

# アクシオン宇宙物理

名古屋大学大学院理学研究科  
2013年9月25日～27日

小玉 英雄

KEK 素粒子原子核研究所  
理論センター  
理論宇宙物理グループ

Copyright Hideo Kodama 2013.\*.\*

# 目次

<b>第 1 章 QCD axion</b>	<b>1</b>
1.1 QCD におけるカイラル対称性の破れ	1
1.1.1 QCD の Chiral 対称性	1
1.1.2 Goldberger-Treiman 関係式	3
1.2 対称性の自発的破れ	4
1.2.1 Goldstone ボゾン	5
1.2.2 近似的対称性の自発的破れと擬 Goldstone ボゾン	6
1.2.3 パイ中間子の質量	7
1.3 Chiral Anomaly	9
1.4 Anomaly 公式の証明	11
1.4.1 経路積分法による証明 (藤川和夫 1979)	11
1.5 クォークモデルにおけるカイラルアノマリー	13
1.5.1 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 崩壊	13
1.5.2 インスタントンと $U(1)_A$ 問題の解決	14
1.6 QCD 真空と QCD CP 問題	17
1.6.1 $\theta$ 真空	18
1.6.2 強い相互作用における CP の破れ	19
1.6.3 中性子電気双極子モーメント	20
1.7 QCD Axion	22
1.7.1 Instanton vacuum energy	22
1.7.2 Peccei-Quinn 対称性	23
1.7.3 Axion	25
1.8 Invisible axion	26
1.8.1 KSVZ 模型	29
1.8.2 DFSZ 模型	29
1.9 Axion-Like Particles	29
1.9.1 ALP vs axion	30

1.9.2 宇宙物理学よりの制限 . . . . .	31
1.10 Cast experiment . . . . .	32
<b>第 2 章 Axiverse</b>	<b>34</b>
2.1 String axions . . . . .	34
2.1.1 ヘテロ型理論 . . . . .	34
2.1.2 II 型理論 . . . . .	37
2.1.3 質量スペクトル . . . . .	38
2.2 Possible cosmophysical phenomena . . . . .	39
2.2.1 特徴的な質量スケール . . . . .	39
2.2.2 微小質量アクシオンの引き起こす多様な現象 . . . . .	39
<b>第 3 章 Astrophysics</b>	<b>41</b>
3.1 Axion emission processes . . . . .	41
3.1.1 Overview . . . . .	41
3.1.2 Primakoff process . . . . .	41
3.2 Solar axion . . . . .	42
3.2.1 基本公式 . . . . .	43
3.2.2 制限 . . . . .	43
3.3 球状星団星からの放出 . . . . .	44
3.3.1 水平分枝星 . . . . .	44
3.3.2 赤色巨星分枝星 . . . . .	45
3.4 WD cooling . . . . .	45
3.4.1 WD 光度関数 . . . . .	46
3.4.2 ZZ Ceti stars . . . . .	46
3.5 SN1987A . . . . .	46
3.5.1 高密度核物質からのアクシオン放出率 . . . . .	46
3.5.2 ッバースト時間 . . . . .	47
3.6 磁場中でのアクシオン-光子変換 . . . . .	47
3.6.1 基礎方程式 . . . . .	48
3.6.2 伝播方程式 . . . . .	49
3.7 高エネルギーガンマー線への影響 . . . . .	50
3.7.1 観測可能性 . . . . .	50
<b>第 4 章 Axion Cosmology</b>	<b>54</b>
4.1 Homogeneous axion field . . . . .	54
4.1.1 Evolution . . . . .	54
4.1.2 Present abundance . . . . .	58
4.2 CMB B-mode (birefringence) . . . . .	61
4.2.1 偏光の記述 . . . . .	61

4.2.2	EモードとBモード	61
4.2.3	Flat sky 近似	62
4.2.4	アクシオンによるBモード生成	63
4.3	CMB-axion conversion	65
4.4	Gyro インフレーションモデル	67
4.4.1	Chromo-Natural Influm	67
4.4.2	CS項がない場合 ( $\lambda = 0$ )	68
4.4.3	CS Influm	69
4.4.4	数値解	71
4.4.5	一般論	76
<b>第5章 Black holes</b>		<b>80</b>
5.1	基本事項	80
5.1.1	ブラックホールの定義	80
5.1.2	Killing ホライズン	81
5.1.3	例	82
5.2	束縛状態と散乱	83
5.2.1	ブラックホール近傍での粒子の運動	83
5.2.2	Kerr BH でのゼロ質量場	85
5.3	増幅反射不安定	87
5.3.1	Kerr BH 時空での有質量スカラ場の方程式	88
5.3.2	不安定の発生条件	89
5.3.3	増大率	90
5.4	実際に宇宙に存在するブラックホールの引き起こすアクシオン不安定	96
5.4.1	$\mu - M$ 平面での不安定帯	96
5.4.2	G-atom	98
5.4.3	重力波放出	98
5.4.4	ボーズノバ	102

## 1

## QCD axion

## §1.1

## QCDにおけるカイラル対称性の破れ

## 1.1.1 QCDのChiral対称性

要点: QCDのu, dクォークセクターにおける $U(2)_A$ 対称性の破れには, 不思議な点がある.

詳細: クォークとして近似的に, uとdのみを考える.

- QCDセクターのLagrangian:

$$\mathcal{L} = -i\bar{u}(\gamma^\mu D_\mu - m_u)u - i\bar{d}(\gamma^\mu D_\mu - m_d)d, \quad (1.1.1)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_3 C_\mu^a T_a. \quad (1.1.2)$$

ここで,  $C_\mu^a$ はSU(3)ゲージ場,  $T_a$ はSU(3)の基本表現の基底.

- Weyl基底での表示:

$$\begin{aligned} -i\bar{\psi}(\gamma^\mu D_\mu - m)\psi &= i\psi_R^\dagger(D_0\psi_R - \sigma^j D_j\psi_R) + i\psi_L^\dagger(D_0\psi_L + \sigma^j D_j\psi_L) \\ &\quad + m(\psi_L^\dagger\psi_R + \psi_R^\dagger\psi_L). \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

- $U(2)_L \times U(2)_R$ 対称性: クォーク質量がゼロの時 ( $m_u = m_d = 0$ ), このLagrangianは次の $U_L \times U_R \in U(2)_L \times U(2)_R$ で不変となる:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R \mapsto U_R \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R, \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \mapsto U_L \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad (1.1.4)$$

しかし、質量がゼロでないと質量項がこの不変性を壊す。一般に、質量項を質量行列を用いて

$$(\bar{u}, \bar{d})_R M \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R + \text{h.c.} \quad (1.1.5)$$

とおくと、 $U(2)_L \times U(2)_R$  変換に対して、質量行列は

$$M \rightarrow U_L^\dagger M U_R \quad (1.1.6)$$

と変換する。これより、 $m_u = m_d$  のとき、ベクトル型変換  $U_R = U_L$  に対しては質量項は不変となるが、軸性ベクトル型変換  $U_R = U_L^\dagger$  に対しては不変でない。

- ベクトル・軸性ベクトル分解：一般に、

$$U(2)_R \times U(2)_L \cong U(1)_b \times U(1)_A \times (SU(2)_V \times SU(2)_A). \quad (1.1.7)$$

ここで、 $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $U \in SU(2)$  として、

$$U(1)_b : (u, d) \rightarrow e^{i\theta}(u, d), \quad (1.1.8a)$$

$$SU(2)_V : \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow U \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad (1.1.8b)$$

$$U(1)_A : (u, d) \rightarrow e^{i\theta\gamma^5}(u, d), \quad (1.1.8c)$$

$$SU(2)_A : \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R \rightarrow U \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R, \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \rightarrow U^\dagger \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L. \quad (1.1.8d)$$

ただし、 $SU(2)_V$  は部分群であるが、 $SU(2)_A$  は部分群ではなく、

$$[SU(2)_V, SU(2)_A] \subset SU(2)_A, \quad [SU(2)_A, SU(2)_A] \subset SU(2)_V. \quad (1.1.9)$$

- 近似的  $SU(2)_V$  対称性：現実では、

$$m_u = 2.3_{-0.5}^{+0.7} \text{MeV}, \quad m_d = 4.8_{-0.3}^{+0.7} \text{MeV} \quad (1.1.10)$$

より、 $m_u \neq m_d$  であるが、近似的にベクトル型変換  $U_L = U_R \Rightarrow U(2)_V = SU(2)_V \times U(1)_b$  に対する近似的不変性がハドロンスペクトルで実現されている。

- $m_p = 938.272046 \pm 0.000021 \text{MeV}$ ,  $m_n = 939.565379 \pm 0.000021 \text{MeV}$ .
- $m_{\pi^0} = 134.9766 \pm 0.0006 \text{MeV}$ ,  $m_{\pi^\pm} = 139.57018 \pm 0.00035 \text{MeV}$ .

- $SU(2)_A$  対称性の破れ:  $SU(2)_A$  対称性があると, スピン, 質量が同じで異なるパリティをもつ多重項がないといけませんが, そのような多重項は近似的にもハドロンスペクトルに存在しない. これは, カイラル対称性が非摂動論効果 (インスタントン効果) により破れているためと理解されている. 実際, この破れに対する擬 Goldstone ボゾンをパイ中間子とするのが自然であることを示唆する事実が多く存在する. 例えば, Goldberger-Treiman 関係式 (1966):

$$G_{\pi N} = \frac{2m_N g_A}{F_\pi}. \quad (1.1.11)$$

- $U(1)_A$  問題:  $SU(2)_A$  と異なり,  $U(1)_A$  に対応するパイ中間子程度の質量をもつ擬 Goldstone ボゾンが存在しない.

$$\eta: I^G(J^{PC}) = 0^+(0^{-+}): \quad m_\eta = 547.862 \pm 0.018 \text{MeV}. \quad (1.1.12)$$

### 1.1.2 Goldberger-Treiman 関係式

要点: Golberger-Treiman 関係式は, パイ中間子の強い相互作用結合係数と弱い相互作用による崩壊定数を関係付け, パイ中間子が  $SU(2)_A$  対称性の自発的破れに伴う Goldstone ボゾンである証拠を与える.

詳細: まず,  $u, d$  クォークとレプトンの間の弱い相互作用に対する有効 Lagrangian は

$$\mathcal{L}_{\text{wk}} = -\frac{G_{\text{wk}}}{\sqrt{2}}(V_+^\mu - A_+^\mu) \sum_\ell \bar{\ell} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_\ell + \text{h.c.} \quad (1.1.13)$$

ここで,  $V_a^\mu$  と  $A_a^\mu$  を変換  $SU(2)_V$  および  $SU(2)_A$  に対するカレントとして,

$$V_\pm^\mu = V_1^\mu \pm iV_2^\mu, \quad A_\pm^\mu = A_1^\mu \pm iA_2^\mu. \quad (1.1.14)$$

$\pi_j$  が  $SU(2)_A$  に対する擬 Goldstone ボゾンとすると,

$$\langle \text{Vac} | A_i^\mu(x) | \pi_j \rangle = -\frac{1}{2} F_\pi p_\pi^\mu \delta_{ij} \frac{e^{ip_\pi \cdot x}}{2p_\pi^0}. \quad (1.1.15)$$

これより,

$$\Gamma(\pi \rightarrow \mu + \nu) = \frac{G_{\text{wk}}^2 F_\pi^2 m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{16\pi m_\pi^3} \quad (1.1.16)$$

が得られる. これと実験値,  $\Gamma = (2.6033(24) \times 10^{-8} \text{s})^{-1}$  より,

$$F_\pi \simeq 184 \text{MeV}. \quad (1.1.17)$$

一方, 軸性カレントの核子状態での行列要素は, Poincare 不変性より

$$\langle p | A_+^\mu(x) | n \rangle = \frac{e^{iq \cdot x}}{(2\pi)^3} \bar{u}_p [\gamma^\mu \gamma_5 f(q^2) + iq_\nu \gamma^{\mu\nu} \gamma_5 g(q^2) - 2q_\nu \gamma^{\mu\nu} \gamma_5 h(q^2)] u_n. \quad (1.1.18)$$

カレントの保存則を仮定すると,

$$2m_N f(q^2) = q^2 g(q^2). \quad (1.1.19)$$

核子のベータ崩壊実験より,  $f(q^2)$  は  $q^2 = 0$  に極を持たず,

$$f(0) \equiv g_A = 1.2573(28) \quad (1.1.20)$$

したがって,  $g(q^2)$  は  $q^2 = 0$  に極をもつ:

$$g(q^2) \rightarrow \frac{2m_N g_A}{q^2}. \quad (1.1.21)$$

一方,

$$A_j^\mu(x) = \frac{1}{2} F_\pi \partial^\mu \pi_j + \dots \quad (1.1.22)$$

として,  $\pi$  と核子の有効相互作用を  $2G_{\pi N} \pi^j \bar{N} \gamma_5 t_j N$  とおくと,  $q^2 \rightarrow 0$  の極限で,

$$\langle p | A_+^\mu(x) | n \rangle \rightarrow \frac{e^{iq \cdot x}}{(2\pi)^3} [-i(2\pi)^4 2G_{\pi N} \bar{u}_p \gamma_5 u_n] \frac{-i}{(2\pi)^4 q^2} \frac{iq^\mu F_\pi}{2}. \quad (1.1.23)$$

これは,

$$g(q^2) \rightarrow \frac{G_{\pi N} F_\pi}{q^2} \quad (1.1.24)$$

を意味する. 以上2つの  $g(q^2)$  の振る舞いが一致することより, 次の Goldberger-Treiman 関係式を得る:

$$G_{\pi N} = \frac{2m_N g_A}{F_\pi}. \quad (1.1.25)$$

$g_A$ ,  $F_\pi$  の実験値よりこの式は,  $G_{\pi N} \simeq 12.7$  を与えるが, これは,  $G_{\pi N}$  の測定値 13.5 と良く一致している.

---

## §1.2

---

# 対称性の自発的破れ

---

### Reference

- Weinberg S: “The Quantum Theory of Fields”, vol. II (CUP, 1995).

大域的変換群  $G$  の線形作用に対して作用積分が不変であるとする. このとき, 特に, スカラ場  $\phi = (\phi_n)$  への作用

$$\phi \mapsto U\phi, \quad U \in G \quad (1.2.1)$$

に対して, その運動項とポテンシャル  $V(\phi)$  が不変となる:  $V(U\phi) = V(\phi)$ . このポテンシャルの極点  $\phi = \phi_0$  が  $G$  の作用に対して不変でないとする:

$$(DV)_{\phi_0} = 0, \quad t_a \phi_0 \neq 0, \quad t_a \in \mathcal{L}(G). \quad (1.2.2)$$

### 1.2.1 Goldstone ボゾン

**要点：** 自発的に破れた対称性に対応するカレント  $J_\mu^a$  とスカラ場  $\phi$  の交換関係をスペクトル表示することにより，自発的対称性が必ず Goldstone ボゾン  $B$  を伴うことが示され，さらにスカラ場への  $B$  の寄与が  $B$  の崩壊定数（カレントへの  $B$  の寄与）により決定される [Goldstone J, Salam A, Weinberg S (1962)]

**詳細：** 対称性  $G$  に対するカレントを  $J_\mu^a(x)$  とすると，理論の Poincare 不変性より

$$\langle [J_a^\lambda(y), \phi_n(x)] \rangle_{\text{Vac}} = (2\pi)^{-3} \int d^4p p^\lambda \theta(p^0) [\rho_{a,n}(-p^2) e^{ip \cdot (y-x)} - \tilde{\rho}_{a,n}(-p^2) e^{ip \cdot (x-y)}]. \quad (1.2.3)$$

ここで，

$$\frac{ip^\lambda}{(2\pi)^3} \rho_{a,n}(-p^2) \theta(p^0) = \sum_N \langle \text{Vac} | J_a^\lambda(0) | N \rangle \langle N | \phi_n(0) | \text{Vac} \rangle \delta^4(p - p_N), \quad (1.2.4a)$$

$$\frac{ip^\lambda}{(2\pi)^3} \tilde{\rho}_{a,n}(-p^2) \theta(p^0) = \sum_N \langle \text{Vac} | \phi_n(0) | N \rangle \langle N | J_a^\lambda(0) | \text{Vac} \rangle \delta^4(p - p_N). \quad (1.2.4b)$$

この式は，Green 関数

$$\Delta_+(z; \mu^2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p \theta(p^0) \delta(p^2 + \mu^2) e^{ip \cdot z} \quad (1.2.5)$$

を用いて，

$$\langle [J_{a\lambda}(y), \phi_n(x)] \rangle_{\text{Vac}} = \frac{\partial}{\partial y^\lambda} \int d\mu^2 [\rho_{a,n}(\mu^2) \Delta_+(y-x; \mu^2) + \tilde{\rho}_{a,n}(\mu^2) \Delta_+(x-y; \mu^2)]. \quad (1.2.6)$$

と書き換えられる。

まず， $x-y$  が空間的なとき， $[J_a^\lambda(y), \phi_n(x)] = 0$  より

$$\int d\mu^2 \frac{\rho_{a,n}(\mu^2) + \tilde{\rho}_{a,n}(\mu^2)}{\sqrt{p^2 + \mu^2}} = 0, \quad \forall p \Rightarrow \rho_{a,n}(\mu^2) = -\tilde{\rho}_{a,n}(\mu^2). \quad (1.2.7)$$

次に， $\partial_\lambda J_a^\lambda = 0$  より，

$$\int d\mu^2 \mu^2 \rho_{a,n}(\mu^2) \frac{\cos(t\sqrt{p^2 + \mu^2})}{\sqrt{p^2 + \mu^2}}, \quad \text{for all } t \Rightarrow \mu^2 \rho_{a,n}(\mu^2) = 0. \quad (1.2.8)$$

さらに，

$$Q_a = \int d^3x J_{a0}(x, 0), \quad [Q_a, \phi_n(x)] = (t_a)_n^m \phi_m(x) \quad (1.2.9)$$

より

$$\rho_{a,n}(\mu^2) = i\delta(\mu^2)(t_a)_n^m \langle \phi_m(0) \rangle_{\text{vac}}. \quad (1.2.10)$$

これは、各成分ごとにゼロ質量のボゾン  $B^a$  が存在することを意味し、Poincare 不変性より

$$\langle \text{Vac} | J_a^\lambda(x) | B_b \rangle = -iF_{ab}p^{\lambda B} \frac{e^{ip_B \cdot x}}{2p_B^0}, \quad (1.2.11a)$$

$$\langle B_a | \phi_n(y) | \text{Vac} \rangle = Z_n^a \frac{e^{-ip_B \cdot y}}{2p_B^0} \quad (1.2.11b)$$

と置くと、 $\rho_{a,n}(\mu^2)$  の定義より、

$$\rho_{a,n}(\mu^2) = \sum_b F_{ab} Z_n^b \delta(\mu^2) \quad (1.2.12)$$

これを (1.2.10) に代入して、

$$iF_{ab} Z_n^b = -(t_a)_n^m \langle \phi_m(0) \rangle_{\text{vac}}. \quad (1.2.13)$$

すなわち、

$$\phi_n(x) = \sum_a Z_n^a B_a(x) + \dots, \quad (1.2.14a)$$

$$Z_n^a = \sum_b (F^{-1})^{ab} (it_b \phi_0)_n \quad (1.2.14b)$$

を得る。

## 1.2.2 近似的対称性の自発的破れと擬 Goldstone ボゾン

**要点:** 系がある近似的対称性を持つ場合、ポテンシャルの縮退は解消されるが、基底状態で対称性が厳密で自発的に破れる場合と同じ数の小さな質量をもつボゾン（擬 Goldstone ボゾン）が現れる。この基底状態に対応するポテンシャル極点とボゾンの質量は、対称性を破るポテンシャルの摂動を用いて具体的に表される。[Weinberg S (1972)]

**詳細:** 対称性  $G$  をもつスカラ場のポテンシャル  $V_0$  に小さな摂動  $V_1$  を加える:

$$V = V_0(\phi) + V_1(\phi); \quad DV_0(t_\alpha \phi) = 0. \quad (1.2.15)$$

$V$  の極小点を、適当な  $V_0$  の極小点  $\phi_0$  を用いて、 $\bar{\phi} = \phi_0 + \phi_1$  とおく。  $\phi_1$  が小さいとして、極小条件を1次までとると

$$DV(\phi_0 + \phi_1) = 0 \Rightarrow (D^2V_0)_{\phi_0}(\phi_1) + (DV_1)_{\phi_0} = 0. \quad (1.2.16)$$

$V_0$  の極小多様体が  $G$  の作用で不変なので,

$$(D^2V_0)_{\phi_0}(t_\alpha\phi_0) = 0, \quad \forall\alpha. \quad (1.2.17)$$

よって, 上の方程式が  $\phi_1$  について解ける条件として,  $V_0$  の極点の選び方を決める次の真空整列条件 (vacuum alignment condition) が得られる:

$$(DV_1)_{\phi_0}(t_\alpha\phi_0) = 0, \quad \forall\alpha. \quad (1.2.18)$$

$G$  がコンパクトのとき, この条件を満たす  $\phi_0$  が常に存在する.

擬 Goldstone ボゾンの質量は, 一般に

$$\begin{aligned} M_{ab}^2 &= Z_n^a Z_m^b \left. \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial\phi_m \partial\phi_n} \right|_{\phi=\phi_0+\phi_1} \\ &\simeq (D^3V_0)_{\phi_0}(\phi_1, Z^a, Z^b) + (D^2V_1)_{\phi_0}(Z^a, Z^b). \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

$V_0$  の対称性より, この式は次のように書き換えられる:

$$M_{ab}^2 = - \sum_{cd} (F^{-1})^{ac} (F^{-1})^{bd} [(D^2V_1)_{\phi_0}(t_c\phi_0, t_d\phi_0) + (DV_1)_{\phi_0}(t_c t_d\phi_0)]. \quad (1.2.20)$$

この質量行列は常に非負であることが示される.

$G$  のある表現

$$[T_\alpha, \Phi_n] = -(t_\alpha)_{nm} \Phi_m \quad (1.2.21)$$

に従う作用素の系  $\{\Phi_n\}$  を用いて, Hamiltonian に対する対称性を破る摂動が

$$H_1 = \sum_n u_n \Phi_n \quad (1.2.22)$$

と表されるとする. さらに,

$$\langle \Phi_n \rangle = \phi_n \quad (1.2.23)$$

が成り立つときには, 真空整列条件は

$$\langle [T_\alpha, H_1] \rangle_0 = 0 \quad (1.2.24)$$

と表される. また, 擬 Goldstone ボゾンの質量行列は

$$M_{ab}^2 = - \sum_{c,d} (F^{-1})^{ac} (F^{-1})^{bd} \langle [T_c, [T_d, H_1]] \rangle_0 \quad (1.2.25)$$

となる. ここで,  $a, b, c, d$  は Goldstone 方向成分を指す.

### 1.2.3 パイ中間子の質量

要点: パイ中間子は, クォーク質量によりわずかに破れたカイラル対称性  $SU(2)_A$  にともなう擬 Goldstone ボゾンと見なすことができる. そこで, 前節の公式を用いて, パイ中間子の質量公式を導くことができる.

詳細：  $q = (u, d)$  系において，  $\Phi_\alpha^\pm (\alpha = 1, 2, 3, 4)$  を次のように定義する：

$$\Phi_a^+ = -\bar{q}\gamma_5 t_a q \quad (a = 1, 2, 3), \quad \Phi_4^+ = \frac{i}{2}\bar{q}q, \quad (1.2.26a)$$

$$\Phi_a^- = i\bar{q}t_a q \quad (a = 1, 2, 3), \quad \Phi_4^- = \frac{1}{2}\bar{q}\gamma_5 q. \quad (1.2.26b)$$

このとき，  $(T_a, X_a)$  を  $SU(2)_V \times SU(2)_A$  の無限小変換に対応するエルミート作用素，  $(\mathcal{T}_j, \mathcal{X}_j)$  を  $SU(2) \times SU(2) \cong SO(4)$  対応によるその4次元ベクトル表現とすると，

$$[T_a, \Phi_n^\pm] = -\sum_m (\mathcal{T}_a)_{nm} \Phi_m^\pm, \quad [X_b, \Phi_n^\pm] = -\sum_m (\mathcal{X}_a)_{nm} \Phi_m^\pm. \quad (1.2.27)$$

$\mathcal{T}_a, \mathcal{X}_a$  の具体的な表式は，

$$(\mathcal{T}_a)_{bc} = -i\epsilon_{abc}, \quad (\mathcal{T}_a)_{4b} = (\mathcal{T}_a)_{b4} = (\mathcal{T}_a)_{44} = 0, \quad (1.2.28a)$$

$$(\mathcal{X}_a)_{b4} = -(\mathcal{X}_a)_{4b} = \delta_{ab}, \quad (\mathcal{X}_c)_{ab} = (\mathcal{X}_c)_{44} = 0. \quad (1.2.28b)$$

$(u, d)$  系において，  $SU(2)_V \times SU(2)_A$  対称性を直接破るのは，クォークの質量項のみ：

$$H_1 = i(m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d) = (m_u + m_d)\Phi_4^+ + (m_u - m_d)\Phi_3^-. \quad (1.2.29)$$

よって，真空整列条件は

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Phi_2^- \rangle_0 = \langle \Phi_1^- \rangle_0 = \langle \Phi_1^+ \rangle_0 = \langle \Phi_2^+ \rangle_0 \\ &= (m_u + m_d) \langle \Phi_3^+ \rangle_0 + (m_d - m_u) \langle \Phi_4^- \rangle_0. \end{aligned} \quad (1.2.30)$$

対称性が厳密なゼロ次系 ( $m_u = m_d = 0$ ) において，ゼロ次の真空  $\phi_0$  を，  $SU(2)_V$  不変かつパリティ不変に選ぶと，

$$\langle \Phi_n^- \rangle_0 = 0 \quad (n = 1, 2, 3, 4), \quad \langle \Phi_a^+ \rangle_0 = 0 \quad (a = 1, 2, 3) \quad (1.2.31)$$

となり，真空整列条件が満たされる。

対称性が破れるカイラル方向に対して，

$$[X_a, [X_b, \Phi_4^+]] = \delta_{ab} \Phi_4^+, \quad [X_a, [X_b, \Phi_3^-]] = \Phi_a^- \delta_{b3}. \quad (1.2.32)$$

また，  $SU(2)_V$  対称性より，

$$F_{ab} = \frac{1}{2} F_\pi \delta_{ab}. \quad (1.2.33)$$

よって，

$$m_{ab}^2 = \delta_{ab} m_\pi^2; \quad m_\pi^2 = -4(m_u + m_d) \langle \Phi_4^+ \rangle_0 / F_\pi^2. \quad (1.2.34)$$

$(u, d)$  系の  $SU(2)_V \times SU(2)_A$  対称性の議論は,  $\tilde{q} = (u, d, s)$  系に拡張することができる. このとき,  $SU(3)_A$  の破れに対応して, 8個のボゾン ( $\pi^\pm, \pi^0, K^\pm, K^0, \bar{K}^0, \eta^0$ ) が現れる. 以上と同様の計算により, カイラル対称性の破れが

$$\langle \bar{\tilde{q}}_n \gamma_5 \tilde{q}_m \rangle_0 = 0, \quad \langle \bar{\tilde{q}}_n \tilde{q}_m \rangle_0 = -v \delta_{nm} \quad (1.2.35)$$

と表されるとすると, 擬 Goldstone ボゾンの質量は

$$m_{\pi^+}^2 = m_{\pi^0}^2 = \frac{4v}{F_\pi^2} [m_u + m_d] + \Delta, \quad (1.2.36a)$$

$$m_{K^+}^2 = \frac{4v}{F_\pi^2} [m_u + m_s] + \Delta, \quad (1.2.36b)$$

$$m_{K^0}^2 = \frac{4v}{F_\pi^2} [m_d + m_s], \quad (1.2.36c)$$

$$m_{\eta^0}^2 = \frac{4v}{F_\pi^2} \left[ \frac{4m_s + m_d + m_u}{3} \right], \quad (1.2.36d)$$

$$m_{\pi\eta}^2 = \frac{4v}{\sqrt{3}F_\pi^2} [m_u - m_d]. \quad (1.2.36e)$$

ここで,  $\Delta$  は電磁相互作用による補正. 特に, これらより, 次の Gell-Mann-Okubo 関係式

$$3m_\eta^2 + 2m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2 = 2m_{K^+}^2 + 2m_{K^0}^2 \quad (1.2.37)$$

を得る. 実験値は,

$$\begin{aligned} m_{\pi^+} &= 139.57 \text{ MeV}, & m_{\pi^0} &= 134.974 \text{ MeV}, \\ m_{K^+} &= 493.65 \text{ MeV}, & m_{K^0} &= 497.7 \text{ MeV}, \\ m_{\eta^0} &= 547 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (1.2.38)$$

すなわち, Gell-Mann-Okubo 関係式は 3% の精度でなりたつ. また, クォーク質量の比は

$$m_d/m_s = 0.050, \quad m_u/m_s = 0.027. \quad (1.2.39)$$

---

## §1.3

# Chiral Anomaly

---

**要約:** カイラルカレントは, それを構成しているフェルミ粒子がゲージ相互作用すると, 一般的に量子効果によりアノマリーが生じ, カレントの保存則に位相的なゲージ補正項が加わる [Bell JS, Jackiw R (1969); Adler SL (1969)].

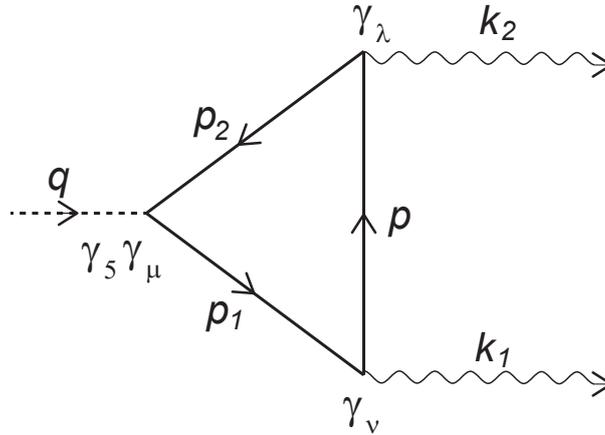


図 1.1: Triangle Diagram

参考文献

- Harvey JA: "TASI 2003 Lecture notes on Anomalies" [arXiv:hep-th/0509097]
- Adler SL: "Anomalies" [arXiv:hep-th/0411038]

可換ゲージ場の Triangle Anomaly

- Lagrangian

$$\mathcal{L} = -i\bar{\psi}(\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (1.3.1)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (1.3.2)$$

- 古典的対称性: 一般に,

$$\psi \mapsto e^{i\alpha}\psi \quad (1.3.3)$$

質量  $m = 0$  のとき, さらに

$$\psi \mapsto e^{i\beta\gamma_5}\psi \quad (1.3.4)$$

- 保存則 (量子論)

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad : \quad \partial_\mu J^\mu = 0, \quad (1.3.5a)$$

$$J_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \quad : \quad \partial_\mu J_5^\mu = -2m\bar{\psi}\gamma_5\psi + \frac{e^2}{8\pi^2}F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}. \quad (1.3.5b)$$

ここで,

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = *F_{\mu\nu} := \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}F^{\lambda\sigma}. \quad (1.3.6)$$

### Adler-Bardeen-Jackiw(ABJ) anomaly

- 不可避性：正則化においてベクトルカレントの保存を要請すると，軸性ベクトルカレントの保存則には anomaly が発生し，その値は正則化の方法に依存しない。
- 非くり込み定理：くり込みにより形を変えない。
- 普遍性：非可換ゲージ場，重力場との結合もカイラルアノマリーを生む。

$$\begin{aligned}
 D_\mu &= \nabla_\mu -igt_a A_\mu^a, & J_5^\mu &= \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5 t\psi \\
 \Rightarrow \partial_\mu J_5^\mu &= \dots + \frac{g^2}{8\pi^2} \text{Tr}(t t_a t_b) F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{b\mu\nu} + \frac{1}{384\pi^2} \text{Tr}(t) R_{\mu\nu\lambda\sigma} \tilde{R}^{\mu\nu\lambda\sigma}
 \end{aligned}
 \tag{1.3.7}$$

- 物理的には，アノマリーはインスタントンとスピノール場の相互作用により引き起こされる。
- 様々な証明法
  - Cut off による正則化。
  - Pauli-Villars 正則化。
  - Point-splitting 正則化。
  - 藤川による経路積分法:PI measure の正則化と Athiya-Singer 指数定理。

---

## §1.4

---

### Anomaly 公式の証明

---

#### 1.4.1 経路積分法による証明（藤川和夫 1979）

ゲージ場  $A$  中でのスピノール場  $\psi$  に対する分配関数  $Z$  は経路積分で

$$Z[A] = \int [d\psi][d\bar{\psi}] e^{iS(\psi, \bar{\psi}; A)} \tag{1.4.1}$$

と表される。この経路積分において，変換

$$\psi \rightarrow U\psi, \tag{1.4.2a}$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}(\gamma_4 U^\dagger \gamma_4), \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4, \quad \gamma_4 = i\gamma^0, \tag{1.4.2b}$$

に対して、スピノール場の経路積分測度は次のように変換する：

$$[d\psi][d\bar{\psi}] \rightarrow [\det \mathcal{U} \det \bar{\mathcal{U}}]^{-1} [d\psi][d\bar{\psi}], \quad (1.4.3)$$

$$\mathcal{U}_{xn,ym} = U(x)_{nm} \delta^4(x-y), \quad (1.4.4)$$

$$\bar{\mathcal{U}}_{xn,ym} = (\gamma_4 U(x)^\dagger \gamma_4)_{nm} \delta^4(x-y). \quad (1.4.5)$$

特に、 $U(x) = e^{i\alpha(x)t}$  に対しては、 $\bar{\mathcal{U}}\mathcal{U} = 1$  より、 $[d\psi][d\bar{\psi}]$  は不変となる。一方、 $U(x) = e^{i\alpha(x)t\gamma_5}$  に対しては、 $\bar{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$  となるので、測度は不変とならない：

$$\begin{aligned} [d\psi][d\bar{\psi}] &\rightarrow (\det \mathcal{U})^{-2} [d\psi][d\bar{\psi}] \\ &= \exp \left\{ i \int d^4x \alpha(x) \mathcal{P}(x) \right\} [d\psi][d\bar{\psi}]. \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

したがって、 $Z$  全体は

$$Z \rightarrow \int [d\psi][d\bar{\psi}] \exp \left[ i \int d^4x (\alpha(x) \mathcal{P}(x) + J_5^\mu(x) \partial_\mu \alpha(x)) \right]. \quad (1.4.7)$$

$Z$  は積分変数の変換では変化しないので、これより、

$$\langle \partial_\mu J_5^\mu(x) \rangle_A = \mathcal{P}(x). \quad (1.4.8)$$

Anomaly  $\mathcal{P}(x)$  は形式的には不定となる：

$$\mathcal{P}(x) = -2\text{Tr}(\gamma_5 t) \delta^4(x-x). \quad (1.4.9)$$

そこで、次のように正則化する：

$$\mathcal{P}(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} [-2\text{Tr} \{ \gamma_5 t f(-\mathcal{D}_x^2/M^2) \} \delta^4(x-y)]_{y \rightarrow x}. \quad (1.4.10)$$

ここで、 $f(u)$  は  $f(0) = 1$  となるなめらかなコンパクト台の関数。また、

$$D_\mu = \partial_\mu - it_a A_\mu^a(x). \quad (1.4.11)$$

Fourier 変換により

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x) &= \lim -2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [\text{Tr} \{ \gamma_5 t f(-\mathcal{D}_x^2/M^2) e^{ik(x-y)} \}]_{y=x} \\ &= \lim -2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [\text{Tr} \{ \gamma_5 t f(-(i\mathbf{k} + \mathcal{D})^2/M^2) \}] \\ &= \lim -2M^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [\text{Tr} \{ \gamma_5 t f(-(i\mathbf{k} + \mathcal{D}/M)^2) \}] \\ &= - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f''(k^2) [\text{Tr} \{ \gamma_5 t \mathcal{D}^4 \}] \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

ここで, Wick 回転により

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f''(k^2) = i\pi^2 \int_0^\infty ds s f''(s) = i\pi^2. \quad (1.4.13)$$

また,

$$\mathbb{D}^2 = D^2 - \frac{i}{2} t_a F_{\mu\nu}^a \gamma^{\mu\nu}, \quad (1.4.14)$$

$$\text{Tr} \{ t \gamma_5 \mathbb{D}^4 \} = 2i \text{Tr}(t_a t_b t) F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{b\mu\nu}. \quad (1.4.15)$$

以上より,

$$\langle \partial_\mu J_5^\mu(x) \rangle_A = \mathcal{P}(x), \quad (1.4.16)$$

$$\mathcal{P}(x) = \frac{1}{8\pi^2} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{b\mu\nu} \text{Tr}(t_a t_b t). \quad (1.4.17)$$

この式は,

$$\text{Tr}(t_a t_b t) = N \delta_{ab} \quad (1.4.18)$$

となる場合には, 次のような保存系に書き直すことができる:

$$\partial_\mu K^\mu = 0; \quad K^\mu = \langle J_5^\mu \rangle_A + 2NG^\mu, \quad (1.4.19)$$

$$G^\mu := -\frac{1}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \left[ A_\nu^a \partial_\lambda A_\rho^a + \frac{1}{3} f_{abc} A_\nu^a A_\lambda^b A_\rho^c \right]. \quad (1.4.20)$$

## §1.5

# クォークモデルにおけるカイラルアノーマリー

### 1.5.1 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 崩壊

要点:  $\pi^0$  はカイラルな U(1) 変換に対する擬 Goldstone ボゾンであるが, その 2 光子崩壊は, このカイラル対称性のアノーマリーにより引き起こされる.

