m_{\text{pl}}^2}{v^2} \right)^2 \approx 6 \times 10^{-10} \left( \frac{3.4}{\ln(31m_{\text{pl}}/v)} \right)^2 \quad (5.5.13b)$$

図 5.9: 指数関数型ポテンシャル.

すなわち、インプレトンの自己相互作用が非常に弱い必要がある。もし、インフラトンが大統一理論に現れるヒグス場の場合、ゲージ相互作用による量子補正のため  $\lambda$  は少なくとも  $O(g^4) \approx 10^{-4}$  程度となる。したがって、新インフレーション型モデルでのインフラトンがゲージ相互作用をしない場ではない。

一方、~~スペクトル指数はほぼ他のパラメータに依存せず、~~ 観測と整合的な値を予言する：

$$n_s = 1 + 2\eta - 6\epsilon \approx 0.95 \tag{5.5.14}$$

また、テンソル-スカラ比は

$$r \simeq 16\epsilon \lesssim 8 \times 10^{-8} \left( \frac{v^2}{m_{\text{pl}}^2} \right)^2 \tag{5.5.15}$$

と非常に小さな値となり、このモデルでは原始重力波の検出は困難である。

### 5.5.2 べき型インフレーションモデル

指数関数型のポテンシャル

$$V = m_{\text{pl}}^4 e^{-2\alpha\phi/m_{\text{pl}}} \tag{5.5.16}$$

を考える。このポテンシャルに対して、 $\epsilon$  と  $\eta$  は

$$\epsilon = 2\alpha^2, \quad \eta = 4\alpha^2 \tag{5.5.17}$$

と定数となるので、スローロール条件は

$$\alpha \ll 1/2. \tag{5.5.18}$$

この条件が成り立つとき、スローロール方程式は厳密に解け、

$$e^{\alpha\phi/m_{\text{pl}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \alpha^2 m_{\text{pl}} t, \tag{5.5.19a}$$

$$a = a_* \exp \frac{\phi}{2\alpha m_{\text{pl}}} = a_* \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \alpha^2 m_{\text{pl}} t \right)^{1/(2\alpha^2)}, \tag{5.5.19b}$$

$$H \simeq \frac{m_{\text{pl}}}{\sqrt{3}} e^{-\alpha\phi/m_{\text{pl}}} \approx \frac{1}{2\alpha^2 t}. \tag{5.5.19c}$$

図 5.10: カオティックインフレーション型ポテンシャル.

したがって、新インフレーションモデルと異なり、このポテンシャルではインフレーション時に宇宙膨張率が大きく時間変化する。また、スケール因子は時間のべき関数となる。このため、このインフレーションモデルはべき型インフレーションモデルと呼ばれる。φがΔφ変化する間の指数膨張数は

$$N = \frac{\Delta\phi}{2\alpha m_{\text{pl}}} \tag{5.5.20}$$

となるので、いくらでも大きなインフレーション率が可能である。

もちろん、この単純なポテンシャルでは、φは無限に増大してしまい、インフレーションは終了しない。しかし、2つの指数関数の組み合わせ、例えば

$$V = 4m_{\text{pl}}^4 e^{-2\alpha\phi/m_{\text{pl}}} \sinh^2 \alpha(\phi - \phi_0)/m_{\text{pl}} \tag{5.5.21}$$

を用いれば、|φ|が大きい領域ではべき型インフレーションが起き、極小点φ = φ<sub>0</sub>の近傍に近づくとき振動的に再加熱が起きる。この状況は次に述べるカオティックインフレーションモデルと同様である。

べき型インフレーションの可能性は現在では観測によりほぼ排除されつつある。これは、一般公式 (5.3.34) と (5.3.53) より、今の場合

$$n_s - 1 \approx -4\alpha^2, \quad r \approx 32\alpha^2 \tag{5.5.22}$$

より

$$r = 8(1 - n_s) \tag{5.5.23}$$

が成り立つためである。1 - n<sub>s</sub> ≈ 0.04 とすると、r ≈ 0.32 となり、(5.6) より 95% の信頼度で観測上限より大きい。

スペクトル指数と振幅への制限の両者を要請すると、再加熱温度に対して、

$$T \lesssim 10^{14} \text{ GeV} \tag{5.5.24}$$

という制限が得られる。これは、大統一理論の特徴的な温度（エネルギースケール）より 2 桁低い温度である。

### 5.5.3 カオティックインフレーションモデル

単純なべき関数型のポテンシャル

$$V = \mu^2 m_{\text{pl}}^2 (|\phi|/m_{\text{pl}})^n \quad (n > 0) \tag{5.5.25}$$

を考える。ここで、 $n$  は正の定数で、 $n = 2$  の時は調和振動子型のポテンシャルとなる。また、 $n \leq 1$  ならポテンシャルが原点で微分可能でなくなるが、このような場合は原点付近は別のなめらかな関数で置き換えるものとする。

このポテンシャルに対して

$$\epsilon = \frac{n^2}{2} \left( \frac{m_{\text{pl}}}{|\phi|} \right)^2, \quad \eta = n(n-1) \left( \frac{m_{\text{pl}}}{|\phi|} \right)^2. \quad (5.5.26)$$

となるので、遅変化条件は

$$|\phi| \gg \frac{1}{n} m_{\text{pl}} \quad (5.5.27)$$

となる。すなわち、 $|\phi|$  がプランクスケールより大きい領域でインフレーションが起きる。この領域での遅変化近似解は、

$$\phi = \begin{cases} \phi_i \left[ 1 - \frac{n(4-n)}{2\sqrt{3}} \mu t \left( \frac{m_{\text{pl}}}{|\phi_i|} \right)^{2-n/2} \right]^{2/(4-n)} & n \neq 4 \\ \phi_i e^{-4\mu t/\sqrt{3}} & n = 4 \end{cases}, \quad (5.5.28a)$$

$$a = a_* \left( \frac{m_{\text{pl}}}{|\phi|} \right)^{1/n}, \quad (5.5.28b)$$

$$H \simeq \frac{\mu}{\sqrt{3}} \left( \frac{|\phi|}{m_{\text{pl}}} \right)^{n/2}. \quad (5.5.28c)$$

また、指数膨張数は

$$N = \frac{\phi_i^2 - \phi^2}{2nm_{\text{pl}}^2} \quad (5.5.29)$$

となる。例えば、 $n = 2$  のとき、 $|\phi_i| > 16m_{\text{pl}}$  なら平坦性、一様性の観測と整合的なインフレーションモデルとなる。

いま、宇宙誕生時にインフラトンのエネルギー密度がプランクエネルギー密度  $E_{\text{pl}}/L_{\text{pl}}^3$  程度のランダムな値を取るとすると、一般的な  $\phi_i$  は

$$|\phi_i| \sim \left( \frac{m_{\text{pl}}}{\mu} \right)^{2/n} m_{\text{pl}} \quad (5.5.30)$$

程度となる。したがって、例えば  $n = 2$  のとき  $\mu \lesssim m_{\text{pl}}/20$  なら、ランダム（カオティック）な初期条件から出発しても、多くの領域で望ましい長さのインフレーションが実現する。このため、このタイプのモデルはカオティックインフレーションモデルと呼ばれる。

以上では最初からスローロール条件が満たされる状況を考えてが、 $|\phi| \gg m_{\text{pl}}$  から出発すると一般的に、初期条件によらずすぐにスローロール条件を満たす軌道に近づく。すなわち、図5.11に示したように、インフラトンの相空間  $(\phi, \dot{\phi})$  において、スローロール条件を満たす軌道はアトラクター軌道となっている。このことは次の解析から理解できる。簡単のために、ポテンシャルが  $\phi$  の2次関数になっている



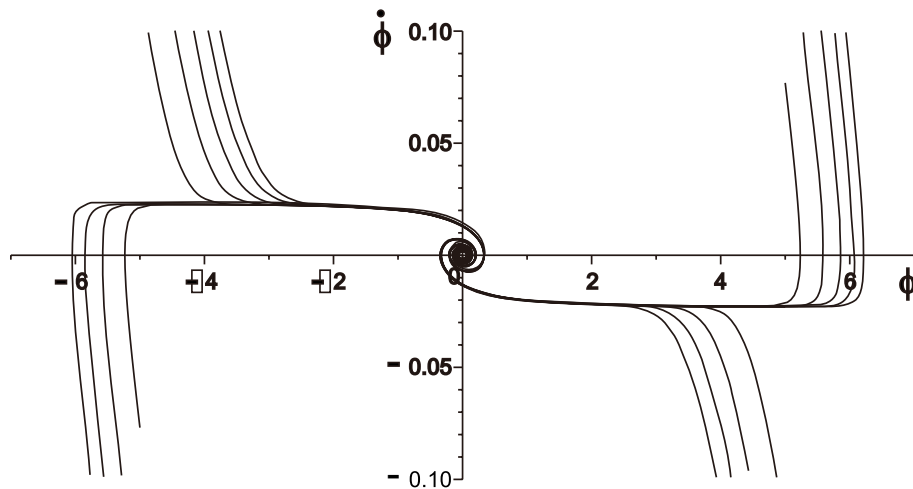


図 5.11: カオティックインフレーションのインフラトンの時間発展.  $n = 2, \mu = 0.02m_{\text{pl}}$  の場合, 横軸は  $\phi/m_{\text{pl}}$ , 縦軸は  $\dot{\phi}/m_{\text{pl}}^2$ .

場合を考える. このとき, インフラトンの方程式は (5.2.29) で与えられる.  $H$  の変化が緩やかであるとして,  $H$  を定数で近似すると, この方程式の基本解は  $e^{\lambda t}$  の形をもち,  $\lambda$  は

$$\lambda^2 + 3H\lambda + m^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-3H \pm \sqrt{9H^2 - 4m^2}}{2} \quad (5.5.31)$$

で与えられる. したがって,  $H/m \geq 1/(2\sqrt{3}\epsilon) \gg 1$  のとき,  $\lambda$  の 2 つの値は

$$\lambda \simeq -\frac{m^2}{3H}, \quad -3H \quad (5.5.32)$$

と近似され,  $3H \gg m^2/(3H)$  なので, 一般解は急速に  $\lambda \simeq -2m^2/(3H)$  の解に漸近する:

$$\phi \simeq C_1 e^{-\frac{m^2}{3H}t} + C_2 e^{-3Ht} \rightarrow C_1 e^{-\frac{m^2}{3H}t} \quad (5.5.33)$$

この解は, スローロル解  $3H\dot{\phi} = -m^2\phi$  と一致する.

カオティックインフレーションモデルの非常におもしろい点は, インフラトン場の大きさが  $|\phi| \lesssim m_{\text{pl}}$  となると, スローロル条件が破れ, その結果インフラトンがポテンシャルの最小点近傍で振動を始めることである (図 5.11 の原点付近の振る舞い参照). 実際, この状況は上で用いた単純化されたモデルで  $m \gg H$  の状況を考えることに当たり, 5.2.3 節で見たように, インフラトンは減衰振動を始める. インフラトンと通常の物質との相互作用があると, この振動のエネルギーが通常物質 (輻射) に転化し, 宇宙の再加熱が起きる.

このように, インフレーションの終了は常に  $|\phi| \sim m_{\text{pl}}$  となるので, 最大観測領域に対応する  $\phi$  の値  $\phi_i$  は, (5.5.29) より, ほぼモデルパラメータ  $n$  と  $N_o$  のみで決

まる：

$$\frac{\phi_i^2}{m_{\text{pl}}^2} = 2nM. \quad (5.5.34)$$

この結果，スカラゆらぎのスペクトル指数およびテンソルースカラ比  $r$  の値も  $n$  と  $N_o$  で決まり，

$$n_s = 1 - \frac{n+2}{2N_o} \simeq 0.967 - \frac{n-2}{120}, \quad (5.5.35a)$$

$$r = \frac{4n}{N_o} \simeq \frac{n}{15} \quad (5.5.35b)$$

で与えられる．したがって，比較的広い範囲のべき指数  $n$  に対して，自然に，観測と整合的な  $n_s$  の値を与える．また， $r$  の値が大きくなるのもこのモデルの特色である．これは，Lyth 上限 (5.3.55) からわかるように，カオティックモデルが大変動場モデルとなっていることに起因する．特に， $n = 4$  のモデルは，すでに WMAP による上限値を超えた  $r$  の値を预言するので，95%の信頼度で観測により棄却される．

カオティックインフレーションモデルの

### 5.5.4 \*DBI インフレーションモデル

### 5.5.5 $f(R)$ モデル

#### References

- De Felice A, Tsujikawa S: Living Review 13:3 (2010) ” $f(R)$  theories”

スカラ・テンソル形式 (Jordan frame) 作用積分

$$S = S_G + S_M; \quad (5.5.36)$$

$$S_G = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2\kappa^2} f(R) \right) \quad (5.5.37)$$

において，重力部分は

$$S_G = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [\chi(R - X) + f(X)] \quad (5.5.38)$$

と同等． $X$  を消去すると，

$$S_G = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{\chi}{2\kappa^2} R - U(\chi) \right), \quad (5.5.39)$$

$$\chi = F(X) \Leftrightarrow f'(X), \quad (5.5.40)$$

$$2\kappa^2 U(\chi) = \chi X - f(X). \quad (5.5.41)$$

場の方程式は,

$$\square\chi - \frac{2\kappa^2}{3}(2U + \chi U') = \frac{\kappa^2}{3}T^M, \quad (5.5.42a)$$

$$R = 2\kappa^2 U'(\chi), \quad (5.5.42b)$$

$$\chi G_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \chi + (\square\chi - \kappa^2 U)g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}^M. \quad (5.5.42c)$$

ここで,  $T_{\mu\nu}^M$  は物質の EM テンソル,  $T^M = T^M{}^\mu{}_\mu$ .

空間的に一様な場合, 方程式系は

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} - \frac{2\kappa^2}{3}(2U + \chi U') = \frac{\kappa^2}{3}\tau_M, \quad (5.5.43a)$$

$$\dot{H} + 2H^2 = \frac{\kappa^2}{3}U', \quad (5.5.43b)$$

$$\chi H^2 - 3H\dot{\chi} - \frac{\kappa^2}{3}(3U + 2\chi U') = -\kappa^2\rho_M. \quad (5.5.43c)$$

スカラ・テンソル形式 (Einstein frame) Weyl 変換

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \phi g_{\mu\nu} \quad (5.5.44)$$

により計量  $\hat{g}$  に移り,

$$\chi = e^{\gamma\phi}, \quad \gamma = \sqrt{2/3}/\kappa \quad (5.5.45)$$

とおくと, 作用積分は

$$S = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\kappa^2} \hat{R} - (\hat{\nabla}\phi)^2 - V(\phi) \right) + e^{-\gamma\phi} \mathcal{L}_M(\Phi, e^{-\gamma\phi}\hat{g}) \right] \quad (5.5.46)$$

$$V(\phi) = \chi^{-2}U(\chi). \quad (5.5.47)$$

空間的に一様な宇宙モデルに対しては

$$\hat{H}^2 = \frac{\kappa^2}{6} (\dot{\phi}^2 + 2V) + e^{\gamma\phi}\rho_M, \quad (5.5.48)$$

$$\ddot{\phi} + 3\hat{H}\dot{\phi} + V'(\phi) = \frac{1}{2\gamma}e^{-2\gamma\phi}T_M. \quad (5.5.49)$$

Starobinsky モデル 以下,  $\kappa = 1$  とおく.

$f$  を

$$f(R) = R + cR^2 \quad (5.5.50)$$

と取ると,

$$\chi = 1 + 2cR. \quad (5.5.51)$$

Jordan frame でのポテンシャルは

$$2U(\chi) = cX^2 = \frac{(\chi - 1)^2}{4c}. \quad (5.5.52)$$

Einstein frame でのポテンシャルは

$$2V(\phi) = \frac{1}{2c} (1 - e^{-\gamma\phi})^2. \quad (5.5.53)$$

slow roll parameters は

$$\epsilon = \frac{4}{3(e^{\gamma\phi} - 1)^2}, \quad (5.5.54a)$$

$$\eta = -\frac{4}{3} \frac{e^{\gamma\phi} - 2}{(e^{\gamma\phi} - 1)^2}. \quad (5.5.54b)$$

これより, インフレーションが終了する  $\phi$  の値は  $\exp(\gamma\phi_e) \approx 2$ . よって, e-folding 数  $N(\phi)$  は

$$\begin{aligned} N &= \int_{\phi_e}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon}} \\ &= \frac{3}{4} (e^{\gamma\phi} - e^{\gamma\phi_e}) - \phi + \phi_e \\ &\approx \frac{3}{4} (e^{\gamma\phi} - 2) \approx \frac{3}{4} e^{\gamma\phi}. \end{aligned} \quad (5.5.55)$$

よって,

$$\epsilon \simeq \frac{3}{4N^2} \simeq 2 \times 10^{-4} \left(\frac{60}{N}\right)^2, \quad (5.5.56a)$$

$$\eta \simeq -\frac{1}{N} \simeq -1.7 \times 10^{-2} \left(\frac{60}{N}\right). \quad (5.5.56b)$$

スカラーゆらぎの振幅より

$$\mathcal{P}_\zeta \simeq \frac{H^2}{8\pi^2\epsilon} \simeq 2.5 \cdot 10^{-9} \quad (5.5.57)$$

より,

$$H \simeq 6.4 \times 10^{-6} m_{\text{pl}} \left(\frac{60}{N}\right) \quad (5.5.58)$$

よって,

$$H^2 \simeq \frac{1}{12c} (1 - e^{-\gamma\phi})^2 \Rightarrow c \simeq 2 \times 10^9 m_{\text{pl}}^{-2} (N/60)^2 \quad (5.5.59)$$

スペクトル指数は

$$1 - n_s = 6\epsilon - 2\eta \simeq 0.035. \quad (5.5.60)$$

テンソル・スカラー比は

$$r = 16\epsilon \simeq 3.2 \times 10^{-3} \left(\frac{60}{N}\right)^2. \quad (5.5.61)$$

### 5.5.6 \*G-インフレーションモデル

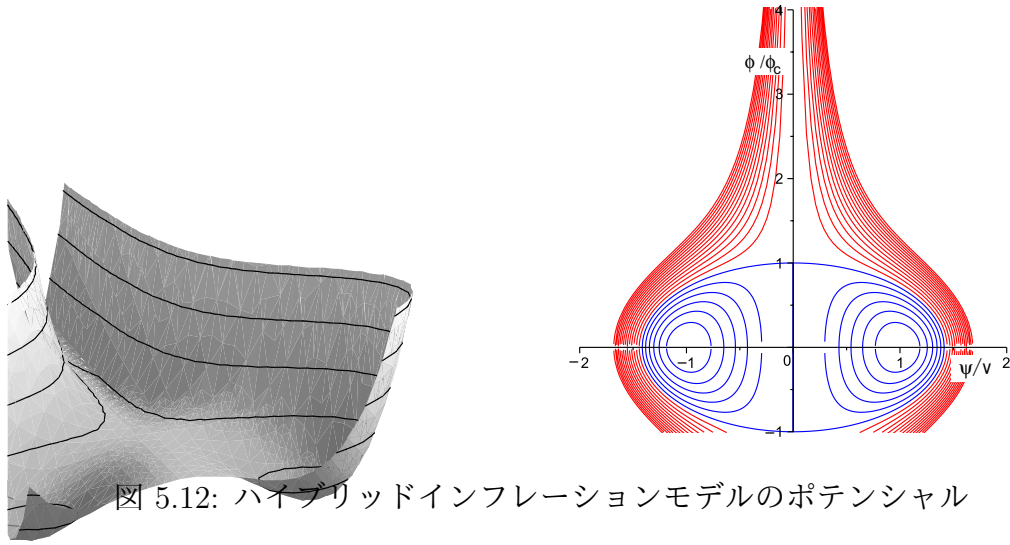


図 5.12: ハイブリッドインフレーションモデルのポテンシャル

## §5.6

# ハイブリッドインフレーション

これまでに紹介したモデルはすべてインフラトンが1成分スカラ場の場合であるが，超弦理論・M理論から導かれるモデルではインフラトンが多成分のスカラ場で与えられるものも多い．これらの多成分インフラトンモデルについての一般論はないが，その中でハイブリッドインフレーションモデルと呼ばれる多成分インフラトンモデルは1994年にA. Lindeにより基本的なアイデアが提案されて以降[45]，多くの研究がなされている．このモデルは一時，曲率ゆらぎについて青いスペクトル ( $n_s \geq 1$ ) を予言するので観測と矛盾すると言われていたが，最近の研究では，観測と整合的な赤いスペクトルを与えるモデルパラメーター領域が存在することが示されている [18, ?]).

