

Geometry

Last update: 2023 年 5 月 3 日

目次

1	Differential Geometry	10
1.1	History	10
1.1.1	教科書, レビュー	10
1.1.2	全般	10
1.1.3	Coarse Geometry	11
1.1.4	Special Geometry	12
1.1.5	シンプレクティック幾何学	12
1.1.6	Thurston 予想, Hamilton フロー, 3 次元 Poincaré 予想	12
1.2	G 構造	13
1.2.1	一般論	13
1.3	接続	15
1.3.1	ベクトル束の接続	15
1.4	特性類	19
1.4.1	Euler 類	20
1.4.2	Chern 類	21
1.4.2.1	具体例	22
1.4.3	Pontrjagin 類	25
1.5	指数定理	26
1.5.1	一般 Atiyah-Singer 指数定理	26
1.6	曲率と位相	27
1.6.1	Books and Reviews	27
1.6.2	非負 Ricci 曲率の多様体	27
1.6.3	山辺の問題	28
1.6.4	スカラ曲率と位相	30
1.6.5	測地球の体積と面積	32
1.6.6	単体的体積	33
1.6.7	Sobolev 不等式	34
1.6.8	2 次元曲面	36

1.6.9	3次元多様体	37
1.6.10	4次元多様体	37
1.7	等質空間	39
1.7.1	Books and Reviews	39
1.7.2	一般的性質	39
1.7.3	例	41
1.8	対称空間	43
1.8.1	教科書とレビュー	43
1.8.2	対称 Riemann 空間	43
1.8.2.1	定義と一般的性質	43
1.8.2.2	分類	45
1.9	Einstein 空間	46
1.9.1	Books and Reviews	46
1.9.2	存在	46
1.9.3	一意性	46
1.9.4	モジュライ空間 $\mathcal{E}(M)$	47
1.9.4.1	一般論	47
1.9.4.2	Einstein 構造の変形	48
1.9.4.3	Einstein 空間の体積	51
1.9.4.4	Einstein 構造の剛性	52
1.9.4.5	モジュライ空間の次元	53
1.9.5	等質 Einstein 空間	53
1.9.6	コンパクト等質 Kähler 多様体	55
1.9.7	例	57
1.10	接触多様体	58
1.10.1	概接触多様体	58
1.10.2	接触多様体	59
1.10.3	佐々木多様体	61
1.11	スペクトル幾何学	63
1.11.1	レビュー	63
1.12	正エネルギー定理	64
1.12.1	Overview	64
1.12.2	ADM 質量正值性	64

2	Sheaf	66
2.1	基本定義	66
2.2	加群層	70
2.2.1	定義と基本的性質	70
2.2.2	解析空間の接続層	72
2.3	Cohomology	74
2.3.1	層係数コホモロジー	74
2.3.2	Cech コホモロジー	77
2.3.3	高次順像	78
3	Complex Manifolds	79
3.1	Complex Structure	79
3.1.1	\mathbb{C}^n の開集合からの正則写像	79
3.1.2	複素多様体	79
3.1.3	概複素多様体	81
3.1.4	複素多様体上のテンソル	82
3.2	複素構造の変形	85
3.2.1	一般論	85
3.2.2	例	88
3.2.2.1	Riemann 面	88
3.3	エルミート多様体	90
3.3.1	エルミート計量	90
3.4	Kähler 多様体	92
3.4.1	基本的性質	92
3.4.2	曲率テンソル	93
3.4.3	座標成分表示	94
3.4.4	正則キリングベクトル場とモーメント写像	95
3.4.5	Kähler-Hodge 多様体	96
3.4.6	射影 Kähler 多様体	96
3.4.7	Special Kähler 多様体	98
3.4.7.1	Rigid/affine special Kähler 多様体	98
3.4.7.2	Projective special Kähler 多様体	100
3.4.8	Hyperkähler 多様体	101
3.4.9	4 元数ケーラー多様体	101
3.4.10	標準直線バンドル	102
3.4.11	ホロノミー	102

3.4.12	Chern 類	103
3.5	Kähler-Einstein 多様体	103
3.5.1	一般的性質	103
3.5.2	Calabi-Yau 予想	104
3.5.3	例	104
3.5.4	Ricci 平坦多様体	105
3.5.5	Calabi-Yau 多様体	105
3.5.5.1	定義と基本性質	105
3.5.5.2	3次元 Calabi-Yau 多様体の Hodge ダイア モンド	106
3.5.5.3	$\mathbb{C}P^m$ の部分多様体による構成	107
3.5.5.4	オービフォールドの crepant な特異点解消 による構成	107
3.5.6	重み付き射影空間の部分多様体による構成	109
3.6	位相的性質	110
3.6.1	基本群	110
3.7	多変数複素関数	111
3.7.1	1変数複素関数	111
3.7.2	基本的性質	111
3.7.3	留数定理	113
3.7.4	交点数	116
3.7.5	局所環	119
3.7.6	Tor と Ext	120
3.7.7	局所双対定理	123
3.8	層係数コホモロジー	126
3.8.1	de Rham の定理	126
3.8.2	Dolbeault の定理	126
3.9	調和理論	128
3.9.1	Hodge 理論	128
3.9.2	Hodge 分解	130
3.9.3	ベクトルバンドへの一般化, Kodaira-Serre の双対 定理	133
3.10	因子と線バンドル	135
3.10.1	線バンドル	135
3.10.2	因子	135

3.10.3	線形系	137
3.10.4	Picard 群	138
3.10.5	因子と正則線バンドルの対応	139
3.10.6	直線バンドルの Chern 類	140
3.10.7	標準正則直線バンドル	144
3.10.8	$\mathcal{E}(D), \mathcal{E}(-D)$	145
3.10.9	複素線バンドルに対するコホモロジー消滅定理, . .	146
3.10.10	交点数	149
3.11	射影多様体	151
3.11.1	GAGA の原理	151
3.11.2	射影多様体の次数	153
3.11.3	接空間	154
3.11.4	正則直線バンドルと射影埋め込みの対応	154
3.11.5	小平の埋め込み定理	157
3.12	Abel 多様体	160
3.12.1	Riemann 条件	160
3.12.2	複素トーラスのホモロジーとコホモロジー	161
3.12.3	Abel 多様体上の直線バンドル	163
3.12.4	θ 関数	164
3.12.5	群構造	165
3.13	有理写像	166
3.13.1	関連する基本定理	166
3.13.2	有理写像の特徴づけ	167
3.13.3	Blow-up と blow-down	167
3.13.4	有理写像の例	172
3.13.5	双有理不変量	172
3.14	リーマン面 (代数曲線)	174
3.14.1	歴史に関するノート	174
3.14.1.1	Riemann の写像定理	174
3.14.1.2	一意化定理	175
3.14.2	基本定理	177
3.14.3	Abel の定理	183
3.14.4	Riemann-Roch の定理	187
3.14.5	標準曲線	190
3.14.6	特殊線形系	191

3.14.7	Plücker 公式	200
3.14.8	平面曲線	203
3.14.9	対応	204
3.14.10	空間曲線	207
3.14.11	命題の証明	210
3.15	複素曲面	212
3.15.1	Rieman-Roch の定理	212
3.15.2	$\mathbb{C}P^3$ の超曲面	214
3.15.3	特異点解消	215
3.15.4	代数曲面の双有理写像の構造	217
3.15.5	有理曲面	218
3.15.6	$\mathbb{C}P^n$ の極小次数の曲面	224
3.15.7	有理曲面の双有理不変量による特徴づけ	226
3.15.8	Albanese 写像	228
3.15.9	非有理線織面	229
3.15.10	楕円曲面	230
3.15.11	曲面の分類	232
3.15.12	4次元多様体の微分同相類との対応	235
3.15.13	諸命題の証明	236
3.16	複素多様体の例	248
3.16.1	Fundamental manifolds	248
3.16.1.1	$\mathbb{C}P^n$	248
3.16.1.2	Complex Lie group	251
3.16.1.3	Grassmann manifold	251
3.16.1.4	S^n の複素構造	252
3.16.2	Quotient manifolds	252
3.16.3	Kähler manifold	253
3.16.4	複素曲面	255
3.16.4.1	超楕円曲面	255
3.16.4.2	K3 曲面	257
3.16.4.3	Enriques 曲面	262
3.17	Grassmann 多様体	265
3.17.1	位相構造	265
3.17.2	普遍ベクトルバンドルと Chern 類	267
3.17.3	埋め込み定理	271

3.18	指数定理	274
3.18.1	C^∞ 写像に対する Lefschetz の不動点定理	274
3.18.2	正則写像に対する不動点定理	275
3.18.3	Hirzebruch-Riemann-Roch 公式	275
3.19	Twistor	278
3.19.1	Basic definitions	278
3.19.1.1	Spinor description	278
3.19.1.2	Twistor algebra	281
3.19.1.3	Vector description	285
3.20	解析空間	289
3.20.1	解析的部分集合	289
3.20.2	解析的局所モデル	289
3.20.3	解析空間	290
3.20.4	代数幾何学との対応	291
4	Algebraic Geometry	294
4.1	スキーム代数多様体	294
4.1.1	代数的局所モデル	294
4.1.1.1	アフィン代数多様体	294
4.1.1.2	アフィンスキーム	295
4.1.2	スキーム	297
4.1.2.1	基本定義	297
4.1.2.2	ファイバー積	297
4.1.2.3	有限射と固有射	298
4.1.2.4	局所自由層と準接続層	299
4.1.3	代数的スキーム	301
4.1.3.1	定義	301
4.1.3.2	非特異点・特異点	304
4.1.3.3	ベクトル束と接続層	305
4.1.3.4	接層・余接層	307
4.1.3.5	微分形式	308
4.1.4	解析空間との対応	309
4.2	因子と加群層	310
4.2.1	正規多様体	310
4.2.2	因子	311
4.2.2.1	Weil 因子と Cartier 因子	311

4.2.2.2	標準因子	315
4.3	射影的スキーム	316
4.3.1	射影的スキームの位置付け	316
4.3.2	Proj スキーム	316
4.3.3	射影的スキーム	318
4.3.4	接続層	320
4.3.5	双対定理と消滅定理	321
4.3.6	線形系	322
4.3.7	交点数	323
4.3.8	Riemann-Roch の定理	324
4.3.8.1	Chern 標数と Todd 標数	324
4.3.8.2	Riemann-Roch の定理	327
4.3.9	射影的射	328
4.3.10	豊富性の数値的判定	329
4.3.10.1	\mathbb{Z} -可逆層	329
4.3.10.2	\mathbb{Q} -可逆層, \mathbb{R} -可逆層	330
4.3.11	\mathbb{Q} -因子, \mathbb{R} -因子	333
4.3.12	双有理不変量	334
4.3.12.1	小平次元	334
4.3.13	定理・命題の証明	336
4.4	被覆空間	337
4.4.1	被覆空間と分岐	337
4.5	特異点	338
4.5.1	ブローアップ	338
4.5.1.1	一般的定義	338
4.5.1.2	例外因子	340
4.5.1.3	1点でのブローアップ	344
4.5.2	特異点解消	348
4.5.3	広中の定理	349
4.5.4	特異点の分類	350
4.5.4.1	Gorenstein 族	350
4.5.4.2	有理特異点	351
4.5.5	代数曲面の特異点	352
4.5.5.1	極小特異点解消	352
4.5.5.2	有理特異点	353

4.5.5.3	商特異点	353
4.5.5.4	有理2重点	353
4.6	代数曲面	356
4.6.1	双有理不変量	356
4.6.2	曲面上の交点理論	357
4.6.3	曲面の分類と極小モデル	358
4.6.4	有理曲面	361
4.6.5	線織曲面	361
4.6.6	楕円曲面	363
4.6.7	代数的 K3 曲面	363
4.7	代数群	364
4.7.1	Abel 多様体	364
4.7.1.1	Albanese 多様体	364
4.8	トーリック多様体	365
4.8.1	構成法	366
4.8.2	例	369
4.8.3	性質	375
4.8.4	超曲面	376
5	Gauge Field Theories	379
5.1	Fundamentals	379
6	Noncommutative Geometry	382
6.1	超幾何学	382
6.1.1	教科書とレビュー	382
6.2	History	383
6.3	超多様体	384

1 Differential Geometry

Last update: 2020/9/20

1.1 History

1.1.1 教科書, レビュー

Berger M (2000)[Ber00]

Riemannian Geometry During the Second Half of the Twentieth Century

1.1.2 全般

1913 (Weyl H) “Riemann 面の概念”

1915 (Einstein A) 一般相対性理論

1924 (Cartan E at ICM) 接続のホロノミー, 常微分方程式の幾何学化

1932 (de Rahm, Čech, Hopf, Pontryagin) トポロジー概念の微分幾何学への導入

1935 (Myers S B) “Riemannian manifolds in the large” 「完備 Riemann 多様体の Ricci 曲率が正定値で下に有界ならば, 多様体はコンパクトである」

1936 (Synge J L at ICM) “On connectivity of spaces of positive curvature”

1941 (Hodge W V D) “調和積分の理論と応用”

1950 (Bocher, Lichnerowicz at ICM) 曲率の Betti 数への影響. 「コンパクト多様体上の Ricci 曲率が正ならば, ゼロでない 1 次調和形式は存在しない」

(Morse at ICM) “Calculus of variations in the large”

(Chern at ICM) ファイバー束, 特性類

- 1954 (Hirzebruch) Riemann-Roch の定理の一般化
(小平) 小平の消滅定理, 射影多様体の理論, 層の理論の応用
- 1962 (Atiyah, Singer at ICM) Atiyah-Singer の指数定理
- 1966 (Atiyah: Fields 賞受賞)
- 1978 (Yau S T at ICM) “The role of differential equations in differential geometry” Calabi 予想の証明
(Penrose R at ICM) “The complex geometry of the natural world”
(Gromov M at ICM) “Synthetic geometry in Riemannian manifolds”
- * (Donaldson S K) YM 理論の応用

1.1.3 Coarse Geometry

- 1935 (Myers S B) “Riemannian manifolds in the large” 「完備 Riemann 多様体の Ricci 曲率が正定値で下に有界ならば, 多様体はコンパクトである」
- 1978 (Gromov M at ICM) “Synthetic geometry in Riemannian manifolds”
- 1998 (Colding T H) 「次の条件を満たす正の定数 $\epsilon = \epsilon(n) > 0$ が存在する: M が $b_1(M) = n$ となるコンパクト n 次元 Riemann 多様体で, その Ricci 曲率が $-\epsilon/\text{diam}_M^2$ により下からおさえられれば, M は n 次元トーラスに位相同型である。」

「コンパクト n 次元 Riemann 多様体 M に対して, 次の条件が成り立つ $\epsilon = \epsilon(M) > 0$ が存在する: n 次元多様体 N の Ricci 曲率が下から $-(n-1)$ によっておさえられ, かつ $d_{\text{GH}}(M, N) < \epsilon$ ならば, M と N は微分同相である。」(ここで, d_{GH} は Gromov-Hausdorff 距離.)

1.1.4 Special Geometry

1977 (Hawking S W) Euclidian Taub-NUT 解 (非自明な $U(2)$ 不変 Ricci 平坦完備 Riemann 多様体の最初の例) [Haw77]

1978 (Yau S T) Calabi 予想の証明. コンパクト Ricci 平坦 Riemann 多様体の存在.

1992 (Hitchin N J) \mathbb{R}^4 上の Ricci 平坦かつ $U(2)$ 不変な完備 Riemann 計量の Hyper-Kähler 商構成法

(Hitchin N J) ゲージ理論のモジュライ空間における自然な Hyper-Kähler 計量の存在.

* (Bryant R, Salamon S) 例外ホロノミーをもつ 7 次元および 8 次元非コンパクト完備多様体の例.

1998 (Joyce D at ICM) 例外ホロノミー ($SU(n), Sp(n)$) をもつコンパクト多様体の多くの例.

1.1.5 シンプレクティック幾何学

* (Gromov D) シンプレクティック多様体内の擬正則曲線 (J -正則曲線) の概念.

199* (Seiberg-Witten) Seiberg-Witten 方程式

* (Taubes C) Seiberg-Witten 方程式と J -正則曲線の関係: 「4 次元シンプレクティック多様体 M に対して, ゼロでないコホモロジー類 $a \in H^2(M, \mathbb{Z})$ が非自明な Seiberg-Witten 不変量を持つならば, ある J -正則曲線が存在して, そのホモロジー類は a に Poincaré 双対となる。」

1.1.6 Thurston 予想, Hamilton フロー, 3 次元 Poincaré 予想

3 次元多様体に対する

1982 Ricci flow [Hamilton R 1982[Ham82]]

2003 Perelman の定理 [Perelman G [Per02, Per03b, Per03a]]

1.2 G 構造

1.2.1 一般論

【定義 1.1 (G 構造)】 M を n 次元多様体, F をそのフレームバンドルとすると, F は M 上の $GL(n, \mathbb{R})$ 主バンドルとなる. このとき, $GL(n, \mathbb{R})$ の Lie 部分群 G に対して, G を構造群とする F の部分主バンドル P を G 構造 (G structure) という. □

【例 1.2 (G 構造)】

1. Riemann 多様体 $M^n : G = O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$
2. 複素多様体 $M^{2m} : G = GL(m, \mathbb{C}) \subset GL(2m, \mathbb{R})$

□

【定義 1.3 (固有トーシオン)】 G を $GL(n, \mathbb{R})$ の Lie 部分群, $V = \mathbb{R}^n$ とする. G の Lie 代数 $\mathfrak{g} \subset V \otimes V^*$ と見なして, 写像 $\sigma : \mathfrak{g} \otimes V^* \rightarrow V \otimes \bigwedge^2 V^*$ を $\sigma(t_{bc}^a) = t_{bc}^a - t_{cb}^a$ により定義する. さらに, これを用いて線形空間 L_1, \dots, L_4 を

$$L_1 = V \otimes \bigwedge^2 V^*, \quad L_2 = \text{Im } \sigma, \quad L_3 = L_1/L_2, \quad L_4 = \text{Ker } \sigma$$

により定義し, 対応する G の L_1, \dots, L_4 への表現を $\rho_j : G \rightarrow GL(L_j)$ とおく.

P を M 上の G 構造とすると, ρ_j は M 上のベクトルバンドル $\rho_j(P)$ を与える. P の接続 ∇ に対してトーシオン $T(\nabla)$ は $C^\infty(\rho_1(P))$ に, また 2 つの接続 ∇, ∇' に対し, $T(\nabla) - T(\nabla')$ は $C^\infty(\rho_2(P))$ に属する. したがって, $T(\nabla)$ の $C^\infty(\rho_3)$ への像 $T^i(P)$ は P のみに依存し, ∇ の取り方に依存しない. そこで, $T^i(P)$ を G 構造 P の固有トーシオン (intrinsic torsion) という. また, $T^i(P) = 0$ となるとき, P をトーシオンのない (torsion free) G 構造という. □

【定義 1.4 (トーシオンのない G 構造)】

1. Riemann 多様体 : $O(n)$ 構造は常に torsion free.
2. 複素構造 : トーシオンのない $GL(m, \mathbb{C})$ 構造

目次へ

3. シンプレクティック構造：トーシヨンのない $\mathrm{Sp}(m, \mathbb{R})$ 構造.
4. Kahler 構造：トーシヨンのない $U(m)$ 構造

□

1.3 接続

1.3.1 ベクトル束の接続

【定義 1.5 (主ファイバー束の接続)】 多様体 M 上の構造群 G をもつ主ファイバー束を $P(M, G)$, 各点 $u \in P$ において, P のファイバーに接するベクトル全体の作る $T_u(P)$ の線形部分空間を G_u とする. このとき, 各点 u で定義された $T_u(P)$ の線形部分空間 H_u の系 Γ が次の性質をもつとき, Γ を P 上の接続 (connection) という:

- (a) $T_u(P) = G_u + H_u$ (直和)
- (b) $(R_a)_* H_u = H_{ua}$ (任意の $u \in P, a \in G$)
- (c) H_u は u に滑らかに依存.

また, G_u は鉛直部分空間 (vertical subspace), H_u は水平部分空間 (horizontal subspace) という. □

【定義 1.6 (主ベクトル束上の接続形式)】 $P(M, G)$ を多様体 M 上の構造群 G をもつ主ファイバー束, \mathfrak{g} を G の Lie 代数とし, G の P への右作用から誘導される \mathfrak{g} と P 上の鉛直ベクトル場の対応を $A \mapsto A^*$ で表す. このとき, P 上の接続 Γ が与えられると, P 上の \mathfrak{g} に値をとる 1 形式 ω で, Γ から定義されるベクトル $X \in T_u(P)$ の鉛直成分が $(\omega_u(X))^*$ と一致するものが, 常に一意的に存在する. この P 上の 1 形式 ω を Γ の接続形式 (connection form) という. □

【命題 1.7 (接続形式の性質)】 主ファイバー束 $P(M, G)$ 上の接続形式 ω は次の性質をもつ:

- (a) $\omega(A^*) = A, \forall A \in \mathfrak{g}$.
- (b) $(R_a)^* \omega = \text{ad}(a^{-1})\omega, \forall a \in G$.

逆に, これらの条件を満たす P 上の \mathfrak{g} に値を取る 1 形式は, 適当な接続 Γ の接続形式となる. □

【命題 1.8 (局所的表現)】 主ファイバー束 $P(M, G)$ の局所座標系を $\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\}$ とする:

$$\begin{array}{ccc} \psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) & \rightarrow & U_\alpha \times G \\ \downarrow & & \downarrow \\ u & \mapsto & (\pi(u), \phi_\alpha(u)) \end{array}$$

このとき、 G の P に対する右作用は

$$\phi_\alpha(ua) = \phi_\alpha(u)a, \quad \forall a \in G$$

と表される。いま、各局所座標系から定義される P の局所断面 σ_α を

$$\phi_\alpha(\sigma_\alpha(x)) = e, \quad x \in U_\alpha$$

により定義すると、異なる座標近傍での局所断面の関係は、

$$\phi_\beta(u) = g_{\beta\alpha}(x)\phi_\alpha(u), \quad x = \pi(u) \in U_\alpha \cap U_\beta$$

により定義される変換関数 $g_{\beta\alpha}(x) = g_{\alpha\beta}(x)^{-1}$ を用いて、

$$\sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x)g_{\alpha\beta}(x), \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

と表される。

いま、 P 上の接続形式 ω に対して、各座標近傍 U_α において \mathfrak{g} に値を取る 1 形式 ω_α を

$$\omega_\alpha := (\sigma_\alpha)^*\omega$$

により定義すると、 $X \in T_x(U_\alpha)$ の $u = \sigma_\alpha(x) \in P$ における水平リフト、すなわち $\pi_*\tilde{X} = X, \omega(\tilde{X}) = 0$ となるベクトル $\tilde{X} \in T_u(P)$ は

$$\tilde{X} = (\sigma_\alpha)_*X - (\omega_\alpha(X))_u^*$$

で与えられる。また、 ω_α の座標変換則は

$$\omega_\beta = \text{ad}(g_{\beta\alpha})\omega_\alpha - (dg_{\beta\alpha})g_{\beta\alpha}^{-1}$$

で与えられる。 □

【定義 1.9 (テンソル値微分形式)】 $P(M, G)$ を主ファイバー束、 V を線形空間、 ρ を G の V への線形表現とする。このとき、 V に値を取る P 上の r -形式 ϕ が

$$(R_a)^*\phi = \rho(a^{-1})\phi, \quad \forall a \in G$$

を満たすとき、 (ρ, V) 型準テンソル値 r -形式 (pseudtensorial form) という。

さらに、 Γ を P 上の接続、 $h : T_u(P) \rightarrow H_u$ を対応する水平部分空間への射影するとき、 (ρ, V) 型準テンソル値 r -形式 ϕ が水平、すなわち

$$(\phi h)(X_1, \dots, X_r) := \phi(hX_1, \dots, hX_r)$$

に対して, $\phi h = \phi$ を満たすとき, テンソル値 r -形式 (tensorial form) という.

テンソル値微分形式は, P に随伴するベクトル束 $E = P \times_{\rho} V$ に値を取る微分形式と 1 対 1 に対応する. □

【定義 1.10 (共変外微分)】 Γ を主ファイバー束 $P(M, G)$ 上の接続, $h: T_u(P) \rightarrow H_u$ を対応する水平部分空間への射影する. (ρ, V) 型準テンソル値 r -形式 ϕ に対して, $D\phi := (d\phi)h$ は (ρ, V) 型テンソル値 $(r+1)$ -形式となる. これを ϕ の共変外微分 (exterior covariant derivative) という. □

【定理 1.11 (曲率形式)】 主ファイバー束 $P(M, G)$ 上の接続 Γ に対して, その接続形式を ω とするとき, $(\text{ad}, \mathfrak{g})$ 型テンソル値 2 形式 $\mathcal{R} := D\omega$ を Γ の曲率形式 (curvature form) という. このとき, 関係式

$$d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] = \mathcal{R}(X, Y), \quad X, Y \in T_u(P), \quad u \in P$$

および Bianchi 恒等式

$$D\mathcal{R} = 0$$

が成り立つ.

P の座標近傍 U_{α} での断面を σ_{α} として,

$$\mathcal{R}_{\alpha} := \sigma_{\alpha}^* \mathcal{R}$$

とおくと, \mathcal{R}_{α} は接続形式の座標成分 $\omega_{\alpha} = \sigma_{\alpha}^* \omega$ を用いて,

$$\mathcal{R}_{\alpha}(X, Y) = d\omega_{\alpha}(X, Y) + [\omega_{\alpha}(X), \omega_{\alpha}(Y)], \quad X, Y \in T_x(U_{\alpha})$$

と表され, 座標変換 $\sigma_{\beta} = \sigma_{\alpha} g_{\alpha\beta}$ に対して,

$$\mathcal{R}_{\beta} = \text{ad}(g_{\beta\alpha}) \mathcal{R}_{\alpha}$$

と変換する. また, Bianchi 恒等式は

$$D\mathcal{R}_{\alpha} := d\mathcal{R}_{\alpha} + [\omega_{\alpha} \wedge \mathcal{R}_{\alpha}] = 0$$

と表される. ここで, 一般に, \mathfrak{g} に値を取る p 形式 α と q 形式 β に対して,

$$[\alpha \wedge \beta](X_1, \dots, X_{p+q}) := \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) [\alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)}), \beta(X_{\sigma(p+1)}, \dots, X_{\sigma(p+q)})]$$

である. □

【定義 1.12 (随伴ベクトル束の接続)】 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ を G の線形表現, 主ファイバー束 $\tilde{\pi} : P(M, G) \rightarrow M$ に随伴するベクトルバンドルを $\pi : E = P \times_{\rho} V \rightarrow M$, $p : P \times V \rightarrow E$ を自然な射影とする ($p(ua, v) = p(u, \rho(a)v)$).