軸性カイラルカレントのアノーマリーによる Goldstone ボゾンの Chern-Simons 相互作用 一般に, 大域的なカイラル変換

$$e^{i\alpha\gamma_5 t} \quad (1.5.1)$$

に対して, アノーマリーのため, 分配関数は経路積分測度の変換より

$$Z \rightarrow \int [d\psi][d\bar{\psi}] \exp \left[ iS + i \int d^4 x \alpha \mathcal{P}(x) \right] \quad (1.5.2)$$

と変換。ここで

$$\mathcal{P}(x) = \frac{g^2}{8\pi^2} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_{\mu\nu}^b \text{Tr}(t_a t_b). \quad (1.5.3)$$

この変換に対する（擬）Goldstone ボゾンを  $B$  とすると,

$$\langle \text{Vac} | J_5^0(x) | B \rangle = -\frac{i}{2} F e^{ip_B \cdot x} \quad (1.5.4)$$

より,

$$-i \langle \text{Vac} | [Q_5, B(x)] | \text{Vac} \rangle = -2\text{Im} \int \frac{d^3 p_B}{(2\pi)^3} \int d^3 y \langle \text{Vac} | J_5^0(y) | B \rangle e^{-ip_B \cdot x} = F. \quad (1.5.5)$$

よって,

$$\delta \langle B \rangle = -i\alpha \langle [Q_5, B] \rangle = \alpha F. \quad (1.5.6)$$

したがって、アノーマリーは、次のような有効相互作用 (Chern-Simons 相互作用) を生み出す：

$$S_{\text{eff}} = S + \int d^4 x \frac{1}{F} B \mathcal{P}(x). \quad (1.5.7)$$

$\pi^0$  への応用  $\pi^0$  をカイラル変換  $\exp(i\alpha\gamma_5\tau_3)$  ( $\tau_3 = \sigma_3 = 2t_3$ ) に対する擬 Goldstone ボゾンと見なして、以上の議論を適用すると、カイラルアノーマリーは次のような  $\pi^0$  と電磁場の有効相互作用を生み出す：

$$\delta \mathcal{L} = \frac{1}{F_\pi} \pi^0 \frac{e^2}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \times N_c \left( \left( \frac{2}{3} \right)^2 - \left( \frac{1}{3} \right)^2 \right) = \frac{e^2 N_c}{24\pi^2 F_\pi} \pi^0 F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (1.5.8)$$

この有効相互作用による  $\pi^0$  崩壊率は

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = \frac{N_c^2 \alpha^2 m_\pi^3}{144\pi^3 F_\pi^2} = \left( \frac{N_c}{3} \right)^2 \times 1.11 \cdot 10^{16} \text{s}^{-1}. \quad (1.5.9)$$

これは  $N_c = 3$  に対して、実験値を良く再現する：

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)_{\text{exp}} = (1.19 \pm 0.08) \cdot 10^{16} \text{s}^{-1}. \quad (1.5.10)$$

## 1.5.2 インスタントンと $U(1)_A$ 問題の解決

ゲージ場の Pontrjagin 数 クォークのカイラル変換はアノーマリーにより見かけ上破れている：

$$e^{i\alpha\gamma_5 t} \mapsto \delta \mathcal{L} = \alpha \mathcal{P}(x); \quad \mathcal{P} d^4 x = - \sum_j \frac{1}{4\pi^2} \text{Tr}(t \mathcal{F}^{(j)} \wedge \mathcal{F}^{(j)}). \quad (1.5.11)$$

( $\mathcal{A} = -igA_\mu^a t_a dx^\mu$ ,  $\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$ ). しかし, カイラル変換がゲージ変換と可換のとき,  $\mathcal{P}(x)$  は

$$\mathcal{P}(x)d^4x = d\mathcal{K}; \quad \mathcal{K} = - \sum_j q_j \frac{1}{4\pi^2} \text{Tr} \left( d\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} + \frac{2}{3} \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \right)^{(j)} \quad (1.5.12)$$

と書けるので, この項の作用積分への影響は無いように見える.

しかし, 実はそうではない. 一般に,

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\mathcal{K} = \int_{S_\infty^3} \mathcal{K} \quad (1.5.13)$$

となるが, 無限遠でゲージ場の強度  $F$  がゼロに近づくとしても, 右辺がゼロとは限らない. 実際,  $G$  をゲージ群として

$$A \rightarrow U^{-1}dU, \quad U : S^3 \rightarrow G \quad (1.5.14)$$

とすると,

$$\int_{S_\infty^3} \mathcal{K} = \sum_j \frac{q_j}{12\pi^2} \int_{S^3} \text{Tr}(U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU)^{(j)} \quad (1.5.15)$$

この右辺の被積分関数は,  $G$  の不変体積要素から誘導される3次元体積要素と一致するので, その積分は,  $G$  内での  $S^3$  の像のこの測度に関する体積  $V$  を表す. この体積は,  $U$  の連続変形では代わらない. 実際,

$$\delta(U^{-1}dU) = d(U^{-1}\delta U) + [U^{-1}dU, U^{-1}\delta U] \quad (1.5.16)$$

より,

$$\begin{aligned} \delta V &= \int_{S^3} \text{Tr} \{ d(U^{-1}\delta U) \wedge U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU \} \\ &= - \int_{S^3} \text{Tr} \{ U^{-1}\delta U \wedge d(U^{-1}dU) \wedge U^{-1}dU \} = 0. \end{aligned} \quad (1.5.17)$$

したがって, この積分値は離散的な値を取る位相不変量となる (*winding number*). 値を計算するために, まず,

$$\pi_3(\text{SU}(n)) = \mathbb{Z}, \quad n \geq 2 \quad (1.5.18)$$

となることに注意する. これより,  $\text{SU}(2) \subset \text{SU}(n)$  ( $n \geq 2$ ) を考慮すると,  $G = \text{SU}(2)$  の場合に計算すれば良いことがわかる. そこで, 写像  $U$  を

$$U : S^3 \rightarrow \text{SU}(2), \quad (1.5.19)$$

$$U(x) = \frac{1}{r} (x^4 \sigma_0 + ix^j \sigma_j) \quad (1.5.20)$$

とおくと,

$$U^{-1}dU = i\omega^j \sigma_j, \quad (1.5.21)$$

$$\omega^j = \frac{1}{r^2} (\epsilon_{jkl} x^k dx^l + x^4 dx^j - x^j dx^4) \quad (1.5.22)$$

より,

$$\begin{aligned} V &= i^3 \int_{S^3} \omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^l \text{Tr}(\sigma_j \sigma_k \sigma_l) \\ &= 6 \int_{S^3} \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \end{aligned} \quad (1.5.23)$$

を得る. ここで,  $SU(2)$  の  $U(x)$  への左作用は,  $S^3$  の推移的な等長変換を与え,  $U^{-1}dU$  はこの作用で不変となるので,  $\omega^j$  は  $S^3$  上の不変1形式となる. ところが,  $S^3$  の北極  $(0, 0, 0, 1)$  で

$$\omega^j = dx^j \quad (1.5.24)$$

となるので,  $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$  は  $S^3$  の標準体積要素と一致する. よって,

$$V = 24\pi^2. \quad (1.5.25)$$

すなわち,  $\mathcal{N}$  の積分は整数 (の2倍) となる. 元のゲージ場で表すと,  $F_{\mu\nu}$  が無限遠でゼロに近づくとき,

$$p_1 = -\frac{1}{8\pi^2} \int d^4x \text{Tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \in \mathbb{Z} \quad (1.5.26)$$

となる. ただし,  $\text{Tr}$  はベクトル表現に関するものである.

**インスタントン解** Pontrjagin 数がゼロでないゲージ配位は次のようにして構成することができる. 時間を虚時間に変え, 時空をユークリッド化して考える. このとき, 任意の2形式  $\mathcal{F} \in A^2$  に対し,

$$**\mathcal{F} = \mathcal{F} \quad (1.5.27)$$

が成り立つので, 2形式の空間は  $*$  の固有空間に直和分解される:

$$A^2 = A_+^2 + A_-^2 : \quad *\mathcal{F} = \pm\mathcal{F} \text{ for } \mathcal{F} \in A_{\pm}^2. \quad (1.5.28)$$

このとき,  $\mathcal{F} \in A_{\pm}^2$  に対して, ゲージ場の方程式は,

$$D\mathcal{F} := d\mathcal{F} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} - \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow D*\mathcal{F} = 0 \quad (1.5.29)$$

に帰着する. さらに,

$$d^4x \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} = *\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} = \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \quad (1.5.30)$$

より,  $\mathcal{F} \neq 0$  ならば,

$$\int d^4x \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \neq 0 \quad (1.5.31)$$

となる. このような解は, インスタントン解と呼ばれる.

SU(2) ゲージ理論での  $p_1 = 1$  のインスタントン解は次のように構成することができる [Belavin AA, Polyakov AM, Schwarz AS, Tyupkin YuS (1975)]. ゲージ配位が, 上記の  $U(x) \in \text{SU}(2)$  を用いて

$$\mathcal{A} = f(r)U^{-1}dU \quad (1.5.32)$$

と書けるとする. ただし,

$$f(r) = O(r^2) \text{ at } r = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 0. \quad (1.5.33)$$

このとき,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= f' dr \wedge U^{-1}dU + f(f-1)U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU \\ &= i \{ f' r \wedge \omega^j + f(1-f)\epsilon_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l \} \sigma_j \end{aligned} \quad (1.5.34)$$

構成法より自動的に  $D\mathcal{F} = 0$  なので,  $*\mathcal{F} = \mathcal{F}$  が満たされればよい.  $dr, r\omega^j (j = 1, 2, 3)$  が正規直交系となるので,

$$*dr \wedge \omega^j = \frac{r}{2}\epsilon_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l \quad (1.5.35)$$

これより,

$$*\mathcal{F} = i \left\{ \frac{f'}{2}\epsilon_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l + 2f(1-f)\frac{1}{r}dr \wedge \omega^j \right\} \sigma_j. \quad (1.5.36)$$

よって, 自己双対性条件は

$$rf' = 2f(1-f). \quad (1.5.37)$$

この一般解は,  $R$  を積分定数として

$$f = \frac{r^2}{r^2 + R^2}. \quad (1.5.38)$$

で与えられる.

**SU(2)<sub>A</sub> のアノマリー**  $t \in \text{SU}(2)_A$  とすると,  $\text{Tr}(tt_{(a)t_b})$  は  $t_a, t_b$  が  $U(1)_Y, \text{SU}(2), \text{SU}(3)$  のいずれに属する場合もゼロとなる. 唯一,  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  のところで見たように,  $t_a, t_b \in U(1)_{\text{EM}}$  のみが  $\text{SU}(2)_A$  に対してアノマリーを生む (mixed anomaly). しかし,  $\pi_3(U(1)) = 0$  なので,  $U(1)$  はインスタントン解を持たず, アノマリーは対称性を破らない.

**U(1)<sub>A</sub> のアノマリー** 一方,  $U(1)_A$  の変換に対しては,  $\text{Tr}(tt_{(a)t_b}) \propto \text{Tr}(t_{at_b})$  なので,  $U(1), \text{SU}(2), \text{SU}(3)$  のすべてのゲージ場がアノマリーを生む. したがって, カイラル対称性  $U(1)_A$  はインスタントン効果で破れる. これにより,  $U(1)_A$  問題は解決される.

---

## §1.6

---

# QCD 真空と QCD CP 問題

---

### 1.6.1 $\theta$ 真空

QCD において、真空基底状態での SU(3) ゲージ場は、

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = U^{-1}dU, \quad U(x) \in \text{SU}(3) \quad (1.6.1)$$

と表される。いま、空間的無限遠で  $U \rightarrow 1$  を要請すると、各時刻  $t$  でのゲージ場配位は、

$$U : S^3 \rightarrow \text{SU}(3) \quad (1.6.2)$$

と見なすことができる。これらのうち、互いに連続変形で移れるものは同一視すると、配位は  $U$  のホモトピー類で分類され、その全体は  $\pi_3(\text{SU}(3)) \cong \mathbb{Z}$  と対応する。具体的には、この対応は、巻き付き数

$$\begin{aligned} n &:= -\frac{1}{8\pi^2} \int d^3x \text{Tr} \left\{ d\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} + \frac{2}{3} \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \right\} \\ &= \frac{1}{24\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \text{Tr} (U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU) \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

で与えられる。

巻き付き数の時間変化は、

$$\Delta n = n(t = \infty) - n(t = -\infty) = \int_{\mathbb{R}^4} d\mathcal{K} = \int_{\mathbb{R}^4} -\frac{1}{8\pi^2} \text{Tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}). \quad (1.6.4)$$

これより、インスタントンは巻き付き数の変化を引き起こす。いま、巻き付き数  $n$  の真空を  $|n\rangle$  と表すと、

$${}_+\langle n+q|n, t\rangle_- = C \int [dA]_q \cdots e^{-S_E} = A_q. \quad (1.6.5)$$

よって、新たな真空の基底  $|\theta\rangle$  を

$$|\theta\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\theta} |n\rangle, \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (1.6.6)$$

により定義すると、

$${}_+\langle \theta'|\theta\rangle_- = 2\pi\delta(\theta - \theta') \sum_{q \in \mathbb{Z}} A_q e^{i\theta q}. \quad (1.6.7)$$

したがって、この  $\theta$  真空がエネルギー固有状態を与える。

## 1.6.2 強い相互作用における CP の破れ

各  $\theta$  真空での Lagrangian は

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L} + \theta \mathcal{P}^{(3)}; \quad (1.6.8)$$

$$\mathcal{P}^{(3)} = -\frac{1}{8\pi^2} \text{Tr}(\mathcal{F}^{(3)} \wedge \mathcal{F}^{(3)}) = \frac{g_3^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma}). \quad (1.6.9)$$

と表される。この  $\theta$  に依存する補正項は  $\theta \neq 0$  のとき、CP を破る。

Chiral anomaly のため、この  $\theta$  に依存した CP の破れとクォーク質量項の複素位相による CP の破れは密接に関連する。以下、 $q = (u, d, s)$  の 3 クォークモデルで考える。このとき、 $U(3)_R \times U(3)_L$  対称性のうち、 $U(1)_b$  は厳密な対称性、 $SU(3)_R \times SU(3)_L = SU(3)_V \times SU(3)_A$  対称性はクォーク質量項により弱く破れた近似的対称性となる。ただし、 $SU(3)_A$  はクォーク凝縮により自発的に破れる。また、残る  $U(1)_A$  は chiral anomaly で破れる。 $it\gamma_5$  を対応する無限小カイラル変換とすると、アノマリー関数は、一般に

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = & \frac{g_1^2}{16\pi^2} \text{Tr}(tY^2) F^{(1)} \cdot \tilde{F}^{(1)} + \frac{g_1 g_2}{4\pi^2} \text{Tr}(tY t_a^{(2)}) F^{(1)} \cdot \tilde{F}^{(2)} \\ & + \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr}(t) \left( g_2^2 F^{(2)} \cdot \tilde{F}^{(2)} + g_3^2 F^{(3)} \cdot \tilde{F}^{(3)} \right). \end{aligned} \quad (1.6.10)$$

ここで、2 形式の内積において、 $F \cdot G = F_{\mu\nu} G^{\mu\nu} / 2$ 。

これより、 $\text{Tr}(t) \neq 0$  となるカイラル変換  $U = \exp(iat\gamma_5)$  に対して、 $\theta$  パラメーターは

$$\theta \frac{g_3^2}{16\pi^2} F^{(3)} \cdot \tilde{F}^{(3)} \rightarrow (\theta + 2\alpha \text{Tr}(t)) \frac{g_3^2}{16\pi^2} F^{(3)} \cdot \tilde{F}^{(3)} \quad (1.6.11)$$

と変化する。一方、クォークの質量行列は

$$\bar{q}_L \mathcal{M} q_R + \text{h.c.} \rightarrow \bar{q}_L e^{i\alpha t} \mathcal{M} e^{i\alpha t} q_R + \text{h.c.} \quad (1.6.12)$$

と変換する。これより、 $\mathcal{M}$  の全位相は

$$\det \mathcal{M} \rightarrow e^{2i\alpha \text{Tr}(t)} \det \mathcal{M} \quad (1.6.13)$$

と変化する。よって、最初、この変換で  $\det \mathcal{M} \in \mathbb{R}$  としておき、そのときの  $\theta$  を  $\theta_0$  とおく。このとき、 $SU(3)_R \times SU(3)_L$  変換で  $\mathcal{M}$  を非負固有値  $[m_u, m_d, m_s]$  をもつ実対角行列に対角化できる。この表示から出発して、カイラル変換  $U = \exp(iat\gamma_5)$  を施して、 $\theta \rightarrow 0$  とすると、

$$0 = \theta_0 + 2\alpha \text{Tr}(t) = 0. \quad (1.6.14)$$

このとき、クォークの質量行列は

$$\mathcal{M} = e^{i\alpha t} [m_u, m_d, m_s] e^{i\alpha t}. \quad (1.6.15)$$

$|\theta_0| \ll 1$  とすると,

$$\mathcal{M} \simeq [m_u, m_d, m_s] + i\alpha\{t, [m_u, m_d, m_s]\}. \quad (1.6.16)$$

この第2項が CP の破れを生む:

$$\mathcal{L}_{\text{CPV}} = i\alpha\bar{q}(t\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_0t)\gamma_5q. \quad (1.6.17)$$

この CP の破れの量子効果を考える際に,  $\mathcal{L}_{\text{CPB}}$  がカイラル SU(3) の擬 Goldstone bosons  $B_a$  に対応する成分をもつと, 量子効果は真空の再定義 ( $\langle\bar{q}\lambda_aq\rangle, \langle\bar{q}\lambda_a\gamma_5q\rangle$  の値の変化) を生み出す. これを避けるには,  $\mathcal{L}_{\text{CPB}}$  がカイラル SU(3) に関する真空整列条件

$$\delta_\alpha\mathcal{L}_{\text{CPV}} = \alpha\bar{q}[\frac{1}{2}\lambda_\alpha, t\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_0t]q = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, 8) \quad (1.6.18)$$

を満たせば良い. 解は,

$$t\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_0t = cI_3 \Leftrightarrow t = \frac{c}{2}\mathcal{M}_0^{-1}. \quad (1.6.19)$$

よって, 条件 (1.6.14) を考慮して,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{CPV}} &= -i\frac{\theta_0}{\text{Tr}\mathcal{M}_0^{-1}}\bar{q}\gamma_5q \\ &= -i\theta_0\frac{m_um_dm_s}{m_um_d + m_dm_s + m_um_s}(\bar{u}\gamma_5u + \bar{d}\gamma_5d + \bar{s}\gamma_5s). \end{aligned} \quad (1.6.20)$$

### 1.6.3 中性子電気双極子モーメント

#### References

- Baluni V: "CP-nonconservation effects in quantum chromodynamics", PRD19 (1979)19.
- Crewther RJ, Di Vecchia P, Veneziano G, Witten E: "Chiral estimate of the electric dipole moment of the neutron in quantum chromodynamics", PLB88 (1979) 123.

双極子モーメントの計算法 一般に, フェルミ粒子に対して,

$$-i\bar{u}(p')\gamma_{\mu\nu}q^\nu u(p)A^\mu(q) = \frac{1}{2}\bar{u}(p')\gamma_{\mu\nu}u(p)F^{\mu\nu}(q) \rightarrow \sigma_j B^j$$

より ( $q = p' - p$ ), このフェルミ粒子の磁気モーメントを

$$\mu^j = \mu\sigma^j \quad (1.6.21)$$

と置くと,

$$\langle p' | T(j_\mu(0)e^{iS_{\text{int}}}) | p \rangle \rightarrow i\mu \bar{u}(p') \gamma_{\mu\nu} q^\nu u(p) + \dots \quad (1.6.22)$$

例えば,

$$e\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) = i \frac{e}{2m} \bar{u}(p') [(p+p')_\mu + \gamma_{\mu\nu} q^\nu] u(p) \quad (1.6.23)$$

より, 自由荷電粒子の磁気モーメントは

$$\mu^j = \frac{e}{2m} \sigma^j. \quad (1.6.24)$$

同様にして,

$$\gamma_{\mu\nu} \gamma_5 = i \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \gamma^{\lambda\sigma} \quad (1.6.25)$$

より,

$$-\bar{u}(p') \gamma_{\mu\nu} \gamma_5 q^\nu u(p) A^\mu(q) = \frac{1}{2} \bar{u}(p') \gamma_{\mu\nu} u(p) \tilde{F}^{\mu\nu}(q) \rightarrow \sigma_j E^j$$

よって, フェルミ粒子が電気双極子モーメント

$$D^j = D\sigma^j \quad (1.6.26)$$

をもつとすると,

$$\langle p' | T(j_\mu(0)e^{iS_{\text{int}}}) | p \rangle \rightarrow D\bar{u}(p') \gamma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 u(p) + \dots \quad (1.6.27)$$

中性子の電気双極子モーメント 一般論より, 中性子の電気双極子モーメント  $D_n$  は

$$-\langle n(p') | T(J_\mu(0) \int d^4x i \mathcal{L}_{\text{CPV}}) | n(p) \rangle \rightarrow D_n \bar{u}(p') \gamma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 u(p) + \dots \quad (1.6.28)$$

により決定される. Crewther らの結果は,

$$D_n \simeq g_{\pi NN} \bar{g}_{\pi NN} \frac{1}{4\pi^2 m_N} \ln \left( \frac{m_N}{m_\pi} \right). \quad (1.6.29)$$

ここで,

$$\mathcal{L}_{\pi NN} = \boldsymbol{\pi} \cdot \bar{N} \boldsymbol{\tau} (i\gamma_5 g_{\pi NN} + \bar{\gamma}_{\pi NN}) N, \quad (1.6.30a)$$

$$g_{\pi NN} \simeq 13.4, \quad (1.6.30b)$$

$$\bar{g}_{\pi NN} \simeq -\theta_0 \frac{(m_\Xi - m_N) m_u m_d}{F_\pi (m_u + m_d) (2m_s - m_u - m_d)}, \quad (1.6.30c)$$

$$\simeq -0.038\theta_0. \quad (1.6.30d)$$

よって,

$$D_n \simeq 5.2 \times 10^{-16} \theta_0 \text{ecm}. \quad (1.6.31)$$

Bag モデルによる Baluni の結果も近い値となる:

$$D_n \simeq 2.7 \times 10^{-16} \theta_0 \text{ ecm}. \quad (1.6.32)$$

実験により得られた上限値は

$$|D_n| < 3 \times 10^{-26} \text{ ecm} \Rightarrow |\theta_0| \lesssim 10^{-9}. \quad (1.6.33)$$

---

## §1.7

---

# QCD Axion

---

### References

- Peccei RD, Quinn HR: "CP conservation in the presence of instantons", PRL38(1977)1791.
- ibid: "Constraints imposed by CP conservation in the presence of instantons", PRD16(1977)1440.
- Weinberg S: "A new light boson?", PRL40 (1978) 223.
- Wilczek F: "Problem of strong P and T invariance in the presence of instantons", PRL40 (1978)279.

### 1.7.1 Instanton vacuum energy

カイラル U(1) 変換でフェルミ粒子の質量行列の全体として位相をすべて  $\theta$  パラメータに移したときの  $\theta$  の値を  $\theta_0$  とする:

$$\det \mathcal{M} \in \mathbb{R}. \quad (1.7.1)$$

このとき,  $p_1 = 1$  となる単インスタントンに対して,

$$-\int d^4x \frac{1}{2g^2} \mathcal{F}^a \cdot \mathcal{F}^a = -\int \frac{1}{2g^2} \mathcal{F}^a \wedge \mathcal{F}^a = \frac{8\pi^2}{g^2} \quad (1.7.2)$$

より, dilute gas 近似のもとで, Euclidean 経路積分  $Z$  へのインスタントンの寄与は,

$$\begin{aligned} Z &= \int [dA] \dots e^{i\theta_0 \mathcal{P}(A) - S_E(A) - \dots} \\ &\simeq \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left( \int d^4x \Lambda^4 e^{i\theta_0 - 8\pi^2/g^2} \right)^p \frac{1}{q!} \left( \int d^4x \Lambda^4 e^{-i\theta_0 - 8\pi^2/g^2} \right)^q \times Z_0 \\ &= Z_0 \exp \left[ \int d^4x 2\Lambda^4 e^{-8\pi^2/g^2} \cos \theta_0 \right]. \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

これより、インスタントン効果は  $\theta_0$  に依存した真空エネルギーを生み出す：

$$V_{\text{inst}} \simeq -2\Lambda^4 e^{-8\pi^2/g^2} \cos \theta_0. \quad (1.7.4)$$

## 1.7.2 Peccei-Quinn 対称性

素粒子標準モデルを2つの Higgs を含む形に拡張する：

$$\mathcal{L}_Y = \Gamma_{ij}^u \bar{Q}_{Li} \Phi_1 u_{Rj} + \Gamma_{ij}^d \bar{Q}_{Li} \Phi_2 d_{Rj} + \Gamma_{ij}^\ell \bar{L}_{Li} \Phi_2 \ell_{Rj} + \text{h.c.} \quad (1.7.5)$$

ここで、

$$\Phi_1 = \frac{v_1}{\sqrt{2}} e^{i\phi x_1/v_F} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \frac{v_2}{\sqrt{2}} e^{i\phi x_2/v_F} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.7.6)$$

$$v_F = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \quad (1.7.7)$$

ただし、scaling  $(x_i, \phi) \rightarrow (\lambda x_i \phi / \lambda)$  で  $\Phi_i$  は不変なので、この scaling を用いて

$$x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = x, \quad x_2 = \pm 1/x \quad (1.7.8)$$

とできる。このとき、Higgs の運動項より

$$|\partial\Phi_1|^2 + |\partial\Phi_2|^2 = \frac{x_1^2 v_1^2 + x_2^2 v_2^2}{2v_F^2} (\partial\phi)^2. \quad (1.7.9)$$

となるので、 $\phi$  の運動項を標準的に規格化すると、

$$v_F^2 = x_1^2 v_1^2 + x_2^2 v_2^2 \Rightarrow x^2 = 1, \quad v_2^2/v_1^2. \quad (1.7.10)$$

この系が、次のカイラル U(1) 変換 (Peccei-Quinn 対称性)

$$\phi \rightarrow \phi + \alpha v_F, \quad (1.7.11a)$$

$$u_{Rj} \rightarrow e^{-i\alpha y_1} u_{Rj}, \quad d_{Rj} \rightarrow e^{-i\alpha y_2} d_{Rj}, \quad \ell_{Rj} \rightarrow e^{-i\alpha y_3} \ell_{Rj}, \quad (1.7.11b)$$

$$Q_{Li} \rightarrow e^{i\alpha z_1} Q_{Li}, \quad L_{Li} \rightarrow e^{i\alpha z_2} L_{Li} \quad (1.7.11c)$$

に対して古典的には不変となるとすると、

$$y_1 + z_1 = x_1, \quad y_2 + z_1 = x_2, \quad y_3 + z_2 = x_2 \quad (1.7.12)$$

となる。この変換に対するカレントは、

$$\begin{aligned} J_{\text{PQ}}^\mu &= -v_F \partial^\mu \phi + y_1 \sum_i \bar{u}_{iR} \gamma^\mu u_{iR} + y_2 \sum_i d_{iR} \gamma^\mu d_{iR} + y_3 \sum_i \bar{\ell}_{iR} \gamma^\mu \ell_{iR} \\ &\quad - z_1 \sum_i \bar{Q}_{iL} \gamma^\mu Q_{iL} - z_2 \sum_i \bar{L}_{iL} \gamma^\mu L_{iL}. \end{aligned} \quad (1.7.13)$$

この発散は

$$\begin{aligned}
\partial_\mu J_{\text{PQ}}^\mu &= -v_{\text{F}}\partial^2\phi + \mathcal{P} \\
&+ (y_1 - z_1) (\bar{u}_R \mathcal{M}_u^\dagger u_L + \bar{u}_L \mathcal{M}_u^\dagger u_R) \\
&+ (y_2 - z_1) (\bar{d}_R \mathcal{M}_d^\dagger d_L + \bar{d}_L \mathcal{M}_d^\dagger d_R) \\
&+ (y_3 - z_2) (\bar{\ell}_R \mathcal{M}_\ell^\dagger \ell_L + \bar{\ell}_L \mathcal{M}_\ell^\dagger \ell_R). \tag{1.7.14}
\end{aligned}$$

ここで、アノマリー  $\mathcal{P}$  は

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= y_1 \frac{N_g}{16\pi^2} (g_3^2 F^{(3)} \cdot F^{(3)} + \frac{3}{2} g_1^2 Y_{uR}^2 F^{(1)} \cdot F^{(1)}) \\
&+ y_2 \frac{N_g}{16\pi^2} (g_3^2 F^{(3)} \cdot F^{(3)} + \frac{3}{2} g_1^2 Y_{dR}^2 F^{(1)} \cdot F^{(1)}) \\
&+ y_3 \frac{N_g}{32\pi^2} (g_1^2 Y_{\ell R}^2 F^{(1)} \cdot F^{(1)}) \\
&+ z_1 \frac{2N_g}{16\pi^2} (g_3^2 F^{(3)} \cdot F^{(3)} + \frac{3}{2} g_1^2 Y_{uL}^2 F^{(1)} \cdot F^{(1)} + g_2^2 F^{(2)} \cdot F^{(2)}) \\
&+ z_2 \frac{2N_g}{16\pi^2} (\frac{1}{2} g_1^2 Y_{\ell L}^2 F^{(1)} \cdot F^{(1)} + g_2^2 F^{(2)} \cdot F^{(2)}) \\
&= \frac{N_g}{16\pi^2} \left[ (x_1 + x_2) g_3^2 F^{(3)} \cdot F^{(3)} + 2(z_1 + z_2) g_2^2 F^{(2)} \cdot F^{(2)} \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{2y_1}{3} + \frac{y_2}{6} + \frac{y_3}{2} + \frac{z_1}{3} + z_2 \right) g_1^2 F^{(1)} \cdot F^{(1)} \right]. \tag{1.7.15}
\end{aligned}$$

以上より、 $\Phi_j$  の  $\exp(ix_j\phi/f_a)$  を PQ 変換により消し去ると、QCD セクターに対する次の有効作用が得られる:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{SM}} - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \mathcal{L}_{\text{int}}[\partial\phi/f_a, \Psi] + \left( \theta_0 + \xi \frac{\phi}{f_a} \right) \frac{g_3^2}{16\pi^2} F^{(3)} \cdot F^{(3)}. \tag{1.7.16}$$

ここで、

$$f_a = v_{\text{F}}, \quad \xi = N_g(x_1 + x_2). \tag{1.7.17}$$

$\mathcal{L}_{\text{eff}}$  の中の  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  は

$$\Psi \rightarrow e^{iy\phi/f_a} \Psi : -i\bar{\Psi}\gamma \cdot \partial\Psi \rightarrow -i\bar{\Psi}\gamma \cdot \partial\Psi + \frac{y}{f_a} \partial_\mu\phi \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \tag{1.7.18}$$

より生じる。

この有効ポテンシャルは、Peccei-Quinn 対称性のように、クォークにカイラルに作用する変換に対して理論が不変で、かつこの対称性が自発的に破れると、Goldstone ボゾンが  $\theta$  角に加わり、結果的に  $\theta$  角をダイナミカルにすることが分かる:

$$\theta = \theta_0 + \xi \frac{\phi}{f_a}. \tag{1.7.19}$$

インスタントンポテンシャル

$$V_{\text{inst}} \sim -\Lambda^4 e^{-8\pi^2/g^2} \cos\theta \tag{1.7.20}$$

を考慮すると、これは  $\theta$  が  $\theta = 0$  に自動調節されることを意味する。

### 1.7.3 Axion

アクシオンのポテンシャルは擬 Goldstone ボゾンに対する有効理論を用いると、次のように曖昧さ無く決定される。

まず、アクシオン場を

$$a = \phi + \theta_0 \frac{f_a}{\xi} \quad (1.7.21)$$

とおくと、クォーク質量項を实にした表示でのアクシオンの有効ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a = & -\frac{1}{2}(\partial a)^2 + \frac{\xi}{16\pi^2} \frac{a}{f_a} F^j \cdot F^j \\ & + \frac{x_1}{2f_a} \partial_\mu a \bar{u} \gamma^\mu \gamma_5 u + \frac{x_2}{2f_a} \partial_\mu a \bar{d} \gamma^\mu \gamma_5 d. \end{aligned} \quad (1.7.22)$$

つぎに、カイラル変換

$$u \rightarrow e^{ip_1 \theta \gamma_5} u, \quad d \rightarrow e^{ip_2 \theta \gamma_5} d \quad (1.7.23)$$

を施すと、

$$\theta = \frac{\xi}{f_a} a \rightarrow (1 + 2p_1 + 2p_2)\theta, \quad (1.7.24a)$$

$$x_1 \rightarrow x_1 + 2\xi p_1, \quad (1.7.24b)$$

$$x_2 \rightarrow x_2 + 2\xi p_2 \quad (1.7.24c)$$

と変化する。そこで、

$$p_1 + p_2 = -\frac{1}{2} \quad (1.7.25)$$

と取ると、 $\theta = 0$  となるが、同時にクォーク質量項が  $a$  と結合する：

$$\mathcal{L}_m = im_u \bar{u} e^{ip_1 a \gamma_5} u + im_d \bar{d} e^{ip_2 a \gamma_5} d. \quad (1.7.26)$$

ここで、カイラル SU(2) が自発的に破れており、その擬 Goldstone ボゾンがパイ中間子であることを考慮する：

$$-i \langle \bar{u} u \rangle = -i \langle \bar{d} d \rangle = v_c \cos \left( \frac{\pi^0}{F_\pi} \right), \quad (1.7.27a)$$

$$-i \langle \bar{u} \gamma_5 u \rangle = i \langle \bar{d} \gamma_5 d \rangle = -iv_c \sin \left( \frac{\pi^0}{F_\pi} \right), \quad (1.7.27b)$$

$$\langle \bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 u \rangle = -\langle \bar{d} \gamma_\mu \gamma_5 d \rangle = \frac{1}{2} F_\pi \partial_\mu \pi^0 \quad (1.7.27c)$$

このとき、 $\mathcal{L}_m$  より

$$\langle \mathcal{L}_m \rangle = m_u v_c \cos \left( \frac{\pi^0}{F_\pi} - \frac{p_1 \xi}{f_a} a \right) + m_d v_c \cos \left( \frac{\pi^0}{F_\pi} + \frac{p_2 \xi}{f_a} a \right) \quad (1.7.28)$$

また,  $a$  とクォークの結合項より,

$$\frac{x_1 + 2\xi p_1}{2f_a} \partial_\mu a \langle \bar{u} \gamma^\mu \gamma_5 u \rangle + \frac{x_2 + 2\xi p_2}{2f_a} \partial_\mu a \langle \bar{d} \gamma^\mu \gamma_5 d \rangle = \frac{F}{2f_a} \{x_1 - x_2 + 2\xi(p_1 - p_2)\} \partial a \cdot \partial \pi^0. \quad (1.7.29)$$

この運動項での  $a - \pi^0$  混合が消えることを要求すると

$$p_1 - p_2 = -\frac{1}{2\xi}(x_1 - x_2) \quad (1.7.30)$$

よって,

$$p_1 = -\frac{1}{4} - \frac{x_1 - x_2}{4\xi}, \quad p_2 = -\frac{1}{4} + \frac{x_1 - x_2}{4\xi}, \quad (1.7.31)$$

以上を総合すると, 擬 Goldstone ボゾン系  $(\pi^0, a)$  に対する有効 Lagrangian は

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{2}(\partial\pi^0)^2 - \frac{1}{2}(\partial a)^2 - V, \quad (1.7.32)$$

$$V = -m_u v_c \cos\left(\frac{\pi^0}{F_\pi} - \frac{p_1 \xi}{f_a} a\right) - m_d v_c \cos\left(\frac{\pi^0}{F_\pi} + \frac{p_2 \xi}{f_a} a\right) \quad (1.7.33)$$

ポテンシャル  $V$  を極点  $(\pi^0, a) = (0, 0)$  で展開すると, 質量項は

$$V_m = \frac{(m_u + m_d)v_c}{2F_\pi^2} (\pi^0)^2 - \frac{\xi(p_1 m_u - p_2 m_d)v_c}{F_\pi f_a} a \pi^0 + \frac{\xi^2(p_1^2 m_u + p_2^2 m_d)v_c}{f_a^2} a^2. \quad (1.7.34)$$

$f_a \gg F_\pi$  として対角化すると,

$$m_\pi^2 \simeq \frac{m_u + m_d}{F_\pi^2} v_c, \quad (1.7.35a)$$

$$m_a^2 \simeq \frac{m_u m_d}{m_u + m_d} v_c \left(\frac{\xi}{2f_a}\right)^2 = \left(\frac{\xi F_\pi}{2f_a}\right)^2 \frac{m_u m_d}{(m_u + m_d)^2} m_\pi^2. \quad (1.7.35b)$$

$f_a$  が電弱スケールとすると,

$$f_a \sim 100\text{GeV} \Rightarrow m_a \gtrsim 0.3\text{MeV} \quad (1.7.36)$$

となるが, このような粒子は発見されていない.

また, Bardeen, Peccei, Yanagida[NPB279(1987)401]により,  $f_a = v_F$  のとき,

$$\text{BR}(K^+ \rightarrow \pi^+ + a) \simeq 3 \times 10^{-5} (x + 1/x)^2 \quad (1.7.37)$$

が得られているが, これは KEK ので実験結果 [Asano Y et al:PLB107(1981)159]

$$r\text{BR}(K^+ \rightarrow \pi^+ + \text{nothing}) < 3.8 \times 10^{-8} \quad (1.7.38)$$

と矛盾する.

---

## §1.8

---

# Invisible axion

---

一般に, PQ 変換のスカラ場系  $\{\Phi_p\}$  およびスピノール場系  $\{\Psi_j\}$  に対する作用は,

$$\Phi_p \rightarrow e^{ix_p\alpha}\Phi_p, \quad \Psi_j \rightarrow e^{iy_j\alpha\gamma_5}\Psi_j \quad (1.8.1)$$

これに対する Anomaly 関数は

$$\mathcal{P} = \sum_j y_j \sum_r q_{(r)j}^2 \frac{g_r^2}{8\pi^2} \text{Tr}_v(F^{(r)} \cdot \tilde{F}^{(r)}). \quad (1.8.2)$$

ただし, スピノール場系では Left 成分と Right 成分は独立な場として  $j$  でカウント.

いま, この対称性が自発的に破れるとし, その Goldstone boson を  $\phi$  とおくと,

$$\Phi_p = e^{-ix_p\phi/f_a}(\Phi_p)_0, \quad |(\Phi_p)_0|^2 = v_p^2/2. \quad (1.8.3)$$

ここで,  $f_a$  は  $\phi$  の運動項の規格化

$$\sum_p |\partial\Phi_p|^2 = \frac{1}{2f_a^2} \left( \sum_p v_p^2 x_p^2 \right) (\partial\phi)^2 = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 \quad (1.8.4)$$

より,

$$f_a^2 = \sum_p x_p^2 v_p^2. \quad (1.8.5)$$

よって,  $\Phi_a$  の Goldstone boson 成分を PQ 変換

$$\alpha = \phi(x)/f_a \quad (1.8.6)$$

で消去すると,

$$\theta : \theta_0 \rightarrow \theta_0 + \xi \frac{\phi}{f_a} = \xi \frac{a}{f_a}, \quad (1.8.7a)$$

$$\mathcal{L}_a = -\frac{1}{2}(\partial a)^2 + a \frac{\xi}{f_a} \frac{g_3^2}{16\pi^2} F^{(3)} \cdot \tilde{F}^{(3)} + \sum_j \frac{y_j}{f_a} \partial_\mu a \bar{\Psi}_j \gamma^\mu \gamma_5 \Psi_j. \quad (1.8.7b)$$

ここで,

$$a = \phi + \frac{f_a}{\xi} \theta_0, \quad (1.8.8)$$

$$\xi = \sum_j y_j q_{(3)j}^2. \quad (1.8.9)$$

したがって,  $f_a$  と  $\xi$  の定義を変更し, さらに,

$$x_1 \rightarrow y_{u_R} + y_{u_L}, \quad x_2 \rightarrow y_{d_R} + y_{d_L} \quad (1.8.10)$$

と置けば, 前節の議論がそのまま使える. 特に, axion 質量は

$$m_a = \frac{\xi F_\pi \sqrt{m_u m_d}}{2f_a m_u + m_d} m_\pi. \quad (1.8.11)$$

また, フェルミ粒子との結合は

$$\mathcal{L}_{af} = \sum_j \frac{y_j}{f_a} \partial_\mu a \bar{\Psi}_j \gamma^\mu \gamma_5 \Psi_j \quad (1.8.12)$$

ゲージ場との CS 結合は

$$\mathcal{L}_{CS} = \sum_r g_{CS}^{(r)} \frac{a}{f_a} \text{Tr}_v(F^{(r)} \cdot \tilde{F}^{(r)}), \quad (1.8.13)$$

$$g^{(r)} = \sum_j \frac{y_j q_{(r)j}^2 g_r^2}{8\pi^2}. \quad (1.8.14)$$

特に, 電磁場との結合は

$$\mathcal{L}_{a\gamma\gamma} = \frac{g_{a\gamma\gamma}}{2} a F \cdot \tilde{F} = -g_{a\gamma\gamma} a \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad (1.8.15)$$

$$g_{a\gamma\gamma} = \frac{\alpha \xi}{2\pi f_a} \left( \frac{E}{N} - \frac{2(4m_u + m_d)}{3(m_u + m_d)} \right). \quad (1.8.16)$$

ここで,

$$\frac{E}{N} = \frac{\sum_j y_j q_{(EM)j}^2}{\sum_j y_j q_{(3)j}}. \quad (1.8.17)$$

以上より, PQ 変換の作用する Higgs 場を EW のものから, EW singlet なものに変えると,  $f_a$  を大きくし, それによりアクシオンクォークやアクシオンゲージ場の結合を弱くすることができる. この場合, 実験との矛盾はなくなる.

$$m_a \propto 1/f_a, \quad g_{aqq}, g_{a\gamma\gamma} \propto 1/f_a. \quad (1.8.18)$$

$f_a, x_p, y_i$  の定義の変更 多くの応用的文献では, 次の置き換えがされている:

$$f_a/\xi \rightarrow f_a, \quad x_p/\xi \rightarrow x_p, \quad y_j/\xi \rightarrow y_j. \quad (1.8.19)$$

この新たな記法では,

$$\sum_j y_j q_{(3)j}^2 = 1. \quad (1.8.20)$$

以下, 特に断らなければ, この notation に従う.