ハイブリッドインフレーションモデルのポテンシャルは，平坦な方向に対応する成分  $\phi$  と一般にはポテンシャルが大きく変化する方向に対応する成分  $\psi$  の2つの成分をもつ．ここで， $\psi$  は1成分である必要はないが，以下では1成分の場合を考える．例えば，ポテンシャル

$$V = \Lambda^4 \left[ \left(1 - \frac{\psi^2}{v^2}\right)^2 + \frac{\phi^2}{\mu^2} + \frac{\phi^2 \psi^2}{M^4} \right] \quad (5.6.1)$$

を考える．このポテンシャルは直線  $\psi = 0$  上で  $\Lambda^4(1 + \phi^2/\mu^2)$  と振る舞い，極小点  $(\phi, \psi) = (0, 0)$  での値はゼロと異なる．図5.12に示したように，この点は実は鞍点で，ポテンシャル全体の最小点はこの直線の両側  $(\phi, \psi) = (0, \pm v)$  にあり，

$$\phi_c := \frac{\sqrt{2}M^2}{v} \quad (5.6.2)$$

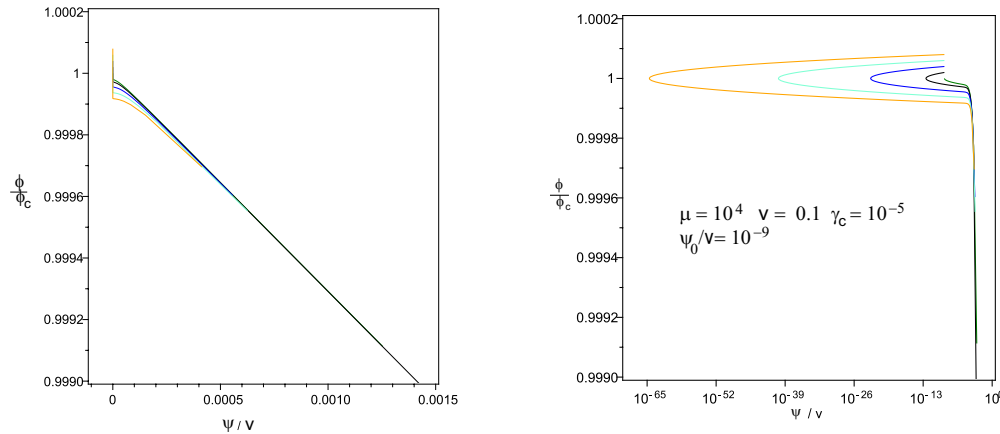


図 5.13: ハイブリッドインフレーションモデルでのインフラトンの振る舞い。右図は、左図の  $\psi \approx 0$  近傍を拡大するため、 $\psi/v$  を対数目盛で表したもの。

として、 $|\phi| < \phi_c$  では直線  $\psi = 0$  が尾根となっている。一方、 $|\phi| > \phi_c$  ではこの直線はポテンシャルの谷底となっている。

ハイブリッドインフレーションモデルでは、最初スカラ場は  $|\phi| \gg \phi_c$  の領域から出発すると考える。このとき、スカラ場は初期速度によらず短時間でスローロール軌道

$$\dot{\phi} = -\frac{V_\phi}{3H}, \quad \dot{\psi} = -\frac{V_\psi}{3H} \tag{5.6.3}$$

に沿って運動するようになる。この軌道を図 5.13 に示す。この図から分かるように、大まかには場はすぐに  $\psi = 0$  直線に沿って運動するようになり、 $|\phi| < \phi_c$  で急に  $\psi$  が増大を始め、全体の極小点に向かって運動する。この様子から  $\psi$  はしばしば滝場 (waterfall field) と呼ばれる。ただし、詳しく見ると滝場が増大を始めるときの  $\phi$  の値は初期位置に依存している。この状況は  $\psi = 0$  近傍を拡大してみるとよく分かる (図 5.13 の右図)。これらの軌道では、インフレーションの全指数膨張数は 1000 以上となっており、最小点に向かって滝場方向に運動を始めてからも指数 60 以上の膨張を起こす。

今考えているハイブリッドインフレーションモデルでは、スローロールパラメータ  $\epsilon, \eta$  は 2 次元的になる：

$$\epsilon_\phi = \frac{2m_{\text{pl}}^2}{\mu^2} \gamma^2 (1 + 2\alpha^2)^2 \left(\frac{\Lambda^4}{V}\right)^2, \tag{5.6.4a}$$

$$\epsilon_\psi = \frac{8m_{\text{pl}}^2}{v^2} \beta^2 \left(\frac{\phi^2}{\phi_c^2} - 1 + \beta^2\right)^2 \left(\frac{\Lambda^4}{V}\right)^2, \tag{5.6.4b}$$

$$\eta_{\phi\phi} = \frac{2m_{\text{pl}}^2}{\mu^2} (1 + 2\alpha^2) \frac{\Lambda^4}{V}, \quad (5.6.5a)$$

$$\eta_{\psi\phi} = \frac{8\phi\psi m_{\text{pl}}^2}{\phi_c^2 v^2} \frac{\Lambda^4}{V}, \quad (5.6.5b)$$

$$\eta_{\psi\psi} = \frac{4m_{\text{pl}}^2}{v^2} \left( \frac{\phi^2}{\phi_c^2} - 1 + 3\beta^2 \right) \frac{\Lambda^4}{V}. \quad (5.6.5c)$$

ここで,

$$\alpha := \frac{\mu\psi}{\sqrt{2}M^2} = \frac{\mu\psi}{v\phi_c}, \quad \beta := \frac{\psi}{v}, \quad \gamma := \frac{\phi}{\mu} \quad (5.6.6)$$

インフラトンが最初、ポテンシャルの谷領域から始まるとして、まず、 $\psi \approx 0$ に沿った軌道上でのインフレーションについて見てみよう。この場合、 $\phi$ をインフラトンとする1成分スカラー場モデルでよく近似でき、スローロールパラメータは

$$\epsilon \approx \epsilon_\phi \approx \frac{2m_{\text{pl}}^2}{\mu^2} \frac{\gamma^2}{(1 + \gamma^2)^2}, \quad (5.6.7a)$$

$$\eta \approx \eta_{\phi\phi} \approx \frac{2m_{\text{pl}}^2}{\mu^2} \frac{1}{1 + \gamma^2} \quad (5.6.7b)$$

で与えられる。これより、 $\mu/m_{\text{pl}} \lesssim 1$ のときは、スローロール条件が満たされるのは $|\phi| \gg m_{\text{pl}}$ となり、カオティックインフレーションが起きる。すなわち、インフレーションは $|\phi| \sim m_{\text{pl}}$ となると終了し、インフラトン場は2次元的な運動をしながら再加熱が起きる。ただし、 $\phi_c \gg m_{\text{pl}}$ の時には、 $\phi$ 方向のスローロールの途中で $|\phi| = \phi_c$ となり滝場方向への方向転換する。

これに対し、 $\mu/m_{\text{pl}} \gg 1$ の時は、スローロール条件は $\phi$ の値に依らず成り立ち、 $\psi = 0$ 軌道上でのインフレーションは常に $|\phi| < \phi_c$ となることにより終了する。この場合、インフレーションの時点 $t = t_o$ から $|\phi| = \phi_c$ となるまでの指数膨張数 $(\Delta N)_0$ と $t = t_o$ での曲率ゆらぎのスペクトル指数 $n_s$ は

$$(\Delta N)_0 \approx \frac{\mu^2}{4m_{\text{pl}}^2} \Delta (\gamma^2 + \ln \gamma^2), \quad (5.6.8a)$$

$$n_s - 1 \approx \frac{4m_{\text{pl}}^2}{\mu^2} \frac{1 - 2\gamma^2}{(1 + \gamma^2)^2} \quad (5.6.8b)$$

で与えられる。したがって、滝場方向に運動を始めてからインフレーションが起きないとすると、観測と整合的な赤いスペクトル ( $n_s < 1$ ) が得られるためには、 $2\gamma(t_o)^2 > 1$ が必要となる。これは、 $\mu \gg m_{\text{pl}}$ より、 $\phi(t_o) \gg m_{\text{pl}}$ を意味するので、カオティックインフレーションが起きることを要求する。言い換えれば、スモールフィールドインフレーションとなる場合には、スカラーゆらぎは良い精度で $n_s = 1$ に近い青いスペクトルをもち、テンソル・スカラー比も非常に小さくなる：

$$n_s - 1 \simeq \frac{4m_{\text{pl}}^2}{\mu^2}, \quad r \simeq 2(n_s - 1)^2 \left( \frac{\phi_c}{m_{\text{pl}}} \right)^2. \quad (5.6.9)$$

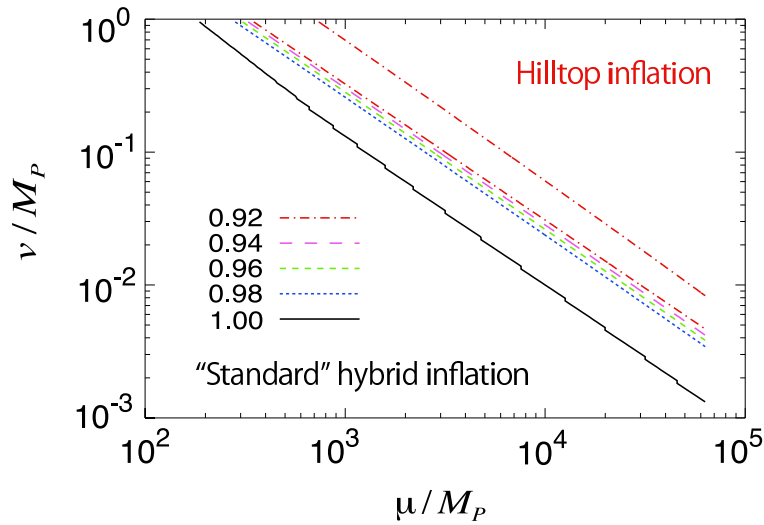


図 5.14: 滝場インフレーションが起きる場合の  $n_s$

以上では、観測領域に対応するインフレーションが  $\psi \approx 0$  直線上で起きるとしたが、この場合、ゆらぎ観測と整合的でも別の困難が生じる。それは、再加熱後の終状態に対応するポテンシャルの最小点が2つ以上あり、滝場のゆらぎのため、場所によって異なる最小点に移行することである。この場合、滝場が1成分で最小点が離散的なら最小点が異なる領域の境界にエネルギーの集中した壁（ドメインウォール）が、また滝場が2成分で極小点がリング状ならひもが生じる。これら位相的励起と呼ばれる場の配位は大きなエネルギーをもち、宇宙膨張による平均エネルギー密度の減少が  $1/a$  ないし  $1/a^2$  と緩やかなので、現在まで残ると通常の物質よりエネルギー密度が遙かに大きくなり、現在の宇宙を再現しない。この困難が起きないためには、相互作用により十分急速な消滅が起きなければならないが、高いエネルギースケールでインフレーションが起きるモデルでは十分な消滅は難しい。

この問題は、インフレーションが滝場方向に運動を始めてから十分起きるとすると解消される。この場合、インフレーション率やゆらぎの解析は複雑になるが、観測と整合的な赤いスペクトルをもつゆらぎが生み出されるパラメーター領域が存在することが示される（図5.14）。ただし、生成される重力波は小さく、テンソル・スカラー比  $r$  は  $10^{-14}$  以下となる [39]。



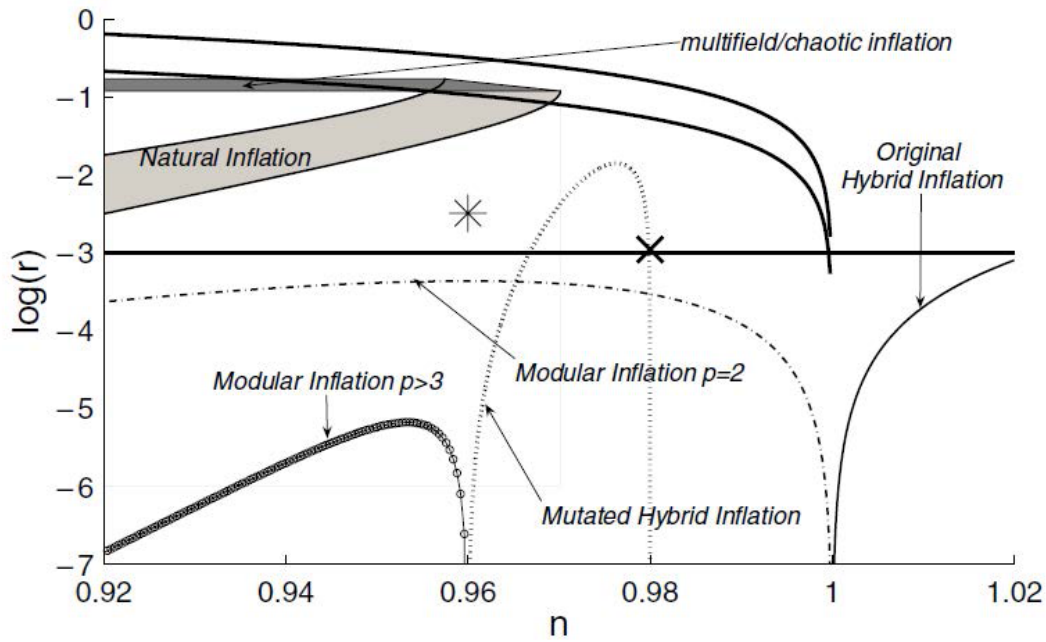


図 5.15:  $(n_s, r)$  についての様々な観測の予言. [Alabidi R, Lyth DH (2006)JCAP0605:016]

---

## §5.7

---

### \*Curvaton モデル

---

---

## §5.8

---

# Gyro インフレーションモデル

---

### 5.8.1 Chromo-Natural Inflation

重力 + SU(2) ゲージ場 + アクシオンの系を考える。

作用積分

$$S = \int \frac{R}{2\kappa^2} *1 - \frac{1}{2} *d\phi \wedge d\phi - V(\phi) *1 - \frac{1}{2} \text{Tr}(*F \wedge F) - \frac{\lambda}{f_a} \phi \text{Tr}(F \wedge F). \quad (5.8.1)$$

Ansatz

$$\text{時空計量} : ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\mathbf{x}^2, \quad (5.8.2)$$

$$\text{ゲージ場} : A^a = a(t)\psi(t)dx^a \quad (5.8.3)$$

これよりフラックスは

$$\begin{aligned} F^a &= dA^a + \frac{g}{2} \epsilon^{abc} A^b \wedge A^c \\ &= (a\psi) \cdot dt \wedge dx^a + \frac{g}{2} (a\psi)^2 \epsilon_{abc} dx^b \wedge dx^c, \end{aligned} \quad (5.8.4)$$

$$F^a \wedge F_a = 3g(a\psi)^2 (a\psi) \cdot d^4x, \quad (5.8.5)$$

$$F^a \cdot F_a = -3(\dot{\psi} + H\psi)^2 + 3g^2\psi^4. \quad (5.8.6)$$

簡約 Lagrangian

$$\begin{aligned} L &= a^3 \left[ -\frac{3}{\kappa^2} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} (\dot{\psi} + H\psi)^2 - \frac{3}{2} g^2 \psi^4 - 3\lambda g \frac{\phi}{f_a} \psi^2 (\dot{\psi} + H\psi) \right] \end{aligned} \quad (5.8.7)$$

運動方程式

- 宇宙膨張の方程式

$$H^2 = \frac{1}{3m_{\text{pl}}^2}(\rho_\phi + \rho_\psi); \quad (5.8.8)$$

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (5.8.9)$$

$$\rho_\psi = \frac{3}{2}(\dot{\psi} + H\psi)^2 + \frac{3}{2}g^2\psi^4, \quad (5.8.10)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{m_{\text{pl}}^2} \left\{ (\dot{\psi} + H\psi)^2 + g^2\psi^4 + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \right\}. \quad (5.8.11)$$

- 場の方程式

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = -\frac{3\lambda g}{f_a}\psi^2(\dot{\psi} + H\psi), \quad (5.8.12a)$$

$$\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} + 2g^2\psi^3 + (2H^2 + \dot{H})\psi = \frac{\lambda g}{f_a}\psi^2\dot{\phi}. \quad (5.8.12b)$$

いま,

$$\psi_c = a\psi \quad (5.8.13)$$

とおくと,

$$\ddot{\psi}_c + H\dot{\psi}_c + \frac{2g^2}{a^2}\psi_c^3 = \frac{\lambda g}{a} \frac{\dot{\phi}}{f_a} \psi_c^2. \quad (5.8.14)$$

### 5.8.2 CS項がない場合 ( $\lambda = 0$ )

$\psi_c$  の方程式 (5.8.14) より,  $H\Delta t \gg 1$  で

$$\begin{aligned} \psi_c &\approx \psi_{c*} + E_{c*} \int_{\infty}^t \frac{dt}{a} \\ &= \psi_{c*} - \frac{E_{c*}}{H} e^{-Ht} + O(g^2 e^{-2Ht}). \end{aligned} \quad (5.8.15)$$

よって,

$$\psi = \frac{\psi_c}{a} \approx \frac{\psi_{c*}}{a}, \quad (5.8.16a)$$

$$E = \dot{\psi} + H\psi = \frac{1}{a}\dot{\psi}_c \approx \frac{E_{c*}}{a^2}, \quad (5.8.16b)$$

$$\rho_\psi \approx \frac{3}{2} \frac{E_{c*}^2 + g^2\psi_{c*}^4}{a^4}. \quad (5.8.16c)$$

したがって, フラックスの寄与は, 通常の輻射と同じ振る舞いをし, すぐに無視できるようになる.

一方、アクシオン場  $\phi$  は閉じた標準の方程式

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (5.8.17)$$

$$V = \mu^4 \left( 1 + \cos \frac{\phi}{f_a} \right). \quad (5.8.18)$$

に従うので、通常の公式が適用できる。slow roll パラメータは

$$\begin{aligned} \epsilon &:= \frac{m_{\text{pl}}^2 (V')^2}{2V^2} \approx -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{\dot{\phi}^2}{2m_{\text{pl}}^2 H^2} \\ &\approx \frac{m_{\text{pl}}^2}{2f_a^2} \tan^2 \left( \frac{\phi}{2f_a} \right), \end{aligned} \quad (5.8.19a)$$

$$\begin{aligned} \eta &:= \frac{m_{\text{pl}}^2 V''}{V} \\ &\approx -\frac{m_{\text{pl}}^2}{2f_a^2} \left( 1 - \tan^2 \left( \frac{\phi}{2f_a} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.8.19b)$$

これより、 $\lambda = 0$  の場合、インフレーションが起きるには

$$f_a \gg m_{\text{pl}} \quad (5.8.20)$$

が要求される。

### 5.8.3 CS Influm

仮定

$$\sigma = \frac{g\lambda\psi^2}{f_a H} \gg 1, \quad \lambda^2\psi^2 \gg f_a^2 \quad (5.8.21)$$

Slow roll 方程式  $\dot{\phi}$  を消去すると、

$$H\dot{\psi} \approx -H^2\psi - \frac{V'(\phi)}{3\sigma} = -V'_{\text{eff}}(\psi) \quad (5.8.22)$$

ここで、axion potential

$$V = \mu^4 \left( 1 + \cos \frac{\phi}{f_a} \right) \quad (5.8.23)$$

に対し

$$V_{\text{eff}}(\psi) = \frac{H^2}{2}\psi^2 + \frac{\mu^4 \sin(\phi/f_a) H}{2g\lambda} \frac{H}{\psi} \quad (5.8.24)$$

これより、 $\psi$  の有効質量は  $m_\psi \approx 3H$  となるので、 $\psi$  は速やかに ( $\Delta t H \sim 1$ ) で  $V_{\text{eff}}$  の極小点に緩和する：

$$\psi \approx \left[ \frac{\mu^4}{3g\lambda H} \sin \left( \frac{\phi}{f_a} \right) \right]^{1/3}. \quad (5.8.25)$$

これを  $\phi$  の方程式に代入して、

$$H\dot{\phi} \approx \frac{2}{\sigma} (H^2\psi + g^2\psi^3) \quad (5.8.26)$$

**Inflation rate**

$$N = \int H dt = \int \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \approx \int \frac{H^2 \sigma d\phi}{2(H^2 \psi + g^2 \psi^3)} \quad (5.8.27)$$

$$= \frac{1}{4} \lambda \int_{x_s}^{x_e} dx \frac{2k \sin^{1/3} x \cos^{4/3}(x/2)}{\cos^{8/3}(x/2) + k^2 \sin^{2/3} x} \lesssim 0.37\lambda, \quad (5.8.28)$$

ここで、

$$k = \frac{1}{2} \left( \frac{6g^2 m_{\text{pl}}^4}{\mu^4 \lambda} \right)^{1/3} \quad (5.8.29)$$

**Inflation condition**

$$\sigma^3 = \frac{1}{9\lambda^2} X^4 Y^3 \sin^2 \frac{\phi}{f_a} \gtrsim 1, \quad (5.8.30a)$$

$$\epsilon'_\psi = \frac{3\rho_\psi}{\rho_\phi} \approx \frac{3\sigma}{2X^2 Y} + \frac{2\sigma^2}{X^2 Y^2} \ll 1, \quad (5.8.30b)$$

$$\epsilon_\phi := \frac{3\dot{\phi}^2}{2V} \approx \frac{\lambda}{X^2 Y^2} \frac{Y}{\sigma} \left(1 + \frac{\sigma}{Y}\right)^2 \ll 1. \quad (5.8.30c)$$

ここで、

$$X = \frac{g\mu^2}{H^2} \sim \frac{gm_{\text{pl}}^2}{\mu^2}, \quad Y = \frac{\lambda H}{gf_a} \sim \frac{\lambda\mu^2}{gf_a m_{\text{pl}}}. \quad (5.8.31)$$

これより、

$$\eta = -\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq \epsilon_\phi + \epsilon'_\psi \ll 1. \quad (5.8.32)$$

**5.8.4 数値解**

変数を次の様に無次元化する：

$$x = \frac{\phi}{f_a}, \quad y = \frac{\psi}{f_a}, \quad h = \frac{H}{H_0}, \quad \tau = H_0 t. \quad (5.8.33)$$

ここで、

$$H_0^2 = \frac{V_0}{3m_{\text{pl}}^2} = \frac{2\mu^4}{3m_{\text{pl}}^2}. \quad (5.8.34)$$

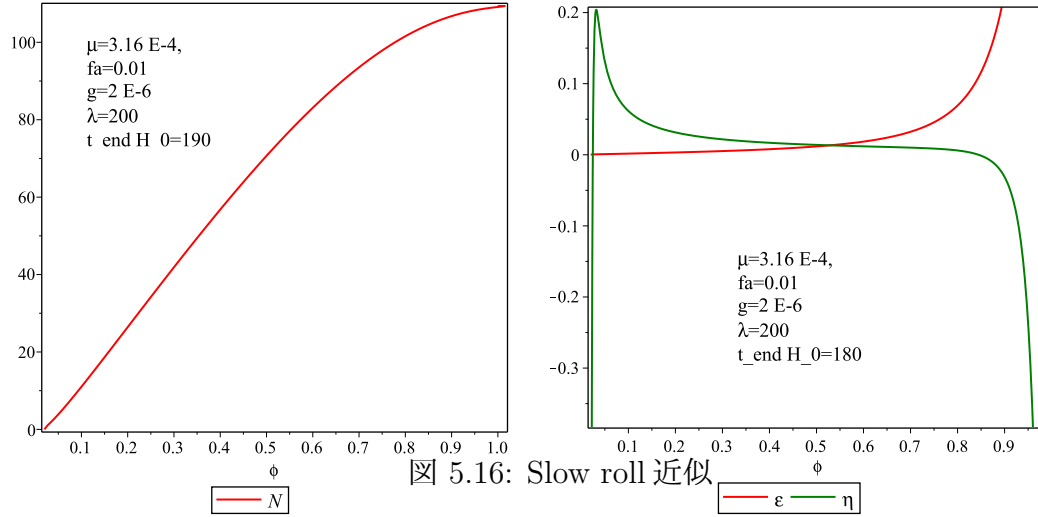


図 5.16: Slow roll 近似

これらを用いると運動方程式は,

$$\ddot{x} + 3h\dot{x} - \frac{2}{3\tilde{f}_a^2} \sin x = -3\tilde{\lambda}y^2(\dot{y} + hy), \quad (5.8.35a)$$

$$\ddot{y} + 3h\dot{y} + \left(2h^2 + \dot{h} + 2\tilde{g}^2y^2\right)y = \tilde{\lambda}y^2\dot{x}, \quad (5.8.35b)$$

$$\dot{h} = -\tilde{f}_a^2 \left\{ E^2 + \tilde{g}^2y^4 + \frac{1}{2}\dot{x}^2 \right\}, \quad (5.8.35c)$$

$$h^2 = \cos^2(x/2) + \tilde{f}_a^2 \left\{ \frac{1}{6}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}E^2 + \frac{\tilde{g}^2}{2}y^4 \right\}, \quad (5.8.35d)$$

$$\dot{h} + 2h^2 = 1 + \cos(x) - \frac{1}{6}\tilde{f}_a^2\dot{x}^2, \quad (5.8.35e)$$

$$E = \dot{y} + hy. \quad (5.8.35f)$$

ここで,

$$\tilde{f}_a = \frac{f_a}{m_{\text{pl}}}, \quad \tilde{g} = \frac{gf_a}{H_0}, \quad \tilde{\lambda} = \tilde{g}\lambda. \quad (5.8.36)$$

例えば,

$$\begin{aligned} \mu &= 3.16 \times 10^{-4} m_{\text{pl}}, \quad f_a = 0.01 m_{\text{pl}}, \quad g = 2 \times 10^{-6}, \quad \lambda = 200 \\ \Rightarrow \tilde{f}_a &= 0.01, \quad \tilde{g} = 0.24, \quad \tilde{\lambda} = 50. \end{aligned} \quad (5.8.37)$$

に対して, slow roll 近似では  $N = 100$  程度のインフレーションが起きる. Slow roll 近似も  $\phi = 0$  近傍および  $\phi = \pi$  近傍を除いてよく成り立つ.

