時空特異点

京大基研　小玉英雄

東工大集中講義：1999年7月21日〜23日

目 次

1 時空の特異性に関する一般概念

§1.1 完備性と曲率特異点

【**Definition 1.1.1** (測地的完備)】

時空 $(\mathscr{M}, g)$ が（時間的/光的/因果的に）測地的完備

$\Leftrightarrow$

任意の（時間的/光的/因果的）測地線はアフィンパラメーターに関して無限に延長可能.

$\square$

【**Example 1.1.2** (RW 時空)】

RW 計量

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 d\sigma^3 \tag{1.1.1}$$

宇宙膨張方程式

$$H^2 := \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{1.1.2}$$

$$\dot{\rho} = -3(\rho + P)H \tag{1.1.3}$$

曲率スカラ

$$R = 4\Lambda + \kappa^2(\rho - 3P) \tag{1.1.4}$$

$$R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 4\Lambda^2 + 2\kappa^2\Lambda(\rho - 3P) + \kappa^4(\rho^2 + 3P^2) \tag{1.1.5}$$

初期特異点

$$\ddot{a} = -\frac{\kappa^2}{6}(\rho + 3P)a + \frac{\Lambda}{3}a \tag{1.1.6}$$

より,

$$\rho + 3P \geq 2\Lambda/\kappa^2 \tag{1.1.7}$$

ならば，$H_0 := H(t_0) > 0$ のとき，有限な $t = t_*;\ t_0 - 1/H_0 < t_* < t_0$ で $a(t_*) = 0$ となるか解が $t < t_*$ に延長不可能となる.（以下，$t_* = 0$）

$\Lambda \leq 0$：特に，$P = (\gamma - 1)\rho$(barotropic matter) の場合，$\gamma > 2/3$ に対して，$t \sim 0$ で,

$$a \propto t^{2/(3\gamma)} \tag{1.1.8}$$

$$\rho \propto \frac{1}{a^{3\gamma}} \propto \frac{1}{t^2} \to \infty \tag{1.1.9}$$

$$R \sim \frac{1}{t^2} \to \infty \tag{1.1.10}$$

$$R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \sim \frac{1}{t^4} \to \infty \tag{1.1.11}$$

$\Lambda > 0$：このときは，$\gamma > 2/3$ でも初期特異点を持つ解と初期特異点を持たない bounce 解が存在する.

（注） 初期特異点では必ず $a = 0$ となるとは限らない．例えば,

$$P = \rho^2/\rho_* \propto \rho^2 \tag{1.1.12}$$

のとき，ρ は

$$\rho = \rho_* \frac{a_*^3}{a^3 - a_*^3} \tag{1.1.13}$$

となり,

$$t \to 0 \Rightarrow \quad a \to a_* > 0, \quad \rho \to \infty. \tag{1.1.14}$$

□

【Note 1.1.3】

条件 1.1.7 を満たす FRW 宇宙の $a > 0$ 領域において，t 一定面に垂直な時間的測地線は過去向きに不完備．また，光的測地線のアフィンパラメーター λ は $d\lambda \propto a dt$ なので，光的測地線も過去向きに不完備．

□

【Definition 1.1.4 (一般化されたアフィンパラメーター)**】**

（区分的に C^{2-} 級）曲線 $\gamma(u)$ に対して，γ にそう正規直交基底を E_a とするとき，

$$d\lambda = \left(\sum_a (\dot{\gamma} \cdot E_a)^2\right)^{1/2} du \tag{1.1.15}$$

で定義されるパラメーター λ を γ の一般化されたアフィンパラメーターという．

□

【Definition 1.1.5 (b-不完備)**】**

時空 $(\mathscr{M}, g)$ 内の曲線 $\gamma : [0,1) \to \mathscr{M}$ が延長不可能で，かつ有限な一般化されたアフィン長をもつとき，b-不完備であるという．また，時空 $(\mathscr{M}, g)$ が（時間的/光的/因果的な）b-不完備な曲線を含むとき，時空は b-不完備であるという．

□

【Definition 1.1.6 (s.p. 曲率特異点)**】**

時空 $(\mathscr{M}, g)$ 内が b-不完備な曲線 $\gamma : [0,1) \to \mathscr{M}$ を含み，曲率テンソルから作られるある多項式型スカラ量が γ 上で有界でないとき，$(\mathscr{M}, g)$ は $s.p.$ 曲率特異点を持つという．

□

【Definition 1.1.7 (物質特異点)】

時空 $(\mathscr{M}, g)$ において，スカラ曲率特異点を終端点とする曲線上で Ricci テンソルから作られる多項式型スカラ量で非有界なものが存在するとき，時空は物質特異点をもつという．

□

【Theorem 1.1.8】

FRW 時空 $(\mathscr{M}, g)$ において条件 1.1.7 が成り立ち，ある時刻 $t = t_0$ で $H > 0$ かつ，i)$K \geq 0$，ii) $t = t_0$ で $\rho + \Lambda/\kappa^2 > 0$，iii) $\rho + P \geq \gamma\rho(\gamma > 0)$ かつ $\rho(t_0) > 0$ のいずれかが成り立てば，過去向きの時間的および光的測地線は物質特異点を終端点とする．

□

Proof. i) $a \to 0$ のとき，$H \to \infty$．よって，$K \geq 0$ のとき，(1.1.2) 式より，$\rho \to \infty$，したがって $R^{ab}R_{ab} \to \infty$．

ii) (1.1.3) 式および条件 (1.1.7) より，

$$a\frac{d\rho}{da} \leq -2\rho - \frac{2}{\kappa^2}\Lambda \Rightarrow \quad \rho + \frac{\Lambda}{\kappa^2} \geq \frac{a_0^2}{a^2}\left(\rho_0 + \frac{\Lambda}{\kappa^2}\right). \tag{1.1.16}$$

よって，$a = 0$ まで解が延長可能なら，$\rho \to \infty$．

iii) (1.1.3) 式より，$t = t_0$ 近傍で

$$a\frac{d\rho}{da} < -3\gamma\rho \;\Rightarrow\quad a^{3\gamma}\rho > a_0^{3\gamma}\rho_0 > 0 \tag{1.1.17}$$

よって，$a_0 > a > 0$ で常に $\rho > 0$ で，$a \to 0$ で $\rho \to \infty$．

□

【Question 1.1.9】

$p = p(\rho)$ がなめらかな関数で，$\rho \geq 0$ であるとする．

i) $K = 0$ の場合に，FRW 解が常に $a = 0$ まで延長可能であるための必用十分条件を求めよ．

ii) $K \neq 0$ の場合に，$\rho + 3P - 2\Lambda/\kappa^2 \geq 0$ が成り立つとして，FRW 解が常に $a = 0$ まで延長可能であるための必用十分条件を求めよ．また，この場合に，時空が物質特異点を持たないのはどのような場合か？

□

【Answer 1.1.10】

$w := \int d\rho/(\rho+P)$ とおく．

i) $\rho+P>0$, $lim_{\rho\to\infty}w(\rho)=\infty$，$\int^{\infty} d\rho/[\rho^{1/2}(\rho+P)]<+\infty$.

ii) $K>0$ のときの条件は，$\rho+P>0$, $lim_{\rho\to\infty}w(\rho)=\infty$．$K<0$ のときの条件は，$\rho\sim\infty$ で $\rho+P>0$ かつ $lim_{\rho\to\infty}w(\rho)<\infty$ とならないこと．また，物質特異点を持たないのは，$K<0$ で $\rho+P$ が零点を持つ場合.

□

【Note 1.1.11】

1) **De Sitter 時空の flat chart**：$\Lambda=3/l^2>0, K=0, \rho=P=0$

$$ds^2=-dt^2+l^2e^{2t/l}(d\boldsymbol{x})^2. \tag{1.1.18}$$

2) **De Sitter 時空の open chart**：$\Lambda=3/l^2>0, K=-1, \rho=P=0$

$$ds^2=-dt^2+l^2\sinh^2(t/l)(d\chi^2+\sinh^2\chi d\Omega_2^2). \tag{1.1.19}$$

3) **Anti de Sitter 時空の open chart**：$\Lambda=-3/l^2<0, K=-1, \rho=P=0$

$$ds^2=-dt^2+l^2\sin^2(t/l)(d\chi^2+\sinh^2\chi d\Omega_2^2). \tag{1.1.20}$$

2)，3) の時空はいずれも $t\to0$ で $a\to0$ となるが，解は $a=0$ を越えてなめらかに拡張可能．1) の時空は $t\to-\infty$ で $a\to0$ となるが，一般の時間的測地線および光的測地線に関して不完備．また，これらの時空を拡張して得られる全 de Sitter 時空および全反 de Sitter 時空は測地的に完備.

□

§1.2
大域的双曲性

【Definition 1.2.1 (依存領域)**】**

時空 $(\mathscr{M}, g)$ の集合 S に対して，その点通過する過去向き（未来向き）の延長不可能な因果的曲線がすべて S と交わるような点全体の集合を S の未来（過去）の依存領域 *(demain of dependence,　Cauchy development)* といい，$D^+(S)$（$D^-(S)$）と表記する．また，$D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$ を単に S の依存領域という．

□

【Definition 1.2.2 (準 Cauchy 面)**】**

時空 $(\mathscr{M}, g)$ 内の閉超曲面 Σ が次の 2 条件を満たすとき，Σ を準 *Cauchy* 面（*partial Cauchy surface*）という：

i) 非因果的である，すなわち，任意の因果的曲線と高々一点でのみ交わる．
ii) 端を持たない，すなわち，任意の点 $p \in \Sigma$ に対して，時間的曲線で結べない点の組 $q \in I^+(p), r \in I^-(p)$ が存在する．

□

【Definition 1.2.3 (大域的双曲性，Cauchy 面)**】**

時空 $(\mathscr{M}, g)$ が $\mathscr{M} = D(\Sigma)$ となる準 Cauchy 面を含むとき，$(\mathscr{M}, g)$ は大域的双曲性をもつといい，Σ を *Cauchy* 面とよぶ．

□

【Theorem 1.2.4】　[Geroch 1970, HE Prop. 6.6.8]

時空 $(\mathscr{M}, g)$ が大域的双曲性を持つならば，向き付け可能な多様体 Σ が存在して，$\mathscr{M} \approx \mathbb{R} \times \Sigma$ かつ各 $t \in \mathbb{R}$ に対して $\{t\} \times \Sigma$ は $\mathscr{M}$ の Cauchy 面となる．

□

【Theorem 1.2.5】

定理 1.1.8 の条件下で，$\Sigma : t = t_0$ での初期条件から決まる FRW 解（$t \leq t_0, a > 0, \rho$: 有限）は大域的双曲性を持ち，かつ極大である．

□

【Note 1.2.6】

$K < 0, \Lambda < 0$ ないし $K \geq 0, \Lambda > 0$ で $\rho = P = 0$ の場合の FRW 解は大域的双曲性を持つが極大でない．$\Lambda > 0$ の場合は，解は極大な大域的双曲型の拡張を持つが（全 de Sitter 時空），$\Lambda < 0$ の場合は，どの拡張も大域的双曲性を持たない．

□

【Definition 1.2.7 (Cauchy ホライズン)**】**

時空 $(\mathscr{M}, g)$ の集合 S に対して，$H^+(S) := \overline{D^+(S)} - I^-(D^+(S))$ を S の未来の *Cauchy* ホライズンという．

□

2 Geodesic Deviation Equations

§2.1 時間的ベクトル場

時間的ベクトル場（粒子の速度場）

$$u = \partial_\tau;\ u \cdot u = -1. \tag{2.1.1}$$

Fermi 基底：次の条件を満たす流線に沿った正規直交基底 E_a

$$E_0 = u,\ u \cdot E_I = 0,\ \dot{E}_I \equiv \nabla_u E_I = a_I u. \tag{2.1.2}$$

このとき，a_I は

$$a_I = -u \cdot \dot{E}_I = \dot{u} \cdot E_I \tag{2.1.3}$$

を満たすので，流線上のある点で E_a を与えると他の点での E_a は一意的に決まる．

流線間の相対位置の変化：座標 z^i を流線に沿って一定となるようにとると，

$$Z = \delta z^i \partial_i \tag{2.1.4}$$

に対して，

$$\nabla_u Z - \nabla_Z u = [u, Z] = 0. \tag{2.1.5}$$

これより，Z を Fermi 基底に関する成分表示

$$Z = Z^0 u + Z^I E_I \tag{2.1.6}$$

に対して，

$$\dot{Z}^I = \dot{E}_I \cdot Z + E_I \cdot \nabla_u Z = -a_I Z^0 + E_I \cdot \nabla_Z u$$
$$= -a_I Z^0 + Z^0 E_I \cdot \dot{u} + E_I \cdot \nabla_{E_J} u Z^J. \tag{2.1.7}$$

よって，

$$\dot{Z}^I = M_{IJ} Z^J; \quad M_{IJ} = E_I \cdot \nabla_{E_J} u. \tag{2.1.8}$$

また，

$$\dot{Z}^0 = -\dot{u} \cdot Z - u \cdot \nabla_u Z = -\dot{u} \cdot E_I Z^I - u \cdot \nabla_Z u$$
$$= -a_I Z^I. \tag{2.1.9}$$

これらより

$$\dot{Z} = Z^0 \dot{u} + M_{IJ} Z^J E^I. \tag{2.1.10}$$

Expansion, shear, rotation

$$\theta_{IJ} = \sigma_{IJ} + \frac{1}{3}\delta_{IJ}\theta := M_{(IJ)}; \ \sigma_{II} = 0, \tag{2.1.11}$$

$$\omega_{IJ} := M_{[IJ]}. \tag{2.1.12}$$

とおくと，

$$M_{IJ} E^I_\mu E^J_\nu = (E^I_\mu E^\lambda_I)(E^J_\nu E^\sigma_J)\nabla_\sigma u_\lambda = (\delta^\lambda_\mu + u_\mu u^\lambda)(\delta^\sigma_\nu + u_\nu u^\sigma)\nabla_\sigma u_\lambda$$
$$= \nabla_\nu u_\mu + u_\nu \dot{u}_\mu \tag{2.1.13}$$

より，

$$\nabla_\nu u_\mu = \theta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} - \dot{u}_\mu u_\nu; \ \theta_{\mu\nu} := E^I_\mu E^J_\nu \theta_{IJ}, \ \omega_{\mu\nu} := E^I_\mu E^J_\nu \omega_{IJ}. \tag{2.1.14}$$

Raychaudhuri 方程式：$[u, Z] = 0$ より

$$\ddot{Z} = \nabla_u \nabla_Z u = R(u, Z)u + \nabla_Z \dot{u}. \tag{2.1.15}$$

一方，$\dot{Z}$ の表式より，

$$\ddot{Z} - \nabla_Z \dot{u} = - a_I Z^I \dot{u} - Z^I \nabla_{E_I} \dot{u} + a_I M_{IJ} Z^J u$$
$$+ (\dot{M} + M^2)_{IJ} Z^J E_I. \tag{2.1.16}$$