このとき, $u \in P$ は同型写像

$$\begin{array}{ccc} u : V & \rightarrow & E_x \quad , x = \tilde{\pi}(u) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ v & \mapsto & p(u, v) \end{array}$$

と同一視することができる. また, σ_{α} を $U_{\alpha} \subset M$ における P の局所切断とすると,

$$\psi_{\alpha} : U_{\alpha} \times V \ni (x, v) \mapsto p(\sigma_{\alpha}(x), v) \in E$$

は, E の局所座標系を与える.

いま, P の接続 $\Gamma = \{H_u \mid u \in P\}$ が与えられると, $(p_*)_{(u,v)}(H_u \oplus 0) \subset T_{p(u,v)}(E)$ は, 次の性質をもつ $w = p(u, v)$ のみに依存した部分空間族 $\Gamma' = \{H'_w \subset T_w(E) \mid w \in E\}$ を与える:

$$T_w(E) = T_w(E_x) + H'_w \quad (\text{直和}), \quad w \in E, \quad x = \pi(w).$$

Γ' は, M の任意のベクトル (場) X の E における水平リフト

$$\tilde{X}_w \in H'_w : \quad \pi_*(\tilde{X}_w) = X_{\pi(w)}$$

を一意的に定める. 上で定めた局所座標系 ψ_{α} では, 接続形式 ω の座標成分を ω_{α} とすると, \tilde{X}_w は

$$\psi_{\alpha}^* \tilde{X}_w = X_x \oplus (-\rho_*(\omega_{\alpha}(X_x))v), \quad w = \psi_{\alpha}(x, v)$$

と表される. ここで, $\rho_* = (d\rho)_e$ は ρ から誘導される Lie 代数の準同型

$$\rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V); \quad \rho_*([\xi, \eta]) = [\rho_*(\xi), \rho_*(\eta)]$$

である.

このようにして定義された水平リフトにより, M 上のベクトル場 X は E 上の水平ベクトル場 \tilde{X} および対応する E の 1 径数バンドル変換群 Φ_t を与える. いま, ϕ を E の局所切断とすると,

$$\nabla_X \phi(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_t^* \phi(x) - \phi(x)}{t}$$

により, 新たな E の切断に値をもつ M 上の 1 形式 $\nabla\phi$ が定義される. これを接続 Γ' による ϕ の共変微分 (covariant derivative) という. 切断 ϕ を局所座標系 ψ_α で

$$\phi(x) \mapsto \phi_\alpha(x) \in V, \quad x \in U_\alpha$$

と成分表示すると, その共変微分は

$$\nabla\phi \mapsto d\phi_\alpha + \rho_*(\omega_\alpha)\phi_\alpha$$

と表される. また, その曲率

$$F(X, Y)\phi := (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})\phi$$

の座標成分は, \mathcal{R}_α を曲率形式の座標成分として

$$F_\alpha = \rho_*(\mathcal{R}_\alpha)$$

で与えられる.

E の局所切断 ϕ を,

$$p(u, \tilde{\phi}(u)) = \phi(x)$$

により P 上の (ρ, V) 型テンソル値 0-形式 $\tilde{\phi}$ に対応させると, $\nabla\phi$ は共変外微分 $D\tilde{\phi}$ と対応する. □

1.4 特性類

【定義 1.13 (特性多項式)】 一般に, $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ の多項式関数 $P(\alpha)$ が, $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ の部分群 G の作用

$$\mathrm{ad}(g) : \alpha \mapsto g\alpha g^{-1} \tag{1}$$

に対して不変であるとき, P を G -特性多項式と呼ぶ. □

【定理 1.14 (Weil 準同形)】 一般に, $P(\alpha)$ を G -特性多項式とするとき, G を構造群とする多様体 M 上の k 次元ベクトルバンドル (係数体は \mathbb{R} ないし \mathbb{C}) V の線形 G 接続 (Ω, ω) に対して, $P(\Omega)$ は次の性質をもつ:

- i) ゲージ不変な閉微分形式.
- ii) 対応するコホモロジー類は, 接続 Ω に依存せず, バンドル構造のみで決まる.

□

1.4.1 Euler 類

【定義 1.15 (Euler 類)】 E を多様体 M 上の向き付けられた $2p$ 次元実ベクトルバンドル, Ω^{ij} をその計量に関する線形接続の曲率形式とするとき, E の Euler 類は

$$e(E) = \frac{1}{2^{2p}\pi^p p!} \sum \epsilon_{i_1 \dots i_{2p}} \Omega^{i_1 i_2} \wedge \dots \wedge \Omega^{i_{2p-1} i_{2p}} \quad (2)$$

により与えられる. □

【例 1.16 ($T(S^2)$)】 2次元球面

$$ds^2 = A^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3)$$

に対して, 直交基底

$$\theta^1 = A d\theta, \quad \theta^2 = A \sin \theta d\phi \quad (4)$$

に対する接続形式は,

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \chi, \quad \chi = -\cos \theta d\phi. \quad (5)$$

曲率形式は

$$\mathcal{R} = d\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} d\chi, \quad (6)$$

$$d\chi = \theta^1 \wedge \theta^2. \quad (7)$$

よって, Euler 類は

$$e(T(S^2)) = \frac{1}{2\pi} \theta^1 \wedge \theta^2. \quad (8)$$

これより,

$$\chi(S^2) = \int_{S^2} e(T(S^2)) = 2. \quad (9)$$

□

1.4.2 Chern 類

$E \rightarrow M$ をファイバーが k 次元の複素ベクトルバンドル, D をその線形接続 $D: \mathcal{A}^0(E) \rightarrow \mathcal{A}^1(E)$, $\theta^i_j \in \mathcal{A}^1(M)$ を E の切断の局所基底 ϕ_i に関する接続形式の行列表示, $\Theta^i_j \in \mathcal{A}^2(M)$ を曲率形式の行列表示とする:

$$D\phi_i = \phi_j \theta^j_i, \quad \Theta^i_j = d\theta^i_j + \theta^i_k \wedge \theta^k_j. \quad (10)$$

【定義 1.17 (Chern 類の定義)】 $P^i(A)$ を i 次の基本不変多項式とする: $\det(\lambda + A) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} P^i(A)$. このとき, 階数 $k (< n)$ の複素ベクトルバンドル $E \rightarrow M$ に対し,

$$c_i(E) = \left[P^i \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \Theta \right) \right] \in H_{\text{DR}}^{2i}(M, \mathbb{C}) \quad (11)$$

を i 次の Chern 類, $c(E) = \sum_i c_i(E)$ を全 Chern 類とよぶ. □

【定理 1.18 (Chern 類の基本性質)】 Chern 類は次の性質をもつ:

1. (自然性) 多様体間の任意のなめらかな写像を $f: M \rightarrow N$, N 上の複素ベクトルバンドルを $E \rightarrow N$, その f による引き戻しを $f^*E \rightarrow M$ とするとき, 常に

$$c_r(f^*E) = f^*c_r(E)$$

が成り立つ.

2. (Whitney 積公式) M 上の 2 つの複素ベクトルバンドル E, F に対して

$$c(E \oplus F) = c(E) \wedge c(F)$$

3. 階数 k の複素ベクトルバンドル $E \rightarrow M$ と複素直線バンドル $L \rightarrow M$ に対して,

$$c_1(E \otimes L) = c_1(E) + kc_1(L)$$

4. 複素ベクトルバンドル E の双対バンドルを E^* とするとき,

$$c_r(E^*) = (-1)^r c_r(E).$$

□

具体的表式 階数 p の複素ベクトルバンドル $E \rightarrow M$ に対し,

$$c_1(E) = \frac{i}{2\pi} \text{Tr}\Theta, \quad (12a)$$

$$c_2(E) = \frac{1}{8\pi^2} (\text{Tr}\Theta^2 - (\text{Tr}\Theta)^2), \quad (12b)$$

$$c_p(E) = e(E_{\mathbb{R}}). \quad (12c)$$

また,

$$\text{ch}(\Theta) = \text{Tr}e^{i\Theta/2\pi} = p + c_1(\Theta) + \cdots \quad (13)$$

を Chern 特性形式という.

1.4.2.1 具体例

【例 1.19 ($T(\mathbb{C}P^1)$)] $\mathbb{C}P^1$ の標準計量 ($[x : 1] \in \mathbb{C}P^1$)

$$ds^2 = \phi\bar{\phi}; \quad \phi = 2A \frac{dz}{|z|^2 + 1} \quad (14)$$

(本来の Fubini-Study 計量では $A = 1$) に対して,

$$d\phi = -\chi \wedge \phi, \quad \bar{\chi} = -\chi \quad (15)$$

より $U(1)$ 接続形式は

$$\chi = \frac{zd\bar{z} - \bar{z}dz}{|z|^2 + 1}. \quad (16)$$

よって, 曲率形式は

$$F = d\chi = \frac{2}{(|z|^2 + 1)^2} dz \wedge d\bar{z}. \quad (17)$$

Chern 類は

$$c_1 = i \frac{F}{2\pi} \Rightarrow \int_{\mathbb{C}P^1} c_1 = 2. \quad (18)$$

□

【例 1.20 ($K_{\mathbb{C}P^1}$: the canonical line bundle of $\mathbb{C}P^1$)] 1 形式 $\phi = \phi_1 dz$ に対して,

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{2\bar{z}}{1 + |z|^2} \quad (19)$$

より,

$$\nabla_z \phi_1 = \partial_z \phi_1 + \frac{2\bar{z}}{1+|z|^2} \phi_1, \quad \nabla_{\bar{z}} \phi_1 = \partial_{\bar{z}} \phi_1. \quad (20)$$

よって,

$$[\nabla_z, \nabla_{\bar{z}}] \phi = -\frac{2}{(1+|z|^2)^2} \phi \Rightarrow F = -\frac{2}{(1+|z|^2)^2} dz \wedge d\bar{z}. \quad (21)$$

これより, c_1 は

$$c_1 = \frac{1}{\pi} \frac{-idz \wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2} \Rightarrow \chi(K_{\mathbb{C}P^1}) = \int_{\mathbb{C}P^1} c_1 = -2. \quad (22)$$

□

【例 1.21 ($L^{-1}(\mathbb{C}P^1):\mathbb{C}P^1$ の tautological line bundle)】 Tautological line bundle は

$$L^{-1} = \{([Z_1, Z_2], (\lambda Z_1, \lambda Z_2)) \mid \lambda \in \mathbb{C}, (Z_1, Z_2) \in \mathbb{C}_*^2\} \subset \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2. \quad (23)$$

1. 局所座標系を

$$(z, \lambda) \mapsto ([z, 1], (\lambda z, \lambda)) \quad (24a)$$

$$(w, \sigma) \mapsto ([1, w], (\sigma, \sigma w)) \quad (24b)$$

とすると, 座標変換は

$$w = 1/z, \quad \lambda = \sigma w, \quad \sigma = \lambda z. \quad (25)$$

2. Hermitian fiber metric:

$$ds^2 = \begin{cases} \phi \bar{\phi} & ; \phi = \sqrt{1+|z|^2} d\lambda \\ \phi' \bar{\phi}' & ; \phi' = \sqrt{1+|w|^2} d\sigma. \end{cases} \quad (26)$$

3. 接続形式は, (z, λ) 座標系で

$$\nabla \phi = -\mathcal{A} \otimes \phi; \quad \bar{\mathcal{A}} = -\mathcal{A} \in A^1(\mathbb{C}P^1) \quad (27)$$

と表される. 正規直交基底の変換則は $\phi' = (z/|z|)\phi$ となるので, (w, σ) 座標系では,

$$\nabla \phi' = -\chi' \otimes \phi'; \quad \chi' = \chi + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{w} - \frac{d\bar{w}}{\bar{w}} \right) \quad (28)$$

となる. これより, $\chi = f(z)dz - \overline{f(z)}d\bar{z}$ と置くと, χ' が正則であるためには

$$w \rightarrow 0 : f\left(\frac{1}{w}\right) \frac{1}{w} \rightarrow \frac{1}{2} \Leftrightarrow z \rightarrow \infty : zf(z) \rightarrow \frac{1}{2}. \quad (29)$$

例えば, $f(z) = \frac{\bar{z}}{2(1+|z|^2)}$ はこの条件を満たす. よって,

$$\mathcal{A} = \frac{\bar{z}dz - zd\bar{z}}{2(1+|z|^2)} \quad (30)$$

4. Chern 類 : 接続形式は

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} = -\frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2} \quad (31)$$

となるので, c_1 は

$$c_1 = \frac{i}{2\pi} \mathcal{F} = -\frac{i}{2\pi} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}. \quad (32)$$

よって, Euler 数は

$$\chi(L^{-1}) = \int_{\mathbb{C}} -\frac{1}{\pi} \frac{dx \wedge dy}{(1+|z|^2)^2} = -1. \quad (33)$$

□

【定理 1.22 (CPⁿ の Chern 類)】 CPⁿ の複素接空間の全 Chern 類は

$$c(\mathbb{C}P^n) = (1 + \omega)^n$$

ここで, ω は $H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$ の生成元で, CPⁿ の超平面の Poincaré 双対. □

Proof. $[X] = [X_0, X_1, \dots, X_n]$ を CPⁿ の同次座標とする. CPⁿ の超平面直線バンドル H の X 上のファイバーの点は, 直線 $\mathbb{C}X (\subset \mathbb{C}^{n+1})$ 上の線形汎関数と対応するので, $H^{\oplus(n+1)}$ の断面を $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_n)$ とすると, 写像

$$H^{\oplus(n+1)} = \overbrace{H \oplus \dots \oplus H}^{n+1} \ni (X, \sigma) \mapsto \mathcal{E}(\sigma) = \sum_{i=0}^{n+1} \sigma_i(X) \partial / \partial X_i \in T'(\mathbb{C}P^n)$$

が定まる. この写像は全射で, 核が $\sigma_i(X) \propto X_i$ となるので, 射影空間に対する Euler 系列と呼ばれる完全系列

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow H^{\oplus(n+1)} \xrightarrow{\mathcal{E}} T'(\mathbb{C}P^n) \longrightarrow 0$$

が得られる. これより, $c(\mathbb{C})c(T'(\mathbb{C}P^n)) = c(H)^{n+1} = (1 + \omega)^{n+1}$ より題意の式が得られる. Q.E.D.

1.4.3 Pontrjagin 類

【定義 1.23 (Pontrjagin 類)】 E を多様体 M 上の向き付けられた k 次元実ベクトルバンドル, Ω^{ij} をその計量に関する線形接続の曲率形式とすると, E の Pontrjagin 類は

$$P(E) = \det \left(1 - \frac{\Omega}{2\pi} \right) = 1 + p_1(E) + \cdots + p_{[k/2]}(E) \quad (34)$$

ただし,

$$p_j(E) = (-1)^j c_{2j}(E \otimes \mathbb{C}) \in H^{4j}(M, \mathbb{Z}). \quad (35)$$

また, $k = 2m$ のとき,

$$p_m(E) = e(E)^2. \quad (36)$$

□

接続形式 Ω を

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \left[\begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ -x_1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & x_{2r} \\ -x_{2r} & 0 \end{pmatrix} \right] \quad (37)$$

と標準化すると,

$$p_1(E) = \sum_a x_a^2, \quad (38a)$$

$$p_2(E) = \sum_{ab} x_a^2 x_b^2 \quad (38b)$$

【定義 1.24 (A-roof 種数と Hirzebruch L 種数)】 接続 Ω の A-roof 種数を

$$\hat{A}(\Omega) = \prod_a \frac{x_a/2}{\sinh(x_a/2)} = 1 - \frac{p_1}{24} + \frac{1}{16} \left(\frac{7p_1^2}{360} - \frac{p_2}{90} \right) \cdots \quad (39)$$

で定義する. また, Hirzebruch L-多項式を

$$L(\Omega) = \prod_a \frac{x_a/2}{\tanh(x_a/2)} = 1 + \frac{p_1}{3} + \frac{1}{45} (7p_2 - p_1^2) \cdots \quad (40)$$

により定義する. □

1.5 指数定理

1.5.1 一般 Atiyah-Singer 指数定理

$2n$ 次元のスピンドル多様体のスピノールバンドルを \mathcal{S} , ゲージ群 G に関するベクトルバンドルを E とする. このとき, \mathcal{S} のスピノール接続 (R, ω) と E のゲージ場 (F, A) により, バンドル $\mathcal{S} \otimes E$ の接続が定義され, 対応して, Dirac 作用素

$$\mathcal{D} = \gamma^\mu D_\mu : \mathcal{S} \otimes E \rightarrow \mathcal{S} \otimes E \quad (41)$$

が定義される. このゼロモードの右巻き成分の数を n_+ , 左巻き成分の数を n_- とするとき,

$$n_+ - n_- = \int_M \left[\text{ch}(F) \hat{A}(R) \right]_{2n}. \quad (42)$$

1.6 曲率と位相

1.6.1 Books and Reviews

- Besse, A.L.: *Einstein Manifolds* (Springer, 1987).

1.6.2 非負 Ricci 曲率の多様体

【定理 1.25 (Myers の定理 [Myers SB (1935)])】 (M, g) が完備 Riemann 多様体で, その Ricci 曲率が $\text{Ric}(M) \geq k^2 g$ ($k > 0$) を満たすとする. このとき, M はコンパクトでその直径は $d(M) \leq \pi/k$ を満たす. さらに, M の基本群は有限群となる. □

【注 1.26】 Myers の定理は, Bishop の定理より直ちに得られる. □

【定理 1.27 (Bochner)】 コンパクト Riemann 多様体が Ricci 平坦なら, その Killing ベクトルおよび調和 1 形式は平行である. □

【定理 1.28 (Bochner の定理 [Bochner 1946])】 (M, g) をコンパクト Riemann 多様体とする. もし, M の Ricci 曲率が非負なら $\dim H^1(M, \mathbb{R}) = b_1 \leq \dim M$ で, その普遍被覆空間は $\mathbb{R}^{b_1} \times N$ に同相である. □

【定理 1.29 (Gallot-Gromov の定理 [Gallot S, Gromov M])】 M をコンパクトで連結な n 次元 Riemann 多様体とする. このとき, n と M の直径のみに依存した正の定数 ϵ が存在して, $\text{Ric}(M) \geq -\epsilon(M)^{2/n}$ なら $b_1(M) \leq n$ となる. □

【定義 1.30 (群の増大関数)】 G を有限生成群, \mathcal{H} をその有限な生成元の組とする. このとき, 任意の正整数 s に対し, \mathcal{H} の元およびその逆元を高々 s 個用いて作られる G の異なる元の数 $\gamma_{\mathcal{H}}(s)$ とおくと, $\gamma_{\mathcal{H}}$ を G の \mathcal{H} に関する増大関数という. □

【定理 1.31 (Milnor の定理)】 (M, g) を非負 Ricci 曲率の完備 Riemann 多様体とする. すると, M の基本群の任意の有限生成部分群に対して, 不等式 $\gamma_{\mathcal{H}}(s) \leq ks^n$ が成り立つ. ここで, n は M の次元, k は定数である. □

【定義 1.32 (線と射線)】 完備な Riemann 多様体において, 共役点対を持たない測地線 (半測地線) γ を線 (射線) という. □

【定理 1.33 (Cheeger-Gromoll の定理 [Cheeger J, Gromoll D (1971)])】

連結完備な Riemann 多様体 (M, g) が非負 Ricci 曲率をもてば, (M, g) は $E^q \times (N, g_1)$ と表される. ここで, (N, g_1) は線をもたない非負 Ricci 曲率の完備 Riemann 多様体である. □

【定理 1.34 (Cheeger-Gromoll の定理 [Cheeger J, Gromoll D(1971, 1972)])】 (M, g) がコンパクト連結な Riemann 多様体で非負の Ricci 曲率をもつとする. このとき,

- a) $\pi_1(M)$ の有限正規部分群 F が存在し, $\pi_1(M)/F$ は \mathbb{Z}^q の有限群により拡大となる.
- b) (M, g) の普遍被覆 Riemann 多様体は, Ricci 曲率が非負の単連結コンパクト Riemann 多様体 (\bar{M}, \bar{g}) と Euclid 空間 E^q の直積となる.
- c) (\bar{M}, \bar{g}) の有限等長変換部分群による商 (\hat{M}, \hat{g}) で, (M, g) の有限被覆 (M_1, g_1) が $\hat{M} \times T^q$ に微分同相で, 局所自明化が $(\hat{M}, \hat{g}) \times (T^q, g_0)$ に局所等長となるファイバーバンドル構造 $p : (M_1, g_1) \rightarrow (T^q, g_0)$ をもつものが存在する. ここで, (T^q, g_0) は平坦トーラスである.

□

1.6.3 山辺の問題

【問題 1.35 (山辺の問題)】 \mathcal{C} を n 次元多様体 M 上の Riemann 計量の共形類とすると, 汎関数

$$g \in \mathcal{C} \mapsto I(g) = \int_M R_s[g] d\mu_g / \left(\int_M d\mu_g \right)^{\frac{n-2}{n}} \quad (43)$$

を最小にする計量はあるか? (存在すれば $R_s[g] = \text{const}$). □

【定義 1.36 (山辺不変量)】 上記 $I(g)$ の下限値

$$Y(g, M) := \inf_{q \in \mathcal{C}[g]} \frac{\int_M R_s[q] d\mu_q}{\left(\int_M d\mu_q \right)^{\frac{n-2}{n}}} = \inf_{\phi \in C^\infty(M)} \frac{\int_M d\mu_q \left(4 \frac{n-1}{n-2} |D\phi|_q^2 + R_s[q] \phi^2 \right)}{\left(\int_M \phi^{2n/(n-2)} d\mu_q \right)^{(n-2)/n}} \quad (44)$$

を山辺不変量という. □

【定理 1.37 (J Lelong-Ferrand (1971), 小島守生 (1971))】 n 次元多様体 M の共形変換群が非コンパクトなら, M は標準的共形構造をもつ球面 S^n に共形的に微分同相である.

[< 岩波数学事典] _____ □

【定理 1.38 (Aujan T 1976)】

- i) 任意のコンパクト Riemann 多様体 (M, g) に対して, $Y(M, g) \leq Y(S^n, \text{can})$.
- ii) もし $Y(M, g) < Y(S^n, \text{can})$ ならば, g の共形類の中にスカラ曲率は一定値 $Y(M, g)$ で体積 1 の計量が存在する.
- iii) $n \geq 6$ で (M, g) が共形平坦でなければ, $Y(M, g) < Y(S^n, \text{can})$ が成り立つ. (十分条件)

_____ □

【定理 1.39 (山辺問題の解決 [R Schoen])】 \mathcal{C} が球面の標準的共形構造と一致する場合を除いて, $I(g)$ を最小にする計量が存在する.

[< 岩波数学事典] _____ □

【定理 1.40 (T Aubin (1998), AL Besse (1987))】

1. 3次元以上の多様体上には常に負の一定スカラ曲率をもつ Riemann 計量が存在する.
2. M 上に $R_s[g] \geq 0$ で $R_s[g] \neq 0$ となる計量 g が存在すれば, スカラ曲率が正の定数となる計量および至る所ゼロとなる計量が存在する.

[< 岩波数学事典, Besse AL 1987B] _____ □

【定理 1.41 (Kozan-Warner 1975)】 多様体 M 上の C^∞ 関数がある点で負の値を取るなら, 常にそれをスカラ曲率とする計量が存在する.

[< 岩波数学事典] _____ □

【注 1.42 (正のスカラ曲率を持たない多様体)】 次の多様体は, スカラ曲率が至るところ正となる計量を持たない:

- i) K^3 面. [Lichnerowicz 1963]

ii) トーラス [Gromov-Lawson 1980; Schoen-Yau 1979]

次の多様体は、スカラ曲率が非負となる計量を持たない:

i) トーラスの連結和. [Gromov-Lawson 1980; Schoen-Yau 1979]

□

1.6.4 スカラ曲率と位相

【定義 1.43 (山辺タイプ)】 n 次元コンパクト閉多様体 M に対して,

$$Y(M) = \sup_{[g]} Y(M, g) \quad (45)$$

を山辺定数という. この符号により, 多様体は (P) ($Y(M) > 0$), (Z) ($Y(M) = 0$), (N) ($Y(M) < 0$) に分類される. □

【定理 1.44 (J. Kazdan & F. Warner (1975), L. Bernard Bergery (1981))】

次元 $n \geq 3$ のコンパクト Riemann 多様体はつぎの 3 つのカテゴリ (山辺タイプ) に分類される:

- (P) M 上の任意のなめらかな関数をスカラ曲率としてもつ計量が存在する. ($Y(M) > 0$)
- (Z) M 上の関数は, 恒等的にゼロまたはある領域で負定値のとき, かつそのときのみ, ある計量のスカラ曲率となり, しかもスカラ曲率がゼロとなる計量は必ず Ricci 平坦である. ($Y(M) = 0$)
- (N) M 上の関数は, ある領域で負定値になるとき, かつその時のみ, ある計量のスカラ曲率となる. ($Y(M) < 0$).

□

【命題 1.45 (Dirac 作用素に対する Weitzenböck 公式)】 $\mathcal{D} = i\Gamma^\mu D_\mu$ を Riemann 多様体 M 上のスピノールバンドルに対する Dirac 作用素とする. このとき, \mathcal{D} および \mathcal{D}^2 は自己共役な楕円型作用素で

$$\mathcal{D}^2 = D^* D + \frac{1}{4}s$$

が成り立つ. ここで, s はスカラ曲率である. □

【定理 1.46 (Lichnerowicz の定理 [Lichnerowicz A (1963)])】 (M, g) をコンパクトなスピン多様体とする.

1. もしスカラ曲率が非負で恒等的にゼロでなければ, ゼロ以外に調和スピノールは存在しない. また, スカラ曲率が恒等的にゼロなら, すべての調和スピノールは平行となる.
2. $M \in (P)$ なら $\hat{A} = 0$.