初期値が  $\psi = \psi_{\min}(\phi)$  曲線からずれた場合, 最初軌道はこの曲線からずれるが, ある程度時間がたつとこの曲線に乗るようになる. 明らかに, この曲線は attractor となっている. ただし,  $\psi$  の初期値が曲線より下で, 速度が slow roll 近似からずれると, この曲線に到達するのにかなり時間がかかる.

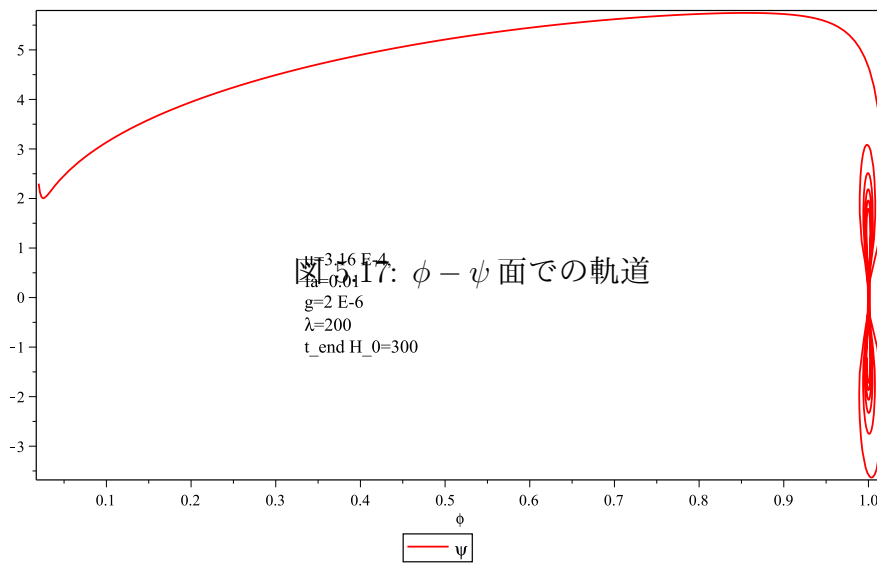


図5.17:  $\phi - \psi$  面での軌道  
 $\mu=3.16 \text{ E-4}$   
 $\text{fa}=0.01$   
 $g=2 \text{ E-6}$   
 $\lambda=200$   
 $t_{\text{end H}_0}=300$

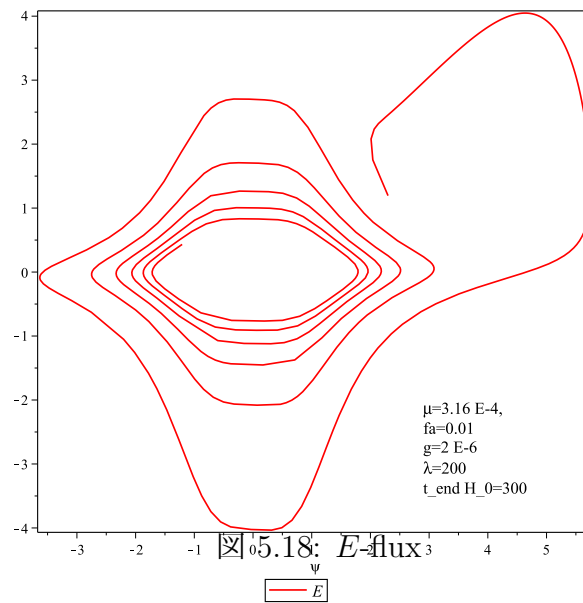


図5.18:  $E$ -flux  
 $\mu=3.16 \text{ E-4}$   
 $\text{fa}=0.01$   
 $g=2 \text{ E-6}$   
 $\lambda=200$   
 $t_{\text{end H}_0}=300$

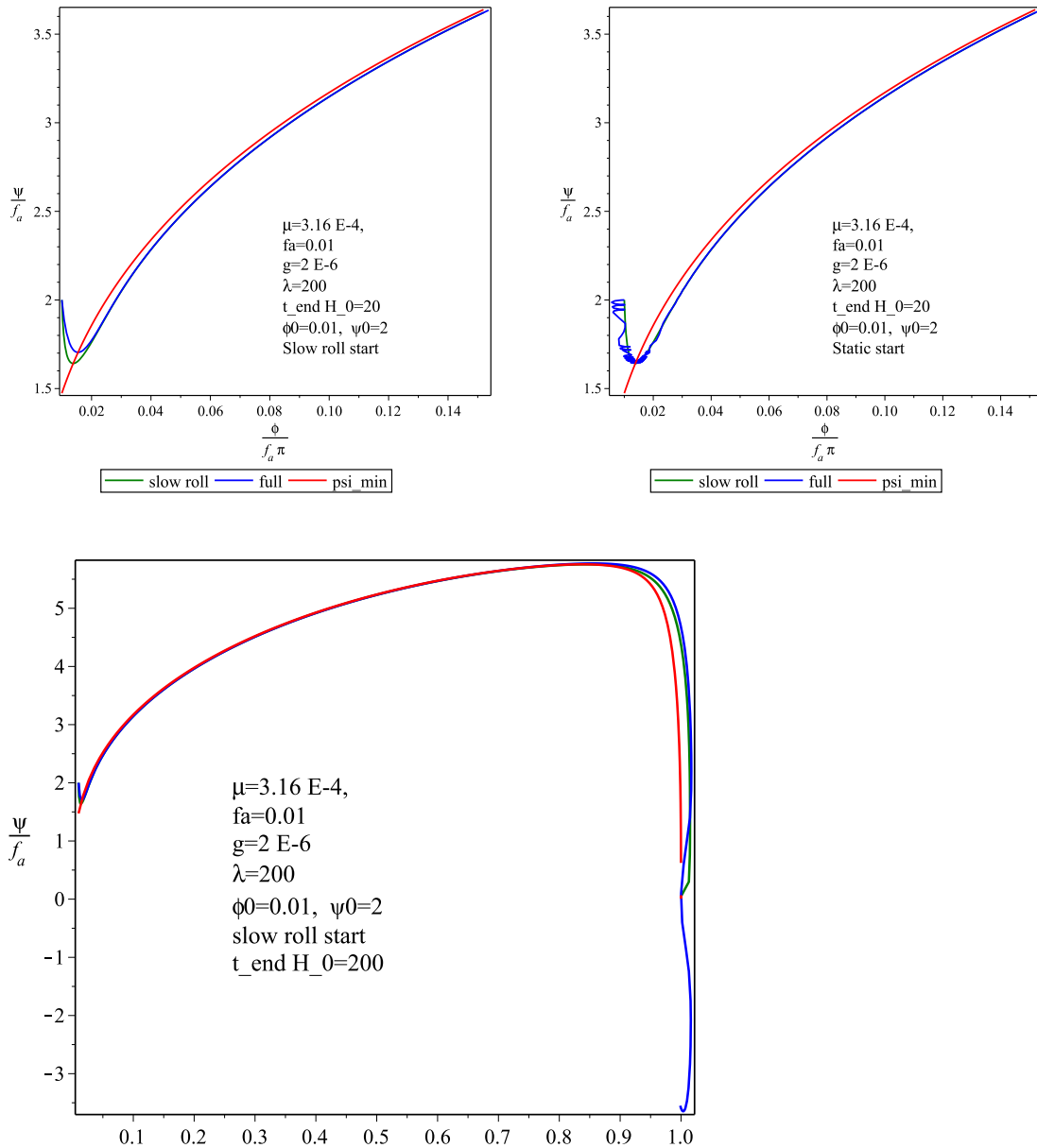


図 5.19:  $\psi = \psi_{\min}(\phi)$  より大きい  $\psi_0$  を初期値とする場合のフルの数値解と Slow roll 解の比較 ( $\phi_0/(\pi f_a) = 0.01, \psi_0/f_a = 2$ ). 上左は Slow roll 近似と同じ初期速度, 右は  $\phi_0 = \psi = 0$  とおいた場合. 下は, slow roll スタートでの長時間での振る舞い



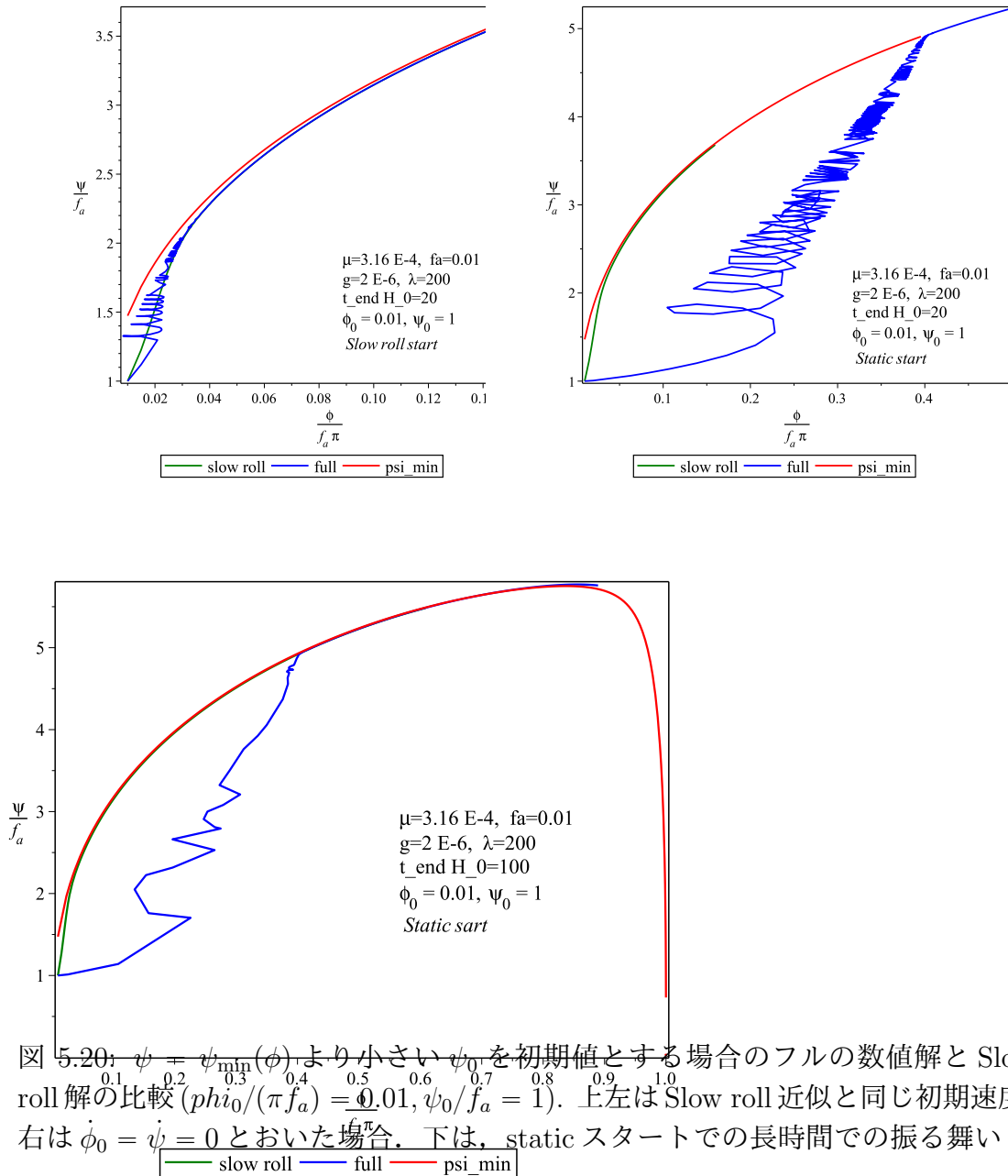


図 5.20:  $\psi = \psi_{\min}(\phi)$  より小さい  $\psi_0$  を初期値とする場合のフルの数値解と Slow roll 解の比較 ( $\phi_0/(\pi f_a) = 0.01, \psi_0/f_a = 1$ ). 上左は Slow roll 近似と同じ初期速度, 右は  $\dot{\phi}_0 = \dot{\psi} = 0$  とおいた場合. 下は, static スタートでの長時間での振る舞い

### 5.8.5 一般論

#### Single axion model

場の系  $\Phi = (\phi, X)$  ( $X = (X_m)$ ) が次の Lagrangian をもつとする :

$$L = L_0 + L_{CS}; \quad (5.8.38)$$

$$L_0 = a^3 \left[ -3m_{\text{pl}}^2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}(\dot{X})^2 - V(\Phi) \right], \quad (5.8.39)$$

$$L_{CS} = \lambda a^3 \dot{\phi} U(X). \quad (5.8.40)$$

運動方程式は

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \lambda\alpha \cdot \dot{X} = F_\phi, \quad (5.8.41a)$$

$$\ddot{X} + 3H\dot{X} - \lambda\alpha\dot{\phi} = F_X. \quad (5.8.41b)$$

ここで、

$$\alpha = dU(X), \quad (5.8.42a)$$

$$F_\phi = -\partial_\phi V - 3H\lambda U(X), \quad (5.8.42b)$$

$$F_X = -\partial_X V. \quad (5.8.42c)$$

Slow roll 近似では

$$3H\dot{\phi} + \lambda\alpha \cdot \dot{X} = F_\phi, \quad (5.8.43a)$$

$$3H\dot{X} - \lambda\alpha\dot{\phi} = F_X/ \quad (5.8.43b)$$

これらより、 $\dot{\phi}$  を消去すると、

$$\left( 3H + \frac{\lambda^2 \alpha^2}{3H} P_\alpha \right) \dot{X} = F_X + \frac{\lambda}{3H} \alpha F_\phi. \quad (5.8.44)$$

ここで、

$$P_\alpha = (\alpha \cdot \alpha)^{-1} \alpha_\circ T_\alpha \quad (5.8.45)$$

この方程式を  $\dot{X}$  について解くと、

$$\dot{X} = \frac{1}{3H} (1 - P_\alpha) F_X + \frac{1}{9H^2 + \lambda^2 \alpha^2} (\lambda \alpha F_\phi + 3H P_\alpha F_X) \quad (5.8.46)$$

これより、 $\alpha$  に垂直な方向の  $X$  の有効質量は元の質量  $m_X$ ,  $\alpha$  方向の有効質量は  $3H$  となる。したがって、 $m_X \gtrsim H$  なら、 $X$  は急速に  $\dot{X}$  の位置に緩和する :

$$(1 - P_\alpha) F_X = 0, \quad F_\phi \approx 0. \quad (5.8.47)$$

これにより、 $X$  が  $\phi$  の関数  $X = X(\phi)$  として定まる。すなわち、 $\Phi$  空間での軌道が定まる。ここで、 $F_\phi = 0$  が  $\partial_\phi V = 0$  を意味しない点が重要である。

最後に、 $\dot{\phi}$  の式は

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &\simeq -\frac{\lambda}{3H}\alpha \cdot \dot{X} + \frac{1}{3H}F_\phi \\ &\simeq \frac{3H}{9H^2 + \lambda^2\alpha^2}F_\phi - \frac{\lambda}{9H^2 + \lambda^2\alpha^2}\alpha \cdot F_X \\ &\approx \frac{1}{\lambda\alpha^2}\alpha \cdot \partial_X V\end{aligned}\tag{5.8.48}$$

したがって、インフラトン  $\phi$  の振る舞いはほとんど  $V(\phi)$  と無関係となる！

### Multiple axion model

場の系  $\Phi = (\phi, X)$  ( $\phi = (\phi_i), X = (X_m), i = 1, \dots, n, m = 1, \dots, p$ ) が次の Lagrangian をもつとする：

$$L = L_0 + L_{CS};\tag{5.8.49}$$

$$L_0 = a^3 \left[ -3m_{\text{pl}}^2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{1}{2}(\dot{\phi} + Hk\phi)^2 + \frac{1}{2}(\dot{X} + HlX)^2 - V(\Phi) \right]\tag{5.8.50}$$

$$L_{CS} = \lambda a^3 \sum_i (\dot{\phi} + Hk\phi)^i U_i(\Phi).\tag{5.8.51}$$

運動方程式は

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \lambda W\dot{\phi} + \lambda A\dot{X} = F_\phi,\tag{5.8.52a}$$

$$\ddot{X} + 3H\dot{X} - \lambda^T A\dot{\phi} = F_X.\tag{5.8.52b}$$

ここで、

$$W_{ij} = \partial_{\phi_i} U_j - \partial_{\phi_j} U_i,\tag{5.8.53a}$$

$$A = \partial_X U = (\partial U^i / \partial X_m),\tag{5.8.53b}$$

$$F_\phi = -\partial_\phi V - k(\dot{H} + 2H^2)\phi - \lambda H(3U - \partial_\phi \tilde{U}),\tag{5.8.53c}$$

$$F_X = -\partial_X V - l(\dot{H} + 2H^2)X + \lambda H \partial_X \tilde{U},\tag{5.8.53d}$$

$$\tilde{U} = \sum_i k_i \phi_i U_i.\tag{5.8.53e}$$

Slow roll 近似で

$$(3H - \lambda W)\dot{\phi} + \lambda A\dot{X} = F_\phi,\tag{5.8.54a}$$

$$3H\dot{X} - \lambda^T A\dot{\phi} = F_X.\tag{5.8.54b}$$

最初の式より,

$$\dot{\phi} = -\frac{\lambda}{3H}BA\dot{X} + \frac{1}{3H}BF_\phi, \quad (5.8.55)$$

$$B = \left(1 - \frac{\lambda}{3H}W\right)^{-1}. \quad (5.8.56)$$

これを  $\dot{X}$  の式に代入し,  $\dot{X}$  について解くと

$$\begin{aligned} 3H\dot{X} &= \left(1 + \frac{\lambda^2}{9H^2} T_{ABA}\right)^{-1} \left(F_X + \frac{\lambda}{3H} T_{ABF_\phi}\right) \\ &= (1 - P_A)F_X \\ &\quad + P_A \left(1 + \frac{\lambda^2}{9H^2} T_{ABA}\right)^{-1} \left(P_A F_X + \frac{\lambda}{3H} T_{ABF_\phi}\right) \end{aligned} \quad (5.8.57)$$

ここで,  $P_A$  は  $\dot{X}$  の空間で  $A^i_m$  の張る線形部分空間への射影演算子で, 適当な  $n$  次の正方行列  $p_A$  を用いて

$$P_A = {}^T A p_A A \quad (5.8.58)$$

と表される. 特に,

$$(1 - P_A)\partial_X U = 0 \Rightarrow (1 - P_A)\partial_X \tilde{U} = 0. \quad (5.8.59)$$

一般に,

$$\begin{aligned} A \left(1 + \frac{\lambda^2}{9H^2} T_{ABA}\right)^{-1} {}^T A &= A {}^T A \left(1 + \frac{\lambda^2}{9H^2} B A {}^T A\right)^{-1} \\ &= A {}^T A \left(A {}^T A + \frac{9H^2}{\lambda^2} B^{-1}\right)^{-1} \frac{9H^2}{\lambda^2} B^{-1} \end{aligned} \quad (5.8.60)$$

これより,  $\lambda$  が大きい極限で,

$$P_A \left(1 + \frac{\lambda^2}{9H^2} T_{ABA}\right)^{-1} \left(P_A F_X + \frac{\lambda}{3H} T_{ABF_\phi}\right) \approx 3H^2 {}^T A p_A (3U - \partial_\phi \tilde{U}) \quad (5.8.61)$$

よって,  $X$  の有効質量は,  $(1 - P_A)$  の方向で  $m_X$ ,  $P_A$  の方向で  $O(H)$ .

$X$  場が  $\dot{X} = 0$  に緩和するとすると,

$$(1 - P_A)F_X = 0, \quad P_A F_X + \frac{\lambda}{3H} T_{ABF_\phi} = 0. \quad (5.8.62)$$

また,  $\dot{\phi}$  の式は,

$$3H\dot{\phi} \simeq \left(1 - \frac{\lambda}{3H}W + \frac{\lambda^2}{3H^2} A {}^T A\right)^{-1} \left(-\frac{\lambda}{3H} A F_X + F_\phi\right) \quad (5.8.63)$$

よって,  $\lambda \gg 3H$  のとき,

$$\text{rank}(A^T A) = n \ \& \ \partial_X \tilde{U} = 0 \ \Rightarrow \ 3H\dot{\phi} \approx -\frac{3H}{\lambda}(A^T A)^{-1} A F_X. \quad (5.8.64)$$

一方,  $\partial_X \tilde{U} \neq 0$  の時には,  $\lambda \gg 3H$  で

$$\dot{\phi} \approx -H(A^T A)^{-1} A \partial_X \tilde{U} \quad (5.8.65)$$

となり, 一般に slow roll インフレーションは実現されない.