よって，

$$(\dot{M} + M^2)_{IJ} = -R_{I\mu J\nu} u^\mu u^\nu + a_I a_J + E_J \cdot \nabla_{E_J} \dot{u}. \tag{2.1.17}$$

これより

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 = -2\sigma^2 + 2\omega^2 - R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + \nabla_\mu \dot{u}^\mu. \tag{2.1.18}$$

ここで

$$2\sigma^2 := \sigma_{IJ}\sigma_{IJ}, \quad 2\omega^2 := \omega_{IJ}\omega_{IJ}. \tag{2.1.19}$$

特に，$\dot{u} \equiv 0$ のとき，この方程式は *Raychaudhuri* 方程式と呼ばれる．

§2.2
光的測地線束

Null tetrad

$$k, l, E_A : \quad k \cdot l = -1,\ k \cdot k = l \cdot l = k \cdot E_A = l \cdot E_A = 0, E_A \cdot E_B = \delta_{AB}. \tag{2.2.1}$$

光的測地線束

$$\nabla_k k = 0; \nabla_k l = 0,\ \nabla_k E_A = 0, \tag{2.2.2}$$

$$[k, Z] = 0 \tag{2.2.3}$$

測地線間の相対位置ベクトル Z の null tetrad に関する成分

$$Z = Z^0 k + Z^1 l + Z^A E_A \tag{2.2.4}$$

のうち，Z^1 の時間発展は

$$\dot{Z}^1 = -k \cdot nabla_k Z = -k \cdot \nabla_Z k = 0. \tag{2.2.5}$$

これより，以下 $Z^1 = 0$ とする．他の成分は

$$\dot{Z}^0 = -l \cdot \nabla_k Z = -l \cdot \nabla_Z k = -l \cdot \nabla_A k Z^A, \tag{2.2.6}$$

$$\dot{Z}^A = E_A \cdot \nabla_k Z = E_A \cdot \nabla_B k Z^B. \tag{2.2.7}$$

よって，

$$\dot{Z}^A = M_{AB} Z^B; \tag{2.2.8}$$

$$M_{AB} := E_A \cdot \nabla_B k = \hat{\theta}_{AB} + \hat{\omega}_{AB}, \tag{2.2.9}$$

$$\hat{\theta}_{AB} = \hat{\sigma}_{AB} + \frac{1}{2}\hat{\theta}\delta_{AB}, \tag{2.2.10}$$

$$\hat{\omega}_{AB} = \hat{\omega}\epsilon_{AB} \tag{2.2.11}$$

Jacobi 方程式

$$\nabla_k^2 Z = R(k, Z)k \tag{2.2.12}$$

の E_A 成分より

$$\ddot{Z}_A = E_A \cdot R(k, E_B)k Z^B = R_{AkkB} Z^B. \tag{2.2.13}$$

よって，

$$(\dot{M} + M^2)_{AB} = -R_{AkBk}. \tag{2.2.14}$$

目次へ

これを $\hat{\theta}, \hat{\sigma}, \hat{\omega}$ で表すと

$$\dot{\hat{\theta}} + \frac{1}{2}\hat{\theta}^2 + 2\hat{\sigma}^2 - 2\hat{\omega}^2 = -R_k k, \tag{2.2.15}$$

$$\dot{\hat{\sigma}}_{AB} + \hat{\theta}\hat{\sigma}_{AB} = -C_{AkBk}, \tag{2.2.16}$$

$$\dot{\hat{\omega}}_{AB} + \hat{\theta}\hat{\omega} = 0. \tag{2.2.17}$$

§2.3
(3+1) 分解

(3+1) 分解：時空内の超曲面 Σ の単位法ベクトルを n とする：

$$n \cdot n = \pm 1 \tag{2.3.1}$$

Σ に接するベクトル場 X, Y に対して，

$$\nabla_X Y = D_X Y + h(X, Y) n \tag{2.3.2}$$

と直交分解すると，$[X, Y]$ が Σ に接することより，D は Σ に誘導された計量に関する Riemann 接続となり，また h は対称テンソルとなる：

$$h(X, Y) = h(Y, X). \tag{2.3.3}$$

また，

$$\nabla_X n = \pm h(X) \tag{2.3.4}$$

とおくと，$h(X)$ は Σ に接し，

$$g(h(X), Y) = h(X, Y). \tag{2.3.5}$$

Gauss-Codazzi 方程式：$\nabla_X Y$ の分解公式より，Σ の接ベクトル場 X, Y, Z に対して，

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= {}^3R(X, Y)Z \mp (h(Y, Z)h(X) - h(X, Z)h(Y)) + ((D_X h)(Y, Z) - (D_Y h)(X, Z)) . \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

よって，Σ の正規直交基底 E_I に対して，

$$R_{IJKL} = {}^3R_{IJKL} \pm (h_{IL} h_{JK} - h_{JL} h_{IK}), \tag{2.3.7}$$

$$R^0{}_{IJK} = D_J h_{IK} - D_K h_{IJ}. \tag{2.3.8}$$

第１式（Gauss 方程式）のトレースより

$$R - 2R^0_0 = {}^3R + (\mathrm{Tr} h)^2 - \mathrm{Tr} h^2. \tag{2.3.9}$$

速度場として n を用いると，$\theta_{IJ} = h_{IJ}$ となるので，

$$2G^0_0 = -{}^3R + 2\sigma^2 - \frac{2}{3}\theta^2 \tag{2.3.10}$$

を得る（$\theta = 3H$）.

第２式（Codazzi 方程式）のトレースより，

$$R^0_I = D_J \mathrm{Tr} h - D_J h^J_I. \tag{2.3.11}$$

3 空間的に一様な時空

§3.1 Bianchi types

3 次元 Lie 代数

$$[\xi_I, \xi_J] = C^K{}_{IJ}\xi_K \quad (I, J, K = 1, 2, 3). \tag{3.1.1}$$

$$\text{Jacobi 恒等式：} \quad [[\xi_I, \xi_J], \xi_K] + [[\xi_J, \xi_K], \xi_I] + [[\xi_K, \xi_I], \xi_J] = 0 \tag{3.1.2}$$

Adjoint 表現: Lie 代数 $\mathscr{L}$ の自分自身の上への線形表現 Ad を

$$\mathrm{ad}(\xi)\eta := [\xi, \eta] \tag{3.1.3}$$

により定義すると，Jacobi 恒等式は

$$[\mathrm{ad}(\xi_I), \mathrm{ad}(\xi_J)] = C^K{}_{IJ}\mathrm{ad}(\xi_K) \tag{3.1.4}$$

と表される．この随伴表現は

$$\mathrm{Ad}(\xi_I) \mapsto \boldsymbol{C}_I; \quad (\boldsymbol{C}_I)^J_K = C^J{}_{IK}. \tag{3.1.5}$$

と行列表示されるので，Jacobi 恒等式は構造定数に対する次の条件となる：

$$[\boldsymbol{C}_I, \boldsymbol{C}_J] = C^K{}_{IJ}\boldsymbol{C}_K. \tag{3.1.6}$$

Ellis-MacCallum 表示

$$\frac{1}{2}C^I_{JK}\epsilon^{JKL} = N^{IL} + \epsilon^{ILM}a_M; \quad N^{IJ} = N^{JI} \tag{3.1.7}$$

とおくと，$C^I{}_{JK}$ は対称行列 N とベクトル a を用いて

$$C^I{}_{JK} = N^{IL}\epsilon_{LJK} + a_J\delta^I_K - a_K\delta^I_J \tag{3.1.8}$$

Class	G_3A						G_3B				
Type	I	II	VI_0	VII_0	VIII	IX	V	IV	III	VI_h $h \neq -1$	VII_h
A	0	0	0	0	0	0	1	1	1	$\sqrt{-h}$	$\sqrt{h}$
N_1	0	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	0
N_2	0	0	-1	1	1	1	0	0	-1	-1	1
N_3	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1

表 3.1: ３次元リー代数の分類

と表される．特に，

$$2a_I = c_I := C^J{}_{IJ} = \mathrm{Tr}\boldsymbol{C}_I \tag{3.1.9}$$

となる．また，Jacobi 恒等式は

$$Na = 0 \tag{3.1.10}$$

と表される．

基底の変換

$$\xi_I \to \xi_J T^J_I \tag{3.1.11}$$

に対して，N と a は次のように変換する：

$$N \to (\det T) T^{-1} N T^{-1T}, \tag{3.1.12}$$

$$a \to T^T a. \tag{3.1.13}$$

【**Theorem 3.1.1** (Bianchi 型)】　[Bianchi,Ellis-MacCallum] ３次元実リー代数は、ベクトル a の大きさ $A = (a^I a_I)^{1/2}$ と行列 N の３つの固有値 N_1, N_2, N_3 により、表 3.1 に示した $I \sim IX$ までの９つの方に分類される。任意の３次元リー代数はこのいずれかと同型である。 □

Type I: $C^I_{JK} = 0$

$$[\xi_I, \xi_J] = 0$$
$$\xi_1 = \partial_1, \quad \xi_2 = \partial_2, \quad \xi_3 = \partial_3$$
$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3$$
$$\chi^1 = dx^1, \quad \chi^2 = dx^2, \quad \chi^3 = dx^3$$

Type II: $C^1{}_{23} = -C^1{}_{32} = 1$

$$[\xi_2, \xi_3] = \xi_1, \quad [\xi_1, \xi_2] = 0, \quad [\xi_1, \xi_3] = 0$$
$$\xi_1 = \partial_2, \quad \xi_2 = \partial_3, \quad \xi_3 = \partial_1 + x^3\partial_2$$
$$X_1 = \partial_2, \quad X_2 = x^1\partial_2 + \partial_3, \quad X_3 = \partial_1$$
$$\chi^1 = dx^2 - x^2 dx^3, \quad \chi^2 = dx^3, \quad \chi^3 = dx^1$$

Type III: $C^1{}_{13} = -C^1{}_{31} = 1$

$$[\xi_1, \xi_3] = \xi_1, \quad [\xi_1, \xi_2] = 0, \quad [\xi_2, \xi_3] = 0$$
$$\xi_1 = \partial_2, \quad \xi_2 = \partial_3, \quad \xi_3 = \partial_1 + x^2\partial_2$$
$$X_1 = e^{x^1}\partial_2, \quad X_2 = \partial_3, \quad X_3 = \partial_1$$
$$\chi^1 = e^{-x^1} dx^2, \quad \chi^2 = dx^3, \quad \chi^3 = dx^1$$

Type IV: $C^1{}_{13} = -C^1{}_{31} = 1$, $C^1{}_{23} = -C^1{}_{32} = 1$, $C^2{}_{23} = -C^2{}_{32} = 1$

$$[\xi_1, \xi_3] = \xi_1, \quad [\xi_2, \xi_3] = \xi_1 + \xi_2, \quad [\xi_1, \xi_2] = 0$$
$$\xi_1 = \partial_2, \quad \xi_2 = \partial_3, \quad \xi_3 = \partial_1 + (x^2 + x^3)\partial_2 + x^3\partial_3$$
$$X_1 = e^{x^1}\partial_2, \quad X_2 = e^{x^1}(x^1\partial_2 + \partial_3), \quad X_3 = \partial_1$$
$$\chi^1 = e^{-x^1}(dx^2 - x^1 dx^3), \quad \chi^2 = e^{-x^1} dx^3, \quad \chi^3 = dx^1$$

Type V: $C^1{}_{13} = -C^1{}_{31} = 1$, $C^2{}_{23} = -C^2{}_{32} = 1$.

$$[\xi_1, \xi_3] = \xi_1, \quad [\xi_2, \xi_3] = \xi_2, \quad [\xi_1, \xi_2] = 0$$
$$\xi_1 = \partial_2, \quad \xi_2 = \partial_3, \quad \xi_3 = \partial_1 + x^2\partial_2 + x^3\partial_3$$
$$X_1 = e^{x^1}\partial_2, \quad X_2 = e^{x^1}\partial_3, \quad X_3 = \partial_1$$
$$\chi^1 = e^{-x^1} dx^2, \quad \chi^2 = e^{-x^1} dx^3, \quad \chi^3 = dx^1$$

Type VI$_h$: $C^1{}_{13} = -C^1{}_{31} = 1$, $C^2{}_{23} = -C^2{}_{32} = q$,

$$h = -(1+q)^2/(1-q)^2 \quad (q \neq 0, 1)$$
$$[\xi_1, \xi_3] = \xi_1, \quad [\xi_2, \xi_3] = q\xi_2, \quad [\xi_1, \xi_2] = 0$$
$$\xi_1 = \partial_2, \quad \xi_2 = \partial_3, \quad \xi_3 = \partial_1 + x^2\partial_2 + qx^3\partial_3$$
$$X_1 = e^{x^1}\partial_2, \quad X_2 = e^{qx^1}\partial_3, \quad X_3 = \partial_1$$
$$\chi^1 = e^{-x^1} dx^2, \quad \chi^2 = e^{-qx^1} dx^3, \quad \chi^3 = dx^1$$

表 3.2: 3次元実リー群に対する対する不変基底と双対基底 (1)