### 1.8.1 KSVZ 模型

#### Reference

- Kim JE: “Weak interaction singlet and strong CP invariance”, PRL43(1979)103.
- Shifman MA, Vainstein AI, Zakharov VI: “Can confinement ensure natural CP invariance of strong interactions?”, NPB166(1980)493.

模型の概要 このモデルでは, singlet スカラ  $\sigma$  と重いクォーク  $Q$  を導入する.

- $\sigma$ :  $f_a = \langle \sigma \rangle \gg v_F$
- $Q$ :  $M_Q \sim f_a$ . PQ 電荷をもつ唯一のクォーク.  $\xi = y_Q$ .

このモデルでは, アクシオンは重いクォークとのみ相互作用する. 電磁場との CS 結合は,  $\pi^0$  および  $\eta$  との混合を考慮して,

$$g_{a\gamma\gamma} = \frac{\alpha}{\pi f_a} \left( 3e_Q^2 - \frac{4m_d + m_u}{3(m_u + m_d)} \right). \quad (1.8.21)$$

また,

$$m_a \simeq 6.3\text{eV} \left( \frac{10^6\text{GeV}}{f_a} \right) / \quad (1.8.22)$$

### 1.8.2 DFSZ 模型

#### References

- Dine M, Fischer W, Srednicki M: “A simple solution to the strong CP problem with a harmless axion”, PLB104(1981)199.
- Zhitnitsky AR: “On possible suppression of the axion hadron interactions”, Sov. J. Nucl. Phys. 31 (1980)260.

模型の概要 PQ 模型に,  $f_a = \langle \sigma \rangle \gg v_F$  となる PQ 電荷をもつスカラ場を追加.

このモデルでは, 追加されたスカラ場は  $f_a$  を大きくする役割だけを果たし, axion-quark 結合, axion-gauge CS 結合は PQ 模型と同じ.

電磁場との CS 結合は,  $\pi^0$  および  $\eta$  との混合を考慮して,

$$g_{a\gamma\gamma} = \frac{\alpha}{\pi f_a} \left( \frac{4}{3} - \frac{4m_d + m_u}{3(m_u + m_d)} \right). \quad (1.8.23)$$

---

## §1.9

---

# Axion-Like Particles

---

### Reviews

- Raffelt GG: “Stars as Laboratories for Fundamental Physics” (U. Chicago Press, 1996).
- Khlopov My: “Cosmoparticle physics” (WS, 1999)
- Kim JH: “Light Pseudoscalars, Particle Physics and Cosmology”, Phys. Rep. 150:1-177 (1987)
- Cheng HY: “The Strong CP Problem Revisited”, Phys. Rep. 158:1 (1988)
- Raffelt GG: “Astrophysical methods to constrain axions and other novel particle phenomena”, Phys. Rep. 198:1 (1990)
- Kuster M, Raffelt G, Beltran B (Editors): “Axions”, Lecture Notes in Physics 741 (Springer, 2008)

### 1.9.1 ALP vs axion

高エネルギースケールでの U(1) 対称性の破れに伴う小質量擬 Goldstone ボゾンを ALP と呼ぶ。基本的特徴付けは以下の通り:

1. (近似的) 対称性の自発的破れに伴う擬 Goldstone ボゾン.
2. 小さな質量 (< keV).
3. SM 粒子との非常に弱い相互作用.
4.  $\phi\gamma\gamma$  相互作用.

– 擬 scalar の場合:  $L_{\phi\gamma\gamma} = \frac{1}{4M}\phi F \cdot \tilde{F}$ .

– scalar の場合:  $L'_{\phi\gamma\gamma} = \frac{1}{4}g_{\phi\gamma\gamma}\phi F \cdot F$ .

これらの特徴から次のような実験的および宇宙的制限がつく.

- 恒星からの放出
  - Primakoff 過程は  $\phi\gamma\gamma$  結合があれば常の起きる  $\Rightarrow$  HB stars, Sun, SN

- $L_{\phi ee}$ : モデル依存性  $\Rightarrow$  RGB stars
- $L_{\phi NN}$ : モデル依存性  $\Rightarrow$  SN

一般の ALP のなかで, アクシオンは次のような特徴をもつ:

1. 中性擬スカラー粒子 (場)
  - これより, P および CP を保つとすると, P & CP-odd なスカラー密度とのみ結合.
  - 短距離で  $1/r^n (n \geq 3)$  と振る舞い, 粒子間の力は粒子の速度やスピンの依存. このため, submm での第5の力計測からの制限が弱い.
2. tree レベルでシフト対称性 (カイラル)
  - Tree level の shift symmetry は摂動論的量子効果の影響を受けない. [Witten E:]
  - 1. と 2. より, スカラ場およびスピノール場とは微分結合, ゲージ場とは CS 結合.
3. 非摂動論的效果 (インスタントン+カイラル SSB) により微小な質量
4. 大きな axion decay constant  $f_a$ .

### 1.9.2 宇宙物理学よりの制限

- SN1987A, HB stars/RGB stars in globular clusters: QCD axion の場合

$$f_a \gtrsim 6 \times 10^8 \text{ GeV} \Rightarrow m_a \lesssim 10^{-2} \text{ eV} \quad (1.9.1)$$

$\phi\gamma\gamma$  結合をもつ ALP の場合はより弱い制限.

- SN1987A gamma-ray flux (Solar Maximum Mission satellite): 一般に ALP に対して,

$$M > 3 \times 10^{11} \text{ GeV} \quad \text{for } m < 10^{-9} \text{ eV}. \quad (1.9.2)$$

- Grifolds JA, Masso E, Toldra R: "Gamma rays from SN1987A due to pseudoscalar conversion", PRL77(1996)2372.[astro-ph/9606028]
- Brockway JW, Carlson ED, Raffelt GG: "SN 1987A gamma-ray limits on the conversion of pseudoscalars", PLB383(1996)439.[astro-ph/9605197]

- DM

$$\Omega_a h^2 = 0.5 \left( \frac{f_a/\xi}{10^{12}\text{GeV}} \right)^{7/6} [\theta_i^2 + \sigma_\theta^2] \gamma, \quad (1.9.3)$$

$$\begin{aligned} \Omega_a h^2 < 0.12, \quad \gamma = 1, \theta_i^2 = \pi^2/3 \\ \Rightarrow f_a < 3 \times 10^{11}\text{GeV}, \quad m_a > 2 \times 10^{-5}\text{eV}. \end{aligned} \quad (1.9.4)$$

---

## §1.10

---

# Cast experiment

---

### 概要

- Primakoff効果により太陽中心で生成されたアクシオンを磁気望遠鏡. (9.26m × 2 · 14.5cm<sup>2</sup> LHC 双極磁石) により光子に変換して検出.
  - CAST Coll: First Results from the CERN Axion Solar Telescope, PRL94:121301 (2005)
  - Zioutas K et al: A decommissioned LHC model magnet as an axion telescope, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A425:480 (1999) [astro-ph/9801176]

### 結果

- Cast Phase I:  $m_a < 0.02\text{eV}$ 
  - $g_{a\gamma\gamma} < 1.16 \times 10^{-10}\text{GeV}^{-1}$  [CAST Coll: PRL94:121301 (2005)]
  - $g_{a\gamma\gamma} < 8.8 \times 10^{-11}\text{GeV}^{-1}$  (95% CL) [CAST Coll: JCAP 04:010 (2007)]
- Cast Phase II:  $m_a < 1\text{eV}$ 
  - $g_{a\gamma\gamma} \lesssim 2.3 \times 10^{-10}\text{GeV}^{-1}$  (95% CL) for  $0.39\text{eV} \lesssim m_a \lesssim 0.64\text{eV}$ . [Aune S et al (CAST coll.): PRL107(2011)261302.[arXiv:1106.3919[hep-ex]]].

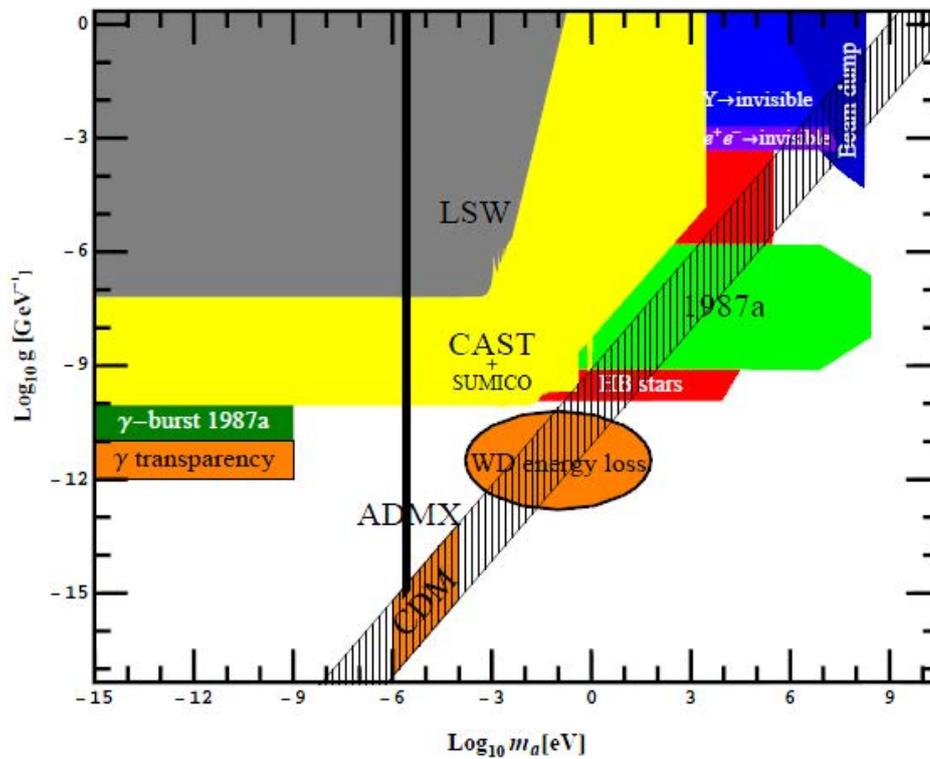
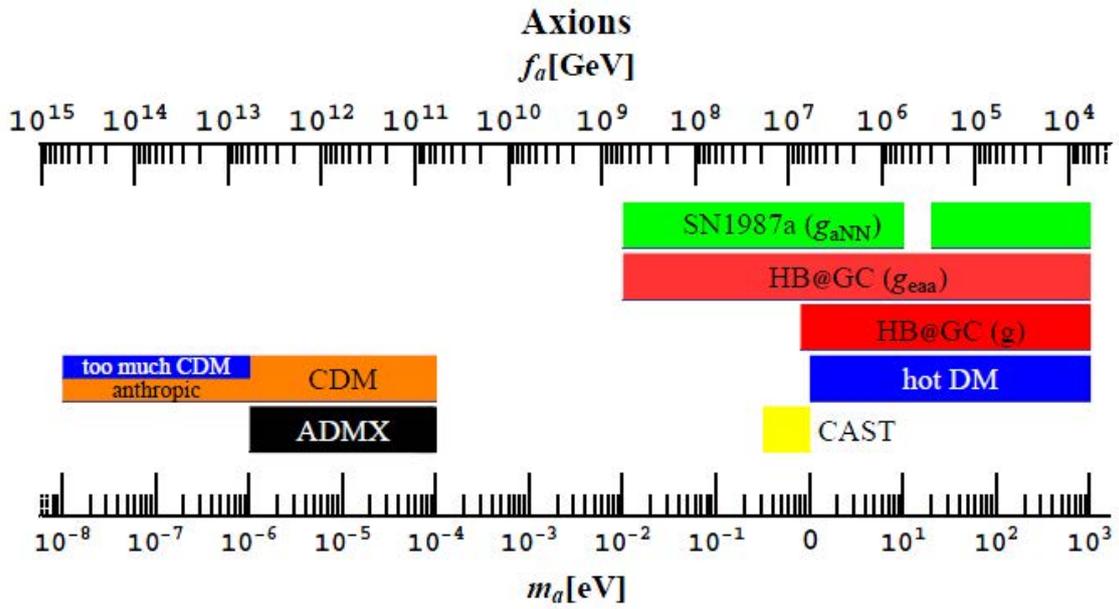


図 1.2: QCD アクシオンへの制限 [Jaeckel J, Ringwald A:arXiv:1002.0329]

## 2

## Axiverse

## §2.1

## String axions

概要 弦理論・M理論では、現実的な4次元宇宙を与えるコンパクト化により多様なアクシオンが自然に生み出される [19, 1]. 超弦理論に本質的な要素として含まれる微分形式場がその起源となる [16].

## 2.1.1 ヘテロ型理論

## 基本場

- 重力セクター
  - ボーズ場
    - \* 計量/フレーム場:  $g_{MN} (e_M^A)$
    - \* 2形式場:  $B_2 \Rightarrow \tilde{H}_3$
    - \* デイラトン:  $\Phi$
  - フェルミ場
    - \* スピン 3/2 場:  $\psi_M$
    - \* デイラティーノ:  $\lambda$
- ゲージセクター
  - ゲージ場:  $A_1 \in \text{Ad}(G)$
  - ゲージノ:  $\chi \in \text{Ad}(G)$

	Gravitational sector	Gauge sector
Boson	metric $g_{MN}$ 2-form $B_2$ dilaton $\Phi$	gauge field $A_1 \in \text{Ad}(G)$
Fermion	gravitino $\Psi_M(\mathbf{56})$ dilatinio $\lambda(\mathbf{8})$	gaugino $\chi(\mathbf{8}) \in \text{Ad}(G)$

作用積分 ストリングフレームでの Bosonic part の作用積分は

$$S_{\text{Het},B} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-g)^{1/2} e^{-2\Phi} \left[ R + 4(\partial\Phi)^2 - \frac{1}{2} |\tilde{H}_3|^2 - \frac{\alpha'}{4} \text{Tr}_v (|F_2|^2) \right]. \quad (2.1.1)$$

$$F_2 = dA_1 - iA_1 \wedge A_1, \quad (2.1.2)$$

$$H = dB - \frac{\alpha'}{4} (\omega_{\text{CS}}^G - \omega_{\text{CS}}^L). \quad (2.1.3)$$

ここで,

- $\alpha'$ : the inverse of the string tension
- $\omega_{\text{CS}}^G, \omega_{\text{CS}}^L$ : Chern-Simons 接続係数 :

$$d\omega_{\text{CS}}^G = \text{Tr}(F \wedge F), \quad d\omega_{\text{CS}}^L = \text{tr}(\mathcal{R} \wedge \mathcal{R}). \quad (2.1.4)$$

特に

$$\omega_3 = \text{Tr}_v \left( A_1 \wedge dA_1 - \frac{2i}{3} A_1 \wedge A_1 \wedge A_1 \right), \quad (2.1.5)$$

ゲージ不変性

$$\delta A = d\lambda, \quad \delta \omega = d\Theta, \quad \delta B = d\sigma + (\alpha'/4) \{ \text{Tr}(\lambda dA) + \text{tr}(\Theta d\omega) \} \quad (2.1.6)$$

ここで,  $\sigma$  は任意の 1 形式.

**Calabi-Yau コンパクト化** ヘテロ型理論を Calabi-Yau 3-fold  $Y$  と 4次元時空  $X$  の直積にコンパクト化すると, 2-形式場  $B$  は 2種類の  $X$  上のアクシオン場を生み出す. 直積型コンパクト化

$$ds^2(M_{10}) = ds^2(X_4) + ds^2(Y_6). \quad (2.1.7)$$

において,  $\eta^i (i = 1, \dots, b_2(Y))$  を  $H_2(Y, \mathbb{Z})$  の基底に双対な  $Y$  上の調和 2 形式の基底とする. このとき,  $B$  は

$$B = \ell_s^2 \sum_{i=1}^{b_2(Y)} \alpha_i(x) \eta^i + \beta(x), \quad (2.1.8)$$

と展開される．ここで， $\ell_s = 2\pi\sqrt{\alpha'}$ ， $\beta(x)$  は  $X_4$  上の 2 形式．これを作用積分  $S_B$  に代入して，

$$2\kappa_{10}^2 S_B = -\frac{V_Y}{2g_s^2} \int_{X_4} \left[ \sum Y^{ij} *d\alpha_i \wedge d\alpha_j + *h \wedge h + \frac{\theta}{\pi} \{dh - \ell_s^2 (4\pi)^{-2} (\text{Tr}(F \wedge F) - \text{tr}(\mathcal{R} \wedge \mathcal{R}))\} \right] \quad (2.1.9)$$

ここで， $V_Y$  を  $Y$  の体積， $h$  を  $H$  の 4 次元部分， $\theta(x)$  はアノーマリー相殺条件に対する lagrange multiplier.

$$Y^{ij} = \ell_s^4 V_Y^{-1} \int_{Y_6} *\eta^i \wedge \eta^j \quad (2.1.10)$$

$h$  に関する変分より， $d\theta = 2\pi *h$  が得られる．これを用いて  $B$  を消去すると， $\theta$  はダイナミカルな擬スカラー場となり，その作用は次式で与えられる：

$$S_a = \int_{X_4} \left[ -\frac{1}{2} \sum Y^{ij} *da_i \wedge da_j - \frac{1}{2} *da \wedge da + \frac{\lambda}{f_a} a \{ \text{Tr}(F \wedge F) - \text{tr}(\mathcal{R} \wedge \mathcal{R}) \} \right], \quad (2.1.11)$$

ここで， $f_a$  は次式で定義されるアキシオン崩壊定数である：

$$f_a = \frac{\sqrt{V_Y}}{2\sqrt{2\pi\kappa_{10}g_s}} = \frac{L^3}{\sqrt{2\pi g_s \ell_s^4}} = \frac{m_{\text{pl}}}{2\sqrt{2\pi}}, \quad (2.1.12)$$

ただし， $V_Y = L^6$ ， $a_i$  と  $a$  は  $a_i = f_a \alpha_i$  および  $a = f_a \theta$  で定義される次元を持つアキシオン場， $\lambda$  は無次元量

$$\lambda = \frac{\ell_s^2 f_a^2}{2\pi^2} = \frac{m_{\text{pl}}^2 \ell_s^2}{16\pi^3}. \quad (2.1.13)$$

である．ここで，実際のアキシオンスケール  $a_i$  は， $Y^{ij} \sim (\ell_s/L)^4$  より，一般に  $f_a$  より小さい．

このようにして得られる 2 種類のアキシオン場のうち，内部空間のサイクルより得られる  $a_i$  はモデル依存アキシオン， $B_{\mu\nu}$  より得られる  $a$  はモデル非依存アキシオンと呼ばれる．いずれのアキシオンに対しても，作用積分 (2.1.11) はシフト対称性をもつ．さらに，モデル非依存アキシオン  $a$  は，QCD アキシオンと同様，ゲージ場および重力場と Chen-Simons 相互作用をする．これに対して，モデル依存アキシオンは一見，そのような相互作用をしないように見える．また，それらは CP-even d に見える．しかし，実際には，量子補正を考えると，ゲージアノーマリーを相殺するため Green-Schwartz 相殺項

$$S = \int_{M_{11}} B \wedge X_8(F, \mathcal{R}) \quad (2.1.14)$$

がモデル依存アキシオンと  $\text{Tr}(F \wedge F)$  および  $\text{tr}(\mathcal{R} \wedge \mathcal{R})$  との相互作用を生み出す [19]. ここで，

$$X_8 = \text{tr}(R_2^4) + \frac{[\text{tr}(R_2^2)]^2}{4} - \frac{\text{Tr}_a(F_2^2)\text{tr}(R_2^2)}{30} + \frac{\text{Tr}_a(F_2^4)}{3} - \frac{[\text{Tr}_a(F_2^2)]^2}{900} \quad (2.1.15)$$

## 2.1.2 II型理論

### 基本場

$$\text{IIA} : \left\{ g_{MN}, B_{[2]}, \phi, C_M^{(1)}, C_{MNP}^{(3)}, C_{M\dots P}^{(5)}, C_{M\dots P}^{(7)}, C_{M\dots P}^{(9)}, \psi_M, \lambda \right\}, \quad (2.1.16a)$$

$$\text{IIB} : \left\{ g_{MN}, B_{[2]}, \phi, C_M^{(0)}, C_{MNP}^{(2)}, C_{M\dots P}^{(4)}, C_{M\dots P}^{(6)}, C_{M\dots P}^{(8)}, \psi_M, \lambda \right\} \quad (2.1.16b)$$

ここで、IIA に対しては  $\psi_M, \lambda$  は右と左カイラリティの doublets, IIB に対しては条件

$$\Gamma_{11}\psi_M = \psi_M, \quad \Gamma_{11}\lambda = -\lambda \quad (2.1.17)$$

を満たす同じカイラリティの doublets.

### 擬作用積分

$$S_B = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10} \sqrt{-g} \left[ e^{-2\phi} \left( R(\omega(e)) + 4d\phi \cdot d\phi - \frac{1}{2} H \cdot H \right) - \sum_{n \in S} \frac{1}{4} G^{(2n)} \cdot G^{(2n)} \right]. \quad (2.1.18)$$

ここで,

$$S = \begin{cases} (0, 1, \dots, 5); & \text{IIA} \\ (1/2, 3/2, \dots, 9/2); & \text{IIB} \end{cases} \quad (2.1.19)$$

また,

$$\mathbf{G} = \sum_{n \in S} \frac{1}{\ell_s^{2n-1}} G^{(2n)}, \quad \mathbf{C} = \sum_{n \in S} \frac{1}{\ell_s^{2n-1}} C^{(2n-1)} \quad (2.1.20)$$

として,

$$H = dB, \quad \mathbf{G} = d\mathbf{C} - \frac{1}{\ell_s^2} dB \wedge \mathbf{C} + \ell_s G^{(0)} e^{B/\ell_s^2}. \quad (2.1.21)$$

(この定義は、IIB の標準的なものに対応. IIA の標準的なものとは  $B$  の符号が異なる.)

**CY コンパクト化**  $B$  は、IIB 型理論ではモデル非依存アクシオン  $a$  を、また、IIA 型理論では、モデル依存アクシオン  $a_i$  を生成する. 一方、IIB 型での  $a_i$  場と IIA 型での  $a$  場は共に CP even となる. ヘテロ型の場合と異なり、 $F \wedge F$  や  $\mathcal{R} \wedge \mathcal{R}$  との結合は生成されない. しかし、II 型理論では、ヘテロ型と異なり、様々な RR 場  $C_p$  が存在し、特に IIA 型での  $C_3$  および IIB 型での  $C_{2q} (q = 0, 1, 2)$  は、ヘテロの場合と同じ機構で、モデル依存アクシオンを生み出す. さらに、これらのアクシ

オンは、D ブレーンでの RR 場とゲージ場および重力場との結合を通して、ゲージ場および重力場との CS 結合を獲得する [19].

これらのうち、モデル依存型アクシオンは、内部空間が位相的に複雑になるほど多種になる。特に、IIB 型理論のフラックスコンパクト化では、ワープのために adS 真空の uplift に膨大な数の 2 サイクルが必要となり、対応して非常に多種のアクシオンが生成されることになる [9]. また、ヘテロ型理論でも、Betti 数  $Ab_2(Y)$  に対する明確な制限は得られていないが、トーリック型 CY の組織的な探査研究では、一般的な CY で  $b_2(Y)$  が非常に大きくなることが知られている.[13]

### 2.1.3 質量スペクトル

ブレーンやフラックスの導入、コンパクト化によりアクシオン場のシフト対称性が破れないときには、( $N = 1$  超対称性を仮定すると) 摂動的な量子補正によってこの対称性が破れることはない。この場合、アクシオンは、QCD アクシオンと同様に、インスタントン効果などに非摂動論的效果によってのみ質量を獲得する。実際に、QCD アクシオンが存在する場合には、他にも多くのストリングアクシオンが残ると考えるのが自然である。

アクシオン質量の大きさは次のように評価できる。まず、一般にインスタントン効果によるアクシオン質量は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}f_a^2(\partial\theta)^2 - \Lambda^4 U(\theta); \quad \Lambda^4 \approx M^4 e^{-S}, \quad (2.1.22)$$

と表される。ここで、 $S$  はインスタントンの作用積分である。関係式

$$m_{\text{pl}}^2 \sim g_s^{-2} L^6 l_s^{-8}, \quad f_a^2 \sim g_s^{-2} L^6 l_s^{-4} (L^2)^{-2} = g_s^{-2} L^2 l_s^{-4}, \quad S \sim l_s^{-2} L^2 \quad (2.1.23)$$

より、

$$f_a = m_{\text{pl}}/S \quad (2.1.24)$$

が得られるので、

$$m_a \approx \Lambda^2/f_a \sim (M^2/m_{\text{pl}}) S e^{-S/2} \quad (2.1.25)$$

QCD アクシオンの全ポテンシャルは、QCD の寄与と弦理論的寄与の和となる：

$$V = V_{\text{QCD}} + \Lambda^4 \cos\left(\frac{a}{f_a} + \psi\right); \quad V_{\text{QCD}} = \frac{a^2}{8f_a^2} r^2 F_\pi^2 m_\pi^2 \frac{m_u m_d}{(m_u + m_d)^2}. \quad (2.1.26)$$

ここで、弦理論の寄与が QCD の寄与より小さいことを要請すると、次の制限が得られる。

$$a \approx \frac{M^4 e^{-S}}{m_\pi^2 F_\pi^2} < 10^{-10} \Rightarrow S \approx 200 \Rightarrow f_a \approx 10^{16} \text{GeV}, \quad m_a \lesssim 10^{-15} \text{eV} \quad (2.1.27)$$

この式より、超弦理論アクシオンの質量は、 $\log m$  に関して一様に分布していることが期待される。

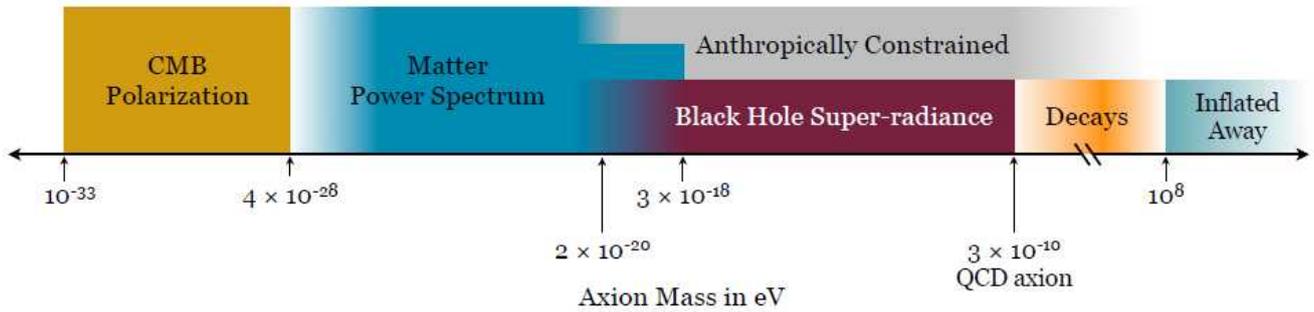


図 2.1: Axiverse

## §2.2

### Possible cosmophysical phenomena

#### 2.2.1 特徴的な質量スケール

Compton wavelength = Horizon size ( $m \approx H$ )

Present  $t = t_0$ :  $m_0 = 1.5 \times 10^{-33} \text{eV}$   $c/H_0 = 4.3 \text{ Gpc}$

CMB last scattering  $t = t_{\text{ls}}$ :  $m_{\text{ls}} = 2 \times 10^{-29} \text{eV}$   $c/H_0 = 300 \text{kpc}$

Equidensity time  $t = t_{\text{eq}}$ :  $m_{\text{eq}} = 3 \times 10^{-28} \text{eV}$   $c/H_0 = 20 \text{kpc}$

Compton wavelength = BH size ( $1/m = M_{\text{pl}}^2/M$ )

Supermassive BH  $M = 10^{10} M_{\odot}$ :  $m_{\text{bh,max}} = 1.3 \times 10^{-20} \text{eV}$   $1/m = 10^{-3} \text{ pc}$

Solar mass BH  $M = 1 M_{\odot}$ :  $m_{\text{bh,min}} = 1.3 \times 10^{-10} \text{eV}$   $1/m = 3 \text{ km}$

QCD axion  $m \approx \Lambda_{\text{QCD}}^2/f_a$

- $f_a = 10^{16} \text{GeV}$ :  $m \sim 10^{-9} \text{eV}$

- $f_a = 10^{12} \text{GeV}$ :  $m \sim 10^{-5} \text{eV}$

#### 2.2.2 微小質量アクシオンの引き起こす多様な現象

- 存在量が重要となる現象
  - ボーズ型ダークマター
  - 宇宙ゆらぎスペクトルの変形

- Quintessence 型ダークエネルギー
- 重いモジュライ起源の dark radiation
- 相互作用が重要となる現象
  - 星の冷却
  - 高エネルギーガンマ線の宇宙背景放射透過
  - 原始重力波における CP の破れ
  - Gyro インフレーション
- 質量が重量となる現象
  - CMB B モード生成
  - ブラックホール増幅反射不安定と Bose nova, および重力波放射
- $f_a$  が重要となる現象
  - アクシオン等曲率ゆらぎ

## 3

## Astrophysics

## §3.1

## Axion emission processes

## 3.1.1 Overview

- Primakov process  $\mathcal{L}_{a\gamma\gamma}$ :  $aEB$  + fluctuating plasma  $E/B$ .
- Axion Bremsstrahlung  $\mathcal{L}_{aee}$ :  $aee+eZe$  散乱
- Axion nuclon emission  $\mathcal{L}_{aNN}$ :  $aqg+NN$  散乱

## 3.1.2 Primakoff process

## References

- Primakoff H: "Photon-production of neutral mesons in nuclear electric fields and the mean life of the neutral meson", PR81(1951)899.
- Dicus DA, Kolb EW, Teplitz EW, Wagoner RV: "Astrophysical bounds on the masses of axions and Higgs particles", PRD18 (1978) 1829.

荷電粒子との衝突による変換断面積

$$\frac{d\sigma_{\gamma\rightarrow a}}{d\Omega} = \frac{g_{a\gamma}^2 Z^2 \alpha}{8\pi} \frac{|\mathbf{k}_\gamma \times \mathbf{k}_a|^2}{q^4}, \quad (3.1.1)$$

ここで,

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_\gamma - \mathbf{k}_a. \quad (3.1.2)$$

ただし,

$$\omega \equiv k_\gamma = E_a \equiv (k_a^2 + m_a^2)^{1/2} \quad (3.1.3)$$

より,

$$q \geq q_{\min} = \omega - \sqrt{\omega^2 - m_a^2} = \frac{m_a^2}{\omega + \sqrt{\omega^2 - m_a^2}}. \quad (3.1.4)$$

これは IR cut-off を与える.

$\gamma \rightarrow a$  変換率

$$\Gamma_{\gamma \rightarrow a} = \frac{g_{a\gamma}^2 T \kappa_s^2}{32\pi} \left[ \left( 1 + \frac{\kappa_s^2}{4E^2} \right) \ln \left( 1 + \frac{4E^2}{\kappa_s^2} \right) - 1 \right] \quad (3.1.5)$$

( $\hbar = c = k_B = 1$ ). ここで, スクリーニングスケール  $k_s$  は, Debye-Hückel 近似のもとで, 次式で与えられる:

$$k_s^2 = \frac{4\pi\alpha}{T} \left( n_e + \sum_{\text{nuclei}} Z_j^2 n_j \right) \quad (3.1.6)$$

( $n_e$  は電子数密度,  $n_j$  は電荷  $Z_j$  のイオン数密度.) 具体的な値は,

- 太陽:  $(k_s/T)^2 \approx 12$  (全体で一定)
- low mass He burning stars:  $(k_s/T)^2 \approx 2.5$  (コア)

単位体積あたりのエネルギー放出率

$$Q = \int \frac{d^3\mathbf{k}_\gamma}{(2\pi)^3} \frac{\omega \Gamma_{\gamma \rightarrow a}}{e^{\omega/T} - 1} = \frac{g_{a\gamma}^2 T^7}{4\pi} F(\kappa^2), \quad \kappa = \frac{k_s}{2T}. \quad (3.1.7)$$

ここで,

$$\begin{aligned} F(\kappa^2) &= \frac{\kappa^2}{2\pi^2} \int_0^\infty dx \left[ (x^2 + \kappa^2) \ln \left( 1 + \frac{x^2}{\kappa^2} \right) - x^2 \right] \frac{x}{e^x - 1} \\ &= \begin{cases} 0.98 & \kappa^2 = 2.5 \\ 1.84 & \kappa^2 = 12 \end{cases}. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

[Raffelt GG: "Plasmon decay into low mass bosons in stars", PRD37 (1988) 1356.]

全アクシオン光度

$$L_a = \int_0^R dr 4\pi r^2 \int_{\omega_{\text{pl}}}^\infty dE \frac{4\pi k^2}{(2\pi)^3} \frac{dk}{dE} 2E f_B \Gamma_{\gamma \rightarrow a} \quad (3.1.9)$$

---

## §3.2

---

# Solar axion

---

### 3.2.1 基本公式

地球での全アクシオン数フラックス

$$\Phi_a = \frac{R_\odot^3}{4\pi D_\odot^2} \int_0^1 dr 4\pi r^2 \int_{\omega_{pl}}^\infty dE \frac{4\pi k^2}{(2\pi)^3} \frac{dk}{dE} 2f_B \Gamma_{\gamma \rightarrow a} \quad (3.2.1)$$

地球でのエネルギースペクトル

$$\frac{d\Phi_a}{dE} = (6.0 \times 10^{10} \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{keV}^{-1}) g_{10}^2 E^{2.481} e^{-E/1.205}. \quad (3.2.2)$$

ここで、 $E$  は keV 単位での数値、 $g_{10} = g_{a\gamma\gamma} \times 10^{10} \text{GeV}$ .

評価

- Axion flux:  $\Phi_a = 3.75 \times 10^{11} g_{10}^2 \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ .
- Axion luminosity:  $L_a = 1.85 \times 10^{-3} g_{10}^2 L_\odot$ .
- Average energy:  $\langle E \rangle = 4.2 \text{keV}$ ,  $\langle E^2 \rangle = 22.7 \text{keV}^2$ .
- Peak energy:  $3.0 \text{keV}$ .

### 3.2.2 制限

**Helioseismology** アクシオン放出による太陽構造変化が太陽振動に与える影響.

$$L_a \lesssim 0.20 L_\odot \Rightarrow g_{a\gamma\gamma} \lesssim 1 \times 10^{-9} \text{GeV}^{-1}. \quad (3.2.3)$$

[Schlatt H, Weiss A, Raffelt G: "Helioseismological constraint on solar axion emission", *Astropart. Phys.*10(1999)353.[hep-ph/9807476]]

**Solar  $\nu$  flux** 太陽の構造を維持するため、アクシオン放出があると、太陽中心での全エネルギー生成率、したがって、太陽中心温度は上昇する。これは、太陽からのニュートリノ放出率を増大させる。最新の太陽モデルでの  $^8\text{B}$  ニュートリノフラックスについての予言は

$$F_{\nu, ^8\text{B}} = (4.5 - 4.6) \times (1 \pm 0.16) \times 10^6 \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}. \quad (3.2.4)$$

[Bahcall JN, Sereneli AM, Basu S: "New solar opacities, abundances, helioseismology, and neutrino fluxes", ApJ621(2005)L85.[astro-ph/0412440]].

観測値は

$$F_{\nu, s_B} = 4.94 \times (1 \pm 0.088) \times 10^6 \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}. \quad (3.2.5)$$

これより,

$$L_a \lesssim 0.04 L_\odot \Rightarrow g_{a\gamma\gamma} \lesssim 5 \times 10^{-10} \text{GeV}^{-1}. \quad (3.2.6)$$

[Ahmad QR et al (SNO Coll.): PRL89 (2002) 011301.[nucl-ex/0204008]; PRC72 (2005)055502.[nucl-ex/0502021]].

### Helioscope experiment

- CAST

- $g_{a\gamma\gamma} < 1.16 \times 10^{-10} \text{GeV}^{-1}$  (95% CL) for  $m_a \lesssim 0.02 \text{eV}$ . [Zioutas K et al (CAST coll.): PRL94(2005)12301.[hep-ex/0411033]].
- $g_{a\gamma\gamma} < 8.8 \times 10^{-11} \text{GeV}^{-1}$  (95% CL) for  $m_a \lesssim 0.02 \text{eV}$ . [CAST Coll: JCAP 04:010 (2007)]
- $g_{a\gamma\gamma} \lesssim 2.3 \times 10^{-10} \text{GeV}^{-1}$  (95% CL) for  $0.39 \text{eV} \lesssim m_a \lesssim 0.64 \text{eV}$ . [Aune S et al (CAST coll.): PRL107(2011)261302.[arXiv:1106.3919[hep-ex]]].

---

## §3.3

---

### 球状星団星からの放出

---

#### 3.3.1 水平分枝星

HB星は、ヘリウムコア燃焼段階の軽い星に対応。

- コア質量: 約  $0.5 M_\odot$
- エネルギー生成率  $\epsilon \sim 80 \text{ergg}^{-1} \text{s}^{-1}$
- コア平均密度:  $\rho \sim 10^4 \text{gcm}^{-3}$
- コア平均温度:  $T \sim 10^8 \text{K}$ .

これより, コアからのアクシオンによるエネルギー放出率は

$$\epsilon_a \sim 30 g_{10}^2 \text{ergg}^{-1} \text{s}^{-1}. \quad (3.3.1)$$

これにより HB ステージの寿命は

$$\frac{80}{80 + 30g_{10}^2} \quad (3.3.2)$$

倍に縮む.

15 個の球状星団の観測より [Raffelt G1996B],

$$g_{a\gamma\gamma} < 10^{-10} \text{GeV}^{-1} \quad \text{for } m_a \lesssim 30 \text{keV}. \quad (3.3.3)$$

### 3.3.2 赤色巨星分枝星

RGB 星は, 水素殻燃焼段階にある星で, 縮退したヘリウムコアをもつ.

- コア平均密度:  $\rho \sim 10^6 \text{gcm}^{-3}$
- コア平均温度:  $T \sim 10^8 \text{K}$ .

アクシオンへの変換が有意に起きると,  $\rho, T$  および星の半径は減少し, 核反応率が低下する. これにより, He コア燃焼への移行が遅れる.