---

**§5.9**

---

**\*非等方インフレーションモデル**

---

---

## §5.10

---

### 残された問題

---

インフレーションの役割は、現在我々の住む熱いビッグバン宇宙の起源と初期条件を説明することにある。以上見てきたように、一様等方性・平坦性、宇宙ゆらぎの起源と特性、場の理論に基づく現象論的レベルでのインフレーションモデルの構築などかなりの部分でこの課題は達成されている。しかし、いくつか重要な課題も残されている。

#### 5.10.1 バリオン数の起源と gravitino 問題

ビッグバン宇宙の初期条件として重要な情報は宇宙再加熱温度  $T_{\text{reh}}$  である。この温度に対する最低限の条件は、ビッグバン宇宙モデルの最大の成果である宇宙初期元素合成のシナリオに影響を与えないということで、これは

$$T_{\text{reh}} \gg T_\nu \sim 1\text{MeV} \quad (5.10.1)$$

で与えられる。次に考慮すべき条件は、バリオン数の起源の説明できるという要請である。第8章で紹介したように、現在、バリオン数（物質反物質非対称性）の起源を説明する方法は4つある。これらは  $T_{\text{reh}}$  に対しそれぞれ異なる下限を与える。

- 1) GUTによるバリオン数生成: 大統一理論における  $B - L$  非保存反応を用いるもので、これが機能するためには宇宙再加熱温度がバリオン数を破る反応を媒介する最も軽いボゾン（通常、重いヒッグス粒子）より高い必要がある。これは次の制限を与える：

$$T_{\text{reh}} \gtrsim m_{\text{H,GUT}} \sim 10^{12}\text{GeV} \quad (5.10.2)$$

- 2) レプトジェネシス: 軽粒子数を保存しない反応によりまず重いニュートリノを作り、それから電弱相互作用の軸性量子異常による  $B + L$  の破れを用いてバリオン数を作る方法である。このメカニズムが機能するための条件は少し弱くなる [11]：

$$T_{\text{reh}} > 3 \times 10^9\text{GeV} \quad (5.10.3)$$

- 3) 電弱相転移によるバリオン数生成: この方法では電弱相転移の際にバリオン数生成が起きるので、 $T_{\text{reh}}$  に対する制限は

$$T_{\text{reh}} \gtrsim 100\text{GeV} \quad (5.10.4)$$

と弱くなる。ただし、相転移が一次相転移であることが必要なので、ヒッグス粒子の質量に対する実験的制限を考慮すると2つの2成分ヒッグスを含むモデルでなくてはならず、また理論のパラメーターに対しても不自然な値が要求される [32].

- 4) Affleck-Dine 機構: この方法はバリオン数生成が非熱的過程で起きるので、直接の  $T_{\text{reh}}$  に対する制限はない。ただし、一般にこの方法で直接生成されるバリオン数/光子数比は観測値よりずっと大きくなるので、エントロピー生成により薄めないといけない。このため、シナリオは複雑になり予言にも大きなモデル依存性が生じる。

これらの制限と反対に、宇宙の再加熱温度に対する上限を与える問題がある。それは、グラヴィティーノ問題と呼ばれる超重力理論に特有の問題である。超重力理論では、重力の超対称パートナーとしてスピン 3/2 をもつフェルミ粒子であるグラヴィティーノが現れる。グラヴィティーノの質量  $m_{3/2}$  や安定性はモデルにより異なるが、主要なモデルでは、不安定で  $100\text{GeV} \lesssim m_{3/2} \lesssim 10\text{TeV}$  か、安定で  $10\text{keV} \lesssim m_{3/2} \lesssim 10\text{GeV}$  となっている。これらのグラヴィティーノは相互作用が重力相互作用なので非常に弱く他の物質と熱化学平衡に達することはないが、インフレーション後の宇宙再加熱の際にわずかに熱化学反応により作られる<sup>2</sup>。グラヴィティーノが安定な場合には現在までそのまま残りダークマターとなるが、質量が大きいため再加熱温度に対し強い制限がつく。また、不安定な場合はより安定なダークマター粒子に崩壊するが、相互作用が弱いためその寿命が長く、崩壊は宇宙初期の元素合成以降に起きる。この際放出される高エネルギー粒子はヘリウムを壊してしまう。このため、やはり生成量、したがって再加熱温度に対する上限が得られる。具体的な上限値は次のようになる [35]:

i) 不安定で  $100\text{GeV} \lesssim m_{3/2} \lesssim 10\text{TeV}$  の場合:  $T_{\text{reh}} < 10^{6-8}\text{GeV}$ .

ii) 安定で  $10\text{keV} \lesssim m_{3/2} \lesssim 10\text{GeV}$  の場合:  $T_{\text{reh}} < 10^7(m_{3/2}/1\text{GeV})\text{GeV}$

再加熱温度に対するこれらの上限は、バリオン数生成からの制限と両立が難しい。超対称性が素粒子物理の様々な観点から支持されていることを考慮すると、これはかなり深刻な問題である。

### 5.10.2 自然法則の統一理論に基づくインフレーションモデルの構築

インフレーションは十分平坦なポテンシャルをもつスカラ場があれば一般に起きる現象で、現象レベルで観測を説明するインフラトンモデルを作ることは容易

<sup>2</sup>インフラトンの崩壊により直接グラヴィティーノが多く作られるモデルもある。このようなモデルでは  $T_{\text{reh}}$  に対する下限が得られる [35]



である。しかし、これは実際の宇宙でインフレーションが起きることを説明するのと同様ではない。自然の基礎法則から出発して第1原理からインフレーションが起きることを示して初めて説明できたことになる。これは実は予想以上に困難な課題なのである。

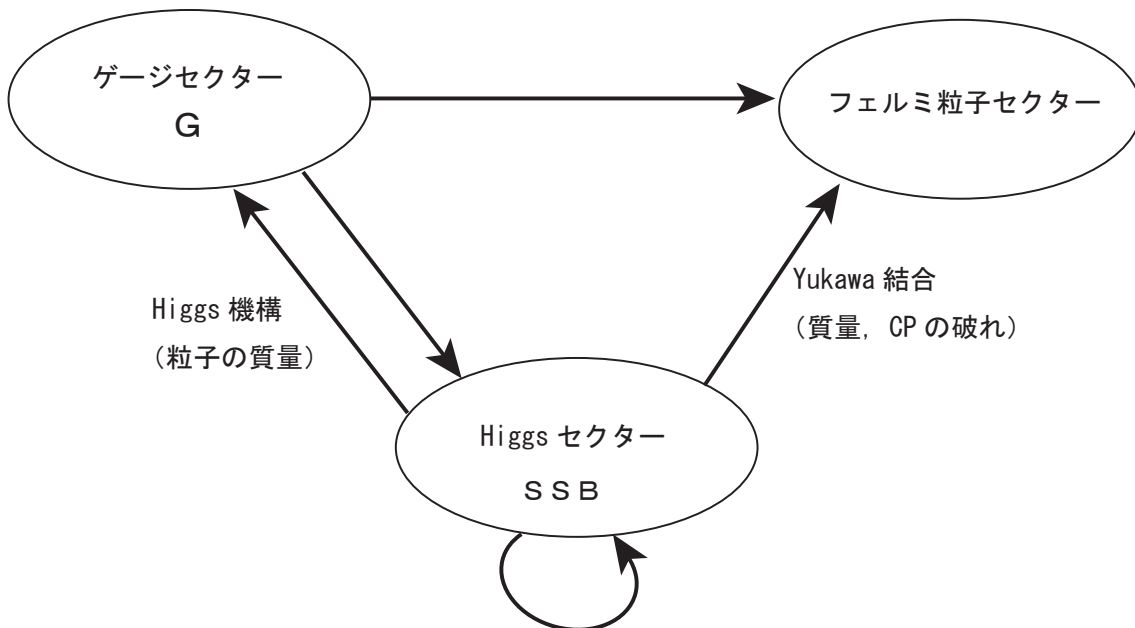
インフレーションがほぼ宇宙誕生直後に起きる超高エネルギーでの現象であるため、その記述には重力を含むすべての相互作用の統一理論（究極理論）が必要となる。そのような理論は完成していないが、その有力候補と見なされている理論として、超弦理論がある。ただし、この理論は現時点では10次元の理論として構成されており、我々の4次元宇宙を再現するには、余分な6次元が見えなくなる機構が必要となる。この4次元化機構として様々なアイデアが提案されているが、素粒子標準モデルを再現しかつ現実的な宇宙モデルを与える機構はまだ発見されていない。LHC 加速器実験や Planck 衛星による CMB ゆらぎ観測、さらに将来の CMB Bモードによる間接的な原始重力波観測、衛星レーザー干渉計による直接の重力波観測などにより、インフレーションの背後にある究極理論とその4次元化機構についてヒントが得られることを期待する。

## 6

## \*第1原理宇宙論

## §6.1

## 標準モデル



## 6.1.1 基本構造

## ゲージセクター

- ゲージ群 :  $U_Y(1) \times SU(2) \times SU(3)$
- Gauge coupling:

$$g_1 \frac{Y}{2} B + g_2 T_i^{(2)} A^i + g_3 T_a^{(3)} G^a \quad (6.1.1)$$

- Symmetry Breaking:  $U_Y(1) \times SU(2) \Rightarrow U_{em}(1)$

$$g_1 \frac{Y}{2} B + g_2 T_3^{(2)} A^3 = eQ A + \frac{g_2}{\cos \theta_W} R Z \Rightarrow eQ A, \quad (6.1.2)$$

$$Q = T_3^{(2)} + \frac{Y}{2}, \quad R = T_3^{(2)} \cos^2 \theta_W + \frac{Y}{2} \sin^2 \theta_W. \quad (6.1.3)$$

ここで,

$$\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} = R(-\theta_W) \begin{pmatrix} B \\ A^3 \end{pmatrix}, \quad (6.1.4)$$

$$g_1 = \frac{e}{\cos \theta_W}, \quad g_2 = \frac{e}{\sin \theta_W}. \quad (6.1.5)$$

### フェルミオンセクター

- 量子数と表現

$(2, 1)_{-1}$	$(1, 1)_{-2}$	$(2, 3)_{1/3}$	$(1, 3)_{4/3}$	$(1, 3)_{-2/3}$
$(\nu_e, e)_L$	$e_R$	$(u, d)_L$	$u_R$	$d_R$
$(\nu_\mu, \mu)_L$	$\mu_R$	$(c, s)_L$	$c_R$	$s_R$
$(\nu_\tau, \tau)_L$	$\tau_R$	$(t, b)_L$	$t_R$	$b_R$
$L^i$	$R^i$	$Q^i$	$U^i$	$D^i$

表現は  $U_Y(1)$ ,  $SU(2)$  に関してカイラル ( $U_{em}(1) \times SU(3)$  に関してはアキラル).

### スカラ (Higgs) セクター

- 量子数と表現:  $(2, 1)_1$
- ポテンシャル  $\Rightarrow$  対称性の自発的破れ  $\Rightarrow$  Higgs 機構
- Yukawa 結合  $\Rightarrow$  フェルミ粒子の質量, 弱い相互作用での CP の破れ, Cabibo 混合

$$h_{ij}^{(l)} \bar{l}_R^i H^\dagger L^j \Rightarrow \sum_i m_i^{(l)} \bar{l}_R^i l_L^i \quad (6.1.6a)$$

$$h_{ij}^{(u)} \bar{U}_R^i H^T \sigma_2 Q^j \Rightarrow \sum_i m_i^{(u)} \bar{U}_R^i U_L^i \quad (6.1.6b)$$

$$h_{ij}^{(d)} \bar{D}_R^i H^\dagger Q^j \Rightarrow \sum_{i,j} m_i^{(d)} \bar{D}_R^i C_j^i D_L^j \quad (6.1.6c)$$

**CKM 行列** 自発的対称性の破れの後の湯川結合の部分を上記の様に標準化すると、残るユニタリ変換の自由度は、 $D_R^i$  および  $D_L^i$  の各場の  $U(1)$  変換。この自由度  $2N_g$  個のうち、一般的なユニタリ行列  $C_j^i$  を変化させない変換は、すべての場に対する共通の  $U(1)$  変換。したがって、 $C_j^i$  の物理的な実数自由度は

$$N_g^2 - 2N_g + 1 = (N_g - 1)^2. \quad (6.1.7)$$

これらのうち、 $N_g$  次の直交変換の自由度は  $N_g(N_g - 1)/2$  なので、

$$(N_g - 1)^2 - \frac{1}{2}N_g(N_g - 1) = \frac{1}{2}(N_g - 1)(N_g - 2) \quad (6.1.8)$$

個の複素位相の自由度が残る。 $N_g = 3$  のときは、これは 1 となる。

$N_g = 3$  の時の KM 行列の標準形は

$$C_{\text{KM}} = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ -s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (6.1.9)$$

ここで、 $c_j = \cos \theta_j$ ,  $s_j = \sin \theta_j$ .

### 6.1.2 実験的制限

1. The precision electroweak scale data.
2. the 7-year WMAP constraint on dark matter relic density.
3. the experimental limits on the flavor changing neutral current (FCNC) process  $b \rightarrow s\gamma$ .
4. the anomalous magnetic moment of the muon.
5. the process  $B_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ .
6. the LEP limit on the lightest CP-even Higgs boson mass.
7. proton lifetime.

### 6.1.3 問題点

#### 素粒子物理

- ゲージセクターの不完全な統一
- クォーク電荷の分数性とそのパターン

- 強い相互作用での CP 保存
- ニュートリノの質量と mixing
- 湯川相互作用の構造
  - 質量項の構造
  - Cabibo mixing
  - 弱い相互作用での CP の破れ
- 世代多重性

#### 宇宙物理

- バリオン非対称性の起源
- Dark matter の実体と起源
- Dark energy の実体と起源/宇宙項問題
- インフレーションの起源
- 重力が含まれない

---

## §6.2

---

# ゲージセクターの統一

---

### 6.2.1 標準モデル ⇒ 大統一理論

- gauge-coupling unification

$$\frac{1}{\alpha_3} = \frac{1}{6\pi} (4N_g - 33) \ln \frac{M}{E} + \text{const}, \quad (6.2.1a)$$

$$\frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{6\pi} \left( 4N_g - \frac{43}{2} \right) \ln \frac{M}{E} + \text{const}, \quad (6.2.1b)$$

$$\frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{6\pi} \left( 4N_g + \frac{3}{10} \right) \ln \frac{M}{E} + \text{const}. \quad (6.2.1c)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \approx \alpha_2 \approx \alpha_3 \text{ at } E \approx 10^{16} \text{ GeV}$$

- Hypercharge structure

$$SU(5) \supset U(1) \times SU(2) \times SU(3)$$

$$5^* = (1, 3^*)_{2/3} + (2^*, 1)_{-1} : (d^c, e^-, -\nu)_L$$

$$10 = (1, 3^*)_{-4/3} + (2, 3)_{1/3} + (1, 1)_2 : \begin{pmatrix} [u^c] & -u & -d \\ u & 0 & -e^+ \\ d & e^+ & 0 \end{pmatrix}_L$$

[Wilczek F:in Physics in the 21st Century, eds. K.Kikkawa et al.(1997, World Scientific)]

- Neutrino mass

$$SO(10) \supset SU(5)$$

$$16 = 5^* + 10 + 1 \Rightarrow \text{neutrino mass}$$

- Baryon asymmetry

- Strong CP problem:  $|\theta| < 10^{-11}$

Peccei-Quinn symmetry  $\Rightarrow$  SSB at  $E \gtrsim 10^{12} \text{ GeV} \Rightarrow$  invisible axion  
 $m_a \gtrsim 10^{-6} \text{ eV}$

### 6.2.2 可能な大統一群 $G$

- 基本的な要請

- 1)  $G \supset G_{\text{SM}} = \text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1)$ . 特に,  $\text{rank}(G) \geq 4$ .
- 2)  $G$  は複素表現を許す.

(理由) 標準モデルでの左巻きおよび右巻きフェルミオンの  $G_{\text{SM}}$  に関する表現をそれぞれ  $\mathbf{f}_L, \mathbf{f}_R$  とすると, 基本場を左巻きとする表示では,  $\mathbf{F}_L = \mathbf{f}_L + \mathbf{f}_R^*$ . よって,  $(\mathbf{f}_L^{\text{SM}})^* \neq \mathbf{f}_L^{\text{SM}}, (\mathbf{f}_R^{\text{SM}})^* \neq \mathbf{f}_R^{\text{SM}}$  より,  $\mathbf{f}_{L/R}^{\text{SM}} \subset \mathbf{f}_{L/R}$  に対して,  $\mathbf{f}_L \not\cong \mathbf{f}_R \Leftrightarrow \mathbf{F}_L^* \not\cong \mathbf{F}_L$ . すなわち,  $\mathbf{F}_L$  は non-self-conjugate(complex). (一般に,  $\mathbf{f}_L \not\cong \mathbf{f}_R$  かつ  $\mathbf{F}_L^* \cong \mathbf{F}_L$  なら, 実表現  $\mathbf{f}'_{L/R} = \mathbf{f}'_{L/R}$  を用いて,  $\mathbf{f}_L = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}'_L, \mathbf{f}_R = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}'_R$ . 実際,  $f_0, f_1$  を複素表現として,  $f_0 + f_1^* = f_1 + f_0^*$  なら  $f_0 \subset f_1$  かつ  $f_1^* \subset f_0^*$  より  $f_0 = f_1$ .)

- 要請 1), 2) より, 可能な群は

$$\begin{aligned} \text{SU}(5) &\subset \text{SO}(10) \subset E_6, \\ \text{SU}(5) &\subset \text{SU}(6) \subset \text{SU}(7) \cdots, \\ \text{SO}(10) &\subset \text{SO}(14) \cdots \subset \text{SO}(4n+2) \subset \cdots. \end{aligned}$$

注: 要請 1) を満たす他のランク 4 のコンパクト群は

$$\begin{aligned} F_4 &\supset \text{SO}(9) \supset G_{\text{SM}}, \\ \text{Sp}(4) &\supset \text{SU}(2) \times \text{Sp}(3) \supset G_{\text{SM}}. \end{aligned}$$

- $E_n$  系列の表現

$$\begin{aligned} E_4 = \text{SU}(5) &: 5^* + 10, \\ E_5 = \text{SO}(10) \supset \text{SU}(5) \times \text{U}(1) &: 16 = 1_{-5} + 5_3^* + 10_{-1}, \\ &: 10 = 5_2 + 5_{-2}^*, \\ &: 45 = 1_0 + 10_4 + 10_{-4}^* + 24_0, \\ E_6 \supset \text{SO}(10) \times \text{U}(1) &: 27 = 1_4 + 10_{-2} + 16_1, \\ &: 78 = 1_0 + 45_0 + 16_{-3} + 16_3^*, \\ E_8 \supset \text{SU}(3) \times E_6 &: 248 = (8, 1) + (1, 78) + (3, 27) + (3^*, 27^*). \end{aligned}$$

$G$	rank	dim	fund. rep	complex irreps
$SU(n+1)$	$n$	$n(n+2)$	$n+1$	$(a_1 \cdots a_l) \neq (a_l \cdots a_1)$
$SO(2n+1)$	$n$	$n(2n+1)$	$2^n$	none
$Sp(n)$	$n$	$n(2n+1)$	$2n$	none
$SO(2n)$	$n$	$n(2n-1)$	$2^{n-1}$	$n$ :odd
$G_2$	2	14	7	none
$F_4$	4	52	26	none
$E_6$	6	78	27	$(a_1 \cdots a_6) \neq (a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_6)$
$E_7$	7	133	56	none
$E_8$	8	248	248	none



---

## §6.3

---

# 超対称理論

---

### 6.3.1 Super-Poincare algebra

Coleman-Mandula の定理 (1967)

仮定

- 1)  $S$  行列は 4 次元 Minkowski 時空上の局所的相対論的量子論に基づく.
- 2) 同じ質量の 1 粒子状態をもつ粒子の種類は有限個.
- 3) 真空と 1 粒子状態の間にはエネルギーギャップがある.

のもとで,  $S$  行列の対称性を表す Lie 代数は, Poincare Lie 代数とコンパクト Lie 代数の直和となる.

**Boson  $\Leftrightarrow$  Fermion :**

$$\delta_\epsilon \phi = i[\epsilon \cdot Q, \phi] \Rightarrow Q : \text{spinor}$$

超対称代数

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \\ [\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_0] &\subset \mathcal{L}_0, \quad [\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1] \subset \mathcal{L}_1, \quad \{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_1\} \subset \mathcal{L}_0. \end{aligned}$$

**Haag-Lopuszanski-Sohnius の定理 (1975)**

Coleman-Mandula の定理の仮定が満たされるとき，4次元理論の S-行列の持ちうる超対称性は，超対称代数が正定値内積をもつ Hilbert 空間への表現をもち，かつ，任意の奇元  $Q$  のエルミート共役作用素が再び代数に属するならば，奇元は必ずスピンの 1/2 の表現に属し，次の交換関係で特徴付けられる **Poincare SUSY** 代数で与えられる：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \mathcal{P} \oplus \mathcal{S} \oplus \mathcal{C}, & \mathcal{L}_1 &= \langle Q_\alpha^L, Q_{\dot{\alpha}M}^* \rangle; \\ [P_m, Q_\alpha] &= 0, & [B, Q_\alpha] &= S(B)Q_\alpha \quad (B \in \mathcal{S}), \\ \{Q_\alpha^L, Q_{\dot{\alpha}M}^*\} &= 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m P_m \delta_M^L, & \{Q_\alpha^L, Q_\beta^M\} &= \epsilon_{\alpha\beta} X^{LM} \subset \mathcal{C}, \\ S(B)^L{}_M X^{MN} &= S(B)^N{}_M X^{ML} \quad (B \in \mathcal{S}) \end{aligned}$$

$N = 1$  case :

$$\{Q_\alpha, Q_\beta^\dagger\} = 2P_a(\Gamma^a \Gamma^0)_{\alpha\beta}, \quad [P^a, Q_\alpha] = 0$$

**Positivity of energy**

$$\sum_\alpha \langle \{Q_\alpha, Q_\alpha^\dagger\} \rangle = 8E$$

**Boson-fermion cancellation** :

$$\text{Vacuum energy} = +\frac{1}{2} \sum_p \omega_p \text{ (boson)}, \quad -\frac{1}{2} \sum_p \omega_p \text{ (fermion)}$$

**(Massless) Supermultiplet**

$$\begin{aligned} N = 1 & : (0, 1/2) \quad (1/2, 1) \quad (1, 3/2) \quad (3/2, 2) \\ N = 2 & : \left(-\frac{1}{2}, 0^2, \frac{1}{2}\right) \quad \left(0, \frac{1}{2}^2, 1\right) \quad \left(1, \frac{3}{2}^2, 2\right) \\ N = 8 & : \left(-2, -\frac{3}{2}^8, -1^{28}, -\frac{1}{2}^{56}, 0^{70}, \frac{1}{2}^{56}, 1^{28}, \frac{3}{2}^8, 2\right) \end{aligned}$$