Type VII$_h$: $C^2{}_{13} = -C^2{}_{31} = 1$, $C^1{}_{23} = -C^1{}_{32} = -1$, $C^2{}_{23} = -C^2{}_{32} = q$,

$$h = q^2/(4-q^2) \quad (q^2 < 4)$$

$$[\xi_1, \xi_3] = \xi_2, \quad [\xi_2, \xi_3] = -\xi_1 + q\xi_2, \quad [\xi_1, \xi_2] = 0$$

$$\xi_1 = \partial_2, \quad \xi_2 = \partial_3, \quad \xi_3 = \partial_1 - x^3\partial_2 + (x^2 + qx^3)\partial_3$$

$$X_1 = (A + kB)\partial_2 - B\partial_3, \quad X_2 = B\partial_2 + (A - kB)\partial_3, \quad X_3 = \partial_1$$

$$\chi^1 = (C - kD)dx^2 - Ddx^3, \quad \chi^2 = Ddx^2 + (C + kD)dx^3, \quad \chi^3 = dx^1$$

$$A = e^{kx^1}\cos(ax^1), \quad B = -a^{-1}e^{kx^1}\sin(ax^1)$$

$$C = e^{-kx^1}\cos(ax^1), \quad B = -a^{-1}e^{-kx^1}\sin(ax^1)$$

$$k = q/2, \quad a = (1-k^2)^{1/2} = (4-q^2)^{1/2}/2.$$

Type VIII: $C^1_{32} = C^2_{31} = C^3_{12} = 1$, $C^1_{23} = C^2_{13} = C^3_{21} = -1$

$$[\xi_1, \xi_2] = \xi_3, [\xi_2, \xi_3] = -\xi_1, [\xi_3, \xi_1] = \xi_2$$

$$\xi_1 = \tfrac{1}{2}e^{-x^3}\partial_1 + \tfrac{1}{2}(e^{x^3} - (x^2)^2 e^{-x^3})\partial_2 - x^2 e^{-x^3}\partial_3,$$

$$\xi_2 = \partial_3,$$

$$\xi_3 = \tfrac{1}{2}e^{-x^3}\partial_1 - \tfrac{1}{2}(e^{x^3} + (x^2)^2 e^{-x^3})\partial_2 - x^2 e^{-x^3}\partial_3,$$

$$X_1 = \tfrac{1}{2}(1 + (x^1)^2)\partial_1 + \tfrac{1}{2}(1 - 2x^1x^2)\partial_2 - x^1\partial_3,$$

$$X_2 = -x^1\partial_1 + x^2\partial_2 + \partial_3,$$

$$X_3 = \tfrac{1}{2}(1 - (x^1)^2)\partial_1 - \tfrac{1}{2}(1 - 2x^1x^2)\partial_2 + x^1\partial_3,$$

$$\chi^1 = dx^1 + (1 + (x^1)^2)dx^2 + (x^1 - x^2 - (x^1)^2x^2)dx^3,$$

$$\chi^2 = 2x^1dx^2 + (1 - 2x^1x^2)dx^3,$$

$$\chi^3 = dx^1 + (-1 + (x^1)^2)dx^2 + (x^1 + x^2 - (x^1)^2x^2)dx^3,$$

Type IX: $C^1_{23} = C^2_{31} = C^3_{12} = 1$, $C^1_{32} = C^2_{13} = C^3_{21} = -1$

$$[\xi_1, \xi_2] = \xi_3, [\xi_2, \xi_3] = \xi_1, [\xi_3, \xi_1] = \xi_2$$

$$\xi_1 = \partial_2,$$

$$\xi_2 = \cos x^2\partial_1 - \cot x^1 \sin x^2\partial_2 + \frac{\sin x^2}{\sin x^1}\partial_3,$$

$$\xi_3 = -\sin x^2\partial_1 - \cot x^1 \cos x^2\partial_2 + \frac{\cos x^2}{\sin x^1}\partial_3,$$

$$X_1 = -\sin x^3\partial_1 + \frac{\cos x^3}{\sin x^1}\partial_2 - \cot x^1 \cos x^3\partial_3,$$

$$X_2 = \cos x^3\partial_1 + \frac{\sin x^3}{\sin x^1}\partial_2 - \cot x^1 \sin x^3\partial_3,$$

$$X_3 = \partial_3,$$

$$\chi^1 = -\sin x^3 dx^1 + \sin x^1 \cos x^3 dx^2,$$

$$\chi^2 = \cos x^3 dx^1 + \sin x^1 \sin x^3 dx^2,$$

$$\chi^3 = \cos x^1 dx^2 + dx^3$$

表 3.3: 3次元実リー群に対する対する不変基底と双対基底 (2)

§3.2 基本方程式

不変基底

$$\mathcal{L}_{\xi_J}\chi^I = 0; \quad [\xi_I, \xi_J] = C^K{}_{IJ}\xi_K \tag{3.2.1}$$

Mauer-Cartan 方程式

$$d\chi^I = \frac{1}{2}C^I{}_{JK}\chi^J \wedge \chi^K. \tag{3.2.2}$$

計量

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(B^T B)_{IJ}\chi^I\chi^J; \quad \det B = 1 \tag{3.2.3}$$

Einstein 方程式

$$H = \dot{a}/a, \quad \sigma_{IJ} = (\dot{B}B^{-1})_{(IJ)}, \quad \pi_{IJ} = -(\dot{B}B^{-1})_{[IJ]} \tag{3.2.4}$$

$$D^I{}_{JK} = B^I_{I'}C^{I'}{}_{J'K'}(B^{-1})^{J'}_J(B^{-1})^{K'}_K, \quad D_I = D^K{}_{IK} \tag{3.2.5}$$

とおくと，正規直交基底 $\theta^0 = dt, \theta^I = aB^I_J\chi^J$ に関する成分表示のもとで，Eq.(2.3.10) と Eq.(2.3.11) より

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}T_{00} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{1}{6}\mathrm{Tr}\sigma^2 - \frac{K(B)}{a^2}, \tag{3.2.6}$$

$$\sigma^{JK}D_{JKI} + \sigma^{IJ}D_J = \kappa^2 a T_{0I}, \tag{3.2.7}$$

また，$t=$一定面の単位法ベクトル場に対する geodesic deviation equations より

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{\kappa^2}{6}(T_{00} + T^I_I) + \frac{\Lambda}{3} - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\sigma^2, \tag{3.2.8}$$

$$(\dot{\sigma} + 3H\sigma + \pi\sigma - \sigma\pi)_{IJ} + \frac{2}{a^2}(3V_{IJ}(B) - \delta_{IJ}V(B))$$
$$= \kappa^2\left(T_{IJ} - \frac{1}{3}\delta_{IJ}T^K_K\right) \tag{3.2.9}$$

ここで

$$K_{IJ}(B) := \frac{a^2}{6}{}^3R_{IJ} = \frac{1}{6}D_K D_{(IJ)K} - \frac{1}{6}D_{KLI}D_{(KL)J} + \frac{1}{24}D_{IKL}D_{JKL}, \tag{3.2.10}$$

$$K(B) := K^I_I(B) = \frac{a^2}{6}{}^3R \tag{3.2.11}$$

初期特異点 $\dot{H} + H^2 = \ddot{a}/a$ より，ある時刻 $t = t_0$ で $H_0 = H(t_0) > 0$ かつ

$$T_{00} + T_I^I \geq \frac{2}{\kappa^2}\Lambda \tag{3.2.12}$$

が常に成り立てば，有限な時刻 $t = t_* : t_0 - 1/H_0 \geq t* < t_0$ で $a = 0$ となるか，解が延長不可能となる．

4 直交Bianchiモデル

§4.1 Bianchi I型 モデル

Bianchi type I

$$C^I{}_{JK} = 0 \;\Rightarrow\; \quad \chi^I = dx^I,\; K_{IJ} = 0,\; T_{0I} = 0. \tag{4.1.1}$$

Kasner 解：真空一般解

$$ds^2 = -dt^2 + \sum_I t^{2\sigma_I}(dx^I)^2; \tag{4.1.2}$$

$$\sum_I \sigma_I = 1, \quad \sum_I \sigma_I^2 = 1. \tag{4.1.3}$$

初期特異点の構造

$$a = t^{1/3} \to 0 (t \to 0), \tag{4.1.4}$$

$$\mathrm{Tr}\sigma^2 = \frac{2}{3t^2} \to \infty (t \to 0), \tag{4.1.5}$$

$$\mathscr{R}^0{}_I = \frac{\sigma_I(\sigma_I - 1)}{t^2}\theta^0 \wedge \theta^I, \quad \mathscr{R}^I{}_J = \frac{\sigma_I \sigma_J}{t^2}\theta^I \wedge \theta^J. \tag{4.1.6}$$

（注）$\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0$ の時，Minkowski 時空の部分領域.

Dust 宇宙：初期特異点における shear dominance と膨張に伴う等方化

$$ds^2 = -dt^2 + \sum_I a_I^2(dx^I)^2; \tag{4.1.7}$$

$$a_I = t^{2/3}\left(A + \frac{B}{t}\right)^{-\sigma_I + 2/3}. \tag{4.1.8}$$

§4.2
完全流体系に対する一般定理

【Assumption 4.2.1】

(1) 時空 $(\mathscr{M}, g)$: $\mathscr{M}$ は C^∞ 級4次元 Hausdorff 多様体, g は C^3 級 Lorentz 計量.

(2) g は完全流体を源とする Einstein 方程式の解：

$$R_{ab} = (\mu + p)u_a u_b + \frac{1}{2}(\mu - p)g_{ab},\ u^a u_b = -1.$$

(3) 流体の状態方程式は次の条件を満たす C^1 級関数 $p = p(\mu)$：

$$\mu > 0,\ \mu \geq 3p \geq 0,\ 1/3 \geq dp/d\mu \geq 0, \tag{4.2.1}$$

または

$$1 \geq dp/d\mu \geq 0, \quad \mu(t_0) + p(t_0) > 0. \tag{4.2.2}$$

(4) 空間的準 Cauchy 面 Σ，その上の初期値および Σ に単純推移的に作用するリー群 G が存在し，初期値は G の作用で不変. $(D(\Sigma), g)$ は Σ 上の初期値から決まる一意的で極大な大域的双曲型解と等長. $\mathscr{M}$ における $\overline{D(\Sigma)}$ も極大.

□

【Notations 4.2.2】

(1) Σ に直交する測地線（単位接ベクトル n）から決まる写像 $\Phi_s : \Sigma \to \mathscr{M}(-s_- < s < s_+)$. $\mathscr{N}(s) := \Phi_s(\Sigma)$. $-S_- < s < S_+$ に対して $N(s) \subset D(\Sigma)$．n に対する expansion tensor $\tilde{\theta}_{ab}$，expansion $\tilde{\theta}$. $d \ln \tilde{l}/ds = \tilde{\theta}/3$.

(2) 流体の速度ベクトルから決まる写像 $\Psi_\tau : \Sigma \to \mathscr{M}(-\tau_- < \tau < \tau_+)$. $\mathscr{F}(\tau) := \Psi_\tau(\Sigma)$. $\mathscr{F}(\tau) \approx \Sigma$, $\tau_1 \neq \tau_2$ に対して，$\mathscr{F}(\tau_1) \cap \mathscr{F}(\tau_2) = \emptyset$. $-T_- < \tau < T_+$ に対して，$\mathscr{F}(\tau) \subset D(\Sigma)$.

(3) $\cosh\beta = g(u, n)$. $u = \cosh\beta n + \sinh\beta v (v \cdot n = 0, v \cdot v = 1)$.

□

【Theorem 4.2.3】

i) G の作用は $D(\Sigma)$ 全体に等長変換群として拡張され，$\mathscr{F}_\tau$（および $\mathscr{N}_s$）はその作用の軌道面となる．

ii) $\mathscr{F}_\tau(-T_- < \tau < T_+)$ および $\mathscr{N}_s(-S_- < s < S_+)$ は空間的面で，それぞれ $D(\Sigma)$ 全体を覆い尽し，両者は同じ面の集合を与える．

iii) $\mathscr{F}_\tau \approx \mathscr{N}_s \approx \Sigma$ かつ $D(\Sigma) \approx \Sigma \times (-S_-, S_+)$.

iv) $0 \leq \tau \leq \tau'$(または $\tau' \leq \tau \leq 0$) で $\mathscr{F}_\tau$ が空間的ならば，$\mathscr{F}_\tau \subset D(\Sigma)$.

v) Σ に直交する測地線 $\gamma(s)$ は $D(\Sigma)$ 内に共役点をもたない．逆に，$\gamma(s)$ が $s \in (0, s'](s \in [s', 0))$ に共役点を持たなければ $\gamma(s') \in D(\Sigma)$.

□

Proof.

Comoving gauge での $D(\Sigma)$ と一様モデルに対する常微分方程式系の解との対応による．

□

【Note 4.2.4】

この定理より，Cauchy ホライズンが存在すれが，それは $\mathscr{F}_\tau$ が最初に null となる面と一致することを示している．

□

【Theorem 4.2.5】 [Ellis and King 1974]

i) S^+ または S^- は有限である．

ii) Bianchi IX 以外の場合には，s がこの有限値に近づくと，$\tilde{\theta} \to \infty$，$\tilde{l} \to 0$.

□

【Theorem 4.2.6】 [Matzner 1970, Ellis and King 1974, Collins and Ellis 1979]

速度ベクトルが Σ に直交し，Σ 上で $\tilde{\theta} > 0$ とするとき，すべての Bianchi model に対して，$D^-(\Sigma)$ は極大解で物質特異点をもつ．

□

Proof.

詳しい解析により，解が常に $a = 0$ まで延長可能であることが示される．このとき，物質のエネルギー密度は FRW モデルと同じ方程式 Eq.(1.1.3) に従うので，物質の状態方程式に対する条件 (4.2.1) より，$a \to 0$ で $\rho \to \infty$ となり，物質特異点で終端する．

□

5 Tilted Bianchi models

§5.1 Class A models

【Theorem 5.1.1】 [Matzner 1970, Ellis and King 1974, Collins and Ellis 1979]

i) Σ 上で $\tilde{\theta} > 0$ とするとき，条件 (4.2.1) を満たす Class A model に対して，$D^-(\Sigma)$ は極大解である．

ii) 同じ条件下で，tilted Bianchi IX model 以外の Class A model では，$D^-(\Sigma)$ は物質特異点をもつ．

iii) 同じ条件下で，Bianchi IX model に対して，$s \to -S_-$ で $\tilde{\theta} \to \infty$ となるならば，$D^-(\Sigma)$ は物質特異点をもつ．

□

Proof. i) $D^-(\Sigma)$ が極大でないとすると，$H^-(\Sigma) \neq \emptyset$ となる解が存在する．この解に対して $H^-(\Sigma)$ は変換群 G の作用で不変な光的面となる．特に，$H^-(\Sigma)$ 上に各点でその null geodesic generator と平行な不変ベクトル k が存在する．

τ をある物質の流線の固有時として，τ を G で不変な関数として $H^-(\Sigma)$ の近傍 $\mathscr{U}$ に拡張する．このとき，不変基底 $X_a (a = 0, 1, 2, 3)$ として，$X_0 = \partial_\tau$ で X_I が $\tau =$ 一定面 Σ_τ に接し，$[X_0, X_I]$ となるものが取れる．このとき，

$$[X_a, X_b] = C^c{}_{ab} X_c \tag{5.1.1}$$

とおくと，$C^a{}_{0I} = 0$ より，

$$C_a := C^b{}_{ab} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Class A} \tag{5.1.2}$$

となる．ここで，C_a は

$$\begin{aligned} C_a &= \theta^c_\mu(X^\nu_a\nabla_\nu X^\mu_c - X^\nu_c\nabla_\nu X^\mu_a) \\ &= -\nabla_\mu X^\mu_a + \theta^c_\mu\nabla_a X^\mu_c \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

と表される．ここで，第２項は

$$\theta^c_\mu\nabla_a X^\mu_c = \theta^c_\mu X^\mu_b\omega^b_{ca} = \omega^c_{ca} = 0. \tag{5.1.4}$$

よって，特に，Class A モデルに対して，

$$\nabla_\mu k^\mu = 0. \tag{5.1.5}$$

すなわち，$H^-(\Sigma)$ の null geodesic generator に対する expansion $\hat\theta = 0$．このとき，Eq.(2.2.15) より

$$2\hat\sigma^2 = -R_{kk}. \tag{5.1.6}$$

これはエネルギー条件から得られる条件

$$R_{kk} = (\mu + p)(u\cdot k)^2 > 0 \tag{5.1.7}$$

と矛盾する．

ii) Ellis and King（1974）参照.

iii) Matzner(1970) 参照.

