

宇宙現象を用いた 究極理論探査 (III)

- 京大基研 小玉英雄

首都大東京集中講義

2017/11/15 - 16

講義計画

第1章 宇宙論の基礎

- 1.1 膨張する宇宙
- 1.2 熱いビッグバン宇宙
- 1.3 加速する宇宙
- 1.4 4次元インフレーション宇宙モデルの概観

第2章 究極理論

- 2.1 究極理論の候補
- 2.2 超弦理論と超重力理論
- 2.3 D-Brane

第3章 インフレーションによる究極理論探査

- 3.1 問題点
- 3.2 加速膨張に対するNO-GO定理
- 3.3 超弦理論に基づくインフレーションモデル

第4章 Axion Cosmophysicsによる究極理論探査

- 4.1 What is axion?
- 4.2 String Axions
- 4.3 Direct Search
- 4.4 Axion Cosmophysics
- 4.5 重力波によるアクシオン探査
- 4.6 ガンマ線天文学によるアクシオン探査

第3章 インフレーションによる 究極理論探査

3. 1 問題点

Motivation

- In the 4D supergravity framework, there are a plethora of theories that realise dS vacua and inflation.
- In contrast, there are only a few examples of string compactification that realise dS vacua.
 - Why is it so difficult ?
 - What are the essential ingredients to realise dS vacua?
 - What are the uplifts of 4D supergravity theories realising dS vacua?
 - What are the meaning of potential in the string uplift?
 - Are the quantum effects the only way to evade this difficulty?

3.2 加速膨張に対するNO-GO定理

3. 2 加速膨張に対するNO-GO定理

Classical No-Go Theorems

Strong Energy Condition

Raychaudhuri Equations [1955]

$$n \frac{\ddot{\ell}}{\ell} = -\sigma^2 + \omega^2 - R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu$$

Strong Energy Condition
=Timelike convergence condition

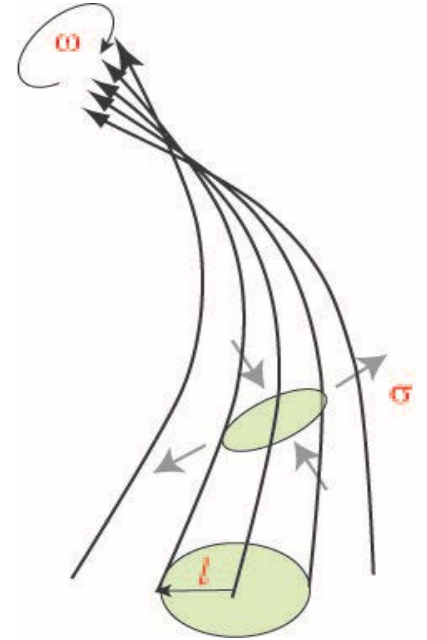
For any timelike vector V ,

$$\text{Ric}(V, V) = R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \geq 0$$

Implications

If the strong energy condition is satisfied;

- gravity becomes attractive;
- the cosmic expansion decelerates.



Gibbons' No-Go Theorem

Theorem For a compactification $M_{n+4} = X_4 \times Y_n$ of a higher dimensional theory by a classical solution satisfying the following conditions, the strong energy condition is satisfied in the four-dimensional spacetime X_4 :

1. The spacetime metric has the structure

$$ds^2(M_{n+4}) = W(y)^{1/2} ds^2(X_4) + ds^2(Y_n).$$

2. The internal space Y_n is a smooth compact manifold without boundary, and its metric is static.
3. The warp factor $W(y)$ is regular and bounded everywhere.
4. The original higher-dimensional theory satisfies the strong energy condition.

Gibbons GW (1984): Aspects of Supergravity Theories, Three lectures given at GIFT Seminar on Theoretical Physics, San Feliu de Guixols, Spain, Jun 4-11, 1984.

Proof

From the assumptions, we have

$$R_{VV}(X) = R_{VV} - \frac{1}{4W} \Delta_Y W$$

for any unit timelike vector V parallel to X . By integrating this equation over Y , we obtain

$$R_{VV}(X) \int_Y d\Omega(Y) W = \int_Y d\Omega(Y) \left[W R_{VV} - \frac{1}{4} \Delta_Y W \right]$$

If $R_{VV} \geq 0$ and W is regular and bounded everywhere, the right-hand side of this equation is non-negative. Hence, we obtain

$$R_{VV}(X) \geq 0$$

Q.E.D.

SEC for D=10/11 Supergravities

- M-theory (D=11)

$$R_{MN} = \frac{1}{12} F_{M\dots} F_{N\dots} - \frac{1}{6} |F_4|^2 g_{MN}$$

$$R_{00} = \frac{1}{18} F_{0ijk} F_0^{ijk} + \frac{1}{144} F_{ijkl} F^{ijkl}$$

- D=10 Type IIB Supergravity

$$R_{MN} = \frac{1}{2\tau_2^2} \nabla_{(M} \tau \nabla_{N)} \bar{\tau} + \frac{1}{4\tau_2} \left(G_{**(M} \bar{G}_{N)**} - \frac{1}{2} |G_3|^2 g_{MN} \right) + \frac{1}{96} \tilde{F}_{M*****} \tilde{F}_{N*****}$$

$$R_{00} = \frac{1}{2\tau_2^2} |\nabla_0 \tau|^2 + \frac{3}{16\tau_2} G_{0ij} \bar{G}_0^{ij} + \frac{1}{48\tau_2} G_{ijk} \bar{G}^{ijk} + \frac{1}{96} \tilde{F}_{0ijkl} \tilde{F}_0^{ijkl}$$

- D=10 Type I Supergravity

$$R_{MN} = \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial_N \phi + e^{-\phi} \left(\frac{1}{4} \tilde{H}_{M**} \tilde{H}_{N**} - \frac{1}{8} |\tilde{H}_3|^2 g_{MN} \right)$$

$$+ \frac{\alpha'}{4} e^{-\phi/2} \text{Tr} \left(F_{M*} F_{N*} - \frac{1}{8} |F_2|^2 g_{MN} \right)$$

$$R_{00} = \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 + \frac{e^{-\phi}}{48} \left(9 \tilde{H}_{0ij} \tilde{H}_0^{ij} + \tilde{H}_{ijk} \tilde{H}^{ijk} \right) + \frac{\alpha'}{64} e^{-\phi/2} \text{Tr} (14 F_{0i} F_0^i + F_{ij} F^{ij})$$

- D=10 Type IIA Supergravity

$$\begin{aligned}
 R_{MN} &= \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial_N \phi + e^{-\phi} \left(\frac{1}{4} H_{M**} H_N^{**} - \frac{1}{8} |H_3|^2 g_{MN} \right) \\
 &\quad + e^{\phi/2} \left(\frac{1}{12} \tilde{F}_{M***} \tilde{F}_N^{***} - \frac{3}{16} |\tilde{F}_4|^2 g_{MN} \right) \\
 &\quad + e^{3\phi/2} \left(\frac{1}{2} \tilde{F}_M * \tilde{F}_N^* - \frac{1}{16} |\tilde{F}_2|^2 g_{MN} \right) + \frac{m_0^2}{16} e^{5\phi/2} g_{MN}, \\
 R_{00} &= \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 + e^{-\phi} \left(\frac{3}{16} H_{0ij} H_0^{ij} + \frac{1}{48} H_{ijk} H^{ijk} \right) \\
 &\quad + e^{\phi/2} \left(\frac{5}{96} \tilde{F}_{0ijk} \tilde{F}_0^{ijk} + \frac{1}{128} \tilde{F}_{ijkl} \tilde{F}^{ijkl} \right) \\
 &\quad + e^{3\phi/2} \left(\frac{7}{16} \tilde{F}_{0i} \tilde{F}_0^i + \frac{1}{32} \tilde{F}_{ij} \tilde{F}^{ij} \right) - \frac{m_0^2}{16} e^{5\phi/2}
 \end{aligned}$$

Maldacena-Nunez's No-Go Theorem

[Maldacena JM, Nunez G (2001): IJMPA16, 822.]

Theorem For a compactification $M_D = X_d \times Y_n$ of a higher dimensional theory by a classical solution satisfying the following conditions, X_d cannot be de Sitter spacetime:

1. The spacetime metric has the structure

$$g(M_D) = \Omega(y)^2 [g(X_d) + \hat{g}(Y_n)].$$

2. The Newton constant in X_d is finite:

$$\int_Y d\mu_{\hat{g}} \Omega^{D-2} < \infty.$$

3. Near the boundary of Y_n or singularities of Ω , Ω decreases monotonically toward them.
4. In the original higher-dimensional theory, the potential is non-positive and all massless bosonic fields have positive kinetic terms.

Note: A stronger result can be obtained for the massive IIA supergravity.

Proof

In the Einstein equations

$$\text{Ric}(M) = \mathbb{T}(M) - \frac{1}{D-2} T_s g(M)$$

$R_{\mu\nu}(M)$ can be written

$$R_{\mu\nu}(M) = R_{\mu\nu}(X) - \left(\hat{\nabla}^2 \ln \Omega + (D-2)(\hat{\nabla} \ln \Omega)^2 \right) g_{\mu\nu}(X)$$

Hence, the contraction of the Einstein equations with $g^{\mu\nu}(X)$ gives

$$\frac{d}{D-2} \hat{\Delta}(\Omega^{D-2}) = \Omega^{D-2} R_s(X) + \Omega^D \tilde{T}; \quad \tilde{T} = -T_\mu^\mu + \frac{d}{D-2} T_M^M$$

If X is Mink or dS, massless form field strength F_p should have the form

$$F_p = \Omega_d(X) \wedge \alpha_{p-d}(Y) + \beta_p(Y)$$

Then, from the condition 4

$$\tilde{T} = -\frac{2d}{D-2} V + \sum_p \frac{d}{D-2} ((D-p-1)\alpha \cdot \alpha + (p-1)\beta \cdot \beta) \geq 0$$

Hence,

$$0 \geq \frac{d}{D-2} \int_{\partial Y} d\sigma_{\hat{g}} \nabla_\perp(\Omega^{D-2}) = \int_Y d\mu_{\hat{g}} \left(d(d-1)\Lambda\Omega^{D-2} + \Omega^D \tilde{T} \right) > 0$$

Q.E.D.

3. 2 加速膨張に対するNO-GO定理

Inclusion of branes in 10D type II SUGRA

No-Go Theorem for IIB with Branes

[Dasgupta K et al (2014): JHEP 1407, 054]

[Giddings SB, Kachru S, Polchinski J (2002): PRD66, 106006]

Theorem For a compactification $M_{10} = X_4 \times Y_6$ of 10D IIB string theory by a classical solution satisfying the following conditions, X_4 cannot be de Sitter spacetime:

1. The spacetime metric has the structure

$$g(M_{10}) = e^{2A(y)} \left[g(X_4) + e^{-2A(y)} \hat{g}(Y_6) \right].$$


2. The internal space is a smooth, compact closed manifold, and the warp factor is smooth.
3. All fields are invariant under the maximal symmetry of X_4 .
4. Flux, non-trivial dilaton, **smearred Dp -brane/ $\bar{D}p$ -brane ($p \leq 7$) are allowed**, but O -planes/ \bar{O} -planes or higher-order corrections/quantum corrections are not included.

Remark: The inclusion of curvature corrections, D-instanton corrections, loop-corrections may lead to a de Sitter solution.

Proof

1. From the Einstein equations, the scalar curvature of X_4 can be written

$$\hat{\Delta}e^{4A} = R_s(X) - \frac{\kappa_{10}^2}{2}e^{2A} [T_\mu^\mu - T_m^m]$$

 $R_s(X) \int_Y d\mu(Y) = \frac{\kappa_{10}^2}{2} \int_Y d\mu(Y) e^{2A} [T_\mu^\mu - T_m^m]$

2. The D-brane and O-plane actions read

$$S_{D_p} = - \int_{\Sigma_{p+1}} d^{p+1}x T_p e^{\frac{p+1}{4}\phi} \sqrt{-\det(g + F + B)} + \mu_p \int_{\Sigma_{p+1}} C \wedge e^{F+B},$$

$$S_{O_p} = - \int_{\Sigma_{p+1}} d^{p+1}x T_{O_p} e^{\frac{p+1}{4}\phi} \sqrt{-\det(g)} + \mu_{O_p} \int_{\Sigma_{p+1}} C.$$

where $T_p > 0$, $T_{O_p} < 0$.

3. Their EM tensors are given by

$$D_p/\bar{D}_p \quad : \quad T_\mu^\mu = -4T_p e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu$$

$$T_m^m = -(p-3)T_p e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu,$$

$$O_p/\bar{O}_p \quad : \quad T_\mu^\mu = 4|T_{O_p}| e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu,$$

$$T_m^m = (p-3)|T_{O_p}| e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu$$

Hence, if $p \leq 7$, D-brane does not help to realise dS:

$$D_p/\bar{D}_p \quad : \quad T_\mu^\mu - T_m^m = -(7-p)T_p e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu < 0$$

In contrast, if $p \leq 7$, O-planes have negative energy and may help to realise dS:

$$O_p/\bar{O}_p \quad : \quad T_\mu^\mu - T_m^m = (7-p)|T_{O_p}| e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu > 0$$

However, they cannot be smoothed out, so its back reaction produces singularity.

Q.E.D.