表 6.1: adS/dS 実単純超代数

$D$	dS		adS	
	$\mathcal{L}$	$G$	$\mathcal{L}$	$G$
4	$\text{osp}(n 1, 1; \mathbb{H})$	$\mathfrak{so}^*(2n)$	$\text{osp}(n-p, p 4; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(n-p, p)$
	$\text{osp}(4, 1 2n; \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$	$\text{osp}(3, 2 2n; \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$
5	$\mathfrak{sl}(2 n; H)$	$\mathfrak{su}^*(2n)$	$\mathfrak{su}(2, 2 n-p, p)$	$\mathfrak{u}(n-p, p)$
	$\mathfrak{sl}(2 2; H)$	$\mathfrak{so}(5, 1)$	$\mathfrak{su}(2, 2 4-p, p)$	$\mathfrak{su}(4-p, p)$
	$\text{osp}(5, 1 2n; \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$	$\text{osp}(4, 2 2n, \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$
	$Q_{\text{II}}(3)$	1	$Q_{\text{I}}(3)$	1
6	$\text{osp}(6, 1 2n; \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$	$\text{osp}(5, 2 2n; \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$
	$F_{\text{IV}}(4)$	$\mathfrak{su}(2)$	$F_{\text{III}}(4)$	$\mathfrak{su}(2)$
7	$\text{osp}(7, 1 2n; \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(n; \mathbb{R})$	$\text{osp}(6, 2 2n; \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$
			$\text{osp}(4 n-p, p; \mathbb{H})$	$\mathfrak{sp}(n-p, p)$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1; \quad \mathcal{L}_0 = \mathfrak{so}(D, 1) \oplus G \quad \text{or} \quad \mathfrak{so}(D-1, 2) \oplus G$$

References: Parker M: JMP21, 689(1980); Fre P, Trigiante M, Van Proeyen A: CQG19, 4167 (2002); Lukierski J, Nowicki A: PLB151, 382(1985); Pilch K, van Nieuwenhuizen P, Sohnius F: CMP98,, 105(1985)

### 6.3.2 大統一理論 ⇒ SGUT

- **Dark matter**

有力な候補 : neutralinos( $\tilde{\gamma}, \tilde{Z}, \tilde{\phi}_0, \tilde{g}$ ), axion

- **hierarchy problem**

Non-renormalisation Th. ⇒ small corrections on masses and  $\Lambda$

- **$\Lambda$  problem**

AdS 超対称性代数が存在するので、超対称性が  $\Lambda = 0$  を意味するわけではない。また、dS 超対称代数は存在しないので、インフレーションや  $\Lambda > 0$  は超対称性の破れを要求する。しかし、真空の量子エネルギーを制御可能にするには、超対称性が必要。

### 6.3.3 SGUT $\Rightarrow$ 超重力統一理論

局所的な超対称性と一般共変性を同時に要求すれば、必然的に超重力理論となる。

**超対称理論** 4次元 Minkowski 時空における  $N = 1$  超対称性をもつ理論の物質セクターは、カイラル超組に対応するカイラル超場  $\Phi$  とベクトル超組に対応するベクトル超場  $V$  により記述される。ここで、(スカラ型) 超場は、超空間  $(x^m, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$  上の関数  $F(x, \theta, \bar{\theta})$  で、その超変換は超空間の無限小ベクトル場

$$Q_\alpha = \delta_\alpha - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m, \quad (6.3.1a)$$

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\delta}_{\dot{\alpha}} + i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m, \quad (6.3.1b)$$

により、

$$\delta F = (\xi^\alpha Q_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}) F \quad (6.3.2)$$

と表される。

超空間上では、超対称変換に対する不変ベクトル場が

$$D_\alpha = \delta_\alpha + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m, \quad (6.3.3a)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\delta}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \quad (6.3.3b)$$

で与えられる。特に、カイラル超場は、条件

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi = 0 \quad (6.3.4)$$

を満たす超場で、複素スカラ場  $A(x)$ ,  $F(x)$  と複素スピノール場  $\psi(x)$  を用いて

$$\Phi = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y); \quad (6.3.5)$$

$$y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta} \quad (6.3.6)$$

と表される。このとき、

$$\delta F(x) = i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\partial_m\psi. \quad (6.3.7)$$

また、ベクトル超場は、条件

$$V = V^\dagger \quad (6.3.8)$$

を満たす超場で、 $V$  が実場  $C(x)$ ,  $M(x)$ ,  $N(x)$ ,  $D(x)$ ,  $v_m(x)$ ,  $\chi(x)$ ,  $\lambda(x)$  を用いて

$$\begin{aligned} V = & C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x) \\ & + \frac{i}{2}\theta\theta(M(x) + iN(x)) - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}(M(x) - iN(x)) - \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) \\ & + i(\theta\theta)\bar{\theta}\left(\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi(x)\right) - i(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\left(\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar{\chi}(x)\right) \\ & + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\theta)\left(D(x) + \frac{1}{2}\square C(x)\right) \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

と表される。このとき,

$$\delta D(x) = \bar{\xi} \sigma^m \partial_m \lambda - \xi \sigma^m \partial_m \bar{\lambda}. \quad (6.3.10)$$

一般に,  $V$  がゲージ場に対応するとき, ゲージ変換により

$$C = M = N = \chi = 0 \quad (6.3.11)$$

とおくことができる.

4次元 Minkowski 時空における最も一般的な  $N = 1$  超対称理論は

- 超場

- Kahler 多様体  $\mathcal{M}^d$  に値を取るカイラル超場:  $\Phi = (\Phi^i) (i = 1, \dots, d)$
- $\mathcal{M}^d$  の等長変換群  $G$  に対応する Lie 代数  $\mathfrak{g}$  に値を取るベクトル超場:  
 $V = V^{(a)} T_{(a)}$

- ポテンシャル

- $G$  不変な Kahler ポテンシャル:  $K(z^i, \bar{z}^i)$
- $G$  不変な超ポテンシャル:  $W(z)$
- $G$  共変的なゲージ結合ポテンシャル:  $H_{(ab)}(z)$

を用いて,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \int d^2\theta d^2\bar{\theta} [K(\Phi, \Phi^\dagger) + \Gamma(\Phi, \Phi^\dagger, V)] \\ & + \left[ \int d^2\theta \left( \frac{1}{16g^2} H_{(ab)}(\Phi) (\mathcal{W}^{(a)} \mathcal{W}^{(b)}) + W(\Phi) \right) + \text{h.c.} \right]. \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

ここで,  $\mathcal{W}_\alpha$  は Lie 代数  $\mathfrak{g}$  に値をもつスピノール型カイラル超場

$$\mathcal{W}_\alpha = \mathcal{W}_\alpha^{(a)} T_{(a)} := -\frac{1}{4} (\bar{D}\bar{D}) e^{-V} D_\alpha e^V, \quad (6.3.13)$$

ゲージ変換は,  $\mathfrak{g}$  に値を取るカイラル超場  $\Lambda = \Lambda^{(a)} T_{(a)}$  を用いて,

$$\delta\Phi^i = \Lambda^{(a)} X_{(a)}^i(\Phi), \quad \delta e^V = -i\Lambda^\dagger e^V + ie^V \Lambda, \quad \delta\mathcal{W}_\alpha = -i\Lambda^\dagger \mathcal{W}_\alpha + i\mathcal{W}_\alpha \Lambda \quad (6.3.14)$$

と表される。ここで,  $X_{(a)} = (X_{(a)}^i)$  は  $G$  に対応する  $\mathcal{M}^d$  上の Killing ベクトルの基底.

超重力理論 超重力理論では、平坦な時空での物質超場に加えて、重力超場

$$2\mathcal{L} = e \{1 + i\Theta\sigma^a\bar{\psi}_a - \Theta\Theta (M^* + \bar{\psi}_a\bar{\sigma}^{ab}\psi_b)\}, \quad (6.3.15a)$$

$$\begin{aligned} -6\mathcal{R} = & M + \Theta[\sigma^a\bar{\sigma}^b\psi_{ab} - i\sigma^a\bar{\psi}_a M + i\psi_a b^a] \\ & + \Theta\Theta \left[ \frac{1}{2}\hat{R} + i\bar{\psi}^a\bar{\sigma}^b\psi_{ab} + \frac{2}{3}MM^* \right. \\ & + \frac{1}{3}b^a b_a - ie_a{}^m \mathcal{D}_m b^a + \frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\psi}M - \frac{1}{2}\psi_a\sigma^a\bar{\psi}_c b^c \\ & \left. + \frac{1}{8}\epsilon^{abcd} (\bar{\psi}_a\bar{\sigma}_b\psi_{cd} + \psi_a\sigma_b\bar{\psi}_{cd}) \right] \end{aligned} \quad (6.3.15b)$$

が必要となる。これらの場は、超重力場

$$e_m^a, \quad \psi_m^\alpha, \quad M, \quad b_a = b_{\alpha\dot{\alpha}} \quad (6.3.16)$$

により決まる。

$N = 1$  局所超対称変換で不変な最も一般的な理論は次の作用積分で与えられる：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \int d^2\Theta 2\mathcal{L} \left[ \frac{3}{8\kappa^2} (\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{D}} - 8\mathcal{R}) \exp \left\{ -\frac{\kappa^2}{3} [K(\Phi, \Phi^\dagger) + \Gamma(\Phi, \Phi^\dagger, V)] \right\} \right. \\ & \left. + \frac{1}{16g^2} H_{(ab)}(\Phi) (\mathcal{W}^{(a)}\mathcal{W}^{(b)}) + W(\Phi) \right] + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (6.3.17)$$

この作用積分から  $F$  項,  $D$  項,  $M$  項,  $b_a$  項などの非力学的自由度を消去して得られる作用積分のボゾン部分は

$$\begin{aligned} e^{-1}\mathcal{L} = & \frac{1}{2}R - g_{ij^*}\tilde{D}_m A^i \tilde{D}^m A^{*j} - \mathcal{V}(A) \\ & - \frac{1}{4}h_{(ab)}^R(A) F_{mn}^{(a)} F^{mn(b)} + \frac{1}{8}h_{(ab)}^I \epsilon^{mnkl} F_{mn}^{(a)} F_{kl}^{(b)}. \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

ここで,

$$\tilde{D}_m A^j = \partial_m A^j - g v_m^{(a)} X_{(a)}^j, \quad (6.3.19)$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}g^2 D_{(a)} D^{(a)} + e^K \left[ g^{ij^*} (D_i W)(D_j W)^* - 3W^* W \right], \quad (6.3.20)$$

$$D_i W = \partial_i W + K_i W \quad (6.3.21)$$

また,  $D^{(a)}(z, \bar{z})$  は  $\mathcal{K}^d$  の Killing ベクトル  $X^{(a)}$  に対応する Killing ポテンシャル

$$g_{ij^*} X^{*j(a)} = i \frac{\partial D^{(a)}}{\partial z^i}, \quad g_{ij^*} X^{i(a)} = -i \frac{\partial D^{(a)}}{\partial \bar{z}^j} \quad (6.3.22)$$

である。

超対称性 基底状態で  $\langle \psi_m \rangle = \langle \chi^i \rangle = \langle \lambda^{(a)} \rangle = 0$  (かつフェルミ場の凝縮がない) とすると, これらの条件が超対称変換で保たれる条件は

$$0 = \delta_\zeta \chi^i = i\sqrt{2}\sigma^m \bar{\zeta} \tilde{D}_m A^i - \sqrt{2}e^{K/2} g^{ij*} D_{j*} W^* \zeta, \quad (6.3.23a)$$

$$0 = \delta_\zeta \lambda^{(a)} = F_{ab}^{(a)} \sigma^{ab} \zeta - ig D^{(a)} \zeta, \quad (6.3.23b)$$

$$0 = \delta_\zeta \psi_m = 2 \left[ \nabla_m + \frac{1}{4} \left( K_j \tilde{D}_m A^j - K_{j*} \tilde{D}_m A^{*j} \right) \right] \zeta + ie^{K/2} W \sigma_m \bar{\zeta} \quad (6.3.23c)$$

で与えられる. これらは一般に

$$F_{ab}^{(a)} = D^{(a)} = \tilde{D}_m A^i = D_j W = 0 \quad (6.3.24)$$

を要求する. しかし, 必ずしも  $W = 0$  を要求しない. したがって,

$$\mathcal{V} = -3|W|^2 e^K \leq 0 \quad (6.3.25)$$

となり,  $W \neq 0$  なら負の宇宙項が生じる.

### 6.3.4 SUGRA インフレーションモデル

F 項モデルの困難 SUGRA モデルでの  $F$  項起源のスカラポテンシャルは

$$\mathcal{V} = e^K \left( K^{i\bar{j}} D_i W D_{\bar{j}} \bar{W} - 3|W|^2 \right) \quad (6.3.26)$$

で与えられる. このため, 標準的な Kahler ポテンシャル

$$K = \sum_i z_i \bar{z}_i \quad (6.3.27)$$

では,  $e^K$  の因子のため  $|z_i| \gg 1$  ではポテンシャルが急速に増大し, Chaotic インフレーションは実現されない. また,  $W$  がインフラトン場  $\phi$  によらないとしても, 質量項  $|W|^2 \phi^2$  が生じる:

$$m_\phi^2 \geq 3H^2 \quad (6.3.28)$$

実際,  $z_i = 0$  で  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 = 3H^2$  を考慮すると ( $\kappa = 1$ ),

$$m_\phi^2 = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \phi \partial \bar{\phi}} \right|_{\phi=0} = \mathcal{V}_0 + |W|^2 \geq \mathcal{V}_0 = 3H^2. \quad (6.3.29)$$

よって,

$$\eta = \frac{V''}{V} = \frac{m_\phi^2}{\mathcal{V}_0} = 1. \quad (6.3.30)$$

**Shift 対称性** Kahler ポテンシャルと超ポテンシャルが

$$K = \frac{1}{2}(\Phi + \bar{\Phi})^2 + X\bar{X}, \quad (6.3.31a)$$

$$W = m\Phi X \quad (6.3.31b)$$

で与えられるとすると,

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + i\phi) \quad (6.3.32)$$

として, ポテンシャルは  $\eta, |X| \ll 1$  のとき

$$V = \frac{m^2}{2}\phi^2(1 + \eta^2) + m^2|X|^2. \quad (6.3.33)$$

と振る舞い,  $\eta, |X| \gg 1$  では  $e^K$  因子のため急速に増大する. このため,  $\eta, |X| \approx 1$  となり,  $\phi$  をインフラトンする chaotic インフレーションが実現される. [Kawasaki M, Yamaguchi M, Yanagida T 2000[36]; Yamaguchi M, Yokoyama J 2001, 2003[60, 61, 59]]



---

## §6.4

---

### 高次元理論へ

---

#### Sugra GUT ⇒ 高次元 Sugra GUT

- フェルミセクターの構造
  - 世代数 (family repetition)
- 湯川結合
  - 結合定数の大きさ (質量の起源)
  - Cabibo/neutrino mixing, CP violation
- ヒッグスセクターの構造
  - $3 + 2$  分解問題
- 超対称性の破れ
  - 4次元理論では超対称性の破れの大きさを決める自然な方法がない.
- 重力の量子論
  - 超弦理論の臨界次元は10.
- 宇宙項問題
  - 4次元理論は宇宙定数の絶対値を決めることができない.
  - 11次元超重力理論は2階微分までのオーダーで作用積分が一意的で宇宙定数の自由度がない.

### 6.4.1 Family repetition problem

$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L e_R$ $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L u_R d_R$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L \mu_R$ $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L c_R s_R$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L \tau_R$ $\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L t_R b_R$
---	---	--

時空が  $M = X_4 \times Y_6$  と表され、その上のゲージ場が

$$A_\mu = A_\mu(x) \in H, \quad A_p = A_p(y) \in K; \quad H \times K \subset G \quad (6.4.1)$$

という構造をもつなら、 $Y_6$  上の Dirac 作用素の固有スピノール

$$\hat{\gamma}_{[6]} \hat{\gamma}^p D_p \chi_a = m_a \chi_a; \quad D_p = \nabla_p + A_p, \quad (6.4.2)$$

$$\int_Y d\mu(y) \chi_a^\dagger \chi_b = \delta_{ab} \quad (6.4.3)$$

を用いて  $M$  上のスピノール  $\Psi$  を

$$\Psi = \sum_a \psi_a(x) \chi_a(y) \quad (6.4.4)$$

と展開すると、

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes \hat{\gamma}_{[6]}, \quad \Gamma^p = 1 \otimes \hat{\gamma}^p \quad (6.4.5)$$

より

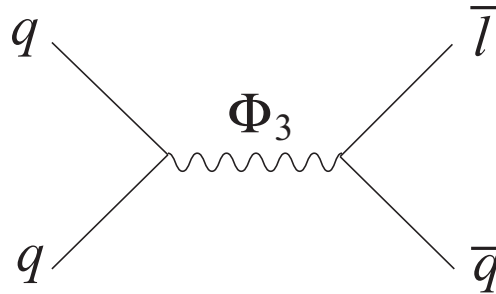
$$\int_Y d\mu(y) i \bar{\Psi} \Gamma^M D_M \Psi = \sum_a \bar{\psi}_a i (\gamma^\mu D_\mu + m_a) \psi_a$$

よって、 $\chi$  のゼロモードの数が4次元での family の数を与える。

### 6.4.2 (3 + 2) 分解

SU(5)-GUT では, 5次元 Higgs 場  $\Phi_5 = (\Phi_2, \Phi_3)$  がバリオン数を破る反応を媒介する:

$$5^* \times 10 = 5 + 45 \Rightarrow \bar{\Phi}_5 \psi_{5^*} \psi_{10} \quad (6.4.6)$$



**Orbifold GUT (川村モデル)** 時空が  $M = X_4 \times S^1/\mathbb{Z}_2 \ni (x, y)$  というオービフォールド構造を持つとする. このとき,  $\Phi_5$  が  $\mathbb{Z}_2$  の変換に対して

$$\Phi_5(x, -y) = P\Phi_5(x, y); \quad P = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (6.4.7)$$

というパリティをもつことを要求すれば,

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \phi_2(x) + \phi_2^1(x) \cos(\pi y/L) + \dots \\ \Phi_3 &= 0 + \phi_3^1(x) \sin(\pi y/L) + \dots \end{aligned}$$

より, 4次元ブレイン上では  $\Phi_2$  のみが軽くなる.

#### Reference

Nilles, H.P.: hep-th/0410160

Kawamura, Yoshiharu: Prog.Theor.Phys.105:691-696,2001; ibid. 999-1006.

---

## §6.5

---

# String phenomenology vs stabilisation

---

### 6.5.1 超弦理論のコンパクト化

- Het
  - Successful model building (but, basically GUT only and no EW Higgs!!):  
O(100) MSSM-like models from  $3 \times 10^4$  SO(10)/ $E_6$  GUT models by  $T^6/\mathbb{Z}_6$ .  
Lots of SU(5)/SO(10) GUT models by smooth toric CYs.  
No stabilisation mechanism is known.
- Type IIB/F
  - Realistic model building is possible : GUT only in F.
  - Moduli stabilisation is realised by flux compactification with D-instanton/gaugino condensates [KKLT].
  - Susy breaking is problematic. No dS vacuum has been exactly constructed. =;Kahler uplifting
- Type IIA/M
  - Successful model building (no GUT): MSSM-like models by  $T^6/P \times \Omega$ .
  - Moduli stabilisation is realised in some realistic models except for axionic moduli.
  - No inflation model has not been constructed in that class. (No dS vacuum has been found). cf. Non-geometric flux

	Heterotic (M)	IIA	IIB	M/F
Local SUSY Gravity sector	$N = 4(D = 10)$ $g_{MN}, B_2, \phi$	$N = 8(D = 10)$ $NS, \{C_{2p+1}\}$	$N = 8(D = 10)$ $NS, \{C_{2p}\}$	$N = 8(D = 11/12)$ $g_{MN}, C_3$
Geometric Compactif.	$\psi_M, \lambda$ $T^6 \Rightarrow N = 4$ $T^6/\Gamma, CY_3 \Rightarrow N = 1$	$\psi_M, \lambda; \psi'_M, \lambda'$ $T^6 \Rightarrow N = 8$ $T^6/\Gamma, CY_3 \Rightarrow N = 2$	$\psi_M, \lambda; \psi'_M, \lambda'$ $T^6 \Rightarrow N = 8$ $T^6/\Gamma, CY_3 \Rightarrow N = 2$	$\psi_M$ $T^7 \Rightarrow N = 16$ $M/G_2, F/CY_4 \Rightarrow N = 1$
Matter sector	Bulk ( $F_2 + \chi$ )	$IDB(F_2 + \chi) \Rightarrow N = 1$	$IDB/MB(F_2 + \chi) \Rightarrow N = 1$	Singularities
Bulk Flux	$G = E_8 \times E_8/SO(32)$ Gauge bdl $\Rightarrow$ GUT	$G = U(n) 's + SO/Sp$ $F_0 \Rightarrow$ massive IIA	$G = U(n) 's + SO/Sp$ ISD 3-flux $\Rightarrow$ fix complex moduli	$G = U(n) 's, E_8$
Moduli stabilisation	H-flux $\Rightarrow Y_6$ : Non-Kähler	Flux $\Rightarrow Y_6$ : Non-Kähler	$\bigcirc$ Flux + instanton $/\langle \chi \chi \rangle$	X
Susy breaking	X (partially for complex moduli) ???	$\Delta$ Flux+NP effect (non-generic) ???	$\bigcirc$ Kahler uplifting	???
Particle Ph.	$\bigcirc$ MSSMs $\Leftarrow$ $SU(5)/SO(10)/E_6$ GUTs No EW higgs!!	$\Delta$ MSSM-like models. No GUT. EW SB ?	$\Delta$ Direct MSSM by magnetic D-brane of F-GUT.	X GUT only
Cosmology	X Higher-order???	X No dS vacua found !!	$\Delta$ anti-D3 or string corrections	No realistic model. X

---

## §6.6

---

# 宇宙の加速膨張に対する No-Go 定理

---

### 6.6.1 Bardeen の定理

【定理 6.6.1】 高次元（統一）理論が次の条件を満たしているとする：

1. 時空が次の構造をもつ：

$$ds^2(M_{n+4}) = W(y)^{1/2} ds^2(X_4) + ds^2(Y_n) \quad (6.6.1)$$

2. 内部空間  $Y_n$  は境界のないコンパクトな多様体で、計量は静的である。
3. ワープ因子  $W(y)$  は至る所、有界正則である。
4. 高次元理論が強エネルギー条件  $R_{00}(M_{n+4}) \geq 0$  を満たしている。

このとき、4次元時空  $X_4$  でも強エネルギー条件  $R_{00}(X_4) \geq 0$  が満たされる。 □

**Proof.** 仮定より、任意の時間的ベクトル  $V$  に対して、

$$R_{VV}(X) = R_{VV} - \frac{1}{4W} \Delta_Y W \quad (6.6.2)$$

が成り立つ。これを  $Y$  上で積分すると

$$R_{VV}(X) \int_Y d\Omega(Y) W = \int_Y d\Omega(Y) \left[ W R_{VV} - \frac{1}{4} \Delta_Y W \right] \quad (6.6.3)$$

を得る。  $R_{VV} \geq 0$  で  $W$  が有界正則なら、この式の右辺は  $\geq 0$  となり、  $R_{VV}(X) \geq 0$  を得る。 Q.E.D.