□

【Note 5.1.2】

流体の速度ベクトル u を

$$u = u_0(t)dt + u_I\chi^I \tag{5.1.8}$$

と表すと，

$$du = \dot u_I dt\wedge\chi^I + \frac{1}{2}C^I{}_{JK}\chi^J\wedge\chi^K \tag{5.1.9}$$

より，vorticity は

$$u\wedge du = \left(\dot u_J u_K + \frac{1}{2}u_0 u_I C^I{}_{JK}\right)dt\wedge\chi^J\wedge\chi^K + \frac{1}{2}u_L u_I C^I{}_{JK}\chi^L\wedge\chi^J\wedge\chi^K. \tag{5.1.10}$$

これより，特に Bianchi IX に対して，$C^I{}_{JK} = \epsilon_{IJK}$ より

$$u\wedge du = 0 \quad\Leftrightarrow\quad u_I = 0. \tag{5.1.11}$$

すなわち，tilted model は常に回転的である．

□

§5.2
Class B models

【**Theorem 5.2.1** (matter singularities in the tilted case)】 [Ellis and King 1974]

条件 4.2.1 を満たす Tilted モデルにおいて，$C_a v^a (C_a = C^b{}_{ab})$ が $s < 0$ で上に有界ならば，$D^-(\Sigma)$ は極大解で，Bianchi IX 以外のモデルでは過去に物質特異点を持つ．

□

【**Definition 5.2.2** (曲率特異点)】

時空 $(\mathscr{M}, g)$ 内の b-不完備な曲線 $\gamma(\lambda)$ に対して，それに沿った pp-frame 場 $E_a(\lambda)$ に関する曲率テンソルの成分のなかに γ 上で非有界なものが存在するとき，γ は曲率特異点を終端点とする，時空は曲率特異点を持つという．

□

【**Definition 5.2.3** (n.s.p. 曲率特異点)】

s.p. 曲率特異点でない曲率特異点を n.s.p. 曲率特異点という．

□

【**Theorem 5.2.4**】 [Ellis and King 1974, Siklos 1979]

曲線 γ が n.s.p. 曲率特異点を終端点とするとき，γ の解近傍 $\mathscr{U}$ 上で定義されたなめらかな正規直交基底が存在し，曲率テンソルの成分はすべて $\mathscr{U}$ 上で有界となる．

□

【**Theorem 5.2.5** (Cauchy horizon in Class B models)】 [Ellis and King 1974]

Class B の各タイプに対して，vorticity がゼロおよび非ゼロとなる tilted モデルで $H^-(\Sigma) \neq \emptyset$ となるものが存在する．

目次へ

□

【Theorem 5.2.6 (n.s.p. singularities)**】** [Ellis and King 1974, Collins and Ellis 1979]

$H^{-}(\Sigma) \neq \emptyset$ のとき，$H^{-}(\Sigma)$ の過去向きの null geodesic generator の終端点は n.s.p. 特異点である．さらに，Σ に直交する過去向きの測地線は常に $D^{-}(\Sigma)$ に含まれ，その終端点は n.s.p. 特異点で，$u\cosh\beta \to \infty, R_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu} \to \infty$ となる．また，$D(\Sigma)$ 内の有界な加速度を持つ過去向きの時間的曲線は $H^{-}(\Sigma)$ と交わるか，または n.s.p. 特異点で終端する．

□

Proof.

前半 $H^{-}(\Sigma)$ と交わる流線に沿って適当な正規直交基底を取れば，それに関する曲率テンソルの成分はすべて有界で有限な極限を持つ．リーマン曲率から作られるスカラ多項式の値は規定によらないので，Bianchi 群に対する不変性より，これはすべての曲率スカラが過去向きの時間的曲線に沿って有界で有限な極限を持つことを意味する．

後半 Ellis and King(1974)，Collins and Ellis(1979) 参照.

□

【Definition 5.2.7 (共形曲率特異点)**】** [Ellis and King 1974, Collins 1974]

物質特異点でない曲率特異点を共形曲率特異点という．

□

【Theorem 5.2.8】 [Ellis and Collins 1979]]

物質が状態方程式 $p = (\gamma - 1)\rho$（$1 < \gamma < 1$）に従う理想流体のとき，Bianchi V LRS tilted model では，$1 < \gamma \leq 2$ のとき，ＣＨを持つ解を一様性を保って解析接続すると，物質の流線は時間的な共形曲率特異点で終端する．

□

【Theorem 5.2.9】 [Siklos 1978]

ＣＨを持つ真空 Bianchi 解は次のものに限られる：

i) 2 個のパラメーターを持つ平面重力波解：

$$ds^2 = 2dudv - 2dzd\bar{z} + Hdu^2. \tag{5.2.1}$$

ここで，$H = \mathrm{Re}\{cz^2u^{2i(1-\kappa)}\}$，$0 < \kappa < 2c$．許される Bianchi 型は，$\mathrm{VII}_h(c \leq \kappa < 2c)$，$\mathrm{VI}_h(0 < \kappa \leq c)$，$\mathrm{IV}(\kappa = c)$.

	クラス A						クラス B				
タイプ	I	II	VI_0	VII_0	VIII	IX	IV	V	VI_h	VII_h	$\mathrm{VI}_{-1/9}$
真空解	1	2	3	3	4	4	3	1	4	4	4
流体解	2	5	7	7	8	8	7	5	8	8	7

表 5.1: Bianchi モデルの一般解の自由度

ii) $\mathrm{VI}_{-1/9}$ 型の２パラメーター解（具体的な表式は知られていない）.

iii) Type IX，VIII，II の２パラメーター NUT 解.

□

【Theorem 5.2.10】 [Siklos 1978]

理想流体系において，Whimper を持つ解の自由度は一般解より２小さい.

□

6 BKL予想

§6.1 Hamiltonian cosmology

(3+1) 分解

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + q_{jk}(dx^j + N^j)(dx^k + N^k), \tag{6.1.1}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}R =& N\sqrt{q}({}^3R + \boldsymbol{K}^2 - K^2) - \partial_0(2\sqrt{q}K)\\ &+ \partial_j[2\sqrt{q}(N^j K - D^j N)].\end{aligned} \tag{6.1.2}$$

ここで，$K_{jk} = h(\partial_j, \partial_k)$ は時間一定面 Σ_t の法ベクトル

$$n = \frac{1}{N}(\partial_t - N^j\partial_j) \tag{6.1.3}$$

に対する外部曲率形式で，具体的には

$$K_j k = \frac{1}{2N}(-\dot{q}_{jk} + D_j N_k + D_k N_j). \tag{6.1.4}$$

正準形式

q_{jk} とその正準共役量

$$p^{jk} = -\frac{\sqrt{q}}{2\kappa^2}(K^{jk} - q^{jk}K) \tag{6.1.5}$$

を用いて正準形式に書くと，

$$L = \int d^3x(\dot{q}_{jk}p^{jk} - N\mathscr{H}_\perp - N^j\mathscr{H}_j); \tag{6.1.6}$$

$$\mathscr{H}_\perp = \frac{2\kappa^2}{\sqrt{q}}\left(\boldsymbol{p}^2 - \frac{1}{2}p^2\right) - \frac{\sqrt{q}}{2\kappa^2}{}^3R, \tag{6.1.7}$$

$$\mathscr{H}_j = -2D_k p^k_j. \tag{6.1.8}$$

真空クラス A Bianchi モデル

不変基底 χ^I を用いて

$$q_{jk}(x) = \frac{2\kappa^2}{\Omega} Q_{IJ}(t)\chi^I_j(x)\chi^J_k(x), \tag{6.1.9}$$

$$p^{jk}(x) = \frac{|\chi|}{2\kappa^2} P^{IJ}(t) X^j_I(x) X^k_J(x), \tag{6.1.10}$$

$$N^j(x) = N^I(t) X^j_I(x) \tag{6.1.11}$$

とおくと，計量は

$$ds^2 = (2\kappa^2/\Omega)[-N^2 dt^2 + Q_{IJ}(\chi^I + N^I dt)(\chi^J + N^J dt). \tag{6.1.12}$$

対応して，正準 Lagrangian は

$$L = \dot{Q}_{IJ} P^{IJ} - H; \quad H = N H_0 + N^J H_J, \tag{6.1.13}$$

$$H_0 = Q^{-1/2}\left(P^{IJ} P_{IJ} - \frac{1}{2} P^2\right) - Q^{1/2}\,{}^3R, H_I \qquad = 2C^K{}_{LI} P^L_K, \tag{6.1.14}$$

$$-{}^3R = \frac{1}{2} C^I{}_{JK} C^J{}_{IL} Q^{KL} + \frac{1}{4} Q_{II'} Q^{JJ'} Q^{KK'} C^I{}_{JK} C^{I'}{}_{J'K'} \tag{6.1.15}$$

となる．

§6.2 Mixmaser モデル

対角型モデル

Q_{IJ} が対角化可能であるとして

$$Q_{IJ} = e^{2\alpha+2\beta_I}\delta_{IJ}; \tag{6.2.1}$$

$$\beta_1 = \beta_+ + \sqrt{3}\beta_-,\ \beta_2 = \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-,\ \beta_3 = -2\beta_+ \tag{6.2.2}$$

$$p = 2P,\ p_+ = 2(P_1^1 + P_2^2 - 2P_3^3),\ p_- = 2\sqrt{3}(P_1^1 - P_2^2) \tag{6.2.3}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} L &= \dot{\alpha}p + \dot{\beta}_+ p_+ + \dot{\beta}_- p_- N H_0; \\ e^{3\alpha}H_0 &= \frac{1}{24}(p_+^2 + p_-^2 - p^2 + e^{4\alpha}\mathscr{V}(\beta)) \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

となる．ここで，$\mathscr{V}(\beta) = -24e^{2\alpha 3}R$.

Hamiltonian constraint を解き α を時間パラメーターとすると,

$$\begin{aligned} L &= \dot{\beta}_+ p_+ + \dot{\beta}_- p_- - h; \\ h &= [p_+^2 + p_-^2 + e^{4\alpha}\mathscr{V}(\beta)]^{1/2}. \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

II 型モデル

この場合,

$$\mathscr{V}(\beta) = 24\exp[4(\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)] = 24e^{4\beta_1} \tag{6.2.6}$$

より

$$p_1 = (p_+ + \sqrt{3}p_-)/2, \quad p_2 = (\sqrt{3}p_+ - p_-)/2 \tag{6.2.7}$$

に対して,

$$p_1 + 2h = c = \mathrm{const}, \quad p_2 = \mathrm{const} \tag{6.2.8}$$

となるので，厳密解が求まる．特に，$\alpha \to \pm\infty$ で

$$\frac{p_2}{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} \quad (\mu > 0) \tag{6.2.9}$$

として

$$\beta_1 \simeq \frac{\mp 3\mu}{\mu^2 \pm \mu + 1}\alpha,\ \beta_2 \simeq \frac{3(\mu^2 \pm \mu)}{\mu^2 \pm \mu + 1}\alpha,\ \beta_3 \simeq \frac{3(1 \pm \mu)}{\mu^2 \pm \mu + 1}\alpha, \tag{6.2.10}$$

$$h \simeq \frac{2c}{3}\frac{\mu^2 \pm \mu + 1}{\mu^2 + 1} \tag{6.2.11}$$

となる．ここで，固有時 $d\tau = Ndt = Nd\alpha$ と α の関係は

$$e^{3\alpha} \simeq h\tau/4 + \mathrm{const} \tag{6.2.12}$$

となるので，結局，$\alpha \to \pm\infty$ で時空は次の Kasner 時空に近づく：

$$ds^2 = -d\tau^2 + \sum_I \tau^{2\sigma_I}(dx^I)^2; \tag{6.2.13}$$

$$\sigma_1 = \frac{\mp \mu}{\mu^2 \pm \mu + 1}\alpha,\ \sigma_2 = \frac{\mu^2 \pm \mu}{\mu^2 \pm \mu + 1}\alpha,\ \sigma_3 = \frac{1 \pm \mu}{\mu^2 \pm \mu + 1}\alpha. \tag{6.2.14}$$

Bianchi IX

このときポテンシャルは

$$\begin{aligned}\mathscr{V} &= 24e^{4\beta_+}\cosh(4\sqrt{3}\beta_-) + 12e^{-8\beta_+} - 24e^{4\beta_+} - 48e^{-2\beta_+}\cosh(2\sqrt{3}\beta_-) \\ &= \sum_I (12e^{4\beta_I} - 24e^{-2\beta_I}) \end{aligned} \tag{6.2.15}$$

となる．これより，$\alpha \to -\infty$ で $e^{4\alpha}\mathscr{V}$ の等高線は，実質的に３つの壁で囲まれた３角形となり，各壁の近くでは Type II と同じ構造をもつ．これより，β の変化は，パラメーターの変化する Kasner 時空の系列で近似的に表される．壁での反射によるパラメーターの変化は次のようになる：

$$\beta_1 = \mathrm{const} : \mu \to \mu' = -\mu (\mu > 0), \tag{6.2.16}$$

$$\beta_2 = \mathrm{const} : \mu \to \mu' = 2 - \mu (\mu < 1), \tag{6.2.17}$$

$$\beta_3 = \mathrm{const} : \mu \to \mu' = \frac{\mu}{2 - \mu} (\mu < 0, 1 < \mu). \tag{6.2.18}$$

§6.3
BKL予想

BKL予想

時空特異点は一般に空間的で、その近傍の構造は局所的にMixmaster的である。[Belinskii，Lifshitz，Khalatonikov (1970) Sov. Phys. JETP33:1061; (1972) JETP35: 838; (1970) Adv. Phys. 19: 525]

いくつかの定義

VTD解

Einstein方程式において，空間微分を無視して得られる各空間点ごとの常微分に対する解(Velocity-term dominated)．これは，当然空間点に依存したパラメーターを持つKasner解となる.

AVTD特異点

特異点の近傍で時空構造がVTD解に漸近するもの.

MCP(Method of Consistent Potentials)

Hamiltonian formulationにおいて，VTD解をハミルトニアンに代入し，ポテンシャルが漸近的に小さくなるかどうかを見ることにより，AVTDかどうかを判定する方法.