- Tadpole condition

By integrating the field equation with the brane source

$$dF_n = H_3 \wedge F_{n-2} + (2\pi\sqrt{\alpha'})^{n-1} \rho_{8-n}^{\text{loc}}$$

for $n=5$ over the internal space Y , we obtain the constraint

$$N_{\text{D3}} + N_{\text{flux}} = \frac{1}{4} N_{\text{O3}}$$

where

$$N_{\text{flux}} = \frac{1}{(2\pi)^4 \alpha'^2} \int_{Y_6} H_3 \wedge F_3 = e_K m_{\text{RR}}^K - m^K e_{K\text{RR}},$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2 \alpha'} \int_{A_K/B_K} H_3 = m^K / e_K, \quad K = 1, \dots, h^3/2,$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2 \alpha'} \int_{A_K/B_K} F_3 = m_{\text{RR}}^K / e_{K\text{RR}}, \quad K = 1, \dots, h^3/2.$$

Hence, if the flux does not match the number of D3 branes, an appropriate number of O3 planes are required.

IIA Sugra Action

String frame

$$S_{\text{IIA,bosonic}} = S_{\text{NS}} + S_{\text{R}} + S_{\text{CS}};$$

$$S_{\text{NS}} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-g)^{1/2} e^{-2\phi} \left(R + 4(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2} H_3 \cdot H_3 \right),$$

$$S_{\text{R}} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-g)^{1/2} \left(\tilde{F}_2 \cdot \tilde{F}_2 + \tilde{F}_4 \cdot \tilde{F}_4 \right),$$

$$S_{\text{CS}} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int B_2 \wedge F_4 \wedge F_4.$$

where

$$H_3 = dB_2, \quad F_2 = dC_1 + m_0 B_2, \quad F_4 = dC_3,$$

$$\tilde{F}_4 = F_4 - C_1 \wedge H_3 - \frac{m_0}{2} B_2 \wedge B_2$$

No-Go Theorem for IIA with Branes

[Hertzberg MP, Kachru S, Taylor W, Tegmark M: jhep 12, 095 (2007)"Inflationary constraints on type IIA string theory"]

Theorem For a CY compactification of $M_{10} = X_4 \times Y_6$ of 10D IIA string theory by a classical solution satisfying the following conditions, X_4 cannot be de Sitter spacetime:

1. The spacetime metric has the structure

$$g(M_{10}) = g(X_4) + \hat{g}(Y_6). \quad (1)$$

2. The internal space is a Calabi-Yau manifold.
3. All fields are invariant under the maximal symmetry of X_4 .
4. H_3 -flux, RR-flux, non-trivial dilaton, smeared D6-branes and O6-planes are allowed,

Further, if one of the RR-fluxes does not vanish, X_4 cannot be the Minkowski spacetime.

Proof

モジュライ変数 ρ, τ を

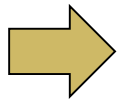
$$\rho = (\text{Vol}(Y_6))^{1/3}, \quad \tau = e^{-\phi} (\text{Vol}(Y_6))^{1/2}$$

おくと, Einstein frame

$$g_{\mu\nu}^E = \frac{\tau^2}{m_{\text{pl}}^2 \kappa_{10}^2} g_{\mu\nu}(X)$$

において, これらの運動項は

$$\frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int_{Y_6} (-g)^{1/2} e^{-2\phi} (R + 4(\nabla\phi)^2)$$



$$\mathcal{L}_K = -\frac{1}{2} \{(\partial\hat{\rho})^2 + (\partial\hat{\tau})^2\};$$

$$\hat{\rho} = \sqrt{\frac{3}{2}} m_{\text{pl}} \ln \rho, \quad \hat{\tau} = \sqrt{2} m_{\text{pl}} \ln \tau.$$

$$\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_{Y_6} \sqrt{-g} \left\{ e^{-2\phi} |H_3|^2 + |F_2|^2 + |\tilde{F}_4|^2 \right\} \Rightarrow V$$

Fluxの量子化

$$\int_{\Sigma^p} F_p \propto f_\Sigma \in \mathbb{Z}$$

より, フラックスのポテンシャルへの寄与は

$$\begin{aligned} H_3 &\Rightarrow V_3^{\text{NS}} \propto \rho^{-3} \tau^{-2}, \\ F_p &\Rightarrow V_p \propto \rho^{3-p} \tau^{-4}. \end{aligned}$$

また, ブレーンの寄与は

$$\begin{aligned} D6 &: V_{D6} \propto \tau^{-3}, \\ O6 &: V_{O6} \propto -\tau^{-3}. \end{aligned}$$

よって, ψ を ρ, τ 以外のモジュライ変数として,

$$\begin{aligned} V &= V_3^{\text{NS}} + \sum_p V_p + V_{D6} + V_{O6} \\ &= \frac{A_3^{\text{NS}}(\psi)}{\rho^3 \tau^2} + \sum_p \frac{A_p(\psi)}{\rho^{p-3} \tau^4} + \frac{A_{D6}(\psi) - A_{O6}(\psi)}{\tau^3}. \end{aligned}$$

これより,

$$-\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} - 3\tau \frac{\partial V}{\partial \tau} = 9V + \sum_p pV_p \geq 9V.$$

よって、ポテンシャルの極点では、 $V \leq 0$.

Q.E.D.

No-Go定理を克服する可能性

- Geometrical/NG flux $T: H_{abc} \rightarrow f^a{}_{bc} \rightarrow Q^{ab}{}_c \rightarrow R^{abc}$

$$\begin{aligned} V_f \propto \pm \rho^{-1} \tau^{-2} &\Rightarrow -(\rho \partial_\rho + 3\tau \partial_\tau) V_f = 9V_f - 2V_f, \\ V_Q \propto \pm \rho \tau^{-2} &\Rightarrow -(\rho \partial_\rho + 3\tau \partial_\tau) V_Q = 9V_Q - 4V_Q, \\ V_R \propto \pm \rho^3 \tau^{-2} &\Rightarrow -(\rho \partial_\rho + 3\tau \partial_\tau) V_R = 9V_R - 6V_R. \end{aligned}$$

- NS5ブレーン

$$V_{NS5} \propto \pm \rho^{-2} \tau^{-2} \Rightarrow -(\rho \partial_\rho + 3\tau \partial_\tau) V_{NS5} = 9V_{NS5} - V_{NS5}$$

3. 2 加速膨張に対するNO-GO定理

Inclusion of α' Corrections

10D HET Supergravity

- Field contents:

- Boson: $g_{MN}, \phi, B_{MN}; A_M \in \text{ad}(G)$ ($G = \text{Spin}(32)/\mathbb{Z}_2$ or $E_8 \times E_8$)

- Fermion: Majorana Weyl $\psi_M, \lambda; \chi \in \text{ad}(G)$

- Action ($\mathcal{O}(\alpha'^2)$)

$$S = \int_M e^{-2\phi} \left[R_s(\omega_+) + 4|\nabla\phi|^2 - \frac{1}{2}|T|^2 - \frac{\alpha'}{4} (\text{tr}|F|^2 - \text{tr}|\mathcal{R}(\omega_+)|^2 + 2\text{tr}(\bar{\chi}\mathcal{D}\chi)) + \dots \right]$$

$$\omega_{\pm}^{AB} = \omega^{AB} \pm \frac{1}{2} H^{AB}{}_M dx^M + \mathcal{O}(\alpha'^2),$$

$$T = H_3 + \frac{\alpha'}{8} \text{tr}(\bar{\chi}\Gamma_{[3]}\chi),$$

$$H_3 = dB_2 + \frac{\alpha'}{4} [\text{CS}(\omega_+) - \text{CS}(A)],$$

$$\text{CS}(A) = \text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right).$$



**Anomaly Cancellation
Condition:**

$$dH = \frac{\alpha'}{4} [\text{tr}(\mathcal{R}_+ \wedge \mathcal{R}_+) - \text{tr}(F \wedge F)]$$

α' -Corrections in 10D HET SUGRA

Theorem: 10D HET supergravity **with the full α' corrections** does not allow a compactification $M = dS^4 \times Y_6$ or $M = adS^4 \times Y_6$ under the following conditions:

1. Metric is regular and takes the warped form

$$g_M = e^{2A(y)} g_X(x) + \hat{g}_Y(y)$$

2. Fields are regular and invariant under the maximal symmetry of X

$$F_2 = F_Y(y), \quad H_3 = H_Y(y), \quad \phi = \phi(y)$$

3. α' -expansion is allowed.
4. No string loop corrections.
5. No non-perturbative corrections such as gaugino condensates.

Gautason FF, Junghans D, Zagermann M (2012): JHEP 1206, 029 [arXiv:1204.0807]
“On Cosmological Constants from α' -Corrections”

Proof.

1. Neglecting the terms that vanish when the configuration is invariant under the maximal symmetry group of X , the effective action reads

$$S = \int d\mu_X \tau^2 \left[e^{4a} \hat{V} + e^{2a} C R_s(X) + \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha')^{n+1} e^{-2na} W_n \right]$$

where

$$e^{-2\phi} = \tau^2 e^{-2\hat{\phi}}, \quad A = a + \hat{A}(y),$$

$$C = \int d\mu_Y e^{-2\hat{\phi} + 2\hat{A}} \left(1 - \frac{\alpha'}{2} (\hat{D}A)^2 + \dots \right),$$

$$W_0 = \frac{1}{4} |\mathcal{R}(X)|^2,$$

$$\begin{aligned} \hat{V} = \int d\mu_Y e^{-2\hat{\phi} + 4\hat{A}} & \left\{ R_s(Y) - 8\hat{\square}A - 20(\hat{D}A)^2 + 4(\hat{D}\phi)^2 - \frac{1}{2}|\hat{H}|^2 \right. \\ & \left. + \frac{\alpha'}{4} (-\text{tr}|\hat{F}|^2 + |\hat{\mathcal{R}}^+|^2 + 8(\hat{D}\hat{D}A)^2 + 8\hat{D}A \cdot \hat{D}((\hat{D}A)^2) + 20((\hat{D}A)^2)^2 + |\hat{D}A \cdot \hat{H}|^2) \right\} \end{aligned}$$

2. Variations wrt τ and a give

$$\delta\tau : \hat{V} + CR_s(X) + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha')^{n+1} W_n = 0,$$

$$\delta a : 4\hat{V} + 2CR_s(X) - \sum_{n=1}^{\infty} 2n(\alpha')^{n+1} W_n = 0$$

From these, it follows

$$CR_s(X) + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(\alpha')^{n+1} W_n = 0$$

3. When X is a constant curvature space

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{\Lambda}{3} (g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}) \quad \Rightarrow \quad R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}, \quad R_s = 4\Lambda, \quad |\mathcal{R}|^2 = \frac{4\Lambda^2}{3}$$

Hence, the above equation can be written $(W_n = w_n \Lambda^{n+2})$

$$4(C_0 + \alpha' C_1 + \dots)\Lambda + \alpha' \Lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)w_n (\alpha' \Lambda)^n = 0$$

There exists no solution such that $\Lambda = \Lambda_0 + \alpha' \Lambda_1 + \dots \neq 0$.

α' -Corrections & Gaugino Condensates

Theorem: 10D HET supergravity **with the quadratic α' correction and gaugino condensates** does not allow a compactification $M = dS^4 \times Y_6$ or $M = \text{adS}^4 \times Y_6$ under the following conditions:

1. Metric:

$$g_M = e^{\varphi(y)} g_X(x) + e^{\rho(y)} \hat{g}_Y(y)$$

2. Fields are invariant under the maximal symmetry of X

$$F_2 = F_Y(y), \quad H_3 = H_Y(y), \quad \phi = \phi(y)$$

$$\chi = e^{-3\varphi/4} (\chi_4(x) \otimes \chi_6(y) + \text{c.c.}); \quad \hat{D}\chi_6 = O(\alpha')$$

3. Gaugino condensates

$$\langle \text{tr}(\bar{\chi}_4 \chi_4) \rangle = M^3 f(\phi_0, \rho_0)$$

Quigley C (2015): arXiv: 1504.00652

“Gaugino Condensation and the Cosmological Constant”

Proof

1. Under the ansatz of the theorem, the 10D action reduces to

$$S = \int_X d^4x \sqrt{-g_4} \int_Y d^6y \sqrt{\hat{g}_6} \left[R_s(X) + \frac{\alpha'}{4} e^{-\varphi} |\mathcal{R}_X|^2 - V(y) + \mathcal{O}(\alpha'^3) \right]$$

$$V = e^\varphi \left[e^{-\rho} (-R_s(Y) + |\hat{D}\rho|^2 + \hat{D}\rho \cdot \hat{D}\varphi) + \frac{1}{2} e^{-3\rho} |T_Y|^2 \right. \\ \left. + \frac{\alpha'}{4} e^{-2\rho} (\text{tr}|F_Y|^2 - \text{tr}|R_{+Y}|^2) + \frac{\alpha'}{2} M^3 f e^{-(\varphi+\rho)/2} (\bar{\chi}_6 \gamma^m \hat{D}_m \chi_6 + \text{cc}) \right]$$

2. Variation wrt φ gives

$$-\hat{\nabla} \cdot (e^{\varphi-\rho} \hat{\nabla} \rho) + \frac{\alpha'}{4} e^{-\varphi} \langle |\mathcal{R}_X|^2 \rangle_X + V(y) \\ = \frac{\alpha'}{2} M^3 e^{\varphi-2\rho} \partial_\varphi (e^{-3(\varphi-\rho)/2} f) [\bar{\chi}_6 (\gamma^m \hat{\nabla}_m + \frac{1}{4} e^{-\rho} \gamma_{[3]} \cdot T) \chi_6 + \text{cc}] + \mathcal{O}(\alpha'^3)$$

RHS of this equation can be set to $\mathcal{O}(\alpha'^3)$ by requiring

$$\left[\gamma^m \hat{\nabla}_m + \frac{1}{4} \gamma^m \hat{\nabla}_m (-\varphi - \rho + 2 \ln f) + \frac{1}{4} e^{-\rho} \gamma_{[3]} \cdot T \right] \chi_6 = \mathcal{O}(\alpha'^3)$$

Hence, by integrating over Y, we obtain

$$\frac{\alpha'}{4} \langle e^{-\varphi} \rangle_Y \langle |\mathcal{R}_X|^2 \rangle_X + \langle V \rangle_Y = \mathcal{O}(\alpha'^3)$$

3. Variation wrt g gives

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R_s(X)g_{\mu\nu} + \frac{\alpha'}{4} \langle e^{-\varphi} \rangle_Y \left[R_{\mu***}R_{\nu}^{***} + 2\nabla_\alpha \nabla_\beta R^{\mu\alpha\nu\beta} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}|\mathcal{R}_X|^2 \right]$$

$$= -\frac{1}{2}g_{\mu\nu} \langle V \rangle_Y + O(\alpha'^3)$$

4. When X is a constant curvature spacetime

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{\Lambda}{3} (g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}) \quad \Rightarrow \quad R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu},$$

$$R_{\mu***}R_{\nu}^{***} = \frac{2\Lambda^2}{3}g_{\mu\nu}. \quad |\mathcal{R}_X|^2 = \frac{4\Lambda^2}{3}$$

The two field equations reduce to

$$\frac{2\alpha'}{3}\Lambda^2 \langle e^{-\varphi} \rangle_Y + \langle V \rangle_Y = O(\alpha'^3)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} \langle V \rangle_Y + O(\alpha'^3)$$

Hence, by eliminating V , we obtain

$$\Lambda = -\frac{\alpha'}{3}\Lambda^2 \langle e^{-\varphi} \rangle_Y + O(\alpha'^3) \quad \Rightarrow \quad \Lambda = O(\alpha'^3)$$

Q.E.D.