□

【定理 1.47 (Hitchin の定理 [Hitchin N (1974)])】 $\hat{A} : \Omega_*^{\text{spin}} \rightarrow KO^{-*}(pt)$ を一般化された \hat{A} 種数とする.

1. もし M がコンパクトなスピン多様体で山辺タイプ (P) なら, $\hat{A}(M) = 0$ である.
2. 山辺タイプ (P) に属さない異種球面が存在する.

□

【例 1.48】

1. 4次元では $\hat{A}(M) = \frac{1}{16}\tau(M)$ となる. $K3$ 曲面はスピン多様体で $\hat{A}(M) = -1$ となるので, スカラ曲率が正の計量を許さない.
2. CP^2 はスピン多様体でないので, $\tau(CP^2) = 1$ であるがスカラ曲率正の計量をもつ.

□

【定理 1.49 (Schoen-Yau 1979; Gromov-Lawson 1980)】 $M \in (P)$ なら, M に余次元 3 以上の手術を施した多様体も (P) に属する. —□

【定理 1.50 (Gromov-Lawson の定理)】 [Gromov M, Lawson HB (1980)] M が次元 5 以上のコンパクト多様体とする.

1. M がスピン構造を持たないなら, $M \in (P)$.
2. M が単連結スピン多様体でタイプ (P) のスピン多様体とスピン同境なら, $M \in (P)$. また, M が単連結スピン多様体で $\hat{A}(M) = 0$ なら, 適当な数の連結和 $M\sharp \cdots \sharp M$ は (P) に属する.

□

【定理 1.51 (S Stolz 1992)】 M を 5 次元以上の単連結スピン多様体とする。このとき、 $M \in (P)$ となる必要十分条件は一般化された \hat{A} 種数 $(\alpha(M))$ がゼロとなることである。 □

【定理 1.52 (Schoen-Yau, Gromov-Lawson)】

1. $T^n \in (Z)$.
2. M が断面曲率 $K \leq 0$ となる計量を許容するなら、 $M \notin (P)$.
3. M が $K < 0$ となる計量を許容するなら、 $M \in (N)$.

□

1.6.5 測地球の体積と面積

【定義 1.53】 n 次元 Riemann 多様体 (M, g) の点 p を中心として測地的半径 t の球体を $B(p, t)$, その体積を $V(p, t) = \text{Vol}(B(p, t))$ と表す。また、点 p を中心とする指数写像 $\exp_p : T_p(M) \rightarrow M$ による標準体積要素の引き戻しを $\exp_p^*(\mu_g) = \theta(x, t)d\Omega_{n-1}(x)dt$ とおく。ここで、 $x \in U_p(M):T_p(M)$ である。このとき、

$$V(p, t) = \Omega_n t^n \left(1 - \frac{1}{6(n+2)} R(p)t^2 + o(t^2) \right) \quad (46)$$

および

$$\theta(x, t) = t^n \left(1 - \frac{1}{6} \text{Ricci}(x, x)t^2 + o(t^2) \right) \quad (47)$$

が成り立つ。 □

【定理 1.54 (Bishop の定理 [Bishop R (1963)])】 n 次元 Riemann 多様体 (M, g) の Ricci 曲率がある定数 k に対して $\text{Ricci}(g) \geq (n-1)kg$ を満たしているとする。このとき、勝手な点 p を中心とする測地球の単位立体角あたりの面積を $\theta(x, t)$, 断面曲率 k の定曲率空間の対応する量を $\theta_k(t)$ とすると、 $\theta(x, t)/\theta_k(t)$ は $\theta(x, t) > 0$ となる t の範囲で t の非増加関数である。特に、 $\theta(x, t) \leq \theta_k(t)$ が成り立つ。 □

【定理 1.55 (Gromov の定理)】 n 次元 Riemann 多様体 (M, g) の Ricci 曲率がある定数 k に対して $\text{Ricci}(g) \geq (n-1)kg$ を満たしているとする。このとき、勝手な点 p を中心とする測地球の体積を $V(p, t)$, 断面曲率 k の定曲率空間の対応する量を $V_k(t)$ とすると, $V(p, t)/V_k(t)$ は $t < \text{diam}(g)$ で t の非増加関数である。 □

【定理 1.56 (Cheeger-Golding 1997)】 n のみで決まる定数 $\delta(n) > 0$ が存在し, 非負 Ricci 曲率をもつ n 次元完備 Riemann 多様体 M 上で

$$V(x_0, r) \geq (1 - \delta(n))V_0(r), \quad \exists x_0 \in M, \quad \forall r > 0 \quad (48)$$

が成り立てば M は \mathbb{R}^n に微分同相である。

[J Cheeger, T Golding: J. Diff. Geom. 46, 406 (1997), “On the structure of space with Ricci curvature bounded below”]. □

1.6.6 単体的体積

【定義 1.57 (単体的体積)】 M を n 次元の向き付けられたコンパクト多様体, $[M]$ をその基本ホモロジー類とする。このとき

$$\|M\| := \inf_{c = \sum \lambda_i \sigma_i \in [M]} \sum_i |\lambda_i|$$

□

【命題 1.58】 コンパクト多様体の単体的体積はつぎの性質をもつ。

1. M が単連結なら, $\|M\| = 0$.
2. M から N への次数 d の写像が存在すれば, $\|M\| \geq |d|\|N\|$.
3. $\dim M = \dim N \geq 3$ なら,

$$\begin{aligned} \|M \sharp N\| &= \|M\| + \|N\|, \\ \|M \times N\| &\geq C\|M\|\|N\|. \end{aligned}$$

ここで, C は次元のみで決まる定数。

□

【定理 1.59 (Gromov の主不等式)】 (M, g) が条件 $R_{ij} \geq -(n-1)g_{ij}$ を満たすコンパクト n 次元多様体なら, $\text{Vol}(M, g) \geq C'\|M\|$ が成り立つ。ここで, C' は次元 n のみの関数である。 □

1.6.7 Sobolev 不等式

【定理 1.60 (Gagliardo-Nirenberg 不等式)】 n, p, q, r, α を

$$n \geq 1, \quad 1 \leq p, q, r \leq \infty, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (49a)$$

$$\frac{1}{p} = \alpha \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1-\alpha}{r} \quad (49b)$$

を満たす定数とする (ただし, $n \geq 2$ の場合は, $p \neq \infty$ ないし $q \neq n$). このとき, $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ に対するノルム $\| \cdot \|_p$ に関して次の不等式が成り立つ;

$$\|f\|_p \leq C(n, p, q, r) \|f\|_r^{1-\alpha} \|\nabla f\|_q^\alpha. \quad (50)$$

ここで, $C(n, p, q, r)$ は定数. この不等式で, 特に $\alpha = 1$ の場合を **Sobolev** の不等式と呼ぶ. また, $p = q = 2, r = 1, \alpha = 1 - \frac{2}{n+2}$ のとき, **Nash** の不等式という. □

【定理 1.61 (Ledoux 1999)】 非負 Ricci 曲率をもつ n 次元完備 Riemann 多様体上で,

$$1 \leq q < n, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n} \quad (51)$$

を満たす (p, q) に対して

$$\|f\|_p \leq C_0 \|\nabla f\|_q, \quad \forall f \in C_0^\infty(M) \quad (52)$$

が成り立てば, M は \mathbb{R}^n と等長である. ここで, C_0 は $M = \mathbb{R}^n$ の場合の最適値.

[M Ledoux: Comm. Anal. Geom. 7, 347 (1999), “On manifolds with non-negative Ricci curvature and Sobolev inequalities”] □

【定理 1.62 (Xia CY 2001)】 非負 Ricci 曲率をもつ n 次元完備 Riemann 多様体上で,

$$1 \leq q < n, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n} \quad (53)$$

を満たす適当な (p, q) に対して

$$\|f\|_p \leq C_1 \|\nabla f\|_q, \quad \forall f \in C_0^\infty(M) \quad (54)$$

が成り立てば, M は \mathbb{R}^n と微分同相である. ここで, C_0 を $M = \mathbb{R}^n$ の場合の最適値として, $C_1 > C_0$.

[CY Xia: Illinois J. Math. 45, 1253 (2001), “Complete manifolds with negative Ricci curvature and almost best Sobolev constant”] □

【定理 1.63 (Ruan-Chen 2005)】 M を非負 Ricci 曲率をもつ n 次元完備 Riemann 多様体とする. M 上で適当な定数 $C > 0$ と $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して

$$\|f\|_p \leq C \|f\|_r^{1-\alpha} \|\nabla f\|_q^\alpha, \quad \forall f \in C_0^\infty(M), \quad \frac{1}{p} = \alpha \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1-\alpha}{r} \quad (55)$$

が成り立てば, M は \mathbb{R}^n に微分同相である.

[Q Ruan, Z Chen: aXiv:math/0501009/math.DG, “General Sobolev inequality on Riemannian manifolds”] □

【定義 1.64 (Sobolev ノルムと Sobolev 空間)】

1. $f \in C^\infty(M)$, $1 \leq p < \infty$ および整数 $k \geq 0$ に対して, Sobolev ノルムを

$$\|f\|_{p,k} = \left[\int_M d\mu_g \sum_{0 \leq |j| \leq k} |D^j f|^p \right]^{1/p}, \quad (56)$$

により定義する.

2. さらに, このノルムによる $C^\infty(M)$ の完備化を **Sobolev 空間** $L_k^p(M)$ という.
3. $L_k^p(M)$ は, M 上の可測関数の同値類のうち, k 階までの微係数が $L^p(M)$ に属するものの全体と一致する.

(注) L_k^p の代わりに, しばしば $H_{p,k}$, W_k^p という記号が使われる.

□

【定理 1.65 (コンパクト閉 Riemann 多様体上の Sobolev 不等式と埋め込み定理)】 M を n 次元 C^∞ コンパクト閉 Riemann 多様体とし,

$$\delta(p, k) = k - \frac{n}{p} \quad (57)$$

とおく. このとき, $0 \leq l \leq k$ を満たす整数 k, l および $f \in L_k^p(M)$ に対して,

(a) p, q が

$$0 < \frac{1}{p} - \frac{k-l}{n} \leq \frac{1}{q} \quad (58)$$

を満たすとき, f に依存しない正定数 c が存在して

$$\|f\|_{q,l} \leq c\|f\|_{p,k}. \quad (59)$$

したがって, 埋め込み $L_k^p \hookrightarrow L_l^q$ は連続である. さらに, $l < k$ で $1/p - (k-l)/n < 1/q$ のとき, この埋め込みはコンパクト作用素となる.

- (b) $(k-l)-1 < n/p < k-l$ のとき, $\alpha = \delta(p,k) - l$ とおくと ($0 < \alpha < 1$), f に依存しない正定数 c が存在して,

$$\|f\|_{C^{\delta(p,k)}} = \|f\|_{l+\alpha} \leq c\|f\|_{p,k}. \quad (60)$$

これより, 埋め込み $L_k^p(M) \hookrightarrow C^{\delta(p,k)}(M)$ は連続であり, さらに $0 < \gamma < \delta(p,k)$ に対して, 埋め込み $L_k^p(M) \hookrightarrow C^\gamma(M)$ はコンパクトである.

□

【系 1.66】

- i) $f \in L_k^p(M)$ で $p > n \Rightarrow f \in C^{k-1}(M)$.
- ii) $f \in L_k^p(M)$ で $pk > n \Rightarrow f \in C^0(M)$.
- iii) $f \in L_1^2(M) \Rightarrow f \in L^{2n/(n-2)}(M)$ ($n \geq 3$) であり, 次に不等式を満たす定数 $A, B > 0$ が存在:

$$\|f\|_{L^{2n/(n-2)}} \leq A\|Df\|_{L^2} + B\|f\|_{L^2}. \quad (61)$$

□

1.6.8 2次元曲面

【定理 1.67 (Thurston 1980)】 任意の2次元面は完備な定曲率計量を許す. 曲率の符号は (開曲面の場合も含めて) Euler 数で決まる.

1. $\chi > 0$: $S^2, \mathbb{R}P^2$
2. $\chi = 0$: $\mathbb{R}^2, T^2, S^1 \times \mathbb{R}$, Klein bottle, Möbius strip.
3. $\chi < 0$: 他のすべての場合

□

1.6.9 3次元多様体

【定理 1.68 (Schoen and Yau)】 非コンパクト 3次元多様体が Ricci 曲率正の完備 Riemann 計量を持てば \mathbb{R}^3 と同相である。 □

【定理 1.69 (Milnor)】 Nil を三角行列

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の作る 3次元 Lie 群, K を $a, b, c \in \mathbb{Z}$ となるその部分群とする. このとき, Nil/K は S^1 上の T^2 バンドルとなり, $\pi_1(\text{Nil}/K)$ の増大関数は 4 次の多項式となる. したがって, Milnor の定理より, Nil/K は Ricci 曲率が非負となる Riemann 計量を許さない. □

1.6.10 4次元多様体

【定理 1.70 (Euler 数)】 4次元多様体 M の Euler 数はその Riemann 計量に関する曲率テンソルをもちいて

$$\chi(M) = \frac{1}{32\pi^2} \int_M d\mu_g \left[C_{ijkl} C^{ijkl} - 3\hat{R}_{ij} \hat{R}^{ij} + \frac{1}{6} R^2 \right]$$

と表される. ここで,

$$\hat{R}_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{4} R g_{ij}.$$

□

【定理 1.71 (符号数)】 4次元多様体 M の符号数 (signature) は, Weyl テンソルのカイラル分解 $W = W^+ + W^-$ を用いて

$$\tau(M) = \frac{1}{48\pi^2} \int_M d\mu_g (\|W^+\|^2 - \|W^-\|^2)$$

で与えられる. ここで,

$$\|W\|^2 := W_{ijkl} W^{ijkl}$$

である. □

【定理 1.72 (J. Thorpe)】 M を 4次元の向き付けられたコンパクト Einstein 多様体とする. このとき, その Euler 数 $\chi(M)$ と符号数 $\tau(M)$ は次の不等式を満たす:

$$\chi(M) \geq \frac{3}{2}|\tau(M)|.$$

□

【定理 1.73】 4次元コンパクト閉 Riemann 多様体は Ricci 平坦であるが平坦でなければ, $b_1(M) = b_3(M) = 0$. □

【定理 1.74 (N. Hitchin)】 M を向き付けられた 4次元コンパクト Einstein 多様体とする. もし, その Euler 数と符号数の間に

$$|\tau(M)| = \frac{2}{3}\chi(M)$$

の関係が成り立てば, M は Ricci 平坦であり, 平坦, K3 曲面, Enriques 曲面 ($K3/\mathbb{Z}_2$), Enriques 曲面の自由な反正則包含変換による商空間 ($K3/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$) のいずれかである. □

【定理 1.75 (K3 曲面)】 M を K3 曲面とホモトピー同値な 4次元多様体とする. このとき, M 上の計量 g に対する次の 3つの条件は同値である:

- i) g のスカラ曲率が非負.
- ii) g は Ricci 平坦.
- iii) (M, g) は hyperkähler.

□

【定理 1.76 (M. Gromov (1982))】 M を 4次元コンパクト多様体とする. M が Einstein 計量を持つなら,

$$\|M\| \leq 2592\pi^2\chi(M)$$

が成り立つ. □

1.7 等質空間

1.7.1 Books and Reviews

- Kobayashi S, Nomizu K: *Foundation of Differential Geometry II* (Interscience Pub., 1969).
- Besse, A.L.: *Einstein Manifolds* (Springer, 1987).

1.7.2 一般的性質

【定理 1.77 (完備性)】 等質 Riemann 空間は完備である。

[Kobayashi-Nomizu] _____ □

【定義 1.78 (Reductivity)】 G と K の Lie 代数を $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ とするとき, \mathfrak{g} の部分空間 \mathfrak{m} で,

i) $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}, \mathfrak{k} \cap \mathfrak{m} = 0.$

ii) $\text{ad}(K)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$

となるものが存在するとき, 等質空間 G/K は **reductive** であるという。

_____ □

【命題 1.79】 K が次のいずれかのとき, G/K は reductive である。

1. K がコンパクト.
2. K が連結で, 任意の $k \in K$ に対し $\text{ad}(k)$ が \mathfrak{g} で完全可約.
3. K が G の離散部分群.

[Kobayashi-Nomizu] _____ □

【例 1.80 (non-reductive homogeneous space)】 $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ の $\mathbb{R}_*^n = \mathbb{R}^n - \{0\}$ に対する作用の等方群を $H \cong \text{Euclid}(n-1)$ とする: $\mathbb{R}_*^n = \text{GL}(n)/H$. この等質空間は reductive でない. [Kobayashi-Nomizu] _____ □

【命題 1.81】 Reductive な等質空間 G/K において, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ とすると, \mathfrak{m} は G/K の点 $[K]$ における接空間 $T_{[K]}(G/K)$ と自然に同一視でき, K のその空間への線形等方表現は $\text{Ad}(K)$ の \mathfrak{m} への作用と対応する. □

【定理 1.82】 上記の Lie 代数の分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ のもとで, G の $M = G/K$ への作用に対して不変な Riemann 計量と \mathfrak{m} 上の $\text{Ad}_G(K)$ 不変な内積は 1 対 1 に対応する. [Kobayashi-Nomizu] □

【公式 1.83 (曲率公式)】 等質空間 $M = G/K$ に対して, G の左不変ベクトル場 (Lie 代数の元) X を $\exp(tX)$ の M への左作用から決まる無限小変換 X を同一視する. このとき,

$$[X, Y]_{\mathfrak{g}} = -[X, Y]$$

が成り立つ. また, X, Y, Z を Riemann 多様体 (M, g) の Killing ベクトルとすると,

$$2g(D_X Y, Z) = g([X, Y], Z) + g([X, Z], Y) + g(X, [Y, Z])$$

が成り立つ. これより, \mathfrak{g} を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ (\mathfrak{m} は $\text{Ad}_G(K)$ 不変) と分解し, G 不変計量 g に対して, \mathfrak{m} の内積を $(X, Y) = g_{[K]}(X, Y)$ により定義すると, 次の公式が成り立つ.

i) (接続係数) $X, Y \in \mathfrak{m}$ に対して,

$$(D_X Y)_{[K]} = -\frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}} + U(X, Y).$$

ここで, $U : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$ は, $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$ に対して

$$2(U(X, Y), Z) = ([Z, X]_{\mathfrak{m}}, Y) + (X, [Z, Y]_{\mathfrak{m}})$$

が成り立つことで定義される. ただし, $[X, Y]_{\mathfrak{m}}$ は $[X, Y]$ の分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ における \mathfrak{m} 成分.

ii) (Riemann 曲率) $X, Y \in \mathfrak{m}$ に対して,

$$\begin{aligned} g_{[K]}(R(X, Y)X, Y) &= \frac{3}{4}|[X, Y]_{\mathfrak{m}}|^2 + \frac{1}{2}([X, [X, Y]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{m}}, Y) \\ &\quad + \frac{1}{2}([Y, [Y, X]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{m}}, X) - |U(X, Y)|^2 + (U(X, X), U(Y, Y)). \end{aligned}$$

iii) (Ricci 曲率) X_i を \mathfrak{m} の正規直交基底とすると,

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, X) &= -\frac{1}{2} \sum_i |[X, X_i]_{\mathfrak{m}}|^2 - \frac{1}{2} \sum_i ([X, [X, X_i]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}}, X_i) \\ &\quad - \sum_i ([X, [X, X_i]_{\mathfrak{k}}]_{\mathfrak{m}}, X_i) + \frac{1}{4} \sum_{i,j} ([X_i, X_j]_{\mathfrak{m}}, X)^2 - ([Z, X]_{\mathfrak{m}}, X). \end{aligned}$$

ここで, $Z = \sum_i U(X_i, X_i)$. $B(X, Y)$ を \mathfrak{g} の Killing 形式とすると, この公式は次のように書き換えられる:

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, X) = & -\frac{1}{2} \sum_i |[X, X_i]_{\mathfrak{m}}|^2 - \frac{1}{2} B(X, X) \\ & + \frac{1}{4} \sum_{i,j} ([X_i, X_j]_{\mathfrak{m}}, X)^2 - ([Z, X]_{\mathfrak{m}}, X). \end{aligned}$$

iv) (スカラ曲率)

$$s = -\frac{1}{4} \sum_{i,j} |[X_i, X_j]_{\mathfrak{m}}|^2 - \frac{1}{2} \sum_i B(X_i, X_i) - |Z|^2.$$

□

1.7.3 例

【例 1.84 (球面に推移的に作用する変換群 [Montgomery D & Samelson H (1943), Borel A (1966, 1967)])】 n 次元球面に等長変換群として有効かつ推移的に作用する変換群の連結部分群はすべて $\text{SO}(n+1)$ の部分群であり, 表 1 で尽くされる. □

G	$\text{SO}(n)$	$\text{U}(n)$	$\text{SU}(n)$	$\text{Sp}(n)\text{Sp}(1)$	$\text{Sp}(n)\text{U}(1)$	$\text{Sp}(n)$
G/K	S^{n-1}	S^{2n-1}		S^{4n-1}		
K	$\text{SO}(n-1)$	$\text{U}(n-1)$	$\text{SU}(n-1)$	$\text{Sp}(n-1)\text{Sp}(1)$	$\text{Sp}(n-1)\text{U}(1)$	$\text{Sp}(n-1)$
moduli	0	1	1	1	2	6
G	G_2	$\text{Spin}(7)$	$\text{Spin}(9)$			
G/K	S^6	S^7	S^{15}			
K	$\text{SU}(3)$	G_2	$\text{Spin}(7)$			
moduli	0	0	1			

表 1: 球面に推移的に作用する等長変換群

【例 1.85 (射影空間に推移的に作用する変換群 [Oniščik AL (1963)])】
射影空間の有効かつ推移的な等長変換群による等質空間表示は次のものに
限られる。

$$\begin{aligned}\mathbb{R}P^n &= \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{O}(n), \\ \mathbb{C}P^n &= \mathrm{SU}(n+1)/S(\mathrm{U}(1)\mathrm{U}(n)), \\ \mathbb{C}P^{2n-1} &= \mathrm{Sp}(n)/\mathrm{Sp}(n-1)\mathrm{U}(1), \\ \mathbb{H}P^n &= \mathrm{Sp}(n+1)/\mathrm{Sp}(n)\mathrm{Sp}(1), \\ \mathbb{C}aP^2 &= F_4/\mathrm{Spin}(9).\end{aligned}$$

□

【例 1.86 (トーラスに推移的に作用する変換群 [Montgomery D & Samelson
H (1943)])】 トーラス T^n に有効かつ推移的に作用するコンパクト群
は T^n に限られる。 □

1.8 対称空間

1.8.1 教科書とレビュー

- Fomenko AT: *Differential Geometry and Topology* (Plenum Pub., 1987)(三村護訳, 微分幾何学とトポロジー (共立出版, 1996,1998))
- Besse AL: *Einstein Manifolds* (Springer-Verlag, 1987).
- Helgason S: *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces* (Academic Press, 1978)
- Kobayashi S, Nomizu K: *Foundations of Differential Geometry*, vol. 2 (Interscience, 1969)

1.8.2 対称 Riemann 空間

1.8.2.1 定義と一般的性質

【定義 1.87 (対称 Riemann 空間)】 連結な Riemann 多様体 (M, g) は, 任意の点 $p \in M$ において対合的等長変換 s_p で p を孤立不動点とするものが存在するとき, 対称 Riemann 空間という. □

【命題 1.88】 (M, g) を対称 Riemann 空間, s_p をその対合的等長変換とすると, s_p は p を通る測地線を反転する. すなわち, s_p の $T_p(M)$ における線形等方表現 s_p^* は $s_p^* = -\text{id}$ となる. 逆に, 任意の点 p に対して p を通る測地線を反転する等長変換 s_p が存在するなら, (M, g) は対称 Riemann 空間である. □

【命題 1.89 (等質性)】 対称 Riemann 空間は等質である. □

【定理 1.90 (Lie 群による特徴付け [Cartan E])]】

- (i) $M = G/K$ を対称空間, s を $[K] \in M$ での対合的等長変換, σ を $\sigma(f) = s \circ f \circ s^{-1}$ で定義される G の対合的自己同型, $G^\sigma = \{f \in G; \sigma(f) = f\}$, G_0^σ を G^σ の単位元を含む連結成分とする. このとき, $G^\sigma \supset K \subset G_0^\sigma$ が成り立つ.
- (ii) 逆に, G を Lie 群, K をコンパクト部分群, σ を G の対合的自己同型とする. もし, $G^\sigma \supset K \supset G_0^\sigma$ が成り立てば, G/K 上の任意の G 不変 Riemann 計量は対称となる.

□

【命題 1.91 (Lie 代数による特徴付け)】 σ を Lie 代数 \mathfrak{g} の対合的自己同型, \mathfrak{k} および \mathfrak{p} をその固有値 1 および -1 の固有空間とすると, 次の関係が成り立つ:

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

□

【命題 1.92 (曲率)】 $X, Y, Z \in \mathfrak{p}$ のとき, Riemann 対称空間 G/K の曲率は次式で与えられる:

$$R_{[K]}(X, Y)Z = -[[X, Y], Z],$$

$$\text{Ric}_{[K]}(X, Y) = -\text{tr}((\text{ad}X \text{ad}Y)|_{\mathfrak{p}}) = -\frac{1}{2}B(X, Y).$$

□

【定理 1.93 (Einstein 空間となるための条件)】 対称空間 (G, K, σ) が Einstein 空間となるための必要十分条件は, Killing 形式 B が \mathfrak{p} 上で恒等的にゼロないし定符号となることである. □

【定理 1.94 (対称 Riemann 空間となる Lie 群)】 Lie 群 G が両側不変な Riemann 計量 g をもつとき, (G, g) は対称 Riemann 空間となる. 特に, G がコンパクトなら対称 Riemann 空間の構造をもつ. さらに, G の 1 助変数部分群は単位元 e を通る測地線を与える. [From: Fomenko AT (1987)[Fom87]] □

【命題 1.95 (対称 Riemann 空間となる Lie 群の接続と曲率)】 Lie 群 G が両側不変な計量 g を持つとし, X, Y, Z, W を G の左不変ベクトル場とする. このとき次の関係式が成り立つ.