観測と理論の比較より, 光子以外へのエネルギー放出率  $\Delta\epsilon$  に対して,

$$\Delta\epsilon < 10 \text{ergg}^{-1} \text{s}^{-1} \quad \text{for } T = 10^8 \text{K}, \langle \rho \rangle = 2 \times 10^5 \text{gcm}^{-3}. \quad (3.3.4)$$

また, ニュートリノの寄与は

$$\epsilon_\nu \approx 4 \text{ergg}^{-1} \text{s}^{-1} \quad (3.3.5)$$

一方, アクシオン制動放射

$$e + Ze \rightarrow Ze + e + a \quad (3.3.6)$$

によるエネルギー放出率は

$$\epsilon_{a,\text{brems}} \approx 2 \times 10^{27} \alpha_{aee} \text{ergg}^{-1} \text{s}^{-1} \quad (3.3.7)$$

よって,

$$\alpha_{aee} < 0.5 \times 10^{-26} \Rightarrow g_{aee} < 3 \times 10^{-13} \text{GeV}^{-1}. \quad (3.3.8)$$

DFSZ 模型では

$$f_a / \cos^2 \beta > 0.8 \times 10^9 \text{GeV}, \quad (3.3.9a)$$

$$m_a \cos^2 \beta < 9 \text{meV}, \quad (3.3.9b)$$

$$g_{a\gamma\gamma} \cos^2 \beta < 1.2 \times 10^{-12} \text{GeV}^{-1}. \quad (3.3.9c)$$

( $\tan \beta = v_1/v_2$ ).

---

## §3.4

---

# WD cooling

---

### 3.4.1 WD 光度関数

WD の光度関数の観測結果は、標準的な理論の予言と一致している。これより、WD cooling へのアクシオンの寄与が無視できる条件

$$\alpha_{aee} \lesssim 1 \times 10^{-26} \quad (3.4.1)$$

が得られる [Raffelt1996B].

### 3.4.2 ZZ Ceti stars

ZZ Ceti star は脈動不安定性をもつ WD で、その周期変化率  $\dot{P}/P$  は冷却率に敏感である。G117-B15A の解析より、

$$\alpha_{aee} < 1.3 \times 10^{-27} \Leftrightarrow g_{aee} < 1.3 \times 10^{-13}. \quad (3.4.2)$$

DFSZ 模型では、これより

$$m_a \cos^2 \beta < 5 \text{meV}. \quad (3.4.3)$$

[Isern J, Garcia-Berro E: "White dwarf stars as particle physics laboratories", NPB suppl.114(2003)107.]

---

## §3.5

---

# SN1987A

---

### 3.5.1 高密度核物質からのアクシオン放出率

アクシオンと核子の相互作用は核スピンの依存し、 $N + N \rightarrow N + N + a$  過程は、スピンを変化させる  $NN$  散乱でのみ起きる。このため、核スピンの時間相関情報が必要となる。

核子スピン時間相関構造関数を

$$S_\sigma(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4}{3n_B} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \langle \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(0, -\mathbf{k}) \rangle \quad (3.5.1)$$

とおくと、アクシオンの吸収率と体積エネルギー放出率は次式で与えられる：

$$\Gamma_a = \left(\frac{C_N}{2f_a}\right)^2 \frac{n_B}{2} \omega S_\sigma(\omega, k), \quad (3.5.2a)$$

$$Q_a = \left(\frac{C_N}{2f_a}\right)^2 \frac{n_B}{4\pi^2} \int_0^\infty d\omega \omega^4 S_\sigma(\omega, k). \quad (3.5.2b)$$

ここで、 $k = |\mathbf{k}| \approx \omega$  はアクシオンの運動量.

$S_\sigma$  が Lorentz 形で近似できるとすると、

$$S_\sigma(\omega) \approx \frac{\Gamma_\sigma}{\omega^2 + \Gamma_\sigma^2/4} s(\omega/T) \times \begin{cases} 1 & \text{for } \omega \geq 0, \\ e^{\omega/T} & \text{for } \omega < 0 \end{cases} \quad (3.5.3)$$

( $s(\omega) = s(-\omega)$ ,  $s(0) = 1$ ,  $\epsilon_a = Q_a/\rho$  は

$$\epsilon_a = \left(\frac{C_N}{2f_a}\right)^2 \frac{T^4}{\pi^2 m_N} F = 3.0 \times 10^{17} C_N^2 \left(\frac{10^{10} \text{GeV}}{f_a}\right)^2 \left(\frac{T}{30 \text{MeV}}\right)^4 F \quad (3.5.4)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} F &= \int_0^\infty dx \frac{x^4 e^{-x}}{4} \frac{\Gamma_\sigma/T}{x^2 + (\Gamma_\sigma/2T)^2} s(x) \\ &\approx \frac{\Gamma_\sigma}{2T} \quad \text{for } \Gamma_\sigma/T \ll 1. \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

一方、 $\Gamma_\sigma$  は次のように評価される：

$$\Gamma_\sigma \approx \frac{1}{4} \Gamma_\sigma^{\text{OPE}} = \pi^{1/2} \alpha_\pi^2 \frac{n_B T^{1/2}}{m_N^5/2} = 450 \text{MeV} \left(\frac{\rho}{3 \times 10^{14} \text{gcm}^{-3}}\right) \left(\frac{T}{30 \text{MeV}}\right)^{1/2} \quad (3.5.6)$$

ここで、 $\alpha_\pi = (2f m_N/m_\pi)^2/(4\pi) \approx 15$ . これより

$$1 \lesssim \Gamma_\sigma/T \lesssim 10 \quad (3.5.7)$$

とすると、KSVZ 模型に対して、 $T = 30 \text{keV}$ ,  $F = 1$  として

$$\epsilon_a = 1.4 \times 10^{36} \text{ergg}^{-1} \text{s}^{-1}. \quad (3.5.8)$$

### 3.5.2 $\nu$ バースト時間

アクシオンの相互作用が十分弱い場合 ( $g_{aNN} < 10^{-9} \text{GeV}^{-1}$ ), 超新星爆発時でのアクシオン冷却はコアの温度低下を速め, その結果, ニュートリノバーストが観測される時間が減少する. モデル計算に基づく値と観測とに比較により,  $\rho = 3 \times 10^{14} \text{gcm}^{-3}$ ,  $T = 30 \text{MeV}$  に対し,

$$\epsilon_a \lesssim 1 \times 10^{19} \text{ergg}^{-1} \text{s}^{-1} \quad (3.5.9)$$

前節の計算より, KSVZ 模型に対して次の制限を得る：

$$f_a \gtrsim 4 \times 10^8 \text{GeV}, \quad m_a \lesssim 16 \text{meV}. \quad (3.5.10)$$

---

## §3.6

---

### 磁場中でのアクシオン-光子変換

---

#### 3.6.1 基礎方程式

- axion-photon coupling

$$\mathcal{L}_{\phi\gamma} = -g_{\phi\gamma}\phi\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}. \quad (3.6.1)$$

- Maxwell 方程式

$$\partial_t\mathbf{D} = c\nabla\times\mathbf{H} - 4\pi\mathbf{j}, \quad \nabla\cdot\mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (3.6.2a)$$

$$\partial_t\mathbf{B} = -c\nabla\times\mathbf{E}, \quad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0. \quad (3.6.2b)$$

- 運動方程式

$$\partial_t\rho_e + \nabla\cdot\mathbf{j}_e = 0, \quad (3.6.3a)$$

$$\partial_t\mathbf{j}_e = \frac{q}{m}\left(\rho_e\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{j}_e\times\mathbf{B}\right), \quad (3.6.3b)$$

$$\ddot{\phi} - \Delta\phi = g_{\phi\gamma}\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}. \quad (3.6.3c)$$

ここで,

$$\rho_e = q\delta n_e, \quad \rho = \rho_e + \frac{g_{\phi\gamma}}{4\pi}\nabla\phi\cdot\mathbf{B}, \quad (3.6.4a)$$

$$\mathbf{j}_e = qn_e\mathbf{v}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_e - \frac{g_{\phi\gamma}}{4\pi}\left(\nabla\phi\times\mathbf{E} + \dot{\phi}\mathbf{B}\right). \quad (3.6.4b)$$

#### 摂動方程式

- 背景磁場:  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}$ .

- 誘電率と透磁率:  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H} = \mu^{-1}\mathbf{B}$ .

- Fourier モード

$$\rho_e, \mathbf{j}_e, \mathbf{E}, \mathbf{B}, \phi \propto \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}). \quad (3.6.5)$$

- 線形摂動方程式

$$\epsilon\partial_t^2\mathbf{E} = -\nabla\times(\mu^{-1}\nabla\times\mathbf{E}) - 4\pi\partial_t\mathbf{j}, \quad (3.6.6a)$$

$$\partial_t\mathbf{j}_e = \frac{q}{m}\left(\rho_e\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{j}_e\times\mathbf{B}_0\right). \quad (3.6.6b)$$

- small mass 近似 :  $\mathbf{E}, \mathbf{j}_e \propto \exp(-i\omega t + ikz)$  として,  $\mathbf{j}_e$  の式を解いて,

$$4\pi(\omega^2 - \omega_g^2)\mathbf{j}_e = \omega_p^2 \left\{ i\omega\mathbf{E} - \omega_g\mathbf{E} \times \mathbf{b} + i\frac{\omega_g^2}{\omega}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b} \right\}. \quad (3.6.7)$$

ここで,  $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{b}$ ,

$$\omega_g = \frac{qB_0}{cm}, \quad (3.6.8a)$$

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n_e q^2}{m}. \quad (3.6.8b)$$

また,

$$\partial_t \mathbf{j}_\phi = -\frac{g\phi\gamma}{4\pi}\omega\phi(\mathbf{k} \times \mathbf{E} - \omega\mathbf{B}) \simeq \frac{g\phi\gamma}{4\pi}\omega^2 B_0\phi. \quad (3.6.9)$$

よって, 摂動方程式は

$$\begin{aligned} \epsilon\partial_t^2 \mathbf{E} &= \mathbf{k} \times (\mu^{-1}\mathbf{k} \times \mathbf{E}) - \frac{\omega_p^2\omega^2}{\omega^2 - \omega_g^2}\mathbf{E} \\ &+ \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_g^2} \{ i\omega\omega_g\mathbf{E} \times \mathbf{b} - \omega_g^2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b} \} - g\omega^2\phi\mathbf{B}_0, \end{aligned} \quad (3.6.10)$$

$$\partial_t^2 \phi = -(k^2 + m_\phi^2)\phi + g\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}_0. \quad (3.6.11)$$

### 3.6.2 伝播方程式

波の伝搬方向を  $z$  として, 伝搬速度が光速に近く,  $|\omega/k - c|/c \ll 1$  のとき,

$$(\partial_t^2 - \partial_z^2)X(t, z) = (\partial_t - \partial_z)(\partial_t + \partial_z)X \simeq -2ik(\partial_t + \partial_z)X = -2ik\frac{dX}{dz} \quad (3.6.12)$$

となるので, 2階の発展方程式は, 近似的に伝搬に沿った1階の方程式で近似される:

$$\left( -i\frac{d}{dz} - \mathcal{M} \right) \begin{pmatrix} A_\perp \\ A_\parallel \\ \phi \end{pmatrix} = 0; \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} \Delta_\perp & \Delta_R & 0 \\ \Delta_R & \Delta_\parallel & \Delta_B \\ 0 & \Delta_B & \Delta_a \end{pmatrix} \quad (3.6.13)$$

ここで,

$$\Delta_\perp = \Delta_{\text{pl}} + \Delta_{\text{CM}}^\perp, \quad \Delta_\parallel = \Delta_{\text{pl}} + \Delta_{\text{CM}}^\parallel, \quad \Delta_{\text{pl}} = \omega_{\text{pl}}^2/(2E) \quad (3.6.14a)$$

$$\Delta_B = g_{a\gamma}B_t/2, \quad \Delta_a \simeq m_a^2/(2E), \quad (3.6.14b)$$

$$\omega_{\text{pl}} = \sqrt{\frac{4\pi\alpha n_e}{m_e}}. \quad (3.6.14c)$$

$\Delta_R$  は Faraday 回転,  $\Delta_{\text{CM}}$  は Cotton-Mouton 効果を表す.

2成分近似 Farady 回転を無視したとき,

$$\begin{pmatrix} \Delta_{//} & \Delta_B \\ \Delta_B & \Delta_a \end{pmatrix} = R(\theta)[\lambda_1, \lambda_2]R(-\theta) \quad (3.6.15)$$

$\Leftrightarrow$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \Delta_{//} + \Delta_a, \quad (3.6.16)$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \cos(2\theta) = \Delta_{//} - \Delta_a, \quad (3.6.17)$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \sin(2\theta) = 2\Delta_B. \quad (3.6.18)$$

と対角化すると,

$$\begin{pmatrix} A_{//}(z) \\ \phi(z) \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} e^{i\lambda_1 z} & 0 \\ 0 & e^{i\lambda_2 z} \end{pmatrix} R(-\theta) \begin{pmatrix} A_{//}(0) \\ \phi(0) \end{pmatrix}. \quad (3.6.19)$$

非共鳴遷移

$$P_{\gamma \rightarrow a} = P_0 := \sin^2(2\theta) \sin^2 \frac{s \Delta_{\text{osc}}}{2} = \frac{4\Delta_B^2}{\Delta_{\text{osc}}^2} \sin^2 \frac{s \Delta_{\text{osc}}}{2} \quad (3.6.20)$$

ここで,

$$\Delta_{\text{osc}} = (\Delta_{\text{CM}} + \Delta_{\text{pl}} - \Delta_a)^2 + 4\Delta_B^2. \quad (3.6.21)$$

CM 項が無視できる場合には,

$$P_0 = \frac{1}{1 + (E_*/E)^2} \sin^2 \left( g_{a\gamma} B_t \left[ 1 + (E_*/E)^2 \right]^{1/2} \frac{s}{2} \right), \quad (3.6.22)$$

$$E_* := \frac{|m_a^2 - \omega_{\text{pl}}^2|}{2g_{a\gamma} B_t} \simeq 2.6 \frac{|m_a^2 - \omega_{\text{pl}}^2|}{(10^{-10} \text{eV})^2} \left( \frac{10^{-9} \text{G}}{B_t} \right) \left( \frac{g_{a\gamma}^{-1}}{10^{10} \text{GeV}} \right) \text{GeV} \quad (3.6.23)$$

共鳴遷移

$$2\pi|\Delta'_{\text{pl}} + \Delta'_{\text{CM}}| \lesssim \Delta_B^2 \Rightarrow P_{\gamma \rightarrow a} = \mathcal{O}(1) \quad (3.6.24)$$

---

## §3.7

---

### 高エネルギーガンマ線への影響

---

#### 3.7.1 観測可能性

**Fermi 衛星** エネルギーが  $E = 100 \text{GeV} \sim 1 \text{TeV}$ , 質量が  $10^{-6} \sim 10^{-8} \text{eV}$ ,  $g_{a\gamma} \sim 10^{-10} \text{GeV}^{-1}$  のとき, 次の条件が満たされるなら,  $\gamma$  線スペクトルが 10% 程度変形を受ける:

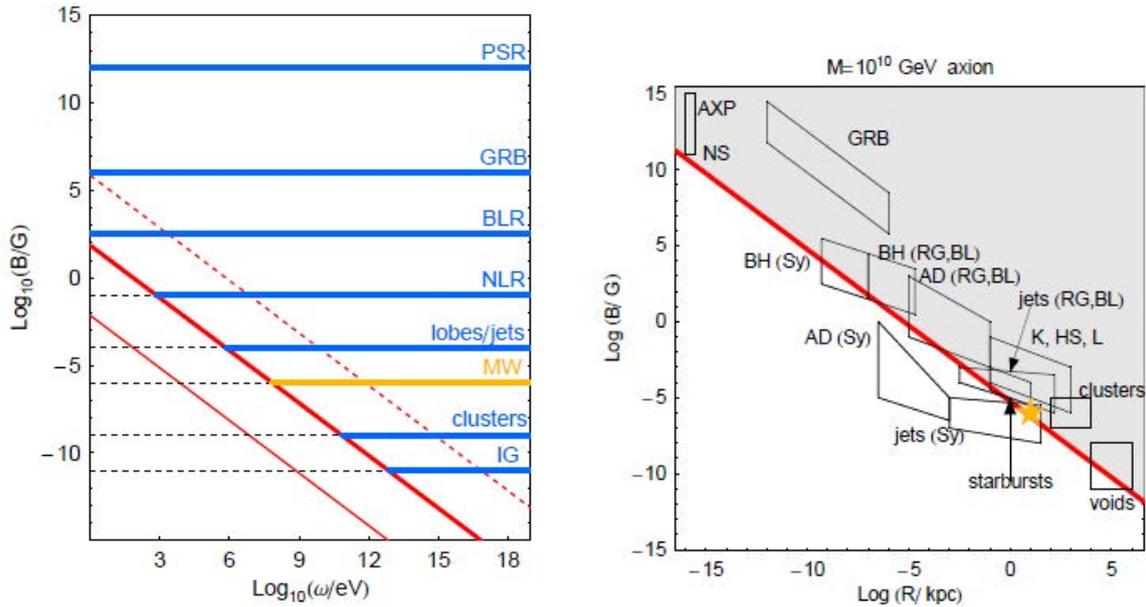


図 3.1: 強いアクシオン・光子混合が起きるための条件

- 銀河間磁場:  $L \sim 1\text{Mpc}$ ,  $B = (1 - 5) \times 10^{-9}G$ ,  $D = 200 \sim 500\text{Mpc}$
- 銀河団磁場:  $L \sim 10\text{kpc}$ ,  $B = 10^{-6}G$ ,  $n_e \simeq 10^{-3}\text{cm}^{-3}$ ,  $D = 1\text{Mpc}$
- 銀河磁場:  $L \sim 10\text{kpc}$ ,  $B = (2 - 4) \times 10^{-6}G$ ,  $n_e \simeq 10^{-3}\text{cm}^{-3}$ ,  $D = 1\text{Mpc}$ .

[De Angelis A, Mansutti O, Roncadelli M:Phys.Lett. B659 (2008) 847-855  
[arXiv:0707.2695 [astro-ph]]]

強い混合が起きるための条件

- $\omega \gg 70\text{eV} \left(\frac{m_a}{10^{-9}\text{eV}}\right)^2 \left(\frac{B}{1G}\right)^{-1} \left(\frac{M}{10^{10}\text{GeV}}\right)$
- $n_e \ll 10^{20}\text{cm}^{-3} \left(\frac{\omega}{10^{10}\text{eV}}\right) \left(\frac{B}{1G}\right)$
- $L \gtrsim 6 \times 10^{-3}\text{pc} \left(\frac{B}{1G}\right)^{-1} \left(\frac{M}{10^{10}\text{GeV}}\right)$

観測から得られた制限

- VHE  $\gamma$  線 ( $> 100\text{GeV}$ ) での宇宙の透明度. 26 個の高エネルギー天体の不透明波長帯を観測. [Meyer M, Horns D, Raue M: arXiv:1302.1208]

$$g_{a\gamma} \gtrsim 10^{-11}\text{GeV}^{-1} : \quad 10^{-10}\text{eV} < m_a < 10^{-7}\text{eV}. \quad (3.7.1)$$

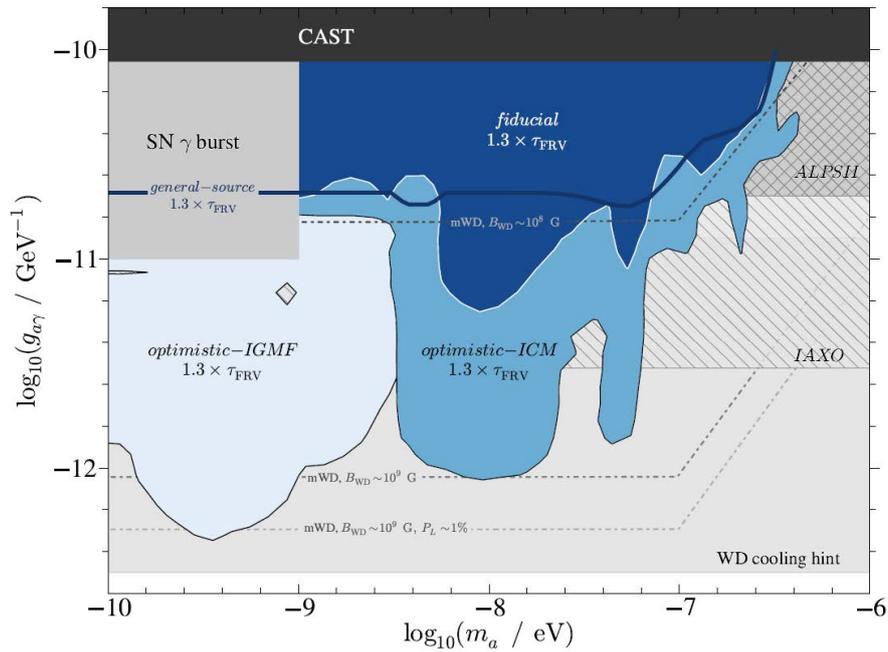


図 3.2: VHE  $\gamma$  線に対する透明度より得られた  $g_{a\gamma}$  への下限 [Meyer M, Horns D, Raue M: arXiv:1302.1208]

- VHE  $\gamma$  線源のスペクトルがもつ乱雑さをアクシオン・光子変換に作用する磁場の乱雑さに起因するとした場合の制限 [Brun P, Wouters D (HESS Collaboration): arXiv: 1307.6068]

$$g_{a\gamma} \lesssim 5 \times 10^{-11} \text{GeV}^{-1} : \quad 10^{-9} \text{eV} < m_a < 10^{-7} \text{eV}. \quad (3.7.2)$$

BL Lac PKS 2155-304

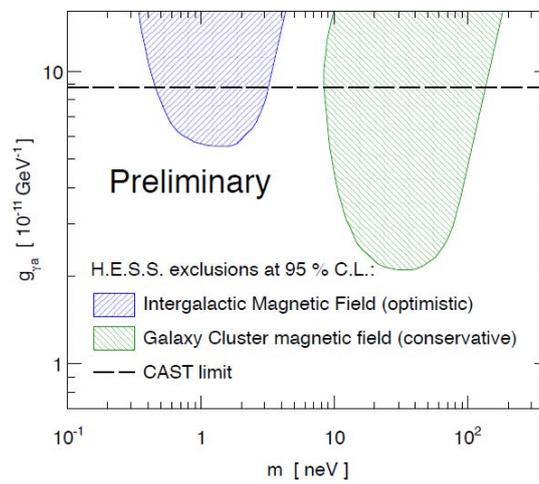


図 3.3: HESS により観測された BL Lac PKS 2155-304 の  $\gamma$  線スペクトルの不規則性より得られた  $g_{a\gamma}$  への制限 [Brun P, Wouters D (HESS Collaboration): arXiv: 1307.6068]

## 4

## Axion Cosmology

## §4.1

## Homogeneous axion field

## 4.1.1 Evolution

発展方程式

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m^2\phi = 0 \quad (4.1.1)$$

エネルギー密度と圧力

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2), \quad P_\phi = \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 - m^2\phi^2). \quad (4.1.2)$$

WKB 近似解 発展方程式は次のように書き換えられる：

$$(a^{3/2}\phi)'' + \left(m^2 - \frac{3}{4}H^2 - \frac{3\ddot{a}}{2a}\right) (a^{3/2}\phi) = 0 \quad (4.1.3)$$

これより,

- $m \ll H$  のとき,

$$\phi = \phi_i + \dot{\phi}_i \int_{t_i} dt \left(\frac{a(t_i)}{a(t)}\right)^3 = \phi_i + O(\dot{\phi}_i/H_i). \quad (4.1.4)$$

よって,  $\rho$  と  $p$  は

$$\rho_\phi \simeq \frac{m^2}{2} \phi_i^2, \quad P \simeq -\rho. \quad (4.1.5)$$

すなわち, スカラ場は DE として振る舞う。

- $m \gg H$  のとき,

$$a^{3/2}\phi \simeq \frac{A}{\sqrt{m}} \cos \left( \int m dt + \text{const} \right) \quad (4.1.6)$$

より,

$$\phi \simeq \phi_i \left( \frac{m_*}{m} \right)^{1/2} \left( \frac{a_*}{a} \right)^{3/2} \cos \left( \int m dt + \text{const} \right) \quad (4.1.7)$$

ここで,  $t = t_*$  は  $m \approx H$  となる時刻. エネルギー密度と圧力は

$$\rho_\phi \simeq \frac{mm_*}{2} \phi_i^2 \left( \frac{a_*}{a} \right)^3, \quad (4.1.8a)$$

$$P_\phi = -\rho_\phi \cos \left( 2 \int m dt + \text{const} \right) \quad (4.1.8b)$$

したがって,  $1/m \ll 1/H$  より長い時間スケールで平均すると,

$$\bar{\rho}_\phi \propto 1/a^3, \quad \bar{P}_\phi \simeq 0 \quad (4.1.9)$$

となり, スカラ場はダストとして振る舞う. すなわち, CDM となる. ただし,  $m$  が時間変化するときには, 長い時間スケールでは「粒子数」が保存される:

$$\frac{a^3 \rho}{m} \simeq \frac{1}{2} m_* a_*^3 \phi_i^2 = \text{const}. \quad (4.1.10)$$

**厳密解**  $a \propto t^\gamma$  の時には, 発展方程式は厳密に解け,  $t \rightarrow 0$  で  $\phi \rightarrow \phi_i$  となる会いは

$$\phi = \phi_i \Gamma \left( \frac{3\gamma + 1}{2} \right) \left( \frac{2}{mt} \right)^{\frac{3\gamma-1}{2}} J_{\frac{3\gamma-1}{2}}(mt). \quad (4.1.11)$$

$mt \gg 1$  では, この解は

$$\phi = \phi_i \left( \frac{a_*}{a} \right)^{3/2} \cos \left( mt - \frac{3}{4} \gamma \pi \right). \quad (4.1.12)$$

ただし,  $t_*$  を

$$mt_* = 2 \left( \Gamma \left( \frac{3\gamma + 1}{2} \right) / \sqrt{\pi} \right)^{2/(3\gamma)} \quad (4.1.13)$$

と取った.  $H/m$  で表すと, この条件は

$$\frac{H_*}{m_*} = \frac{\gamma}{2} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma \left( \frac{3\gamma+1}{2} \right)} \right)^{2/(3\gamma)} = \begin{cases} 0.61 & ; \gamma = 1/2, \\ 2/3 & ; \gamma = 2/3 \end{cases}. \quad (4.1.14)$$

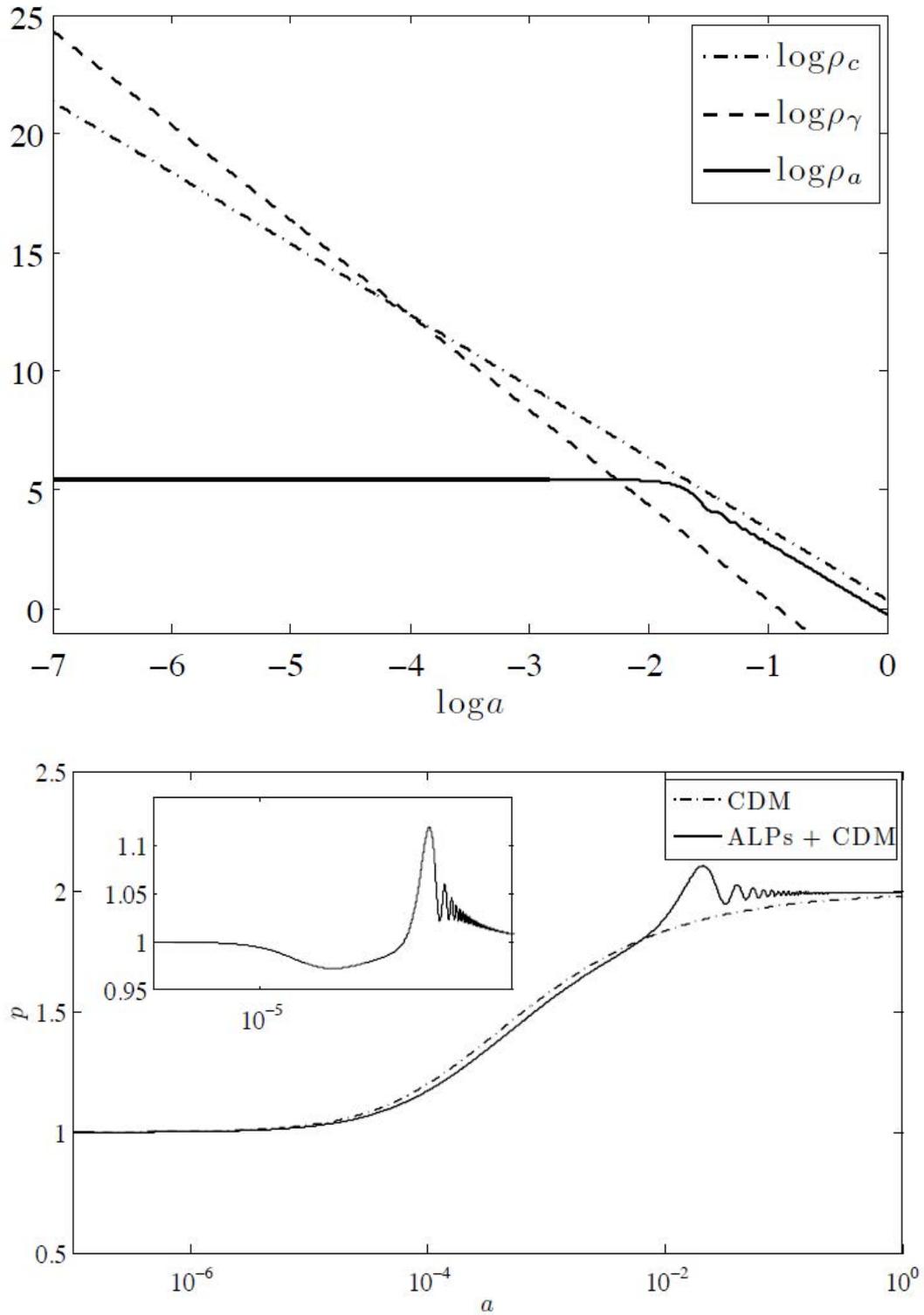


図 4.1: アクシオンのエネルギー密度と膨張指数の時間変化.  $m/H_0 = 10^3, \Omega_c = 0.8, \Omega_\Lambda = 0$  [Marsh DJE, Ferreira PG: PRD82(2010)103528[arXiv:1009.3501]]

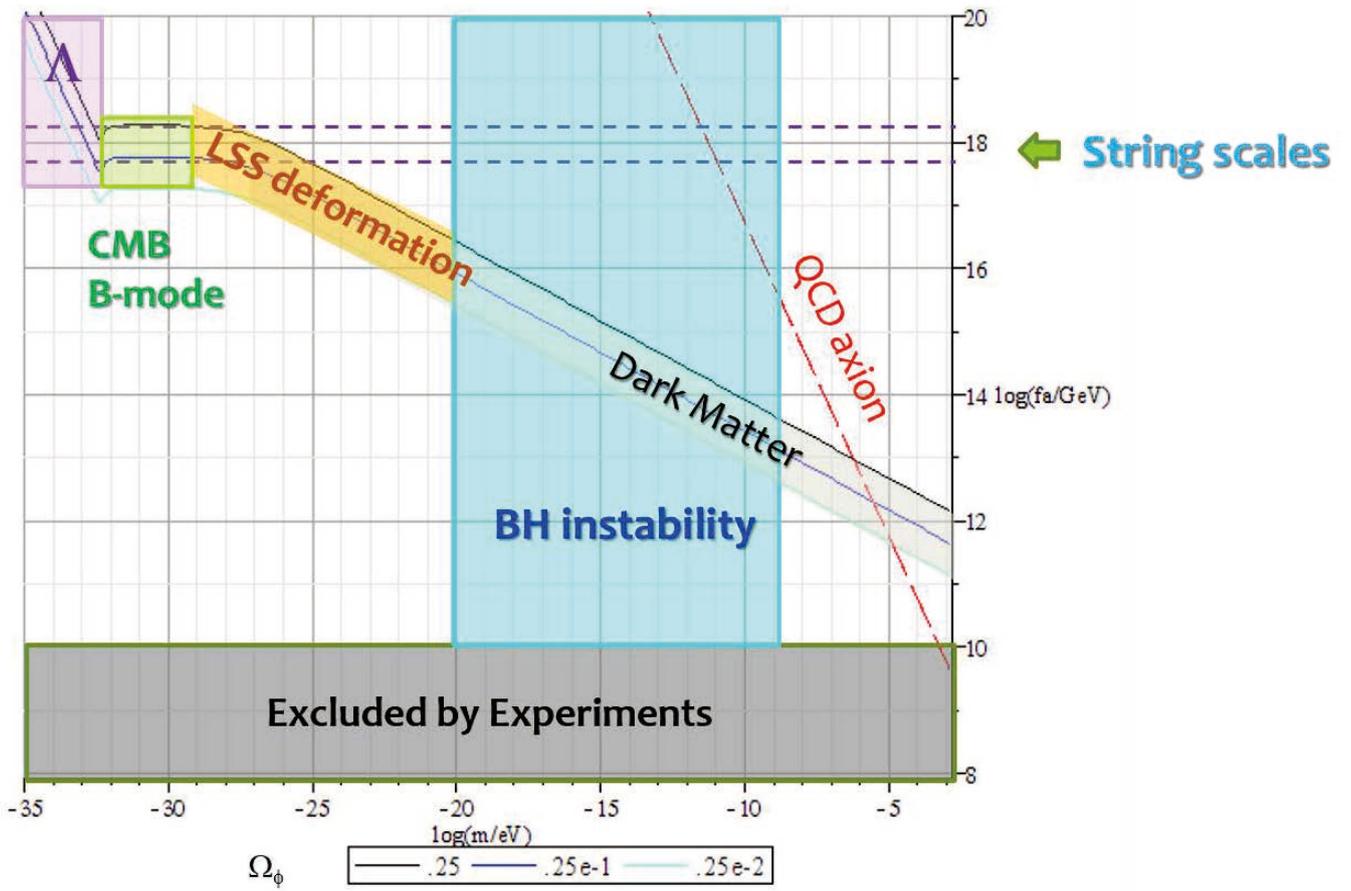


図 4.2: Axion abundance and relevant phenomena

### 4.1.2 Present abundance

DEとなる場合 ( $m \lesssim H_0$ ) : 現在の振幅は初期値のままなので,

$$\rho_\phi = \sum \frac{N}{2} m^2 (\epsilon f_a)^2. \quad (4.1.15)$$

よって, アクシオンは宇宙項に寄与する:

$$\Omega_\phi = \sum \frac{\epsilon^2}{6} \left( \frac{m}{H_0} \right)^2 \left( \frac{f_a}{m_{\text{pl}}} \right)^2 \lesssim \sum \left( \frac{f_a}{m_{\text{pl}}} \right)^2 \quad (4.1.16)$$

DMとなる場合 ( $m \gg H_0$ ): 現在は振動フェーズで, そのエネルギー密度は

$$\rho_\phi = \sum m a_*^3 \times \frac{1}{2} m_* (\epsilon f_a)^2. \quad (4.1.17)$$

よって,

$$\begin{aligned} H_0 < m_* < H_{\text{eq}} : \Omega_\phi &= \sum \frac{3\epsilon^2}{2} \left( \frac{m}{m_*} \right) \left( \frac{a_*^3 H_*^2}{H_0^2} \right) \left( \frac{f_a}{m_{\text{pl}}} \right)^2 \\ &\approx \sum \left( \frac{f_a}{m_{\text{pl}}} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.1.18a)$$

$$\begin{aligned} H_{\text{eq}} < m_* : \Omega_\phi &\approx \sum \frac{3\epsilon^2}{2} \left( \frac{m}{m_*} \right) \Omega_R^{3/4} \left( \frac{m}{3H_0} \right)^{1/2} \left( \frac{f_a}{m_{\text{pl}}} \right)^2 \\ &\approx \sum \left( \frac{m}{m_{\text{eq}}} \right)^{1/2} \left( \frac{f_a}{m_{\text{pl}}} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.1.18b)$$

**QCD axion** 有限温度での axion 質量は, dilute gas 近似で

$$\frac{m_a(T)}{m_a} = 7.7 \cdot 10^{-2 \pm 0.6} \left( \frac{\Lambda}{T} \right)^{3.7 \pm 0.1} \quad (4.1.19)$$

これより,

$$m_a(T) \approx H \quad (4.1.20)$$

となる温度  $T_*$  は

$$T_* = \begin{cases} 1.2 \cdot 10^{\pm 0.15} \text{GeV} \left( \frac{6}{N} \frac{f_a}{10^{12} \text{GeV}} \right)^{-0.175 \pm 0.03} \Lambda_{200}^{0.7} & ; f_a \lesssim 1.6 \times 10^{18 \pm 1.7} \frac{N}{6} \Lambda_{200}^{-2.3} \text{GeV} \\ 1.6 \cdot 10^{-1 \pm 0.03} \text{GeV} \left( \frac{6}{N} \frac{f_a}{10^{18} \text{GeV}} \right)^{-1/2} & ; f_a \gtrsim 1.6 \times 10^{18 \pm 1.7} \frac{N}{6} \Lambda_{200}^{-2.3} \text{GeV} \end{cases} \quad (4.1.21)$$

[Turner MS: prd33(1986) 889]

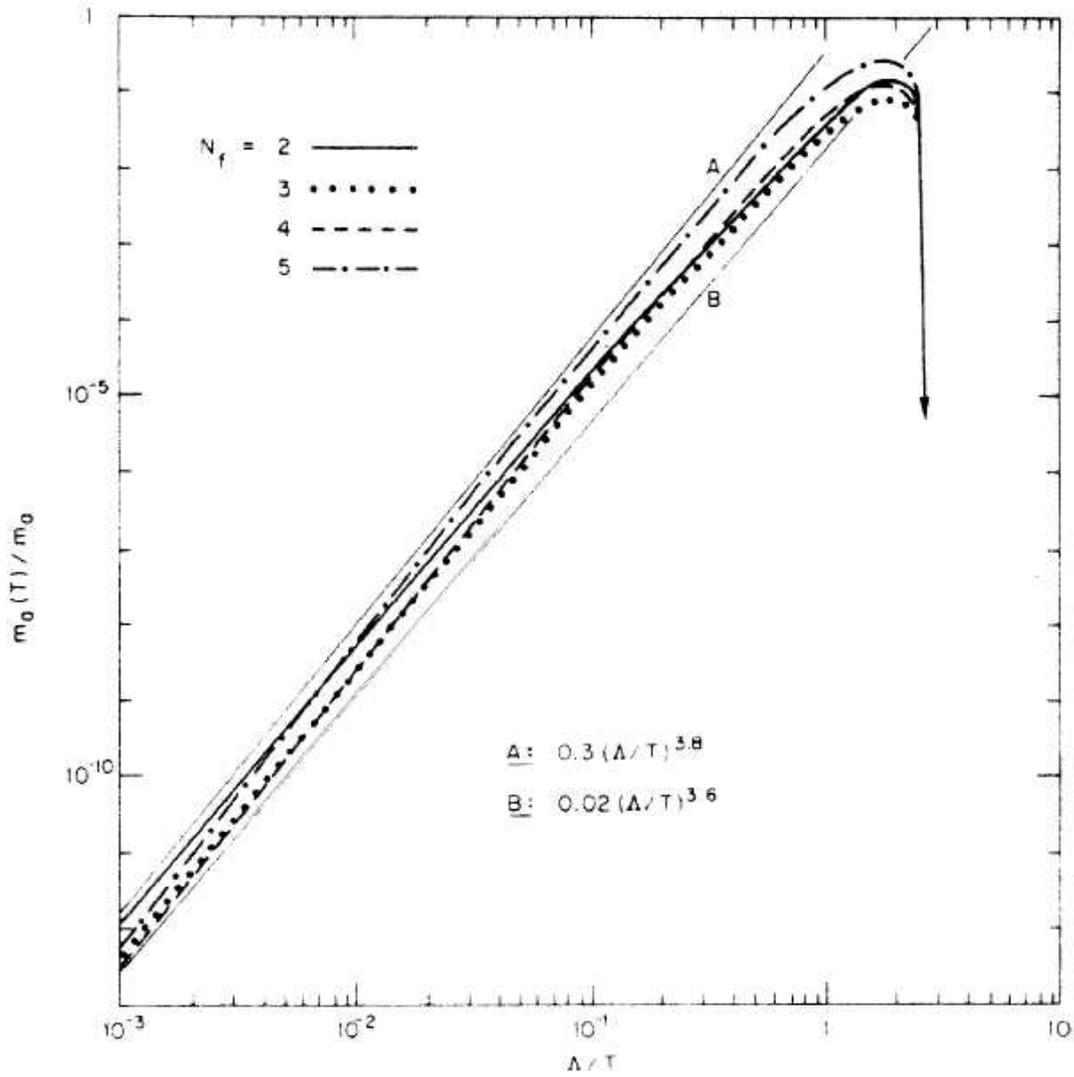


図 4.3: 有限温度でのアクシオン質量

QCD axion は  $m_a(T) < m_a$  の時期に振動を始める．このため，振動を始める時期は  $m_a$  が一定の場合より送れる：

$$a_* \propto H_*^{-1/2} \simeq m_a(T_*)^{-1/2}. \quad (4.1.22)$$

よって，現在の存在量は， $m_a$  が一定の場合と比べて多くなる：

$$\frac{a_*^3 m_a(T_*)}{(a'_*)^3 m_a} = \left( \frac{m_a}{m_a(T_*)} \right)^{3/2} \left( \frac{m_a(T_*)}{m_a} \right) = \left( \frac{m_a}{m_a(T_*)} \right)^{1/2} > 1. \quad (4.1.23)$$

具体的な現在の存在量は，

$$\Omega_a = 0.2 \times 10^{\pm 0.5} \left( \frac{f_a}{10^{12} \text{GeV}} \right)^{1.175} \gamma^{-1} h^{-2} \left( \frac{a_i}{2\pi f_a} \right)^2 \quad (4.1.24)$$

---

## §4.2

---

# CMB B-mode (birefringence)

---

### References

- Kosowsky, A.: Cosmic Microwave Background Polarization, Annals of Physics 246, 49-85 (1996).