α' -corrections in IIB

Theorem:

For heterotic or type IIB with **no RR fluxes**, compactification to dS^n ($n \geq 4$) is not allowed **even when all α' -corrections including perturbative curvature corrections and world sheet non-perturbative effects are allowed**, if no stringy loop or non-perturbative correction is included.

Reference

Kutasov D, Maxfield T, Melnikov I, Sethi S (2015): arXiv:1504.00056.
“Constraining de Sitter Space in String Theory”

いかにしてNo-Go定理を克服するか

- D/Oブレーン、RR フラックス、非摂動効果、高次の α' 補正を含む II 型超重力理論
 1. KKLТ シナリオ
 - i. IIB 理論の warped CY コンパクト化 with ISD flux (+compensating O₃ -planes) \Rightarrow No scale 4D N = 1 SUGRA
 - ii. Instanton (Euclidean D-brane)/D7 上での gaugino condensates による NP 効果 \Rightarrow Kaehler モジュライの安定化 adS⁴.
 - iii. 反D₃ ブレーンによる vacuum uplift \Rightarrow dS⁴
 2. LVS (Large volume scenario)
 - iii'. Kaehler uplifting: Kaehler ポテンシャルへの α' 補正 \Rightarrow dS
 - iv'. Monodromy inflation (低エネルギーでの N = 1 sugra の放棄)

- 超重力理論の枠組みの拡大
 - Non-geometric flux を用いたコンパクト化 [Blumenhagen et al 2015-2016]
- 開多様体によるコンパクト化
 - 例: 4D $SO(4,4)$ -gauged maximum sugra の dS-臨界点 [Dall'Agata-Inverso] の M 理論への uplift [Baron, Dall'Agata 2015]
- スリンググループ効果・非摂動効果

3.3 超弦理論に基づくインフレーションモデル

3.3 超弦理論に基づくインフレーションモデル

4次元N=1超重力理論

4D N=1 Supergravity

- Chiral sector

$z = (z^i) \in \mathcal{M}$: Kähler-Hodge manifold

- Data:

$$K(z, \bar{z}), \quad W(z) \Rightarrow \quad K_{i\bar{j}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} K, \quad D_i W = (\partial_i + \partial_i K) W$$

- Lagrangian:

$$e^{-1} \mathcal{L}_S = -K_{i\bar{j}} D z^i \cdot D \bar{z}^{\bar{j}} - V_F(z, \bar{z});$$

$$V_F = e^K \left(D_i W K^{i\bar{j}} \overline{D_{\bar{j}} W} - 3|W|^2 \right)$$

- Kaehler変換:

理論は、次の産み合わせのみに依存:

$$e^G = e^K |W|^2 \Rightarrow \quad K_{i\bar{j}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} G, \quad V_F = e^G (K^{i\bar{j}} \partial_i G \partial_{\bar{j}} G - 3)$$

このため、次の変換で不変:

$$K \rightarrow K + f(z) + \overline{f(z)}, \quad W \rightarrow e^{-f(z)} W$$

● Gauge sector

- ゲージ群: 構造定数 $f_{AB}{}^C \rightarrow G \subset \text{Isom}_{\text{hol}}(M, g)$

$$\delta A^A = D\theta^A = d\theta^A + A^B \theta^C f_{BC}{}^A$$

- ゲージ結合関数: $f_{AB}(z)$ (holomorphic)
- Gauging Killing ポテンシャル $\mathcal{P}_A(z, z^*)$: k_A を G の Killing ベクトル基底 とするとき,

$$\delta z^\alpha = \theta^A k_A^\alpha(z) : k_A^\alpha(z) = -ig^{\alpha\bar{\beta}} \partial_{\bar{\beta}} \mathcal{P}_A(z, \bar{z}); \quad \nabla_\alpha \partial_\beta \mathcal{P}_A(z, \bar{z}) = 0$$

- Lagrangian

$$\mathcal{L}_V = -\frac{1}{2} \text{Re}(f_{AB}) F^A \cdot F^B + \frac{1}{2} \text{Im}(f_{AB}) F^a \cdot \tilde{F}^B - V_D,$$

$$Dz^\alpha = dz^\alpha - A^A k_A^\alpha,$$

$$V_D = \frac{1}{2} (\text{Re}(f))^{-1}{}^{AB} \mathcal{P}_A \mathcal{P}_B$$

η -Problem

- Inflaton Φ with the canonical K :

$$K = \Phi\bar{\Phi} + \dots \Rightarrow K_{\Phi\bar{\Phi}} = 1 \Rightarrow e^{-1}\mathcal{L} = -D\Phi \cdot D\bar{\Phi} + \dots$$

Assume that the other fields are stabilised, and that the dependence of W on Φ can be neglected:

$$\partial_{\Phi} W = 0$$

Then,

$$V_F = e^{|\Phi|^2} (V_0 + |\Phi|^2 |W|^2)$$

$$m^2 = \begin{cases} V_F + e^{|\Phi|^2} |W|^2 \\ (1 + 2|\Phi|^2)V_F + e^{|\Phi|^2} (1 + 4|\Phi|^2) |W|^2 \end{cases} \geq V_F \simeq 3H^2$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{V''}{V} = \frac{m^2}{V_F} \geq 1$$

Resolution

- Kahler potential with a shift symmetry

[Kawasaki M, Yamaguchi H, Yanagida TT (2000)]

$$\Phi \rightarrow \Phi + ic$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}(\Phi + \bar{\Phi})^2 + K_0 = \Phi\bar{\Phi} + \frac{1}{2}(\Phi^2 + \bar{\Phi}^2) + \dots$$

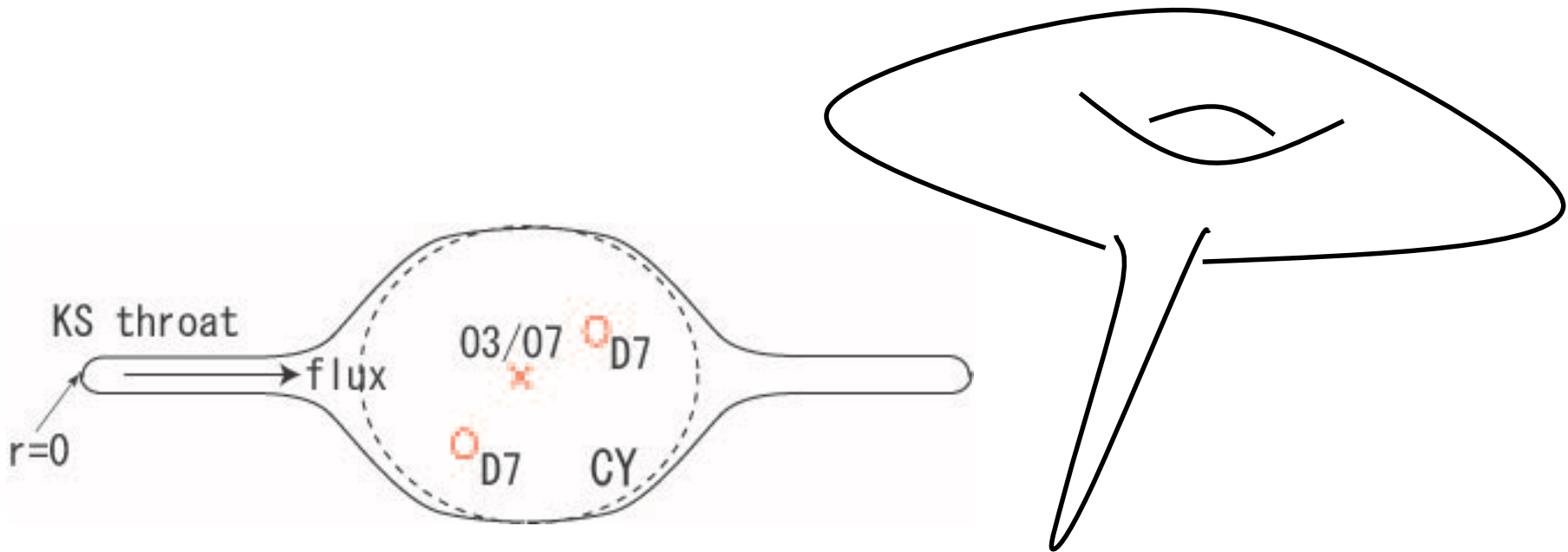
$$V_F = e^{(\Phi + \bar{\Phi})^2/2 + K_0} [V_0 + (\Phi + \bar{\Phi})^2 |W|^2],$$

$$V_0 = K_0^{I\bar{J}} D_I W D_{\bar{J}} \bar{W} - 3|W|^2$$

$$\partial_{\Phi} W = 0 \Rightarrow m_{\phi}^2 = 0; \quad \Phi = (\sigma + i\phi)/\sqrt{2}$$

3.3 超弦理論に基づくインフレーションモデル

IIB理論のフラックスコンパクト化



Compactification with no flux

D=11/10 sugra can be reduced to a theory for gravity coupled with dilaton.

Assume

$$ds^2 = e^{-nu(x)} ds^2(X_4) + e^{2u(x)} ds^2(Y_n), \quad \Phi = \Phi(x)$$

Then

$$R_{pq}(Y) = \hat{\lambda} g_{pq}(Y); \quad \hat{\lambda} = e^{(n+2)u} \square u$$

In the cosmological context, the second equation leads to

$$\ddot{u} = -\partial_u V; \quad V = -\frac{\hat{\lambda}}{n+2} e^{-(n+2)u}$$

- Stabilization of no moduli
- N=1 or 2 4D SUSY
 - Type II: $Y_6 = \text{Calabi-Yau} \Leftrightarrow N=2 \text{ Susy}$
 - Type I: $Y_6 = \text{Calabi-Yau} \Leftrightarrow N=1 \text{ Susy}$
 - M: $Y_7 = G_2 \text{ manifold} \Leftrightarrow N=1 \text{ Susy}$

Flux compactification

Moduli for IIB SUGRA

$$ds^2 = e^{-6u(x)} ds^2(X_4) + e^{2u(x)} ds^2(CY_6)$$

- Shape moduli $\Rightarrow \tau$, the complex structure J of CY : $h^{2,1} + 1$

$$\tau = C_0 + ie^{-\Phi}$$

- Size moduli \Rightarrow Kahler moduli of CY : $h^{1,1}$

$$\rho = b/\sqrt{2} + ie^{4u}; \quad C_4 = a_2(x) \wedge \tilde{J}_2(y) \Rightarrow \quad da_2 = e^{-8u} *_Y db$$

4D effective action (tree)

$$\mathcal{H} = -\ln(2\text{Im } \tau) - 3\ln(2\text{Im } \rho) - \ln(-i \int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega}),$$

$$W = \int_Y G_3 \wedge \Omega; \quad G_3 = F_3 - \tau H_3, \quad \Omega = \Omega(J)$$

[Gukov, Vafa, Witten 2000; Taylor, Vafa 2000; Giddings, Kachru, Polchinski 2002]

- Discrete set of vacua

For $\tau = \text{const}$,

$$\delta G_3 = dX_2 \Rightarrow \delta W = \int_Y dX_2 \wedge \Omega = 0$$

Hence, W depends only on the cohomology classes of 3-form fluxes:

$$\int_A F_3 = 4\pi^2 \alpha' M, \quad \int_B H_3 = -4\pi^2 \alpha' K; \quad M, K \in \mathbb{Z}$$

- Stabilisation of all shape moduli

$$d\mathcal{V} = 0 \Rightarrow *_{CY} G_3 = iG_3 \Rightarrow G_3 \in H^{0,3}(CY) \oplus H^{2,1}(CY)$$

This provides $h^{2,1}+1$ constraints for the $h^{2,1}+1$ complex moduli.

[Giddings, Kachru & Polchinski(2002)]

- No scale model

Because W is independent of ρ and $DW = dW + dK W$, we have

$$\mathcal{V} \propto e^{\mathcal{K}} \left(G^{a\bar{b}} D_a W \overline{D_b W} - 3|W|^2 \right) \propto \frac{1}{L^{12}} e^{\mathcal{K}'} G^{i\bar{j}} D_i W \overline{D_j W}$$

The size $L = e^u$ of the extra-dimension is not stabilised.