- 1) $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y].$
- 2) $g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]) = 0.$
- 3) $R(X, Y)Z = -\frac{1}{4}[[X, Y], Z].$
- 4) $R(X, Y, Z, W) = \frac{1}{4}g([X, Y], [Z, W]).$

特に, 断面曲率は常に非負である. [From: Fomenko AT (1987)[Fom87]]

□

【命題 1.96 (コンパクト Lie 群の等質空間として表される対称空間)】

G を単連結かつ連結なコンパクト Lie 群, σ を G の対合的自己同型とする. このとき, σ の不動点集合 H は G の閉部分群で, G/H は単連結となる. さらに, G の両側不変計量は G/H に Riemann 計量を誘導し, その計量に関して G/H は対称 Riemann 空間となる. [From: Fomenko AT (1987)[Fom87]]

□

1.8.2.2 分類

【定義 1.97 (既約対称空間)】 対称空間 (G, K, σ) は, K の \mathfrak{p} 上への随伴表現 $\text{Ad}_G(K)$ が既約であるとき, 既約であるという. _____□

【定理 1.98 (既約分解定理)】 任意の単連結対称 Riemann 空間は, Euclid 空間と有限個の既約対称 Riemann 空間の直積となる. _____□

【定理 1.99 (分類定理)】 単連結既約対称空間 G/K は次の 4 つに分類される.

i) (コンパクト型)

I 型: G が単連結コンパクト実単純 Lie 群の場合.

II 型: 単連結コンパクト実単純 Lie 群 H とその中心 Z を用いて, $G = (H \times H)/Z$, $K = H/Z$ と表される場合. ただし, H, Z は $H \times H$ の対角部分と同一視する.

ii) (非コンパクト型) 非コンパクトな既約対称空間は, 中心が自明な非コンパクト単純実 Lie 群 G とその極大コンパクト部分群 K を用いて G/K と表される. これらは, G のタイプに応じて次の 2 つに分類される.

III 型: G の複素化 $G^{\mathbb{C}}$ が複素単純 Lie 群となる場合.

IV 型: G 自体が複素 Lie 群の構造を持つ場合.

□

1.9 Einstein 空間

1.9.1 Books and Reviews

- Besse, A.L.: *Einstein Manifolds* (Springer, 1987).

1.9.2 存在

1. 5次元以上のコンパクト多様体に対して, Einstein 計量が存在するための条件もまた存在しない例も知られていない. [Besse AL (1987)]
2. 4次元コンパクト多様体に対しては, Einstein 計量が存在するために条件

$$\chi(M) \geq \frac{1}{2}|p_1(M)| = \frac{3}{2}|\tau(M)| \quad (62)$$

が満たされることが必要であることが知られている. ただし, この条件が十分条件であるかどうかは不明. [Besse AL (1987)]

1.9.3 一意性

1. 次元 $n \geq 4$ では, 一意的な Einstein 構造をもつ例は知られていない [Besse AL (1987)].
2. S^n 上では, 標準計量の近傍に Einstein 計量は存在せず, ピンチング因子 $3n/(7n-4)$ 以内 ($n=4$ では $1/4$ 以内) では Einstein 計量は一意的である.
3. コンパクト複素等質空間は一意的な Kähler-Einstein 計量をもつが [Matsushima Y], 非 Kähler の Einstein 計量や異なる複素構造に対応する Kähler-Einstein 計量を持つ可能性がある.
4. S^{4n+3} 上には任意の n に対して, 非標準的な一様 Einstein 計量が存在する [Jensen G].
5. T^4 上の Einstein 計量はすべて平坦, すなわち定曲率で, モジュライ空間の次元は 6.
6. K3 面上のすべての Einstein 計量は適当な複素構造に関して Kähler であり, モジュライ空間の次元は 57.

1.9.4 モジュライ空間 $\mathcal{E}(M)$

1. コンパクト多様体上では, Einstein 計量のモジュライ空間 $\mathcal{E}(M)$ の次元は局所有限である [Besse A (1987)].
2. $\mathcal{E}(M)$ は計量構造空間 \mathcal{M}/\mathcal{D} 内のなめらかな多様体の解析的 Hausdorff 部分集合である. [Koiso N]

1.9.4.1 一般論

Banach 多様体 X から Banach 空間 B へのなめらかな写像を F とする:

$$F : X \rightarrow B$$

このとき, $T_x X$ は Banach 空間となり, $dF_x : T_x X \rightarrow B$ は有界写像となる.

【定義 1.100 (形式的積分可能性)】 X はその接空間の開集合と同一視できるとする. この仮定のもとで, $x \in X$ の近傍での形式的ベキ級数

$$x(t) = x + tv_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} v_k$$

に対して,

$$F(x(t)) = F(x) + tF_x^1(v_1) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} F_x^k(v_1, \dots, v_k)$$

により, $F_x^k(v_1, \dots, v_k)$ ($k = 0, 1, \dots$) を定義する. このとき, $v_1 \in \text{Ker } F_x^1$ に対して, 適当な形式的ベキ級数 $x(t)$ が存在して, $F(x(t)) = 0$ となるとき, v_1 は形式的に積分可能であるという. □

【命題 1.101】

1. $F_x^k(v_1, \dots, v_k)$ は次の構造をもつ.

$$F_x^k(v_1, \dots, v_k) = F_x^1(v_k) + P_x^k(v_1, \dots, v_{k-1}).$$

ここで, P_x^k は多項式である.

2. $x \in X$ の近傍 U で, $\text{Im } F_y^1 \subset \text{Ker } C_y (y \in U)$ となる $T_y X$ から B への線形作用素 C_y が存在し, C_y は y になめらかに依存するとする. このとき,

$$F_x^j(v_1, \dots, v_j) = 0 \quad (0 \leq j \leq k)$$

を満たす v_1, \dots, v_k に対して,

$$C_x(P^{k+1}(v_1, \dots, v_k)) = 0$$

が成り立つ. したがって, $\text{Im } F_x^1 = \text{Ker } C_x$ が成り立てば,

$$F^{k+1}(v_1, \dots, v_{k+1}) = 0$$

を満たす v_{k+1} が存在する.

□

【定義 1.102 (障害空間)】 前命題において, $\text{Ker } F_x^1 / \text{Im } C_x$ を, 積分可能条件 C に従う方程式 $F(x) = 0$ の障害空間という. □

1.9.4.2 Einstein 構造の変形

【定義 1.103】 コンパクト Riemann 多様体 M に対して,

$$\mathcal{M} := \{M \text{ 上のなめらかな Riemann 計量の全体}\},$$

$$\mathcal{M}_1 = \{g \in \mathcal{M} \mid \int_M \mu_g = 1\},$$

$$S^2 M := \{M \text{ 上の 2 階対称共変テンソルのバンドル}\}$$

とおく. このとき, \mathcal{M} の接空間 $T_g \mathcal{M}$ は Hilbert 空間 $L^2(S^2 M, g)$, \mathcal{M}_1 の接空間 $T_g \mathcal{M}_1$ は $\int_M \mu_g \text{Tr}_g h = 1$ となる $h \in T_g \mathcal{M}$ の全体と一致する. □

【定義 1.104】 作用素 $\delta_g : S^2 M \rightarrow A^1 M$ およびその共役作用素 $\delta_g^* : A^1 M \rightarrow S^2 M$ を

$$(\delta h)_\mu = \nabla^\nu h_{\nu\mu},$$

$$(\delta^* v)_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu v_\nu + \nabla_\nu v_\mu)$$

により定義する.. □

【命題 1.105】

1. $\text{Im } \delta_g^*$ は $T_g(\mathcal{M}_1)$ の閉部分空間となり, 次の直和分解が成り立つ [Besse AL 1987] :

$$T_g\mathcal{M}_1 = \text{Im } (\delta_g^*) \oplus [T_g\mathcal{M}_1 \cap \text{Ker } \delta_g].$$

(注 : $\text{Im } \delta_g^*$ は, g における $\text{Diff}(M)$ 軌道の接空間である.)

2. $T_g\mathcal{M}_1 \cap \text{Ker } \delta_g$ は, つぎの性質をもつ \mathcal{M}_1 の実解析的部分多様体 \mathfrak{S}_g (スライス) の g における接空間となる (Slice Theorem [Ebin DG 1968]) :
- \mathfrak{S}_g は $\text{Isom}(M, g)$ の作用に対して不変で, $\phi \in \text{Diff}(M)$ に対して $\phi^*\mathfrak{S}_g \cap \mathfrak{S}_g \neq \emptyset$ なら, $\phi \in \text{Isom}(M, g)$.
 - 局所断面 $\chi : \text{Diff}(M)/\text{Isom}(M, g) \rightarrow \text{Diff}(M)$ が剰余類 I_g の近傍で存在し, それから誘導される局所写像 $\text{Diff}(M)/\text{Isom}(M, g) \times \mathfrak{S}_g \rightarrow \mathcal{M}_1$ が g の近傍で局所微分同相となる. 特に, 写像 $\text{Isom}(M, g) \setminus \mathfrak{S}_g \rightarrow \text{Diff}(M) \setminus \mathcal{M}_1$ は g の近傍の Riemann 構造への同相写像を与える.

□

【定義 1.106 (Einstein 構造の前モジュライ空間)】 g を M 上の Einstein 計量とする. \mathcal{M}_1 の g におけるスライス \mathfrak{S}_g に含まれる Einstein 計量の全体を, g の近傍における Einstein 構造の前モジュライ空間という. □

【注 1.107】 スカラ曲率 $S(g)$ がゼロないし負なら, $\text{Isom}_0(M, g)$ の前モジュライ空間への作用は自明である [Besse AL 1987]. したがって, モジュライ空間は g の近傍で orbifold となる. □

【定義 1.108 (Einstein 作用素)】 Einstein 作用素 $E : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{S}^2 M$ を

$$E(g) = \text{Ric}_g - \frac{1}{n} g \int_M \mu_g S_g$$

により定義する. ここで, n は多様体の次元, S_g はスカラ曲率である. このとき, E の線形化 $E'_g = E_g^1 : T_g\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{S}^2 M$ は次のように表される :

$$2E'_g(h) = D_g^* D_g h - 2\delta_g^* \delta_g h - D_g d(\text{Tr} h) - 2\mathring{R}_g h.$$

ここで, D_g は g に関する共変微分作用素, D_g^* はその形式的共役作用素, \mathring{R} は代数的線形作用素

$$(\mathring{R}h)_{\mu\nu} = -R_{\mu\alpha\nu\beta}h^{\alpha\beta}$$

である. _____□

【定義 1.109 (無限小 Einstein 変形)】 Einstein 計量 g に対して, 次の条件を満たす $h \in T_g\mathcal{M}_1$ を無限小 Einstein 変形といい, その全体を $\epsilon(g)$ で表す:

$$E'_g(h) = 0, \quad \delta_g h = 0, \quad \int_M \mu_g \text{Tr}_g h = 0.$$

_____□

【定理 1.110】 $h \in \mathcal{S}^2 M$ が無限小 Einstein 変形であるための必要十分条件は,

$$(D_g^* D_g - 2\mathring{R}_g)h = 0, \quad \delta_g h = 0, \quad \text{Tr}_g h = 0$$

で与えられる. 特に, $\epsilon(g)$ は有限次元である. _____□

【定理 1.111 (Koiso N 1980)】 g を M 上の Einstein 計量とする. このとき, スライス \mathfrak{S}_g は g を含み次の性質をもつ有限次元実解析的部分多様体 Z を含む:

- i) Z の g における接空間は $\epsilon(g)$ と一致する.
- ii) Z は g の近傍での前モジュライ空間を実解析的部分集合として含む.

さらに, $h \in \epsilon(g)$ を接ベクトルとする前モジュライ空間内のなめらかな曲線が存在するための必要十分条件は, h が形式的積分可能であることである. _____□

【注 1.112】 Einstein 作用素は縮約 Bianchi 恒等式 β_g を積分可能条件としてもつ. この条件に関する障害空間は,

$$\text{Ker } \beta_g = \text{Im } E'_g \oplus \epsilon(g).$$

より, $\epsilon(g)$ と同型となる. したがって, 決してゼロとならない. このため, 前モジュライ空間は Z の真部分集合となることがある. 例えば, 対称空間 $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^{2k}$ の対称計量 g_0 に対して, $\dim \epsilon(g_0) = 4(4k^2 - 1)$ となるが, $[g_0]$ は前モジュライ空間の孤立点となる. _____□

1.9.4.3 Einstein 空間の体積

【定理 1.113 (体積値分布の離散性)】 与えられた多様体 M 上の Einstein 構造のモジュライ空間は、局所弧状連結で、各連結成分の上で (体積=1 と規格化した) スカラ曲率は一定である。また、可能なスカラ曲率の値は高々可算個である。 □

【注 1.114 (モジュライ空間の連結性)】

1. S^{4n+3} ($n \geq 2$) 上の Einstein 構造のモジュライ空間は、少なくとも 2 つの連結成分をもつ。また、 S^{15} に対しては、連結成分の数は 3 以上である。
2. 曲率がゼロでない 3 次元定曲率空間の Einstein 構造は一意的である。3 次元および 4 次元局所平坦コンパクト空間のモジュライ空間は連結である。K3 面と微分同相な 4 次元コンパクト多様体の Einstein 構造のモジュライ空間は連結である。
3. $2m$ -次元 Kähler-Einstein 多様体 (M, J, g) の体積は、規格化条件 $\text{Ric} = \pm(2m-1)g$ のもとで、

$$\text{Vol}(g) = \left(\frac{2\pi}{2m-1} c_1(J) \right)^m$$

で与えられる。特に、 M が $\mathbb{C}P^{m+1}$ ないの次数 $d > m+1$ の超曲面と双正則であるとき、体積は

$$\text{Vol}(g) = d \left(2 \frac{d-m-2}{2m-1} \right)^m \text{Vol}(\mathbb{C}P^m).$$

4. 偶数次元定曲率空間の体積は Euler 特性数に比例し、(曲率で規格化された) その値の全体は離散的な閉集合となる。
5. 奇数次元定曲率空間の (曲率で規格化された) 体積は、正曲率なら、任意の小さい値を取りうる。一方、負曲率の場合は、4 次元以上では体積値の全体は離散的な閉集合となる。ただし、3 次元の場合は、有限な下限 ($\simeq 0.98$) に収束する集合となる。
6. 正曲率 Einstein 空間の体積は、Bishop の不等式より標準球面の体積以下となる。 □

1.9.4.4 Einstein 構造の剛性

【定義 1.115 (剛性)】 モジュライ空間の孤立点に対応する Einstein 構造は剛性をもつという。 _____ □

【定理 1.116 (Koiso N 1979)】 M 上の Einstein 計量 g に対して,

$$a_0 := \sup \left\{ \langle \mathring{R}h, h \rangle / \|h\|_2^2, h \in C^\infty(S_0^2 M) \right\}$$

とおくとき, 条件

$$a_0 < \max \left\{ -\frac{S(g)}{n}, \frac{S(g)}{2n} \right\}$$

が満たされるなら, 計量 g は無限小 Einstein 変形を持たない。 _____ □

【定理 1.117 (Bourguignon JP)】 n 次元 Einstein 計量 g の断面曲率の最大値を K_{\max} , 最小値を K_{\min} とするとき, 条件

$$K_{\min} > \frac{n-2}{3n} K_{\max}$$

が満たされれば, g に対応する Einstein 構造は剛性をもつ。 _____ □

【定理 1.118】 負の断面曲率をもつ Einstein 構造は 3 次元以上では剛性をもつ。 _____ □

【定理 1.119】 正曲率の定曲率空間に対応する Einstein 構造は剛性をもつ。 _____ □

【定理 1.120 (Koiso N 1979)】

1. 非コンパクトな局所対称 Einstein 空間は, 局所的に 2 次元因子を持たないなら, 剛性をもつ。
2. コンパクト既約対称 Einstein 空間は, 次のものを除いて剛性をもつ:
 - $SU(p+q)/S(U(p) \times U(q))$ ($p \geq q \geq 2$)
 - $SU(m)/SO(m)$
 - $SU(2m)/Sp(m)$
 - $SU(m)$ ($m \geq 3$)
 - E_6/F_4 .

_____ □

1.9.4.5 モジュライ空間の次元

【定理 1.121 (Gallot S 1983)】 直径 d の n 次元 Einstein 多様体 (M, g) が条件 $d^2 K_{\min} \geq k$ を満たせば, その無限小 Einstein 変形の次元 $\dim(\epsilon(g))$ は $\eta(n, k)$ 以下となる. ここで,

$$\eta(n, k) = Nf \left(\frac{2(n-1)\pi^2 - 2nk}{\Gamma(k)^2} \right); \quad N = \frac{n(n+1)}{2} - 1,$$

$$f(x) = \prod_{j=0}^{\infty} \left[1 + \frac{\alpha(n)\beta^j x^{1/2}}{(2\beta^j - 1)^{1/2}} \right]^{2/\beta^j},$$

$$\alpha(n) = \frac{2n^{(n-2)/2n}}{(n-2)^{1/2}} \left(\frac{\text{Vol}(S^{n-1})}{\text{Vol}(S^n)} \right)^{1/n} + 2^{1-1/n}.$$

ただし, $n \geq 3$ に対して $\beta = n/(n-2)$, $n = 2$ に対して $\beta = 100$. また,

$$\Gamma(\alpha) = \begin{cases} 2^{-1/n} H(\alpha) & \alpha \geq 0, \\ |\alpha|^{1/2n} \left[\int_0^{|\alpha|^{1/2}} \left(\frac{\cosh(t)}{H(\alpha)} + \frac{\sinh(t)}{n|\alpha|^{1/2}} \right)^{n-1} dt \right]^{-1/n} & \alpha < 0, \end{cases}$$

$$H(\alpha) = \begin{cases} \alpha^{1/2} \left(\int_0^{\alpha^{1/2/2}} \cos(t^{n-1}) dt \right)^{-1} & \alpha > 0, \\ 2 & \alpha = 0, \\ |\alpha|^{1/2} \left(\int_0^{|\alpha|^{1/2/2}} \cosh(t^{n-1}) dt \right)^{-1} & \alpha < 0 \end{cases}.$$

□

【定理 1.122 (Gallot S 1981, 1983)】 各次元 n に対して正の数 $\tilde{\alpha}(n)$ が存在して, 条件

$$(n-1)S(g) - n^2 K_{\min} \leq \tilde{\alpha}(n)d^2$$

(d は直径) を満たす Einstein 多様体 (M, g) の無限小 Einstein 変形の全体 $\epsilon(g)$ の次元は平坦なトーラスに対する値 $N = n(n+1)/2 - 1$ を超えない.

□

1.9.5 等質 Einstein 空間

【定理 1.123 (4次元等質 Einstein 空間 [Jensen GR (1969)])】 4次元等質 Einstein 空間は対称空間となる. □

【定義 1.124 (等方既約)] 等質空間 G/K (K はコンパクト) は, K の線形等方表現が既約であるとき, 等方既約 (isotropy-irreducible) という.

□

【定理 1.125 ([Wolf JA (1968)])] 等方既約な等質空間 G/K は, 定数倍を除いて一意的な G 不変計量をもち, その計量は Einstein となる. □

【定理 1.126 ([Besse AL (1987)])] コンパクトでない等方既約等質空間は対称空間である. □

【定理 1.127 ([Wolf JA (1968)])] K がコンパクト単純 Lie 群で中心が自明なら, 等質空間 $\text{SO}(\dim K)/\text{Ad}(K)$ は等方既約である. □

【定理 1.128 (正スカラ曲率の等質 Einstein 空間)] (M, g) がスカラ曲率正の等質 Einstein 空間とすると, M はコンパクトでその基本群は有限群である. また, 等長変換群 G はコンパクトで, 極大半単純部分群 G_0 と離散有限群の半直積となる. G_0 は M に推移的に作用する. [i Besse.AL1987B]

□

【注 1.129] 正スカラ曲率の等質 Einstein 空間の分類は未完である. [Besse.AL1987B] □

【定理 1.130 (負スカラ曲率の等質 Einstein 空間)] 負スカラ曲率の等質 Einstein 空間は非コンパクトである. □

【定理 1.131 (ユニモジュラー可解群 [Doti-Miatello I (1982)])] G をユニモジュラー可解群とする. このとき, G 上の左不変 Einstein 計量は平坦である. □

【定理 1.132 (Ricci 平坦な等質 Einstein 空間 [Alekseevskii DV & Kimelfeld BN (1975)])] Ricci 平坦な等質 Einstein 空間は平坦で, トーラスと Euclid 空間の積となる. □

Ricci 曲率	位相	細分			分類
正	コンパクト	強等方既約	既約対称空間	I 型	完
				II 型	完
			非対称空間		
		非強等方既約	標準	G :単純	完
				その他	未
非標準			未		
ゼロ	$E^p \times T^q$				未
負	非コンパクト	既約対称 \Leftrightarrow 等方既約			完
		非既約			未

表 2: 等質 Einstein 空間の分類

1.9.6 コンパクト等質 Kähler 多様体

【定理 1.133 (Lie 群の随伴表現に伴うコンパクト Kähler 多様体)】

G をコンパクト連結 Lie 群とし, G の Lie 代数 \mathfrak{g} への随伴表現が忠実であるとする. このとき, \mathfrak{g} における各 G 軌道 M に対し,

- i) M 上には標準的な G 不変複素構造 J および定数倍を除いて一意的な G 不変な Kähler-Einstein 計量が存在する. この Einstein 計量は正のスカラ曲率をもつ.
- ii) M 上の任意の Kähler-Einstein 計量はその等長変換群に関して一様で, 適当な G 不変 Kähler-Einstein 計量から複素構造の自己同型により得られる.

□

【定理 1.134 (分類)】

- i) 各コンパクト等質 Kähler 多様体は, 平坦な複素トーラスとコンパクト単連結等質 Kähler 多様体との Kähler 積となる.
- ii) すべてのコンパクト単連結等質 Kähler 多様体は, その等長変換群の随伴表現の軌道 (複素構造は上記の標準的なものを取る) と, 等質複素多様体として同型で, 有理代数多様体となる.

□

[目次へ](#)

【定理 1.135 (Kähler-Einstein 構造の一意性 [Matsushima Y (1972)])】
すべてのコンパクト単連結 Kähler 多様体は (定数倍を除いて) 一意的な Kähler-Einstein 構造をもつ. _____□

1.9.7 例

【例 1.136 (等質空間型)】 等質空間 $M = G/H$ において, 等方群 H の不動点 p_0 における接空間 $T_{p_0}(M)$ への作用が既約なら, M は (定数倍を除いて) 一意的な Einstein 計量をもつ [Cartan E (1929)]. 特に, すべての既約 Riemann 対称空間は一意的な Einstein 計量をもつ. ただし, H の $UT_{p_0}(M)$ への作用が推移的であることをさらに要求すると, M は階数 1 の対称空間に限られる. また, 局所平坦空間を除いて, コンパクト等質空間は決して Ricci 平坦とならない. _____□

【例 1.137 (コンパクト Kähler 多様体)】 コンパクト Kähler 多様体 M は, $c_1(M) = 0$ ならば一意的な Ricci 平坦計量をもつ [Calabi E (1955), Yau ST (1976)]. このタイプの Einstein 空間は 1987 年時点で知られている唯一の Ricci 平坦空間である. また, $c_1(M) < 0$ なら, 一意的な負 Ricci 曲率の Einstein 計量をもつ [Calabi E (1976), Aubin T (1976), Yau ST (1976)]. 例えば, $\mathbb{C}P^{m+1}$ 内の d 次の代数的超曲面の第 1 Chern 類は, $d = m + 2$ の時ゼロ, $d > m + 2$ のとき負となる. _____□

【例 1.138 (Don Page 構成法)】 $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ 上の Einstein 計量 [Page D (1979)]. この例は, L.Bérard-Bergery により一般化されたが, 応用例はほとんどなし. _____□

1.10 接触多様体

1.10.1 概接触多様体

【定義 1.139 (概接触構造)】 M を $(2n+1)$ -次元多様体とする. M 上のベクトル場 ξ , 1-形式 η および $(1,1)$ 型テンソル場 Φ が条件

$$\eta(\xi) = 1, \quad \Phi^2 = -1 + \xi \otimes \eta$$

を満たすとき, (ξ, η, Φ) を M 上の概接触構造 (almost contact structure), M を概接触多様体 (almost contact manifold) という. (Yano K, Kon M 1984[YK84]) _____□

【定理 1.140 (G 構造としての特徴付け)】 M を $(2n+1)$ -次元多様体とすると, M が概接触構造を持つことと, TM の構造群が $U(n)$ に簡約可能であることは同等である. 特に, 概接触多様体は常に向き付け可能である. (Yano K, Kon M 1984[YK84]) _____□

【定義 1.141 (概接触計量構造)】 M を概接触多様体, (ξ, η, Φ) をその概接触構造とする. このとき, 条件

$$g(X, \xi) = \eta(X), \quad g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

を満たす計量 g をもつとき, M を概接触計量多様体 (almost contact metric manifold), (ξ, η, Φ, g) を概接触計量構造 (almost contact metric structure) という. (Yano K, Kon M 1984[YK84]) _____□

【定理 1.142 (概接触計量構造の存在)】 奇数次元多様体上の概接触構造 (ξ, η, Φ) は常に概接触計量構造 (ξ, η, Φ, g) に拡張可能である. (Yano K, Kon M 1984[YK84]) _____□

【注 1.143 (概接触 (計量) 構造の幾何学的意味)】 $(2n+1)$ 次元の多様体 M において概接触構造 (ξ, η, Φ) を与えることは, 至る所ゼロでないベクトル場 ξ , ξ に横断的な TM の階数 $2n$ の部分ベクトルバンドル \mathcal{D} および \mathcal{D} 上の概複素構造 J を与えることと同等である. さらに, それに付随する概複素計量構造を与えることは, \mathcal{D} に J に関する Hermite 計量 g を与えることに対応する. (Boyer CP, Galicki K 2004[BG04]) _____□

1.10.2 接触多様体

【定義 1.144 (接触構造)】 M を $(2n+1)$ -次元多様体とする. M 上の 1-形式 η が至る所で条件

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

を満たすとき, η を接触形式 (contact form), 組 (M, η) を接触多様体 (contact manifold) という. また, 2つの接触形式 η, η' は, 適当な至る所ゼロとならない関数 f を用いて $\eta' = f\eta$ と表されるなら同値と定義するとき, M 上の接触形式の同値類を接触構造 (contact structure) という. (Yano K, Kon M 1984[YK84]; Boyer CP, Galicki K 2004[BG04]) □

【定理 1.145 (接触形式の局所的特徴付け)】 M を $(2n+1)$ -次元多様体とする. M 上の 1-形式 η が接触形式であるための必要十分条件は, 各点の近傍で局所座標系 $(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n; z)$ が存在して, η が

$$\eta = dz - \sum_i y^i dx^i$$

と書けることである. (Yano K, Kon M 1984[YK84]; Boyer CP, Galicki K 2004[BG04]) □

【定義 1.146 (Reeb ベクトル場)】 η を多様体 M 上の接触形式とすると, 条件

$$\eta(\xi) = 1, \quad i_\xi d\eta = 0$$

を満たすベクトル場 ξ が一意的に存在する. このベクトル場を **Reeb** ベクトル場という. (Boyer CP, Galicki K 2004[BG04]; Yano K, Kon M 1984[YK84]) □

【定義 1.147 (接触計量構造)】 M 上の概接触計量構造 (ξ, η, Φ, g) において,

$$d\eta(X, Y) = g(X, \Phi Y) \tag{63}$$

が成り立つとき, M を接触計量多様体 (contact metric manifold), 対応する概接触計量構造を接触計量構造 (contact metric structure) という. (Yano K, Kon M 1984[YK84]) □

【定理 1.148 (接触構造の随伴する接触計量構造)】 M を接触多様体とすると, その接触構造 η は常に接触計量構造 (ξ, η, Φ, g) に拡張可能である. (Yano K, Kon M 1984[YK84]) □

【例 1.149 (\mathbb{E}^{2n+1})】 $\mathbb{E}^{2n+1} \ni (x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; z)$ において, 1-形式

$$\eta = dz - \sum_i y_i dx_i$$

は, 接触形式となる. Reeb ベクトル場は $\xi = \partial_z$. また, Φ を

$$\Phi \partial / \partial x_j = -\partial / \partial y_j, \quad \Phi \partial / \partial y_j = -\partial / \partial x_j, \quad \Phi \partial / \partial z = 0$$

とおくと, (ξ, η, Φ, g) (g は \mathbb{E}^{2n+1} の標準計量) が随伴する接触計量構造を与える. □

【定理 1.150 (\mathbb{R}^{2n+2} の超曲面: Gray GW 1959)】 M を \mathbb{R}^{2n+2} 内の滑らかな超曲面とする. このとき, M の接平面が \mathbb{R}^{2n+2} の原点を通過しないなら, \mathbb{R}^{2n+2} の 1-形式

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n+1} (x^{2j-1} dx^{2j} - x^{2j} dx^{2j-1})$$

から M に誘導される 1-形式は接触形式となる. (Yano K, Kon M 1984[YK84]) □

【例 1.151 (接球束)】 \mathbb{R}^{2n} において, 1-形式

$$\beta = \sum_{j=1}^n x_j dx_{n+j}$$

を考える.

$$\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}_1^n \times \mathbb{R}_2^n \ni (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n})$$

とおくとき, \mathbb{R}^{2n} 内の超曲面 Σ に対し, $\Sigma \cap \mathbb{R}_1^n = \emptyset$, $\dim(\Sigma \cap \mathbb{R}_2^n) = n-1$ かつ $\Sigma \cap \mathbb{R}_2^n$ の \mathbb{R}_2^n における接平面が原点を通過しないならば, β は Σ に接触形式を誘導する.