### 4.2.1 偏光の記述

- 偏光テンソル

$$\rho_{pq} = e_p^i e_q^j \langle : E_i E_j : \rangle = \rho_{qp}, \quad \tilde{\rho}_{pq} = e_p^i e_q^j \langle : E_i \tilde{E}_j : \rangle = -\tilde{\rho}_{qp} \quad (4.2.1)$$

ここで,  $\tilde{E}_i(t) = E_i(t + \pi/(2\omega))$ .

- Stokes パラメーター

$$I = \rho_p^p, \quad Q = \rho_{11} - \frac{1}{2}I, \quad U = \rho_{12} \quad V = \tilde{\rho}_{12} \quad (4.2.2)$$

これより, 偏光行列を

$$P = \left( \rho_{pq} - \frac{1}{2}I\delta_{pq} \right) = \begin{pmatrix} Q & U \\ U & -Q \end{pmatrix} \quad (4.2.3)$$

により定義すると, 偏光ベクトルの回転に対して,

$$P \mapsto R(\theta)PR(\theta)^{-1} \quad (4.2.4)$$

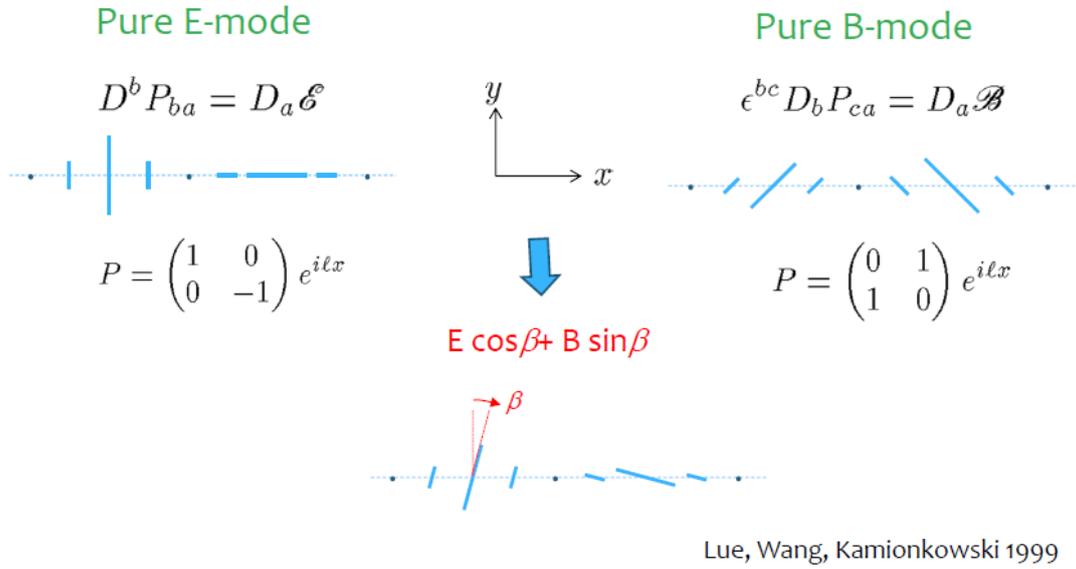
と変換する. したがって,  $P$  は天球上の 2 階対称テンソルと見なすことができる.

### 4.2.2 EモードとBモード

天球上での放射強度のゆらぎ  $\delta I(\Omega)$  は, 調和関数を用いて

$$\delta I(\Omega) = g(\omega/T)\bar{I} \sum_{l,m} \Theta_l^m Y_l^m(\Omega); \quad g(x) = x\partial_x f(x)/f(x) \quad (4.2.5)$$

と展開される. ここで,  $\Theta_l^m$  は温度ゆらぎ  $\delta T/T$  の展開係数に相当する量である.



Lue, Wang, Kamionkowski 1999

図 4.4: Flat sky 近似での E モードと B モード

同様に，偏光テンソルは，

$$\hat{\Delta} \mathcal{P}_l^m = -(l^2 + l - 4) \mathcal{P}_l^m, \quad \text{Tr}(\mathcal{P}_l^m) = 0 \quad (4.2.6)$$

を満たす 2 階対称調和テンソル  $\mathcal{P}_l^m$  を用いて，

$$P(\Omega) = g(\omega/T) \bar{I} \sum_{l,m} (E_l^m \mathcal{P}_{E_l^m} + B_l^m \mathcal{P}_{B_l^m}) \quad (4.2.7)$$

と展開される．ここで， $\mathcal{P}_E$  と  $\mathcal{P}_B$  はそれぞれ

$$\hat{D}_b (\mathcal{P}_{E_l^m})_a^b = -c_l \hat{D}_a Y_l^m, \quad (4.2.8a)$$

$$\hat{D}_b (\mathcal{P}_{B_l^m})_a^b = -c_l \epsilon_{ab} \hat{D}^b Y_l^m \quad (4.2.8b)$$

を満たす parity even および odd な調和テンソルの独立な基底で，対応する偏光テンソル分布の各成分はそれぞれ E モードおよび B モードと呼ばれる．

### 4.2.3 Flat sky 近似

$l$  の十分大きいモードでは天球の曲率を無視できる．このようなモードに対しては，局所的に球面調和関数の代わりに平面波を用いることができる：(赤道の近傍で)

$$\begin{aligned} Y_l^m &\propto P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \sim ((-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \theta}} \frac{\Gamma(l+m+1)}{\Gamma(l+3/2)}) \cos \left[ \left( l + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right] e^{im\phi} \\ &\rightarrow e^{ik \cdot \theta} \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

対応して,

$$\mathcal{P}_{ab} \rightarrow M_{ab} e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\theta}} \quad (4.2.10)$$

とおくと,  $M_{ab}$  はトレースがゼロの対称行列で, Eモードの条件は

$$M_{ab} k^b = -c_l k^a \Rightarrow M_E \propto \begin{pmatrix} (k^1)^2 - (k^2)^2 & 2k^1 k^2 \\ 2k^1 k^2 & -(k^1)^2 + (k^2)^2 \end{pmatrix}. \quad (4.2.11)$$

Bモードの条件は

$$M_{ab} k^b = -c_l \epsilon_{ab} k^b \Rightarrow M_B \propto \begin{pmatrix} -2k^1 k^2 & (k^1)^2 - (k^2)^2 \\ (k^1)^2 - (k^2)^2 & 2k^1 k^2 \end{pmatrix} \quad (4.2.12)$$

特に, 偏光ベクトルを  $\epsilon_{1//\mathbf{k}}$  と取ると,

$$M_E \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow U = 0, \quad (4.2.13a)$$

$$M_B \propto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Q = 0. \quad (4.2.13b)$$

これは, この基底のもとで, 直線偏光の方向が

- E-mode :  $E_1 = 0$  or  $E_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{E} // \mathbf{k}$  or  $\perp \mathbf{k}$ .
- B-mode :  $E_1 = \pm E_2 \Leftrightarrow \mathbf{E}$  と  $\mathbf{k}$  が  $45^\circ$ .

#### 4.2.4 アクシオンによる Bモード生成

**Lagrangian** アクシオン場  $\phi$  が電磁場と CS 結合するとする :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} *d\phi \wedge d\phi - \Lambda_a^2 U(\phi/f_a) - \frac{1}{2} *F \wedge F - \frac{C\alpha}{\pi f_a} \phi F \wedge F \quad (4.2.14)$$

場の方程式

$$d *F + \frac{2C\alpha}{\pi f_a} d\phi \wedge F = 0 \Leftrightarrow \nabla^\nu F_{\nu\mu} - \frac{C\alpha}{\pi f_a} \nabla^\nu \phi \epsilon_{\nu\mu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 0 \quad (4.2.15)$$

特に,  $\phi = \phi(t)$  のとき, ゲージ条件

$$\mathbf{E} = \dot{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}; \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (4.2.16)$$

のもとで, 空間的に平坦な FLRW モデルでの場の方程式は

$$(-\partial_\eta^2 + \Delta) \mathbf{A} + \frac{C\alpha}{\pi f_a} a \dot{\phi} \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (4.2.17)$$

平面波解 波が  $z$  方向に伝搬しているとき,

$$\mathbf{A} = (a_x, a_y, 0)e^{ikz} \Rightarrow \left( \partial_\eta^2 + k^2 + \frac{C\alpha}{\pi} ak\dot{\phi}f_a \right) (a_x + ia_y) = 0 \quad (4.2.18)$$

$k$  が大きいときの WKB 解は

$$A_x + iA_y = \text{const} \cdot \exp\{-ik(\eta - z) - i\beta\} \quad (4.2.19)$$

ここで,

$$\beta = \frac{C\alpha}{2\pi f_a} \int^t \dot{\phi} dt \quad (4.2.20)$$

**Bモード生成** これは,  $\dot{\phi} \neq 0$  のとき, 電磁波の偏光ベクトルが伝搬と共に回転することを示している. CMB の場合, 最終散乱面から現在までの回転角は

$$\Delta\beta = \frac{C\alpha}{2\pi f_a} \int_{t_{\text{ls}}}^{t_0} \dot{\phi} dt = \frac{C\alpha}{2\pi f_a} (\phi(t_{\text{ls}}) - \phi(t_0)) \quad (4.2.21)$$

$\phi$  の振動周期  $2\pi/m$  が, 最終散乱面の厚み  $\delta t_{\text{ls}} \sim 10\text{kpc}$  に比べて大きく, かつ宇宙年齢以下のとき, すなわち

$$10^{-33}\text{eV} < m < 10^{-27}\text{eV} \quad (4.2.22)$$

のとき, この回転は  $E$  モードから  $B$  モードを生成する.

その割合を決める  $\Delta\beta$  の大きさは, axion decay constant  $f_a$  に依存しないことが特徴的である.

$$\Delta\beta \sim \frac{C\alpha}{2\sqrt{3}} \lesssim 10^{-3} \quad (4.2.23)$$

上記の条件を満たすアクシオン場が  $N$  種あると, 一般に  $\Delta\beta$  は  $\sqrt{N}$  倍となる.

観測よりの制限

- Current limit:  $\Delta\beta < 2^\circ = 3.5 \times 10^{-2}$ .
- Planck: accuracy  $< 0.1^\circ$
- CMBPol: accuracy  $< 0.005^\circ$

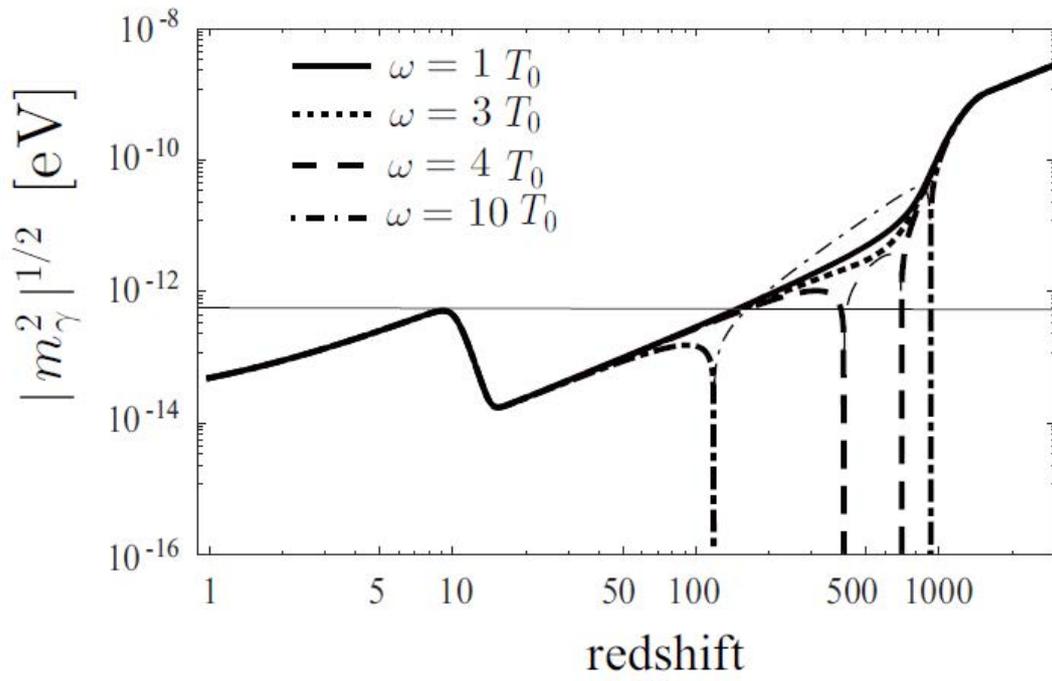


図 4.5:  $m_\gamma$  の時間変化

---

§4.3

**CMB-axion conversion**

---

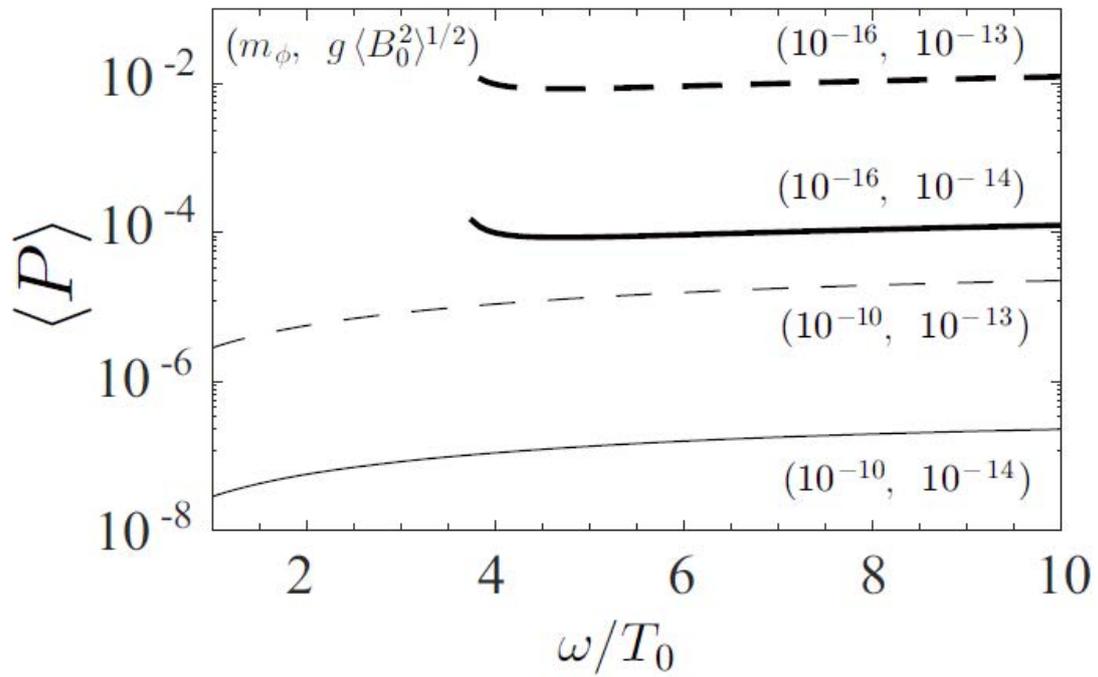


図 4.6:  $P_{\gamma a}$  の  $m_a$  依存性

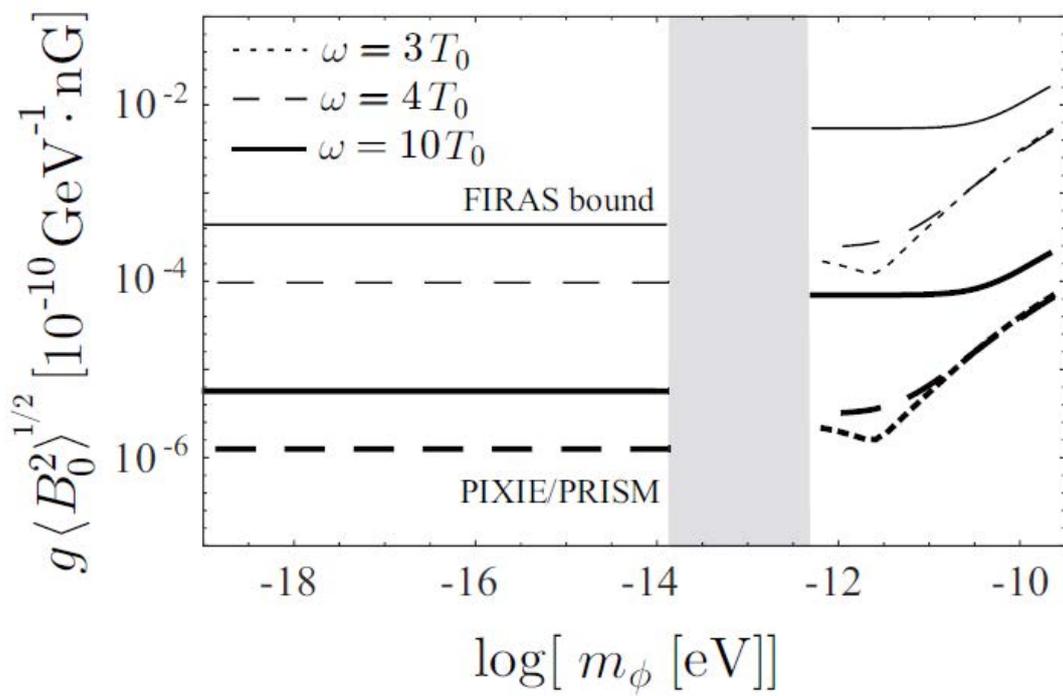


図 4.7:  $gB$  への制限

---

## §4.4

---

# Gyro インフレーションモデル

---

### References

- Peter Adshead, Emil Martinec, Mark Wyman: "Perturbations in Chromo-Natural Inflation", arXiv:1305.2930 [hep-th]
- Emil Martinec, Peter Adshead, Mark Wyman: "Chern-Simons EM-flation", JHEP 1302 (2013) 027 [arXiv:1206.2889 [hep-th]]
- Peter Adshead, Mark Wyman: "Gauge-flation trajectories in Chromo-Natural Inflation", Phys.Rev. D86 (2012) 043530 [arXiv:1203.2264 [hep-th] ]
- Peter Adshead, Mark Wyman: "Chromo-Natural Inflation: Natural inflation on a steep potential with classical non-Abelian gauge fields", Phys.Rev.Lett. 108 (2012) 261302 [arXiv:1202.2366 [hep-th]]

### 4.4.1 Chromo-Natural Inflation

重力 + SU(2) ゲージ場 + アクシオンの系を考える。

作用積分

$$S = \int \frac{R}{2\kappa^2} *1 - \frac{1}{2} *d\phi \wedge d\phi - V(\phi) *1 - \frac{1}{2} \text{Tr}(*F \wedge F) - \frac{\lambda}{f_a} \phi \text{Tr}(F \wedge F). \quad (4.4.1)$$

Ansatz

$$\text{時空計量} : ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\mathbf{x}^2, \quad (4.4.2)$$

$$\text{ゲージ場} : A^a = a(t)\psi(t)dx^a \quad (4.4.3)$$

これよりフラックスは

$$\begin{aligned} F^a &= dA^a + \frac{g}{2} \epsilon^{abc} A^b \wedge A^c \\ &= (a\dot{\psi}) dt \wedge dx^a + \frac{g}{2} (a\psi)^2 \epsilon_{abc} dx^b \wedge dx^c, \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

$$F^a \wedge F_a = 3g(a\dot{\psi})^2 (a\psi) \cdot d^4x, \quad (4.4.5)$$

$$F^a \cdot F_a = -3(\dot{\psi} + H\psi)^2 + 3g^2\psi^4. \quad (4.4.6)$$

## 簡約 Lagrangian

$$L = a^3 \left[ -\frac{3}{\kappa^2} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) + \frac{3}{2} (\dot{\psi} + H\psi)^2 - \frac{3}{2} g^2 \psi^4 - 3\lambda g \frac{\phi}{f_a} \psi^2 (\dot{\psi} + H\psi) \right] \quad (4.4.7)$$

## 運動方程式

- 宇宙膨張の方程式

$$H^2 = \frac{1}{3m_{\text{pl}}^2} (\rho_\phi + \rho_\psi); \quad (4.4.8)$$

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (4.4.9)$$

$$\rho_\psi = \frac{3}{2} (\dot{\psi} + H\psi)^2 + \frac{3}{2} g^2 \psi^4, \quad (4.4.10)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{m_{\text{pl}}^2} \left\{ (\dot{\psi} + H\psi)^2 + g^2 \psi^4 + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \right\}. \quad (4.4.11)$$

- 場の方程式

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = -\frac{3\lambda g}{f_a} \psi^2 (\dot{\psi} + H\psi), \quad (4.4.12a)$$

$$\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} + 2g^2 \psi^3 + (2H^2 + \dot{H})\psi = \frac{\lambda g}{f_a} \psi^2 \dot{\phi}. \quad (4.4.12b)$$

いま,

$$\psi_c = a\psi \quad (4.4.13)$$

とおくと,

$$\ddot{\psi}_c + H\dot{\psi}_c + \frac{2g^2}{a^2} \psi_c^3 = \frac{\lambda g}{a} \frac{\dot{\phi}}{f_a} \psi_c^2. \quad (4.4.14)$$

4.4.2 CS項がない場合 ( $\lambda = 0$ )

$\psi_c$  の方程式 (4.4.14) より,  $H\Delta t \gg 1$  で

$$\begin{aligned} \psi_c &\approx \psi_{c*} + E_{c*} \int_{\infty}^t \frac{dt}{a} \\ &= \psi_{c*} - \frac{E_{c*}}{H} e^{-Ht} + \mathcal{O}(g^2 e^{-2Ht}). \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

よって.

$$\psi = \frac{\psi_c}{a} \approx \frac{\psi_{c*}}{a}, \quad (4.4.16a)$$

$$E = \dot{\psi} + H\psi = \frac{1}{a}\dot{\psi}_c \approx \frac{E_{c*}}{a^2}, \quad (4.4.16b)$$

$$\rho_\psi \approx \frac{3E_{c*}^2 + g^2\psi_{c*}^4}{2a^4}. \quad (4.4.16c)$$

したがって、フラックスの寄与は、通常の輻射と同じ振る舞いをし、すぐに無視できるようになる。

一方、アクシオン場  $\phi$  は閉じた標準の方程式

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (4.4.17)$$

$$V = \mu^4 \left( 1 + \cos \frac{\phi}{f_a} \right). \quad (4.4.18)$$

に従うので、通常の公式が適用できる。slow roll パラメータは

$$\begin{aligned} \epsilon &:= \frac{m_{\text{pl}}^2 (V')^2}{2V^2} \approx -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{\dot{\phi}^2}{2m_{\text{pl}}^2 H^2} \\ &\approx \frac{m_{\text{pl}}^2}{2f_a^2} \tan^2 \left( \frac{\phi}{2f_a} \right), \end{aligned} \quad (4.4.19a)$$

$$\begin{aligned} \eta &:= \frac{m_{\text{pl}}^2 V''}{V} \\ &\approx -\frac{m_{\text{pl}}^2}{2f_a^2} \left( 1 - \tan^2 \left( \frac{\phi}{2f_a} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.4.19b)$$

これより、 $\lambda = 0$  の場合、インフレーションが起きるには

$$f_a \gg m_{\text{pl}} \quad (4.4.20)$$

が要求される。

### 4.4.3 CS Influm

仮定

$$\sigma = \frac{g\lambda\psi^2}{f_a H} \gg 1, \quad \lambda^2\psi^2 \gg f_a^2 \quad (4.4.21)$$

Slow roll 方程式  $\dot{\phi}$  を消去すると、

$$H\dot{\psi} \approx -H^2\psi - \frac{V'(\phi)}{3\sigma} = -V'_{\text{eff}}(\psi) \quad (4.4.22)$$

ここで、axion potential

$$V = \mu^4 \left( 1 + \cos \frac{\phi}{f_a} \right) \quad (4.4.23)$$

に対し

$$V_{\text{eff}}(\psi) = \frac{H^2}{2} \psi^2 + \frac{\mu^4 \sin(\phi/f_a) H}{2g\lambda} \frac{H}{\psi} \quad (4.4.24)$$

これより、 $\psi$  の有効質量は  $m_\psi \approx 3H$  となるので、 $\psi$  は速やかに ( $\Delta t H \sim 1$ ) で  $V_{\text{eff}}$  の極小点に緩和する：

$$\psi \approx \left[ \frac{\mu^4}{3g\lambda H} \sin \left( \frac{\phi}{f_a} \right) \right]^{1/3}. \quad (4.4.25)$$

これを  $\phi$  の方程式に代入して、

$$H\dot{\phi} \approx \frac{2}{\sigma} (H^2\psi + g^2\psi^3) \quad (4.4.26)$$

### Inflation rate

$$N = \int H dt = \int \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \approx \int \frac{H^2 \sigma d\phi}{2(H^2\psi + g^2\psi^3)} \quad (4.4.27)$$

$$= \frac{1}{4} \lambda \int_{x_s}^{x_e} dx \frac{2k \sin^{1/3} x \cos^{4/3}(x/2)}{\cos^{8/3}(x/2) + k^2 \sin^{2/3} x} \lesssim 0.37\lambda, \quad (4.4.28)$$

ここで、

$$k = \frac{1}{2} \left( \frac{6g^2 m_{\text{pl}}^4}{\mu^4 \lambda} \right)^{1/3} \quad (4.4.29)$$

### Inflation condition

$$\sigma^3 = \frac{1}{9\lambda^2} X^4 Y^3 \sin^2 \frac{\phi}{f_a} \gtrsim 1, \quad (4.4.30a)$$

$$\epsilon'_\psi = \frac{3\rho_\psi}{\rho_\phi} \approx \frac{3\sigma}{2X^2 Y} + \frac{2\sigma^2}{X^2 Y^2} \ll 1, \quad (4.4.30b)$$

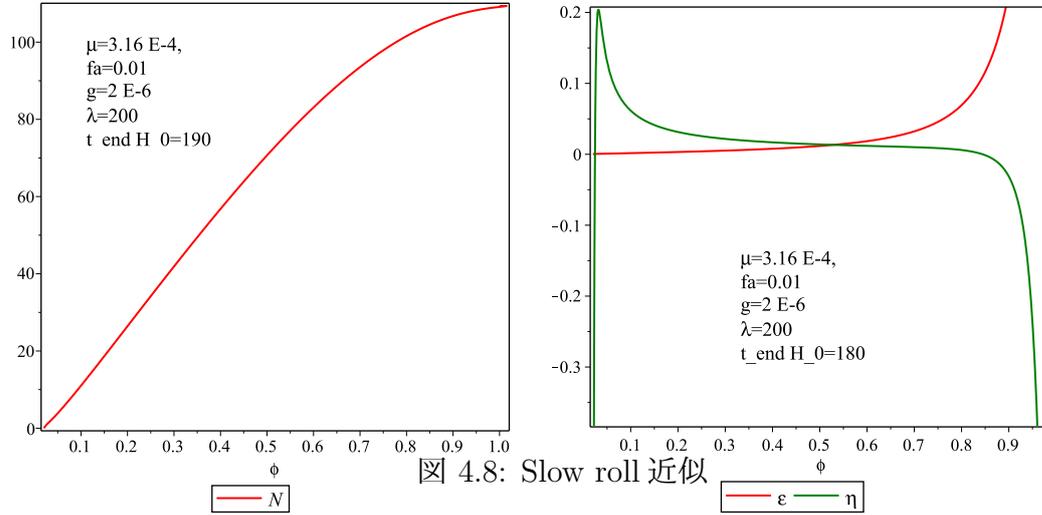
$$\epsilon_\phi := \frac{3\dot{\phi}^2}{2V} \approx \frac{\lambda}{X^2 Y^2} \frac{Y}{\sigma} \left( 1 + \frac{\sigma}{Y} \right)^2 \ll 1. \quad (4.4.30c)$$

ここで、

$$X = \frac{g\mu^2}{H^2} \sim \frac{gm_{\text{pl}}^2}{\mu^2}, \quad Y = \frac{\lambda H}{gf_a} \sim \frac{\lambda\mu^2}{gf_a m_{\text{pl}}}. \quad (4.4.31)$$

これより、

$$\eta = -\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq \epsilon_\phi + \epsilon'_\psi \ll 1. \quad (4.4.32)$$



#### 4.4.4 数値解

変数を次の様に無次元化する：

$$x = \frac{\phi}{f_a}, \quad y = \frac{\psi}{f_a}, \quad h = \frac{H}{H_0}, \quad \tau = H_0 t. \quad (4.4.33)$$

ここで、

$$H_0^2 = \frac{V_0}{3m_{\text{pl}}^2} = \frac{2\mu^4}{3m_{\text{pl}}^2}. \quad (4.4.34)$$

これらを用いると運動方程式は、

$$\ddot{x} + 3h\dot{x} - \frac{2}{3\tilde{f}_a^2} \sin x = -3\tilde{\lambda}y^2(\dot{y} + hy), \quad (4.4.35a)$$

$$\ddot{y} + 3h\dot{y} + \left(2h^2 + \dot{h} + 2\tilde{g}^2y^2\right)y = \tilde{\lambda}y^2\dot{x}, \quad (4.4.35b)$$

$$\dot{h} = -\tilde{f}_a^2 \left\{ E^2 + \tilde{g}^2y^4 + \frac{1}{2}\dot{x}^2 \right\}, \quad (4.4.35c)$$

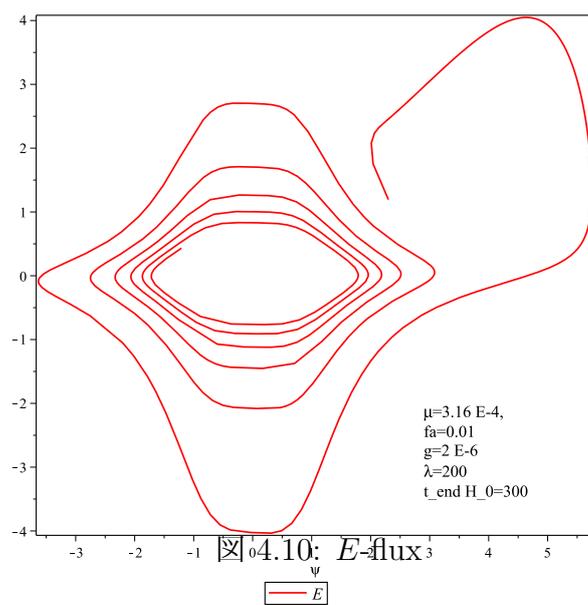
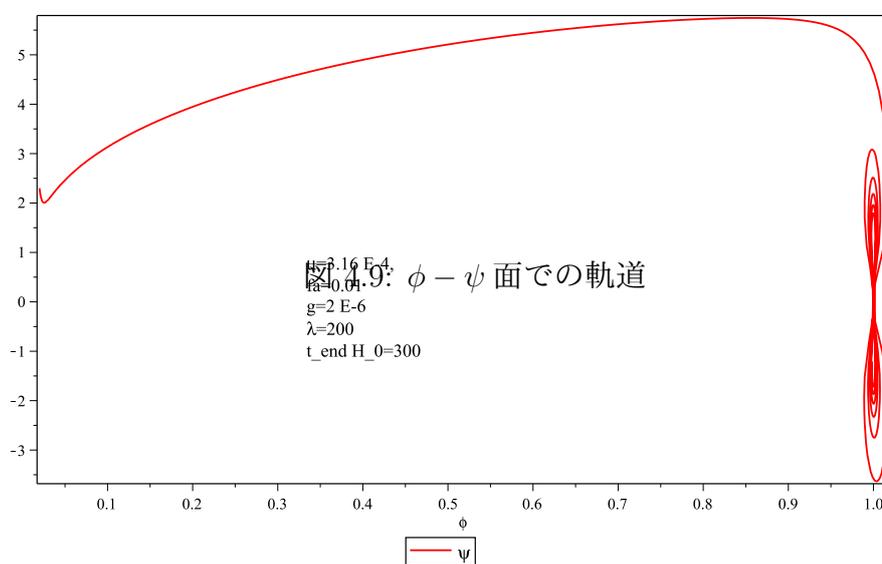
$$h^2 = \cos^2(x/2) + \tilde{f}_a^2 \left\{ \frac{1}{6}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}E^2 + \frac{\tilde{g}^2}{2}y^4 \right\}, \quad (4.4.35d)$$

$$\dot{h} + 2h^2 = 1 + \cos(x) - \frac{1}{6}\tilde{f}_a^2\dot{x}^2, \quad (4.4.35e)$$

$$E = \dot{y} + hy. \quad (4.4.35f)$$

ここで、

$$\tilde{f}_a = \frac{f_a}{m_{\text{pl}}}, \quad \tilde{g} = \frac{gf_a}{H_0}, \quad \tilde{\lambda} = \tilde{g}\lambda. \quad (4.4.36)$$



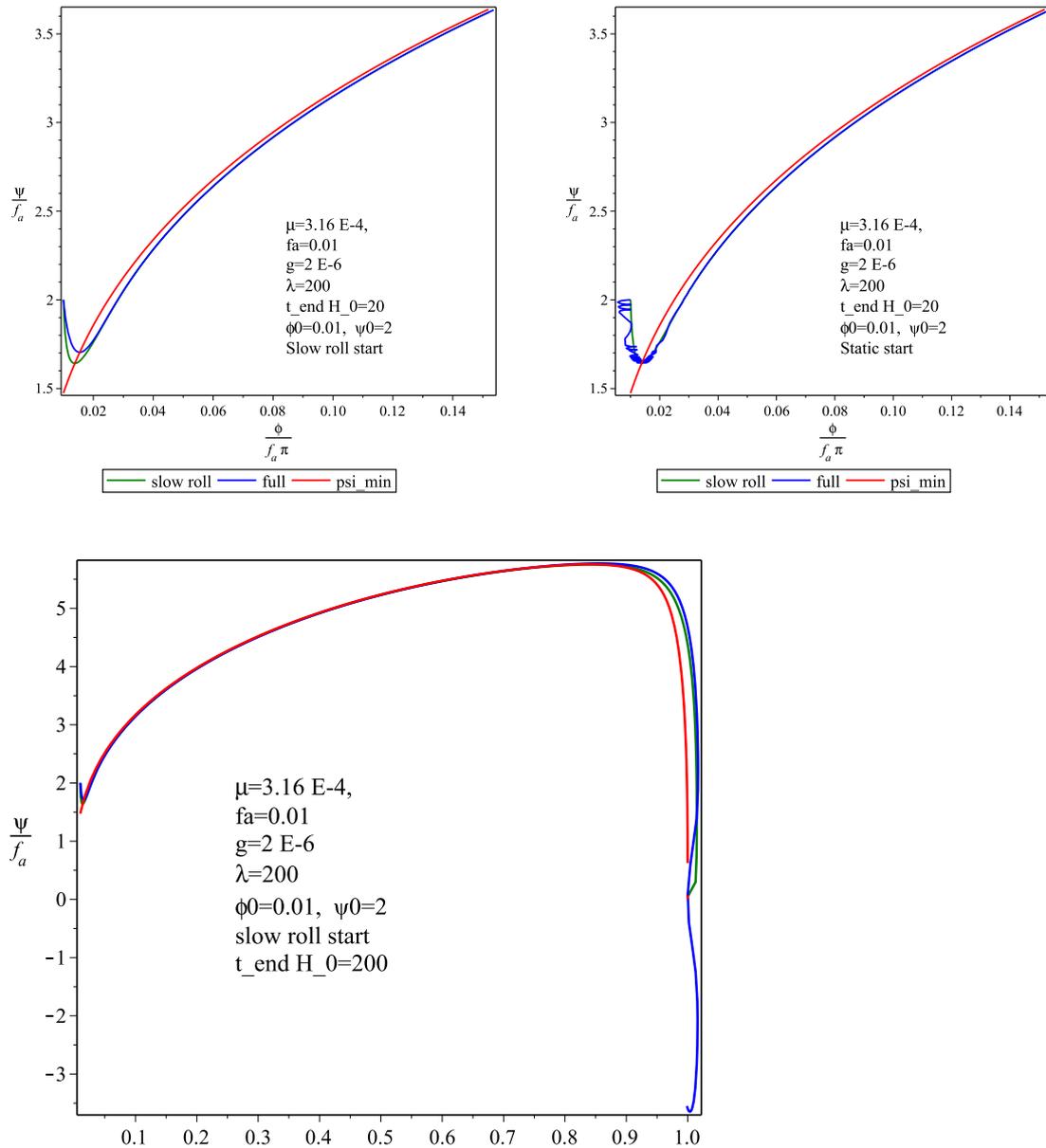


図 4.11:  $\psi = \psi_{\min}(\phi)$  より大きい  $\psi_0$  を初期値とする場合のフルの数値解と Slow roll 解の比較 ( $\phi_0/(\pi f_a) = 0.01, \psi_0/f_a = 2$ ). 上左は Slow roll 近似と同じ初期速度, 右は  $\phi_0 = \psi = 0$  とおいた場合. 下は, slow roll スタートでの長時間での振る舞い

例えば,

$$\begin{aligned}\mu &= 3.16 \times 10^{-4} m_{\text{pl}}, \quad f_a = 0.01 m_{\text{pl}}, \quad g = 2 \times 10^{-6}, \quad \lambda = 200 \\ \Rightarrow \tilde{f}_a &= 0.01, \quad \tilde{g} = 0.24, \quad \tilde{\lambda} = 50.\end{aligned}\tag{4.4.37}$$

に対して, slow roll 近似では  $N = 100$  程度のインフレーションが起きる. Slow roll 近似も  $\phi = 0$  近傍および  $\phi = \pi$  近傍を除いてよく成り立つ.