CYに対する一般的なKaehlerモジュライの定義

● CYの位相基底

- $D_j (j = 1, \dots, h^{1,1})$: $H_4(Y, \mathbb{R})$ の基底となるdivisors
- D_j^* : D_j のHodge双対から得られる $H^2(Y, \mathbb{R})$ の基底
- $\sigma^j (j = 1, \dots, h^{1,1})$: D_j^* の双対となる $H_2(Y, \mathbb{R})$ の基底

● サイクル σ^j の体積: ω を Y のKaehler形式とするとき、

$$t^j = \text{Vol}(\sigma^j) = \int_{\sigma_j} \omega \Rightarrow \omega = \sum_j t^j D_j^*$$

● Y の体積 \mathcal{V} とdivisor D_j の体積

$$\mathcal{V} \equiv \frac{1}{3} \int_Y \omega^3 = \frac{1}{6} \kappa_{jkl} t^j t^k t^l \Rightarrow \tau_j = \text{Vol}(D_j) = \partial_j \mathcal{V}(t)$$

● 複素Kaehlerモジュライ

$$T_j = c_j + i\tau_j; \quad c_j = \int_{D_j} C_4$$

フラックス \Rightarrow ワープ

10D IIB超重力理論において、計量と場が次の条件を満たすとする:

- 計量

$$ds^2(M) = A(x, y)^2 ds^2(X_4) + B(x, y)^2 ds^2(Y_6),$$

- 場

$$\tau \equiv C_0 + i e^{-\Phi} = i g_s^{-1} (= \text{const}),$$

$$G_3 \equiv i g_s^{-1} H_3 - F_3 = \frac{1}{3!} G_{pqr}(y) dy^p \wedge dy^q \wedge dy^r,$$

$$*_Y G_3 = \epsilon i G_3 \quad (\epsilon = \pm 1) \quad \Leftrightarrow \quad F_3 = -\epsilon g_s^{-1} * H_3,$$

$$\tilde{F}_5 = (1 \pm *) V_p dy^p \wedge \Omega(X_4) = V \wedge \Omega(X_4) \mp A^{-4} B^4 *_Y V,$$

このとき、場の方程式は次の条件と同等となる:

$$X_4 : \text{Ricci flat} \quad R_{\mu\nu}(X) = 0, \quad Y_6 : \text{Einstein} \quad R_{pq}(Y) = \lambda g_{pq}(Y),$$

$$H_3, F_3 : \text{harmonic} \quad dH_3 = d * H_3 = 0,$$

$$A^{-1} = B = h^{1/4}, \quad V = \pm \epsilon dh_1,$$

$$h = h_0(x) + h_1(y); \quad \nabla_\mu \nabla_\nu h_0 = \lambda g_{\mu\nu}(X), \quad \Delta_Y h_1 = -\frac{g_s}{2} (G_3 \cdot \bar{G}_3)_Y.$$

Ex. $\text{adS}^5 \times S^5$

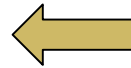
- $\text{adS}^5 \times S^5$ は、 E^6 へのワープしたコンパクト化と見なせる:

$$\begin{aligned} ds^2(M) &= ds^2(\text{adS}^5) + L^2 ds^2(S^5) \\ &= h^{-1/2} ds^2(E^{3,1}) + h^{1/2} (dr^2 + r^2 ds^2(S^5)), \end{aligned}$$

$$h = \frac{L^4}{r^4},$$

$$F_5 = \frac{4}{L^4} (1 + *) dr \wedge \Omega(E^{3,1}),$$

$$H_3 = F_3 = 0, \quad \phi = C_0 = 0.$$



**D3-brane at
infinity ($r=0$)**

超対称性: $N=8$

Ex. Conifold

Candelas P, de la Ossa XC 1990

代数多様体

$$x^2 + y^2 + v^2 + w^2 = 0$$

は $S^2 \times S^3$ 上のコーンの構造をもつ. これにKaehler計量を入れた6次元空間である, Einstein空間 $T^{11} (\cong S^2 \times S^3)$ 上のコーン空間へのコンパクト化.

$$ds^2(M) = h^{-1/2} ds^2(E^{3,1}) + h^{1/2} (dr^2 + r^2 ds^2(\mathbb{T}^{11})),$$

$$ds^2(\mathbb{T}^{11}) = \frac{1}{9} \left(d\psi + \sum_{i=1}^2 \cos \theta_i d\phi_i \right)^2 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^2 (d\theta_i^2 + \sin^2 \theta_i d\phi_i^2),$$

$$h = \frac{36g_s M^2}{r^4} \left[\ln \left(\frac{r}{r_0} \right) + \frac{1}{4} \right] + \frac{C}{r^4},$$

$$F_5 = (1 + *)d(h^{-1}) \wedge \Omega(E^{3,1}),$$

$$H_3 = g_s *_Y F_3 = \frac{3g_s M}{2r} dr \wedge [\Omega(S_1^2) - \Omega(S_2^2)],$$

$$\phi = C_0 = 0.$$

超対称性: N=1

Ex. Klebanov-Strasser解

Klebanov IR, Strassler MJ 2000

変形コニフォールド

$$x^2 + y^2 + v^2 + w^2 = \epsilon^2 \quad \subset \mathbb{C}^4$$

への N=1超対称性をもつコンパクト化。

$$ds^2(M) = h^{-1/2} ds^2(E^{3,1}) + h^{1/2} ds^2(Y_6),$$

$$ds^2(Y_6) = \frac{1}{2} \epsilon^2 K(\tau) \left[\frac{1}{3K^3(\tau)} \{d\tau^2 + (g^5)^2\} + \sinh^2\left(\frac{\tau}{2}\right) \{(g^1)^2 + (g^2)^2\} \right. \\ \left. + \cosh^2\left(\frac{\tau}{2}\right) \{(g^3)^2 + (g^4)^2\} \right],$$

$$h(x, \tau) = h_0(x) + \alpha \frac{2^{2/3}}{4\epsilon^4} \int_{\tau}^{\infty} du \frac{u \coth u - 1}{\sinh^2 u} \{\sinh(2u) - 2u\}^{1/3},$$

$$F_5 = (1 + *)d(h^{-1}) \wedge \Omega(E^{3,1}),$$

$$B_2 = \alpha g_s \left[(1 - F) \tanh^2(\tau/2) g^1 \wedge g^2 + F \coth^2(\tau/2) g^3 \wedge g^4 \right],$$

$$H_3 = g_s *_Y F_3 = dB_2,$$

$$\phi = C_0 = 0.$$

ここで、

$$K(\tau) = \frac{[\sinh(2\tau) - 2\tau]^{1/3}}{2^{1/3} \sinh(\tau)}, \quad F = \frac{\sinh \tau - \tau}{2 \sinh \tau}.$$

また、 $g^1 \sim g^5$ は

$$g^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1 - e^3), \quad g^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^2 - e^4), \quad g^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1 + e^3),$$

$$g^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^2 + e^4), \quad g^5 = e^5,$$

$$e^1 \equiv -\sin \theta_1 d\phi_1, \quad e^2 \equiv d\theta_1, \quad e^3 \equiv \cos \psi \sin \theta_2 d\phi_2 - \sin \psi d\theta_2$$

$$e^4 \equiv \sin \psi \sin \theta_2 d\phi_2 + \cos \psi d\theta_2, \quad e^5 \equiv d\psi + \cos \theta_1 d\phi_1 + \cos \theta_2 d\phi_2.$$

この解は $\tau \rightarrow \infty$ で漸近的に conifold 解に近づく:

$$ds^2(Y_6) \rightarrow dr^2 + r^2 g(\mathbb{T}^{1,1}), \quad r \rightarrow \frac{3^{1/2}}{2^{5/6}} \epsilon e^{\tau/3}.$$

また、至る所滑らかで、コーン型突起の頂点では

$$ds^2 \simeq \frac{\epsilon^2}{12^{1/3}} \left[\frac{1}{2} (d\tau^2 + \tau^2 g(S^2)) + g(S^3) \right]$$

3.3 超弦理論に基づくインフレーションモデル

KKLTシナリオ

KKLTシナリオの概要

Kachru S, Kallosh R, Linde A, Trivedi S 2003

- **基本モデル**

IIB型理論のno scale ISD CY フラックスコンパクト化

⇒ **複素モジュライ固定**

[Giddings SB, Kachru S, Polchinski J 2002]

$$K = K_0(z, \bar{z}) - 3 \ln(\rho + \bar{\rho}), \quad W = W(z)$$

$$\Rightarrow V = e^K (K^{i\bar{j}} D_i W D_{\bar{j}} \bar{W} - |W|^2) = e^K K^{a\bar{b}} D_a W D_{\bar{b}} \bar{W}$$

ここで, $i = (\rho, a)$, $\rho = \sigma + i \frac{b}{\sqrt{2}}$ ($\sigma = e^{4u}$).

- **Kaehlerモジュライの安定化**

非摂動論効果 (インスタントン/gaugino凝縮)

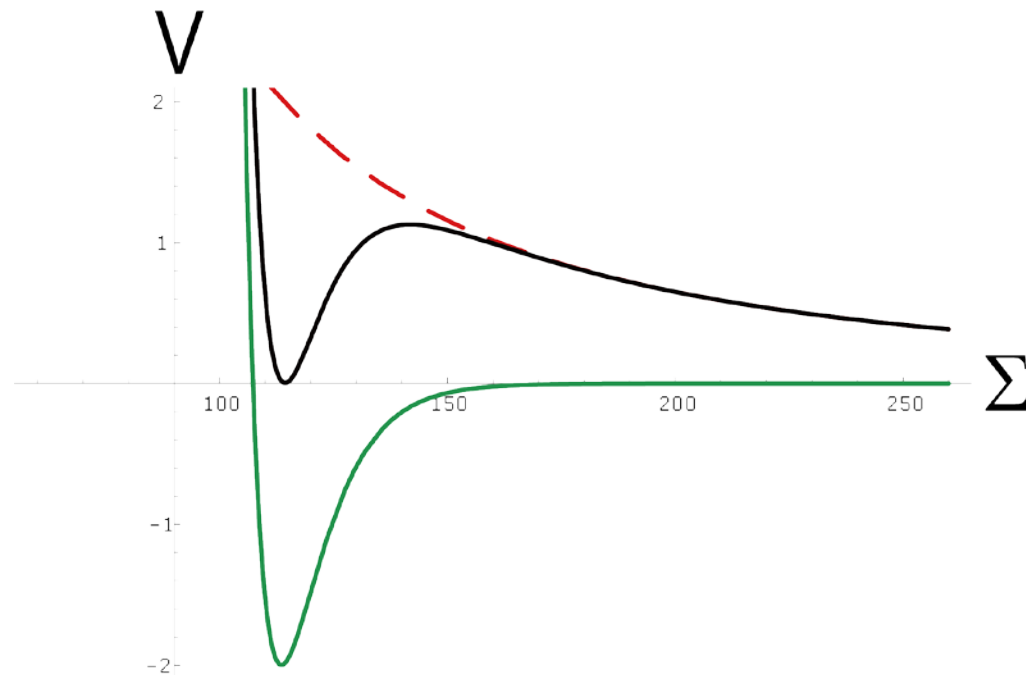
[Witten E 1996 ;Tripathy PK, Trivedi SP 2003; Gorlich L, Kachru S, Tripathy PK, Trivedi SP 2004]

$$K = -3 \ln(\rho + \bar{\rho}), \quad W = W_0 + A e^{-a\rho} \quad (a = 2\pi/N).$$

⇒ **N=1 超対称なadS真空**

● Vacuum uplifting

反D₃ブレーンにより超対称性を破りMinkowski真空(ないしdS真空)を実現.
または, 磁化D₇ブレーンの誘起する超ポテンシャルのD項により自発的にSUSYを破る.



非摂動論効果

摂動論の範囲では、Kaehler モジュライの超ポテンシャルはゼロであるが、非摂動論的效果を考慮すると自明でないポテンシャルが生成される可能性がある。

- Kaehlerモジュライが1個の場合の例

IIB モデルの F 理論的記述において、12次元の時空が8次元 CY^4 により4次元にコンパクト化される際に、 CY^4 が算術種数1の divisor D を含む場合 ($\chi(D, O_D) = 1$)、超ポテンシャルにサイズモジュラスに依存した項が加わる: (Witten E 1996)

$$W = W_0(z) + A(z)e^{-a\rho}; \quad a = 2\pi/n, n = 1, 2, \dots$$

このとき、対応するポテンシャルは、 $\sigma = e^{4u} = Re(\rho)$ に関して最小点 ρ_m を持つようになる。この最小点は、 $V(\rho_m) < 0$ より AdS^4 時空を与える。また、この基底状態は $N = 1$ 超対称性を保つ。

- ランドスケープ問題

ここで、真空はフラックスを特徴づける整数値の組 (M_j, N_j) ごとに決まり、宇宙項の値が準連続となる無限個の超対称な真空の集合を与える。

● 注

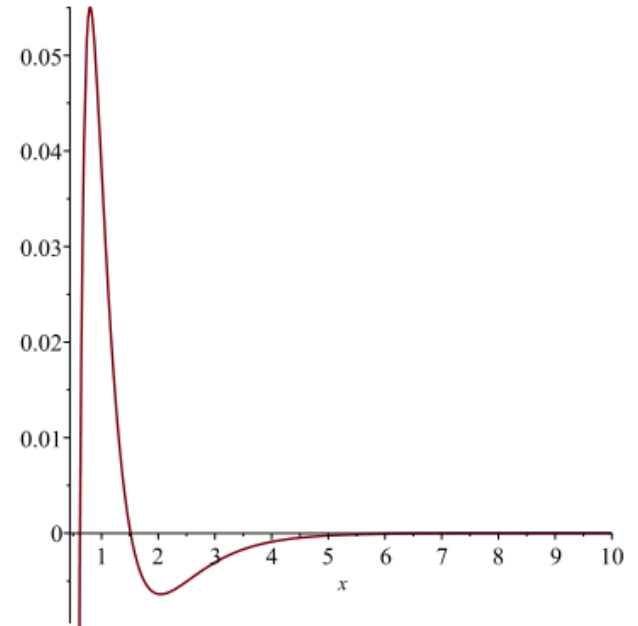
Kaehlerモジュライが1個の場合には、ポテンシャル極小点は、最小点ではない！