Raychaudhuri 方程式

$$\frac{3}{a} \ddot{a} = -R_{VV} - 2\sigma^2 + 2\omega^2; \quad \nabla \cdot V = 3 \frac{\dot{a}}{a} \quad (6.6.4)$$

より、この定理は宇宙の加速膨張を禁止する。

## 6.6.2 SUGRA での強エネルギー条件

## M 理論

$$\begin{aligned}
R_{MN} &= \frac{1}{12} F_{M\dots} F_0{}^{\dots} - \frac{1}{6} |F_4|^2 g_{MN} \\
R_{00} &= \frac{1}{18} F_{0ijk} F_0{}^{ijk} + \frac{1}{144} F_{ijkl} F^{ijkl}
\end{aligned} \tag{6.6.5}$$

## II 型理論

$$\begin{aligned}
R_{MN} &= \frac{1}{2\tau_2^2} \nabla_{(M} \nabla_{N)} \tau^* + \frac{1}{4\tau_2} \left( G_{PQ(M} G_{N)}^{*PQ} - \frac{1}{2} |G_3|^2 g_{MN} \right) + \frac{1}{16} \tilde{F}_{****} \tilde{F}^{****} \\
R_{00} &= \frac{1}{2\tau_2^2} |\nabla_0 \tau|^2 + \frac{3}{16\tau_2} G_{0ij} G_0{}^{*ij} + \frac{1}{48\tau_2} G_{ijk} G^{*ijk} + \frac{1}{96} \tilde{F}_{0ijk} F_0{}^{ijk}
\end{aligned} \tag{6.6.6}$$

## I 型理論

$$\begin{aligned}
R_{MN} &= \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial_N \phi + e^{-\phi} \left( \frac{1}{4} \tilde{H}_{M**} \tilde{H}_N{}^{**} - \frac{1}{8} |\tilde{H}_3|^2 g_{MN} \right) \\
&\quad + \frac{\alpha'}{4} e^{-\phi/2} \text{Tr} \left( F_{M*} F_N{}^* - \frac{1}{8} |F_2|^2 g_{MN} \right) \\
R_{00} &= \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 + \frac{e^{-\phi}}{48} \left( 9 \tilde{H}_{0ij} \tilde{H}_0{}^{ij} + \tilde{H}_{ijk} \tilde{H}^{ijk} \right) \\
&\quad + \frac{\alpha'}{64} e^{-\phi/2} \text{Tr} (14 F_{0i} F_0{}^i + F_{ij} F^{ij})
\end{aligned} \tag{6.6.7}$$

このため、M 理論・超弦理論のコンパクト化により 4次元インフレーション宇宙を得るには、No-Go 定理の仮定のいずれかを破らなければならない：

- 非コンパクトな内部空間  $\Rightarrow$  ブレーンワールドモデル
- 非静的な内部空間  $\Rightarrow$  S-ブレーンモデル, 非定常負曲率内部空間
- 非定常な 4次元空間  $\Rightarrow$  quintessence 型モデル
- 特異物体, 非正則ワープ  $\Rightarrow$  ブレーンインフレーション, KKLT/KKLMMT
- 量子効果, 高次補正  $\Rightarrow$  Kähler uplifting model, Non-geometric flux, 高階微分モデル

### 6.6.3 ブレーン

一般に, Einstein 方程式より

$$R_{MN} = \kappa^2 \left( T_{MN} - \frac{T}{D-2} g_{MN} \right). \quad (6.6.8)$$

特に,  $D = 10$  では

$$R_{00} = \frac{\kappa^2}{8} (7T_{00} + T_I^I). \quad (6.6.9)$$

いま, エネルギー運動量が

$$T_b^a = \begin{cases} -\tau \delta_b^a \delta^{p+1}(\Sigma) & (0 \leq a, b \leq p) \\ 0 & (p < a, b) \end{cases} \quad (6.6.10)$$

で与えら得るテンション  $\tau$  の  $p$ -ブレーンを考えると,

$$7T_{00} + T_I^I = (7-p)\tau \delta^{p+1}(\Sigma). \quad (6.6.11)$$

よって,

**D-brane**  $\tau > 0 \Rightarrow$  8-brane ないし 9-brane のみが  $R_{00}$  に負の寄与を与える.

**O-brane**  $\tau < 0 \Rightarrow$   $p$ -brane ( $p < 7$ ) が  $R_{00}$  に負の寄与を与える.

[Giddings SB, Kachru S, Polchinski J 2002[27]]

ただし, O-brane は内部空間で平均して初めて宇宙を加速する効果をもち, 高次元でどのように機能するか不明である.

### 6.6.4 tadpole 条件

フラックスの定義より一般に,

$$dF_n = H_3 \wedge F_{n-2} + (2\pi\sqrt{\alpha'})^{n-1} \rho_{8-n}^{\text{loc}} \quad (6.6.12)$$

ここで,  $\rho_{8-n}^{\text{loc}}$  は  $F_n$  に対する磁氣的ブレーンソースである.

IIB 型理論では, CY の 2 サイクル  $\Sigma_2$  に巻き付いている D5 ブレーンに対して,

$$N_{D5}(\Sigma_2) - N_{O5}(\Sigma_2) + \frac{1}{(2\pi)^2 \alpha'} \int_{\Sigma_4} H_3 \wedge F_1 = 0. \quad (6.6.13)$$

同様に, CY の D3 ブレーンに対して,

$$N_{D3} + N_{\text{flux}} = \frac{1}{4} N_{O3}. \quad (6.6.14)$$



ここで,

$$N_{\text{flux}} = \frac{1}{(2\pi)^4 \alpha'^2} \int_{Y_6} H_3 \wedge F_3 = e_K m_{\text{RR}}^K - m^K e_{K\text{RR}}, \quad (6.6.15)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2 \alpha'} \int_{A_K/B_K} H_3 = m^K / e_K, \quad K = 1, \dots, h^3/2, \quad (6.6.16)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2 \alpha'} \int_{A_K/B_K} F_3 = m_{\text{RR}}^K / e_{K\text{RR}}, \quad K = 1, \dots, h^3/2. \quad (6.6.17)$$

Dilaton-axion 場を楕円ファイバーのモジュライと見なすことによる IIB 理論の CY コンパクト化 (F 理論) では, 対応する  $CY_4$  はファイバーが特異となる点と D7 が対応する. このときの tadpole 条件は

$$N_{\text{D3}} + N_{\text{flux}} = \frac{\chi(CY_4)}{24}. \quad (6.6.18)$$

### 6.6.5 文献ノート

- **No-Go 定理:** M/string 理論を含む高次元理論において, 内部空間が静的な warped product 型コンパクト化では, 強エネルギー条件が常に満たされ, 4次元時空の加速膨張は起こらないことを主張 [Maldacena J & Nunez C (2001), Gibbons GW (1985), de Wit B, Smit DJ & Hari Dass ND (1987), ][25, 47, 26].
- **Chen-Galtsov-Guperle 解:** 高次元 SUGRA に対する単 S-brane 型解. 内部空間は任意曲率. [hep-th/0204071][13]
- **Ohta 解:**  $D = 11$  SUGRA および  $D = 10$  SUGRA に対する, 時間のみに依存し, 任意曲率の定曲率空間でコンパクト化した厳密解の族 (多 S-brane 型解) [hep-th/0301095][52]
- **Townsend-Wohlfarth 解:** 内部空間が負曲率 Einstein 空間でそのサイズに時間依存性を許せば, No-Go 定理は成り立たず, 中間インフレーション真空解が存在することを指摘 [hep-th/0303079]. [56]
- Townsend-Wohlfarth 解は Chen-Galtsov-Guperle 解ないし単 S-Brane の場合の Ohta 解 [52] において 3-form flux(SM2-brane) がゼロの極限を取ったもので, flux がゼロでない場合は内部空間が平坦となる中間インフレーション解も含むことを指摘 [hep-th/0303238][51]
- Ohta 解が内部空間が球となる中間インフレーション解を含むことを指摘 [hep-th/0304172][53]
- 内部空間が複数の定曲率空間の積となる真空モデルの研究. 調べられた範囲で十分なインフレーションなし [Chen C (2003)]. [14]

### 6.6.6 IIA 型超弦理論

#### References

- Herzberg MP, Kachru S, Taylor W, Tegmark M (2007) JHEP0712: 095 “Inflationary constraints on type IIA string theory”

**10D IIA Suga action** フォームフラックス以外に D6/O6 ブレーンを含めると,

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left[ R + 4(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}|H_3|^2 \right] - e^{2\phi} \sum_p |F_p|^2 \\
 & - \mu_6 \int_{D_6} d^7\xi \sqrt{-g} e^{-\phi} + 2\mu_6 \int_{O_6} d^7\xi \sqrt{-g} e^{-\phi}. \quad (6.6.19)
 \end{aligned}$$

4次元有効作用 スカラ曲率へのワープの寄与がないないし無視できると仮定する：

$$ds^2 = ds^2(X_4) + d^2(Y_6), \quad (6.6.20a)$$

$$R = R(x) = R(X_4), \quad (6.6.20b)$$

$$H_3 = H_3(y), \quad F_p = F_p(y). \quad (6.6.20c)$$

このとき,

$$\rho = \exp\left(\sqrt{2/3}\hat{\rho}/m_{\text{pl}}\right) := \text{Vol}^{1/3}, \quad \tau = \exp\left(\sqrt{1/2}\hat{\tau}/m_{\text{pl}}\right) := e^{-\phi}\text{Vol}^{1/2} \quad (6.6.21)$$

とおき (Vol はストリング計量  $g_{\mu\nu}$  に関する  $Y_6$  の体積), Einstein frame

$$g_{\mu\nu}^E = \frac{\tau^3}{m_{\text{pl}}^2 \kappa_{10}^2} g_{\mu\nu} \quad (6.6.22)$$

に移ると,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa^2} R_E - \left[ \frac{1}{2}(\partial\hat{\phi})^2 + \frac{1}{2}(\partial\hat{\tau})^2 + \dots \right] - V. \quad (6.6.23)$$

Dirac 量子化条件

$$\int_{\Sigma} F_p \propto f_{\Sigma} \in \mathbb{Z} \quad (6.6.24)$$

を考慮すると,

$$V_{H_3} \propto \rho^{-3} \tau^{-2}, \quad V_{F_p} \propto \rho^{3-p} \tau^{-4}, \quad (6.6.25a)$$

$$V_{D_6} \propto \tau^{-3}, \quad V_{O_6} \propto -\tau^{-3} \quad (6.6.25b)$$

よって, ポテンシャルは

$$\begin{aligned} V &= V_{H_3} + \sum_p V_{F_p} + V_{D_6} + V_{O_6} \\ &= \frac{A_3(\phi)}{\rho^3 \tau^2} + \sum_p \frac{A_p(\phi)}{\rho^{p-3} \tau^4} + \frac{A_{D_6}(\phi) - A_{O_6}(\phi)}{\tau^3} \end{aligned} \quad (6.6.26)$$

**No-Go 定理** このポテンシャルは

$$-\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} - 3\tau \frac{\partial V}{\partial \tau} = 9V + \sum_p p V_p \geq 9V \quad (6.6.27)$$

を満たす. これより特に

$$m_{\text{pl}} \left| \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\partial \ln V}{\partial \hat{\rho}} + 3\sqrt{2} \frac{\partial \ln V}{\partial \hat{\tau}} \right| \geq 9. \quad (6.6.28)$$

この条件より

$$\frac{m_{\text{pl}}}{2} [(\partial_{\hat{\rho}} \ln V)^2 + (\partial_{\hat{\tau}} \ln V)^2] \geq \frac{27}{13}. \quad (6.6.29)$$

系全体のスローロールパラメータ  $\epsilon$  に対して,

$$\epsilon \geq \frac{m_{\text{pl}}^2}{2} [(\partial_{\hat{\rho}} \ln V)^2 + (\partial_{\hat{\tau}} \ln V)^2] \geq \frac{27}{13}. \quad (6.6.30)$$

となり, スローロールインフレーションは起きない.

また,  $p = 2, 4, 6$  のいずれかで  $V_p > 0$  とすると,

$$\partial_{\rho} V = 0, \quad \partial_{\tau} V = 0 \Rightarrow V = -\frac{1}{9} \sum_p V_p < 0 \quad (6.6.31)$$

となるので, Minkowski 真空は許されない.

### No-Go 定理を避ける方法

1.  $Dp/Op$  ブレーン ( $p \neq 6$ ):

$$V_{Dp} \propto \rho^{\frac{p-6}{2}} \tau^{-3}, \quad V_{Op} \propto -\rho^{\frac{p-6}{2}} \tau^{-3}, \quad (6.6.32)$$

より, 上記の不等式の右辺への寄与は,  $(12 - p/2)V_{Dp/Op}$ . よって, D8 ないし O4 を考えると, No-Go 定理は成立しない.

2. Geometric/Non-geometric flux

$$T : H_{abc} \rightarrow f_{bc}^a \rightarrow Q_c^{ab} \rightarrow R^{abc} \quad (6.6.33)$$

ポテンシャルは

$$\text{for geometric (f) flux : } V_f \propto \pm \rho^{-1} \tau^{-2} \Rightarrow 7V_f \quad (6.6.34a)$$

$$\text{for } Q \text{ flux : } V_Q \propto \pm \rho \tau^{-2} \Rightarrow 5V_Q, \quad (6.6.34b)$$

$$\text{for } R \text{ flux : } V_R \propto \pm \rho^3 \tau^{-2} \Rightarrow 3V_R. \quad (6.6.34c)$$

ただし, これらのフラックスに対して, Large volume limit は取れない.

3. NS5 branes

$$S = -\mu_5 \int_{NS5} d^6 \xi \sqrt{-g} e^{-2\phi} \quad (6.6.35)$$

$$\Rightarrow V_{NS5} \propto \rho^{-2} \tau^{-2} \Rightarrow 8V_{NS5} \quad (6.6.36)$$

ただし, tadpole 条件を満たすために, 反 NS5 ブレーンが必要.

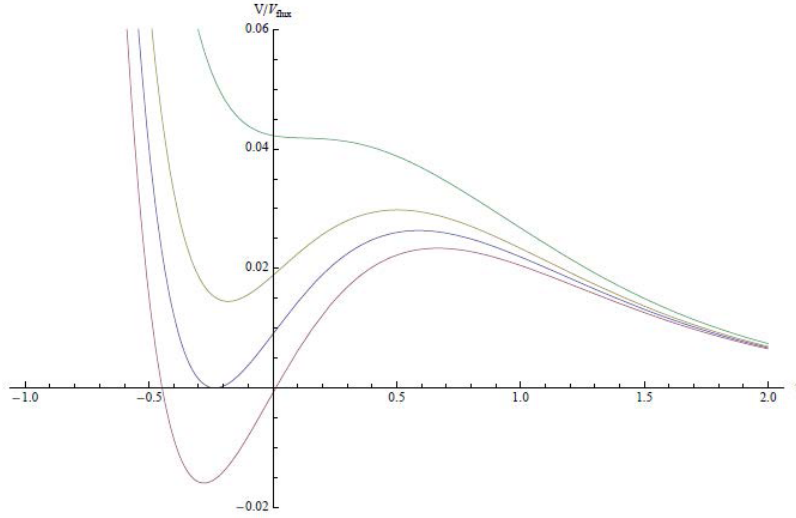


Figure 1: The potential  $V(\hat{\tau})/V_{\text{flux}}$  with  $(\bar{m}_p = 1)$   $B_3 = 1/4$ ,  $B_0 = 1/4$ ,  $B_4 = 3/8$ ,  $B_{O6} = 2$ , and  $\rho$  satisfying  $\partial V/\partial \rho = 0$ . From bottom to top, the curves correspond to the following choices of  $c$ : 2.183 (anti-de Sitter), 2.205 (Minkowski), 2.227 (de Sitter), and 2.280 (inflection), respectively.

例  $H_3, F_0, F_4, O6, NS5$  からなる系に対して, 適当なるスケーリングで, ポテンシャルは

$$V = V_{\text{flux}} \left[ \frac{B_3(\phi)}{\rho^3 \tau^2} + \sum_p \frac{B_p(\phi)}{\rho^{p-3} \tau^4} - \frac{B_{O6}(\phi)}{\tau^3} + \frac{B_{NS5}(\phi)}{\rho^2 \tau^2} \right] \quad (6.6.37)$$

$$V_{\text{flux}} = \frac{N_{O6}^4}{\sqrt{|f_0^3 f_4^9|}}. \quad (6.6.38)$$

tadpole 条件を考慮すると,

$$B_3, B_0, B_4, B_{O6} \sim 1 \quad (6.6.39a)$$

$$B_{NS5} \sim c(\omega) = g(\omega) N_{NS5} \sqrt{|f_0^3 f_4|} / N_{O6}^2. \quad (6.6.39b)$$

---

## §6.7

---

# 超弦理論に基づく加速膨張モデル

---

### 6.7.1 インフレーション宇宙モデル

- Natural inflation [Freese K, Frieman JA, Olinto AV 1990; +Adams FC, Bond JC 1993]
- Brane inflation model [Dvali GR, Tye SHH 1999] KKLT model:  $\Lambda > 0$  vacuum by flux compactification and D/anti-D branes [Kachru S, Kallosh R, Linde A, Trivedi S 2003].
- KKLMNT model: KKLT + brane inflation [Kachru S, Kallosh R, Linde A, Maldacena J, McAllister L, Trivedi S 2003]
- D3/D7-brane inflation model [Hsu JP, Kallosh R, Prokushkin S 2003]
- DBI inflation model [Silverstein E, Tong D 2004]
- Racetrack model [Blanco-Pillado JJ, Burgess CP, Cline JM, Escoda C, Gomez-Reino M, Kallosh R, Linde A, Quevedo F 2004]
- Tachyon inflation model [Cremades D, Quevedo F, Sinha A 2005]
- N-flation [Dimopoulos S, Kachru S, McGreevy J, Wacker J 2005]
- Better racetrack model [Blanco-Pillado JJ, Burgess CP, Cline JM, Escoda C, Gomez-Reino M, Kallosh R, Linde A, Quevedo F 2006]
- Monodromy brane inflation [Silverstein E, Westphal 2008]
- Axion linear inflation [ McAllister J, Silverstein E, Westphal 2008] Cf. "A Delicate Universe":  $\eta$ -problem in D3-D7 model [Baumann D, Dymarsky A, Klebanov IR, McAllister L, Steinhardt PJ 2007]

---

## §6.8

---

# KKLT 型モデル

---

### 6.8.1 KKLT モデル

- 基本モデル

- IIB 型理論の no scale ISD CY フラックスコンパクト化 (複素モジュライ固定)[Giddings SB, Kachru S, Polchinski J 2002[27]]

$$\begin{aligned}
 K &= -3 \ln(\rho + \bar{\rho}), \quad W = W(z) \\
 \Rightarrow V &= e^K (K^{i\bar{j}} D_i W D_{\bar{j}} \bar{W} - |W|^2) = e^K K^{a\bar{b}} D_a W D_{\bar{b}} \bar{W} \quad (6.8.1)
 \end{aligned}$$

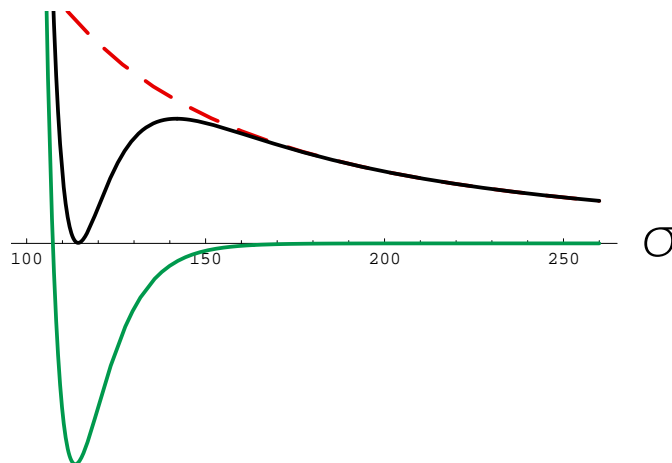
ここで,  $i = (\rho, a)$ .

- 非摂動論効果 (インスタントン/gaugino 凝縮: Witten E 1996[58]; Tripathy PK, Trivedi SP 2003[57]; Gorlich L, Kachru S, Tripathy PK, Trivedi SP 2004[28])  
 $\Rightarrow$  Kahler モジュライの安定化

$$K = -3 \ln(\rho + \bar{\rho}), \quad W = W_0 + Ae^{-a\rho} \quad (a = 2\pi/N). \quad (6.8.2)$$

$\Rightarrow N = 1$  超対称な adS 真空

- 反 D3 ブレインにより超対称性を破り Minkowski 真空 (ないし dS 真空) を実現. または, D7 ブレインの誘起する超ポテンシャルの D 項により自発的に SUSY を破る.



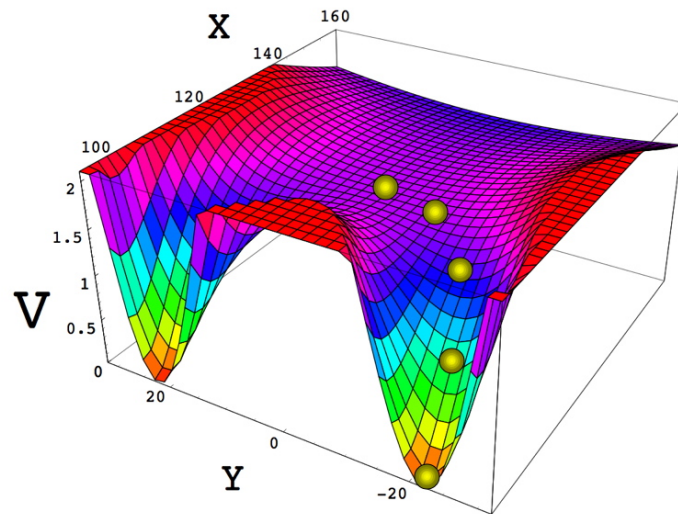
### 6.8.2 インフレーション

#### モジュライインフレーション

- **Racetrack model** [J.J. Blanco-Pillado, C.P. Burgess, J.M. Cline, C. Escoda, M. Gomez-Reino, R. Kallosh, A. Linde, F. Quevedo 2006[8]]

$$W = W_0 + Ae^{-a\rho} + Be^{-b\rho} \quad (6.8.3)$$

このモデルでは鞍点近傍でインフレーションが起き、超微調整が必要。



#### ブレーンインフレーション

- **KKLMMT** [Kachru, Kallosh, Linde, Maldacena, McAllister, Trivedi 2003[34]]

1. ポテンシャル： $\rho$ をサイズモジュライ、 $\phi$ をD3-反D3の距離パラメーターとして、

$$K = -3 \ln(\rho + \bar{\rho} - k(\phi, \bar{\phi})) \quad (6.8.4)$$

超ポテンシャルが $\phi$ に依存しないとすると、 $\rho$ の安定点 $\rho = \rho_0$ 近傍で、 $m_\phi^2 \sim H^2$ となりインフレーションは起こらない。

2. 超ポテンシャルに $\phi$ 依存性を持たせると、微調整により $m_\phi^2 = O(10^{-2}) H^2$ とでき、インフレーションが起きる。

- **D3/D7 ブレーンインフレーション** [Hsu JP, Kallosh R, Prokushkin S 2003[31]]

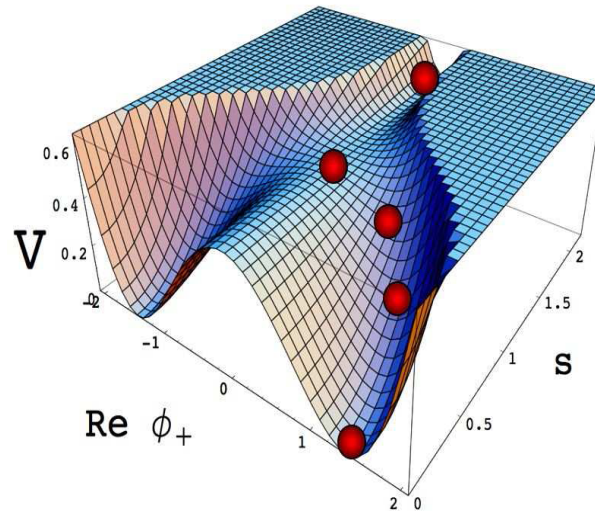
1. ポテンシャル

$$K = -3 \ln(\rho + \bar{\rho}) - \frac{1}{2}(\phi - \bar{\phi})^2 \quad (6.8.5)$$



超ポテンシャルは  $\phi$  に依存せず,  $s = \text{Re } \phi$  がインフラトンとなる.  $s$  は D3-D7 の距離を表す.