最近の研究

Gowdyモデル

Gowdy時空は$G2$対称性をもつ平面対称な非一様時空で次の計量を持つ：

$$ds^2 = e^{(\tau-\lambda)/2}(-e^{-2\tau}d\tau^2 + dz^2) + e^{-\tau}[e^P(dx+Qdy)^2 + e^{-P}dy^2]. \tag{6.3.1}$$

ここで，λ, P, Qはτ, zのみの関数である．この計量に対するEinstein方程式は，P, Qに対する閉じた方程式と，P, Qからλを決める方程式に分解される：

$$\partial_\tau^2 P - e^{-2\tau}\partial_z^2 P - e^{2P}[(\partial_\tau Q)^2 - e^{-2\tau}(\partial_z Q)^2] = 0, \tag{6.3.2}$$

$$\partial_\tau^2 Q - e^{-2\tau}\partial_z^2 Q + 2(\partial_\tau P\partial_\tau Q - e^{-2\tau}\partial_z P\partial_z Q) = 0, \tag{6.3.3}$$

目次へ

$$\partial_\tau \lambda = \partial_\tau P^2 + e^{-2\tau}\partial_z P^2 + e^{2P}(\partial_\tau Q^2 + e^{-2\tau}\partial_z Q^2), \tag{6.3.4}$$

$$\partial_z \lambda = 2(\partial_\tau P \partial_z P + e^{2P}\partial_\tau Q \partial_z Q). \tag{6.3.5}$$

Hamiltonian は

$$H = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dz[\pi_P^2 + e^{-2P}\pi_Q^2 + e^{-2\tau}(\partial_z P^2 + e^{2P}\partial_z Q^2)]. \tag{6.3.6}$$

VTD 解は

$$P \to v\tau,\ Q \to Q_\infty,\ \pi_P \to v,\ \pi_Q = \pi_Q^0 = \mathrm{const.} \tag{6.3.7}$$

これより，MCP は $0 \le v < 1$ で AVTD を予想する．実際には，一般に Gowdy モデル ($\mathbb{R} \times T^3$) が AVTD であることが数値計算により確かめられている．[Berger, Garfinkle (1998) PRD57: 4767; Kichennassamy, Rendall (1998) CQG15: 1339] また，実際の解は GW の shock wave に対応する spiky な振る舞いを一般にすることも示されている．

$U(1)$ 対称モデル

このモデルは，Gowdy モデルより対称性の低い１個の Killing ベクトルを持つ時空で次の計量をもつ：

$$ds^2 = e^{-2\phi}(-e^{2\Lambda}e^{-4\tau}d\tau^2 + e^{-2\tau}e^{\Lambda}e_{ab}dx^a dx^b) + e^{2\phi}(dx^3 + \beta_a dx^a)^2, \tag{6.3.8}$$

$$e_{ab}(u,v,\tau) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2z} + e^{-2z}(1+x)^2 & e^{2z} + e^{-2z}(x^2-1) \\ e^{2z} + e^{-2z}(x^2-1) & e^{2z} + e^{-2z}(1-x)^2 \end{pmatrix}. \tag{6.3.9}$$

Hamiltonian は，正準変数 $(\phi, p), (z, p_z), (x, p_x), (\Lambda, p_\Lambda), (\omega, r)$($\omega, r$ は β_a に対応する）を用いて，

$$\begin{aligned} H =& \int dudv\left(\frac{1}{8}p_z^2 + \frac{1}{2}e^{4z}p_x^2 + \frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{2}e^{4\phi}r^2 - \frac{1}{2}p_\Lambda^2 + 2p_\Lambda\right) \\ &+ e^{-2\tau}\int dudv\left\{\partial_a\partial_b(e^\Lambda e^{ab}) - \partial_b\Lambda\partial_a(e^\Lambda e^{ab}) + e^\Lambda[\partial_u(e^{-2z})\partial_v x - \partial_v(e^{-2z})\partial_u x]\right. \\ &\left. + 2e^\Lambda e^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + \frac{1}{2}e^\Lambda e^{-4\phi}e^{ab}\partial_a\omega\partial_b\omega\right\} \end{aligned} \tag{6.3.10}$$

と表される．これに加えて，Hamiltonian 拘束条件 $\mathscr{H} = 2p_\Lambda$ および２つの運動量拘束条件が存在する．

VTD 解は

$$z \simeq -v_z\tau,\ x \simeq x_0,\ p_z \simeq -4v_z,\ p_x \simeq p_x^0,$$

$$\phi \simeq -v_\phi\tau,\ \omega \simeq \omega_0,\ p \simeq -4v_\phi,\ r \simeq r^0,$$

$$\Lambda \simeq \Lambda_0 + (2 - v_\Lambda)\tau,\ p_\Lambda \simeq v_\Lambda. \tag{6.3.11}$$

数値計算により，運動は3つのポテンシャル

$$V_z = \frac{1}{2}p_x^2 e^{4z},\ V_1 = \frac{1}{2}r^2 e^{4\phi},\ V_2 = \frac{1}{2}e^{-2\tau+\Lambda}e^{-4\phi}e^{ab}\partial_a\omega\partial_b\omega \tag{6.3.12}$$

に支配され，これらすべてがゼロに近づくようなVTD解のパラメーターが存在しないことより，$U(1)$対称時空ではBKL予想が成り立っていることが示されている．[Berger, Moncrief (1998) PRD58: 064023; Berger, Garfinkle, Isenberg, Moncrief, Weaver (1998) MPL A13: 1565] ただし，polarized case ($\omega = r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta_a = 0$) では，AVTDとなる．[Berger, Moncrief (1998) PRD57: 7235] また，磁化Gowdyモデルも Mixmaster的であることがMCPを用いた数値計算による解析で示されている．[Weaver, Isenberg, Berger (1998) PRL80: 2984] このモデルはmixmaster的であることが知られている磁化されたVI_0モデルの一般化である．[LeBlanc, Kerr, Wainwright (1995) CQG12: 513; Berger (1996) CQG13: 1273]

7 Petrov type

§7.1 Wely テンソルの固有値問題

カイラル分解: 2 階反対称テンソル $X = (X_{ab})$ に対して,

$$(\star X)_{ab} := \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}X^{cd} \tag{7.1.1}$$

とおくと,

$$\star\star X = -X. \tag{7.1.2}$$

いま, ${}^{\pm}X$ を

$${}^{\pm}X := \frac{1}{2}(X \mp i \star X) \tag{7.1.3}$$

により定義すると,

$$\star{}^{\pm}X = \pm i{}^{\pm}X. \tag{7.1.4}$$

特に,

$${}^{\pm}X_{0I} = \mp\frac{i}{2}\epsilon_{IJK}{}^{\pm}X^{JK}, \quad {}^{\pm}{}_{IJ} = \pm i\epsilon_{IJK}{}^{\pm}X_{0I}. \tag{7.1.5}$$

Lorentz 変換: Lorentz 変換 $\Lambda = (\Lambda^a{}_b)$ に対して,

$${}^{\pm}X_{0I} \to {}^{\pm}O_I{}^J{}^{\pm}X_{0J}. \tag{7.1.6}$$

ここで, ${}^{\pm}O$ は次のように表される複素直交行列:

$${}^{\pm}O_I{}^J := \Lambda_0{}^0\Lambda_I{}^J - \Lambda_0{}^J\Lambda_I{}^0 \mp i\Lambda_0{}^K\Lambda_I{}^L\epsilon_{KLJ}. \tag{7.1.7}$$

Weyl テンソルの固有値問題: Weyl テンソル C_{abcd} に対して，

$$(\star C)_{abcd} := \frac{1}{2}\epsilon_{abef}C^{ef}{}_{cd}, \tag{7.1.8}$$

$$(\ast C)_{abcd} := \frac{1}{2}\epsilon_{cdef}C_{ab}{}^{ef} \tag{7.1.9}$$

とおくと，Weyl テンソルの対称性より

$$\star C = \ast C. \tag{7.1.10}$$

これより，

$$^{\pm}C := \frac{1}{2}(C \mp i \star C) \tag{7.1.11}$$

とおくと，

$$^{\pm}(C_{abcd}X^{cd}) = {}^{\pm}C_{abcd}{}^{\pm}X^{cd} \tag{7.1.12}$$

よって，固有値問題

$$\frac{1}{2}C_{abcd}X^{cd} = \lambda X_{ab} \tag{7.1.13}$$

は

$$^{\pm}X_I := {}^{\pm}X_{0I} \tag{7.1.14}$$

$$^{\pm}C_{IJ} := -{}^{\pm}C_{0I0J} \tag{7.1.15}$$

を用いて，

$$^{\pm}C_{IJ}{}^{\pm}X_J = \lambda{}^{\pm}X_I \tag{7.1.16}$$

と表される．

Petrov type: ここで，$^{\pm}C_{IJ}$ はトレースレス対称行列になることに注意すると，$^{\pm}C_{IJ}$ はその固有値と 1 次独立な固有ベクトルの数により表7.1 のように分類される $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0)$.

Petrov type	Elementary divisors	Matrix criterion
I	[111]	$(\boldsymbol{C}-\lambda_1\boldsymbol{I})(\boldsymbol{C}-\lambda_2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{C}-\lambda_3\boldsymbol{I})=0$
D	[(11)1]	$\left(\boldsymbol{C}-\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{I}\right)\left(\boldsymbol{C}-\lambda\boldsymbol{I}\right)=0$
II	[21]	$\left(\boldsymbol{C}-\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{I}\right)^2\left(\boldsymbol{C}-\lambda\boldsymbol{I}\right)=0$
N	[(21)]	$\boldsymbol{C}^2=0$
III	[3]	$\boldsymbol{C}^3=0$
O	—	$\boldsymbol{C}=0$

表 7.1: Petrov type

§7.2 Weylの標準基底

タイプ I: このとき，３つの固有ベクトル ${}^{\pm}X_{(\alpha)}$ は互いに（複素）直交するので，適当な Lorentz 変換に対応する $O(3,\mathbb{C})$ 行列による変換で

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix} \tag{7.2.1}$$

とできる．対応する（C により一意的に決まる）Lorentz frame を E_a とおくと，

$$ {}^{\pm}X_{(1)}=2(E_0\wedge E_1\mp iE_2\wedge E_3), \tag{7.2.2}$$
$$ {}^{\pm}X_{(2)}=2(E_0\wedge E_2\mp iE_3\wedge E_1), \tag{7.2.3}$$
$$ {}^{\pm}X_{(3)}=2(E_0\wedge E_3\mp iE_3\wedge E_1). \tag{7.2.4}$$

ここで，

$$(x\wedge y)^{ab}:=x^{[a}y^{b]}. \tag{7.2.5}$$

E_a に対応する null tetrad

$$k=\frac{1}{\sqrt{2}}(E_0\mp E_3),\ l=\frac{1}{\sqrt{2}}(E_0\pm E_3),\ m=\frac{1}{\sqrt{2}}(E_1-i\pm E_2) \tag{7.2.6}$$

により，bivector 空間の chiral 基底を

$$U=-2l\wedge\bar{m},\ V=2k\wedge m, W=2m\wedge\bar{m}-2k\wedge l \tag{7.2.7}$$

により定義すると，

$$ {}^{\pm}X_{(1)}=V-U,\ {}^{\pm}X_{(2)}=i(V+U),\ {}^{\pm}X_{(3)}=W. \tag{7.2.8}$$

ここで,

$$U \cdot V = 2,\ W \cdot W = -4,\ U \cdot U = V \cdot V = U \cdot W = V \cdot W = 0. \tag{7.2.9}$$

タイプ II: このとき,

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{2}+1 & -i & 0 \\ -i & -\frac{\lambda}{2}-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{7.2.10}$$

となる基底が一意的に決まる.

タイプ III: このとき,

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.2.11}$$

となる基底が一意的に決まる.

縮退型: タイプ D(I, $\lambda_1 = \lambda_2$), タイプ N(II, $\lambda = 0$) では Weyl 基底は一意的には決まらない.

§7.3
Principal null vector

Ψ **係数**: Newmann-Penrose形式における Ψ 係数

$$\Psi_0 = C(k,m,k,m), \tag{7.3.1}$$
$$\Psi_1 = C(k,l,k,m), \tag{7.3.2}$$
$$\Psi_2 = \frac{1}{2}\left(C(k,l,k,l) - C(k,l,m,\bar{m})\right), \tag{7.3.3}$$
$$\Psi_3 = C(l,k,l,\bar{m}), \tag{7.3.4}$$
$$\Psi_4 = C(l,\bar{m},l,\bar{m}) \tag{7.3.5}$$

および chiral null basis (U,V,W) を用いると

$$\begin{aligned} {}^{\pm}C =& \Psi_0 U\otimes U + \Psi_1(U\otimes W + W\otimes U) + \Psi_2(V\otimes U + U\otimes V + W\otimes W) \\ &+ \Psi_3(V\otimes W + W\otimes V) + \Psi_4 V\otimes V. \end{aligned} \tag{7.3.6}$$

Weyl principal tetrad に対して,

Type I & D:

$$\Psi_0 = \Psi_4 = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1),\ \Psi_2 = -\frac{\lambda_3}{2},\ \Psi_1 = \Psi_3 = 0. \tag{7.3.7}$$

Type II & N:

$$\Psi_2 = -\frac{\lambda}{2},\ \Psi_4 = -2,\ \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = 0. \tag{7.3.8}$$

Type III:

$$\Psi_3 = -i,\ \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_4 = 0. \tag{7.3.9}$$

Principal null direction

$$k\cdot k = 0;\quad \Psi_0 = C(k,m,k,m) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad k[eC_{a]bc[d}k_{f]}k^b k^c = 0. \tag{7.3.10}$$

Cf. Null geodesic deviation equation.