σ に対するポテンシャルは、複素構造モジュライ z が固定されたとすると、 $b = \text{Re}(\rho)$ について最小化して、

$$V = \frac{C}{x} e^{-2x} - \frac{D}{x^2} e^{-x}; \quad x = a\sigma;$$

$$C = \frac{a^3 |A|^2}{6}, \quad D = \frac{a^3 |A| |W|}{2}.$$

このポテンシャルは、 $\frac{C}{D} = \frac{|A|}{3W} > 2.5865 \dots$ のとき、極大点と極小点をもつ。



Uplifting

Klebanov-Strassler解の突起先端部分の計量は、Fractional D₃ブレーン ($H \wedge F$)のみが存在する場合、 $\int_{S^3} F_3 = 4\pi^2 M$ とおくと、

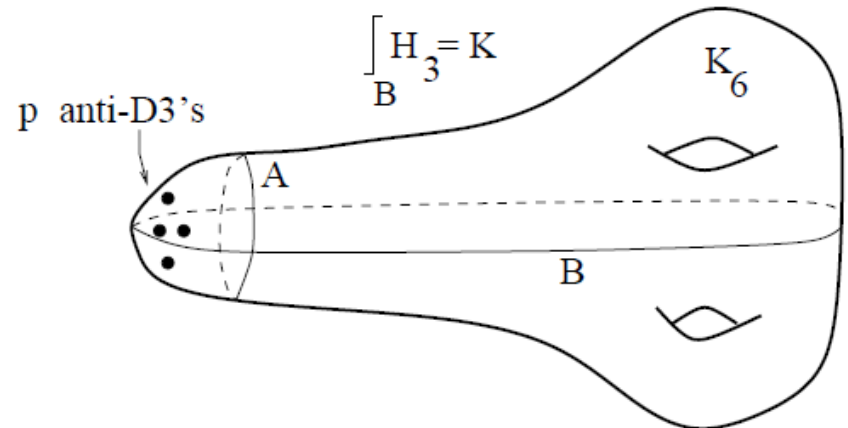
$$\begin{aligned}
 ds^2 &= h(r)^{-1/2} g(X_4) + h(r)^{1/2} g(CY_3) \\
 &\simeq a_0^2 g(X_4) + g_s M b_0^2 \left(\frac{dr^2}{2} + d\Omega_3^2 + r^2 d\Omega_2^2 \right)
 \end{aligned}$$

ここで、 $a_0^2 \simeq \epsilon^{\frac{4}{3}} / (g_s M)$, $b_0^2 \simeq 0.93266$.

いま、この空間に反D₃ブレーンを入れると、 F_5 フラックスによる力

$$F_r(r) = -2\mu_3 \partial_r (h^{-1})$$

により突起の先端 $r = 0$ に引かれそこに溜る.



Apex近傍での計量と場の値を反D3ブレーンの作用積分

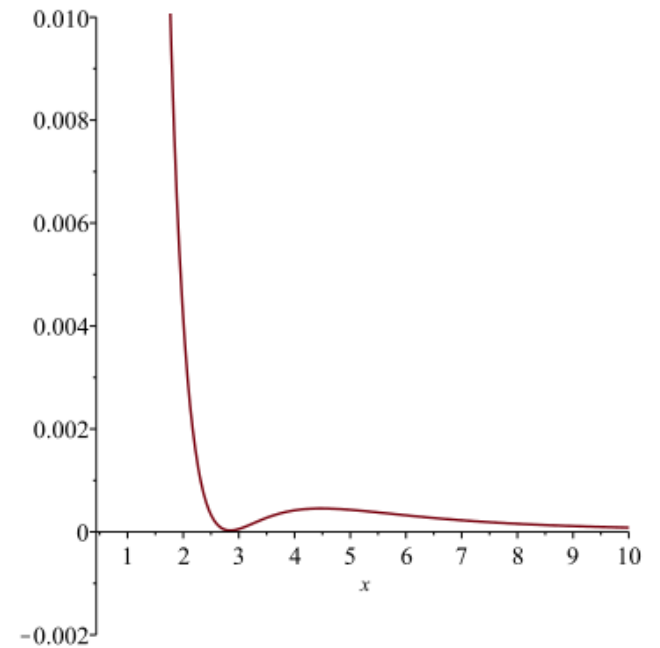
$$S_{\bar{D}3} = \frac{\mu_3}{g_s} \int \text{Tr} \sqrt{\det(G_{//} + 2\pi g_s F)} \det Q - 2\pi\mu_3 \int \text{Tr} I_\Phi I_\Phi B_6.$$

に代入し, adjointヒグススカラ Φ について極小化することにより次のポテンシャルを得る(反D3ブレーン p 枚):

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\text{eff}} &\simeq 2 \frac{\mu_3}{g_s} \left(p - \frac{\pi^2}{6} g_s^8 f^4 p(p^2 - 1) \right) \\ &\simeq 2 \frac{\mu_3 p}{g_s} \left(1 - \frac{8\pi^2 (p^2 - 1)}{3b_0^{12} M^2} \right). \end{aligned}$$

これにワープ因子を考慮すると, $\sigma = \text{Im}(\tau) = g_s^{-1} h$ として、

$$V_{\text{eff}} \simeq \frac{a_0^4}{h(0)^3} \tilde{V}_{\text{eff}} = \frac{8D}{\sigma^3}; \quad D \simeq \frac{2pa_0^4\mu_3}{g_s^4}$$



3.3 超弦理論に基づくインフレーションモデル

**KKLT型モデル：
ケーラーモジュライインフ
レーション**

Racetrack Model

Kaehlerモジュライが1個 $T = X + iY$ で, 超ポテンシャルに非摂動論効果に起因する2種類の項が現れる場合に, axion方向に沿ってsaddle pointインフレーションが起きる.

- モデル
$$K = -3 \ln(T + \bar{T}); \quad T = X + iY,$$
$$W = W_0 + Ae^{-aT} + Be^{-bT}$$

- 運動項とポテンシャル

$$\mathcal{L}_k = \frac{3M_P^2}{4X^2} ((\partial X)^2 + (\partial Y)^2),$$
$$V = V_F + \frac{E}{X^\alpha}; \quad V_F = \frac{e^{-aX}}{6X^2} [aA^2(aX + 3)e^{-aX} + 3W_0aA \cos(aY)]$$
$$+ \frac{e^{-bX}}{6X^2} [bB^3(bX + 3)e^{-bX} + 3W_0bA \cos(bY)]$$
$$+ \frac{e^{-(a+b)X}}{6X^2} [AB(2abX + 3a + 3b) \cos((a - b)Y)].$$

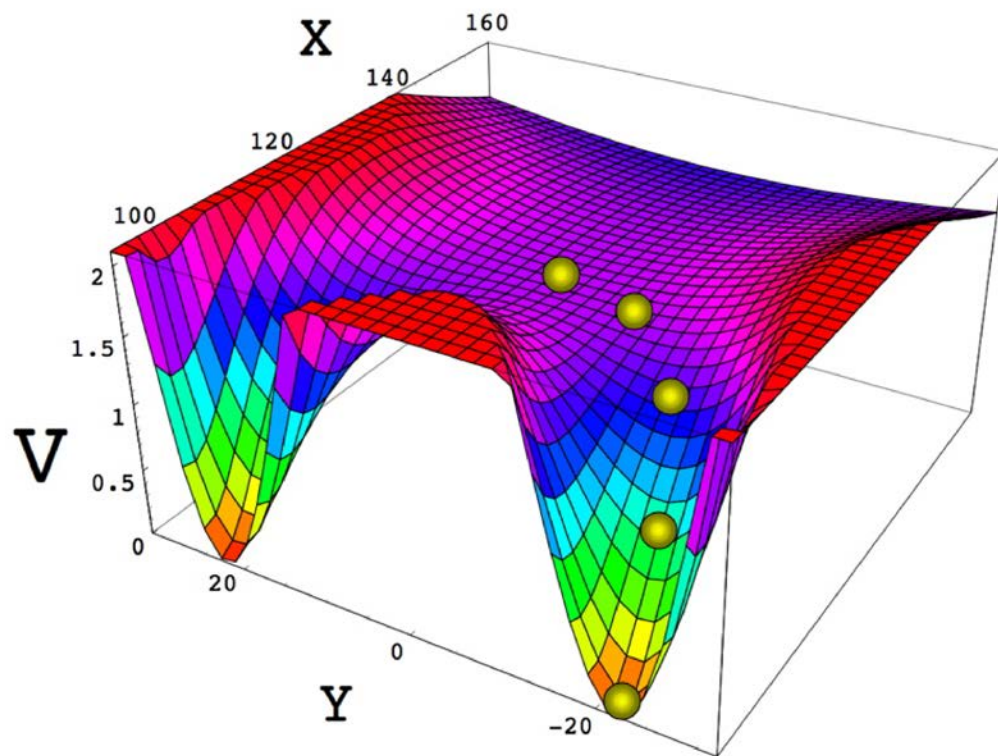
このポテンシャルは、パラメータを適当に調整すると、2つの最小点 (Mink/dS)と1つの鞍点をもつ。

● 例: $A = \frac{1}{50}, B = -\frac{35}{1000}, a = \frac{2\pi}{100}, b = \frac{2\pi}{90}, W_0 = -\frac{1}{25000}$

saddle pt : $(X_s, Y_s) = (123.22, 0), \epsilon_s = 0, \eta_s = -0.006097,$

mininum pt : $(X_m, Y_m) = (96.130, \pm 22.146)$

このモデルでは、 $|W_0| \ll 1, |a - b| \ll 1$ と取ると、鞍点近傍で $\cos((a - b)Y)$ 項により (Natural inflationタイプの) インフレーションが起きる。ただし、さらに初期値の微調整が必要。



Better Racetrack Model

Kaehlerモジュライが2個の場合に, それぞれの非摂動論効果の組み合わせにより, やはりaxion方向にsaddle pointインフレーションが起きる.

- モデル: $CY = \mathbb{CP}^4[1,1,1,6,9]$ へのコンパクト化

$$K = -2 \ln \psi; \quad \psi = \frac{\sqrt{2}}{18} (X_2^{3/2} - X_1^{3/2}),$$

$$W = W_0 + Ae^{-aT_1} + Be^{-bT_2}.$$

- ポテンシャル

$$V = V_F + \frac{D}{162\psi^2};$$

$$V_F = \frac{216}{(X_2^{3/2} - X_1^{3/2})^2} \left[P_1 e^{-2aX_1} + P_2 e^{-2bX_2} + W_0 (P_3 e^{-aX_1} \cos(aY_1) + P_4 e^{-bX_2} \cos(bY_2)) \right. \\ \left. + P_5 e^{-aX_1 - bX_2} \cos(-aY_1 + bY_2) \right],$$

$$P_1 = aA^2(3X_1 + 2aX_2^{3/2}X_1^{1/2} + aX_1^2), \quad P_2 = P_1(a, A, 1 \rightarrow b, B, 2),$$

$$P_3 = 3aAX_1, \quad P_4 = 3bBX_2,$$

$$P_5 = 3AB(aX_1 + bX_2 + 2abX_1X_2).$$

● 例: $A = 0.56, B = 7.46666 \times 10^{-5}, a = 2\pi/40, b = 2\pi/258,$
 $D = 6.26019 \times 10^{-9}, W_0 = 5.22666 \times 10^{-6}$

minimum : $X_1 = 98.75839, X_2 = 171.06117, Y_1 = 0, Y_2 = 129;$
 $\mathcal{V}_s = 99, m^2 = 10^{-6} \sim 10^{-7},$

saddle point : $X_1 = 108.96194, X_2 = 217,68875, Y_1 = 20, Y_2 = 129;$
 $V = 3.35 \times 10^{-16} M_P^4.$

unstable direction : $\delta X_1 = \delta X_2 = 0, \delta Y_1 = -0.6546, \delta Y_2 = 0.7560;$
 $\eta \simeq -0.01$

インフレーションスケールは小さい！！

$$H_{\text{inf}} \approx 10^{-8} M_P \Rightarrow r \approx 10^{-12}$$

3.3 超弦理論に基づくインフレーションモデル

KKLT型モデル： ブレーンインフレーション

ブレーンインフレーションの η 問題

D3-反D3系のエネルギーは, r をブレーン間の距離として

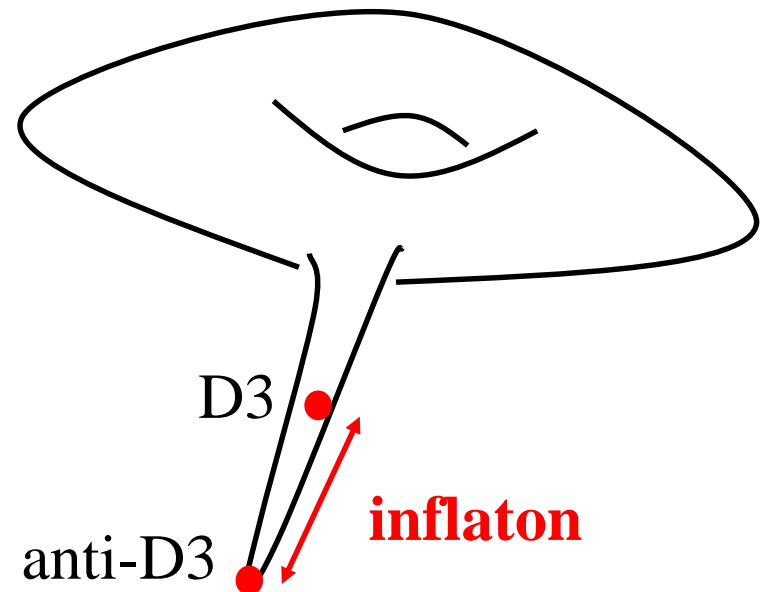
$$V(r) = 2T_3 \left(1 - \frac{1}{2\pi^3} \frac{T_3}{m_{\text{pl},10}^8 r^4} \right) = 2T_3 \left(1 - \frac{1}{2\pi^3} \frac{T_3^3}{m_{\text{pl}}^2 \phi^4} \right)$$