初期値が  $\psi = \psi_{\min}(\phi)$  曲線からずれた場合, 最初軌道はこの曲線からずれるが, ある程度時間がたつとこの曲線に乗るようになる. 明らかに, この曲線は attractor となっている. ただし,  $\psi$  の初期値が曲線より下で, 速度が slow roll 近似からずれると, この曲線に到達するのにかなり時間がかかる.

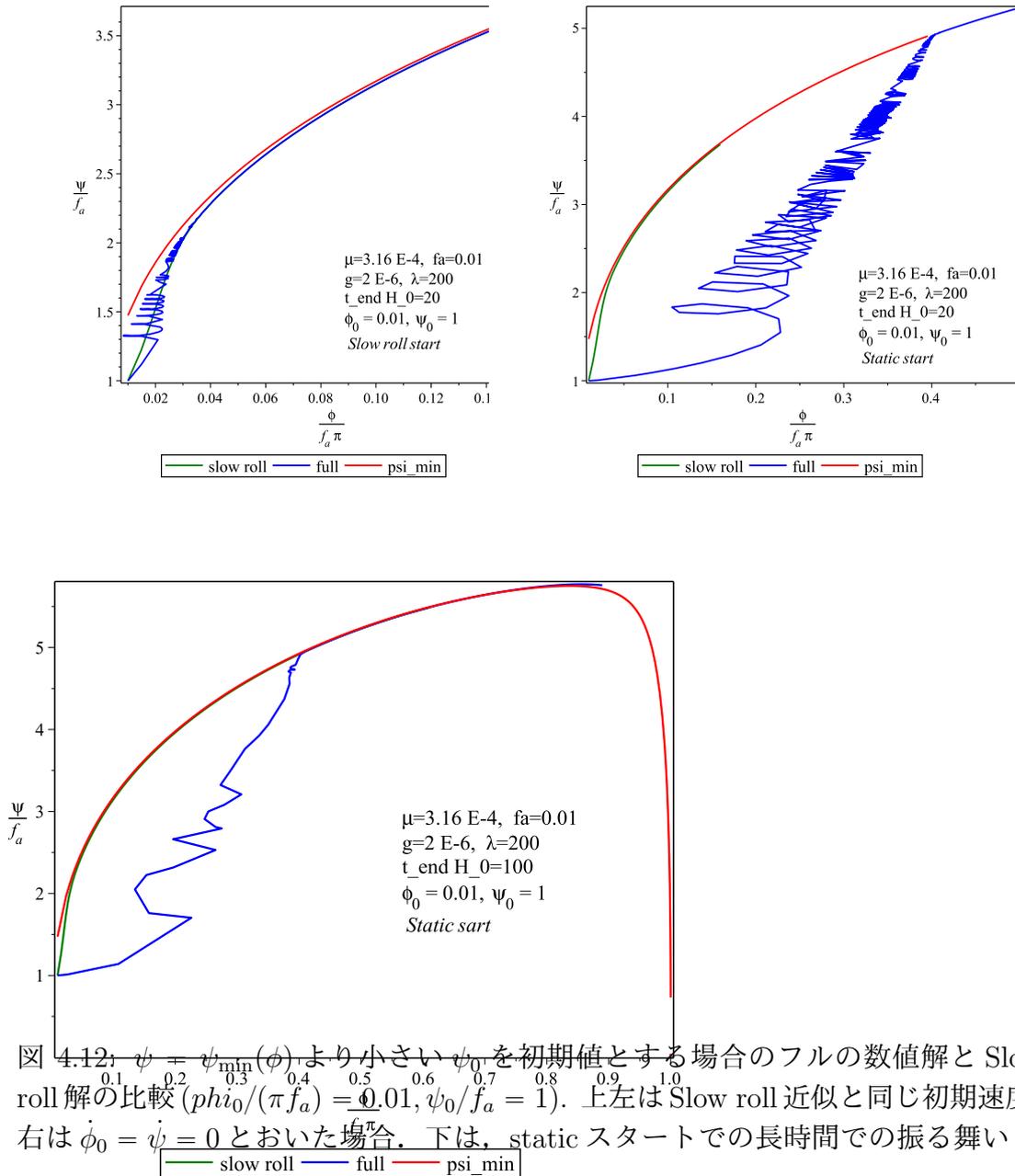


図 4.12:  $\psi = \psi_{\min}(\phi)$  より小さい  $\psi_0$  を初期値とする場合のフルの数値解と Slow roll 解の比較 ( $\phi_0/(\pi f_a) = 0.01, \psi_0/f_a = 1$ ). 上左は Slow roll 近似と同じ初期速度, 右は  $\phi_0 = \psi_0 = 0$  とおいた場合. 下は, static スタートでの長時間での振る舞い

## 4.4.5 一般論

## Single axion model

場の系  $\Phi = (\phi, X)$  ( $X = (X_m)$ ) が次の Lagrangian をもつとする :

$$L = L_0 + L_{\text{CS}}; \quad (4.4.38)$$

$$L_0 = a^3 \left[ -3m_{\text{pl}}^2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}(\dot{X})^2 - V(\Phi) \right], \quad (4.4.39)$$

$$L_{\text{CS}} = \lambda a^3 \dot{\phi} U(X). \quad (4.4.40)$$

運動方程式は

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \lambda\alpha \cdot \dot{X} = F_\phi, \quad (4.4.41a)$$

$$\ddot{X} + 3H\dot{X} - \lambda\alpha\dot{\phi} = F_X. \quad (4.4.41b)$$

ここで、

$$\alpha = dU(X), \quad (4.4.42a)$$

$$F_\phi = -\partial_\phi V - 3H\lambda U(X), \quad (4.4.42b)$$

$$F_X = -\partial_X V. \quad (4.4.42c)$$

Slow roll 近似では

$$3H\dot{\phi} + \lambda\alpha \cdot \dot{X} = F_\phi, \quad (4.4.43a)$$

$$3H\dot{X} - \lambda\alpha\dot{\phi} = F_X/ \quad (4.4.43b)$$

これらより、 $\dot{\phi}$  を消去すると、

$$\left( 3H + \frac{\lambda^2 \alpha^2}{3H} P_\alpha \right) \dot{X} = F_X + \frac{\lambda}{3H} \alpha F_\phi. \quad (4.4.44)$$

ここで、

$$P_\alpha = (\alpha \cdot \alpha)^{-1} \alpha_\circ T_\alpha \quad (4.4.45)$$

この方程式を  $\dot{X}$  について解くと、

$$\dot{X} = \frac{1}{3H} (1 - P_\alpha) F_X + \frac{1}{9H^2 + \lambda^2 \alpha^2} (\lambda \alpha F_\phi + 3H P_\alpha F_X) \quad (4.4.46)$$

これより、 $\alpha$  に垂直な方向の  $X$  の有効質量は元の質量  $m_X$ 、 $\alpha$  方向の有効質量は  $3H$  となる。したがって、 $m_X \gtrsim H$  なら、 $X$  は急速に  $\dot{X}$  の位置に緩和する :

$$(1 - P_\alpha) F_X = 0, \quad F_\phi \approx 0. \quad (4.4.47)$$

これにより、 $X$  が  $\phi$  の関数  $X = X(\phi)$  として定まる。すなわち、 $\Phi$  空間での軌道が定まる。ここで、 $F_\phi = 0$  が  $\partial_\phi V = 0$  を意味しない点が重要である。

最後に、 $\dot{\phi}$  の式は

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &\simeq -\frac{\lambda}{3H}\alpha \cdot \dot{X} + \frac{1}{3H}F_\phi \\ &\simeq \frac{3H}{9H^2 + \lambda^2\alpha^2}F_\phi - \frac{\lambda}{9H^2 + \lambda^2\alpha^2}\alpha \cdot F_X \\ &\approx \frac{1}{\lambda\alpha^2}\alpha \cdot \partial_X V\end{aligned}\tag{4.4.48}$$

したがって、インフラトン  $\phi$  の振る舞いはほとんど  $V(\phi)$  と無関係となる！

### Multiple axion model

場の系  $\Phi = (\phi, X)$  ( $\phi = (\phi_i), X = (X_m), i = 1, \dots, n, m = 1, \dots, p$ ) が次の Lagrangian をもつとする：

$$L = L_0 + L_{CS};\tag{4.4.49}$$

$$L_0 = a^3 \left[ -3m_{\text{pl}}^2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{1}{2}(\dot{\phi} + Hk\phi)^2 + \frac{1}{2}(\dot{X} + HlX)^2 - V(\Phi) \right]\tag{4.4.50}$$

$$L_{CS} = \lambda a^3 \sum_i (\dot{\phi} + Hk\phi)^i U_i(\Phi).\tag{4.4.51}$$

運動方程式は

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \lambda W\dot{\phi} + \lambda A\dot{X} = F_\phi,\tag{4.4.52a}$$

$$\ddot{X} + 3H\dot{X} - \lambda^T A\dot{\phi} = F_X.\tag{4.4.52b}$$

ここで、

$$W_{ij} = \partial_{\phi_i} U_j - \partial_{\phi_j} U_i,\tag{4.4.53a}$$

$$A = \partial_X U = (\partial U^i / \partial X_m),\tag{4.4.53b}$$

$$F_\phi = -\partial_\phi V - k(\dot{H} + 2H^2)\phi - \lambda H(3U - \partial_\phi \tilde{U}),\tag{4.4.53c}$$

$$F_X = -\partial_X V - l(\dot{H} + 2H^2)X + \lambda H \partial_X \tilde{U},\tag{4.4.53d}$$

$$\tilde{U} = \sum_i k_i \phi_i U_i.\tag{4.4.53e}$$

Slow roll 近似で

$$(3H - \lambda W)\dot{\phi} + \lambda A\dot{X} = F_\phi,\tag{4.4.54a}$$

$$3H\dot{X} - \lambda^T A\dot{\phi} = F_X.\tag{4.4.54b}$$

最初の式より,

$$\dot{\phi} = -\frac{\lambda}{3H}BA\dot{X} + \frac{1}{3H}BF_\phi, \quad (4.4.55)$$

$$B = \left(1 - \frac{\lambda}{3H}W\right)^{-1}. \quad (4.4.56)$$

これを  $\dot{X}$  の式に代入し,  $\dot{X}$  について解くと

$$\begin{aligned} 3H\dot{X} &= \left(1 + \frac{\lambda^2}{9H^2} T_{ABA}\right)^{-1} \left(F_X + \frac{\lambda}{3H} T_{ABF_\phi}\right) \\ &= (1 - P_A)F_X \\ &\quad + P_A \left(1 + \frac{\lambda^2}{9H^2} T_{ABA}\right)^{-1} \left(P_A F_X + \frac{\lambda}{3H} T_{ABF_\phi}\right) \end{aligned} \quad (4.4.57)$$

ここで,  $P_A$  は  $\dot{X}$  の空間で  $A^i_m$  の張る線形部分空間への射影演算子で, 適当な  $n$  次の正方行列  $p_A$  を用いて

$$P_A = {}^T A p_A A \quad (4.4.58)$$

と表される. 特に,

$$(1 - P_A)\partial_X U = 0 \Rightarrow (1 - P_A)\partial_X \tilde{U} = 0. \quad (4.4.59)$$

一般に,

$$\begin{aligned} A \left(1 + \frac{\lambda^2}{9H^2} T_{ABA}\right)^{-1} {}^T A &= A {}^T A \left(1 + \frac{\lambda^2}{9H^2} B A {}^T A\right)^{-1} \\ &= A {}^T A \left(A {}^T A + \frac{9H^2}{\lambda^2} B^{-1}\right)^{-1} \frac{9H^2}{\lambda^2} B^{-1} \end{aligned} \quad (4.4.60)$$

これより,  $\lambda$  が大きい極限で,

$$P_A \left(1 + \frac{\lambda^2}{9H^2} T_{ABA}\right)^{-1} \left(P_A F_X + \frac{\lambda}{3H} T_{ABF_\phi}\right) \approx 3H^2 {}^T A p_A (3U - \partial_\phi \tilde{U}) \quad (4.4.61)$$

よって,  $X$  の有効質量は,  $(1 - P_A)$  の方向で  $m_X$ ,  $P_A$  の方向で  $O(H)$ .

$X$  場が  $\dot{X} = 0$  に緩和するとすると,

$$(1 - P_A)F_X = 0, \quad P_A F_X + \frac{\lambda}{3H} T_{ABF_\phi} = 0. \quad (4.4.62)$$

また,  $\dot{\phi}$  の式は,

$$3H\dot{\phi} \simeq \left(1 - \frac{\lambda}{3H}W + \frac{\lambda^2}{3H^2} A {}^T A\right)^{-1} \left(-\frac{\lambda}{3H} A F_X + F_\phi\right) \quad (4.4.63)$$

よって,  $\lambda \gg 3H$  のとき,

$$\text{rank}(A^T A) = n \ \& \ \partial_X \tilde{U} = 0 \ \Rightarrow \ 3H\dot{\phi} \approx -\frac{3H}{\lambda}(A^T A)^{-1} A F_X. \quad (4.4.64)$$

一方,  $\partial_X \tilde{U} \neq 0$  の時には,  $\lambda \gg 3H$  で

$$\dot{\phi} \approx -H(A^T A)^{-1} A \partial_X \tilde{U} \quad (4.4.65)$$

となり, 一般に slow roll インフレーションは実現されない.

## 5

## Black holes

## §5.1

## 基本事項

## 5.1.1 ブラックホールの定義

$\mathcal{M}$  を漸近的に単純な時空,  $\mathcal{I}$  をその共形無限遠とする [10]. 時空は Cauchy 面  $\Sigma$  から漸近的に予言可能, すなわち  $\mathcal{I} \subset \overline{D(\Sigma)}$  in  $\hat{\mathcal{M}}$  が成り立つとする. これらの条件のもと, ホライズンを無限遠  $\mathcal{I}$  から観測可能な領域 (DOC)

$$\text{DOC} = J^-(\mathcal{I}, \mathcal{M}) \cap J^+(\mathcal{I}, \mathcal{M}). \quad (5.1.1)$$

の境界として定義する :

$$H^+ = \partial(J^-(\mathcal{I})) \cap J^+(\mathcal{I}). \quad (5.1.2)$$

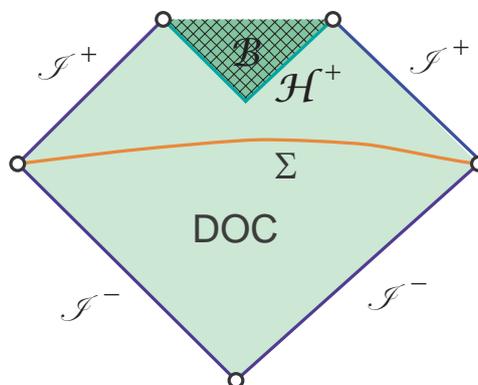


図 5.1: Black hole spacetime

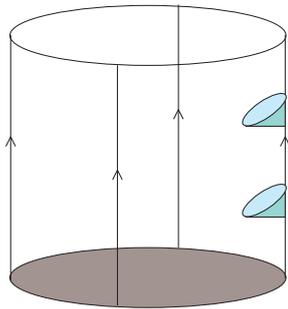


図 5.2: Killing horizon

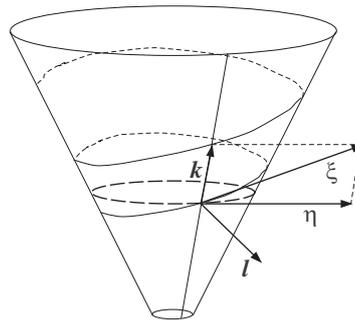


図 5.3: Horizon of a rotating black hole

さらに、ブラックホール領域を無限遠から観測できない領域  $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B} = \overline{\mathcal{M} - J^-(\mathcal{I})}, \tag{5.1.3}$$

とする

### 5.1.2 Killing ホライズン

#### 定常時空

時空  $\mathcal{M}$  は、ある領域で時間的となる Killing ベクトルをもつとき、定常であるという。定常時空の計量は

$$ds^2 = -e^{2U(x)}(dt + A(x))^2 + g_{ij}(x)dx^i dx^j, \tag{5.1.4}$$

この座標系では、Killing ベクトルは

$$\xi_* = -e^{2U}(dt + A(x)). \tag{5.1.5}$$

Killing ベクトルの回転を

$$*(\xi_* \wedge d\xi_*) = -e^{3U} *_n dA. \tag{5.1.6}$$

により定義する。

A 時空  $\mathcal{M}$  は、軌道がすべて閉曲線である領域で空間的となる Killing ベクトル  $\eta$  をもつとき、軸対称という。剛性定理より、定常で解析的な時空は常に軸対称となる。

#### Killing ホライズン

定常時空の光的超曲面  $\mathcal{H}$  は、 $\mathcal{H}$  上でその光的測地線に平行となる Killing ベクトルが存在するとき、Killing ホライズンという。漸近的に単純で静的な時空にお

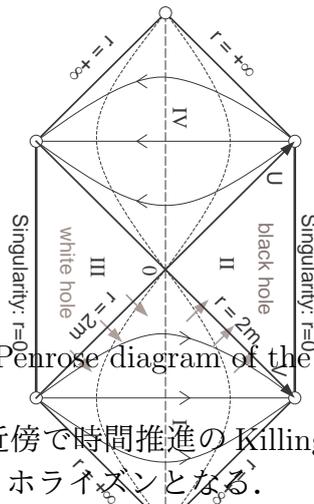


図 5.4: Penrose diagram of the Schwarzschild black hole

いて、無限遠  $\mathcal{I}$  の近傍で時間推進の Killing ベクトルが時間的なら、この時空のホライズンは Killing ホライズンとなる。

T 定常時空のブラックホールは、時間推進の Killing ベクトルがホライズン上で空間的となるとき、回転的という。定常軸対称時空が Killing horizon  $\mathcal{H}$  を持つし、 $\xi$  と  $\eta$  をその時間推進および回転の Killing ベクトルとする。このとき、 $\mathcal{H}$  の光的接ベクトル  $k$  は

$$k = \xi + \Omega_h \eta. \tag{5.1.7}$$

と表される。  $\Omega_h$  はブラックホールの回転角速度と呼ばれる。さらに、

$$\nabla_k k = \kappa k \Leftrightarrow \nabla k^2 = -2\kappa k \tag{5.1.8}$$

係数  $\kappa$  はブラックホールの表面重力加速度と呼ばれる。

### 5.1.3 例

#### 静的ブラックホール

定常ブラックホール時空は、その時間推進の Killing ベクトル  $\xi$  の回転がゼロの時、静的という。静的時空  $(\mathcal{M}, g)$  の計量は次のように書かれる。

$$ds^2 = -e^{2U(x)} dt^2 + g_{ij}(x) dx^i dx^j. \tag{5.1.9}$$

最も重量な例は、Schwarzschild 時空である：

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\sigma_n^2; \quad f(r) = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1} - \lambda r^2 \tag{5.1.10}$$

ここで、 $d\sigma_n^2$  は  $n$  次元単位球  $S^n$  の計量、 $\lambda$  は宇宙定数で  $\lambda = \frac{2\Lambda}{n(n+1)}$  と表される。 $\lambda = 0$  で漸近的に平坦なとき、この解は唯一の正則な解である（静的ブラックホールの一意性定理）。

この球対称時空では、ホライズンは Killing ホライズンで、その位置  $r = r_h$  は  $f(r_h) = 0$  の解となる。ホライズンは、 $\mathbb{R} \times S^n$  と同相である。

### Kerr ブラックホール

4次元の漸近的平坦な真空のカテゴリリーでは、回転している定常な正則ブラックホール解は一意的で、それは Kerr 解で与えられる。

$$ds^2 = -\frac{\Delta\rho^2}{\Gamma}dt^2 + \frac{\Gamma \sin^2\theta}{\rho^2}(d\phi - \Omega dt)^2 + \rho^2 \left( \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right), \quad (5.1.11)$$

ここで

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta, \quad \Gamma = (r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta \sin^2\theta, \quad \Omega = \frac{2aMr}{\Gamma}. \quad (5.1.12)$$

この時空のホライズンも Killing ホライズンで、その場所は  $\Delta(r) = 0$  の解となり、 $r = r_h = r_+ = M + (M^2 - a^2)^{1/2}$  で与えられる。 $\Delta(r) = 0$  は、 $\partial_t$  と  $\partial_\phi$  で張られる面が光的となる条件と一致する。ホライズンは位相的には  $\mathbb{R} \times S^2$ 。この時空の Killing ベクトル  $\partial_t$  の回転は

$$\omega = d \left( \frac{2aM \cos\theta}{\rho^2} \right) \neq 0, \quad (5.1.13)$$

となるので、Kerr ブラックホールは回転的である。したがって、この時間推進 Killing はホライズン上で空間的となり (Fig.5.3),  $g_{tt} > 0$  となるエルゴ領域がホライズン近傍に現れる： $\rho^2 g_{tt} = a^2 \sin^2\theta - \Delta$ 。このエルゴ領域の存在は、回転ブラックホールの超反射不安定にとって本質的である。ブラックホールの回転角速度  $\Omega_h$  は、 $\partial_t + \Omega_h \partial_\phi$  が光的ベクトルとなる条件より

$$\Omega_h = \Omega(r_h) = \frac{2aMr_h}{(r_h^2 + a^2)^2} = \frac{a}{2Mr_h} = \frac{a}{r_h^2 + a^2}. \quad (5.1.14)$$

と決まる。

## §5.2

### 束縛状態と散乱

#### 5.2.1 ブラックホール近傍での粒子の運動

##### Schwarzschild black hole

ブラックホールの周りでの粒子の運動は、粒子の質量がゼロか有限かで異なる。例えば、Schwarzschild BH の周りでの運動方程式は次の2式に帰着される。

$$E = -u \cdot \xi = -u_t = f(r)\dot{t}, \quad L = u \cdot \eta = u_\phi = r^2\dot{\phi}, \quad (5.2.1a)$$

$$-\epsilon = -f\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{f} + r^2\dot{\phi}^2, \quad (5.2.1b)$$

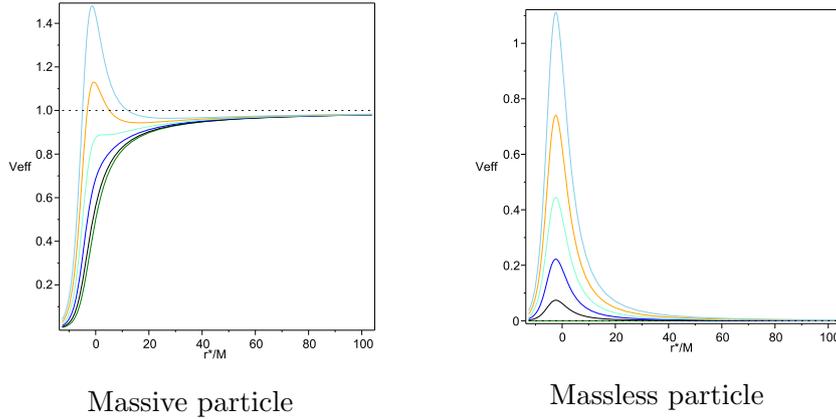


図 5.5: The effective potential for a particle with  $L = 0, \dots, 5$  around the 4D Schwarzschild BH

ここで、有質量の場合  $\epsilon = 1$ 、ゼロ質量の場合  $\epsilon = 0$  である。運動の振る舞いは、有効ポテンシャル  $V(r)$  で決ま (図 5.5):

$$\dot{r}^2 + V(r) = E^2; \quad V(r) = \left( \epsilon + \frac{L^2}{r^2} \right) f(r). \quad (5.2.2)$$

これより、有質量の場合とことなり、ゼロ質量粒子は安定な束縛軌道がないことがわかる。5次元以上では、有質量粒子も安定な束縛軌道を持たなくなる。

### Kerr ブラックホール

赤道面上の軌道に限定すると、

$$E = -g_{tt}\dot{t} - g_{t\phi}\dot{\phi}, \quad L = g_{\phi t}\dot{t} + g_{\phi\phi}\dot{\phi}, \quad (5.2.3a)$$

$$-\epsilon = g_{tt}\dot{t}^2 + 2g_{t\phi}\dot{t}\dot{\phi} + g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 + \frac{r^2}{\Delta}\dot{r}^2, \quad (5.2.3b)$$

対応する有効ポテンシャルは

$$\dot{r}^2 + V(r) = E^2; \quad V(r) = \frac{\epsilon\Delta}{r^2} - \frac{a^2E^2 - L^2}{r^2} - \frac{2M(aE - L)^2}{r^3}, \quad (5.2.4)$$

ここで、図 5.6 に示したように、粒子の運動は、回転がブラックホールの回転と同じ向きか、反対向きかで大きく異なる。特に、同方向に回転する方が遠心力が弱くなる。

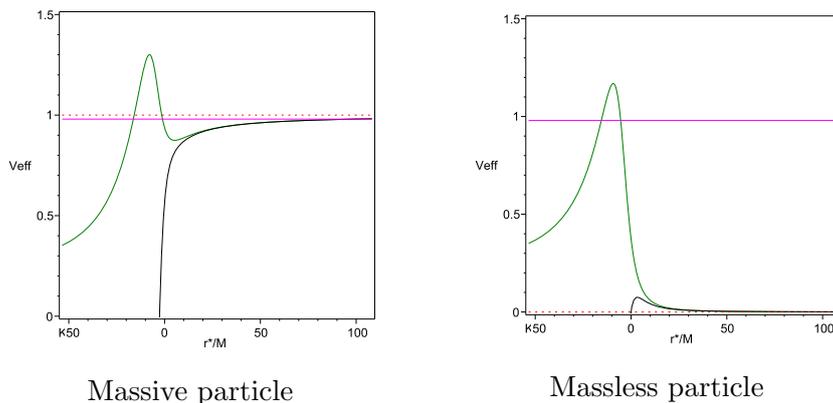


図 5.6: The effective potential for particles with  $L = 3$  (corotating) and  $L = -3$  (counter-rotating) around the Kerr BH with  $a = 0.999$ .  $r^*$  is the tortoise coordinate defined by  $dr^* = (r^2 + a^2)dr/\Delta$ .

## 5.2.2 Kerr BH でのゼロ質量場

### フラックス保存

波動性のため、BH 近傍での場の振る舞いは粒子と大きく異なる。例えば、軸対称定常 BH での Klein-Gordon 場を考える：

$$D^\mu D_\mu \phi = 0; \quad D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu, \quad (5.2.5)$$

ここで、 $A_\mu$  は電磁ポテンシャル、 $q$  は粒子の電荷である。この方程式より、Klein-Gordon 内積

$$N(\phi_1, \phi_2) = -i \int_\Sigma (\bar{\phi}_1 D^\mu \phi_2 - (\bar{D}^\mu \bar{\phi}_1) \phi_2) d\Sigma_\mu \quad (5.2.6)$$

が DOC の Cauchy 面  $\Sigma$  の取り方によらないことが示される。これより、図 5.7 の散乱問題において、無限遠からの入射フラックス  $I_{\mathcal{I}^-}$ 、ブラックホールに落ち込むフラックス  $I_{\mathcal{H}^+}$  および無限遠に放出されるフラックス  $I_{\mathcal{I}^+}$  の間に次の関係が成り立つ：

$$I_{\mathcal{I}^-} = I_{\mathcal{I}^+} + I_{\mathcal{H}^+} \quad (5.2.7)$$

### 増幅反射

スカラー場は無限遠で

$$\phi \approx \int d\omega \sum_m \frac{1}{r} (A^- e^{-i\omega u_-} + A^+ e^{+i\omega u_+}) e^{im\varphi}; \quad u_\pm = t \mp \int dr/f, \quad (5.2.8)$$

と振る舞うので、無限遠でもフラックスは

$$I_{\mathcal{I}^\pm} = i \int du_\pm \int_{S^2} d\Omega_2 \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 (\bar{\phi} \overleftrightarrow{\partial}_{u_\pm} \phi) = \sum_m \int d\omega \omega \langle |A_{\omega, m}^\pm|^2 \rangle_{S^2}, \quad (5.2.9)$$

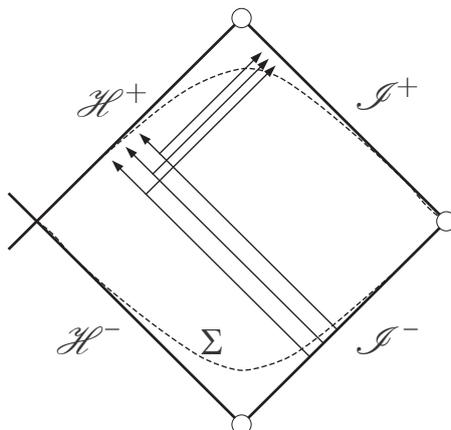


図 5.7: Scattering of an incidental wave by an AF black hole

ここで,  $\langle Q \rangle_{S^2}$  は  $S^2$  での  $Q$  の平均.

次に, ホライズン  $\mathcal{H}^+$  近傍では

$$\begin{aligned} \phi &= \phi(r, \theta) e^{-i\omega t + im\varphi} = \phi(r, \theta) e^{-i\omega_* t + im\tilde{\varphi}} \\ &= \phi(r, \theta) e^{i\omega_* r^*} e^{-i\omega_* v_+ + im\tilde{\varphi}} \approx C(\theta) e^{-i\omega_* v_+ + im\tilde{\varphi}}, \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

ここで,  $\omega_* := \omega - m\Omega_h$ ,  $\tilde{\varphi} = \varphi - \Omega_h t$ ,  $v_+ = t + \int dr(r^2 + a^2)/\Delta$ .

$v_+$  と  $\tilde{\varphi}$  は  $\mathcal{H}^+$  近傍で正則な座標なので,  $C$  は  $\theta$  の有界関数でないといけない. したがって,  $\mathcal{H}^+$  を横切るフラックスは

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{H}^+} &= i \int dv_+ \int_{S^2} d^{D-2} \sigma \left( \bar{\phi} (\vec{\partial}_{v_+} + 2iq\Phi) \phi \right)_{\mathcal{H}^+} \\ &= \sum_m \int d\omega (\omega_* - q\Phi_h) (r_h^2 + a^2) \langle |C_{\omega, m}|^2 \rangle_{S^2}. \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

これらを (5.2.7) に代入して

$$\omega \langle |A_{\omega, m}^-|^2 \rangle = \omega \langle |A_{\omega, m}^+|^2 \rangle + (\omega - m\Omega_h - q\Phi_h) (r_h^2 + a^2) \langle |C_{\omega, m}|^2 \rangle. \quad (5.2.12)$$

透過率  $T$  と反射率  $R$  を

$$T := I_{\mathcal{H}^+}/I_{\mathcal{I}^-}, \quad R := I_{\mathcal{I}^+}/I_{\mathcal{I}^-}, \quad (5.2.13)$$

により定義すると,  $R + T = 1$  なので, 次の条件が満たされるとき  $R > 1$  となる:

$$\omega_* - q\Phi_h = \omega - m\Omega_h - q\Phi_h < 0 \quad (5.2.14)$$

ここで,  $\Phi_h$  はブラックホールの静電ポテンシャルである.

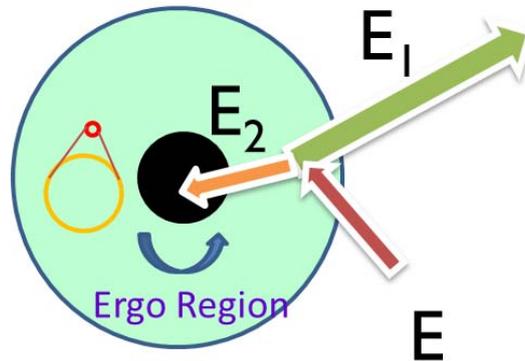


図 5.8: The Penrose process in the ergo region

### Penrose 過程

エルゴ領域では，Penrose 過程と呼ばれる興味深い現象が起きる [15]．エルゴ領域では，時間推進 Killing ベクトル  $\xi$  が空間的となり， $p^\mu$  が時間的でも，無限遠に対するエネルギー  $E = -p \cdot \xi$  はふとなり得る．このため，エルゴ領域に入射した粒子が2つ以上の粒子に分裂すると，その一部が入射粒子より大きなエネルギーをもって，エルゴ領域から出ることが可能となる．

増幅反射条件は

$$k \cdot p > 0, \quad p_\mu \phi = (-i\partial_\mu - qA_\mu)\phi, \quad (5.2.15)$$

と表されるので，増幅反射は Penrose 過程と同じ機構で起きる．ここで， $k = \partial_t + \Omega_h \partial_\varphi$  はホライズン  $\mathcal{H}^+$  の光的接ベクトルである．この式は， $p$  が過去向きの時間的ベクトルであることを示している．

---

## §5.3

---

### 増幅反射不安定

---

増幅反射が引き起こすブラックホール不安定

- BH bomb: 球形の反射壁でブラックホールを取り囲む [21, 17, 3]
- 有限な質量をもつボーズ場 [6]
- adS-Kerr ブラックホール [4]

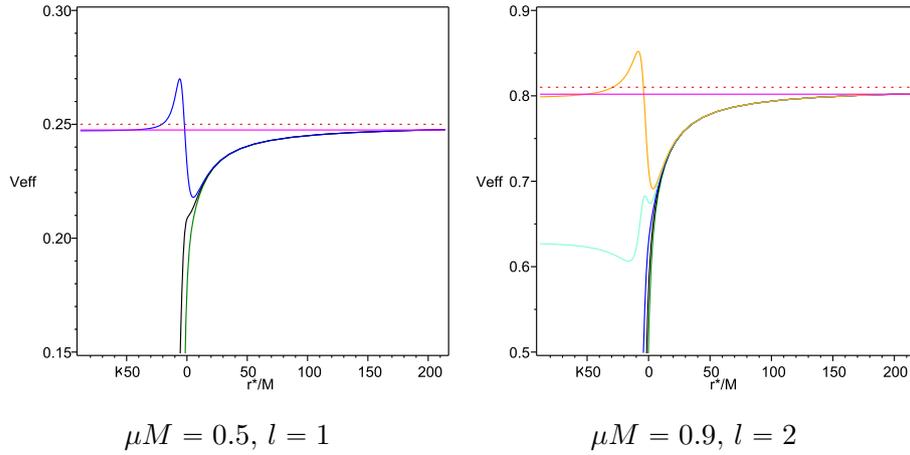


図 5.9: The effective potential for a massive scalar field around the Kerr BH with  $a = 0.999$ .

### 5.3.1 Kerr BH 時空での有質量スカラ場の方程式

- 有質量自由スカラ場の方程式：

$$(\square - \mu^2)\Phi = 0 \quad (5.3.1)$$

- 変数分離

$$\Phi = R_{lm}(r)S_{lm}(\theta) \exp(-i\omega t + im\phi), \quad (5.3.2)$$

とおくと,

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{dS_{lm}}{d\theta} \right) + \left[ a^2(\omega^2 - \mu^2) \cos^2\theta - \frac{m^2}{\sin^2\theta} + \Lambda_{lm} \right] S_{lm} = 0, \quad (5.3.3)$$

$$\frac{d}{dr} \left( \Delta \frac{dR_{lm}}{dr} \right) + \left[ \frac{\omega^2(r^2 + a^2)^2 - 4Mam\omega r + m^2 a^2}{\Delta} - (\omega^2 a^2 + \mu^2 r^2 + \Lambda_{lm}) \right] R_{lm} = 0. \quad (5.3.4)$$

- 角度モード関数と分離定数  $\Lambda_{lm}$ :  $S_{lm} = S_l^m(\cos\theta; c)$  ( $c = a(\omega^2 - \mu^2)^{1/2}$ ) と書けるので,  $\Lambda_{lm}$  は  $l, m$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ) と  $c$  のみ依存し,  $c \rightarrow 0$  の極限で

$$S_l^m \rightarrow P_l^m, \quad \Lambda_{lm} \rightarrow l(l+1). \quad (5.3.5)$$

- 動径モード関数の有効ポテンシャル:  $u = (r^2 + a^2)^{1/2} R_{lm}$  とおくと,

$$\frac{d^2 u}{dr^{*2}} + [\omega^2 - V(r, \omega)] u = 0, \quad (5.3.6)$$

ここで、有効ポテンシャル  $V$  は、

$$V = \frac{\mu^2 \Delta}{r^2 + a^2} + \frac{4am\omega Mr - a^2 m^2 + \Delta[\Lambda_{lm} + (\omega^2 - \mu^2)a^2]}{(r^2 + a^2)^2} + \frac{\Delta(2Mr^3 + a^2 r^2 - 4Ma^2 r + a^4)}{(r^2 + a^2)^4}. \quad (5.3.7)$$

$V$  の漸近挙動は

$$V \rightarrow \begin{cases} \mu^2 & ; r = \infty, \\ \omega^2 - \omega_*^2 & ; r = r_+ \end{cases}. \quad (5.3.8)$$

(Fig. 5.9).

- 境界条件：

$$\text{At infinity} : R_{lm} \sim \frac{B_{lm}}{r} e^{+ikr^*}, \quad k = (\omega^2 - \mu^2)^{1/2}. \quad (5.3.9a)$$

$$\text{At horizon} : R_{lm} \sim C_{lm} e^{-i\omega_* v_+ + im\bar{\phi}} \sim C_{lm} e^{-i\omega_* r^*} e^{-i\omega t + im\phi}. \quad (5.3.9b)$$

### 5.3.2 不安定の発生条件

- エネルギー積分：

$$\begin{aligned} 0 &= i \int \frac{d\phi}{2\pi} \int d\theta \sin \theta \int dr \rho^2 (\partial_t \Phi)^* (\square - \mu^2) \Phi \\ &= \left[ \int d\theta \sin \theta (-\omega^*) \Delta \Phi^* \partial_r \Phi \right]_{r=r_h}^{r=r_\infty} \\ &\quad + \int dr \int d\theta \sin \theta \left[ \rho^2 |\omega|^2 (\omega g^{tt} - 2m g^{t\phi}) |\Phi|^2 \right. \\ &\quad \left. + \omega^* \rho^2 (m^2 g^{\phi\phi} + \mu^2) |\Phi|^2 + \omega^* (\Delta |\partial_r \Phi|^2 + |\partial_\theta \Phi|^2) \right] \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

境界条件 (5.3.9a) と (5.3.9b) を満たす変数分離型の解に対しては、

$$\omega = \omega_R + i\omega_I, \quad (5.3.11a)$$

$$\tilde{R} = R_{lm} \exp(i\omega_* r^*) \quad (5.3.11b)$$

とおくとき、エネルギー積分は次のように書き換えられる：

$$B\omega_R(m\Omega_h - \omega_R) + \omega_I^2(C_1 + C_2\omega_I) = A\omega_I, \quad (5.3.12)$$

ここで、

$$B = (r_h^2 + a^2) e^{2\omega_I v_+} |\tilde{R}|_{r=r_h}^2,$$

$$C_1 = \int dr 2r e^{2\omega_I v_+} |\tilde{R}|^2,$$

$$C_2 = a^2 \int dr e^{2\omega_I v_+} \int d\theta \sin^3 \theta |\tilde{R} S_l^m|^2,$$

また,

$$A = \int dr e^{2\omega r v_+} \int d\theta \sin \theta \left[ |\tilde{R}|^2 |\partial_\theta S_l^m|^2 + \rho^2 (-g_{tt}) |\partial_r \tilde{R}|^2 |S_l^m|^2 \right. \\ \left. + a^2 \left| \sin \theta \partial_r \tilde{R} - i\omega_R^* \frac{(r^2 + a^2)}{a^2 \sin \theta} \tilde{R} \right|^2 |S_l^m|^2 + \left\{ \frac{2Q^2}{\sin^2 \theta} + P\omega_R^2 + \mu^2 \rho^2 \right\} |\tilde{R}|^2 \right] \quad (5.13)$$

ただし,  $Q$  は実の量,  $P$  は

$$P = \rho^2 (r^2 + a^2)^2 \{ \rho^2 + 4a^2 \sin^2 \theta \} (g_{tt})^2 \\ + 8Ma^2 \sin^2 \theta \left[ r(r^2 + a^2)(-g_{tt}) + \frac{a^2 M r^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right] (\rho^2 + 2a^2 \sin^2 \theta) \quad (5.14)$$

- 不安定性の十分条件:  $\omega^2 < \mu^2$  であつ,  $(-g_{tt}) < 0$  となるエルゴ領域の寄与が無視できるとき,  $A, B, C_1, C_2$ . よつて, 増幅反射条件が満たされれば,  $\omega_I > 0$  となり, 系は不安定となる [22]:

- i) モード関数が有界.
- ii) 波動関数はエルゴ領域のずっと外にピークをもつ.
- iii)  $\omega$  の虚部が小さい:  $|\omega_I| \ll \omega_R$ .
- iv)  $\omega$  が増幅反射条件を満たす:  $\omega_R < m\Omega_h$ .