これより, $(n+1)$ 次元 Riemann 多様体 M の余接束 $\pi : T^*M \rightarrow M$ において, M の座標近傍 U における局所座標系 (x^1, \dots, x^{n+1}) を用いて, $\pi^{-1}(U)$ の点を $p = \sum_i p_i dx^i$ と表すとき, T^*M 上の 1-形式

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n+1} p_i dq^i; \quad q^i = x^i \circ \pi$$

は, M の単位余接束 UM^* に接触形式を誘導する. このとき, 対応する Reeb ベクトル ξ は $p \in UM^*$ に対応する M のベクトル $p^i \partial / \partial x^i$ の p への水平リフト

$$\xi = p^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma_{ik}^j p_j p^k \frac{\partial}{\partial p_i}$$

で与えられる. (Yano K, Kon M 1984[YK84]) _____ □

1.10.3 佐々木多様体

【定義 1.152 (K-接触構造)】 接触計量構造 (ξ, η, Φ, g) は, ξ が g に関して Killing ベクトルとなるとき, **K-接触構造** (K-contact structure), 対応する多様体は **K-接触多様体** (K-contact manifold) という. (Yano K, Kon M 1984[YK84]) _____ □

【命題 1.153】 接触計量構造 (ξ, η, Φ, g) が K-接触となるための必要十分条件は,

$$\nabla_X \xi = -\Phi X$$

が成り立つことである. (Yano K, Kon M 1984[YK84]) _____ □

【定理 1.154 (K-接触構造の幾何学的特徴付け)】 奇数次元 Riemann 多様体が K-接触構造をもつためには, 次の 2 条件が成り立つことが必要十分である:

- 1) 長さ 1 の Killing ベクトル場 ξ が存在する.
- 2) ξ を含む 2 次元面に関する断面曲率が常に 1 となる.

(Yano K, Kon M 1984[YK84]) _____ □

【定義 1.155 (概接触構造の正規性)】 M を概接触構造 (ξ, η, Φ) をもつ $(2n+1)$ 次元多様体とする. このとき, 積多様体 $M \times \mathbb{R}$ には,

$$J(X, f\partial_t) = (\Phi X - f\xi, \eta(X)\partial_t)$$

により, 自然に概複素構造 J が定義される. この概複素構造が積分可能, すなわち

$$N_J(X, Y) := J^2[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] = 0$$

が成り立つとき, 概接触構造は正規 (normal) であるという. (Yano K, Kon M 1984[YK84]) _____ □

【定義 1.156 (佐々木構造)】 正規な概接触計量構造をもつ多様体を佐々木多様体 (Sasakian manifold), 対応する構造を佐々木構造 (Sasakian structure) という. (Yano K, Kon M 1984[YK84]) _____□

【定理 1.157 (幾何学的特徴付け)】 奇数次元 Riemann 多様体 (M, g) に関する次の条件は同等である :

- 1) M は佐々木構造 (ξ, η, Φ, g) をもつ.
- 2) M は次の条件を満たす概接触計量構造 (ξ, η, Φ, g) をもつ :

$$(\nabla_X \Phi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X.$$

- 3) M は次の条件を満たす単位 Killing ベクトル ξ をもつ :

$$R(X, \xi)Y = -g(X, Y)\xi + \eta(Y)X.$$

- 4) M 上の錐 $(\mathcal{C}(M), \bar{g}) = (\mathbb{R}_+ \times M, dr^2 + r^2g)$ が Kähler 多様体となる.
- (Yano K, Kon M 1984[YK84]; Boyer CP, Galicki K 2004[BG04]) _____□

[目次へ](#)

1.11 スペクトル幾何学

1.11.1 レビュー

- Craioveanu M, Puta M and Rassias T M: *Old and New Aspects in Spectral Geometry*, (Kluwer Academic Pub., 2001)

1.12 正エネルギー定理

1.12.1 Overview

- 4次元

2020 正質量定理および正エネルギー定理の調和関数を用いた新しい証明. [Hirsch S, Kazahas D, Khuri M: arXiv:2002.01534(mathDG); Hirsch S, Miao P, Tsang T-Y: arXiv: 2009.02959]

- 高次元

2004 漸近的 $E^n \times CY$ 型 Riemann 空間に対する正質量定理の証明. [Dai X[?]]

1985 $M_4 \times K$ 上での PET. [Taub A:Lett. Math. Phys. 9:243(1985); Moreschi O, Sparling G: J. Math. Phys. 27:2402 (1986)]

1.12.2 ADM 質量正値性

Schoen & Yau (1979,1981)[?, ?, ?]

時間反転対称な系の初期値問題に対する ADM 質量の正値性定理.

Dai (2004)[?]

漸近的に Euclidean 空間と Calabi-Yau 多様体の積となる Riemann 空間に対する正質量定理の証明.

【定義 1.158 (ADM 質量)】 n 次元 Riemann 多様体 (M, g) が, コンパクト多様体 M_0 および $M_\infty \approx \mathbb{R}^n - D^n$ の和 $M = M_0 \cup M_\infty$ となっているとする. このとき, 適当な AF 座標系のもとで, $r \rightarrow \infty$ で

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(r^{-\tau}), \quad \partial_k g_{ij} = O(r^{-\tau-1}), \quad \partial_k \partial_l g_{ij} = O(r^{-\tau-2}) \quad (64)$$

となっているとき, (M, g) は位数 τ で漸近的に平坦という. 特に, $\tau > (n-2)/2$ ($n \geq 2$) のとき,

$$m(g) := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) * dx_j \quad (65)$$

は AF 座標の取り方によらず, ADM 質量と呼ばれる. _____□

【定理 1.159 (ADM 質量の正值性 [Schoen & Yau(1979,1981)])】
 (M^n, g) を $n \geq 3$ で位数 $\tau > (n - 2)/2$ で漸近的に平坦なスピン多様体とする. このとき, スカラ曲率 $R \geq 0$ なら ADM 質量 $m(g)$ は非負で, $m(g) = 0$ なら M は Euclid 空間と一致する. _____□

【定理 1.160 (漸近的 $E^n \times X$ 型空間に対する正質量定理 [Dai (2004)(2004)])】
 (M, g) が完備なスピン多様体で, コンパクト多様体 M_0 と $M_\infty \cong (\mathbb{R}^k - D^k) \times X$ (X は Calabi-Yau 多様体ないし $\text{Sp}(m) \cdot \text{Sp}(1)$ 以外の特殊ホロノミーをもつ多様体) により $M = M_0 \cup M_\infty$ と表されるとする. さらに, 計量 g は M_∞ 上で条件

$$\begin{aligned} g &= \overset{\circ}{g} + h, \quad \overset{\circ}{g} = g_{E^k} + g_X; \\ h &= O(r^{-\tau}), \quad \overset{\circ}{\nabla} h = O(r^{-\tau-1}), \quad \overset{\circ}{\nabla} \overset{\circ}{\nabla} h = O(r^{-\tau-2}) \end{aligned}$$

を満たすとする. ただし, 位数 $\tau > (k - 2)/2$ ($k \geq 3$). このとき,

$$m(g) := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{4\omega_k \text{vol}(X)} \int_{S_r \times X} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{aa}) * dx_j \wedge d \text{vol}(X)$$

により質量を定義すると, M のスカラ曲率が非負なら $m(g) \geq 0$ である. さらに $m(g) = 0$ なら $M = E^n \times X$ である. _____□

2 Sheaf

Last update: 2011/7/18

2.1 基本定義

【定義 2.1 (Presheaf)】

1. 位相空間 X の各開集合 U にアーベル群 (可換環, 加群) $\mathcal{P}(U) = \Gamma(U, \mathcal{P})$ が, また, 開集合の組 $V \subset U$ に対して準同型 $r_{VU} : \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(V)$ が対応していて, 条件

- i) $W \subset V \subset U$ に対して常に $r_{WV}r_{VU} = r_{WU}$.

- ii) $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$.

が成り立つとき, $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(U), r_{VU}\}$ を X 上のアーベル群 (可換環, 加群) の前層という. すなわち, 前層とは空間 X の開集合族の作る圏から各タイプの代数的圏への関手である.

2. 位相空間 X 上の 2 つの前層 $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(U), r_{VU}\}, \mathcal{Q} = \{\mathcal{Q}(U), s_{VU}\}$ に対して, 各開集合 U ごとに準同型 $f(U) : \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{Q}(U)$ が対応していて $f(V)r_{VU} = s_{VU}f(U)$ が成立するとき, $f = \{f(U)\}$ を前層の射 (準同型) といい, $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ と表す. すなわち, 前層の射とは, 前層に関手と見なしたときの自然変換である.
3. 空間 X 上の前層を \mathcal{P} とするとき, X の各点 x に対してその上のストーク \mathcal{P}_x を次のように定義する:

$$\mathcal{P}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{P}(U). \quad (66)$$

□

【定義 2.2 (Sheaf)】

1. 空間 X 上の前層 \mathcal{F} が, 任意の開集合 U とその開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha; \alpha \in A\}$ に対して次の条件を満たすとき層という:
 - i) $\{x_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)\}$ が $V = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ に対して $r_{VU_\alpha}(x_\alpha) = r_{VU_\beta}(x_\beta)$ を満たすとき, $x \in \mathcal{F}(U)$ が存在して $x_\alpha = r_{U_\alpha U}(x)$ となる.

ii) $x \in \mathcal{F}(U)$ がすべての α について $r_{U_\alpha U}(x) = 0$ を満たすなら $x = 0$.

2. 空間 X 上の前層 \mathcal{P} に対して, 層 \mathcal{F} と射 $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$ が存在して, 任意の層 \mathcal{G} と射 $g: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$ に対して $kf = g$ となる射 $k: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が一意的に存在するとき, \mathcal{F} を \mathcal{P} に伴う層ないし層化といい, $\mathcal{F} = \mathcal{P}_a$ と表す.

□

【命題 2.3 (層化の存在)】 任意の前層 \mathcal{P} に対してその層化 \mathcal{F} が一意的に存在し, \mathcal{P} が層の時は自分自身と同型となる.

空間 X 上の前層 \mathcal{P} の層化は具体的に次のように構成される. まず, $x \in X$ 上のストークを \mathcal{P}_x として, 集合 \mathcal{F}_0 をストークの直和

$$\mathcal{F}_0 = \coprod_{x \in X} \mathcal{P}_x$$

とする. つぎに, X の各開集合 U と $a \in \mathcal{P}(U)$ に対し, \mathcal{F}_0 の部分集合 $V(U, a)$ を

$$V(U, a) = \{a_x \mid x \in U\}$$

により定義し, $V(U, a)$ の全体を基本近傍系とする位相を \mathcal{F}_0 に導入する. このようにして得られる位相空間を \mathcal{F} とし, X の各開集合に対して $\mathcal{F}(U)$ を \mathcal{F} の連続な局所断面 $s: U \rightarrow \mathcal{F} (s(x) \in \mathcal{P}_x)$ の全体として定義すると \mathcal{F} が \mathcal{P} の層化を与える. □

【定義 2.4】

1. 層の射 $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ は, 各点のストークの射 $f_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ が単射 (全射, 同型) のとき, 単射 (全射, 同型) であるという.
2. 層の系列 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ は, 各点のストークの射の系列が完全であるとき, 完全系列という.

□

【定義 2.5】

1. 層の射 $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対してその完全系列への拡張

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0 \quad (67)$$

が存在する. \mathcal{K} を f の核, \mathcal{C} を f の余核という.

2. 層 \mathcal{F} に対して, $\mathcal{K}(U) \subset \mathcal{F}(U)$, $r_{VU}^{\mathcal{K}} = r_{VU}^{\mathcal{F}}$ となる層 \mathcal{K} を \mathcal{F} の部分層という.
3. \mathcal{K} を \mathcal{F} の部分層とすると, 包含写像 $j: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{F}$ の余核を \mathcal{F} の \mathcal{K} による商層といい, \mathcal{F}/\mathcal{K} と表す.

□

【定義 2.6 (順像と逆像)】 $f: X \rightarrow Y$ を位相空間の連続写像とする.

1. $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(U), r_{UU'})$ を X 上の前層とする. このとき,

$$f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V)), \quad \rho_{VV'} = r_{f^{-1}(V)f^{-1}(V')}$$

により定義される \mathcal{Y} 上の前層 $f_*\mathcal{F} = (f_*\mathcal{F}(V), \rho_{VV'})$ を \mathcal{F} の f による順像という. \mathcal{F} が層の時, $f_*\mathcal{F}$ も層となる.

2. $\mathcal{G} = (\mathcal{G}(V), \rho_{VV'})$ を Y 上の層とする. このとき,

$$f^*\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{f(U) \subset V} \mathcal{G}(V)$$

および対応する制限写像から定義される X 上の前層の層化 $f^*\mathcal{G}$ を \mathcal{G} の f による逆像という. このとき, $(f^*\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{f(x)}$ ($\forall x \in X$) が成り立つ.

□

【命題 2.7】 位相空間 X 上の層 \mathcal{F} , 位相空間 Y 上の層 \mathcal{G} および連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して,

$$\mathrm{Hom}_X(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

□

【定義 2.8 (環付空間)】

1. 位相空間 X とその上の単位元をもつ可換環の層 \mathcal{A} の組 (X, \mathcal{A}) を環付空間という.
2. 環付空間 (X, \mathcal{A}) から環付空間 (Y, \mathcal{B}) への射を, 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ および可換環層の準同型 $\phi: \mathcal{B} \rightarrow f_*\mathcal{A}$ の組 (f, ϕ) により定義する.

3. ストークが常に局所環となる環付空間を局所環付空間といい、記号 (X, \mathcal{O}_X) で表す. 局所環付空間の射 $(f, \phi) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ には常に, $(\phi^\sharp)_x : (f^* \mathcal{O}_Y)_x = \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ が局所環の準同型, すなわち, $(\phi^\sharp)_x(m_{Y, f(x)}) \subset m_{X, x}$ となることを要求する.

□

【注 2.9】 単位元をもつ可換環 R が唯一の極大イデアル \mathfrak{m} をもつとき, R を局所環とよぶ. □

【例 2.10 (多様体上の様々な層)】

1. なめらかな多様体 M 上の層 $C^\infty, C^*, \mathcal{A}^p, \mathcal{Z}^p, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ を次のように定義する :

C^∞ : $C^\infty(U) = U$ 上の滑らかな関数の全体.

C^* : $C^*(U) = U$ 上に零点を持たないなめらかな関数の乗法群.

\mathcal{A}^p : $\mathcal{A}^p(U) = U$ 上のなめらかな p 形式の全体.

\mathcal{Z}^p : $\mathcal{Z}^p(U) = U$ 上のなめらかな閉 p 形式の全体.

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$: $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とおくととき, $R(U) = U$ 上の局所的に定数となる R に値をもつ関数の全体.

2. M を複素多様体, V をその解析的部分集合, $E \rightarrow M$ を正則ベクトルバンドルとするととき, M 上の層 $\mathcal{O}, \mathcal{O}^*, \Omega^p, \mathcal{A}^{p,q}, \mathcal{Z}_\partial^{p,q}, \mathcal{I}_V, \mathcal{O}(E), \mathcal{A}^{p,q}(E)$ を次のように定義する :

\mathcal{O} : $\mathcal{O}(U) = U$ 上の正則関数の全体.

\mathcal{O}^* : $\mathcal{O}^*(U) = U$ 上のゼロとならない正則関数全体の作る乗法群.

Ω^p : $\Omega^p(U) = U$ 上の正則 p 形式全体.

$\mathcal{A}^{p,q}$: $\mathcal{A}^{p,q}(U) = U$ 上のなめらかな (p, q) 型微分形式の全体.

$\mathcal{Z}_\partial^{p,q}$: $\mathcal{Z}_\partial^{p,q}(U) = U$ 上のなめらかな $\bar{\partial}$ -閉 (p, q) 型微分形式の全体.

\mathcal{I}_V : $\mathcal{I}_V(U) = V \cap U$ 上でゼロとなる U 上の正則関数の全体.

$\mathcal{O}(E)$: $\mathcal{O}(E)(U) = E$ の U 上での正則断面の全体.

$\mathcal{A}^{p,q}(E)$: $\mathcal{A}^{p,q}(E)(U) = E$ に値を取る U 上のなめらかな (p, q) 型微分形式の全体.

□

2.2 加群層

2.2.1 定義と基本的性質

【定義 2.11 (加群層)】

1. \mathcal{R} と \mathcal{F} を空間 X 上の可換環およびアーベル群の層とする. $\mathcal{F}(U)$ に $\mathcal{R}(U)$ -加群の構造が与えられていて, $v \in \mathcal{F}(U)$, $a \in \mathcal{R}(U)$ に対して $r_{VU}^{\mathcal{F}}(av) = r_{VU}^{\mathcal{R}}(a)r_{VU}^{\mathcal{F}}(v)$ が成り立つとき, \mathcal{F} を \mathcal{R} -加群層という.
2. $\Phi = (f, \phi) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ を環付空間の射とする. X 上の \mathcal{A} 加群層 \mathcal{F} に対して, Y 上の $f_*\mathcal{A}$ 加群層 $f_*\mathcal{F}$ は, 準同型 $\phi : \mathcal{B} \rightarrow f_*\mathcal{A}$ により \mathcal{B} 加群層と見なすことができる. この Y 上の \mathcal{B} 加群層を \mathcal{F} の Φ による順像といい, $\Phi_*\mathcal{F}$ と表す.
3. 同様に, Y 上の \mathcal{B} 加群層 \mathcal{G} に対し, X 上の $f^*\mathcal{B}$ 加群層 $f^*\mathcal{G}$ と準同型 $\phi^\sharp : f^*\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ から X 上の \mathcal{A} 加群層を $\Phi^*\mathcal{G} = \mathcal{A} \otimes_{f^*\mathcal{B}} f^*\mathcal{G}$ により構成することができる. これを \mathcal{G} の Φ による逆像という.

□

【定義 2.12 (有限型加群層)】 (X, \mathcal{O}_X) を環付空間, \mathcal{F} を \mathcal{O}_X 加群層とする.

- i) \mathcal{F} が有限型 (有限生成) であるとは, 任意の点 $x \in X$ に対して, その適当な開近傍 U において U 上の $\mathcal{O}_X(U)$ 加群層の全射 $(\mathcal{O}_X|_U)^r \rightarrow \mathcal{F}|_U$ が存在することである. これは, $\mathcal{F}(U)$ の元 s_1, \dots, s_r が存在し, 任意の点 $y \in U$ で $\mathcal{F}_y = \sum_{i=1}^r (\mathcal{O}_X)_y (s_i)_y$ と表されることと同等である.
- ii) \mathcal{F} が有限表現をもつとは, 任意の点 $x \in X$ に対して, その適当な開近傍 U において, U 上の $\mathcal{O}_X(U)$ 加群層の完全列 $(\mathcal{O}_X|_U)^m \rightarrow (\mathcal{O}_X|_U)^n \rightarrow \mathcal{F}|_U \rightarrow 0$ が存在することである.
- iii) \mathcal{F} が局所自由であるとは, 任意の $x \in X$ に対し, x の開近傍 U と正整数 n が存在して, $\mathcal{F}|_U \cong (\mathcal{O}_X|_U)^n$ となることである.

□

【命題 2.13 (有限型加群層の台)】 環付空間 (X, \mathcal{O}_X) において, 有限型 \mathcal{O}_X -加群層 \mathcal{F} の台 $\text{Supp}(\mathcal{F})$ は X の閉集合である. \square

【定義 2.14 (準接続層, 接続層)】 \mathcal{O}_X 加群層 \mathcal{F} に対し,

- 1) \mathcal{F} が準接続であるとは, 必ずしも有限集合でない集合 I と J が存在し, 任意の点 x においてその適当な開近傍 U に対して, 次の \mathcal{O}_X 加群層の完全系列が成り立つことである:

$$(\mathcal{O}_X|_U)^{(J)} \rightarrow (\mathcal{O}_X|_U)^{(I)} \rightarrow \mathcal{F}|_U \rightarrow 0.$$

- 2) \mathcal{F} が接続であるとは, 次の 2 条件が満たされることを意味する:

- i) \mathcal{F} が有限生成である.
 ii) 任意の開集合 $U \subset X$ において, 任意の自然数 r と任意の射 $\alpha : (\mathcal{O}_X|_U)^r \rightarrow \mathcal{F}|_U$ に対して, $\ker \alpha$ が常に有限生成である.

\square

【命題 2.15 (接続性の伝播)】 環付空間 (X, \mathcal{O}_X) 上の \mathcal{O}_X -加群層について次の命題が成り立つ.

- 1) 接続層の部分層は, 有限型なら接続である.
 2) 完全列 $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ のどれか 2 つが接続なら残りの一つも接続である.
 3) 接続層 \mathcal{F}, \mathcal{G} の間の射 $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対し, $\text{Ker } \alpha$ と $\text{Coker } \alpha$ は共に接続である.
 4) \mathcal{F}, \mathcal{G} が接続層なら, $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ と $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ も接続層である.

\square

【命題 2.16 (接続的環付空間)】 環付空間 (X, \mathcal{O}_X) において, \mathcal{O}_X 自身が \mathcal{O}_X -加群層として接続なら, 任意の有限表現をもつ \mathcal{O}_X -加群層は接続である. \square

2.2.2 解析空間の接続層

【定理 2.17 (Oka K, Cartan H, Serr JP)】 解析空間および代数多様体の構造層は接続である。 □

【命題 2.18 (接続層の自由層分解)】 n 次元複素多様体上での任意の接続層 \mathcal{F} に対し、各点の適当な近傍で、局所的に次の完全系列が成り立つ：

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^{(k_n)} \rightarrow \mathcal{O}^{(k_{n-1})} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{O}^{(k_0)} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

□

【系 2.19 (接続層のコホモロジー)】 複素多様体上の接続層 \mathcal{F} のコホモロジー層に対して

$$\mathcal{H}^q(\mathcal{F}) = 0 \ (q > 0) \Leftrightarrow H^q(U, \mathcal{F}|_U) = 0 \ (q > 0) \ \forall U : \text{open set}$$

□

【定義 2.20 (イデアル層)】 構造層 \mathcal{O} の有限生成部分層 \mathcal{I} をイデアル層という。 □

【命題 2.21 (解析的空間)】 接続な構造層 \mathcal{O} のイデアル層 \mathcal{I} は常に接続であり、完全列

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}/\mathcal{I} \longrightarrow 0$$

より、 \mathcal{O}/\mathcal{I} も接続層となる。

特に、複素多様体 M において、 \mathcal{O}/\mathcal{I} の台

$$Z = \text{supp}(\mathcal{O}/\mathcal{I}) \equiv \{z \in M \mid \mathcal{I}_z \neq \mathcal{O}_z\}$$

は、局所的に $I = \{f_1, \dots, f_m\}$ とするとき、解析的部分集合

$$\{z \in M \mid f_1(z) = \dots = f_m(z) = 0\}$$

と一致する。 □

【定義 2.22 ($\text{Ext}_\mathcal{O}^k, \text{Tor}_k^\mathcal{O}$)】 接続層 \mathcal{F}, \mathcal{G} に対して、 $\text{Ext}_{\mathcal{O}(U)}^k(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$, $\text{Tor}_k^{\mathcal{O}(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$ より、層 $\text{Ext}_\mathcal{O}^k, \text{Tor}_k^\mathcal{O}$ が定義され、次の性質をもつ：

1. $\mathbf{Ext}_{\mathcal{O}}^k(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \cong \mathbf{Ext}_{\mathcal{O}_x}^k(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$, $\mathbf{Tor}_k^{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \cong \mathbf{Tor}_k^{\mathcal{O}_x}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$.
2. $\mathbf{Ext}_{\mathcal{O}}^0(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \cong \mathbf{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $\mathbf{Tor}_0^{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \cong \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}$.
3. Ext および Tor に対する長完全系列と同じ完全系列が成り立つ・
4. $\mathbf{Ext}_{\mathcal{O}}^*(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ と $\mathbf{Tor}_*^{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ は接続層となる.