ここで, $\phi = T_3^{1/2} r$ はcannonically normalized field. m_{pl} と $m_{\text{pl},10}$ の関係は $m_{\text{pl}}^2 = m_{\text{pl},10}^8 L^6$ (L はCYのサイズ)となるので, η パラメータは

$$\eta = -\frac{10}{\pi^3} \left(\frac{L}{r} \right)^6 \sim -0.3 \left(\frac{L}{r} \right)^6$$

よって,

$$r < L \Rightarrow |\eta| > 0.3$$



KKLMMT

[Kachru S, Kallosh R, Linde A, Maldacena J, McAllister L, Trivedi S 2003]

- ワープを考慮すると、D₃-反D₃相互作用ポテンシャルの距離 r への依存性は平坦になる (D₃ at r , \overline{D}_3 at r_0):

$$(r_0 \ll r \ll R) \quad V = 2T_3 \frac{r_0^4}{R^4} \left(1 - \frac{1}{N} \frac{r_0^4}{r^4} \right)$$

- しかし、Kaehlerポテンシャルは、 ρ をサイズモジュライ、 ϕ をD₃-反D₃の距離パラメータとして、

$$K = -3 \ln(\rho + \bar{\rho} - k(\phi, \bar{\phi}))$$

- 超ポテンシャルが ϕ に依存しないとすると、 ρ の安定点 $\rho = \rho_0$ 近傍で、 $m_\phi^2 \sim H^2$ となりインフレーションは起こらない。
- 超ポテンシャルに ϕ 依存性を持たせると、微調整により $m_\phi^2 = O(10^{-2})H^2$ とでき、インフレーションが起きる。

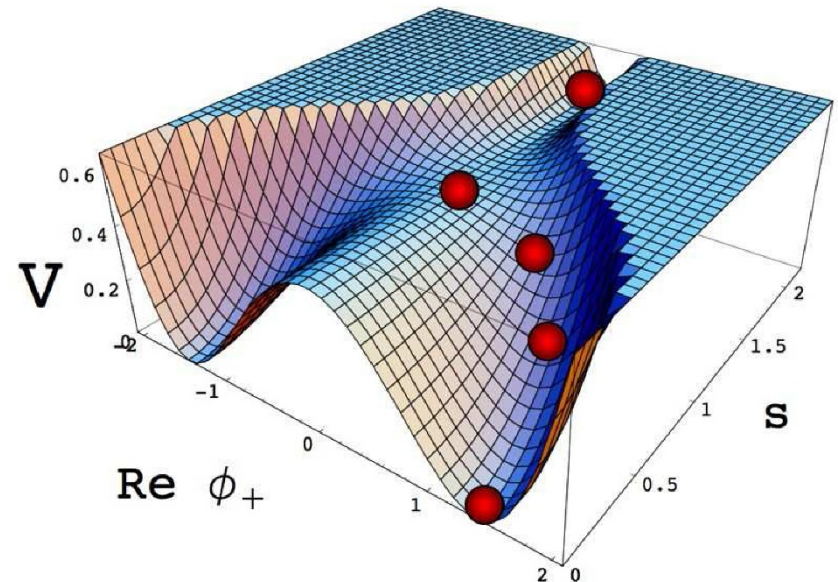
D3-D7ブレーンインフレーション

Hsu JP, Kallosh R, Prokushkin S 2003

- ポテンシャル

$$K = -3 \ln(\rho + \bar{\rho}) - \frac{1}{2}(\phi - \bar{\phi})^2$$

- 超ポテンシャルは ϕ に依存せず, $s = \Re\phi$ がインフラトンとなる. s は D3-D7 の距離を表す.
- 他のhypermultipletとの相互作用は, 量子効果として s にlog型ポテンシャルを生成し, 全体としては hybrid型インフレーションが実現される.



KKLTシナリオの問題点

- Kaehlerモジュライが1自由度の場合, ポテンシャルの極小値は最小値でなく, $\sigma \rightarrow 0$ で $V \rightarrow -\infty$.
- Kaehlerモジュライが2自由度以上の場合, ポテンシャルが安定な最小点を持つ可能性はあるが, 最小点の存在はフラックスや非摂動論効果のパラメータに敏感に依存し, 最小点の存在はモデルやパラメーターごとに個別に確認が必要.
- ポテンシャルが極小となる内部空間サイズは一般的にストリングスケールとなり, 古典論が適用可能な十分大きいサイズを実現するには, フラックスを微調整して, $|W^0| < 10^{-4}$ にしないといけない.

3.3 超弦理論に基づくインフレーションモデル

Large Volume シナリオ

LVS

- 基本モデル

IIB型理論のno scale ISD CY フラックスコンパクト化において, Kaehlerポテンシャルに対する $(\alpha')^3$ 補正を考慮 複素モジュライ固定

- CYの位相についての制限: $h^{2,1} > h^{1,1} > 1$

- $(\alpha')^3$ 補正 + 非摂動論効果 (インスタントン/gaugino凝縮)

⇒ Kaehlerモジュライの安定化

CYの体積 Y が大きい極限で, ポテンシャル V は負からゼロに近づき, Kaehlerモジュライ $\rho_j = b_j + i \tau_j$ の1つ $j = s$ 以外は $\tau_j \sim Y^{2/3}$ に従って増大, $\tau_s \sim \log(Y)$ となる方向でポテンシャルが最小点をもつ.

⇒ 超対称性の破れたadS真空

- 反D3ブレーン/magnetized D7ブレーンによりMinkowski真空 (ないしdS真空)を実現.

Kaehlerポテンシャルに対する $(\alpha')^3$ 補正

II型超弦理論の低エネルギー極限の α' 展開の最初の補正は $(\alpha')^3$ で現れる:

$$S_{\text{IIB}} = S_{b,0} + \alpha'^3 S_{b,3} + \alpha'^4 S_{b,4} + \cdots + S_{\text{CS}} + S_{l,0} + \alpha'^2 S_{l,2} + \cdots$$

ここで, $S_{b,0}$ と S_{CS} は通常的作用積分, $S_{l,0}$ 最低次のブレーン作用積分:

$$S_{b,0} = \frac{1}{(2\pi)^7 \alpha'^4} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[e^{-2\phi} (R_s + 4(\nabla\phi)^2) - \frac{1}{2} F_1^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!} G_3 \cdot \bar{G}_3 - \frac{1}{4 \cdot 5!} \tilde{F}_5^2 \right]$$

$$S_{\text{CS}} = \frac{1}{4i(2\pi)^7 \alpha'^4} \int e^\phi C_4 \wedge G_3 \wedge \bar{G}_3,$$

$$S_{l,0} = \sum_{\text{sources}} \left(- \int d^{p+1} \xi T_p e^{-\phi} \sqrt{-g} + \mu_p \int C_{p+1} \right).$$

リーディングの補正は一般に次の形をもつ(完全には決定されていない):

$$S_{b,3} \sim \frac{\alpha'^3}{\alpha'^4} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[\mathcal{R}^4 + \mathcal{R}^3 (G_3^2 + F_5^2 + (\nabla\tau)^2 + \nabla^2\tau) \right. \\ \left. + \mathcal{R}^2 ((DG_3)^2 + (DG_5)^2 + G_3^4 + \dots) + \mathcal{R}(G_3^6 + \dots) + G_3^8 + \dots \right].$$

これらのうち, 10次元で R^4 に比例する項が4次元有効理論において Kaehlerポテンシャルに $(\alpha')^3$ の補正を生み出し, その具体的な形は次の式で与えられると予想されている:.

$$K = K_{cs} - 2 \ln \left(\mathcal{V} - \frac{\chi(Y)}{8(2\pi)^3} f_{3/2}^{(0,0)}(\tau, \bar{\tau}) \right).$$

ここで,

$$f_{3/2}^{(0,0)}(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{e^{-3\phi/2}}{|m + n\tau|^2} \\ = \frac{2\zeta(3)}{e^{3\phi/2}} + \frac{2\pi^2}{3} e^{\phi/2} + \text{instanton terms.}$$

$$\tau = C_0 + ie^{-\phi}$$

KKLTとの比較

Kaehlerモジュライが体積モジュライ ρ のみの場合,

$$\mathcal{V} = \frac{5}{6}t^3 = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}\sigma^{3/2} \quad (\sigma = (\rho + \bar{\rho})/2)$$

より, $\Upsilon \gg \xi$ で

$$V \approx e^K \left[\frac{4\sigma^2}{3} a^2 |A|^2 e^{-2a\sigma} - 4a |W A a| e^{-a\sigma} + \frac{3\sqrt{5}\xi |W|^2}{\sqrt{2}g_s^{3/2} \sigma^{3/2}} \right]$$

となる. ここで,

$$\xi = -\frac{\zeta(3)}{2(8\pi)^3} \chi(Y).$$

よって, CYに対し

$$\chi(Y) = 2(h^{1,1} - h^{2,1}) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi > 0$$

が満たされれば、 Υ が大きい極限および小さい極限の両方で、最後の補正項が支配的となる。これは、KKLTモデルが妥当でないことを意味する。

例: $\mathbb{C}P^4[1,1,1,6,9]$ の複素超曲面

- 18次の射影代数多様体 $\mathbb{C}P^4[1,1,1,6,9]$ の複素超曲面 Y :

モジュライの数は,

$$h^{1,1} = 2, \quad h^{2,1} = 272 \Rightarrow \chi(Y) = -540$$

このCY族の中で $\Gamma = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{18}$ 不変性を持つもの限定すると, 複素構造モジュライは φ と ψ の2個になる:

$$Y : z_1^{18} + z_2^{18} + z_3^{18} + z_4^3 + z_5^3 - 18\psi z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 - 3\phi z_1^6 z_2^6 z_3^6 = 0$$

体積は

$$\mathcal{V} = \frac{t_2}{2}(t_1^2 + 6t_1 t_2 + 12t_2^2)$$

と書けるので,

$$\tau_1 = \frac{1}{2}t_1^2, \quad \tau_2 = \frac{1}{2}(t_1 + 6t_2)^2;$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_2^{3/2} - \tau_1^{3/2}).$$

● ポテンシャル

すべての複素モジュライが固定されているとして、超ポテンシャルは

$$W = W_0 + A_1 e^{-(a_1/g_s)T_1} + A_2 e^{-(a_2/g_s)T_2}.$$

よって、ポテンシャルは ν の大きい極限 $\tau_2 \gg \tau_1 \sim 1$ で

$$V = \frac{\lambda}{\mathcal{V}} x^{1/2} e^{-2x} - \frac{\mu}{\mathcal{V}^2} x e^{-x} + \frac{\nu}{\mathcal{V}^3},$$

$$x = a_1 t_1 / g_s, \quad \lambda = 24\sqrt{2} a_1^{3/2} |A_1|^2, \quad \mu = 4 |A_1 W|, \quad \nu = \frac{3}{4} \xi |W|^2$$

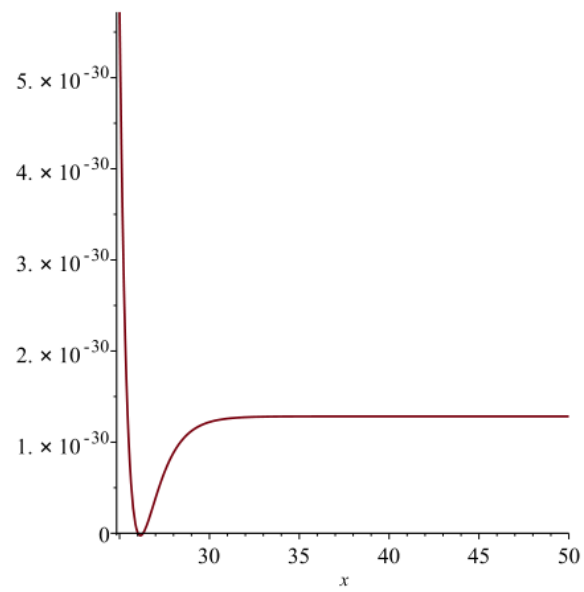
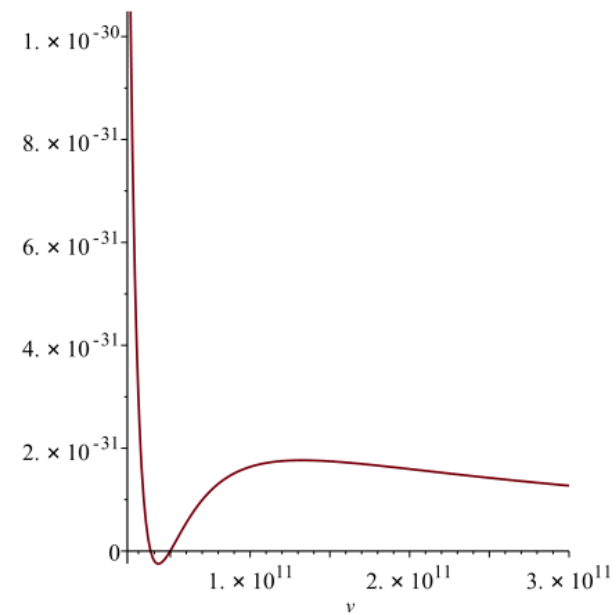
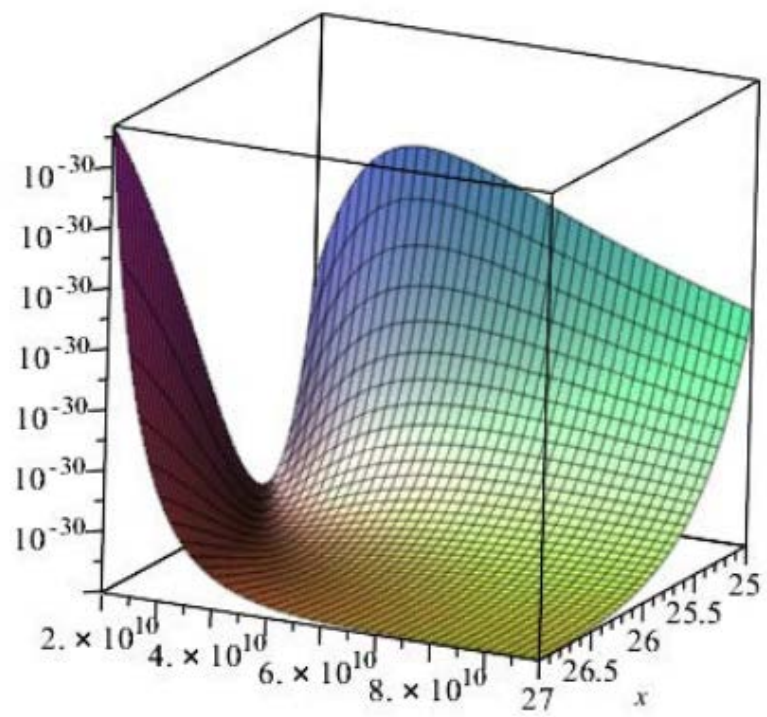
● 最小点

$$x = x_m \sim (4\nu\lambda/\mu^2)^{2/3}, \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}_m \sim \frac{\mu}{2\lambda} \sqrt{x_m} e^{x_m}$$