- 他の hypermultiplet との相互作用は, 量子効果として  $s$  に log 型ポテンシャルを生成し, 全体としては hybrid 型インフレーションが実現される.



### 6.8.3 文献ノート

1998 (ブレイン・反ブレインインフレーションモデル) (Dvali GR, Tye SHH [23])

2003 (KKLT モデル) すべてのモジュライが安定化され, 準安定 dS 真空をもつ, IIB 理論のワープしたフラックスコンパクト化モデル (Kachru S, Kallosh R, Linde A, Trivedi S[34]).

(KKLMMT モデル) KKLT モデルと  $D\bar{D}$  対を用いたブレインインフレーションモデルおよびワープを組み合わせたインフレーションモデル. (Kachru S, Kallosh R, Linde A, Maldacena J, McAllister L, Trivedi S[33])

(D3/D7 ブレインインフレーションモデル) (Hsu JP, Kallosh R, Prokushkin S[31]; Koyama F, Tachikawa Y, Watari T[43]; Firouzjahi H, Tye SHH[24]; Hsu JP, Kallosh R 2004[30]; Dasgupta K, Hsu JP, Kallosh R, Linde A, Zagermann M 2004[20]; Chen P, Dasgupta K, Narayan K, Shmakova M, Zagermann M 2005[15] )

(DBI インフレーションモデル) (Silverstein E, Tong D[55]; Alishahiha M, Silverstein E, Tong D 2004[1]; Chen XG 2005[17, 16])

2004 (Racetrack モデル) KKLT 型モデルでインスタントン効果に基づくサイズモジュラスポテンシャルとして, 2つの指数関数型ポテンシャルの和を用いると,

スローロール条件を満たすモデルができることを指摘 (ただし, fine-tuning が必要). (Blanco-Pillado JJ, Burgess CP, Cline JM, Escoda C, Gomez-Reino M, Kallosh R, Linde A, Quevedo F [7])

2005 (タキオンインフレーションモデル) (Cremades D, Quevedo F, Sinha A[19])

(**N-flation**) (Dimopoulos S, Kachru S, McGreevy J, Wacker J [21])

ヘテロ理論・M理論でのインフレーション [Buchbinder EI 2005[10]; Becker K, Becker M, Krause A 2005[6]]

2006 (改良版 **Racetrack** モデル) CY orientifold  $CP^4_{[1,1,1,6,9]}$  を用いた racetrack モデル. WMAP3years と整合的なスペクトル指数  $n_s \approx 0.95$  を与える. (Blanco-Pillado JJ, Burgess CP, Cline JM, Escoda C, Gomez-Reino M, Kallosh R, Linde A, Quevedo F[8])

2007 "A Delicate Universe": D3-D7 モデルでの  $\eta$  問題 (Baumann D, Dymarsky A, Klebanov IR, McAllister L, Steinhardt PJ 2007[5])

---

## §6.9

---

# Monodromy influm

---

### 6.9.1 Basic ideas

- Axion as inflaton
  - Flat potential protected by a shift symmetry. Cf  $\eta$ -problem
  - The instanton correction produces a periodic potential.

This makes a non-negligible contribution to  $\eta$  leading to an uncomfortable tilt of the spectrum in the small field framework. It is difficult to make the period  $\Delta\phi \gg m_{\text{pl}}$ .

- QCD axions in 10D superstring theories
  - 2 cycles  $\Sigma$  in the compactified internal space

$$b = \int_{\Sigma} B_2, \quad c = \int_{\Sigma} C_2 \Rightarrow \text{axions} \quad (6.9.1)$$

- Coupling with D5/NS5 branes wrapping 2 cycles

- DBI action  $\Rightarrow$  Potential for the axion  $\Rightarrow$  Monodromy unwrapping of the axion field

$$S_{\text{DBI}} = - \int \frac{d^{p+1}\xi}{(2\pi)^p \alpha'^{-(p+1)/2}} e^{-\Phi} \sqrt{\det(G_{ab} + B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})} \quad (6.9.2)$$

For D5-brane wrapped on a 2-cycle  $\Sigma$  of size  $\ell(\alpha')^{1/2}$ , this gives the potential

$$V(b) = \frac{\epsilon}{g_s(2\pi)^5 \alpha'^2} \sqrt{\ell^4 + b^2} \propto b \quad (b \gg \ell^2) \quad (6.9.3)$$

- S-duality: D5  $\Leftrightarrow$  NS5, B<sub>2</sub>  $\Leftrightarrow$  C<sub>2</sub>

## 6.9.2 Observational Predictions

- Slow roll inflation

- Evolution equations

$$V(\phi) = \mu^3 \phi \Rightarrow 3H\dot{\phi} + \mu^3 = 0, \quad H^2 = \frac{1}{3}\mu^3 \phi \quad (6.9.4)$$

- The slow roll conditions

$$\epsilon := \frac{1}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 = \frac{1}{2\phi^2} \ll 1, \quad \eta = \frac{V''}{V} = 0 \Rightarrow \phi \gg 1 \quad (6.9.5)$$

- The e-folding number

$$N = \int H dt = \Delta \left( \frac{1}{2}\phi^2 \right), \quad N \approx 60 \Rightarrow \phi_0 \approx 11 \quad (6.9.6)$$

- Perturbations

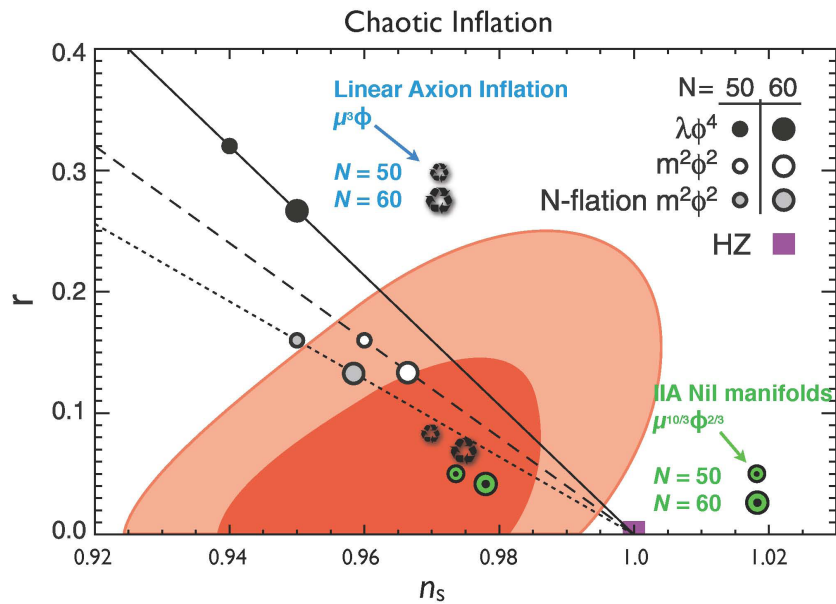
- Scalar perturbation amplitude

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2 = \frac{V}{24\pi^2 \epsilon} = \frac{V^3}{12\pi^2 (V')^2} \sim 140\mu^3 \Rightarrow \mu \sim 3 \times 10^{-4} \quad (6.9.7)$$

- Indices

$$n_s - 1 = -6\epsilon + 2\eta \approx -0.025 \quad (6.9.8)$$

$$r = 16\epsilon \approx 0.07 \quad (6.9.9)$$



### 6.9.3 Conditions for controlled inflation

- The inflaton (QCD) axion should belong to the physical spectrum.
- No significant correction to the linear potential.
- No significant backreaction to the warped geometry from the brane charges.
- No significant correction of  $M_{\text{Pl}}$  by light particle species due to large brane charges.
- No significant influence of the axion potential to the moduli stabilisation and vice versa.

### 6.9.4 Specific stringy model

- Flux compactification of type IIB theory
  - ⇒  $N = 1$  4D sugra with fixed complex moduli
    - Geometry  $\approx \text{AdS}_5 \times X_5$  (warped throat region)
 
$$ds^2 = e^{2A(r)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{-2A(r)} (dr^2 + r^2 ds^2(X_5)); \quad e^A \sim \frac{r}{R}. \quad (6.9.10)$$
    - Flux: ISD 3-form flux + SD 5-form flux (D3 branes)

- Orientifold projection  $\Rightarrow$  O3/O7 branes with negative tensions to satisfy the tad pole condition
- Non-perturbative effects of instantons/gaugino condensates
  - $\Rightarrow$  Stabilisation of Kahler moduli with (light) QCD axion(s).
  - $\Rightarrow$  adS4 SUSY vacua.
- Uplifting of the vacuum energy by anti-D3 branes
  - $\Rightarrow$  vacuum with small  $\Lambda > 0$
- $\mathbb{Z}_2$  related 5B-anti 5B branes at the tips of the throats.
- $\Rightarrow$  a linear potential for the axion
- $\Rightarrow$  chaotic inflation

### 6.9.5 Physical spectrum

- Simple CY compactification of IIB  $\Rightarrow N = 2$  SUGRA
  - Complex moduli:  $h^{2,1}$  (2 the vector multiplet)
  - double-tensor multiplet
    - \* axio-dilaton:  $\tau = C0 + ie^{-\phi}$
    - \*  $b_2 + ic_2$  (the 4D part)
  - Kahler moduli :  $h^{1,1}$  (2 the hypermultiplet)
    - \*  $T^A l : \text{Im } T^A = \theta^A$
$$J = v_A \omega^A \Rightarrow \mathcal{V} = \frac{(2\pi)^6}{6} c^{ABC} v_A v_B v_C, \quad \theta_A = \int_{\Sigma_A} C_4 \quad (6.9.11)$$
  - Axions:  $h^{1,1}$  (2 the hypermultiplet)
    - \*  $b^A, c^A \Rightarrow G^A = c^A - \tau b^A$
- The tadpole condition requires a orientifold projection in CY flux compactifications.
  - $H^{1,1} = H_+^{1,1} + H_-^{1,1} \ni (\alpha, I)$ 
    - \*  $H_+^{1,1} : T_\alpha$
$$T_\alpha = \frac{3}{4} c^{\alpha\beta\gamma} v_\beta v_\gamma + \frac{3}{2} i \theta_\alpha + \frac{3}{8} e^\phi c^{\alpha IJ} G_I (G - \bar{G})_J. \quad (6.9.12)$$
    - \*  $H_-^{1,1} : G^I = c^I - \tau b^I$

### 6.9.6 Potential corrections

$$W = \int (F_3 - \tau H_3) \wedge \Omega + A e^{-a_L T_L} + B e^{-\tilde{a}(v_+ - G_-/(2\pi)^2)} + C e^{-a_L T_L - a_L G_-/(2\pi)^2} \quad (6.9.13a)$$

$$K = -3 \log \left( T_L + \bar{T}_L + \frac{3}{2} e^{-\phi} c^{LIJ} b_I b_J + C_+ \text{Re} e^{-2\pi v_+ - G_-/(2\pi)} \right) + \dots \quad (6.9.13b)$$

- Flux couplings

- In general, the Chern-Simons corrections to  $F_p$  produce a mass term for the axion.

$$\int d^{10}x \sqrt{g} |B_2 \wedge F_p|^2, \quad \int d^{10}x \sqrt{g} |C_p \wedge H_3|^2. \quad (6.9.14)$$

- However, in type IIB flux compactification, the ISD condition guarantees the non-existence of this correction.[Grimm & Lous 2004]

- $\eta$ -problem for  $B$

- The instanton effect stabilises not the volume directly, but rather  $T_L$ .
- Then, the Kahler potential produces  $m^2$  of order  $H^2$ , leading to the  $\eta$  problem, as in the standard case.
- The axions of the RR-form origin,  $c$ , do not suffer from this problem.

- Instanton effects:

- In general, the non-perturbative effect due to ED1-DE3 interactions ( $C$  in  $\mathscr{W}$ ) may produce uncontrollable large corrections to  $\mathscr{W}$ .  
 $\Rightarrow$  It is expected that this problem does not arise if the Kahler moduli are stabilised by the gaugino condensate on D7 branes with  $SU(N_L)$  SYM fields.

- Corrections to the Kahler potential can be neglected if  $1 \ll v_+ \ll c g_s$ .

- ED1 correction to  $\eta$

$$\Delta\eta \sim \frac{U_{\text{mod}}}{V_a} \frac{(2\pi)^2 C_+}{g_s} e^{-2\pi v_+} \quad (6.9.15)$$

- Backreactions to the moduli

$$\delta v_+ \sim \frac{V}{U_{\text{mod}}} \frac{v_+/(c^2 g_s^2)}{(c^{++L} v_L + 2c^{+++} v_+)^2}, \quad (6.9.16)$$

$$\Delta U_{\text{tot}} \sim \frac{V^2}{U_{\text{mod}}} \frac{(v_+/(c^2 g_s^2))^2}{(c^{++L} v_L + 2c^{+++} v_+)^4} \quad (6.9.17)$$

### 6.9.7 Backreaction on the geometry

- The branes in effect carry  $N_w \sim a/(2\pi)^2$  units of D3-brane charge. They modify the geometry on the scales of

$$r_{\text{core}}^4 \sim 4\pi\alpha'^2 g_s N_w \quad (6.9.18)$$

- Hence, in order to avoid significant backreaction on compactified geometry,  $N_w$  has to satisfy

$$r_{\text{core}} \ll R_{\perp} \Rightarrow N_w \ll \frac{R_{\perp}^4}{4\pi g_s \alpha'^2} \sim \frac{\pi^3}{4} \text{Re}(T_L) \quad (6.9.19)$$

where  $R_{\perp}$  is the curvature scale perpendicular to the branes.

- From the condition,  $U_{\text{mod}} \geq V \simeq 2.4 \times 10^{-9} m_{\text{pl}}^4$ , and

$$U_{\text{mod}} \simeq \frac{|A|^2}{T_L^2 M_{\text{pl}}^2} e^{-4\pi T_L/N_L} \quad (6.9.20)$$

we obtain

$$N_w \ll -\frac{\pi^2}{16} N_L \log \left( 2.4 \times 10^{-9} T_L^3 \frac{M_{\text{pl}}^6}{|A|^2} \right) \quad (6.9.21)$$

- Cf. A successful inflation requires

$$\phi_a \sim 11 M_{\text{pl}} \Rightarrow N_w = 11 \frac{M_{\text{pl}}}{(2\pi)^2 f_a} \sim 11\sqrt{6} \frac{L^2}{(2\pi)^2} \text{ (one scale model)} \quad (6.9.22)$$

### 6.9.8 Other conditions

- Constraints from the number of light species
  - Effectively large D3-brane charge  $N_w \Rightarrow N_w^2$  light species.
  - For  $r_{\text{core}} \ll L\alpha'^{1/2}$ , the correction to  $m_{\text{pl}}$  by them can be neglected from the AdS/CFT correspondence (???)

### 6.9.9 Toy models

Model

$$h_+^{1,1} = 2, \quad h_-^{1,1} = 1 \Rightarrow (T_L, T_+, G_-) : \quad (6.9.23)$$

$$K = -2 \ln \mathcal{V}_E = -2 \ln [(T_L + \bar{T}_L)^{3/2} - (2/g_s)^{3/2} v_+^3], \quad (6.9.24)$$

$$W = W_0 + A_+ e^{-a_+ T_+} + A_L e^{-a_L T_L}. \quad (6.9.25)$$

**Potential**

$$V_{NS5} = M_{\text{pl}} e^{4A_*} \frac{(2\pi)^9}{g_s \mathcal{V}_E^2} [v_+^2 + g_s^2 c^2]^{1/2} \quad (6.9.26)$$

where

$$\mathcal{V}_E = \frac{L^6}{g_s^{3/2} (2\pi)^6}, \quad (6.9.27)$$

$$v_+^2 = \frac{g_s}{2} (T_+ + \bar{T}_+) + \frac{3g_s^2}{16} c_{+--} (G_- + \bar{G}_-)^2 \quad (6.9.28)$$

**Example**

$$\begin{aligned} \text{KKLT} & : \quad A_L = -1, \quad A_+ = 1, \quad a_L = \frac{2\pi}{25}, \quad a_+ = \frac{2\pi}{3}, \quad W_0 = 3 \times 10^{-2} \\ & \Rightarrow \quad T_L \sim 20, \quad T_+ \sim 4, \quad b \sim 0 \end{aligned}$$

**6.9.10 Summary**

KKLT + an axion inflaton with a linear potential due to 5 branes.

- Nice features
  - Inflaton is a QCD axion field that is required to resolve the strong CP problem.
  - Large field chaotic inflation can be realised in the string framework avoiding the  $\eta$  problem.
  - Consistent with the present observational constraints.
  - Predicts a relatively large value for the tensor/scalar ratio.
- Problems
  - It is not certain whether a good model can be actually constructed in a realistic string compactification.
  - Utilises anti-D3 branes that break SUSY explicitly and invalidate the usage of the N=1 D=4 SUGRA framework as the 4D effective theory.
  - Warp is not taken into account in constructing 4D effective theory, which is common to most models.

---

## §6.10

---

### \*LVC と Kahler uplifting

---



---

## §6.11

---

# Gyro influm

---

### 6.11.1 IIB 理論

作用積分 10次元 Suga + Branes の枠組みでは、作用積分は

$$S_{\text{bulk}} = \frac{2\pi}{\ell_s^8} \int \left[ e^{-2\Phi} \left( R *1 + 4 *d\Phi \wedge d\Phi - \frac{1}{2} *H_3 \wedge H_3 \right) - \frac{1}{2} *F_1 \wedge F_1 - \frac{1}{2} *F_3 \wedge F_3 - \frac{1}{4} *F_5 \wedge F_5 - \frac{1}{2} C_4 \wedge H_3 \wedge F_3 \right] \quad (6.11.1)$$

$$S_{\text{brane}} = -2\pi \int_{\Sigma^{p+1}} d^{p+1}\xi \left[ \frac{1}{\ell_s^{p+1}} e^{-\Phi} \{-\det(G_{ab} - B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})\}^{1/2} \right] \quad (6.11.2)$$

$$- \sum_n \frac{1}{\ell_s^n} C_n \exp \left( -\frac{B_2}{\ell_s^2} + \frac{F_2}{2\pi} \right) \quad (6.11.3)$$

ここで、 $(2\pi)^2\alpha' = \ell_s^2$ ,

$$H_3 = dB_2, \quad F_1 = dC_0, \quad F_3 = dC_2 - C_0 H_3, \quad F_5 = *F_5 = dC_4 - H_3 \wedge C_2. \quad (6.11.4)$$

フォーム場のゲージ変換は

$$\delta B_2 = d\Lambda, \quad (6.11.5a)$$

$$\delta A_1 = \frac{1}{2\pi\alpha'} \Lambda, \quad (6.11.5b)$$

$$\delta C_0 = 0, \quad (6.11.5c)$$

$$\delta C_2 = d\Lambda_1, \quad (6.11.5d)$$

$$\delta C_4 = d\Lambda_3 + B_2 \wedge d\Lambda_1. \quad (6.11.5e)$$

無次元の形式場  $\mathbf{C}$  と  $\mathbf{\Lambda}$  を

$$\mathbf{C} = \sum_p \frac{1}{\ell_s^p} C_p, \quad (6.11.6a)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \sum_p \frac{1}{\ell_s^p} C \Lambda_p \quad (6.11.6b)$$

により導入すると、ゲージ変換に対して、

$$\delta \mathbf{C} = d\mathbf{\Lambda} \wedge e^{B/\ell_s^2}, \quad (6.11.7a)$$

$$\delta(2\pi\alpha' F - B) = 0 \quad (6.11.7b)$$

より、ブレーン作用積分はゲージ不変となる。

場の方程式 RRSR セクターに対する方程式は

$$G_5 = *G_5, \quad (6.11.8a)$$

$$dG_1 = J_9, \quad (6.11.8b)$$

$$dG_3 - H \wedge G_1 = J_7, \quad (6.11.8c)$$

$$dG_5 - H \wedge G_3 = J_5, \quad (6.11.8d)$$

$$d*G_1 + H \wedge *G_3 = J_1, \quad (6.11.8e)$$

$$d*G_3 + H \wedge G_5 = J_3. \quad (6.11.8f)$$

NS セクターに対する方程式は

$$dH = 0, \quad (6.11.9a)$$

$$d*H + *G_3 \wedge G_1 + *G_5 \wedge G_3 = 0, \quad (6.11.9b)$$

$$\square\Phi - (\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{4}R - \frac{1}{8}H_3^2 = 0, \quad (6.11.9c)$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} = & -2\nabla_\mu\nabla_\nu R + \frac{1}{4}H_{\mu**}H_\nu^{**} \\ & + e^{2\Phi} \left( \frac{1}{2}G_\mu G_\nu + \frac{1}{4}G_{\mu**}G_\nu^{**} + \frac{1}{4 \cdot 4!}G_{\mu****}G_\nu^{****} \right) \\ & + \left\{ -\frac{1}{4}\square\Phi + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{8}H_3^2 - \frac{1}{8}e^{2\Phi}(G_3^2 + G_5^2) \right\} g_{\mu\nu} \\ & + T_{B\mu\nu} - \frac{1}{8}T_{B\lambda}^\lambda g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (6.11.9d)$$

$$\begin{aligned} R = & -\frac{9}{2}\square\Phi + 5(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{4}H_3^2 + e^{2\Phi} \left( \frac{1}{2}G_1^2 + \frac{1}{4}G_3^2 \right) \\ & - \frac{1}{4}T_{B\mu}^\mu. \end{aligned} \quad (6.11.9e)$$

## 6.11.2 Chromo-Natural-type model

### 4D reduction Ansatz

- Bulk NS-sector

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\mathbf{x}^2 + ds^2(Y_6), \quad (6.11.10a)$$

$$e^\Phi = g_s, \quad (6.11.10b)$$

$$B_2 = 0. \quad (6.11.10c)$$

- Bulk R-sector

$$C_0 = \frac{\sqrt{2}}{g_s m_{\text{pl}}} \phi(x), \quad C_2 = C_4 = 0. \quad (6.11.11)$$

- Brane: Static spacetime-filling D3-brane

$$F_2 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (6.11.12)$$

**4D effective theory** 以上の仮定のもとで,

$$S = \int_{X_4} \left[ \frac{m_{\text{pl}}^2}{2} R * 1 - \frac{1}{2} * d\phi \wedge d\phi - V(\phi) - \frac{1}{2g^2} * F \wedge F - k \frac{\phi}{f_a} F \wedge F \right]. \quad (6.11.13)$$

ただし, 非摂動効果でアクシオン  $\phi$  がポテンシャルを持つとし, それとブレーンテンションの寄与  $2\Lambda = 2\pi/\ell_s^4$  を合わせたものを  $V(\phi)$  とする. ここで,

$$m_{\text{pl}}^2 = \frac{4\pi}{g_s^2 \ell_s^2} \text{Vol}(Y_6), \quad (6.11.14a)$$

$$\frac{1}{g^2} = \frac{N}{\pi g_s^2}, \quad (6.11.14b)$$

$$f_a = \frac{4g^2 m_{\text{pl}}}{\sqrt{2} g_s} k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (6.11.14c)$$

ただし,  $N$  はブレーンの枚数, また, ゲージ群は  $SU(2)$  とし,  $F$  はその3次元表現に従うとする.