### 5.3.3 増大率

単位系  $c = \hbar = G = 1$ .

#### 1) 質量が大きい場合: $\mu M \gg 1$ (WKB 近似)

#### Reference

- T.J.M. Zouros and D.M. Eardley(1979)[22]

**WKB 近似解** 準束縛状態  $\omega^2 < \mu^2$  を考える. ポテンシャル障壁の影響が最小で, 不安定性が最大となる  $\omega_R \simeq \mu$  に限定し, 解を4つの領域に分けて考える: I( $r < r_1$ ), II( $r_1 < r < r_2$ ), III( $r_2 < r < r_3$ ), IV( $r > r_3$ ) (Fig.5.10)

- 振動的領域 I, III:  $\omega^2 > V(r)$  なので, 動径モードに対する WKB 解は,

$$R_{lm} = (r^2 + a^2)^{-1/2} u, \quad (5.3.15a)$$

$$u = k(r^*)^{-1/2} \{ A_+ e^{i\Theta(r)} + A_- e^{-i\Theta(r)} \}, \quad (5.3.15b)$$

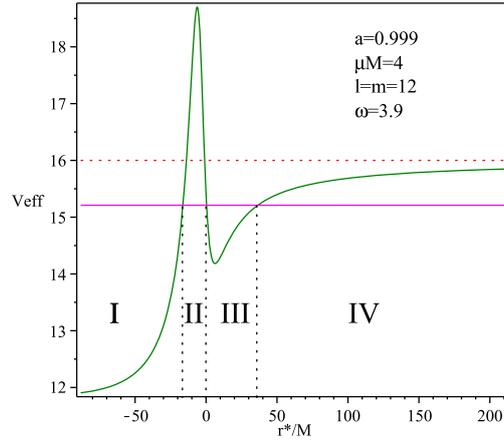


図 5.10: Division into four regions for the WKB approximation

ここで,  $A_{\pm}$  は定数で,

$$\Theta(r) = \int_{r_0^*}^{r^*} k(u)du, \quad k(r^*) = (\omega^2 - V(r))^{1/2}. \quad (5.3.16)$$

ただし,  $r_0^*$  は反射点  $\omega^2 = V(r)$  での  $r^*$  座標の値.

- トンネル領域 II, IV:  $\omega^2 < V(r)$  なので, 動径モードに対する WKB 解は,

$$u = \kappa(r^*)^{-1/2} \{B_- e^{-I(r)} + B_+ e^{I(r)}\}, \quad (5.3.17)$$

ここで,  $B_{\pm}$  は定数で

$$I(r) = \int_{r_0^*}^{r^*} \kappa(u)du, \quad \kappa(r^*) = (V(r) - \omega^2)^{1/2}. \quad (5.3.18)$$

- Airy 関数法: 接続点 (inflection pt) 近傍でのポテンシャルを線形近似すると, 振動領域では

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{|\Theta|}{k}} \{C_+ J_{1/3}(|\Theta|) + C_- J_{-1/3}(|\Theta|)\} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \left[ \left( C_+ e^{-\frac{5\pi i}{12}} + C_- e^{-\frac{\pi i}{12}} \right) e^{i|\Theta|} + \left( C_+ e^{\frac{5\pi i}{12}} + C_- e^{\frac{\pi i}{12}} \right) e^{-i|\Theta|} \right]. \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

トンネル領域では

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{|I|}{\kappa}} \{-C_+ I_{1/3}(|I|) + C_- I_{-1/3}(|I|)\} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi \kappa}} \left[ (C_- - C_+) e^{|I|} + \left( C_- e^{-\frac{\pi i}{6}} - C_+ e^{-\frac{5\pi i}{6}} \right) e^{-|I|} \right]. \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

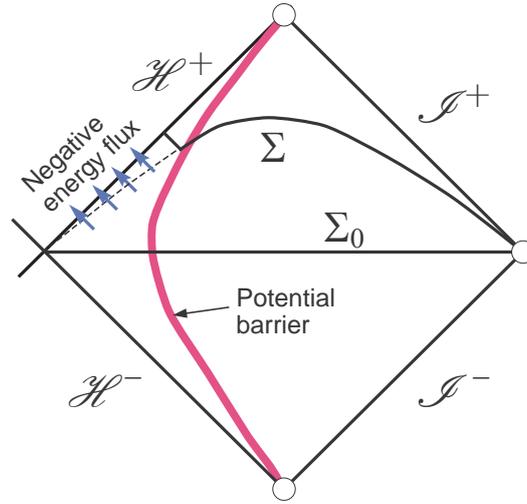


図 5.11: Flux integral to estimate the growth rate

- 解の接続：領域 I で infalling 条件  $A_+^I = 0$  を課し，得られた解を Airy 関数法で接続すると

$$A_-^I = A_0, \quad A_+^I = 0, \quad (5.3.21a)$$

$$B_+^{II} = e^{-\pi i/4} A_0, \quad B_-^{II} = 0, \quad (5.3.21b)$$

$$A_+^{III} = -iA_-^{III} = -ie^{I_{II}} A_0, \quad (5.3.21c)$$

$$B_-^{IV} = e^{-3\pi i/4} e^{I_{II} + i\Theta_{III}} A_0, \quad (5.3.21d)$$

$$(e^{\pi i/3} - 1)B_+^{IV} = 2e^{5\pi i/12} e^{I_{II}} \cos \Theta_{III}, \quad (5.3.21e)$$

ここで，

$$I_{II} = \int_{r_1^*}^{r_2^*} \kappa(r) dr^*, \quad \Theta_{III} = \int_{r_2^*}^{r_3^*} k(r) dr^*. \quad (5.3.22)$$

- 固有値方程式：束縛状態を考えているので， $B_+^{IV}$ 。これは，振動数に対する Bohr-Sommerfeld の量子化条件を与える。

$$\omega = \omega_n : \int_{r_2^*}^{r_3^*} k(r) dr^* = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.3.23)$$

不安定性増大率の評価 図 5.11 のような超曲面を考え，フラックス保存から，その上の KG ノルムの時間推進による変化率を求めると

$$-\omega_*(r_h^2 + a^2)|\tilde{R}|^2 = 2\omega_I N_{\Sigma'}(\Phi, \Phi). \quad (5.3.24)$$

これより,  $\omega_I$  は次のように評価される :

$$\omega_I = \frac{1}{2}\gamma e^{-2I_{II}}, \quad (5.3.25)$$

$$\gamma^{-1} \simeq \int_{r_2^*}^{r_3^*} \frac{dr^*}{k(r)} 4 \cos^2 \left( \Theta - \frac{\pi}{4} \right) \left\{ \omega_n \left( 1 - \frac{a^2 \zeta \Delta}{(r^2 + a^2)^2} \right) - \frac{2maMr}{(r^2 + a^2)^2} \right\} \quad (5.3.26)$$

Zouros と Eardley は, パラメータ  $a/M, \mu M, l, m, \omega$  の広い領域で  $\omega_I$  をこの式を用いて数値的に計算し, 成長率が次の時に最大となることを見いだした:

- i)  $l$  が最小,
- ii)  $m$  が最大, i.e.,  $m = l$ ,
- iii)  $a/M$  が最大, i.e.,  $a/M \simeq 1$ ,
- iv)  $\omega_R$  が最大, i.e.,  $\omega_R \sim 0.98\mu < m\Omega_h$ .

得られた成長率の最大値は, 各  $\mu M$  の値に対して,

$$M\omega_I \sim 10^{-7} \exp(-1.84\mu M), \quad (5.3.27)$$

小さな因子  $10^{-7}$  は (5.3.25) の  $\gamma$  に起因する.

## 2) 小質量の場合 : $\mu M \ll 1$ (MAE 法)

- References

- Detweiler S (1980)[7](Cf. Rosa J (2010)[18])

- $r \gg M$  での近似解

この領域では,  $R = R_{lm}(r)$  の方程式 (5.3.4) は, 水素原子に対する Schrödinger 方程式と同じ形の方程式

$$\frac{d^2(rR)}{dr^2} + \left( \omega^2 - \mu^2 + \frac{2M\mu^2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) (rR) \approx 0, \quad (5.3.28)$$

で近似できる. したがって,  $\sigma^2 = \mu^2 - \omega^2 > 0$  のとき, 準束縛状態の系列

$$R = \frac{A}{x} W_{\nu, l+1/2}(x) \sim e^{-x/2} x^\nu \quad (x = 2\sigma r \gg 1), \quad (5.3.29)$$

$$\nu = M\mu^2/\sigma = l + n + 1 + \delta\nu, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (5.3.30)$$

を解として持つ. ここで,  $\delta\nu$  は水素原子の厳密な束縛状態からのずれを表す複素数である. この解は, 領域  $\sigma M \ll x \ll 1$  では次のように振る舞う :

$$R \approx A(-1)^n \frac{(2l+1+n)!}{(2l+1)!} x^l + A(-1)^{n+1} n!(2l)!\delta\nu x^{-l-1}. \quad (5.3.31)$$

•  $\mu r \ll l$ での近似解

この領域では、微分方程式 (5.3.4) は

$$z(z+1)\frac{d}{dz}\left[z(z+1)\frac{dR}{dz}\right] + \{P^2 - l(l+1)z(z+1)\}R = 0, \quad (5.3.32)$$

と近似できる。ここで、

$$z = \frac{r - r_+}{r_+ - r_-}, \quad P = -\frac{2Mr_+}{r_+ - r_-}\omega_* \quad (5.3.33)$$

この方程式は厳密に解けて、ホライズンに落ち込む解は

$$R = C \left(\frac{z}{z+1}\right)^{iP} F(-l, l+1, 1+2iP; -z). \quad (5.3.34)$$

この解は、領域  $1 \ll z \ll l/(\omega_R M)$  では次のように近似される：

$$R \approx C \frac{(2l)!\Gamma(1+2iP)}{l!\Gamma(l+1+2iP)} z^l + C(-1)^{l+1} \frac{l!\Gamma(1+2iP)}{(2l+1)!\Gamma(-l+2iP)} z^{-l-1}. \quad (5.3.35)$$

• 成長率

これら2つの領域での漸近近似解が共通領域で一致することを要請すると、

$$\delta\nu = 2iP [2\sigma(r_+ - r_-)]^{2l+1} \frac{(2l+1+n)!}{n!} \left[ \frac{l!}{(2l)!(2l+1)!} \right]^2 \prod_{j=1}^l (j^2 + 4P^2). \quad (5.3.36)$$

これより、成長率が

$$\omega_R \simeq \mu \left\{ 1 - \left( \frac{\mu M}{l+1+n} \right)^2 \right\}^{1/2} \approx \mu \quad (5.3.37a)$$

$$\omega_I = 2\gamma\mu r_+(m\Omega_h - \mu)(\mu M)^{4l+4}, \quad (5.3.37b)$$

と決まる。ここで、

$$\gamma = \frac{2^{4l+2}(2l+1+n)!}{n!(l+1+n)^{2l+4}} \left( \frac{l!}{(2l)!(2l+1)!} \right)^2 \prod_{j=1}^l [j^2(1 - a^2/M^2) + 4r_+^2(\mu - m\Omega_h)^2]. \quad (5.3.38)$$

この成長率は、 $l = m = 1$  かつ  $a/M \sim 1$  で次の最大値を取る：

$$\omega_I \approx \frac{a}{24M^2}(\mu M)^9. \quad (5.3.39)$$

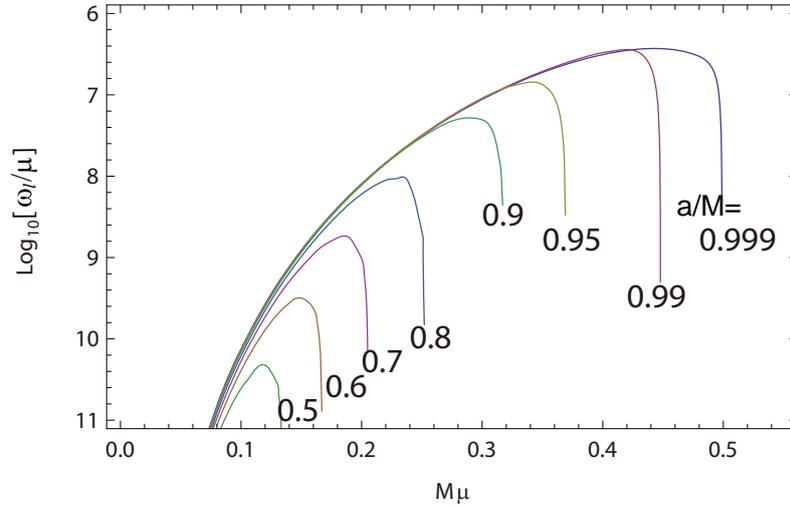


図 5.12: The instability growth rate for  $l = m = 1$ .

### 3) 数値計算による評価

- References

- Cardoso V, Yoshida (2005):最初の計算 [5]
- Leaver E (1985):Leaver 法 [14]
- Dolan S:[8].
- 高次元ブラックホールの QNM [5, ?]
- 高次元 adS 単純回転ブラックホールの SR 不安定 [12, 11].

- 動径モード関数  $R$  の級数展開

$$R(r) = \frac{x^{-i\sigma}}{(r - r_-)^{\chi-1}} e^{-\sigma r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x = \frac{r - r_+}{r - r_-}, \quad (5.3.40)$$

ここで

$$q = \frac{2r_+(\omega - m\Omega_h)}{r_+ - r_-}, \quad \sigma = (\mu^2 - \omega^2)^{1/2}, \quad \chi = -(\mu^2 - 2\omega^2)/\sigma. \quad (5.3.41)$$

- 展開係数の漸化式

これを動径方程式 (5.3.4) に代入すると, 展開係数  $a_n$  に対する 3 項漸化式

$$\alpha_n a_{n+1} + \beta_n a_n + \gamma_n a_{n-1} = 0. \quad (5.3.42)$$

を得る. ここで,

$$\alpha_n = (n + 1)(n + c_0), \quad \beta_n = -2n^2 + (c_1 + 2)n + c_3, \quad \gamma_n = n^2 + (c_2 - 3)n + c_4,$$

ただし,  $c_1, \dots, c_4$  は  $\omega, \sigma, m$  と  $\Lambda_{lm}$  で決まる定数.

• 連分数解

$n \rightarrow \infty$  で  $a_{n+1}/a_n$  がゼロに収束するとき,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} + \alpha_{n+1} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}} = -\frac{\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1}-} \frac{\alpha_{n+1} \gamma_{n+2}}{\beta_{n+2}-} \frac{\alpha_{n+2} \gamma_{n+3}}{\beta_{n+3}-} \dots \quad (5.3.43)$$

$a_1/a_0 = -\beta_0/\alpha_0$  なので, この方程式で  $n = 0$  とおくと,  $\omega = \omega_R + i\omega_I$  に対する固有値方程式が得られる:

$$\beta_0 - \frac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_{1-}} \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\beta_{2-}} \frac{\alpha_2 \gamma_3}{\beta_{3-}} \dots = 0. \quad (5.3.44)$$

この連分数は収束が早く, 適当な  $n$  で打ち切ることにより, 良い精度で固有値  $\omega^2$  を求めることができる. 図5.12は,  $l = m = 1$  に対する解の例である.

## §5.4

# 実際に宇宙に存在するブラックホールの引き起こすアクシオン不安定

### References

- the axiverse paper[1]
- Arvanitaki A, Dubovsky A[2]

### 5.4.1 $\mu - M$ 平面での不安定帯

増幅反射不安定の成長率 (まとめ)

$$\frac{\tau}{GM} \approx \begin{cases} 10^7 e^{1.84\alpha_g} & ; \alpha_g \gg 1, a = 1 \\ 24 \left(\frac{a}{M}\right)^{-1} (\alpha_g)^{-9} & ; \alpha_g \ll 1, \end{cases} \quad (5.4.1)$$

ここで

$$\alpha_g := GM\mu = \frac{\mu}{1.34 \cdot 10^{-10} \text{eV}} \cdot \frac{M}{M_\odot}. \quad (5.4.2)$$

成長率は  $\alpha_g \sim 1$  で最大:

$$\tau_{\text{sr}} \approx 0.2 \cdot 10^7 GM; \quad \alpha_g \simeq 0.44, a/M \simeq 0.999. \quad (5.4.3)$$

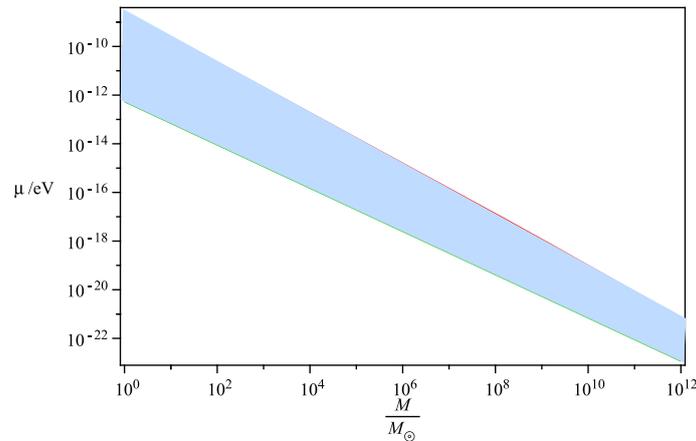


図 5.13: 不安定性成長時間が宇宙年齢以下となる  $\mu - M$  の帯状領域

### 不安定性の起きる質量

- スカラ場の質量が  $10^{-10}\text{eV}$  のとき，太陽質量  $M \sim M_\odot$  のブラックホールで不安定が実際に起きる．
- この質量は，QCD アクシオンの場合  $f_a \sim 10^{16}\text{GeV}$  に対応．
- ただし，現在の存在量が観測と整合的となるには，アクシオン場の初期振幅を  $10^{-3}f_a$  程度に小さく調整しないとイケない．

### 不安定性の時間発展

- 不安定性の成長は，BH の角運動量の減少をもたらす．
- このため，ある程度不安定性が成長すると，成長時間が宇宙年齢を超え，安定化する．

### 不安定帯

- 不安定性の成長率は，パラメーター  $\alpha_g = \mu M$  に非常に敏感．
- このため，成長率が宇宙年齢以下となるパラメータ領域は， $\mu - M$  平面で狭い帯状の領域となる．(図 5.13)
- 例えば，アクシオンの質量が  $\mu \approx 10^{-14}\text{eV}$  のとき，質量が  $10^2 M_\odot - 10^5 M_\odot$  の範囲にある BH のみが不安定性を引き起こす．このため，この帯域の BH の角運動量は，他の質量の BH より小さい角運動量を持つことになる．

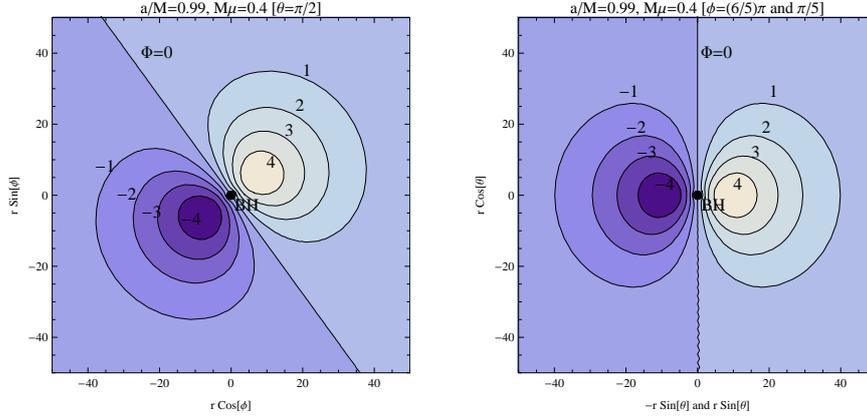


図 5.14: 最も不安定なモード ( $l = m = 1$ ) の波動関数の分布. 左は赤道面, 右は  $z$  軸を含む面での振幅.

### 5.4.2 G-atom

- 不安定が大きくなる束縛状態  $\omega \approx \mu$  では,  $\mu M$  が小さい場合のエネルギーレベルは (5.3.37a) より,

$$\omega_R^2 \simeq \mu^2 \left( 1 - \frac{\alpha_g^2}{2n^2} \right), \quad \omega_R < m\Omega_h, \quad (5.4.4)$$

ここで,  $n = n' + l + 1$  ( $n' = 0, 1, 2 \dots$ ).

- 最も不安定となるモード  $n' \sim 0$  に対し,  $n$  は

$$n \simeq l \sim \frac{\mu}{\Omega_h} = \alpha_g \frac{2r_h}{a}. \quad (5.4.5)$$

- したがって, モード関数のピークはエルゴ領域の外に有り, ホライズンから遠い:

$$\frac{r}{R_g} \sim \frac{n^2}{\alpha_g^2} \sim 4 \left( \frac{r_h}{a} \right)^2 \Rightarrow \mu r \sim 4\alpha_g \left( \frac{r_h}{a} \right)^2 \sim 1 \quad (5.4.6)$$

これは,  $a \sim M$  の場合, 最も不安定な束縛状態は完全に量子的な状態となることを意味している. 従って, 増幅反射不安定は, 中心のブラックホールをアキシオンの量子雲が取り囲む重力原子 (G-atom) を生み出す. (図 5.14)

### 5.4.3 重力波放出

図 5.14 に示したように, G 原子のアキシオン雲は非球対称で回転している. このため, G 原子は重力波を放出する.

#### 4 重極公式による評価

- (5.4.6) より, 雲は  $r_c \sim M(l+1)^2/\alpha_g^2$  程度の半径をもち,  $\Omega = (M/r_c^3)^{1/2}$  程度の角速度で回転している. これより, 4重極公式を使うと, 単位時間あたりにアクシオン雲から放出される重力波のエネルギーは

$$P = \frac{G}{45} |\ddot{Q}|^2 \sim \frac{G}{45} (r_c^2 \epsilon M)^2 \Omega^6 \sim \frac{\epsilon^2 \alpha_g^{10}}{45 G (l+1)^{10}} = G \frac{N^2 \alpha_g^{12}}{45 (l+1)^{10} (GM)^4}, \quad (5.4.7)$$

ここで,  $N$  は雲に含まれるアクシオン量子の数,  $\epsilon = \mu N/M$  は雲の質量とBHの質量の比.

- 4重極公式は, アクシオン雲の異なる量子レベルの間の遷移により放出される重力波の評価となっている. したがって,  $l \geq 2$  が必要で, 重力波によるエネルギー放出で系のエネルギーが変化する時間スケールは

$$\tau_{\text{GW}} \sim \frac{\epsilon M}{P} \approx \frac{45 GM (l+1)^{10}}{\epsilon \alpha_g^{10}} \approx 10^{14} GM \left( \frac{10^{-4}}{\epsilon} \right) \left( \frac{l+1}{3} \right)^{10} \left( \frac{0.44}{\alpha_g} \right)^{10}. \quad (5.4.8)$$

これより,  $\epsilon \sim 10^{-4}$ ,  $\alpha_g \gtrsim 1$  に対し

$$\tau_{\text{GW}}/\tau_{\text{sr}} \approx 0.1 \times e^{-1.844(\alpha_g-2)} (2/\alpha_g)^{10}. \quad (5.4.9)$$

- 時間発展

- \*  $\alpha_g < 2$ : GW 放出は SR 不安定の成長を妨げない.
- \*  $\alpha_g > 2$ :  $\epsilon \sim 10^{-4}$  のとき,  $\tau_{\text{GW}} = \tau_{\text{sr}}$ . すなわち,  $\epsilon \sim 10^{-4}$  に達すると, SR 不安定にもかかわらずアクシオン雲は成長を止める. 一般に,  $\alpha_g$  が大きいほど, 小さな  $\epsilon$  で定常状態に達する.

- GW の観測可能性

(5.4.7) より, 観測される GW の振幅は

$$h \approx 10^{-22} \left( \frac{\epsilon}{10^{-4}} \right) \left( \frac{c^3}{GM\omega} \right) \left( \frac{100 \text{Mpc}}{d} \right) \left( \frac{M}{10^5 M_\odot} \right) \left( \frac{\alpha_g}{2} \right)^5 \left( \frac{3}{l+1} \right)^5 \quad (5.4.10)$$

これより, 質量が  $10^{-15} \text{eV} \lesssim \mu \lesssim 10^{-20} \text{eV}$  の範囲にあるアクシオンが存在すると, 増幅反射不安定により放出された GW が advanced LIGO などで検出可能となる.

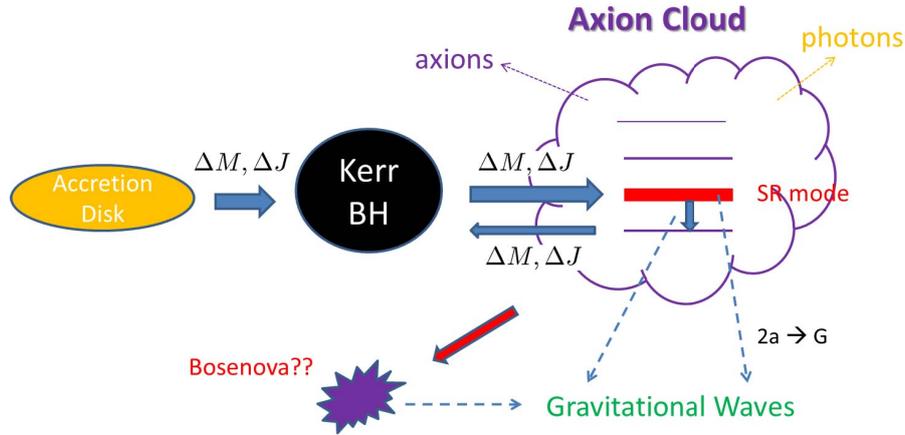


図 5.15: The fate of an axion cloud around a black hole formed by instability.

### 重力波放出量に対する公式

無限遠でのエネルギーフラックス TT ゲージ条件 (??) を満たす重力波型摂動  $h_{ij}^{\text{TT}}$  に対し, そのエネルギー運動量テンソルを

$$4\kappa^2 T_{\mu\nu}^{\text{GW}} = \partial_\mu h^{\text{TT}ij} \partial_\nu h_{ij}^{\text{TT}} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial_\lambda h^{\text{TT}ij} \partial_\lambda h_{ij}^{\text{TT}}) \quad (5.4.11)$$

により定義する. いま,  $\mathcal{I}^+$  近傍で  $h_{ij}$  が

$$h_{rr}^{\text{TT}}, \frac{1}{r} h_{rA}^{\text{TT}} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (5.4.12)$$

$$(h^{\text{TT}})_A^B(r\Omega, t) \sim \frac{1}{r} \sum_{\omega, s, l, m} \left[ A_{slm}(\omega) (Y_{lm}^{(s)})_{AB}(\Omega) e^{-i\omega u} + \text{cc} \right], \quad (5.4.13)$$

$$\int_{S^2} d\Omega Y_{lm}^{(s)} (Y_{l'm'}^{(s')})^* = C_{lm}^s \delta^{ss'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (5.4.14)$$

と振る舞うとき, 無限遠に放出されるエネルギーは

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{I}^+} &= \int_{\mathcal{I}^+} T_\mu^t d\Sigma^\mu \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int du \int_{S^2} d\Omega (-T_t^t + T_r^t) \\ &= \frac{1}{8\kappa^2} \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int du \int_{S^2} d\Omega (\partial_u h^{\text{TT}i}_j)^2 \\ &= \frac{T}{4\kappa^2} \sum_{lms, \omega} \omega^2 |A_{lm}^s(\omega)|^2. \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

重力波放出率 一般に,  $u_{\mu\nu}^{\text{TT}}$  を真空での波動方程式

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \quad (5.4.16)$$

の TT-gauge での任意の解,  $\psi_{\mu\nu}$  を源のある波動方程式

$$\Delta_L \psi_{\mu\nu} = -\square \psi_{\mu\nu} - 2R_{\mu\alpha\nu\beta} \psi^{\alpha\beta} = -2\kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (5.4.17)$$

の解とする. このとき, 任意の時空領域  $D$  に対して,

$$\begin{aligned} N_{\partial D}(u^{\text{TT}}, \psi) &:= i \int_{\partial D} d\Sigma_\mu u_{\alpha\beta}^{\text{TT}*} \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi^{\alpha\beta} = i \int_D d^4x u_{\alpha\beta}^{\text{TT}*} \Delta_L \psi^{\alpha\beta} \\ &= -2i\kappa^2 \int_D d^4x u_{\mu\nu}^{\text{TT}*} T^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

この式で  $D$  の境界を  $\mathcal{I}^+$  まで押しやると, 左辺への無限遠よりの寄与は  $\psi$  のゲージ変換に対して不変で (後述),

$$N_{\mathcal{I}^+}(u^{\text{TT}}, \psi) = N_{\mathcal{I}^+}(u^{\text{TT}}, h) = N_{\mathcal{I}^+}(u^{\text{TT}}, h^{\text{TT}}). \quad (5.4.19)$$

よって,  $u^{\text{TT}}$  として,  $\mathcal{I}^+$  で

$$u_{\omega,s,l,m}^{\text{TT}} \sim \frac{1}{r} (Y_{lm}^{(s)}) e^{-i\omega u}, \quad (5.4.20)$$

ホライズン  $\mathcal{H}^+$  でゼロとなる複素基本解を用いると,

$$T \times 2\omega C_{lm}^s A_{lm}^s = -2i\kappa^2 \int_D d^4x \sqrt{-g} u_{\omega,s,l,m}^{\text{TT}\mu\nu} {}^* T_{\mu\nu}. \quad (5.4.21)$$

以上より,,

$$\langle u, T \rangle := \frac{1}{T} \int_D d^4x \sqrt{-g} u^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \quad (5.4.22)$$

と定義すると,

$$\dot{E}_{\mathcal{I}^+} = \frac{\kappa^2}{4} \sum_{lms,\omega} |C_{lm}^s|^{-2} |\langle u_{lms,\omega}^{\text{TT}}, T \rangle|^2. \quad (5.4.23)$$

### 平坦背景時空近似

背景時空を平坦時空で近似すると,  $u_{lms,\omega}^{\text{TT}}$  および  $\Phi$  を具体的に求めることができ, 重力波放出率を準解析的に求めることができる. ただし, この近似は  $\mu M \ll 1$  の時にのみ良い近似となり, 特に  $\Phi$  は

$$\hat{\Phi} = -\frac{\sqrt{2E_a}}{\omega} (2k)^{3/2} \sqrt{\frac{(n-\ell-1)!}{2n(n+\ell)!}} e^{-i\omega t} e^{-kr} (2kr)^\ell L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(2kr) Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (5.4.24)$$

ただし,

$$k := \sqrt{\mu^2 - \omega^2} = \frac{M\mu^2}{n}; \quad n := \ell + 1 + n_r, \quad n_r = 0, 1, 2, \dots \quad (5.4.25)$$

また,  $E_a$  はアキシオンの全エネルギーを表す量:

$$E_a = \int T_{tt} r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi. \quad (5.4.26)$$

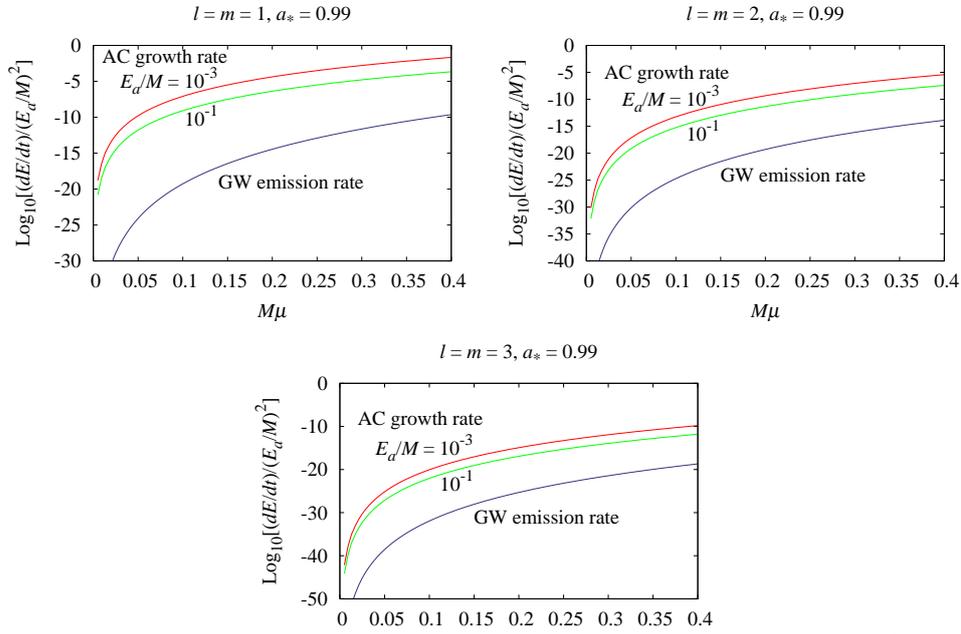


図 5.16: 平坦近似 :  $(E_a/M)^2$  を単位  $\mu$  した重力波によるエネルギー放出率とアクション増幅反射不安定成長率の比較.  $\ell = m = 1, 2, 3, n_r = 0, a_* = 0.99$ .

- ベクトル型摂動 : このときは  $\dot{P} = 0$ .
- スカラ型摂動 :

$$\frac{dE_{\text{GW}}}{dt} = C_{nl} \left( \frac{E_a}{M} \right)^2 (\mu M)^{Q_\ell}, \quad (5.4.27a)$$

$$Q_\ell = \begin{cases} 16, & (\ell = 1), \\ 4\ell + 10, & (\ell \geq 2), \end{cases} \quad (5.4.27b)$$

$$C_{nl} = \begin{cases} \frac{\pi^2 (n^2 - 1)^2}{160 n^{10}}, & (\ell = 1), \\ \frac{n^{\ell+1} \ell (\ell - 1)^2 [(\ell + n)!]^2 \Gamma(2\ell)^2}{(2\ell - 1)(\ell + 1)(\ell!)^4 \Gamma(4\ell + 3) \Gamma(n - \ell)^2 n^{4\ell+8}}, & (\ell \geq 2). \end{cases} \quad (5.4.27c)$$

## Kerr 時空での評価

### 5.4.4 ポーズノバ

#### 準解析的な解析

- 自己相互作用

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - 2\mu^2 f_a^2 \sin^2 \left( \frac{\phi}{2f_a} \right) \right]. \quad (5.4.28)$$

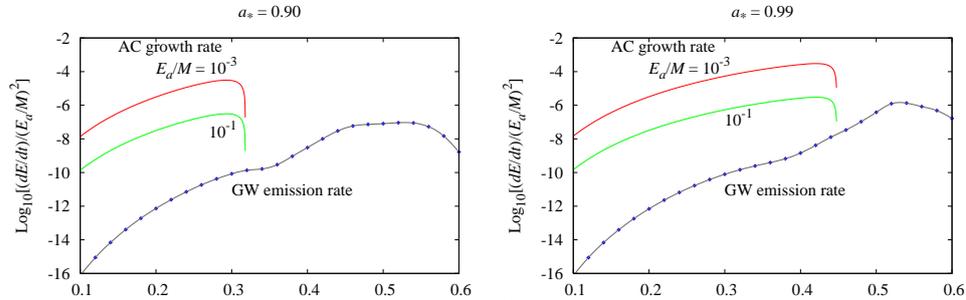


図 5.17: Kerr 時空での GW エネルギー放出率:  $(\ell, m) = (1, 1)$ .  $a_* = 0.90, 0.99$ .  $\tilde{\ell} = 2, 3, 4, 5$ .

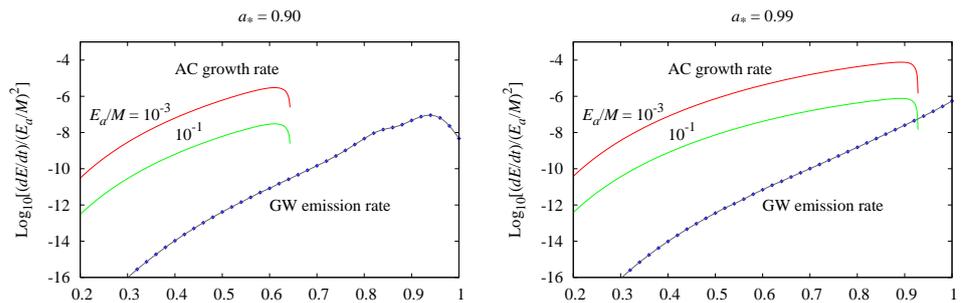


図 5.18: Kerr 時空での GW エネルギー放出率:  $(\ell, m) = (2, 2)$ .  $a_* = 0.90, 0.99$ .  $\tilde{\ell} = 4, 5, 6, 7$ .

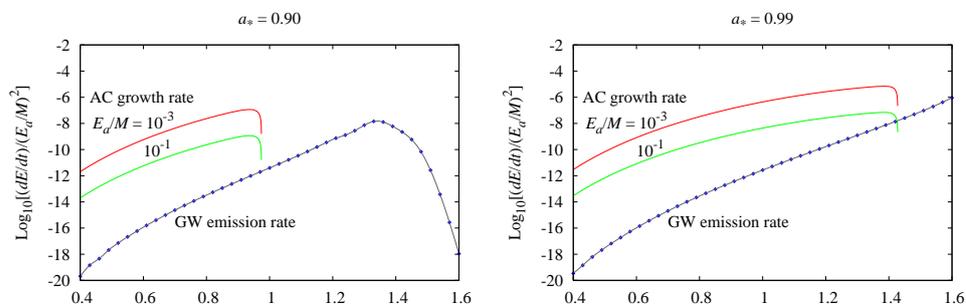


図 5.19: Kerr 時空での GW エネルギー放出率:  $(\ell, m) = (3, 3)$ .  $a_* = 0.90, 0.99$ .  $\tilde{\ell} = 6, 7, 8, 9$ .