例えば、

$$\xi = 1.3084 \dots, \quad a_1 = 2\pi, \quad A_1 = 1, \quad W_0 = 10$$

$$\longrightarrow x_m = 26.15, \quad \underline{\mathcal{V}_m = 4.245 \times 10^{10}} \Rightarrow V_m = 2.4517 \times 10^{-32}.$$



質量スペクトル

- LVSでは、様々なモジュライの質量が、CYの体積 V の異なるべき依存性のために、階層的構造をもつ：

$\mathbb{C}P^4[1,1,1,6,9]$ 型の例

Scale	Mass
4-dimensional Planck mass	$\frac{4\pi\mathcal{V}_s^0}{g_s} m_s = M_P$
String scale m_s	$m_s = \frac{g_s}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$
Stringy modes m_S	$2\pi m_s = \frac{g_s\sqrt{\pi}}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}} M_P$
Kaluza-Klein modes m_{KK}	$\frac{2\pi}{\mathcal{V}_s^{\frac{1}{6}}} m_s = \frac{g_s\sqrt{\pi}}{(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{2}{3}}} M_P$
Gravitino $m_{3/2}$	$\frac{g_s W_0}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}} m_s = \frac{g_s^2 W_0}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$
Dilaton-axion m_τ	$\frac{g_s N}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}} m_s = \frac{g_s^2 N}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$
Complex structure moduli m_ϕ	$\frac{g_s N}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}} m_s = \frac{g_s^2 N}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$
‘Small’ Kähler modulus $m_{\tau_4}, m_{\tilde{\tau}_4}$	$\frac{W_0}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}} m_s = \frac{g_s W_0}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$
Modulinos $m_{\tilde{\tau}}, m_{\tilde{\phi}}$	$\frac{g_s W_0}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}} m_s = \frac{g_s^2 W_0}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$
‘Large’ volume modulus m_{τ_5}	$\frac{g_s W_0}{\mathcal{V}_s^0} m_s = \frac{g_s^2 W_0}{\sqrt{4\pi(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{3}{2}}}} M_P$
Volume axion m_{b_5}	$\exp(-(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{2}{3}}) M_P \sim 0$

Scale	Mass	GUT	Intermediate	TeV
M_P	M_P	2.4×10^{18} GeV	2.4×10^{18} GeV	2.4×10^{18} GeV
m_s	$\frac{g_s}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$	1.0×10^{15} GeV	1.0×10^{12} GeV	1.0×10^3 GeV
m_S	$2\pi m_s = \frac{g_s \sqrt{\pi}}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}} M_P$	6×10^{15} GeV	6×10^{12} GeV	6×10^3 GeV
m_{KK}	$\frac{2\pi m_s}{(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{1}{6}}} = \frac{g_s \sqrt{\pi}}{(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{2}{3}}} M_P$	1.5×10^{15} GeV	1.5×10^{11} GeV	0.15 GeV
$m_{3/2}$	$\frac{g_s^2 W_0}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$	1.5×10^{12} GeV	1.5×10^6 GeV	1.5×10^{-12} GeV
m_τ	$\frac{g_s N m_s}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}} = \frac{g_s^2 N}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$	1.5×10^{12} GeV	1.5×10^6 GeV	1.5×10^{-12} GeV
m_{cs}	$\frac{g_s N m_s}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}} = \frac{g_s^2 N}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$	1.5×10^{12} GeV	1.5×10^6 GeV	1.5×10^{-12} GeV
m_{τ_4}, m_{b_4}	$\frac{a_4 g_s W_0}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$	1.5×10^{11} GeV	1.5×10^5 GeV	1.5×10^{-11} GeV
m_{τ_5}	$\frac{g_s^2 W_0}{\sqrt{4\pi(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{3}{2}}}} M_P$	2.2×10^{10} GeV	22 GeV	2.2×10^{-26} GeV
m_{b_5}	$\exp(-a_5 \tau_5) M_P \sim 0$	$\sim 10^{-300}$ GeV	$\exp(-10^6)$ GeV	$\exp(-10^{18})$ GeV

LVSにおけるKaehlerモジュライインフレーション

● 概要

- Kaehlerモジュライが3個以上存在するLVSでは、小体積サイクルに対するKaehlerモジュライのアクションが分数ベキのStarobinskyタイプのポテンシャル $\text{const} - c \exp(-k\phi^{4/3})$ をもつ.
- 分数ベキのため、インフレーションタイプはsmall field型となる ($\epsilon \sim 10^{-12}$).

● 仮定

- IIB型SSTのLarge volume fluxed CY コンパクト化
- CYは、 $h^{2,1} > h^{1,1} \geq 3$ を満たす.
- Kaehlerモジュライのsmall cycle moduliの一つ T_s が他のモジュライとdecouple:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6} \kappa_s (t^s)^3 + \frac{1}{6} \sum_{i,j \neq s} \kappa_{ijk} t^i t^j t^k \Rightarrow \mathcal{V} = \frac{1}{6} (2\tau_s)^{2/3} + \mathcal{V}_1(\tau_i, i \neq s)$$

● 帰結

- τ_s ($T = c + i\tau$)がStarobinsky型ポテンシャルを生み出し, スローロルインフレーションを起こす.
- 観測的予言

$$\mathcal{V}_s = 10^5 \sim 10^7,$$

$$H_{\text{inf}} \sim 10^{13} \text{GeV},$$

$$n_s \simeq 1 - \frac{2}{N} = 0.960 \sim 0.967,$$

$$\frac{dn_s}{d \ln k} \simeq -(6 \sim 8) \times 10^{-4},$$

$$\epsilon < 10^{-12}.$$

● モデル

複素構造モジュライとディラトンは安定化しているとして, Kaehlerモジュライ $T_j = \tau_j + i c_j$ のみを考える:

$$\mathcal{V} = \alpha \left(\tau_1^{3/2} - \sum_{i=2}^n \lambda_i \tau_i^{3/2} \right),$$

$$K = K_{\text{CS}} - 2 \ln \left(\mathcal{V} + \frac{\xi}{2} \right); \xi = -\frac{\zeta(3)\chi(Y)}{2(2\pi)^3},$$

$$W = W_0 + \sum_{j=1}^n A_j e^{-a_j T_j}.$$

● ポテンシャル

$$V = \sum_j 8a_j^2 A_j^2 \sqrt{\tau_j} 3\alpha \lambda_j \mathcal{V} e^{-2a_j \tau_j} - \sum_j \frac{4a_j A_j \tau_j W_0}{\mathcal{V}^2} e^{-a_j \tau_j} + \frac{3\xi W_0^2}{4\mathcal{V}^3}$$

を固定して、 τ_j の安定点を求めると、

$$V = V_{\text{np}} \simeq -\frac{3W_0^2}{2\mathcal{V}^3} \left[\sum_{j=2}^n \frac{\lambda_j \alpha}{a_j^{3/2}} (\ln \mathcal{V})^{3/2} - \frac{\xi}{2} \right].$$

Upliftポテンシャルを加えて、

$$V = V_{\text{np}} + \frac{\gamma W_0^2}{\mathcal{V}^2} \Rightarrow \text{Stable minimum at } \mathcal{V} = \mathcal{V}_m \text{ with } V_m = 0$$

● インフレーション

τ_n のみが安定化していない初期条件を考えると,

$$V \simeq V_0 - \frac{4a_n\tau_n A_n W_0}{\gamma^2} e^{-a_n\tau_n}.$$

τ_n の運動項を正規化すると

$$\phi = \sqrt{\frac{4\lambda}{3\gamma}} \tau_n^{3/4} \quad \Rightarrow \quad V \simeq V_0 - \frac{4A_n W_0}{\gamma} c\phi^{4/3} e^{-c\phi^{4/3}}, \quad c = a_n \left(\frac{3\gamma}{4\lambda} \right)^{2/3}$$

これより, $c\phi^{4/3} \sim \tau_n \gg 1$ のとき,

$$N \simeq \frac{9\gamma}{4c^2\phi^2 B} e^{c\phi^{4/3}},$$

$$n_s - 1 \simeq 1 - \frac{2}{N}, \quad \epsilon \simeq \frac{9}{32N^2} \phi^{4/3}, \quad \xi \equiv M_P \frac{V'V'''}{V^2} \simeq -\frac{2}{N^2}.$$

LVSの問題点

- Small field & low scale infation

- Gravitino mass problem

- KKLTでは、一般に $H \lesssim m_{3/2}$ となるため、low scale SUSY breaking $m_{3/2} \sim 1\text{TeV}$ を仮定すると、インフレーションスケールが非常に低くなる。この問題は、KKLTの場合、racetrack型モデルでのfine tuningにより(KLモデル[Kallosch, Linde 2004, 2007])可能。
- LVSでは、この制限はさらに強くなり、 $H \lesssim (m_{3/2})^{3/2}$ となるので、 $m_{3/2} \sim 1\text{TeV}$ だと、 $H \lesssim 10\text{keV}$ となる。この問題は、inflation pt型small field インフレーションとrun away型再加熱(前加熱)を組み合わせた特殊なモデルでは回避できる[Conlon JP et al 2008]。

- Runaway problem

flux CY コンパクト化では、 $Y \rightarrow \infty$ でポテンシャルが必ずゼロとなる

3.3 超弦理論に基づくインフレーションモデル

モノドロミーインフレーション

概要

- String理論において, super-Planck excursionを自然な形で可能にし, large field inflationを実現する強力なアイデア. 周期性をもつモジュライ変数が, ブレーンやフラックスとの相互作用によりmonodromy的非周期性を獲得するというフレームワーク.

IIA理論におけるdS真空

IIA理論では、IIB理論と異なり、量子効果を用いない純粹の古典的なフラックスコンパクト化ですべてのモジュライが安定化される例が存在する。

- Toroidal orbifold T^6/Γ では、基底状態はすべてadS.
- Massive IIAを $(Nil/\Gamma)^2$ のorientifoldにコンパクト化すると安定なdS真空が存在が構成可能[Silverstein E 2008].
 - モジュライ: $g \propto e^\phi \Upsilon^{1/4}$, $e^{6\sigma} \propto \Upsilon$, Nil/Γ の周期 L_1, L_2 .
 - ポテンシャル: $R(Y) \rightarrow V_R$, $(O6, H_3, F_0) \rightarrow V_{OHm_0}$, $F_6 \rightarrow V_{F_6}$, KK5 brane $\rightarrow V_{KK5}$

Nil 多様体

- Nil群: 巾零型3次元リー群 $\approx \mathbb{R}^3$

- 群演算: $(a, b, c)(x, y, z) = (x + a, y + b, z + c + ay)$

- 行列への埋め込み: $\text{Nil} \rightarrow M(3, \mathbb{R})$

$$(a, b, c) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 交換子: $[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$

$$[(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)] = (0, 0, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\Rightarrow [\text{Nil}, \text{Nil}] \subset \{(0, 0, c)\} : \text{Center}$$

$$\Rightarrow \text{Nil}^{(3)} = [\text{Nil}, [\text{Nil}, \text{Nil}]] = 0 : \text{Nilpotent}$$

– Lie代数:

$$\xi_1 = \partial_x + y\partial_z, \quad \xi_2 = \partial_y, \quad \xi_3 = \partial_z$$

$$\Rightarrow [\xi_1, \xi_3] = 0, \quad [\xi_2, \xi_3] = 0, \quad [\xi_1, \xi_2] = -\xi_3$$