Null rotation around l: Null ベクトル l を固定するとき，l 以外の null ベクトル k は，規格化 $l\cdot k = -1$ のもとで，null rotation

$$l' = l,\ m' = m + zl,\ k' = k + z\bar{m} + \bar{z}m + |z|^2 l;\quad z\in\mathbb{C} \tag{7.3.11}$$

目次へ

Petrov Type	根 z	重複度
I	$(\sqrt{\lambda_2+2\lambda_1} \pm \sqrt{\lambda_1+2\lambda_2})/\sqrt{\lambda_1+\lambda_2}$	(1111)
D	$0, \infty$	(22)
II	$0, \pm i\sqrt{3\lambda/2}$	(211)
III	$0, \infty$	(31)
N	0	(4)

表 7.2: Principal null directions

で完全に尽くされる．この回転により Ψ_0 は

$$\Psi_0' = \Psi_0 - 4z\Psi_1 + 6z^2\Psi_2 - 4z^3\Psi_3 + z^4\Psi_4 \tag{7.3.12}$$

と変換するので，一般に４個の principal null directions が存在する．Petrov タイプは，表 7.2 に示したように，この方向の縮退度と対応する．

Spinor 表現

$$(\sigma_a^{A\dot{B}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_a \tag{7.3.13}$$

として，テンソルとスピノールの対応は

$$V^a \to V^{A\dot{B}} = V^a\sigma_a^{A\dot{B}}, \tag{7.3.14}$$

$$C_{abcd} \to \Psi_{ABCD}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\epsilon_{\dot{C}\dot{D}} + \bar{\Psi}_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}\epsilon_{AB}\epsilon_{CD}, \tag{7.3.15}$$

$${}^{-}C_{abcd} \to \Psi_{ABCD}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\epsilon_{\dot{C}\dot{D}}, \tag{7.3.16}$$

$${}^{+}C_{abcd} \to \bar{\Psi}_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}\epsilon_{AB}\epsilon_{CD}, \tag{7.3.17}$$

$$R_{ab} - \frac{1}{4}g_{ab}R \to 2\Phi_{AB\dot{A}\dot{B}}. \tag{7.3.18}$$

Spinor 基底

$$\det(k^a\sigma_a) = -\frac{1}{2}k\dot{k} \tag{7.3.19}$$

より，null 基底 k, l, m に対して，スピノール基底 o, ι が

$$k \to o^A\bar{o}^{\dot{B}},\ l \to \iota^A\bar{\iota}^{\dot{B}},\ m \to o^A\bar{\iota}^{\dot{B}} \tag{7.3.20}$$

により決まる．ここで

$$o_A\iota^A = \epsilon_{AB}o^A\iota^B = 1. \tag{7.3.21}$$

このスピノール基底を用いると

$$\begin{aligned}&\Psi_0 = \Psi(o,o,o,o),\ \Psi_1 = \Psi(o,o,o,\iota),\ \Psi_2 = \Psi(o,o,\iota,\iota),\\ &\Psi_3 = \Psi(o,\iota,\iota,\iota),\ \Psi_4 = \Psi(\iota,\iota,\iota,\iota)\end{aligned} \tag{7.3.22}$$

と表される．また，null rotation は

$$o' = o + z\iota, \quad \iota' = \iota. \tag{7.3.23}$$

§7.4 スカラ不変量

Invariants: Weyl テンソルから作られる基本不変量は

$$I := \frac{1}{2}\Psi_{ABCD}\Psi^{ABCD} = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2), \tag{7.4.1}$$

$$J := \frac{1}{6}\Psi_{ABCD}\Psi^{CDEF}\Psi_{EF}{}^{AB} = \frac{1}{6}(\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3) = \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \tag{7.4.2}$$

これらは $\Psi_0 \sim \Psi_4$ を用いると

$$I = \Psi_0\Psi_4 - 4\Psi_1\Psi_3 + 3\Psi_2^2, \tag{7.4.3}$$

$$J = \begin{vmatrix} \Psi_4 & \Psi_3 & \Psi_2 \\ \Psi_3 & \Psi_2 & \Psi_1 \\ \Psi_2 & \Psi_1 & \Psi_0 \end{vmatrix} \tag{7.4.4}$$

と表される．また，Petrov type が代数的に特殊となる条件は

$$\text{Algebraically special} \quad \Leftrightarrow \quad I^3 = 27J^2 \tag{7.4.5}$$

$$\text{III or N} \quad \Leftrightarrow \quad I = J = 0 \tag{7.4.6}$$

となる．

8 定常ブラックホールの一意性定理

§8.1 基本定義

【**Proposition 8.1.1** (Müller zum Hagen 1970)】

$(\mathscr{M}, g)$: C^3-class Lorenzian
$\exists\ \xi$: C^4-class time-like Killing vector

$\Rightarrow \quad g$: analytic in the harmonic stationary coordinates

□

【**Definition 8.1.2** (dominant energy condition)】

$T_{\mu\nu}$ が dominant eneryg condition を満たす

$\Leftrightarrow$ 　任意の未来向き時間的ベクトル X, Y に対して，$T(X, Y) \geq 0$

□

【**Definition 8.1.3** (定常ブラックホール時空)】

$(\mathscr{M}, g, \xi)$: stationary regular predictable

$\Leftrightarrow$

i) $(\mathscr{M}, g)$ は準 Cauchy 面 Σ に関して regular predictable.

ii) ξ は $\mathscr{I}^+$ および $\mathscr{I}^-$ の近傍で時間的な Killing ベクトルで，$\mathscr{M}$ の等長変換 θ_t を生成する．

iii) $(\mathscr{M}, g)$ は Einstein 方程式の解で，対応する $T_{\mu\nu}$ は dominant energy condition を満たし，$T_{\mu\nu}$ に寄与する物質は性質のよい双曲型方程式に従うスカラ場ないし電磁場のみである．

□

【**Note 8.1.4** (時空のカテゴリー)】

以下，特に断らない限り，時空は常に stationary regular predictable とする．

□

【**Definition 8.1.5** (non-rotating)】

$(\mathscr{M}, g, \xi)$: non-rotating

$\Leftrightarrow \quad \xi \cdot \xi = 0$ on horizon.

□

【**Proposition 8.1.6** (Hawking 1972, HE prop. 9.3.6)】

$T_{\mu\nu}$: empty or source-free EM fields

$\Rightarrow$
- non-rotating　ξ: null on horizon

  or
- axisymmetric　ξ: space-like on horizon

□

【**Proposition 8.1.7** (HE prop.9.3.2, prop.9.3.3)】

- $\mathscr{B}(\tau)$ の各連結成分（ブラックホール）の境界は $S^2 \times \mathbb{R}$ と同相.
- ある τ に対して $\mathscr{B}(\tau)$ が連結ならば,

$$J^+(\mathscr{I}^-, \bar{\mathscr{M}}) \cap \bar{J}^-(\mathscr{I}^+, \bar{\mathscr{M}}) \cap \mathscr{M} \approx [0,1) \times S^2 \times \mathbb{R}$$

目次へ

□

【Note 8.1.8 (付加条件)**】**

Condition 1:

- DOC $:= J^+(\mathscr{I}^-, \bar{\mathscr{M}}) \cap J^-(\mathscr{I}^+, \bar{\mathscr{M}}) \approx S^2 \times \mathbb{R}^2$
- $\mathscr{H}^+ := \dot{J}^-(\mathscr{I}^+, \bar{\mathscr{M}}) \approx S^2 \times \mathbb{R}$

Condition 2: Non-rotating case に対して，DOC で $\xi \cdot \xi < 0$.

□

【Proposition 8.1.9 (HE prop.9.3.4)**】**

Condition 1 & static $\Rightarrow$ Condition 2

□

§8.2
Non-Rotating case

【**Proposition 8.2.1** (HE prop.9.3.5, Carter 1973)】

Non-rotating & Condition 2 ⇒ static

□

【**Proposition 8.2.2**】 [**Israel 1967,1968, Muller-zum-Hagen et al 1973,1974, Robinson 1977**]

Static & Conditions 1 ⇒ DOC: 球対称

□

【**Proposition 8.2.3** (Lindblom 1980)】

Static, Condition 2 and 3-geometry:conformally flat⇒ 球対称

□

【**Proposition 8.2.4**】 [**Bunting&Masood-ul-Alam 1987, Ruback 1988, Masood-ul-Alam 1992**]

Static and Condition 2 ⇒ 3 Geometry: conformally flat

□

【**Theorem 8.2.5** (Uniqueness for Non-rotationg BH)】

Non-rotating and Condition 2

⇒ Schwarzschild or Reissner-Nordstrom

□

§8.3
Rotating case

【Proposition 8.3.1 (Circular symmetry)**】** **[HE prop.9.3.7, Papaetrou 1966, Carter 1969]**

$(\mathscr{M}, g)$: axisymmetric & stationary regular predictable
$T_{\mu\nu}$: empty or source-free EM fields

$\Rightarrow$ Killing ベクトル $\xi, \eta([\xi, \eta] = 0)$ は2-surface orthogonal.

□

【Note 8.3.2 (2-surface orthogonality)**】**

ξ, η: 2-surface orthogonal

$\Leftrightarrow$ $\exists\, \Omega$ s.t. $d(\xi \wedge \eta) = \Omega \wedge \xi \wedge \eta$ （Frobenius の定理）

$\Leftrightarrow$ $\xi \wedge \eta \wedge d\xi = 0,\ \xi \wedge \eta \wedge d\eta = 0$

$\Longleftarrow$ $\xi^d R_{d[a}\xi_b\eta_{c]} = 0,\ \eta^d R_{d[a}\xi_b\eta_{c]} = 0$
$\xi \wedge \eta = 0$ at some point.

□

【Proposition 8.3.3】 **[HE prop.9.3.8, Carter 1971, 1973]**

前命題の条件 & Condition 1

$\Rightarrow$

$\rho^2 := (\xi \cdot \eta)^2 - (\xi \cdot \xi)(\eta \cdot \eta) > 0$ in DOC (対称軸上を除いて)，$\rho^2 = 0$ on $\mathscr{H}^+$.

□

【Proposition 8.3.4】 **[Carter 1971, 1973]**

前命題の条件のもとで，定常軸対称楕円体座標 λ, μ, ϕ, t が DOC の global chart となる：

$$ds^2 = \Xi \left(\frac{d\lambda^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{d\mu^2}{1-\mu^2} \right) + X d\phi^2 + 2W d\phi dt - V dt^2.$$

この座標系のもとで

$$\rho^2 = (\lambda^2 - c^2)(1 - \mu^2)$$
$$c = M - 2\Omega_H J - \Phi_H Q.$$

また，対称軸は $\mu = \pm 1$，ホライズンは $\lambda \to c$.

□

【Proposition 8.3.5 (Ernst 形式での表現)**】　[Carter 1970, 1973]**

前命題の条件下で，Einstein 方程式の解は 2 次元時空

$$ds_2^2 = \frac{d\lambda^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{d\mu^2}{1-\mu^2} \ (-1 < \mu < 1, c < \lambda < \infty)$$

上での場 X, Y, E, B に対する変分方程式

$$\delta S = \delta \int L d\lambda d\mu = 0;$$
$$L = \frac{|\nabla X|^2 + |\nabla Y + 2(E\nabla B - B\nabla E)|^2}{2X^2} + 2\frac{|\nabla E|^2 + |\nabla B|^2}{X}$$

に対する次の境界条件を満たす解で与えられる：

境界条件

- X, Y, E, B とその微係数は有界.
- $\mu \to \pm 1$ のとき，$X, \partial_\lambda(E, B, Y), \partial_\mu Y + 2(E\partial_\mu B - B\partial_\mu E)$ はゼロに近づく.
- $\lambda \to \infty$ のとき，

$$E = -Q\mu + \mathrm{O}(1/\lambda)\,, B = \mathrm{O}(1/\lambda)\,,$$
$$Y = 2J\mu(3 - \mu^2) + \mathrm{O}(1/\lambda)\,, \lambda^{-2}X = (1 - \mu^2)(1 + \mathrm{O}(1/\lambda)).$$

□

【Proposition 8.3.6 (empty case)**】　[Robinson 1975]**

Prop.8.3.5 の条件下で，empty($E = B = 0$) のとき，各 C, J に対して解は高々 1 個.

□

【Proposition 8.3.7 (一般の場合)**】** **[Robinson 1974]**

Prop.8.3.5 の条件下で，解の集合の各連結成分は高々3個のパラメーター C, J, Q で記述される．

□

【Theorem 8.3.8 (No hair theorem)**】** **[Mazur 1982, Bunting 1981, 1983]**

Condition 1 のもとで，高々電磁場しか存在しない系に対する Einstein 方程式の rotating, stationary regular predictable な解は，Kerr-Newmann 解に限られる．

□

9 定常ブラックホールの特異点

§9.1 球対称ブラックホール

一般公式

計量

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{9.1.1}$$

Symmetry

$$\xi = \partial_t, \tag{9.1.2}$$
$$\eta_1 = \cos\phi\,\partial_\theta - \sin\phi\cot\theta\partial_\phi, \tag{9.1.3}$$
$$\eta_2 = -\sin\phi\,\partial_\theta - \cos\phi\cot\theta\partial_\phi, \tag{9.1.4}$$
$$\eta_3 = \partial_\phi. \tag{9.1.5}$$

曲率テンソル (Petrov type D)

$$^+\mathscr{C}_{01} = \Psi_2(\theta^0 \wedge \theta^1 - i\theta^2 \wedge \theta^3), \tag{9.1.6}$$
$$^+\mathscr{C}_{0A} = -\frac{\Psi_2}{2}(\theta^0 \wedge \theta^A + i\epsilon_{AB}\theta^1 \wedge \theta^A), \tag{9.1.7}$$

$$\Psi_2 = \frac{r}{12}\left(\frac{f-1}{r}\right)''. \tag{9.1.8}$$

$$C_{abcd}C^{abcd} = 48\mathrm{Re}\,\Psi_2^2, \quad C_{abcd} \star C^{abcd} = 48\mathrm{Im}\,\Psi_2^2. \tag{9.1.9}$$

Killing horizon

$$\xi \cdot \xi = -f(r) = 0. \tag{9.1.10}$$

Null coordinate

Advanced null coordinate v を

$$v = t + r_*; \quad dr_* = dr/f(r) \tag{9.1.11}$$

により導入すると,

$$ds^2 = -f dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \tag{9.1.12}$$

Retarded null coordinate u を

$$u = t - r_* \tag{9.1.13}$$

により導入すると,

$$ds^2 = -f du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2. \tag{9.1.14}$$

(u, v) 座標では

$$ds^2 = -f dudv + r^2 d\Omega^2. \tag{9.1.15}$$

Surface gravity

Killing ホライズン H の近傍では, (v, r) 座標に関して

$$\xi = \partial_v, \tag{9.1.16}$$

$$\nabla r = \partial_v + f\partial_r. \tag{9.1.17}$$

一方, Killing 方程式

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \tag{9.1.18}$$

より,

$$\nabla_\xi \xi = -\frac{1}{2}\nabla(\xi \cdot \xi) = \frac{1}{2} f'(r) \nabla r. \tag{9.1.19}$$

よって,

$$\nabla_\xi \xi = \kappa \xi; \quad \kappa = \frac{1}{2} f'(r) \tag{9.1.20}$$

Schwarzschild bh

計量

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} \tag{9.1.21}$$

Horizon

$$r = r_H = 2M. \tag{9.1.22}$$

曲率テンソル

$$\Psi_2 = -\frac{M}{r^3} \tag{9.1.23}$$

特異点

$M > 0$ のとき空間的，$M < 0$ のとき時間的.