□

【定理 2.23 (接続層のコホモロジー)】 M を複素多様体, \mathcal{F} をその上の接続層とすると, $H^*(M, \mathcal{F})$ は有限次元ベクトル空間となる. □

【定理 2.24 (接続層のコホモロジー消滅定理)】 L をコンパクト代数多様体 $M(\subset \mathbb{C}P^N)$ 上の正の直線束, その断面の層を $\mathcal{L} = \mathcal{O}(L)$, \mathcal{F} を接続層, $\mathcal{F}(k) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^k$ とする. このとき, 次が成立する:

- A. 任意の $k > k_0$ と $x \in M$ に対して, 高々 (L) に k 次の極をもつ \mathcal{F} の大域的切断 $H^0(M, \mathcal{F}(k))$ は, \mathcal{O}_x 加群 $\mathcal{F}(k)_x$ を生成する. すなわち, m_x を \mathcal{O}_x の極大イデアルとして,

$$H^0(M, \mathcal{F}(k)) \longrightarrow \mathcal{F}(k)_x / m_x \mathcal{F}(k) \longrightarrow 0$$

- B. 任意の $k > k_0, q > 0$ に対して, $H^q(M, \mathcal{F}(k)) = 0$.

□

【定理 2.25 (M. Nöther の AF+BG 定理)】 $\mathbb{C}P^2$ の同次座標系を $X = [X_0, X_1, X_2]$ として, $F[X], G[X], H[X]$ をそれぞれ m, n, d 次の同次多項式とする. $F[X] = 0$ および $G[X] = 0$ が定める曲線を C, D とするとき, 同次多項式 $A[X], B[X]$ が存在して, $H = AF + BG$ と表されるための必要十分条件は, 各交点 $P \in C \cap D$ の適当な開近傍 U において, F, G, H のアフィン座標表示を f, g, h とするとき, $h \in \{f, g\} \subset \mathcal{O}(U)$ となることである. □

2.3 Cohomology

出典

- 宮西政宜著 「代数幾何学」(裳華房, 1990)

2.3.1 層係数コホモロジー

【定義 2.26 (入射的分解)】

1. \mathcal{F} を空間 X 上の \mathcal{R} -加群層とする. 任意の \mathcal{R} -加群層の射 $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ と $g: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}$ に対して, \mathcal{R} -加群層の射 $k: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{I}$ が存在して $g = kf$ となるとき, \mathcal{I} を入射的 \mathcal{R} -加群層という.
2. \mathcal{R} -加群層 \mathcal{F} に対して, 入射的 \mathcal{R} -加群層 \mathcal{I}_j からなる完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\eta} \mathcal{I}^0 \xrightarrow{\Delta^0} \mathcal{I}^1 \xrightarrow{\Delta^1} \dots \xrightarrow{\Delta^{n-1}} \mathcal{I}^n \xrightarrow{\Delta^n} \dots \quad (68)$$

を \mathcal{F} の入射的分解という.

□

【定義 2.27 (層係数コホモロジー)】 空間 X 上の \mathcal{R} -加群層 \mathcal{F} の入射的分解 $\{\mathcal{I}^n, \Delta^n\}$ に関手 $\Gamma(X, *)$ を施して得られる複体

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}^0) \xrightarrow{\delta^0} \Gamma(X, \mathcal{I}^1) \xrightarrow{\delta^1} \dots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \Gamma(X, \mathcal{I}^n) \xrightarrow{\delta^n} \dots \quad (69)$$

のコホモロジーを \mathcal{F} を係数とする X のコホモロジーといい, $H^*(X, \mathcal{F})$ と表す. □

【定義 2.28 (加群層に対するコホモロジー理論)】 (X, \mathcal{A}) を環付空間, U を X の開集合として, 任意の \mathcal{A} 加群層 \mathcal{F} に $\Gamma(U, \mathcal{A})$ 加群 $K^n(U, \mathcal{F})$ を対応させる関手の族 $\{K^n(U, \cdot)\}_{n \geq 0}$ が与えられ次の条件を満たすとき, 関手の族 $\{K^n(U, \cdot)\}_{n \geq 0}$ を環付空間 (X, \mathcal{A}) 上のコホモロジー理論という:

- 1) $K^n(U, \cdot)$ は, X 上の \mathcal{A} 加群層の圏から $\Gamma(U, \mathcal{A})$ 加群の層への単位射を保つ共変関手である.
- 2) $K^0(U, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$ で, \mathcal{F} が移入的 \mathcal{A} 加群層なら $K^n(U, \mathcal{F}) = 0 (n > 0)$ である.

3) \mathcal{A} 加群層の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0$$

に対し, $\Gamma(U, \mathcal{A})$ 準同型 $\delta^n : K^n(U, \mathcal{F}_3) \rightarrow K^{n+1}(U, \mathcal{F}_1)$ が存在し次の完全系列をつくる:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K^0(U, \mathcal{F}_1) & \xrightarrow{\alpha^0} & K^0(U, \mathcal{F}_2) & \xrightarrow{\beta^0} & K^0(U, \mathcal{F}_3) \xrightarrow{\delta^0} K^1(U, \mathcal{F}_1) \\ & & \xrightarrow{\alpha^1} & K^1(U, \mathcal{F}_2) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow K^n(U, \mathcal{F}_1) \xrightarrow{\alpha^n} K^n(U, \mathcal{F}_2) \\ & & \xrightarrow{\beta^n} & K^n(U, \mathcal{F}_3) & \xrightarrow{\delta^n} & K^{n+1}(U, \mathcal{F}_1) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

ここで, $\alpha^n = K^n(U, \alpha), \beta^n = K^n(U, \beta)$ である. さらに, 短完全列の間の準同型

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 & \longrightarrow & \mathcal{F}_2 & \longrightarrow & \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0 \\ & & a \downarrow & & b \downarrow & & c \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'_1 & \longrightarrow & \mathcal{F}'_2 & \longrightarrow & \mathcal{F}'_3 \longrightarrow 0 \end{array}$$

に対して, 図式

$$\begin{array}{ccc} K^n(U, \mathcal{F}_3) & \xrightarrow{\delta^n} & K^{n+1}(U, \mathcal{F}_1) \\ c^n \downarrow & & a^{n+1} \downarrow \\ K^n(U, \mathcal{F}'_3) & \xrightarrow{\delta'^n} & K^{n+1}(U, \mathcal{F}'_1) \end{array}$$

が可換となる. ここで, $c^n = K^n(U, c), a^{n+1} = K^{n+1}(U, a)$ である.

□

【定理 2.29 (de Rham 型定理)】 空間 X 上の層 \mathcal{F} が次の層完全列により分解されたとする:

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{R}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{R}^1 \xrightarrow{\delta^1} \cdots \quad (70)$$

このとき, 層に対する完全性条件を満たすコホモロジー $H^*(X, \cdot)$ に対して,

- i) ある $p \geq 0$ に対して $H^q(X, \mathcal{R}^{p-q}) = 0 (q = 1, \dots, p)$ が成り立てば, 単射

$$0 \rightarrow H^{p+1}(\Gamma(\mathcal{R}^*)) \rightarrow H^{p+1}(X, \mathcal{F}) \quad (p \geq 0). \quad (71)$$

が存在する.

ii) i) の条件に加えてさらに $H^q(X, \mathcal{R}^{p-q+1}) = 0 (q = 1, \dots, p+1)$ が成り立てば, 同型

$$H^{p+1}(\Gamma(\mathcal{R}^*)) \cong H^{p+1}(X, \mathcal{F}) \quad (72)$$

が成り立つ.

□

【定義 2.30 (散布層)】 X 上の層 \mathcal{F} に対し, 任意の開集合 U について $p_{UX} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ が全射であるとき, \mathcal{F} を散布層という. □

【定義 2.31 (散布分解)】 X 上の \mathcal{A} 加群層 \mathcal{F} に対して, 散布的 \mathcal{A} 加群層の列 $\mathcal{R}^n (n = 0, 1, \dots)$ からなる系列

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{R}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{R}^1 \xrightarrow{d^1} \dots \mathcal{R}^n \xrightarrow{d^n} \dots$$

が存在して完全系列となるとき, \mathcal{F} の散布的分解という. □

【定理 2.32】 X 上の \mathcal{A} 加群層 \mathcal{F} の散布的分解を

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{R}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{R}^1 \xrightarrow{d^1} \dots \mathcal{R}^n \xrightarrow{d^n} \dots$$

とする.

1. この散布的分解から得られる複体

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{R}^0) \xrightarrow{d^0} \Gamma(X, \mathcal{R}^1) \xrightarrow{d^1} \dots \Gamma(X, \mathcal{R}^n) \xrightarrow{d^n} \dots$$

のコホモロジー $\tilde{H}^n(X, \mathcal{F})$ は, 散布的分解の取り方に依存せず, 環付空間 (X, \mathcal{A}) 上の完全なコホモロジー関手を与える.

2. 入射的分解は散布的分解である. したがって, $\tilde{H}^n(X, \mathcal{F}) = H^n(X, \mathcal{F})$ が成り立つ.

□

2.3.2 Čeck コホモロジー

【定義 2.33 (Čeck コホモロジー)】 環付空間 (X, \mathcal{A}) 上の \mathcal{A} 加群層を \mathcal{F} とする.

1) $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ を X の開被覆とし, \mathfrak{U} から定義される Čeck n 単体 $s = (i_0, \dots, i_n) \in I^{n+1}$ に対して, $U_s = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n}$ とおく. $\prod_{s \in I^{n+1}} \mathcal{F}(U_s)$ の元 $\alpha = (\alpha(s))_{s \in I^{n+1}}$ が次の 2 条件を満たすとき, α を \mathcal{F} 係数の Čeck n コチェインという:

- i) $s = (i_0, \dots, i_n)$ に対して, $U_s = \emptyset$ または $i_j = i_k (\exists j, k, j \neq k)$ ならば $\alpha(s) = 0$.
- ii) σ を $(0, 1, \dots, n)$ の任意の置換として, $\sigma(s) = (i_{\sigma(0)}, \dots, i_{\sigma(n)})$ とおくと, $\alpha(\sigma(s)) = \text{sign}(\sigma)\alpha(s)$.

このように定義されたコチェインの全体は $\Gamma(X, \mathcal{A})$ 加群 $C^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ となる. さらに, $\Gamma(X, \mathcal{A})$ 準同型 $d^n : C^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ を

$$(d^n \alpha)(t) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \alpha(t_j)|_{U_t}$$

により定義する. ここで, $t_j = (i_0, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_{n+2})$ である. このとき, $(C^*(\mathfrak{U}, \mathcal{F}), d)$ は $\Gamma(X, \mathcal{A})$ 加群のコチェイン複体となる. さらに, \mathcal{A} 加群層の準同型 $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対して, $\alpha \in C^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ として $(f^n \alpha)(s) = f(U_s)(\alpha(s))$ により $\Gamma(X, \mathcal{A})$ 準同型 $f^n : C^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^n(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ を定義すると, X 上の \mathcal{A} 加群層の圏から $\Gamma(X, \mathcal{A})$ 加群コチェイン複体の圏への共変関手 $C^*(\mathfrak{U}, \cdot)$ が得られる. この関手とコホモロジー関手を結合して得られる, X 上の \mathcal{A} 加群層の圏から $\Gamma(X, \mathcal{A})$ 加群の圏への共変関手を $H^n(\mathfrak{U}, \cdot)$ と表す.

2) X 上の \mathcal{A} 加群層を \mathcal{F} とするとき, X の開被覆全体は細分について擬有向集合となり, $H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ はこの擬有向集合について帰納系となる. そこでその帰納的極限を $\check{H}^n(X, \mathcal{F})$ と表し, X の n 次 Čeck コホモロジー群という:

$$\check{H}^n(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

□

【命題 2.34 (散布層のチェックコホモロジー)】 X 上の \mathcal{A} 加群層 \mathcal{F} が散布層ならば, X の任意の開被覆 \mathfrak{U} に対して, $H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ ($n > 0$). 特に, $\check{H}^n(X, \mathcal{F}) = 0$ ($n > 0$). □

【定理 2.35 (Leray の定理)】 環付空間 (X, \mathcal{A}) 上の \mathcal{A} 加群層 \mathcal{F} と X の開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ について, 次の事柄が成り立つ:

- 1) $\forall n > 0, \forall m \geq 0, \forall s = (i_0, \dots, i_m) \in I^{m+1}$ について \mathcal{F} の移入的分解を用いたコホモロジー $H^n(U_s, \mathcal{F}) = 0$ となれば, $H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong H^n(X, \mathcal{F})$ ($n \geq 0$).
- 2) X の任意の開被覆に対して 1) の条件を満たすその細分がとれるならば, $\check{H}^n(X, \mathcal{F}) \cong H^n(X, \mathcal{F})$ ($n \geq 0$).

【定理 2.36】 X がパラコンパクトならば, Čeck コホモロジーは完全性をもつコホモロジー関手となる. したがって, 任意の \mathcal{A} 加群層 \mathcal{F} について, $\check{H}^n(X, \mathcal{F}) \cong H^n(X, \mathcal{F})$ ($n \geq 0$) が成り立つ. □

2.3.3 高次順像

【定義 2.37 (高次順像)】 $\{\mathcal{F}^n, \Delta^n\}$ を空間 X 上の \mathcal{A} -加群層 \mathcal{F} の入射的分解とする. 環付き空間の射 $\Phi = (f, \phi) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ が与えられると, Y 上の \mathcal{B} -加群層の複体

$$0 \rightarrow f_*\mathcal{F}^0 \xrightarrow{f_*\Delta^0} f_*\mathcal{F}^1 \xrightarrow{f_*\Delta^1} \dots \xrightarrow{f_*\Delta^{n-1}} f_*\mathcal{F}^n \xrightarrow{f_*\Delta^n} \dots \quad (73)$$

が得られる. この複体から定義される \mathcal{B} -加群層

$$R^n f_*\mathcal{F} = \text{Ker } f_*\Delta^n / \text{Im } f_*\Delta^{n-1} \quad (74)$$

を \mathcal{F} の n 次の高次順像という. これは, $U \subset Y$ に対して $H^n(f^{-1}(U), \mathcal{F}|_{f^{-1}(U)})$ を対応させて得られる前層の層化と一致する. □

3 Complex Manifolds

Last update: 2023 年 5 月 3 日

3.1 Complex Structure

3.1.1 \mathbb{C}^n の開集合からの正則写像

【定理 3.1 (逆関数定理)】 U, V を \mathbb{C}^n の開集合, $0 \in U$ とする. 正則写像 $f: U \rightarrow V$ に対して, $J(f) \equiv (\partial f_i / \partial z_j)$ が $z = 0$ で非特異とすると, f は $z = 0$ 近傍で 1 対 1 写像で, f^{-1} も $f(0)$ において正則となる. \square

【定理 3.2 (陰関数定理)】 $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}_{n,0}$ が条件

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_h}(0) \right)_{1 \leq i, j \leq k} \neq 0$$

を満たすとき, \mathbb{C}^{n-k} の原点 0 の近傍で関数 $w_1, \dots, w_k \in \mathcal{O}_{n-k,0}$ がそんざいして

$$f_1(z) = \dots = f_k(z) = 0 \Leftrightarrow z_i = w_k(z_{k+1}, \dots, z_n), \quad 1 \leq i \leq k$$

が成り立つ. \square

3.1.2 複素多様体

【定義 3.3 (複素構造)】

1. 連結 Hausdorff 空間 \mathcal{M} に対して, その開被覆 $\{\mathcal{U}_j\}$ と各 \mathcal{U}_j から \mathbb{C}^n の中への同相写像 ϕ_j が与えられ,

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \rightarrow \phi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \quad (3.1.1)$$

が正則写像であるとき, $\{\mathcal{U}_j, \phi_j\}$ は \mathcal{M} 上の局所複素座標系という.

2. \mathcal{M} 上の 2 つの局所複素座標系 $\{\mathcal{U}_j, \phi_j\}, \{\mathcal{V}_k, \psi_k\}$ は, $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{V}_k \neq \emptyset$ となる任意の j, k に対して $\psi_k \circ \phi_j^{-1}$ が双正則写像となるとき, 正則同値であるという.

3. 連結 Hausdorff 空間上の局所複素座標系の正則同値類を複素構造, 複素構造 X が定義されている連結 Hausdorff 空間を複素多様体といい, 同じ記号 X で表す.

□

【定義 3.4 (正則写像)】

1. 2つの複素多様体 X, Y の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ は, それぞれの局所複素座標系 $\{U_j, \phi_j\}, \{V_k, \psi_k\}$ に対して, $\psi_k \circ f \circ \phi_j^{-1}$ が正則写像となるときの正則であるという.
2. 正則写像 f が逆写像をもちそれも正則となるときの双正則であるという. 特に, 2つの複素多様体の間に双正則な同相写像が存在するとき, それらは双正則同値であるという.

□

【定義 3.5 (解析的集合と部分多様体)】

1. S を複素多様体 X^n の閉部分集合とする. S の各点 p に対して, p の開近傍 $\mathcal{U}(p)$ とその上で定義された正則関数の組 f_p^1, \dots, f_p^ν が存在して

$$S \cap \mathcal{U}(p) = \{q \in U(p) \mid f_p^1(q) = \dots = f_p^\nu(q) = 0\} \quad (3.1.2)$$

が成り立つとき, S を X^n の解析的部分集合, f_p^1, \dots, f_p^ν をその p における局所方程式という.

2. 解析的部分集合 S の点 p に対して, p における局所複素座標系を (z^1, \dots, z^n) とするとき, p の近傍で

$$\text{rank} \frac{\partial(f^1, \dots, f^\nu)}{\partial(z^1, \dots, z^n)} = \nu \quad (3.1.3)$$

となる局所方程式 f^1, \dots, f^ν が存在するとき, S は p でなめらかであるといい, $n - \nu$ を S の p における次元という.

3. 解析的部分集合 S が点 p においてなめらかでないとき, p を S の特異点という.
4. 複素多様体の特異点を持たない解析的部分集合を部分多様体という.

□

【命題 3.6 (特異点集合の次元)】 複素多様体 M の解析的部分集合 V の特異点集合 V_s は, V と異なる解析的部分集合に含まれる. □

【定義 3.7 (既約な解析的部分集合)】 複素多様体 M の解析的部分集合 V が, 2つの解析的部分集合の和として表されないとき, V は既約であるという. □

【命題 3.8】 解析的部分集合 V が既約であるための必要十分条件は, その正則部分 V^* が既約であることである. □

3.1.3 概複素多様体

【定義 3.9 (概複素構造)】

1. $2n$ 次元多様体 \mathcal{M} の接バンドル $T(\mathcal{M})$ から自分自身への (ベクトルバンドルとしての) バンドル写像 J , すなわち可逆な $(1,1)$ 型テンソル場 J が $J^2 = -1$ を満たすとき, J を \mathcal{M} の概複素構造という. また, 組 (\mathcal{M}, J) を概複素多様体という.
2. $\mathbb{C}^n \ni (z^1, \dots, z^n)$ に対して, $z^j = x^j + iy^j$ とおくと, 写像

$$J: \partial/\partial x^j \rightarrow \partial/\partial y^j, \quad \partial/\partial y^j \rightarrow -\partial/\partial x^j \quad (3.1.4)$$

を \mathbb{C}^n の標準複素構造という.

3. 概複素多様体 (\mathcal{M}, J) の自然な向きを $(X_1, \dots, X_m, JX_1, \dots, JX_m)$ により定義する. \mathbb{C}^m の場合, この向きは $(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^m)$ に対応する.
3. 複素多様体 X の局所複素座標系を $\{(\psi, \mathcal{U})\}$ とするとき, $\psi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^n$ による \mathbb{C}^n の標準複素構造の引き戻しは X 上に概複素構造 J を定義する. これを, X の複素構造に付随する概複素構造という.

□

【定理 3.10 (概複素構造の積分可能性)】 概複素多様体 (M, J) の概複素構造が複素構造に付随するための必要十分条件は、次式により定義される $(1, 2)$ 型テンソル場 N がゼロとなることである：

$$\frac{1}{2}N(X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y] \quad (3.1.5)$$

N は Nijenhuis テンソルまたは複素捻れテンソルと呼ばれる。——□

3.1.4 複素多様体上のテンソル

【定義 3.11 (複素接バンドル)】

1. 概複素多様体 (\mathcal{M}, J) に対して、 \mathcal{M} の複素接バンドル $T^c(\mathcal{M}) = T(\mathcal{M}) \otimes \mathbb{C}$ の部分複素ベクトルバンドルを

$$T^l(\mathcal{M}) = T^{1,0}(\mathcal{M}) = \{V \in T^c(\mathcal{M}) \mid JV = iV\}, \quad (3.1.6)$$

$$T^m(\mathcal{M}) = T^{0,1}(\mathcal{M}) = \{V \in T^c(\mathcal{M}) \mid JV = -iV\}, \quad (3.1.7)$$

により定義すると、

$$T^c(\mathcal{M}) = T^l(\mathcal{M}) \oplus T^m(\mathcal{M}). \quad (3.1.8)$$

2. 余接バンドル $T^*(\mathcal{M})$ に対して、線形作用素 J を

$$(J\omega)(X) = \omega(JX), \quad \forall X \in T_p(\mathcal{M}), \omega \in T^*_p(\mathcal{M}) \quad (3.1.9)$$

により定義する。このとき、複素余接バンドル $T^{*c}(\mathcal{M})$ に対して、

$$A^{1,0}(\mathcal{M}) = \{\omega \in T^{*c}(\mathcal{M}) \mid J\omega = i\omega\}, \quad (3.1.10)$$

$$A^{0,1}(\mathcal{M}) = \{\omega \in T^{*c}(\mathcal{M}) \mid J\omega = -i\omega\}, \quad (3.1.11)$$

と定義すると、

$$A^1(\mathcal{M}) = T^{*c}(\mathcal{M}) = A^{1,0}(\mathcal{M}) \oplus A^{0,1}(\mathcal{M}). \quad (3.1.12)$$

$\wedge T^{*c}(\mathcal{M})$ の部分ベクトルバンドルを

$$A^{p,q}(\mathcal{M}) = \left(\bigwedge^p A^{1,0}(\mathcal{M}) \right) \wedge \left(\bigwedge^q A^{0,1}(\mathcal{M}) \right) \quad (3.1.13)$$

により定義すると,

$$A^n(\mathcal{M}) = \bigwedge^n T^{c*}(\mathcal{M}) = \sum_{p+q=n} A^{p,q}(\mathcal{M}). \quad (3.1.14)$$

このとき, $A^{p,q}(\mathcal{M})$ の (局所) 断面を (p, q) 次の複素微分形式とい
い, その全体を $\mathcal{A}^{p,q}(\mathcal{M})$ と表す.

□

【命題 3.12】 複素多様体 X^n の局所複素座標系を (z^1, \dots, z^n) とする.

1. $T^{1,0}(X)$ の局所断面, すなわち $(1, 0)$ 型複素ベクトル場の基底は

$$\partial/\partial z^j = \frac{1}{2} (\partial/\partial x^j - i\partial/\partial y^j), \quad (3.1.15)$$

で, $T^{0,1}(X)$ の局所断面, すなわち $(0, 1)$ 型複素ベクトル場の基底は

$$\partial/\partial \bar{z}^j = \frac{1}{2} (\partial/\partial x^j + i\partial/\partial y^j), \quad (3.1.16)$$

で与えられる.

2. $\mathcal{A}^{p,q}$ の基底は

$$dz^I \wedge d\bar{z}^J; \quad I = (i_1, \dots, i_p), \quad J = (j_1, \dots, j_q) \quad (3.1.17)$$

で与えられる.

□

【命題 3.13 (積分可能性条件)】 概複素構造 J は次の 3 つの互いに同
値である..

- i) 概複素構造 J が振れを持たない, すなわち Nijenhuis テンソルがゼロ.
- ii) 任意の $(1, 0)$ 型 1 形式 θ に対して, $d\theta$ が $(0, 2)$ 型成分を持たない.
- iii) $(1, 0)$ 型ベクトル場の交換子が常に $(1, 0)$ 型ベクトル場となる.

□

【定義 3.14 (正則ベクトル場と正則微分形式)】

1. 複素多様体 X 上の $(1, 0)$ 型複素ベクトル場 V を局所複素座標系 (z^1, \dots, z^n) を用いて局所的に

$$V = \sum_j V^j \partial / \partial z^j \quad (3.1.18)$$

と表すとき, V^1, \dots, V^n が常に正則関数となるならば V を正則ベクトル場という.

2. 複素多様体 X 上の $(p, 0)$ 次微分形式 ω を局所複素座標系 (z^1, \dots, z^n) を用いて局所的に

$$\omega = \sum_{I=(i_1, \dots, i_p)} \omega_I dz^I \quad (3.1.19)$$

と表すとき, ω_I が常に正則関数となるならば ω を p 次正則微分形式という.

□

【命題 3.15 (Dolbeault 微分)】

1. 複素多様体 X 上の (p, q) 次複素微分形式 ω に対して, 直和分解

$$d\omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega \in \mathcal{A}^{p+1, q}(X) + \mathcal{A}^{p, q+1}(X) \quad (3.1.20)$$

により写像

$$\partial : \mathcal{A}^{p, q}(X) \rightarrow \mathcal{A}^{p+1, q}(X), \quad (3.1.21)$$

$$\bar{\partial} : \mathcal{A}^{p, q}(X) \rightarrow \mathcal{A}^{p, q+1}(X), \quad (3.1.22)$$

を定義すると,

$$\partial^2 = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0, \quad \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0. \quad (3.1.23)$$

2. $\omega \in \mathcal{A}^{p, 0}(X)$ が正則であるための必要十分条件は, $\bar{\partial}\omega = 0$.