– 不變基底: $L_{\xi_i}\chi^j \equiv [\xi_i, \chi^j] = 0$ ($i, j = 1, 2, 3$)

$$\chi^1 = dx, \quad \chi^2 = dy, \quad \chi^3 = dz - xdy$$

– 不變計量

$$ds^2 = L_1^2(\chi^1)^2 + L_2^2(\chi^2)^2 + L_3^2(\chi^3)^2$$

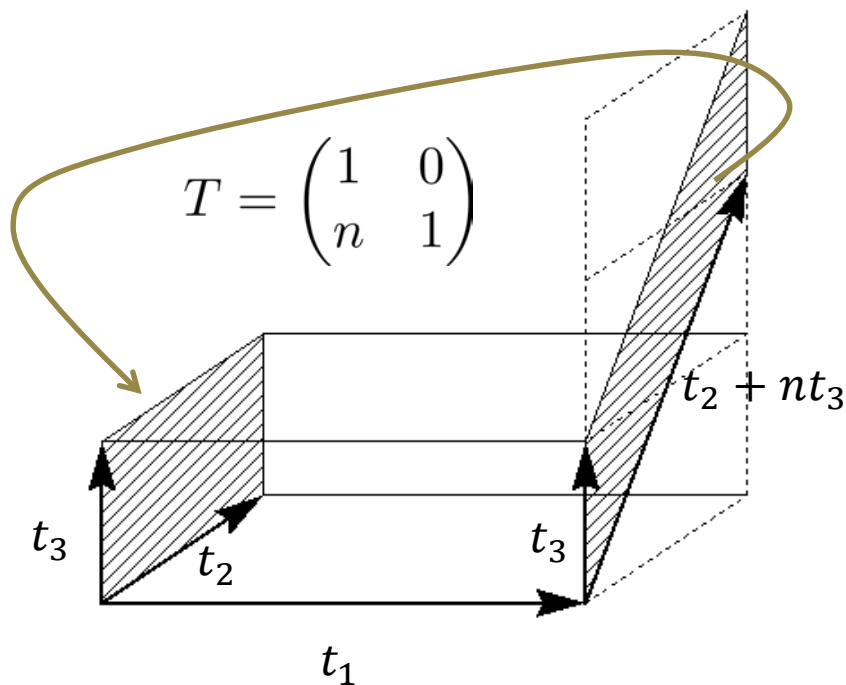
● コンパクト化: $T^3(n) = \text{Nil}/\Gamma(n)$

$$\Gamma(n) = \langle t_1, t_2, t_3 : [t_1, t_2] = t_3^n \rangle \cong \pi_1(T^3(n))$$

$$t_1 = (n, 0, 0), \quad t_2 = (0, n, 0), \quad t_3 = (0, 0, n)$$

– Topology

$$H_1(T^3(n), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n, \quad H^1(T^3(n), \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$$



$$T^3(n) \cong T^2 \times \mathbb{R} / \langle t_1 \rangle$$

Monodromy Inflation

String理論において, super-Planck excursionを自然な形で可能にし, large field inflationを実現する強力なアイデア. 周期性をもつモジュライ変数が, ブレーンやフラックスとの相互作用によりmonodromy的非周期性を獲得するというフレームワーク.

- 最初に提案されたモデル[Silverstein E, Westphal, A 2008]では、IIA理論のNilxNilコンパクト化に巻き付いたD4ブレーンを利用。
- 有効ポテンシャルが様々な分数巾 $V \propto \phi^\alpha$ をもつchaotic型large field modelを構成: $\alpha = 2/3, 2/5, \dots$
- その後、双対的対応により、IIB理論のCYコンパクト化 + D5/NS5ブレーンに基づくB/C-アクシオンインフレーションモデルに発展。より多様な巾指数を実現: $\alpha = 1, 2, \dots$

IIA Monodromy Inflation

● IIA理論のNilxNil orientifoldコンパクト化

– $Y_6 = (Nil \times Nil)/\Gamma(M) \times \Gamma(M) \cong T^3(M) \times T^3(M)$

$$\ell_s^{-2} ds^2 = L_1^2 dx^2 + L_2^2 dy^2 + L_3^2 (dz + xdy)^2 + ((x, y, z) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}))$$

– Orientifolding: $\sigma = \Omega_p(-1)^{FL} \mathcal{R}$, $\mathcal{R}: Nil \times \widetilde{Nil} \ni (X, \tilde{X}) \rightarrow (\tilde{X}, X)$

● D4ブレーン

– $(t_2, 0)$ 方向(y 方向)の S^1 に巻き付き、 $(t_1, 0)$ 方向(x 方向)に運動するD4ブレーンを考える。

– このブレーンの内部空間方向の長さ $L \ell_s$ は

$$L^2 = L_2^2 M^2 + L_3^2 (xM)^2 = (L_2^2 + x^2 L_3^2) M^2$$

● ポテンシャル

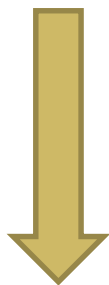
$$S_{D4} = - \int_{\Sigma_5} \frac{d^5 \xi}{(2\pi)^4 \ell_s^5} e^{-\phi} \sqrt{\det(G + B)} + \frac{1}{(2\pi)^4 \ell_s^5} \int_{\Sigma_5} C e^{-B + 2\pi \ell_s^2 F}$$



$$S_{D4} = \frac{1}{(2\pi)^4 g_s \ell_s^4} \int d^4 x \sqrt{-g_4} M \sqrt{(L_2^2 + L_3^2 x^2) (1 - \ell_s^2 L_1^2 \dot{x}^2)}$$

運動項の正規化

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{M^{1/2} L_u^{3/2} \beta^{-1/4}}{(2\pi)^2 \sqrt{g_s} \ell_s} \left(1 + \frac{L_3^2}{\beta L_u^2} x^2 \right)^{1/4}$$



$$\beta \equiv L_2/L_1, \quad L_u^2 = L_1 L_2$$

$$S_{D4} = \int d^4 x \sqrt{-g_4} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V_{D4}(\phi) \right);$$

$$V_{D4} = \frac{\beta^{1/2} M L_u}{(2\pi)^4 g_s \ell_s^4} \left(1 + \frac{L_3^2}{\beta L_u^2} x(\phi)^2 \right)^{1/2} \propto x \propto \phi^{2/3} \quad (|x| \gg 1)$$

● 整合性条件

$|F_6| = \ell_s^5 K$ とおくと、


– 十分なインフレーションが起きる条件 $\Rightarrow \beta \left(\frac{M}{K}\right)^{1/2} < 2.7 \times 10^{-5}$

– スカラ曲率ゆらぎの振幅 $\Rightarrow K \lesssim 2.3 \times 10^6$

$\Rightarrow \beta M^{1/2} \lesssim 0.04$: 内部空間に大きな非等方性が必要!

● Kallosh-Linde問題

$$m_{\text{pl}}^2 H_{\text{inf}}^2 \sim V_{D4} < V_{\text{mod},R} \sim m_{\text{pl}}^2 R_s(Y) \lesssim m_{\text{pl}}^2 m_{3/2}^2$$

 $H_{\text{inf}} \lesssim m_{3/2}$.

● 素粒子現象論

IIA理論の Nil^2 フラックスコンパクトにおいて、現実的な低エネルギー素粒子モデルが得られるかどうか不明(少なくとも、超対称性はストリングスケールで破れる)。

IIB Axion Monodromy Inflation

● IIBアクシオン

– NS-axion: $B_2 = \sum_I b_I \omega^I \Rightarrow b_I (I = 1, \dots, h^{1,1})$

– R-axion: $C_p = \sum c_\alpha^{(p)} \omega_p^\alpha \Rightarrow c_\alpha^{(p)} (\alpha = 1, \dots, b_p)$

● ブレイン-アクシオン相互作用

DBI作用積分より

$$D5 : V(b) = \frac{\epsilon}{g_s (2\pi)^5 \ell_s^4} \sqrt{\ell^4 + b^2},$$

$$NS5 : V(b) = \frac{\epsilon}{g_s^2 (2\pi)^5 \ell_s^4} \sqrt{\ell^4 + g_s^2 c^2}$$



$$V(\phi_a) \approx \mu_a^3 \phi_a$$

$(\phi_a \gg m_{\text{pl}})$

$$\phi_b^2 \sim \frac{L^2 b^2}{3g_s^2 (2\pi)^7 \ell_s^2} = \frac{1}{6} L^2 m_{\text{pl}}^2 b^2 \Rightarrow f_a \sim \frac{L}{\sqrt{6}} m_{\text{pl}},$$
$$\phi_c^2 \sim \frac{L^2 c^2}{3(2\pi)^7 \ell_s^2} = \frac{1}{6} g_s^2 L^2 m_{\text{pl}}^2 c^2 \Rightarrow f_a \sim \frac{g_s L}{\sqrt{6}} m_{\text{pl}}.$$

● アクシオンインフレーションの可能性

– NSアクシオン

Kaehlerポテンシャルは

$$K = -2 \ln(e^{-3\phi/2} \mathcal{V}) = -3 \ln \left(T_L + \bar{T}_L + \frac{3}{2} e^{-\phi} c^{LIJ} b_I b_J \right)$$

この K の b 依存性のため、B-axionには η 問題が起こりインフラトンとなれない。

– Rアクシオン

C-axionとNS₅ブレーンの結合の場合、 η 問題は起こらず、インフラトンとなることが可能。ただし、Euclidian D1ブレーンとの相互作用は危険で、抑制が必要。

Backup Slides



References for No-Go Theorems

- General No-Go theorems against dS
 - Gibbons GW(1984)
 - de Wit B, Sumit DJ, Hari Das ND (1987): NPB283, 165
“Residual Supersymmetry of Compactified D=10 Supergravity”
 - Maldacena JM, Nunez C (2001): IJMP A16, 822 [arXiv:hep-th/0007018]
“Supergravity description of field theories on curved manifolds and a no go theorem”
 - Gibbons GW (2003): CQG 20, S321 [arXiv:hep-th/0301117]
“Thoughts on tachyon cosmology”

Stringy localised sources: branes, anti-branes, orientifolds

- Dasgupta K, Gwyn R, McDonough E, Mia M, Tatar R (2014): JHEP 1407, 054 [arXiv:1402.5112]
“de Sitter Vacua in Type IIB String Theory: Classical Solutions and Quantum Corrections”.

● Higher-Order α' Corrections

- Bergshoeff EA, de Roo M (1989): NPB328, 439.
“The Quartic Effective Action of the Heterotic String and Supersymmetry”
- Green SR, Martinec EJ, Quigley C, Sethi S (2012): CQG 29, 075006 [arXiv:1110.0545]
“Constraints on String Cosmology”

No dS/adS in the all order in α'

- Gautason FF, Junghans D, Zagermann M (2012): JHEP 1206, 029 [arXiv:1204.0807]
“On Cosmological Constants from α' -Corrections”

● Non-perturbative Worldsheet Instantons

AdS vacua

- Curio G, Krause A, Lust D (2006):Fortsch.Phys. 54, 225 [arXiv:hep-th/0502168]
“Moduli stabilization in the heterotic/IIB discretuum”
- Anguelova L, Quigley C (2011):JHEP 1102, 113 [arXiv:1007.5047]
“Quantum Corrections to Heterotic Moduli Potentials”
- Cicoli M, de Alwis S, Westphal A (2013):JHEP 1310, 199 [arXiv:1304.1809]
“Heterotic Moduli Stabilisation”

No dS vacuum

- Kutasov D, Maxfield T, Melnikov I, Sethi S (2015):arXiv:1504.00056.
“Constraining de Sitter Space in String Theory”

● Gaugino Condensation

– Quigley C (2015): arXiv: 1504.00652

“Gaugino Condensation and the Cosmological Constant”

– Dine M, Rohm R, Seiberg N, Witten E (1985): PLB 156, 55.

“Gluino Condensation in Superstring Models”

– Derendinger JP, Ibanez LE, Nilles HP (1985): PLB155, 65.

“On the Low-Energy $d = 4$, $N=1$ Supergravity Theory Extracted from the $d = 10$, $N=1$ Superstring”

- Heterotic adS_4 solutions

- Threshold correction to the gauge coupling

- Gukov S, Kachru S, Liu X, McAllister L (2004): PRD69, 086008 [arXiv:hep-th/0310159]

- “Heterotic moduli stabilization with fractional Chern-Simons invariants”

- Anderson LB, Gray J, Lukas A, Ovrut B (2011): PRD83, 106011 [arXiv:1102.0011].

- “Stabilizing All Geometric Moduli in Heterotic Calabi-Yau Vacua”
Phys.Rev.

Strong coupling effects

- Buchbinder EI, Ovrut BA (2004): PRD69 , 086010, [hep-th/0310112]
“Vacuum stability in heterotic M theory”
- Becker M, Curio G, Krause A (2004): NPB693, 223 [hep-th/0403027]
“De Sitter vacua from heterotic M theory”
- Buchbinder EI (2005): NPB711, 314 [hep-th/0411062]
“Five-brane dynamics and inflation in heterotic M-theory”
- Gray J, Lukas A, Ovrut B (2007): PRD76, 126012 [arXiv:0709.2914]
“Flux, gaugino condensation and anti-branes in heterotic M-theory”

Non-perturbative dynamics

- Serone M, Westphal A (2007): JHEP 0708, 080 [arXiv:0707.0497]
“Moduli Stabilization in Meta-Stable Heterotic Supergravity Vacua”

H_3 flux+ α' corrections + Gaugino Condensate

- de Carlos B, Gurrieri S, Lukas A, Micu A (2006): JHEP 0603, 005 [arXiv:hep-th/0507173]
“Moduli stabilisation in heterotic string compactifications”
- Frey AR, Lippert M (2005): PRD72, 126001 [hep-th/0507202]
“AdS strings with torsion: Non-complex heterotic compactifications”
- Held J, Lust D, Marchesano F, Martucci L (2010): JHEP 1006, 090 [arXiv:1004.0867]
“DWSB in heterotic flux compactifications”
- Klaput M, Lukas A, Matti C, Svanes EE (2013): JHEP 1301, 015 [arXiv:1210.5933]
“Moduli Stabilising in Heterotic Nearly Kaehler Compactifications”