surface gravity

$$\kappa = \frac{M}{r^2} = \frac{1}{4M} \tag{9.1.24}$$

Kruskal-Szekeres 座標

$$UV = 2M(2M - r)e^{r/2M}, \quad |U/V| = e^{-t/2M} \tag{9.1.25}$$

とおくと，

$$ds^2 = -\frac{8M}{r}e^{-r/2M}dUdV + r^2 d\Omega^2. \tag{9.1.26}$$

$U < 0, V > 0$ では

$$U = -2Me^{-\kappa u}, \quad V = 2Me^{\kappa v}. \tag{9.1.27}$$

RN BH

Energy-momentum tensor

$$T^{00} = -T^{11} = T^{22} = T^{33} = \frac{Q^2}{8\pi r^4}. \tag{9.1.28}$$

計量

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \tag{9.1.29}$$

Horizon

$$r = r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \tag{9.1.30}$$

曲率テンソル

$$\Phi_2 = -\frac{M}{r^3} + \frac{Q^2}{r^4} \tag{9.1.31}$$

特異点

常に時間的.

surface gravity

$$\kappa_\pm = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{r_\pm^2} \tag{9.1.32}$$

§9.2
軸対称ブラックホール

Kerr-Newmann 解

計量

$$
\begin{aligned}
ds^2 = &-\left(1-\frac{2Mr-Q^2}{\Sigma^2}\right)dt^2 - \frac{2a(2Mr-Q^2)}{\Sigma^2}\sin^2\theta d\phi dt \\
&+ \sin^2\theta\left(r^2+a^2+\frac{a^2(2Mr-Q^2)}{\Sigma^2}\sin^2\theta\right)d\phi^2 + \Sigma^2\left(\frac{dr^2}{\Delta}+d\theta^2\right),
\end{aligned}
\tag{9.2.1}
$$

$$
\Sigma^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2. \tag{9.2.2}
$$

Symmetry

$$
\xi = \partial_t, \quad \eta = \partial_\phi. \tag{9.2.3}
$$

曲率: Petrov type D

$$
\Psi_2 = -\frac{M(r+ia\cos\theta)-Q^2}{(r^2+a^2\cos^2\theta)(r-ia\cos\theta)^2}. \tag{9.2.4}
$$

Killing horizon

$$
\Delta = 0 \Rightarrow \quad r = r_\pm = M \pm \sqrt{M^2-a^2-Q^2}. \tag{9.2.5}
$$

特異点: $r=0, \cos\theta = 0$ （リング特異点）

Kerr 解（$Q=0$）では，空間的なリング特異点：

$$
ds^2 \simeq \frac{2Mr}{\Sigma^2}(dt-ad\phi)^2. \tag{9.2.6}
$$

KN 解（$Q\neq 0$）のとき，時間的なリング特異点：

$$
ds^2 \simeq -\frac{Q^2}{\Sigma^2}(dt-ad\phi)^2. \tag{9.2.7}
$$

（注） $r<r_-$ では CTC が存在.

【Question 9.2.1】

KN 解の特異点がリング状であることを示せ．また，$r<r_-$ に CTC が存在することを示せ.

□

10 特異点定理

【**Definition 10.0.2** (測地的完備性)】

測地線 γ が完備 $\quad \Leftrightarrow$

γ を最大限延長すると，そのアファインパラメーター λ が $-\infty < \lambda < \infty$ の範囲を動く.

□

【**Theorem 10.0.3** (Penrose 1965)】

次のすべての条件を満たす時空 $(\mathscr{M}, g)$ は完備でない光的測地線を含む：

1) Null convergence condition
2) コンパクトでない Cauchy 面 Σ が存在.
3) 閉捕捉面 $\mathscr{T}$ が存在.

□

【**Note 10.0.4**】

Penrose の特異点定理は非常に一般的な定理であるが，Cauchy 面の存在を仮定しているため，裸の特異点が存在する場合は対象とならない.

□

【Theorem 10.0.5 (Hawking 1967)**】**

次のすべての条件を満たす時空 $(\mathscr{M}, g)$ は完備でない時間的的測地線を含む：

1) Timelike convergence condition
2) コンパクトで空間的な，edge を持たない３次元面 Σ が存在.
3) Σ に直交する測地線族は Σ 上で至るところ収束（ないし至るところ発散）している.

□

【Note 10.0.6】

この定理は，コンパクトな空間をもつ膨張宇宙は（物質に対する自然な条件のもとで）必ず特異点をもつことを示している．ただし，特異点が過去にあるかどうかについての情報は与えない.

□

【Theorem 10.0.7 (Hawking 1967)**】**

次のすべての条件を満たす時空 $(\mathscr{M}, g)$ は，過去向きに完備でない時間的測地線を含む：

1) Timelike convergence condition
2) Strong causality condition
3) ある時空点 p において，過去向きの時間的単位ベクトル W と正定数 b が存在して，p を始点とする過去向きの時間的測地線族 Γ において，Γ に属する各測地線 γ 上で expansionθ の値が，p からの距離が b/c 以内で $-3c/b$ となる．ここで，c は，γ の点 p における単位接ベクトル V を用いて $c = -W \cdot V$ と表される.

□

【Theorem 10.0.8 (Hawking and Penrose 1970)**】**

次のすべての条件を満たす時空 $(\mathscr{M}, g)$ は，過去向きに完備でない時間的ないし光的測地線を含む：

1) Timelike convergence condition

2) Generic condition: 任意の因果的測地線上に，K をその接ベクトルとして，$K_{[a}R_{b]cd[e}K_{f]}K^cK^d \neq 0$ となる点が存在する．

3) Chronology condition

4) 次のいずれかが存在する：

   i) edge を持たないコンパクトな非時間的集合

   ii) 閉捕捉面

   iii) 次の性質をもつ時空点 p：p の過去向き光円錐において，その生成元となる各測地線上に発散が負となる点が存在する．

□

【Note 10.0.9】

この定理は強力で、我々の宇宙が初期特異点を持つことの証明に用いられる. □

11 球対称な dust collapse

§11.1 Weak cosmic censorship

WCCH[Penrose 1969]

物質が現実的な状態方程式に従うとき，なめらかな初期条件 (Σ, q) から Einstein 方程式の解として決まる漸近的に平坦な時空 (M, g) は“一般に” ホライズン上およびその外に特異点を持たない．

根拠

特異点定理における strong gravity condition

Hoop conjecture[Thorne 1973]

$$C \le 4\pi m \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{ホライズンの存在} \tag{11.1.1}$$

一様なダスト球の重力崩壊 [Oppenheimer, Snyder 1939]

数学的な表現

(M, g): strongly future predictable from Σ

i.e.,

$$\mathscr{I}^+ \subset \overline{D^+(\Sigma)} \text{ in } \bar{M}, \; J^+(\Sigma) \cap \overline{J^-(\mathscr{I}^+, M)} \subset D^+(\Sigma) \tag{11.1.2}$$

（注）

WCCH は，ブラックホールの一意性定理，正エネルギー定理の成立にとって本質的である．

目次へ

§11.2
Tolman-Bondi model

Comoving synchronous gauge

$$ds^2 = -d\tau^2 + e^{2\omega}d\chi^2 + r^2 d\Omega_2^2 \tag{11.2.1}$$

Einstein equations

$$\dot{r}^2 - \frac{2m(\chi)}{r} = \Gamma(\chi)^2 - 1 \tag{11.2.2}$$

$$e^{\omega} = \frac{|r'|}{\Gamma(\chi)} \tag{11.2.3}$$

$$\rho = \frac{m'}{4\pi r^2 r'} \tag{11.2.4}$$

初期条件

$$\omega(0,\chi), r(0,\chi), \rho(0,\chi) \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma(\chi), m(\chi), r(0,\chi) \tag{11.2.5}$$

これらのうち一つはゲージ自由度．以下，$r(0,\chi) = \chi$

一般解

$$\frac{\tau}{=}\frac{F(p)}{\bar{\rho}^{1/2}}\left[1 - \left(\frac{r}{\chi}\right)^{3/2}\frac{F(pr/\chi)}{F(p)}\right] \tag{11.2.6}$$

$$p = \frac{\chi}{2m}(1-\Gamma^2) \le 1,\ \bar{\rho} = m(\chi)/\frac{4\pi}{3}\chi^3 \tag{11.2.7}$$

$$F'(\chi), F''(\chi) > 0,\ F(-\infty) = 0,\ F(0) = 2/3,\ F(1) = \pi/2 \tag{11.2.8}$$

正則性条件: 球対称時空は Petrov type D で,

$$\Psi_2 = \frac{2\pi G}{3}(\rho - \bar{\rho}); \quad \bar{\rho} = 3m/(4\pi r^3). \tag{11.2.9}$$

となるので，正則性条件は ρ が有界であること．

見かけのホライズン

半径 r の球面から出る光波面の面積は $S = 4\pi r^2$．光波面の方程式は

$$d\tau = \pm e^{\omega} d\chi \tag{11.2.10}$$

より，

$$\frac{dr}{d\tau} = \dot{r} d\tau + r' d\chi = (\dot{r} \pm \Gamma(\chi)). \tag{11.2.11}$$

ここで，

$$\dot{r} = -\left(\Gamma(\chi)^2 + \frac{2m}{r} - 1\right)^{1/2}. \tag{11.2.12}$$

よって，

$$2m/r > 1 \Rightarrow \quad (dr/d\tau)_{\pm} < 0. \tag{11.2.13}$$

すなわち，$r = 2m$ が見かけのホライズン．

（注）Raychaudhuri 方程式より，η を affine parameter として

$$\theta = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\eta} \tag{11.2.14}$$

に対して，

$$\frac{d\theta}{d\eta} = -4\pi\rho\left(\frac{d\tau}{d\eta}\right)^2 - \theta^2 < 0. \tag{11.2.15}$$

３つのタイプの特異点

Final singularity: $r(\tau_s, \chi) = 0, \quad \chi > 0$

χ を固定するとき，

$$\tau \to \tau_s : \quad 2m(\chi)/r \to \infty. \tag{11.2.16}$$

よって，$\tau_s(\chi) > \tau_{ah}(\chi)$ となり，final singularity は空間的．

Shell crossing singularity: $r'(\tau_{sc}, \chi) = 0,\ \tau_{sc} < \tau_s$

発生条件: $\bar{\rho}'/\bar{\rho} > 2p' F'(p)/F(p)$

性質：LFC を満たさない裸の特異点

例えば，初期条件

$$r(0, \chi) = \chi, \quad \dot{r}(0, \chi) = 0 \tag{11.2.17}$$

に対して，運動方程式は

$$\dot{r}^2 - \frac{2m}{r} = -\frac{2m}{\chi}. \tag{11.2.18}$$

この解は，

$$r(\chi,\tau)=\chi\xi(\eta); \tag{11.2.19}$$

$$\eta=\tau/\tau_s(\chi), \tag{11.2.20}$$

$$\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2=\frac{1}{\xi}-1. \tag{11.2.21}$$

ここで，

$$\bar{\rho}_0(\chi)=\frac{3}{8\pi G\tau_s^2}. \tag{11.2.22}$$

これより，

$$\frac{r'}{r}=\frac{1}{\chi}+\frac{(1-\xi)^{1/2}}{\xi^{3/2}}\frac{\tau_s'}{\tau_s}\eta \quad (0\le\eta<\pi/2). \tag{11.2.23}$$

$\xi(\pi/2-0)=0$ より，$\chi\neq 0$ のとき，

$$\tau_s'<0 \quad\Leftrightarrow\quad \bar{\rho}_0'>0 \tag{11.2.24}$$

ならば，$\tau_{sc}<\tau_s$ となり，shell-crossing 特異点が発生する．

（注） shell-crossing 特異点は時間的となる．

Shell focusing singularity: $\chi=0$ での裸の特異点

発生条件：

$$h_0=-\frac{9\rho''(0)}{20\rho(0)}F(p_0)+\frac{3}{2}p''(0)F^1(p_0)>0 \tag{11.2.25}$$

性質：[Christodoulou 1984, Newman 1986]

– LFC を満たすが，SCC を満たさない．
– 質量ゼロの特異点である．

証明

まず，

$$r=\chi\xi(\tau,\chi) \tag{11.2.26}$$

とおくと，$\xi(\tau,\chi)$ は τ,χ についてなめらかで，$\tau_0=\tau_s(0),\xi_0(\tau)=\xi(\tau,0)$ とおくと，

$$\frac{\tau}{\tau_0}=1-\xi_0(\tau)^{3/2}\frac{F(p_0\xi_0(\tau)}{F(p_0)} \tag{11.2.27}$$

より，

$$\tau \to \tau_0: \ \xi_0(\tau) \to 0. \tag{11.2.28}$$

よって，$\tau \to \tau_0$ のとき

$$\rho(\tau, 0) = \frac{1}{\xi + \chi \xi'} = \frac{1}{\xi_0(\tau)} \to \infty. \tag{11.2.29}$$

つぎに，解の陰関数表示より，$\chi = 0$ の近傍で

$$\frac{\tau_s(\chi)}{\tau_0} = 1 + \frac{h_0}{3F(p_0)}\chi^2 + \mathrm{O}(\chi^4), \tag{11.2.30}$$

$$\frac{\tau_{ah}(\chi)}{\tau_0} = 1 + \frac{h_0}{3F(p_0)}\chi^2 - \frac{2}{3F(p_0)}\left(\frac{8\pi\alpha}{3}\right)^{2/3}\chi^3 + \mathrm{O}(\chi^4). \tag{11.2.31}$$

ここで，

$$h_0 := \frac{9\beta}{10\alpha}F(p_0) + 3\gamma F^1(p_0), \tag{11.2.32}$$

$$\alpha = \rho(0,0), \ \beta = -\frac{1}{2}\rho''(0,0), \ \gamma = \frac{1}{2}p''(0). \tag{11.2.33}$$

よって，outgoing light ray に対して

$$d\tau = e^{\omega} d\chi > 0 \tag{11.2.34}$$

より，$h_0 \le 0$ のとき，特異点 $(\chi = 0, \tau = \tau_0)$ は final singularity の端点で hidden.