□

3.2 複素構造の変形

3.2.1 一般論

【命題 3.16】 複素構造 J の無限小変形を \dot{J} と表すと

$$\dot{J}J + J\dot{J} = 0$$

が成り立つ。この条件は,

$$\begin{aligned}\dot{J} &= I + \bar{I}; \\ I &= I^a_{\bar{b}} \partial_a \otimes d\bar{z}^b \in \mathcal{T}^{1,0} \otimes \mathcal{A}^{0,1}(M).\end{aligned}$$

このとき,

$$\begin{aligned}\dot{N} &= -2(i + J)\bar{\partial}I + 2(i - J)\partial\bar{I}, \\ \mathcal{L}_X J &= 2i(\bar{\partial}X' - \partial X'').\end{aligned}$$

ここで, N は Nijenhuis テンソル。また, $X = X' + X'' \in \mathcal{T}^{1,0} \oplus \mathcal{T}^{0,1}(M)$.

□

【定義 3.17 (可微分族)】 \mathbb{R}^m 内の領域 B の各点 t に対しコンパクト複素多様体 $M_t = M_t^n$ が与えられているとする。このとき, 次の条件を満たす可微分多様体 \mathcal{M} と \mathcal{M} を B の上に写す \mathcal{C}^∞ 写像 ϖ が存在するならば, 集合 $\{M_t \mid t \in B\}$ をコンパクト多様体の可微分族 (differentiable family) とよぶ:

- (i) \mathcal{M} の各点において \mathcal{C}^∞ 写像 ϖ の Jacobi 行列の階数は m に等しい。
- (ii) 各点 $t \in B$ に対して, $\varpi^{-1}(t)$ は \mathcal{M} のコンパクトな連結部分集合である。
- (iii) $\varpi^{-1}(t) = M_t$
- (iv) \mathcal{M} の局所開被覆 $\{\mathcal{U}_j \mid j = 1, 2, 3, \dots\}$ と \mathcal{U}_j 上の複素数値 \mathcal{C}^∞ 関数 $z_j^a(p)$ ($a = 1, \dots, n, j = 1, 2, 3, \dots$) が存在して, 各 t に対して複素多様体 M_t の局所複素座標系をなす。

[小平邦彦著「複素多様体論」(岩波書店, 1992)]

□

【定義 3.18 (可微分族の同値性)】 領域 $B \subset \mathbb{R}^m$ を底空間とする 2 つの可微分族 (\mathcal{M}, B, ϖ) と (\mathcal{N}, B, π) が与えられたとき, \mathcal{M} を \mathcal{N} の上に写す可微分同相写像 Φ が存在して, 各 $t \in B$ に対して Φ が $M_t = \varpi^{-1}(t)$ を $N_t = \pi^{-1}(t)$ の上に双正則に写すならば, 可微分族 \mathcal{M} と \mathcal{N} は同値であるという. □

【定義 3.19 (自明な可微分族)】 可微分族 (\mathcal{M}, B, ϖ) が $(M \times B, B, \pi)$ ($M = \varpi^{-1}(t_0), t_0 \in B$) と同値であるとき, (\mathcal{M}, B, ϖ) は自明であるという. □

【定理 3.20 (Frölicher-Nijenhuis の定理 (1957))】 コンパクト複素多様体の可微分族 (\mathcal{M}, B, ϖ) (B は \mathbb{R}^m 内の領域で $0 \in B$) において, $H^1(M_0, \Theta^0) = 0, M_0 = \varpi^{-1}(0)$ ならば, 十分小さい開多重区間 I ($0 \in I \subset B$) に対して $(\mathcal{M}_I, I, \varpi)$ は自明である.

[Frölicher A, Nijenhuis A: *A theorem on stability of complex structures*, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) 43: 239-41 (1957)] □

【定理 3.21】 複素構造の無限小変形の自由度は $H^1(M, \Theta)$ と 1 対 1 に対応する. ここで, Θ は正則ベクトル場の層. □

【注 3.22 (説明)】 複素構造の無限小変形と $H^1(M, \Theta)$ との対応は次のようにして得られる.

1. 可微分族 (\mathcal{M}, B, ϖ) において, $t \in B$ 近傍での複素局所座標系 $(\mathcal{U}_j, z_j^a (a = 1, \dots, n))$ に対し, 各 t での座標変換を $z_j = f_{ji}(z_i, t)$ とおく. このとき, $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_i$ での正則ベクトル場 $\theta_{ji}(t)$ を

$$\theta_{ji}(t) = \frac{f_{ji}^a(z_i, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_i^a} \quad (3.2.1)$$

により定義すると, 座標変換の結合則

$$f_{ki}(z_i, t) = f_{kj}(f_{ji}(z_i, t), t) \quad (3.2.2)$$

より

$$\theta_{ki}(t) = \theta_{kj}(t) + \theta_{ji}(t), \quad \theta_{ij}(t) = -\theta_{ji}(t) \quad (3.2.3)$$

が成り立つ. したがって, 対応 $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_i \mapsto \theta_{ji}(t)$ は M_t 上の正則ベクトル場の層 Θ_t に係数をもつ Čech コホモロジーにおける 1 コサイクルを定義する.

2. このコサイクルがコバウンダリーとなるとき, すなわち各 \mathcal{U}_i 上の正則ベクトル場 $\theta_i(t)$ が存在して

$$\theta_{ji} = \theta_j - \theta_i \quad (3.2.4)$$

となる条件は, 新たな座標系 $Z_j = g(z_j, t)$ を

$$\frac{\partial g(z_j, t)}{\partial t} = \theta_j(z_j, t) \quad (3.2.5)$$

により定めるとき, Z_j の変換が t に依存しない ($Z_j = F_{ji}(Z_i)$) ことと同等である.

3. 以上より, 複素構造の変形の自由度は $H^1(M_t, \Theta_t)$ と対応する.

□

【定義 3.23 (複素解析族)】 \mathbb{C}^m 内の領域 B の各点 t に対しコンパクト複素多様体 $M_t = M_t^n$ が与えられているとする. このとき, 次の条件を満たす複素多様体 \mathcal{M} と \mathcal{M} を B の上に写す正則写像 ϖ が存在するならば, M_t は t に正則に依存するといひ, 集合 $\{M_t \mid t \in B\}$ をコンパクト多様体の複素解析族 (complex analytic family) とよぶ:

- (i) \mathcal{M} の各点において正則写像 ϖ の Jacobi 行列の階数は m に等しい.
- (ii) 各点 $t \in B$ に対して, $\varpi^{-1}(t)$ は \mathcal{M} のコンパクトな部分多様体である.
- (iii) $\varpi^{-1}(t) = M_t$

[小平邦彦著「複素多様体論」(岩波書店, 1992)] _____ □

【定理 3.24 (微分同相性)】 コンパクト多様体の複素解析族 (\mathcal{M}, B, ϖ) において, 任意の $t, s \in B$ に対して M_t と M_s は微分同相である. [小平邦彦著「複素多様体論」(岩波書店, 1992)] _____ □

【定義 3.25 (完備性)】 複素解析族 (\mathcal{M}, B, ϖ) が $p \in B$ で完備であるとは, 点 $q \in C$ と双正則同型 $\phi: N_q \rightarrow M_p$ が存在するような任意の族 (\mathcal{N}, C, π) に対して, q の近傍 \mathcal{U} と正則写像 $f: T' \rightarrow B, h: \pi^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{M}$ が存在して, 次の3条件を満たすことである.

- i) $f \circ \pi = \varpi \circ h$

ii) $f(q) = p$

iii) N_q 上で $h = \phi$.

このとき, \mathcal{U} を十分小さく取ると, h は各ファイバー N_t から $M_{f(t)}$ 上への双正則同型を与えている. したがって, p で完備な族は, M_p のすべての微小変形を含んでいるといえる. □

【定義 3.26 (効果的パラメーター)】 複素解析族 (\mathcal{M}, B, ϖ) の点 $p \in B$ において, 小平-Spencer 写像

$$\rho_p : T_p B \rightarrow H^1(M_p, \Theta) \quad (3.2.6)$$

が単射となるとき, (\mathcal{M}, B, ϖ) は p で効果的にパラメータ付けされているという. □

【定理 3.27 (倉西の基本定理 (1964))】 任意のコンパクト複素多様体 M に対し, 次の条件を満たす複素解析族 (\mathcal{M}, B, ϖ) と $p \in B$ が存在する:

i) B の各点で完備.

ii) p で効果的にパラメータ付けされている.

iii) $M_p = M$.

このとき, B を倉西空間 (Kuranishi space) または M の局所モジュライ空間 (local moduli space) と呼ぶ. □

3.2.2 例

複素多様体 M の複素構造の変形自由度を $N_c(M)$ と表記する:

$$H^1(M, \Theta) \cong \mathbb{C}^{N_c} \quad (3.2.7)$$

3.2.2.1 Riemann 面

【定理 3.28 (Riemann 面のモジュライ自由度)】 Riemann 面 (滑らかな 1 次元複素多様体) の複素構造の変形自由度は, 種数 g を用いて次

のように表される :

$$N_c = \begin{cases} 0 & , g = 0, \\ 1 & , g = 1, \\ 3(g-1) & , g \geq 2 \end{cases}$$

□

Proof. Riemann 面に対しては,

$$\Theta = (\Omega^1)^* = K_M^* \Rightarrow \deg \Theta = 2 - 2g.$$

まず, $g = 0$ のとき, 小平の消滅定理より, $N_c = h^1(M, \mathcal{O}_M(2)) = 0$.
次に, $g = 1$ のとき,

$$h^0(\Omega^1) = h^{1,0} = g = 1 \Rightarrow \omega \neq 0 \in H^0(M, \Omega^1)$$

より大域的な正則 1 形式 ω が存在するが, これがゼロ点をもつとすると,
 $D = (\omega)$ は有効因子なので,

$$\Omega^1 \sim D \Rightarrow \deg K_M = \deg D > 0$$

となり矛盾. よって, ω は零点をもたず, K_M は自明バンドルとなる. これより, $N_c = h^1(K_M^*) = h^1(\mathcal{O}_M) = h^{0,1} = 1$.

最後に, $g \geq 2$ のとき, Kodaira-Serre 双対定理と Riemann-Roch の定理より,

$$\begin{aligned} N_c &= h^1(M, K_M^*) = h^0(M, K_M \otimes K_M) = H^0(M, 2K_M) \\ &= \deg(2K_M) - g + 1 + h^0(-K_M) = 3(g-1). \end{aligned}$$

Q.E.D.

3.3 エルミート多様体

3.3.1 エルミート計量

【定義 3.29】

1. 概複素多様体 (\mathcal{M}, J) の Riemann 計量 g が任意のベクトル場 X, Y に対して

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \quad (3.3.1)$$

を満たすとき, エルミート計量という.

2. エルミート計量を与えられた概複素多様体を概エルミート多様体, エルミート計量を与えられた複素多様体をエルミート多様体という.

□

【定義 3.30 (Kähler 形式)】 概エルミート多様体 (\mathcal{M}, J, g) に対して,

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y) \quad (3.3.2)$$

により定義される 2 次微分形式 Φ を基本 2 形式ないし **Kähler 形式** という. 成分表示では, $J\partial_j = J_j^k \partial_k$ と定義すると, $\omega_{jk} = g_{kl} J_j^l = J_{jk}$ である. (注: Kobayashi-Nomizu の定義 Φ との対応は, $\Phi = -\omega$.) —□

【命題 3.31】

1. エルミート計量 g を複素接バンドルに拡張すると次の性質を持つ:
 - i) 任意の複素ベクトル場 Z, W に対して, $g(\bar{Z}, \bar{W}) = \overline{g(Z, W)}$.
 - ii) 任意のゼロでない複素ベクトル場 Z に対して, $g(Z, \bar{Z}) > 0$.
 - iii) $(1, 0)$ 型ベクトル場 Z と $(0, 1)$ 型ベクトル場 W に対して, $g(Z, \bar{W}) = 0$.

特に, $h(Z, W) = 2g(Z, \bar{W})$ は $T'(\mathcal{M})$ 上の正値エルミート計量を与える.

2. 逆に, $T'(\mathcal{M})$ の正値エルミート計量 $h(*, *)$ が与えられると, $2g(Z, \bar{W}) = h(Z, W)$ ($Z, W \in T'_p(\mathcal{M})$) と 1.i)-iii) を満たす複素接バンドルの対称双線形形式 g が一意的に存在し, その実接バンドル $T(\mathcal{M})$ への制限は \mathcal{M} のエルミート計量を与える.

3. $T'(\mathcal{M})$ の断面, すなわち $(1,0)$ 型複素ベクトル場の基底を f_1, \dots, f_n , $\mathcal{A}^{1,0}(\mathcal{M})$ の双対基底を ϕ^1, \dots, ϕ^n とおく. すなわち, $\phi^j(f_k) = \delta_k^j$. このとき, $T'(\mathcal{M})$ のエルミート計量 h を

$$h = h_{ij}\phi^i\bar{\phi}^j; \quad h_{ij} = h(f_i, f_j) = 2g(f_i, \bar{f}_j) \quad (3.3.3)$$

とおくと, h_{ij} はエルミート行列で, 基本 2 形式 ω は

$$\omega = \frac{i}{2}h_{ij}\phi^i \wedge \bar{\phi}^j \quad (3.3.4)$$

と表される.

□

【注 3.32】 Riemann 計量 g を $T^{*C}(\mathcal{M})$ に拡張したものは, 形式的に

$$ds^2 = g_{jk}dz^j \otimes dz^k + g_{j\bar{k}}dz^j \otimes d\bar{z}^k + \bar{g}_{jk}d\bar{z}^j \otimes dz^k + \bar{g}_{j\bar{k}}d\bar{z}^j \otimes d\bar{z}^k \quad (3.3.5)$$

と表される. ここで, 計量が対称形式である条件は $g_{jk} = g_{kj}, g_{j\bar{k}} = g_{\bar{k}j}, \bar{g}_{j\bar{k}} = \bar{g}_{\bar{k}j}$, 計量が実接空間 $T^*(\mathcal{M})$ 上で実である条件は $g_{j\bar{k}} = \bar{g}_{\bar{k}j}, \bar{g}_{jk} = g_{j\bar{k}}$ と表されるので,

$$ds^2 = g_{jk}dz^j \otimes dz^k + \bar{g}_{j\bar{k}}d\bar{z}^j \otimes d\bar{z}^k + g_{j\bar{k}}(dz^j \otimes d\bar{z}^k + d\bar{z}^k \otimes dz^j). \quad (3.3.6)$$

このとき, Hermite 計量である条件は, $g_{jk} = 0$. よって, Hermite 計量は,

$$ds^2 = g_{j\bar{k}}(dz^j \otimes d\bar{z}^k + d\bar{z}^k \otimes dz^j). \quad (3.3.7)$$

ただし, $\bar{g}_{j\bar{k}} = g_{\bar{k}j}$. したがって, $h_{jk} = 2g_{j\bar{k}}$ を用いると,

$$ds^2 = \frac{1}{2}h_{jk}(dz^j \otimes d\bar{z}^k + d\bar{z}^k \otimes dz^j) \quad (3.3.8)$$

この式はしばしば,

$$ds^2 = h_{jk}dz^j d\bar{z}^k \quad (3.3.9)$$

と表される. たとえば,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow ds^2 = dzd\bar{z}. \quad (3.3.10)$$

また,

$$ds^2 = \operatorname{Re}(h_{jk}dz^j \otimes d\bar{z}^k), \quad \omega = -\operatorname{Im}(h_{jk}dz^j \otimes d\bar{z}^k). \quad (3.3.11)$$

特に,

$$\omega = \frac{i}{2}h_{jk}dz^j \wedge d\bar{z}^k. \quad (3.3.12)$$

□

3.4 Kähler 多様体

【定義 3.33】

1. 概エルミート多様体 (\mathcal{M}, J, g) は, 基本 2 形式 Φ が閉形式となるとき, 概 Kähler 多様体という.
2. 概 Kähler 多様体は, その概複素構造が積分可能であるとき, すなわち, 複素多様体で J がその複素構造から決まる概複素構造となるとき, Kähler 多様体という.

□

【注 3.34】 様々な定義の関係

$\Phi \setminus J$	N/A	\exists (almost complex)	$N = 0$ (complex)
\exists		almost Hermitian	Hermitian
$d\Phi = 0$	almost symplectic	almost Kähler	Kähler

□

【定理 3.35】 概エルミート多様体 (\mathcal{M}, J, g) が Kähler 多様体となるための必要十分条件は, g が概複素的すなわち, $\nabla J = 0$ となることである.

□

【定理 3.36】 エルミート多様体が Kähler 多様体となるための必要十分条件は, 各点 p の近傍で

$$ds_p^2 = dz^i d\bar{z}^i, \quad D(\partial_{z_i})|_p = 0$$

となる複素座標が存在することである. □

3.4.1 基本的性質

【定理 3.37】 Kähler 多様体の複素部分多様体は, 誘導計量により再び Kähler 多様体となる. □

【定理 3.38 (Kähler ポテンシャル)】 Hermite 計量が Kähler 計量となるための必要十分条件は、Kähler 形式 ω が、局所的に滑らかな実関数 K (Kähler ポテンシャル) を用いて次のように表されることである：

$$\omega = \frac{1}{2} dd^c K = i\partial\bar{\partial}K.$$

ここで、 $d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$. □

【注 3.39 (座標表示)】 計量成分 $ds^2 = 2g_{j\bar{k}} dz^j d\bar{z}^k$ と K の関係は、

$$g_{j\bar{k}} = \partial_j \bar{\partial}_{\bar{k}} K. \quad (3.4.1)$$

□

【注 3.40 (ケーラー計量の存在)】 すべての複素多様体がケーラー計量を持つわけではない。実際、ケーラー形式の中 ω^p は $H^{p,p}(M)$ の非自明なコホモロジー類を与えるので、ケーラー多様体の偶数次の Betti 数は正となる。したがって、偶数次の Betti 数がゼロとなる複素多様体上にはケーラー計量が存在しない。

例えば、 $\lambda \in \mathbb{C}^*$ を $|\lambda| \neq 1$ となる定数として、次式で定義される n 次元 Hopf 多様体は、 $b_{2i} = 0 (i = 1, 2, \dots, n-1)$ となるので、ケーラー計量を持たない。

$$H_\lambda^n = (\mathbb{C}^n - \{0\})/\Gamma \simeq S^{2n-1} \times S^1; \quad \Gamma = \{\lambda^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

□

3.4.2 曲率テンソル

【命題 3.41】 ベクトル場の基底 e_a に対して、 J の成分を $Je_a = e_b J^b_a$ により定義するとき、Kähler 多様体の曲率テンソル R と Ricci テンソル Ric は次の性質をもつ：

1. $R(X, Y) \circ J = J \circ R(X, Y), \quad R(JX, JY) = R(X, Y).$

$$R^c_{fab} J^f_d = J^c_f R^f_{dab}, \quad R^a_{bef} J^e_c J^f_d = R^a_{bcd}$$

2. $\text{Ric}(JX, JY) = \text{Ric}(X, Y).$

$$R_{ef}J^e{}_aJ^f{}_b = R_{ab}$$

$$3. \text{Ric}(X, Y) = \frac{1}{2}\text{Tr}(J \circ R(X, JY)).$$

$$R_{ab} = \frac{1}{2}J^efR_{efac}J_b{}^c$$

□

【定義 3.42 (Ricci 形式)】 Kähler 多様体の Ricci 曲率から定義される

$$\rho(X, Y) = \text{Ric}(JX, Y)$$

は 2 形式となり, Ricci 形式と呼ばれる. 成分表示では,

$$\rho_{ab} = J_a{}^cR_{cb} = J^{cd}R_{cadb} = -\frac{1}{2}R_{abcd}J^{cd} \quad (3.4.2)$$

□

【命題 3.43 (成分表示)】 $e_1, \dots, e_n, e_{\bar{1}}, \dots, e_{\bar{n}}$ ($e_{\bar{k}} = Je_k$) を $T_x(M)$ の基底, $\theta^1, \dots, \theta^n, \theta^{\bar{1}}, \dots, \theta^{\bar{n}}$ ($\theta^{\bar{k}} = -J\theta^k$) をその双対基底として,

$$\begin{aligned} \phi^j &= (1 - iJ)\theta^j, & f_j &= \frac{1}{2}(1 - iJ)e_j, \\ \Psi^j{}_k &= \phi^j(\mathcal{R}f_k) = \mathcal{R}^j{}_k - i\mathcal{R}^j{}_{\bar{k}} \end{aligned}$$

とおくと,

$$\mathcal{R}^{\bar{j}}{}_{\bar{k}} = \mathcal{R}^j{}_k, \quad \mathcal{R}^{\bar{j}}{}_k = -\mathcal{R}^j{}_{\bar{k}}$$

より,

$$\rho = i\Psi^j{}_j$$

が成り立つ. □

3.4.3 座標成分表示

【命題 3.44】 複素座標系 z^j に関する成分表示のもとで次の諸式が成り立つ:

1. 計量

$$ds^2 = 2g_{i\bar{j}}dz^i d\bar{z}^j$$

ただし, $\bar{g}_{i\bar{j}} = g_{j\bar{i}}$.

2. Kähler 形式

$$\omega = ig_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

3. 接続係数

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i = g^{i\bar{l}} \frac{\partial g_{l\bar{j}}}{\partial z^k},$$

$$\Gamma_{j\bar{k}}^{\bar{i}} = \Gamma_{k\bar{j}}^{\bar{i}} = g^{\bar{i}l} \frac{\partial g_{l\bar{j}}}{\partial \bar{z}^k}$$

他の成分はゼロ.

4. 曲率テンソル

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = g_{m\bar{j}} \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial \bar{z}^l} = \frac{\partial^2 g_{i\bar{j}}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} - g^{m\bar{n}} \frac{\partial g_{i\bar{n}}}{\partial z^k} \frac{\partial g_{j\bar{m}}}{\partial \bar{z}^l}$$

およびこれと Riemann 曲率テンソルの代数的対称性から決まるものの以外はゼロ.

5. Ricci 曲率と Ricci 形式

$$R_{i\bar{j}} = -\frac{\partial^2 \ln G}{\partial z^i \partial \bar{z}^j},$$

$$\rho = -i\partial\bar{\partial} \ln G,$$

$$G = \det(g_{i\bar{j}}).$$

特に, Ricci 形式は複素構造と体積要素のみで決まる.

□

3.4.4 正則キリングベクトル場とモーメント写像

$k = k^j(z)\partial_j + k^{\bar{j}}(\bar{z})\partial_{\bar{j}}$ を正則 Killing ベクトルとすると, Kähler 形式 ω に対して,

$$\mathcal{L}_k \omega = (d \circ I_k + I_k \circ d)\omega = d \circ I_k \omega = 0 \Leftrightarrow I_k \omega = d\mathcal{P}(z, \bar{z}) \quad (3.4.3)$$

が成り立つ. $\mathcal{P}(z, \bar{z})$ はモーメント写像 (Moment map) と呼ばれる. この関係式を具体的に成分で表すと,

$$k^j = -ig^{j\bar{k}} \partial_{\bar{k}} \mathcal{P} \Leftrightarrow k_{\bar{j}} = -i\partial_{\bar{j}} \mathcal{P}, \quad (3.4.4a)$$

$$k^{\bar{j}} = ig^{k\bar{j}} \partial_k \mathcal{P} \Leftrightarrow k_j = i\partial_j \mathcal{P} \quad (3.4.4b)$$

これより

$$\nabla_j \partial_k \mathcal{P} = 0 \quad (3.4.5)$$

が成り立つが、逆に、この条件を満たす \mathcal{P} を用いて (3.4.4) により定義される正則ベクトル場 k は Killing ベクトルとなる。

(3.4.4) の反転公式が次のようにして得られる。まず、 k に対する無限小変換による Kähler ポテンシャルの変化は、正則関数 $r(z)$ を用いて

$$\delta K = \theta(k^j \partial_j + k^{\bar{j}} \partial_{\bar{j}})K(z, \bar{z}) = \theta(r(z) + \bar{r}(\bar{z})) \quad (3.4.6)$$

と表される。これより、

$$\mathcal{P} = i(k^j \partial_j K - r(z)) = -(k^{\bar{j}} \partial_{\bar{j}} K - \bar{r}(\bar{z})) \quad (3.4.7)$$

とおくと、(3.4.4) が成り立つことが確かめられる。

つぎに、正則キリングベクトルの系 k_A が閉じた交換関係

$$[k_A, k_B] = f^C{}_{AB} k_C \quad (3.4.8)$$

を満たすとすると、 $I_{k_A} \omega = d\mathcal{P}_A$ および $I_{[X, Y]} = [\mathcal{L}_X, I_Y]$ より、

$$\mathcal{L}_{k_A} \mathcal{P}_B = f^C{}_{AB} \mathcal{P}_C \quad (3.4.9)$$

を得る。この整合性条件は、成分で表すと、

$$k_A^j k_{Bj} - k_{Aj} k_B^j = -f^C{}_{AB} \mathcal{P}_C \quad (3.4.10)$$

となる。

3.4.5 Kähler-Hodge 多様体

【定義 3.45 (Kähler-Hodge 多様体)】 Kähler 多様体 M は、 $c_1(L) = [\omega]$ (=Kähler 類) となる線バンドル $L \rightarrow M$ が存在するとき、Kähler-Hodge 多様体であるという。 □

3.4.6 射影 Kähler 多様体

複素次元 $(n+1)$ の Kähler 多様体 (M, g, J) が重み 1 の閉相似 Killing ベクトル k をもつとする：

$$ds^2 = 2g_{I\bar{J}} dX^I d\bar{X}^{\bar{J}}; \quad g_{I\bar{J}} = \partial_I \partial_{\bar{J}} N(X, \bar{X}), I, J = 0, \dots, (3.4.11a)$$

$$\nabla_i k_j = g_{ij}(i, j = 0, \dots, 2(n+1)) \quad (3.4.11b)$$

このとき, k は正則ベクトル場となり, Kähler ポテンシャルに対して適当な Kähler 変換を施すと,

$$k_I = \partial_I N, \quad k_{\bar{I}} = \partial_{\bar{I}} N, \quad (3.4.12a)$$

$$k^I \partial_I N = N, \quad k^{\bar{I}} \partial_{\bar{I}} N = N \quad (3.4.12b)$$

が成り立つ. さらに,

$$k' : k'_I = ik_I, \quad k'_{\bar{I}} = -ik_{\bar{I}} \quad (3.4.13)$$

とおくと, k' は正則 Killing ベクトル場となり,

$$[k, k'] = 0 \quad (3.4.14)$$

以上より, M の複素座標系 $(y, z^\alpha) (\alpha = 1, \dots, n)$ で

$$k = y\partial_y + \bar{y}\partial_{\bar{y}}, \quad k' = i(y\partial_y - \bar{y}\partial_{\bar{y}}) \quad (3.4.15)$$

となるものが存在する. この座標系では, Kähler ポテンシャル N は

$$N = -ay\bar{y}e^{-K(z, \bar{z})/a} \quad (3.4.16)$$

と表される. また,

$$e_\alpha \equiv \partial_\alpha + \frac{1}{a} \partial_\alpha K y \partial_y \quad (\alpha = 1, \dots, n) \quad (3.4.17)$$

とおくと,

$$e_\alpha N = 0, \quad k' N = 0 \quad (3.4.18)$$

で, ベクトル場の基底を (k, k', e_α) の内積は

$$g(k, k) = g(k', k') = 2N, \quad g(k, k') = 0, \quad (3.4.19a)$$

$$g(k, e_\alpha) = g(k', e_\alpha) = 0, \quad (3.4.19b)$$

$$g(e_\alpha, e_{\bar{\beta}}) = -\frac{N}{a} \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} K, \quad g(e_\alpha, e_\beta) = 0. \quad (3.4.19c)$$

よって, 元の計量は

$$ds^2 = 2N \left| \frac{dy}{y} - \frac{1}{a} \partial_\alpha K dz^\alpha \right|^2 + \left(\frac{-2N}{a} \right) \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} K dz^\alpha d\bar{z}^{\bar{\beta}} \quad (3.4.20)$$

と表される. これより, k, k' の軌道による M の商空間 \hat{M} に Kähler 計量

$$\hat{g}_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} K \quad (3.4.21)$$

が誘導される.