### 6.11.3 Mobile D3-brane type model

**4D reduction ansatz**

- NS-sector

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 d\mathbf{x}^2 + ds^2(Y_6), \quad (6.11.15a)$$

$$e^\Phi = g_s, \quad (6.11.15b)$$

$$B_2 = \frac{1}{2} B_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (6.11.15c)$$

- RS-sector

$$C_0 = 0, \quad (6.11.16a)$$

$$C_2 = C_\mu^\alpha(x) dx^\mu \wedge \omega_\alpha(y), \quad (6.11.16b)$$

$$G_5 = dC_4 - dB \wedge dC^\alpha \wedge \omega_\alpha = 0 \Rightarrow C_4 = dB \wedge C^\alpha \chi_\alpha(y), \quad (6.11.16c)$$

$$\omega_\alpha = d\chi_\alpha \text{ (locally)} \quad (6.11.16d)$$

ここで,  $\omega^\alpha \in H^1(Y_6)$  は  $Y_6$  上の調和1形式の基底. したがって, 純粋のCYではこのモデルは成立しない.

- Brane:  $Y_6$  を運動する D3 ブレーン :

$$y^m = Y^m(x), \quad (6.11.17a)$$

$$F_2 = 0. \quad (6.11.17b)$$

4D effective theory Bulk 作用積分は

$$\begin{aligned} S_{\text{Bulk}} &= \frac{2\pi}{g_s^2 \ell_s^8} \text{Vol}(Y_6) \int_{X_4} \left[ R * 1 - \frac{1}{2} * H_3 \wedge H_3 - \gamma_{\alpha\beta} * dC^\alpha \wedge dC^\beta \right] \\ &= \int_{X_4} \left[ \frac{m_{\text{pl}}^2}{2} R * 1 - \frac{m_{\text{pl}}^2}{4} * H_3 \wedge H_3 - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} * F^\alpha \wedge F^\beta \right]. \end{aligned} \quad (6.11.18)$$

ここで,

$$m_{\text{pl}}^2 = \frac{4\pi}{g_s^2 \ell_s^8} \text{Vol}(Y_6), \quad (6.11.19)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{g_s^2}{2\text{Vol}(Y_6)} \int_{Y_6} *_{Y_6} \omega_\alpha \wedge \omega_\beta, \quad (6.11.20)$$

$$F^\alpha = dA^\alpha, \quad A^\alpha = m_{\text{pl}} C^\alpha. \quad (6.11.21)$$

次に, ブレーン上では

$$ds^2 = G_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu; \quad (6.11.22)$$

$$G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + g_{mn}(Y(x)) \partial_\mu Y^m \partial_\nu Y^n. \quad (6.11.23)$$

より

$$\sqrt{-\det(G - B)} = \sqrt{-g} \left[ 1 + \frac{1}{2} g_{mn} dY^m \cdot dY^n + B \cdot B + \dots \right]. \quad (6.11.24)$$

また,

$$C_2 \wedge B_2|_{D3} = C^\alpha \wedge \omega_{\alpha m}(Y) dY^m \wedge B. \quad (6.11.25)$$

よって, ブレーン作用積分は

$$\begin{aligned} S_{\text{brane}} &\simeq -\frac{2\pi N}{\ell_s^4 g_s} \int_{X_4} \left( *1 + \frac{1}{2} g_{mn}(Y) *dY^m \cdot dY^n + *B \wedge B \right) \\ &\quad + \frac{2\pi N}{\ell_s^4} \int_{X_4} (-C^\alpha \wedge \omega_{\alpha m}(Y) dY^m \wedge B + dB \wedge C^\alpha \chi_\alpha) \\ &= \int_{X_4} \left[ -m_{\text{pl}}^2 \Lambda *1 - \frac{1}{2} \gamma_{mn}(Y) *dY \wedge dY - \frac{1}{2} \mu^2 m_{\text{pl}}^2 *B \wedge B \right. \\ &\quad \left. - \lambda B \wedge dC^\alpha \chi_\alpha \right]. \end{aligned} \quad (6.11.26)$$

ここで,

$$\Lambda = \frac{2\pi N}{\ell_s^4 g_s m_{\text{pl}}^2} = \mu^2, \quad (6.11.27a)$$

$$\gamma_{mn} = \frac{2\pi N}{\ell_s^4 g_s} g_{mn} = \mu^2 m_{\text{pl}}^2 g_{mn}, \quad (6.11.27b)$$

$$\lambda = g_s \mu^2 m_{\text{pl}}^2, \quad (6.11.27c)$$

$$\mu^2 = \frac{g_s \ell_s^4 N}{2\text{Vol}(Y)} = \frac{N}{m_{\text{pl}}} \sqrt{\frac{\pi}{\text{Vol}(Y)}}. \quad (6.11.27d)$$

Cosmology 場の配位は

$$B_2 = \gamma_b a(t)^2 b(t) dx \wedge dy \Rightarrow H_3 = \gamma_b (a^2 b) \cdot dt \wedge dx \wedge dy \quad (6.11.28a)$$

$$C_2 = \gamma_c a(t) c_\alpha(t) dz \wedge \omega^\alpha \Rightarrow G_3 = \gamma_c (a c_\alpha) \cdot dt \wedge dz \wedge \omega^\alpha \quad (6.11.28b)$$

$$C_4 = \gamma_b \gamma_c (a c_\alpha) (a^2 b) \cdot d^4 x \chi^\alpha \Rightarrow G_5 = 0 \quad (6.11.28c)$$

ここで

$$\gamma_b = \sqrt{2}/m_{\text{pl}}, \quad \gamma_c^2 \frac{m_{\text{pl}}^2 g_s^2}{8 \text{Vol}(Y)} \int_Y * \omega^\alpha \wedge \omega^\beta = \delta^{\alpha\beta} \quad (6.11.29)$$

有効 Lagrangian は

$$L_{\text{bulk}} = a^3 \left[ -\frac{3}{\kappa^2} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} (\dot{b} + 2Hb)^2 + \frac{1}{2} (\dot{c} + Hc)^2 - V(X) \right] \quad (6.11.30a)$$

$$L_{D3} = a^3 \left[ \frac{1}{2} \gamma_{mn}(Y) \dot{Y}^m \dot{Y}^n - \mu^2 b^2 - \lambda (\dot{c}_\alpha + Hc_\alpha) b \chi_\alpha(Y) \right] \quad (6.11.30b)$$

ここで,

$$\lambda = \sqrt{2} g_s \mu^2 \gamma_c \sim \frac{N}{L^4 m_{\text{pl}}^2} \quad (6.11.31)$$

一般論との対応は

- 変数 :  $\phi = (c_\alpha), \quad X = (b, Y^m)$
- CS ポテンシャル :

$$U : U_\alpha = b \chi_\alpha; \quad k_\alpha = 1, \quad \tilde{U} = b c^\alpha \chi_\alpha, \quad W = 0, \quad (6.11.32)$$

$$A = (\partial_X U) = (\chi_\alpha, b \omega_{\alpha m}) \Rightarrow (A^T A)_{\alpha\beta} = \chi_\alpha \chi_\beta + b^2 \omega_\alpha \cdot \omega_\beta \quad (6.11.33)$$

- 力項 :

$$F_\alpha = -\partial_\alpha V - (\dot{H} + 2H^2) c_\alpha + 2\lambda H b \chi_\alpha, \quad (6.11.34a)$$

$$F_b = -\partial_b V - 2(\dot{H} + 2H^2) b - \lambda H c^\alpha \chi_\alpha, \quad (6.11.34b)$$

$$F_m = -\partial_m V - \lambda H b c^\alpha \omega_{\alpha m} \quad (6.11.34c)$$

Slow roll 方程式は

$$\dot{c}_\alpha = \frac{1}{3H} \left( 1 + \frac{\lambda^2}{9H^2} A^T A \right)^{-1} \left( \frac{\lambda}{3H} A F_X + F_\phi \right) \approx -H c_\alpha \quad (6.11.35)$$

したがって, この場合, 一般論から予想されるように, slow roll inflation は起こらない.

## 参考文献

---

### Books and Reviews

---

- インフレーション

Linde AD: *Particle Physics and Inflationary Cosmology* (Harwood, Chur, Switzerland, 1990) [arXiv:hep-th/0503203].

Liddle AR, Lyth DH: *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure* (Cambridge University Press, Cambridge 2000).

Proceedings of the 22nd IAP Colloquium, "Inflation+25", Paris, June 2006 (Lecture Note in Physics).

Lyth DH: *Particle physics models of inflation* [arXiv:hep-th/0702128]

Kalosh R: *On inflation in string theory* [arXiv:hep-th/0702059]

- 超対称性, 超重力理論

Wess J, Bagger J: *Supersymmetry and Supergravity*, 2nd ed. (Princeton Univ. Press, 1992).

Townsend PK: *Four Lectures on M-theory* [hep-th/9612121]

- Kaluza-Klein コンパクト化

Duff MJ, Nilsson BEW, Pope CN: *Kaluza-Klein Supergravity*, Phys. Reports **130**, 1-142 (1986).

- 超弦理論

Green MB, Schwarz JH, Witten E: *Superstring theory*, 2 vols (CUP, 1987).

Polchinski J: *String Theory*, 2 vols (CUP, 1998).

- フラックスコンパクト化

Gurrieri S, Louis J, Micu A, Waldram D: *Mirror symmetry in generalized Calabi-Yau compactifications*, Nucl. Phys. B654: 61-113 (2003).

Fidanza S, Mianasian R, Tomasiello A: *Mirror Symmetric SU(3)-Structure Manifolds with NS Fluxes*, Comm. Math. Phys. 254: 401-423 (2005).

Grana M, Miansian R, Petrini M, Tomasiello A: *Supersymmetric backgrounds from generalized Calabi-Yau manifolds*, JHEP 08:046 (2004).

Grana M: *Flux compactifications in string theory: A comprehensive review*, Phys. Reports 423: 91-158 (2006).

Grana M: *Flux compactifications and generalized geometries*, Class. Quantum Grav. 23: S883-926 (2006).

Douglas MR, Kachru S: *Flux Compactification*, Rev. Mod. Phys. 79: 733-96 (2007)

- 4次元有効理論

Grimm TW, Louis J: *The effective action of  $N = 1$  Calabi-Yau orientifolds*, Nucl. Phys. B **699**, 387-426 (2004).

- 超弦理論に基づく現象論

Quevedo F: *Lectures on Superstring Phenomenology* [hep-th/9603074]

Nilles HP: *Five Golden Rules for Superstring Phenomenology* [hep-th/0410160]

## 関連図書

- [1] Alishahiha, M., Silverstein, E. and Tong, D.: DBI in the Sky, *Phys. Rev. D* **70**, 123505 (2004).
- [2] Allen, S., Rapetti, D., Schmidt, R., Ebeling, H., Morris, R. and Fabian, A.: New constraints on dark energy from Chandra X-ray observations of the largest relaxed galaxy clusters, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **383**, 879–96 (2008).
- [3] Bahcall, N. and Fan, X.: The most massive distant clusters: Determining  $\Omega$  and  $\sigma_8$ , *Astrophys. J.* **504**, 1 (1998).
- [4] Bardeen, J.: Gauge Invariant Cosmological Perturbations, *Phys. Rev. D* **22**, 1882–905 (1980).
- [5] Baumann, D., Dymarsky, A., Klebanov, I., McAllister, L. and Steinhardt, P.: A Delicate Universe, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 141601 (2007).
- [6] Becker, K., Becker, M. and Krause, A.: M-Theory Inflation from Multi M5-Brane Dynamics, *Nucl. Phys. B* **715**, 349–371 (2005).
- [7] Blanco-Pillado, J., Burgess, C., Cline, J., Escoda, C., Gomez-Reino, M., Kallosh, R. and Li, : Racetrack Inflation, *JHEP* **0411**, 063 (2004).
- [8] Blanco-Pillado, J., et al.: Inflating in a Better Racetrack, *JHEP* **0609**, 002 (2006).
- [9] Bond, J. and Efstathiou, G.: Cosmic background radiation anisotropies in universes dominated by nonbaryonic dark matter, *Astrophys. J. Lett.* **285**, 45–48 (1984).
- [10] Buchbinder, E.: Five-Brane Dynamics and Inflation in Heterotic M-Theory, *Nucl. Phys. B* **711**, 314–344 (2005).



- [11] Buchmuller, W., Di Bari, P. and Plumacher, M.: Leptogenesis for pedestrians, *Ann. Phys.* **315**, 305 (2005).
- [12] Carlberg, R., et al.: Galaxy cluster virial masses and Omega, *Astrophys. J.* **462**, 32 (1996).
- [13] Chen, C.-M., Gal'tsov, D. and Gutperle, M.: S-brane Solutions in Supergravity Theories, *Phys. Rev. D* **66**, 024043 (2002).
- [14] Chen, C.-M., Ho, P.-M., Neupane, I. and Wand, J.: A Note on Acceleration from Product Space Compactification, *JHEP* **0307**, 017 (2003).
- [15] Chen, P., Dasgupta, K., Narayan, K., Shmakova, M. and Zagermann, M.: Brane Inflation, Solitons and Cosmological Solutions: I, *JHEP* **0509**, 009 (2005).
- [16] Chen, X.: Inflation from warped space, *JHEP* **0508**, 045 (2005).
- [17] Chen, X.: Running non-Gaussianities in DBI inflation, *Phys. Rev. D* **72**, 123518 (2005).
- [18] Clesse, S.: Hybrid inflation along waterfall trajectories., *arXiv:1006.4522* (2010).
- [19] Cremades, D., Quevedo, F. and Sinha, A.: Warped Tachyonic Inflation in Type IIB Flux Compactifications and the Open-String Completeness Conjecture, *JHEP* **0510**, 106 (2005).
- [20] Dasgupta, K., Hsu, J., Kallosh, R., Linde, A. and Zagermann, M.: D3/D7 brane inflation and semilocal strings, *JHEP* **0408**, 030 (2004).
- [21] Dimopoulos, S., Kachru, S., McGreevy, J. and Wacker, J.: N-flation, *hep-th/0507205* (2005).
- [22] (D.J. Eisenstein et al), S. C.: Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies, *Astrophys. J.* **633**, 560–74 (2005).
- [23] Dvali, G. and Tye, S.: Brane Inflation, *Phys. Lett. B* **450**, 72–82 (1999).
- [24] Firouzjahi, H. and Tye, S.-H. H.: Closer towards inflation in string theory, *Phys. Lett. B* **584**, 147–54 (2004).
- [25] Gibbons, G.: Aspects of Supergravity Theories, in Aguilla, del F., Azcarra, A. and Ibanez, L. eds., *Supersymmetry, Supergravity and Related Topics*, World Scientific (1985).

- [26] Gibbons, G.: Thoughts on Tachyon Cosmology, *Class. Quantum Grav.* **20**, S321–S346 (2003).
- [27] Giddings, S. B., Kachru, S. and Polchinski, J.: Hierarchies from Fluxes in String Compactifications, *Phys. Rev. D* **66**, 106006 (2002).
- [28] Görlich, L., Kachru, S., Tripathy, P. and Trivedi, S.: Gaugino condensation and nonperturbative superpotentials in flux compactifications, *JHEP* **0412**, 074 (2004).
- [29] Hinshaw, G., et al.: Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Data Processing, Sky Maps, and Basic Results, *Astrophys. J. Suppl.* **180**, 225–45 (2009).
- [30] Hsu, J. and Kallosh, R.: Volume Stabilization and the Origin of the Inflaton Shift Symmetry in String Theory, *JHEP* **0404**, 042 (2004).
- [31] Hsu, J., Kallosh, R. and Prokushkin, S.: On Brane Inflation With Volume Stabilization, *JCAP* **0312**, 009 (2003).
- [32] Huber, S., Konstandin, T., Prokopec, T. and Schmidt, M.: Baryogenesis in the MSSM, nMSSM and NMSSM, *Nucl. Phys. A* **785**, 206c–9c (2007).
- [33] Kachru, S., Kallosh, R., Linde, A., Maldacena, J., McAllister, L. and Trivedi, S. P.: Towards Inflation in String Theory, *JCAP* **0310**, 013 (2003).
- [34] Kachru, S., Kallosh, R., Linde, A. and Trivedi, S.: de Sitter Vacua in String Theory, *Phys. Rev. D* **68**, 046005 (2003).
- [35] Kawasaki, M., Takahashi, F. and Yanagida, T.: The Gravitino-overproduction problem in inflationary universe, *Phys. Rev. D* **74**, 043519 (2006).
- [36] Kawasaki, M., Yamaguchi, M. and Yanagida, T.: Natural chaotic inflation in supergravity, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3572 (2000).
- [37] Kodama, H. and Hamazaki, T.: Evolution of Cosmological Perturbations in a Stage Dominated by an Oscillatory Scalar Field, *Prog. Theor. Phys.* **96**, 949–970 (1996).
- [38] Kodama, H. and Hamazaki, T.: Evolution of cosmological perturbations in the long wavelength limit, *Phys. Rev. D* **57**, 7177 (1998).
- [39] Kodama, H., Kohri, K. and Nakayama, K.: On the waterfall behavior in hybrid inflation., *Prog. Theor. Phys.* **126**, 331 (2011).

- [40] Kodama, H. and Sasaki, M.: Cosmological perturbation theory, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **78**, 1–166 (1984).
- [41] Komatsu, E., et al.: FIVE-YEAR WILKINSON MICROWAVE ANISOTROPY PROBE (WMAP) OBSERVATIONS: COSMOLOGICAL INTERPRETATION, *Ap. J. Suppl.* **180**, 330–76 (2009).
- [42] Kosowsky, A.: Cosmic Microwave Background Polarization, *Annals of Physics* **246**, 49–85 (1996).
- [43] Koyama, F., Tachikawa, Y. and Watari, T.: Supergravity Analysis of Hybrid Inflation Model from D3–D7 System, *Phys. Rev. D* **69**, 106001 (2004).
- [44] Linde, A.: A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems, *Phys. Lett. B* **108**, 389–93 (1982).
- [45] Linde, A.: Hybrid inflation, *Phys. Rev. D* **49**, 748–54 (1994).
- [46] Lyth, D.: What would we learn by detecting a gravitational wave signal in the cosmic microwave background anisotropy?, *Phys. Rev. D* **78**, 1861–1863 (1997).
- [47] Maldacena, J. and Nunez, C.: Supergravity description of field theories on curved manifolds and a no go theorem, *Int. J. Mod. Phys. A* **16**, 822–855 (2001).
- [48] Matsubara, T.: Correlation function in deep redshift space as a cosmological probe, *Astrophys. J.* **615**, 573–85 (2004).
- [49] Mukhanov, V.: Quantum theory of gauge-invariant cosmological perturbations, *Sov. Phys.—JETP* **68**, 1297–1302 (1988).
- [50] Nolta, M., et al.: Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Angular Power Spectra, *Ap. J. Suppl.* **180**, 296–305 (2009).
- [51] Ohta, N.: Accelerating Cosmologies from S-Branes, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 061303 (2003).
- [52] Ohta, N.: Intersection Rules for S-Branes, *Phys. Lett. B* **558**, 213–220 (2003).
- [53] Ohta, N.: A Study of Accelerating Cosmologies from Superstring/M theories, *Prog. Theor. Phys.* **110**, 269 (2003).

- [54] Seager, S., Sasselov, D. and Scott, D.: How exactly did the universe become neutral?, *Astrophys. J. Suppl.* **128**, 407–30 (2000).
- [55] Silverstein, E. and Tong, D.: Scalar Speed Limits and Cosmology: Acceleration from D-cceeleration, *Phys. Rev. D* **70**, 103505 (2004).
- [56] Townsend, P. and Wohlfarth, M.: Accelerating Cosmologies from Compactification, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 061302 (2003).
- [57] Tripathy, P. and Trivedi, S.: Compactification with flux on K3 and tori, *JHEP* **0303**, 028 (2003).
- [58] Witten, E.: Strong coupling expansion of Calabi-Yau compactification, *Nucl. Phys. B* **471**, 135 (1996).
- [59] Yamaguchi, M.: Natural double inflation in supergravity, *Phys. Rev. D* **64**, 063502 (2001).
- [60] Yamaguchi, M. and Yokoyama, J.: New inflation in supergravity with a chaotic initial condition, *Phys. Rev. D* **63**, 043506 (2001).
- [61] Yamaguchi, M. and Yokoyama, J.: Chaotic hybrid new inflation in supergravity with a running spectral index, *Phys. Rev. D* **68**, 123520 (2003).