一方，$h_0 > 0$ のとき，この特異点は naked である可能性がある．これをみるために，$\chi = 0, \tau = \tau_0$ 近傍での解を次のように表す：

$$r = \frac{\chi}{p} W f(W); \quad W = [3b(\tau_s - \tau)/2]^{3/2}. \tag{11.2.35}$$

ここで，$f(W)$ は $f(0) = 1$ となるなめらかな関数．また，b は

$$b(\chi)^2 = 8\pi\bar{\rho}(0,\chi)p^3. \tag{11.2.36}$$

いま，

$$\chi \to 0; \quad (\tau - \tau_0)/\chi^2 \to 0 \tag{11.2.37}$$

とすると，$\chi = 0$ 近傍で

$$r'/\Gamma \simeq c\chi^{4/3}: \quad c = (8\pi\alpha/3)^{1/3}(h_0/2F(p_0))^{2/3}. \tag{11.2.38}$$

よって，outgoing および incoming null geodesic の方程式は

$$d\tau = \pm\frac{r'}{\Gamma}d\chi \simeq \pm c\chi^{4/3}d\chi \Rightarrow \quad \tau - \tau_0 \simeq \pm\frac{3c}{7}\chi^{7/3} \tag{11.2.39}$$

となり，outgoing null ray は見かけのホライズンの外を通過する．

（注）この shell focusing 特異点は null line である．

§11.3
球対称なnull dust collapse

Vaidya 時空

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m(v)}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega_2^2 \tag{11.3.1}$$

$$\begin{aligned} &m(v) = 0; \qquad v < 0 \\ &\dot{m}(v) \geq 0; \qquad v \geq 0 \\ &\dot{m}(0) = \mu > 0 \end{aligned} \tag{11.3.2}$$

発生条件：$(r, v) = (0, 0)$ が裸の特異点となる条件は

$$\mu \geq \frac{1}{16} \tag{11.3.3}$$

性質：γ_+ は SCC を満たす.
[Papapetrou 1985, Hollier 1986, Dwivedi, Joshi 1989, 1991]

12 圧力を持つ星の重力崩壊

§12.1 厳密に解けるモデル

Self-similar, spherical, $P = (\gamma - 1)\rho$
[Ori, Piran 1987, 1990]

Sonic point で解が解析的に接続できることより，離散的な解の系列 $n = 1, 2, \cdots$ がきまる.

- GR Penston-Larson 解 $(n = 1)$ に対して，$\gamma \lesssim 1.0105$ のとき裸の特異点が発生.

  性質：

  - SCC を満たす
  - 無限大の赤方偏移を引き起こす

- $n \geq 2$ となる解では，γ によらず裸の特異点が発生

  ただし，この解は不安定.

（注）$D_0 = D(0)/4\pi t^2$ とおくと，$D_0 = 600$ のとき $n = 2$，$D_0 = 8 \times 10^5$ のとき $n = 3$. これに対して，通常の SN により作られる中性子星では，$D_0 \geq 10^{15}$!!.

Spherical gas collpase, no radial pressure
[Nakao, Harada，Iguchi 1998]

このモデルは厳密に解くことができ，次の性質を持つ.

- 一般的な初期条件に対しては，裸の特異点は発生しない.
- 特殊な初期条件に対しては，LFC を満たす裸の特異点が発生.

§12.2

数値計算

Non-self-similar spherical gas collapse, $p=(\gamma-1)\rho$ [Harada 1998]

Null time-slicing を用いた数値計算

十分高温で単純収縮型の初期条件に対して

- $\gamma \lesssim 1.01$ に対して裸の特異点が発生.
- 解は $t \to t_s = 0$ で self-similar 解に近づく.

13 球対称スカラ場の重力崩壊

Notation

$$ds^2 = -e^{2\nu}du^2 - 2e^{\nu+\lambda}dudr + r^2 d\Omega^2, \tag{13.0.1}$$

$$1 - \frac{2m}{r} := g^{ab}\partial_a r \partial_b r = e^{-2\lambda}, \tag{13.0.2}$$

$$\theta = r\frac{\partial\phi}{\partial r},\ \zeta = -2re^{\lambda-\nu}\frac{\partial\phi}{\partial u} + r\frac{\partial\phi}{\partial r}. \tag{13.0.3}$$

正則な原点の時空における軌跡を Γ，(u,v) を光的座標として，Γ 上の点を頂点とする未来の光円錐を $C^+(u)$，球対称な過去向きの光円錐を $C^-(v)$.

1987 最終的な Bondi 質量が正の値 M_∞ に近づくとき，M_∞ の質量をもつブラックホールが形成される．[CMP109:613(1987)]

1991 特性初期値問題において，特異点がホライズンで隠されるための十分条件. [Comm. Pure Appl. Math. 44:339(1991)]

定理

$v_1 < v_2$ に対して，$S_{1,0} = C^-(v_1) \cap C^+(u_0), S_{1,0} = C^-(v_1) \cap C^+(u_0)$, $u_0 < u$ に対して，$S_1 = C^-(v_1) \cap C^+(u), S_1 = C^-(v_1) \cap C^+(u)$ とする．δ_0, η_0 を

$$\delta_0 = \frac{r(u_0,v_2)}{r(u_0,v_1)} - 1,\ \eta_0 = \frac{2(m(u_0,v_2) - m(u_0,v_1))}{r(u_0,v_2)} \tag{13.0.4}$$

と定義すると，適当な定数 $c_0 \le 1/e, c_1 \ge 1$ に対して，もし

$$\delta_0 \le c_0, \quad \eta_0 > c_1\delta_0 \log(1/\delta_0) \tag{13.0.5}$$

の２条件が成り立てば，常に未来の光円錐 $C^+(u_*)(u_0 < u_*)$ で $r(u_*,v_1) > 0$ かつ (u_*,v_2) が見かけのホライズンの中に含まれるものが存在する．

1993 解の拡張定理 [CPAM46:1131(1993)]：

$I^{-}(C^{-})$ が正則でかつ，C^{-} を生成する内向きの光的測地線に沿って原点に近づくと m/r がゼロに近づくとき，C^{-} は Γ 上の正則点を頂点とする光円錐である．

特異点が形成されるための十分条件および形成されないための十分条件．

解が Γ 上の正則点の近傍で局所的なスケール普遍性をもつ．

1994 裸の特異点が実際に形成される解の例

[Ann. Math. 140:607 (1994)]

1999 球対称スカラ場の重力崩壊に対する宇宙検閲定理

[Ann. Math. 149: 183(1999)]：

相似的座標系: 初期特性面 C_0^+ が $u=-2a$，特異点を頂点とする光円錐 C_0^- と C_0^+ との交わりが $r=a$ となるように (u,r) 座標を取り，

$$u=-2ae^{-t}, \quad r=ae^{s-t} \tag{13.0.6}$$

とおく．この座標では C_0^+ は $t=0$，C_0^- は $s=0$，特異点は $s=0, t=+\infty$ となる．以下，$C_0^-(s=0)$ 上の量は添え字 0 を付けて表す．

Notations

$$\gamma(t) := \int_0^t (\kappa_0(t')-1)\,dt'; \quad \kappa := \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}. \tag{13.0.7}$$

$$I(t) := -\int_0^t e^{-\gamma(t')}\zeta_0(t')dt'. \tag{13.0.8}$$

不安定性定理１：

C_0^- の頂点 P が特異点であるならば $\gamma(t)$ は非有界である．このとき，$t\to\infty$ で $I(t)$ が有界な極限を持たないか，または

$$\theta_0(0) \neq \lim_{t\to\infty} I(t)$$

が成り立つならば，P は見かけのホライズンの端点であり，特異点はホライズンに含まれる．

不安定性定理２：

$\gamma(t)$ が非有界で，$\lim_{t\to\infty} I(t)=\theta_0(0)$ となったとする．このとき，

$$g(x)=e^{-\gamma(t)/4};\ x=e^{-t-5\gamma(t)} \tag{13.0.9}$$

$$h(x)=\left[\frac{1}{x}\int_0^x \left(e^s\theta(0,s)-\theta(0,0)\right)^2 ds\right]^{1/2} \tag{13.0.10}$$

とおくと，

$$\limsup_{x\to 0+}\frac{h(x)}{g(x)}=\infty \tag{13.0.11}$$

が成り立てば，不安定定理1と同じ結論が成り立つ．

宇宙検閲定理：
C^+ 上の特性初期値問題において，裸の特異点を生み出す初期値の集合の余次元は2以上である．

証明：
基本変数 ν,λ,θ,ζ に対する方程式は

$$r\left(\frac{\partial\nu}{\partial r}-\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)=e^{2\lambda}-1, \tag{13.0.12}$$

$$r\left(\frac{\partial\nu}{\partial r}+\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)=\theta^2, \tag{13.0.13}$$

$$r\frac{\partial\zeta}{\partial r}=-(e^{2\lambda}-1)\zeta-\theta, \tag{13.0.14}$$

$$r\left(2e^{\lambda-\nu}\frac{\partial\theta}{\partial u}-\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)=(e^{2\lambda}-1)\theta+\zeta \tag{13.0.15}$$

となるので，初期条件は C^+0 上の θ の値 $\vartheta(s)$ となる．対応して，初期値空間は，有界変動かつ可積分な関数 ϑ の集合である．

$f_1(s)$ を $(-\infty,0)$ でゼロ，$[0,\infty)$ で絶対連続かつ

$$\lim_{s\to 0+}f_1(s)=1 \tag{13.0.16}$$

となる非負可積分関数，$f_2(s)$ を $(-\infty,0)$ でゼロ，$(0,1)$ 上で

$$f_2(s)=e^{-s}\left(\frac{d(s(g(s))}{ds}\right)^{1/2} \tag{13.0.17}$$

により与えられる非負可積分絶対連続関数として，裸の特異点を生み出す初期値 ϑ から新たな初期値の2次元的集合

$$\tilde{\vartheta}_{\xi_1,\xi_2}=\vartheta+\xi_1f_1+\xi_2f_2 \tag{13.0.18}$$

を作る．このとき，$I^-(C_0^-)$ では $\tilde{\vartheta}=\vartheta$ となるので，$\gamma(t),I(t)$ は ξ_1,ξ_2 に依存しない．ところが，

$$\tilde{\vartheta}_{\xi_1,\xi_2}(0)=\lim_{t\to\infty}I(t)+\xi_1, \tag{13.0.19}$$

$$\limsup_{s\to 0+}\frac{\tilde{h}_{0,\xi_2}(s)}{g(s)}=\infty \tag{13.0.20}$$

となるので，$(\xi_1,\xi_2)\neq(0,0)$ なら裸の特異点は発生しない．

14 mass inflation

§14.1 Horizon stability

Stability of massless field perturbations on Schwarzschild spacetime background. [Price (1972) PRD5: 2419; Kay and Wald (1987) CQG4: 893]

Perturbation の減衰則：第 l モーメントの摂動に対して

$$\delta\Phi \sim v^{-2(l+1)}. \tag{14.1.1}$$

Stability of massless field perturbations on Kerr spacetime background. [Whiting (1989) JMP30: 1301]

§14.2
Cauchy horizon stability

Imploding null flux [Hiscock (1981) PL83A: 110]

RN-Vaidya 計量 $(G = 1)$

$$ds^2 = -f(v,r)dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2, \tag{14.2.1}$$

$$f(v,r) = 1 - \frac{2m(v)}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \tag{14.2.2}$$

Energy-momentum tensor

$$T^{\mu\nu} = T_Q^{\mu\nu} + \frac{\dot{m}}{4\pi r^2} k^\mu k^\nu; \quad k = \nabla v, \tag{14.2.3}$$

$$T_{Q\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{Q^2}{8\pi r^4}(f dv^2 - 2dvdr + r^2 d\Omega^2). \tag{14.2.4}$$

Curvature scalar

$$R^{abcd}R_{abcd} = \frac{48m^2}{r^6} - \frac{80mQ^2}{r^7} + \frac{56Q^4}{r^8}. \tag{14.2.5}$$

Mass model

$$m(v) = \begin{cases} M - \delta, & v < v_0 \\ M - \delta(v_0/v)^n, & v > v_0 \end{cases} \tag{14.2.6}$$

Cauchy horizon

$$r = r_= M - (M^2 - Q^2)^{1/2}. \tag{14.2.7}$$

したがって，Cauchy ホライズンは sp-singularity でない．

Tidal force

速度ベクトル u^μ の時間的測地線に対する tidal force

$$K_{IJ} = R_{\mu\nu\lambda\sigma} E_I^\mu u^\nu E_J^\lambda u^\sigma \tag{14.2.8}$$

は E_2, E_3 を θ, ϕ 方向に取ると，

$$K_{11} = -\frac{1}{2} f'', \tag{14.2.9}$$

$$K_{22} = K_{33} = (u^v/r)^2 \dot{m} + A(r,v). \tag{14.2.10}$$

ここで，$A(r,v)$ はCauchy horizon に近づいたときに明らかに有界な項．ところが，H^+ の近傍で測地線の方程式は

$$\dot{u}^v = -\frac{1}{2}\partial_r(u^v)^2 \simeq \kappa(u^v)^2. \tag{14.2.11}$$

よって，

$$\frac{du^v}{dv} = \kappa u^v \Rightarrow \quad u^v \simeq ce^{\kappa v}. \tag{14.2.12}$$

これより，K_{22} は H^+ に近づくにつれ発散する：

$$K_{22} \simeq c'(v_0/v)^{n+1}e^{2\kappa v} \to \infty. \tag{14.2.13}$$

したがって，Cauchy horizon はnsp-特異点である．

mass inflation [Poisson and Israel (1990) PRD41: 1796]

Ori model [Ori (1991) PRL67: 789]

Hiscock model で考えたincoming null flux の上に，さらにhorizon 内でのthin shell 状のoutgoing null flux を加えてモデルを考える．このとき，thin shell の両側の時空は異なる $m(v)$ をもつRNV 時空で記述される．両者のshell でのjunction を考えると，$m_1(v)$，$m_2(v)$ の間の次の関係が得られる：

$$\begin{aligned}\delta m &\propto v_1^{-(n+1)}e^{\kappa_- v_1}\\ &\propto |v_2|^{-1}(-\ln|v_2|)^{-(n+1)}.\end{aligned} \tag{14.2.14}$$

したがって，$m_2(v_2)$ は H^+ に近づくと発散する．これは，H^+ がsp-特異点であることを意味している．

Cauchy horizon

ds=0 より

$$2dr = fdv \Rightarrow \quad d(r^2) \simeq -2m(v)dv. \tag{14.2.15}$$

よって，

$$u^2 \simeq \text{const} - r^2 + a(-\ln|v_2|)^{-n}. \tag{14.2.16}$$

したがって，Cauchy ホライズンの半径は u と共に減少する．

tidal force

Hiscock model と同様にして，領域2（shell の内側）で，

$$u^v \propto \int dv_2 m_2/r^2 \sim c\exp[-a(-\ln|v_2|^{-n}] \to \text{const}. \tag{14.2.17}$$

よって,

$$K_2 2 \simeq \mathrm{const}\,\dot{m}_2(v_2). \tag{14.2.18}$$

これより,

$$\delta x \sim \int dv_2 \int dv_2 K_2 2 \to \mathrm{const}. \tag{14.2.19}$$

すなわち，Cauchy horizon に達するまでに生じる tidal force による物体の変形は有限である.

適当な座標を取ると，Cauchy horizon 上で計量が有界となる.

数値計算

中性スカラ場+点電荷 [Brady, Smith (1995) PRL75: 1256]

Ori モデルと同様の weak curvature singularity をもつ Cauchy horizon が発生すること，およびこの Cauchy horizon は最終的に半径がゼロとなり，空間的強曲率特異点につながることを示した.

荷電スカラ場の重力崩壊 [Hod, Piran (1998) PRL81: 1554]

完全に自己完結のモデルで，Ori, Brady-Smith の結果を確認.