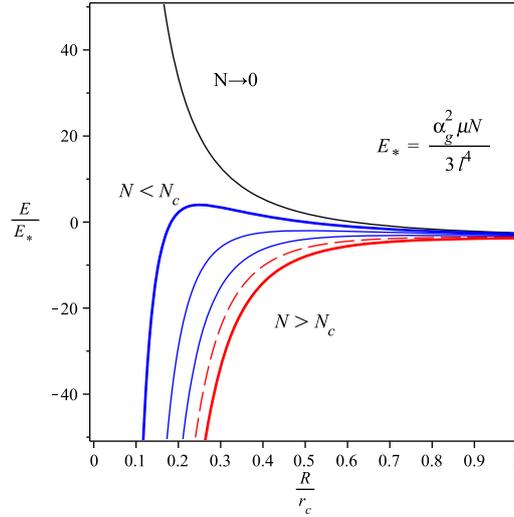


図 5.20: アクシオン雲のエネルギーのサイズ  $R$  依存性

- 非相対論的近似

$$\phi \simeq \frac{1}{\sqrt{2\mu}} (e^{-i\mu t}\psi + e^{i\mu t}\psi^*). \quad (5.4.29)$$

とおくと,  $|\phi|/f_a \ll 1$  のとき,

$$S_{\text{NR}} = \int d^4x \left[ i\psi^* \partial_t \psi - \frac{1}{2\mu} \partial_i \psi \partial_i \psi^* - \mu \Phi_g \psi^* \psi + \frac{1}{16f_a^2} (\psi^* \psi)^2 \right]. \quad (5.4.30)$$

- 最後の項が, 小振幅の時の主要な非線形効果を現す. この相互作用は引力なので, アクシオン雲が十分成長し高密となると, ボーズ・アインシュタイン凝縮の場合と同様, ボーズノバといわれる爆縮現象が起きることが予想される [2].
- アクシオン雲の全エネルギー

$$\begin{aligned} E &= \frac{V}{2\mu} \langle |\nabla \psi|^2 \rangle + \mu \Phi_g V \langle |\psi|^2 \rangle - \frac{V}{16f_a^2} \langle |\psi|^4 \rangle \\ &\approx \frac{N}{2\mu} \left( \frac{l^2}{r^2} + \frac{1}{R^2} \right) - \frac{\alpha_g N}{r} - \frac{N^2}{16f_a^2 R^3}, \end{aligned}$$

ここで,  $r$  は雲の中心と BH 中心の距離,  $R$  は雲の広がりのサイズ.  $E$  が極小となる  $r$  を求めると, アクシオン雲に対する Kepler 半径が得られる:

$$r_c \approx \frac{l^2}{\alpha_g \mu} \Rightarrow E \approx \frac{N}{2\mu R^2} - \frac{N^2}{16f_a^2 R^3} - \frac{\alpha_g N}{2r_c}. \quad (5.4.31)$$

- ボーズノバ

このエネルギーは,

$$R = R_m \equiv \frac{3\mu N}{16f_a^2} \quad (5.4.32)$$

で極大となる. このサイズが  $R_m < r_c$  を満たすときは, 雲のサイズは  $R \sim r \sim r_c$  で安定化する. しかし, 図 5.20 に示したように,  $r_c < R_m$  となると,  $R < r_c$  でエネルギー  $E$  は  $R$  の単調増加関数となり, 最初  $R \sim r$  であった雲は不安定となり急速につぶれる. これは, 雲の質量が臨界値

$$r_c < R_m \Leftrightarrow \mu N > \frac{16l^2 f_a^2}{3\alpha_g \mu} \Leftrightarrow \epsilon = \frac{\mu N}{M} > \frac{l^2 f_a^2}{\alpha_g^2 m_{\text{pl}}^2} \approx 10^{-4}. \quad (5.4.33)$$

を超えると起きる.

### 数値シミュレーション

**概要** 実際のアクシオン相互作用は4次ではなく,  $\cos(\phi/f_a)$  に比例し,  $|\phi|/f_a$  が1のオーダーとなると飽和する. したがって, 実際にボーズノバが起きるかどうか, また, その様子を知るには周知シミュレーションが必要となる.

### References

- Yoshino H, Kodama H (2012) [20]

**モデルとパラメーター** 線形理論における SR 不安定解のうち,  $l = m = 1, n = 1$  となるモードに以下の振幅を与えて初期値とする.

Simulations	Initial condition	$E/[(f_a/M_p)^2 M]$	nonlinearity
(A)	KG bound state, $\varphi_{\text{peak}}^{(A)}(0) = 0.60$	1430	weak
(B)	KG bound state, $\varphi_{\text{peak}}^{(B)}(0) = 0.70$	1862	strong

### 結果

- $\phi \sim f_a \Leftrightarrow \epsilon \sim 10^{-4}$  となると, 実際にボーズノバに対応するアクシオン雲の崩壊が起きる. (図 5.21)
- 臨界値より十分小さい振幅の線形解を初期値とすると, 雲の位置および広がり長の長周期振動が起きるが, 崩壊は起こらない. この振動は, SR 不安定成長率を増大させる傾向をもつ.
- アクシオン雲の崩壊が起きると, SR 不安定成長はとまり, BH に正のエネルギーが落下する. ただし, BH の角運動量は減少し続ける. これは,  $l = 1, m = -1$  のモードが生成されることを意味する.
- アクシオン雲の崩壊に伴い, 外に向かってエネルギーが放出される.

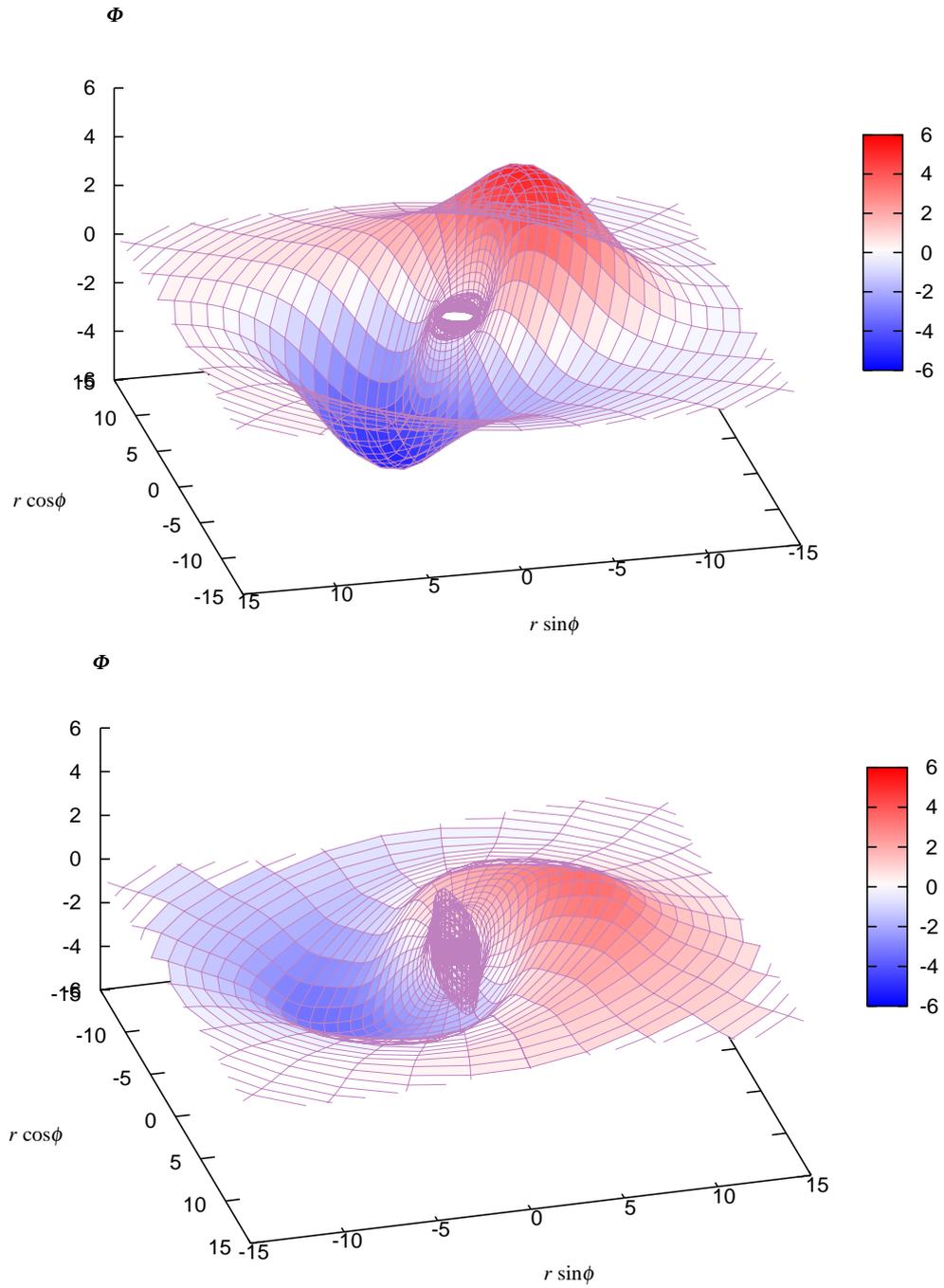


図 5.21: 数値シミュレーションにおけるボーズノバ現象のスナップショット（上は起きる前，下は起きた直後）

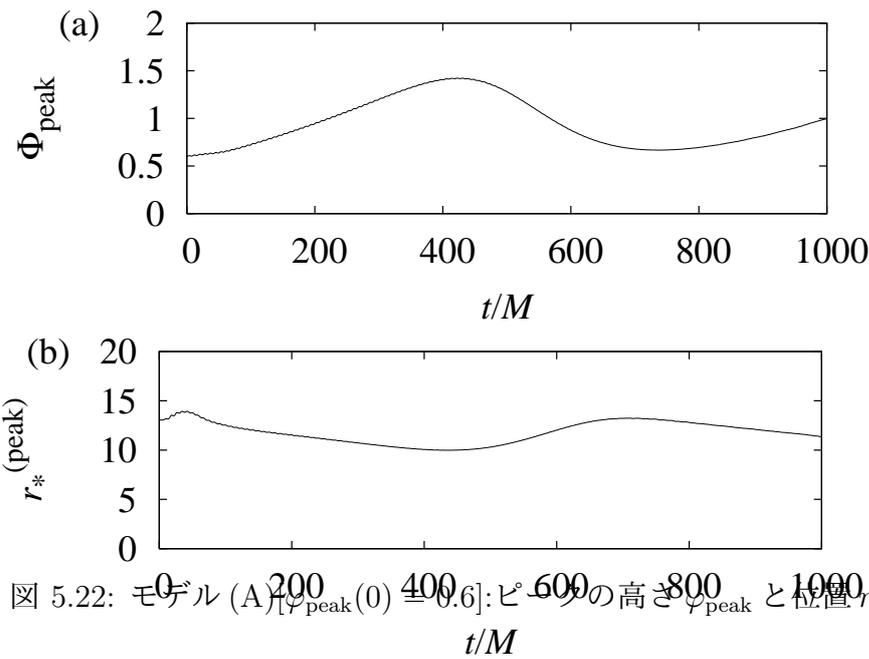


図 5.22: モデル (A) [ $\Phi_{\text{peak}}(0) = 0.6$ ]: ピークの高さ  $\Phi_{\text{peak}}$  と位置  $r_*^{(\text{peak})}$  の振る舞い.

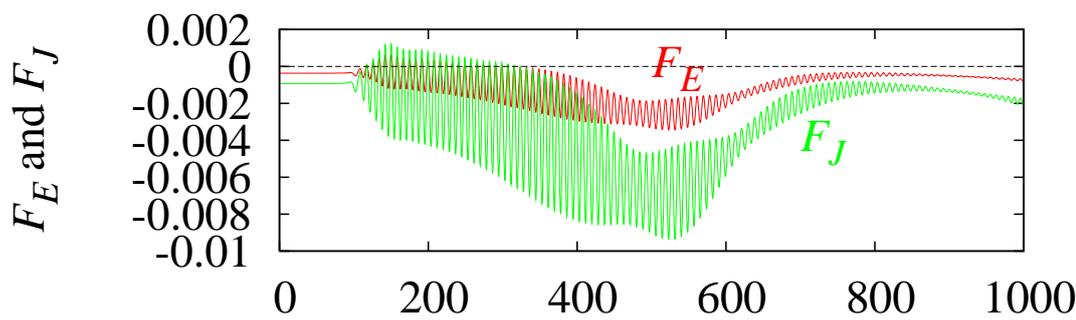


図 5.23: モデル (A): BH ホライズンに落ち込むエネルギーフラックス  $F_E$  と角運動量フラックス  $F_J$ . 非線形効果はBHからのエネルギーと角運動量の取り出しを増大させる.

図 5.24: モデル (A) :  $t/M = 0$  および 1000 におけるエネルギー密度  $dE/dr_*$  (左) と角運動量密度  $dJ/dr_*$  (右).

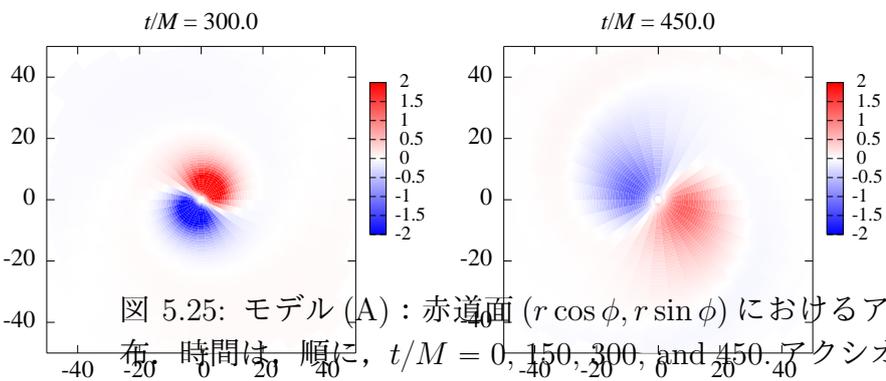
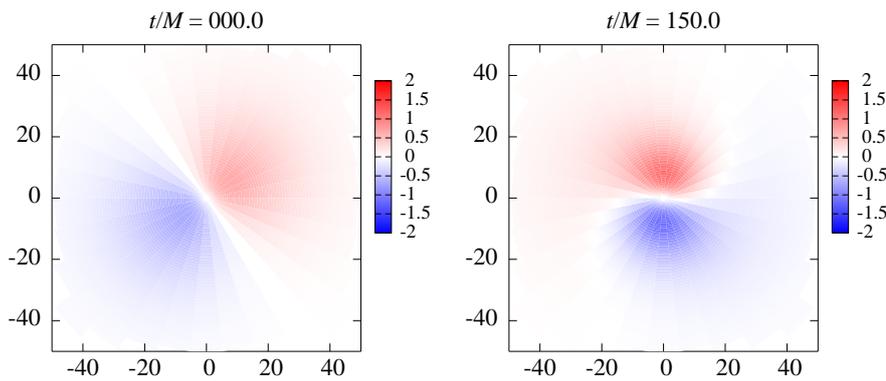
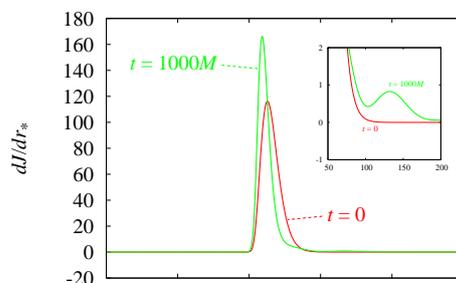
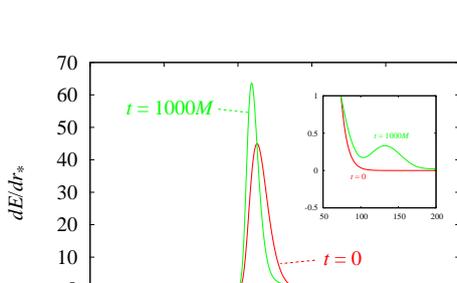


図 5.25: モデル (A) : 赤道面 ( $r \cos \phi, r \sin \phi$ ) におけるアキシオン場の振幅  $\phi$  の分布. 時間は順に,  $t/M = 0, 150, 300,$  and  $450$ . アキシオン場は時計と反対回りに回転.



第5章 Black

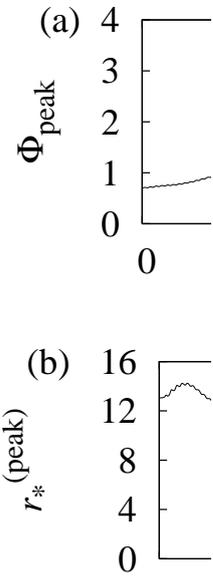


図 5.26: モデル A に非常に大きなノバが起きる。

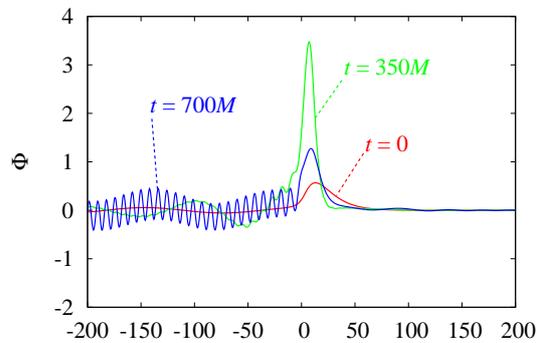


図 5.27: モデル (B):  $t = 500M$  での赤道面 ( $(r_*/M, \phi)$  座標系) でのスナップショット (左) と  $t/M = 0, 350, 700$  における赤道面の  $\phi = 0$  線上の場の値。

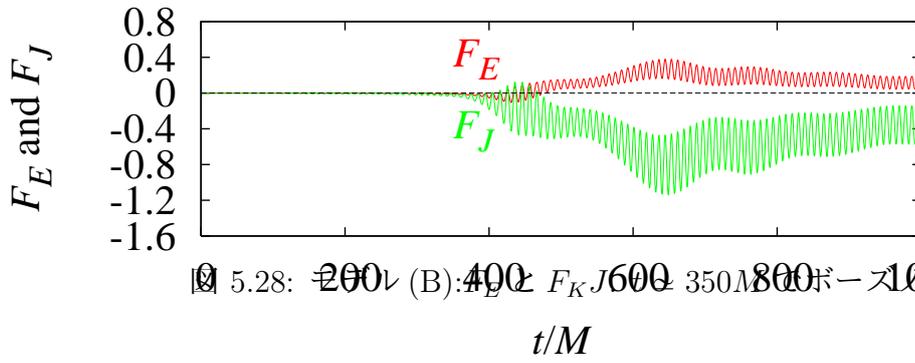


図 5.28: モデル (B):  $F_E$  と  $F_J$  の時間発展.  $t/M = 0, 200, 400, 600, 800, 1000$  の場合を示す.

図 5.29: モデル (B):  $dE/dr_*$  (左) と  $dJ/dr_*$  (右).  $t/M = 0, 750, 1500$

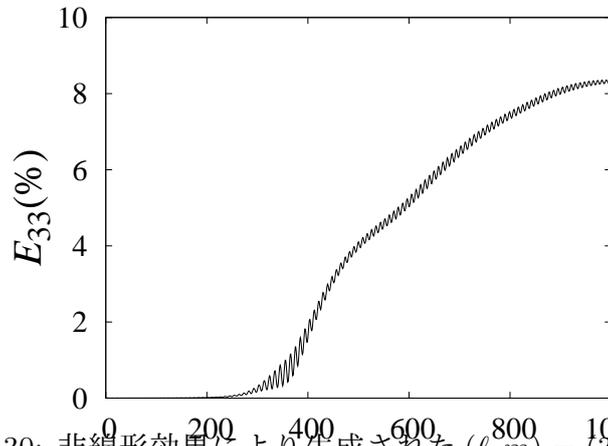


図 5.30: 非線形効果により生成された  $(\ell, m) = (3, \pm 3)$  モードのエネルギー  $E_{33}$  が全エネルギーに占める割合の時間変化.

図 5.31: アクシオン場の振幅の時間発展に対する 2つの可能性.

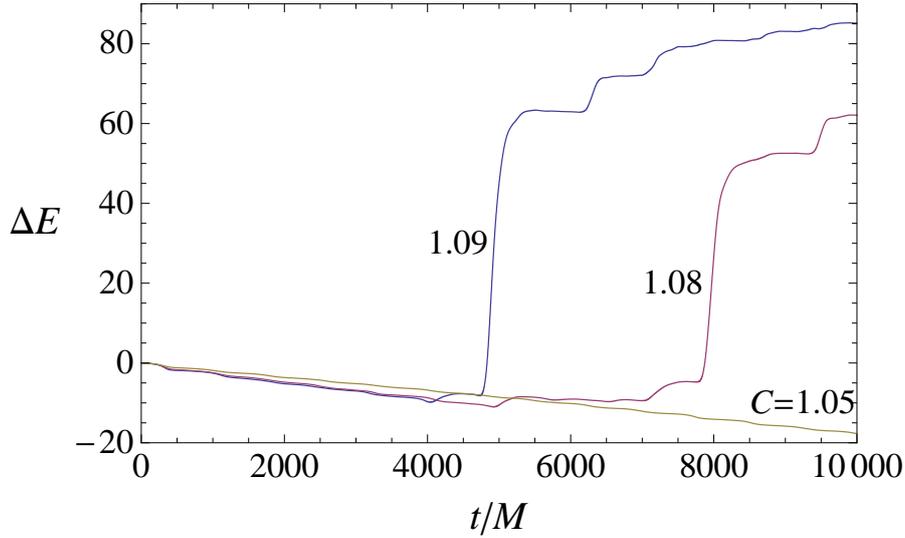


図 5.32: BH に吸収された全エネルギー  $\Delta E$  の時間変化.  $C = 1.05, 1.08, 1.09$

有効ポテンシャルによる解析

- $\varphi = \Phi/f_a$  に対する相対論的な作用積分

$$\hat{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - \mu^2 \left( \frac{\varphi^2}{2} + \hat{U}_{\text{NL}}(\varphi) \right) \right], \quad (5.4.34)$$

$$\hat{U}_{\text{NL}}(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2} - \cos\varphi = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \varphi^{2n}. \quad (5.4.35)$$

- 非相対論的近似

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} (e^{-i\mu t}\psi + e^{i\mu t}\psi^*). \quad (5.4.36)$$

とおくと, ニュートン近似で,  $\psi$  に対する作用は

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\text{NR}} &= \int d^4x \left[ \frac{i}{2} (\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi} \psi^*) - \frac{1}{2\mu} \partial_i \psi \partial_i \psi^* + \frac{\alpha_g}{r} \psi^* \psi - \mu^2 \tilde{U}_{\text{NL}}(|\psi|^2) \right], \\ \tilde{U}_{\text{NL}}(x) &= -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1/2)^n}{(n!)^2} x^n. \end{aligned} \quad (5.4.38)$$

ここで,  $\alpha_g := M\mu$ ,

- 集団変数: アクション波動関数  $\psi$  として次の形のものを考える:

$$\psi = A(t, r, \nu) e^{iS(t, r, \nu) + m\phi}, \quad (5.4.39)$$

$$A(t, r, \nu) \approx A_0 \exp \left[ -\frac{(r - r_p)^2}{4\delta_r r_p^2} - \frac{(\nu - \nu_p)^2}{4\delta_\nu} \right], \quad (5.4.40)$$

$$S(t, r, \nu) \approx S_0(t) + p(t)(r - r_p) + P(t)(r - r_p)^2 + \pi_\nu(t)(\nu - \nu_p)^2 \quad (5.4.41)$$

以下では,  $m = 1, \nu_p = 0$  とおく. 集団座標の意味は

- $\delta_r(t)$ : 波束の動径方向の広がり.
- $\delta_\nu(t)$ : 波束の  $\theta$  方向の広がり.
- $(r_p(t), \nu_p(t))$ : 波束のピーク位置の座標.

- 有効作用：総アクション数を

$$N = \int d^3x A^2 \approx 4\pi^2 A_0^2 \sqrt{\delta_r \delta_\nu} r_p^3 (1 + \delta_r). \quad (5.4.42)$$

で定義すると、集団変数に対する有効作用は、

$$L = -\dot{S}_0 N + p \dot{r}_p N + (\dot{p} - 2P \dot{r}_p) 2r_p \frac{\delta_r}{1 + \delta_r} N - \dot{P} r_p^2 \delta_r \frac{1 + 3\delta_r}{1 + \delta_r} N - \dot{\pi}_\nu \delta_\nu N \quad (5.4.43a)$$

$$H = T + V; \quad (5.4.43b)$$

$$T = \frac{N}{2\mu} \left[ p^2 + 8pPr_p \frac{\delta_r}{1 + \delta_r} + 4P^2 r_p^2 \delta_r \frac{1 + 3\delta_r}{1 + \delta_r} + 4\pi_\nu^2 \frac{\delta_\nu}{r_p^2 (1 + \delta_r)} \right], \quad (5.4.43c)$$

$$\frac{V}{N\mu\alpha_g^2} = \frac{1}{2(\alpha_g \mu r_p)^2 (1 + \delta_r)} \left( 1 + \delta_\nu + \frac{1}{4\delta_r} + \frac{1}{4\delta_\nu} \right) - \frac{1}{(\alpha_g \mu r_p)(1 + \delta_r)} \quad (5.4.43d)$$

$$-\alpha_g^{-2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1/2)^n}{(n!)^2 n} \left[ \frac{N_*}{\sqrt{\delta_r \delta_\nu} (\alpha_g \mu r_p)^3 (1 + \delta_r)} \right]^{n-1}, \quad (5.4.43e)$$

ここで

$$N_* = (\alpha_g^3 \mu^2 / 4\pi^2) N. \quad (5.4.44)$$

ただし、 $\delta_\nu$  について1次の項のみを残した。

- これは次の様に書き換えられる：

$$L = T - V; \quad (5.4.45a)$$

$$T = \frac{1}{2} A \dot{\delta}_r^2 + B \dot{\delta}_r \dot{r}_p + \frac{1}{2} C \dot{r}_p^2 + \frac{1}{2} D \dot{\delta}_\nu^2, \quad (5.4.45b)$$

ここで、

$$A = \frac{1}{4} N \mu r_p^2 \frac{1 + 45\delta_r + 198\delta_r^2 + 126\delta_r^3 + 45\delta_r^4 + 9\delta_r^5}{(1 + \delta_r)^3 \delta_r (1 + 3\delta_r^2)}, \quad (5.4.46a)$$

$$B = \frac{1}{2} N \mu r_p \frac{-7 - 30\delta_r + 54\delta_r^2 + 30\delta_r^3 + 9\delta_r^4}{(1 + \delta_r)^2 (1 + 3\delta_r^2)}, \quad (5.4.46b)$$

$$C = N \mu \frac{1 + 6\delta_r - 26\delta_r^2 + 18\delta_r^3 + 9\delta_r^4}{(1 + \delta_r)(1 + 3\delta_r^2)}, \quad (5.4.46c)$$

$$D = \frac{1}{4} N \mu r_p^2 \frac{(1 + \delta_r)}{\delta_\nu}. \quad (5.4.46d)$$

- ポテンシャルの  $N_*$  依存性：3次元の変数空間  $(\delta_r, \delta_\nu, \alpha_g \mu r_p)$  における極点は、元のポテンシャルの形や  $N_*$  の値によらず、常の次の関係式で決まる曲線上に載ることが占めさえる：

$$\delta_r = \frac{-1 + 4\delta_\nu^2 + \sqrt{1 - 8\delta_\nu + 8\delta_\nu^2 + 64\delta_\nu^3 + 16\delta_\nu^4}}{2(-2 + 4\delta_\nu + 16\delta_\nu^2)}, \quad (5.4.47a)$$

$$\alpha_g \mu r_p = 4\delta_\nu - \frac{1}{2\delta_\nu} + \frac{1}{4\delta_r} + 1. \quad (5.4.47b)$$

この曲線上でのポテンシャルの振る舞いと極点の位置をプロットしたのが図5.33と図5.34である。

- 極小点における振動周期

–  $\alpha_g = 0.4, N_* = 1.1.$

$$\left(\frac{\omega_{\text{EG}}}{\mu\alpha_g^2}\right)^2 = 1.141, 0.249, \text{ and } 0.0166, \quad (5.4.48)$$

$$\Delta q_i = \begin{pmatrix} 0.110 \\ -0.027 \\ 0.994 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.075 \\ 0.724 \\ 0.686 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -0.378 \\ -0.005 \\ 0.925 \end{pmatrix} \quad (5.4.49)$$

第3の固有振動は長周期振動を説明する：

$$\Delta t = 761M. \quad (5.4.50)$$

–  $\alpha_g = 0.4, N_* = 1.3$

$$\left(\frac{\omega_{\text{EG}}}{\mu\alpha_g^2}\right)^2 = 14.06, 5.59, \text{ and } 0.175, \quad (5.4.51)$$

$$\Delta q_i = \begin{pmatrix} 0.218 \\ -0.030 \\ 0.975 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.070 \\ 0.927 \\ 0.367 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -0.640 \\ -0.085 \\ 0.763 \end{pmatrix} \quad (5.4.52)$$

第1の固有振動は短周期振動を説明する：

$$\Delta t = 26M. \quad (5.4.53)$$

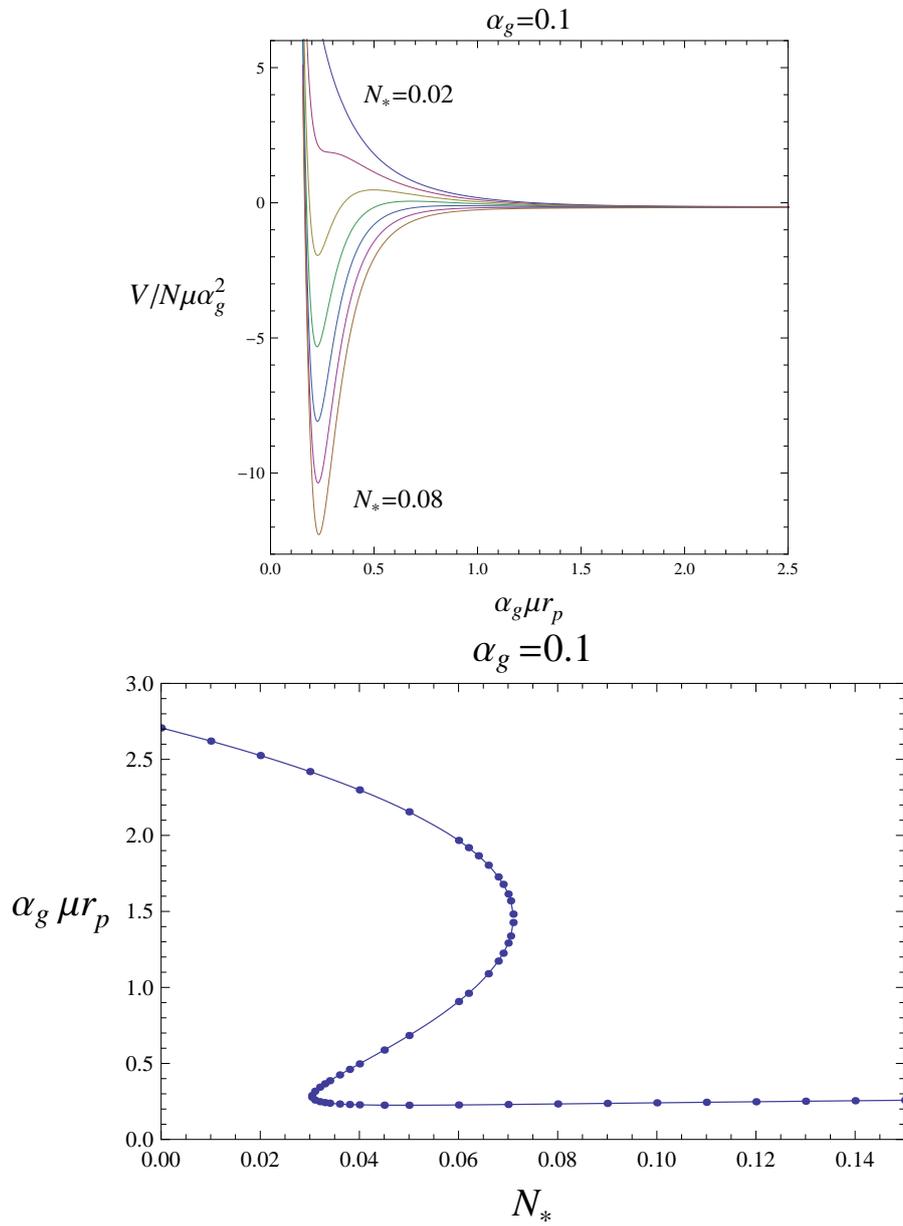


図 5.33:  $\alpha_g = 0.1$ :  $\alpha_g\mu r_p$  の関数としての有効ポテンシャル  $V$  (上) とポテンシャルの臨界点 (下) のパラメータ  $N_*$  への依存性  $N_* = 0.02, \dots, 0.08$  で 0.01 刻み.

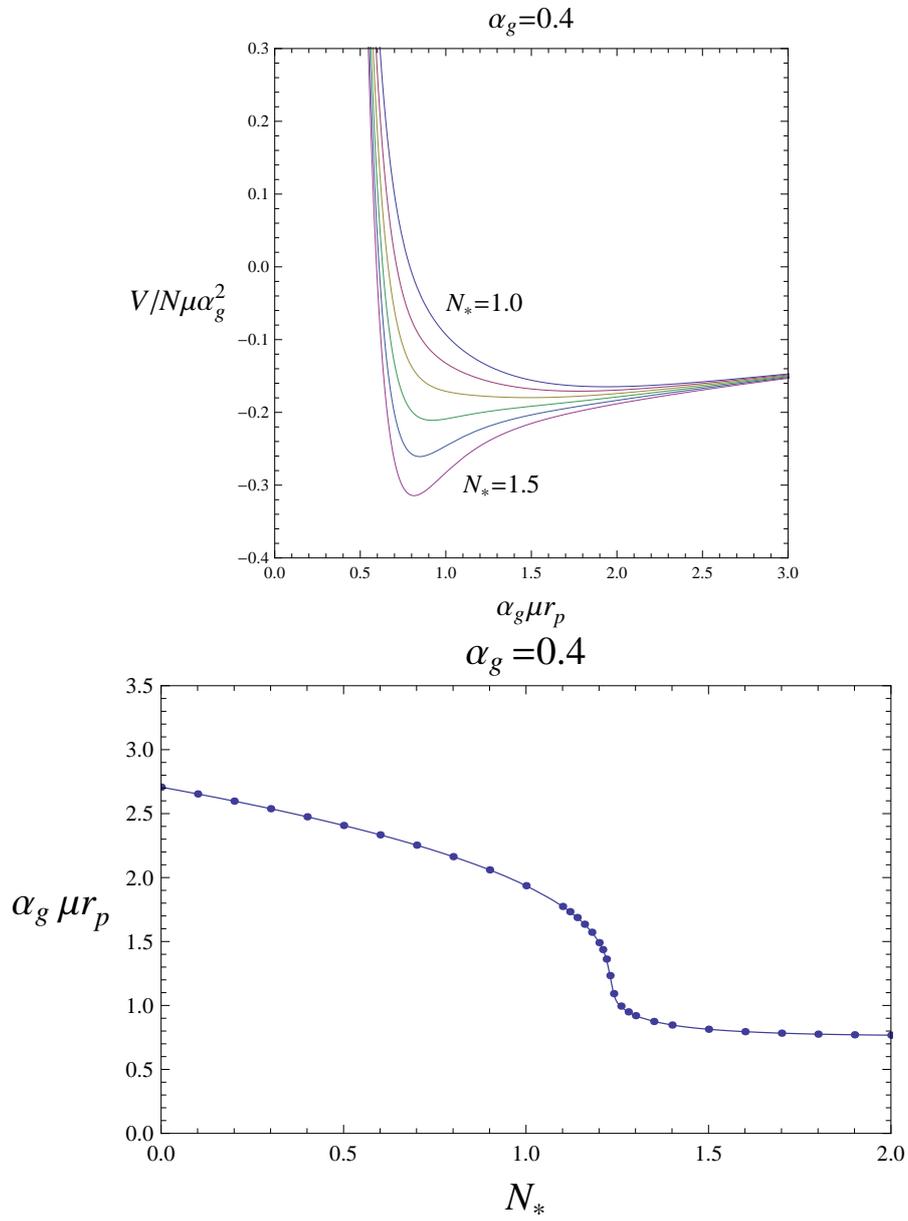


図 5.34:  $\alpha_g = 0.4$ :  $\alpha_g\mu r_p$  の関数としての有効ポテンシャル  $V$  (上) とポテンシャルの臨界点 (下) のパラメータ  $N_*$  への依存性  $N_* = 1.0, \dots, 1.5$  で 0.1 刻み.

## 関連図書

- [1] Arvanitaki, A., Dimopoulos, S., Dubovsky, S., Kaloper, N. and March-Russell, J.: String Axiverse, *Phys. Rev. D* **81**, 123530 (2010).
- [2] Arvanitaki, A. and Dubovsky, S.: Exploring the string axiverse with precision black hole physics, *Phys. Rev. D* **83**, 044026 (2011).
- [3] Cardoso, V., Dias, O., Lemos, J. and Yoshida, S.: The Black hole bomb and superradiant instabilities (Erratum: *Phys. Rev. D*70:049903, 2004), *Phys. Rev. D* **70**, 044039 (2004).
- [4] Cardoso, V., Dias, O. and Yoshida, S.: Classical instability of Kerr-AdS black holes and the issue of final state, *Phys. Rev. D* **74**, 044008 (2006).
- [5] Cardoso, V. and Yoshida, S.: Superradiant instabilities of rotating black branes and strings, *JHEP* **0507**, 009 (2005).
- [6] Damour, T., Deruelle, N. and Ruffini, R.: *Nuovo Cimento Lett.* **15**, 257 (1976).
- [7] Detweiler, S.: Klein-Gordon Equation And Rotating Black Holes., *Phys. Rev. D* **22**, 2323–6 (1980).
- [8] Dolan, S.: Instability of the massive Klein-Gordon field on the Kerr spacetime, *Phys. Rev. D* **76**, 084001 (2007).
- [9] Douglas, M. and Kachru, S.: Flux Compactification, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 733–96 (2007).
- [10] Hawking, S. and Ellis, G.: *The Large Scale Structure of Space-time*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1973).

- [11] Kodama, H.: Superradiance and Instability of Black Holes, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **172**, 11–20 (2008).
- [12] Kodama, H., Konoplya, R. and A, Z.: Gravitational stability of simply rotating Myers-Perry black holes: Tensorial perturbations., *Phys. Rev. D* **81**, 044007 (2010).
- [13] Kreuzer, M.: Toric Geometry and Calabi-Yau Compactifications, *Ukr. J. Phys.* **55**, 613 (2010).
- [14] Leaver, E.: An analytic representation for the quasi-normal modes of Kerr black holes, *Proc. R. Soc. London A* **402**, 285 (1985).
- [15] Penrose, R. and Floyd, R. M.: Extraction of rotational energy from a black hole, *Nature* **229**, 177–179 (1971).
- [16] Polchinski, J.: *String Theory*, Cambridge Univ. Press (1998).
- [17] Press, W. and Teukolsky, S.: *Nature* **238**, 211 (1972).
- [18] Rosa, J.: The Extremal black hole bomb., *JHEP* **1006**, 015 (2010).
- [19] Svrcek, P. and Witten, E.: Axions In String Theory, *JHEP* **0606**, 051 (2006).
- [20] Yoshino, H. and Kodama, H.: Bosenova collapse of axion cloud around a rotating black hole, *Prog. Theor. Phys.* **128**, 153 (2012).
- [21] Zel'dovich, Y.: *Sov. Phys. JETP Lett.* **14**, 180 (1971).
- [22] Zouros, T. and Eardley, D.: Instabilities Of Massive Scalar Perturbations Of A Rotating Black Hole., *Ann. Phys.* **118**, 139–55 (1979).