3.4.7 Special Kähler 多様体

3.4.7.1 Rigid/affine special Kähler 多様体

【定義 3.46 (Rigid/affine special Kähler 多様体)】 Kähler 多様体 (M, g, J) は、次の性質をもつ実接続 $\nabla_s = (A_{ij}{}^k)$ をもつとき、rigid (affine) special Kähler 多様体という：

- i) torsion free: $A_{ij}{}^k = A_{ji}{}^k$
- ii) 平坦: $\partial_{[i}A_{j]k}{}^l + A_{m[i}{}^lA_{j]l}{}^m = 0$
- iii) Symplectic: $\partial_k J_{jk} + 2A_{i[j}{}^l J_{k]l} = 0$
- iv) d_{∇_s} を ∇_s に関する共変外微分とすると、

$$d_{\nabla_s}[(d\phi^i)J_i{}^j] \equiv d\phi^k \wedge [\partial_k \delta_l^j + A_{kl}{}^j][(d\phi^i)J_i{}^l] = 0. \quad (3.4.22)$$

[< Freedman DZ, Van Proeyen A 2012B] _____□

【命題 3.47】 次の3つの条件は、いずれも、Kähler 多様体 (M, g, J) が rigid special Kähler であるための必要十分条件を与える：

- 1) 複素座標系 (z^α) において正則な3階完全対称テンソル $C_{\alpha\beta\gamma} = C_{(\alpha\beta\gamma)}(z)$ が存在し、次の条件を満たす：

$$\nabla_{[\delta}C_{\alpha]\beta\gamma} = 0, \quad (3.4.23a)$$

$$R_{\alpha\bar{\gamma}\beta\bar{\delta}}(g) = -C_{\alpha\beta\epsilon}\bar{C}_{\bar{\gamma}\bar{\delta}\bar{\epsilon}}g^{\epsilon\bar{\epsilon}}. \quad (3.4.23b)$$

このとき、平坦接続 $A_{ij}{}^k$ は、Kähler 計量に関する接続 $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ をもちいて

$$A_{\alpha\beta}{}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma, \quad A_{\alpha\beta}{}^{\bar{\gamma}} = g^{\bar{\gamma}\gamma}C_{\alpha\beta\gamma}. \quad (3.4.24)$$

- 2) 次の2条件を満たす：

- i) 実チャート $(\phi^i) = (x^I, f_I)(I = 1, \dots, n, i = 1, \dots, 2n)$ が存在して、Kähler 形式が次のように表される：

$$2\omega = -J_{ij}d\phi^i \wedge d\phi^j = -2dx^I \wedge df_I. \quad (3.4.25)$$

ii) $T'(M)$ の 1 形式 $\pi^i (i = 1, \dots, 2n)$ を

$$\pi^i = \frac{1}{2} d\phi^j (\delta_i^j - iJ_j^i) \quad (3.4.26)$$

により定義するとき、 $2n$ 個の正則関数の組 $(X^I(z), F_I(z))$ が存在して、i) の座標系のもとで、

$$\pi^I = dX^I(z), \quad \pi_I = dF_I(z) \quad (3.4.27)$$

このとき、

$$dx^I = 2\text{Re}(dX^I(z)), \quad df_I = 2\text{Re}(dF_I(z)) \quad (3.4.28)$$

が成り立つ。

3) 次の 2 式を満たす $2n$ 個の正則関数系 $(X^I(z), F_I(z))$ が存在する :

$$dX^I \wedge dF_I = 0, \quad (3.4.29a)$$

$$-\omega = -ig_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta = dX^I \wedge d\bar{F}_I + d\bar{X}^I \wedge dF_I \quad (3.4.29b)$$

これらの条件は、 $V = (X^I(z), F_I(z))$ とおくと、シンプレクティック内積

$$\langle V_1, V_2 \rangle \equiv X_1^I F_{2I} - F_{1I} X_2^I \quad (3.4.30)$$

を用いて、

$$\langle \partial_\alpha V, \partial_\beta V \rangle = 0, \quad (3.4.31a)$$

$$-\omega_{\alpha\bar{\beta}} = \langle \partial_\alpha, \partial_{\bar{\beta}} \bar{V} \rangle \quad (3.4.31b)$$

と表される。

□

【命題 3.48 (Prepotential)】 Rigid special Kähler 多様体の symplectic section を $(X^I(z), F_I(z)) (I = 1, \dots, n)$ とする。

1. $\partial_\alpha X^I$ が行列として正則なら、 F_I は適当な正則関数 $F(X)$ を用いて $F_I(z) = \partial F(X(z))/\partial X^I$ と表される。このとき、 $F(X)$ は前ポテンシャル (prepotential) と呼ばれる。

2. Kähler 計量が正定値なら、前ポテンシャルが存在する。

[Craps B, Roose F, Troost W, Van Proeyen A: NPB503, 565-613 (1997), arXiv:hep-th/9703082] □

3.4.7.2 Projective special Kähler 多様体

(M, J, V) ($V = \mathcal{T}(X^I(z), F_I(z)), I = 0, \dots, n$) を affine special Kähler 多様体, k をそのウエイト 1 の閉相似 Killing ベクトル場, k' をそれに随伴する Killing ベクトル場とする. M に対する Kähler ポテンシャル N は

$$N = i\langle V, V \rangle = i(X_I \bar{F}^I - F_I \bar{X}^I) \quad (3.4.32)$$

ので, 複素チャート (y, z^α) を

$$k = y\partial_y + \bar{y}\partial_{\bar{y}}, \quad k' = i(y\partial_y - \bar{y}\partial_{\bar{y}}) \quad (3.4.33)$$

と取ると,

$$V = yv(z); \quad v(z) = \mathcal{T}(Z^I(z), F_I(z)) \quad (3.4.34)$$

となる. いま,

$$i\langle v, \bar{v} \rangle = -ae^{-K(z, \bar{z})/a} \quad (3.4.35)$$

により, $K(z, \bar{z})$ を定義すると,

$$N = -ay\bar{y}e^{-K(z, \bar{z})/a} \quad (3.4.36)$$

(k, k') の軌道に関する M の商空間 \hat{M} は, K を Kähler ポテンシャルとする Kähler 多様体 $(\hat{M}, \hat{J}, \hat{g})$ となり,

$$ds^2 = 2N \left| \frac{dy}{y} + \frac{1}{a} \partial_\alpha K dz^\alpha \right|^2 + \frac{-2N}{a} \hat{g}_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha d\bar{z}^{\bar{\beta}}. \quad (3.4.37)$$

曲率テンソルは,

$$R_{\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}} = \frac{2}{a} g_{\bar{\alpha}(\alpha} g_{\beta)\bar{\beta}} - C_{\alpha\beta\gamma} g^{\gamma\bar{\gamma}} \bar{C}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}, \quad (3.4.38a)$$

$$C_{\alpha\beta\gamma} = i\langle \nabla_\alpha \nabla_\beta V, \nabla_\gamma V \rangle \quad (3.4.38b)$$

ここで,

$$\nabla_\alpha v \equiv \partial_\alpha v + \frac{1}{a} (\partial_\alpha K) v, \quad \bar{\nabla}_{\bar{\alpha}} v \equiv 0, \quad (3.4.39a)$$

$$\bar{\nabla}_{\bar{\alpha}} \bar{v} \equiv \partial_{\bar{\alpha}} \bar{v} + \frac{1}{a} (\partial_{\bar{\alpha}} K) \bar{v}, \quad \nabla_\alpha \bar{v} \equiv 0, \quad (3.4.39b)$$

$$\nabla_\alpha y = \nabla_\alpha \bar{y} = 0. \quad (3.4.39c)$$

また, 前ポテンシャルが存在するときには,

$$C_{\alpha\beta\gamma} = iF_{IJK} \nabla_\alpha X^I \nabla_\beta X^J \nabla_\gamma X^K. \quad (3.4.40)$$

$\nabla_\alpha V = y \nabla_\alpha v$ なので,

$$\hat{g}_{\alpha\bar{\beta}} = i\langle \nabla_\alpha V, \bar{\nabla}_{\bar{\beta}} \bar{V} \rangle = iy\bar{y} \langle \nabla_\alpha v, \bar{\nabla}_{\bar{\beta}} \bar{v} \rangle \quad (3.4.41)$$

3.4.8 Hyperkähler 多様体

【定義 3.49 (Hyperkähler 多様体)】 M を $4m$ 次元の多様体とする.

1. $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$ を, $J_1 J_2 = J_3$ を満たす概複素構造, g を J_1, J_2, J_3 のいずれに関してもエルミートな計量とすると, (\mathbf{J}, g) を概 hyperkähler 構造, (M, \mathbf{J}, g) を概ハイパー Kähler 多様体という.
2. さらに, g の Levi-Civita 接続 ∇ に対して, $\nabla \mathbf{J} = 0$ がなりたつとき, (\mathbf{J}, g) を hyperkähler 構造, (M, \mathbf{J}, g) をハイパー Kähler 多様体という.

□

【命題 3.50 ($\mathrm{Sp}(m)$ 構造)】 概ハイパーケーラー構造は, $\mathrm{Sp}(m)$ 構造と同等である. また, ハイパーケーラー構造は, 振れのない $\mathrm{Sp}(m)$ 構造と同等である. □

【命題 3.51】 M を $4m$ 次元の多様体, (\mathbf{J}, g) をその概ハイパーケーラー構造を (\mathbf{J}, g) 、 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ を \mathbf{J} に対応するエルミート形式とする. このとき, 次の条件は互いに同値である.

- (i) (\mathbf{J}, g) はハイパーケーラー構造である.
- (ii) $d\omega = 0$.
- (iii) $\nabla \omega = 0$.
- (iv) $\mathrm{Hol}(g) \subseteq \mathrm{Sp}(m)$ で, \mathbf{J} は $\mathrm{Sp}(m)$ 構造から誘導された複素構造である.

[< Joyce DD 2000B] □

【定理 3.52】 ハイパーケーラー多様体は Ricci 平坦である. □

3.4.9 4元数ケーラー多様体

【定義 3.53 (ハイパー複素多様体)】 M を $4m$ 次元の多様体, $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$ を $J_1 J_2 = J_3$ を満たす積分可能な複素構造の組とすると, (\mathbf{J}) をハイパー複素構造 (hypercomplex structure), (M, \mathbf{J}) をハイパー複素多様体 (hypercomplex manifold) と呼ぶ. □

【命題 3.54】

1. ハイパー複素多様体 (M, \mathbf{J}) は, $\nabla \mathbf{J} = 0$ となる捩れのない一意的な接続をもつ. この接続は小畑接続と呼ばれ, そのホロノミー群は $GL(m, \mathbb{H})$ の部分群となる.
2. ハイパー複素構造は, 捩れのない $GL(m, \mathbb{H})$ 構造と同等である.

□

【定義 3.55 (4元数ケーラー多様体)】 $\text{Hol}(g) \subseteq \text{Sp}(m)\text{Sp}(1)$ となる $4m$ 次元多様体は, 4元数ケーラー多様体 (quaternionic Kähler manifold) という. ただし, 4次元 ($m = 1$) については, 自己共役な Weyl 曲率をもつ向きづけられた Einstein 多様体と定義する. □

【命題 3.56】 4元数ケーラー多様体は概ハイパーケーラー構造 (\mathbf{J}, g) をもち, Einstein 空間となる. □

3.4.10 標準直線バンドル

【定義 3.57 (標準直線バンドル)】 n 次元複素多様体 M に対して, $\wedge^n(T'M)^*$ を標準直線バンドルといい K で表す. また, $\wedge^n T'M$ を反標準直線バンドルといい, K^* で表す. □

【定理 3.58】 Kähler 多様体の Ricci 形式 ρ は, 標準直線バンドル (反標準直線バンドル) に誘導される接続の曲率テンソルの i 倍 ($-i$ 倍) となる. 特に, $\rho = 0$ となる条件は, 標準直線バンドルが平行な局所断面を持つことと同等である. このとき, 対応する断面は正則である. □

3.4.11 ホロノミー

【定理 3.59 (Iwamoto)】 複素次元 n の Kähler 多様体に対して, 制限線形ホロノミー群が $SU(n)$ に含まれるための必要十分条件は, Ricci テンソルが恒等的にゼロとなることである. □

3.4.12 Chern 類

【定理 3.60 (曲率形式による表現)】 Kähler 多様体 M の Kähler 形式を ω , 曲率形式を \mathcal{R} とすると, その p 次 Chern 類 $c_p(M)$ は,

$$c_p(M) = \left[\frac{1}{(p!)^2} I_\omega^p(\mathcal{R} \wedge \cdots \mathcal{R}) \right]$$

と表される. 特に, ρ を Ricci 形式として

$$c_1(M) = \left[\frac{1}{2\pi} \rho \right]$$

□

3.5 Kähler-Einstein 多様体

3.5.1 一般的性質

【定義 3.61 (2 次コホモロジー類の符号)】 $H^2(M, \mathbb{R})$ のコホモロジー類は, 正 (負) の $(1, 1)$ 型部分形式を代表元としてもつとき, 正 (負) であるという. この符号は代表元に依存せず, コホモロジー類のみで決まる. ここで $\alpha \in \mathcal{A}_{1,1}(M)$ が正 (負) であるとは, $a(X, Y) = \alpha(X, JY)$ により定義される J 不変実対称双線形形式 a が正 (負) であることを意味する. □

【命題 3.62 (Kähler-Einstein 多様体のスカラー曲率の符号)】 Kähler-Einstein 多様体 M のスカラー曲率 s の符号は複素構造のみにより定まる. さらに, s の値は, M の複素次元を n , V を体積として

$$Vs^n = \frac{4\pi n^n}{n!} c_1^n \quad (3.5.1)$$

により定まる. ここで, c_1^n は複素構造のみで決まる Chern 特性数である. □

【注 3.63 (第 1 Chern 類の符号)】

1. $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$ ないの $d_j (j = 1, \dots, p)$ 次同次多項式により定義される超曲面の交わりにより定義される代数多様体 M の第 1 Chern 類は, 超曲面が一般の位置にあるとき, $d = d_1 + \cdots + d_p$ として

$$c_1(M) = (N + 1 - d)h$$

で与えられる. ここで, h は $H^2(\mathbb{C}P^N, \mathbb{Z})$ の正の生成元の M への制限である.

2. 小平の定理より, 第 1 Chern 類が正ないし負のコンパクト複素多様体は複素射影空間への正則埋め込みをもつ.
3. 複素曲面に対しては, $c_1(M)$ が定符号となるのは $c_1^2(M)$ が非負の場合に限る. 一方, 複素曲面を 1 点でブローアップすると, $c_1^2(M)$ は 1 だけ減少する. したがって, 十分多くの点でブローアップして得られる曲面の第 1 Chern 類は定符号でなくなる. 例えば, $\mathbb{C}P^2$ を r 回ブローアップした曲面 Σ_r に対して, $c_1^2(\Sigma_r) = 9 - r$. また, $0 \leq r \leq 8$ のとき, Σ_r は正の第 1 Chern 類をもち, 正の第 1 Chern 類をもつ複素曲面はそれらと $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ に限られる. これらのうち, $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ には Kähler-Einstein 計量が入らないことが示される. $\Sigma_r (4 \leq r \leq 8)$ については, Kähler-Einstein 計量が入るかどうかは不明. [Besse AL 1987]

□

3.5.2 Calabi-Yau 予想

【定理 3.64 (Calabi-Yau の定理)】 M をコンパクト Kähler 多様体, ω をその Kähler 形式, $c_1(M)$ を第 1 Chern 類とする. このとき, コホモロジー類 $2\pi c_1(M)$ に属する任意の $(1, 1)$ 型実閉形式は, Kähler 形式が ω と同じコホモロジー類に属する Kähler 計量の Ricci 形式となり, そのような Kähler 計量は一意的である. □

【定理 3.65 (Aubin-Calabi-Yau の定理)】 第 1 Chern 類が負となる任意のコンパクト複素多様体は, (スカラ曲率が負の) Kähler-Einstein 計量をもつ. そのような計量は, 定数倍の除いて一意的である. □

3.5.3 例

【注 3.66】

1. 任意のコンパクト単連結一様 Kähler 多様体は正スカラ曲率の Kähler-Einstein 計量をもつ。これは、1987 年時点で、唯一の正スカラ曲率 Kähler-Einstein 多様体の例である [Besse AL 1987]

□

3.5.4 Ricci 平坦多様体

【定理 3.67 (Calabi-Yau 多様体)】 コンパクト複素多様体 M に対して、次の 3 つの条件は同等である。

- i) 第 1 Chern 類がゼロで Kähler 計量をもつ。
- ii) Ricci 平坦な Kähler 計量をもつ。
- iii) 標準直線バンドルに誘導される接続が局所平坦となる Kähler 計量をもつ。

□

【定理 3.68 (モジュライ自由度)】 (M, J) を Kähler 計量をもち $c_1(M) = 0$ となるコンパクト複素多様体とする。このとき、Calabi-Yau の定理より、 M の各 Kähler 類ごとに Ricci 平坦な Kähler 計量が一意的に存在する。 (M, J) 上の Ricci 平坦な Kähler 計量の全体は、 M の Kähler 錐と同型な次元 $h^{1,1}(M)$ の多様体となる。 □

3.5.5 Calabi-Yau 多様体

3.5.5.1 定義と基本性質

【定義 3.69 (Calabi-Yau 多様体)】 複素 m 次元コンパクト Kähler 多様体 (M, J, g) のホロノミー群が $SU(m)$ となると、 M を (非特異) Calabi-Yau 多様体という。 □

【命題 3.70 (ホロノミーによる特徴付け)】 (M, J, g) を単連結、既約、コンパクト、Ricci 平坦な (複素) m 次元 Kähler 多様体とする。このとき、 $m \geq 2$ かつ $\text{Hol}(g) = SU(m)$ 、または m は 4 以上の偶数かつ $\text{Hol}(g) =$

$\mathrm{Sp}(m/2)$ となる. 逆に, (M, J, g) が複素 m 次元コンパクト Kähler 多様体で $\mathrm{Hol}(g)$ が $\mathrm{SU}(m)$ か $\mathrm{Sp}(m/2)$ と一致すれば, g は Ricci 平坦, 既約でその基本群は有限群となる. (Joyce DD 2000[Joy00]) _____□

【命題 3.71 (平行微分形式)】 (M, J, g) をコンパクト, Ricci 平坦な Kähler 多様体, ξ を滑らかな $(p, 0)$ 形式とする. このとき, $d\xi = 0$ と $\nabla\xi = 0$ は同等となる. したがって, $H^{p,0}(M)$ は平行 $(p, 0)$ 形式の空間と同型となる. (Joyce DD 2000[Joy00]) _____□

【定理 3.72 (Ricci 平坦 Kähler 多様体)】 コンパクトで Ricci 平坦な Kähler 多様体の有限非分岐被覆は, Kähler 多様体の直積 $T \times X_1 \times \cdots \times X_k$ と同型である. ここで, T は平坦な Kähler トーラス, 各 X_k は単連結既約な Riemann 多様体で, Calabi-Yau 多様体か超 Kähler 多様体のいずれか. [[< 岩波数学事典 v4]] _____□

【命題 3.73 (標準線バンドル)】 (M, J, g) をコンパクト, Ricci 平坦な複素 m 次元 Kähler 多様体とする. このとき, $\mathrm{Hol}(g) \subset \mathrm{SU}(m)$ となるための必要十分条件は, M の標準線バンドル K_M が自明となることである. (Joyce DD 2000[Joy00]) _____□

【命題 3.74 (コホモロジー)】 n 次元 Calabi-Yau 多様体 M に対して, $h^{p,q} = \dim H^{p,q}(M)$ とおくと,

$$h^{0,p} = h^{p,0} = h^{n,p} = h^{p,n} = 0 \quad (0 < p < n), \quad (3.5.2a)$$

$$h^{0,0} = h^{0,n} = h^{n,0} = h^{n,n} = 1. \quad (3.5.2b)$$

(i Joyce DD 2000[Joy00]) _____□

【定理 3.75 (代数性定理)】 複素次元が 3 以上の Calabi-Yau 多様体は射影的である. (Joyce DD 2000[Joy00]) _____□

3.5.5.2 3次元 Calabi-Yau 多様体の Hodge ダイヤモンド

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & h^{1,1} & 0 \\
 h^{3,0} & h^{2,1} & h^{1,2} & h^{0,3} & = & 1 & h^{2,1} & h^{2,1} & 1 \\
 & & & & & & 0 & h^{1,1} & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & \\
 & & & & & & & & 1
 \end{array}$$

3.5.5.3 $\mathbb{C}P^m$ の部分多様体による構成

【定理 3.76 ($\mathbb{C}P^m$ の超曲面)】 $f(Z_0, \dots, Z_m)$ を \mathbb{C}^{m+1} の次数 d の同次多項式とする. このとき, $\mathbb{C}P^m$ の超曲面 $X : f = 0$ に対し, $c_1(X) = 0$ となる必要十分条件は $d = m + 1$. このようにして得られる $m - 1$ 次元 Calabi-Yau 多様体は, 各 m に対して互いに微分同相. \square

【定理 3.77 ($\mathbb{C}P^m$ の超曲面の完全交差による構成)】 $\mathbb{C}P^m$ の超曲面 H_1, \dots, H_k に対して, その共通部分 $X = H_1 \cap \dots \cap H_k$ は, 超曲面が X において互いに横断的に交わるとき, 完全交差 (complete intersection) という.

X が H_1, \dots, H_k の完全交差で, H_j の次数が d_j のとき, X が Calabi-Yau 多様体となるための必要十分条件は, $d_1 + \dots + d_k = m + 1$ となることである. このようにして得られる $m - k$ 次元 Calabi-Yau 多様体は, $[m; d_1, \dots, d_k]$ が同じなら互いに微分同相. 以下, 微分同相類を $\mathbb{C}P^m[d_1, \dots, d_k]$ と表記する. \square

【例 3.78 (完全交差で表される複素 3 次元 Calabi-Yau)】 完全交差で表される複素 3 次元 Calabi-Yau 多様体は以下の 5 個に限られる:

$$\mathbb{C}P^4[5], \quad \mathbb{C}P^5[2, 4], \quad \mathbb{C}P^5[3, 3], \quad \mathbb{C}P^6[2, 2, 3], \quad \mathbb{C}P^7[2, 2, 2, 2] \quad (3.5.3)$$

\square

3.5.5.4 オービフォールドの crepant な特異点解消による構成

【定義 3.79 (複素オービフォールド)】 特異な m 次元複素多様体は, 各特異点 x の近傍が, 適当な有限群 $G_x \subset \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ に対して \mathbb{C}^m/G_x と同型となるとき, 複素オービフォールドと呼ぶ. x はオービフォールド点, G_x はオービフォールド群という. \square

【定義 3.80 (Kähler オービフォールドと Calabi-Yau オービフォールド)】

複素オービフォールド X に対して, X の非特異部分における Kähler 計量 g が定義され, X のオービフォールド点 x の近傍が, 適当な G_x 不変な Kähler 計量を持つ \mathbb{C}^m に対し, \mathbb{C}^m/G_x と等長となるとき, g をオービフォールド X 上の Kähler 計量とよぶ. また, Kähler 計量を与えられた複素オービフォールドを **Kähler オービフォールド** と呼ぶ. さらに, m

次元 Kähler オービフォールド (X, J, g) は, $\text{Hol}(g) = \text{SU}(m)$ となるとき, Calabi-Yau オービフォールドと呼ぶ. _____□

【定理 3.81 (Yau の定理のオービフォールド版)】 X を Kähler 計量をもつコンパクト複素オービフォールドとする. $c_1(X) = 0$ なら, X 上の各 Kähler 類に対し, Kähler 計量が一意的に存在する. (<Joyce2000B) □

【命題 3.82 (Calabi-Yau オービフォールドの特異点)】 Calabi-Yau オービフォールドの特異点集合の複素次元は 2 以上である. (<Joyce2000B) _____□

【定理 3.83 (3 次元複素オービフォールドの特異点解消)】 3 次元複素オービフォールドは, オービフォールド群が $\text{SL}(3, \mathbb{C})$ に含まれるなら, クレパントな特異点解消をもつ. (<Joyce2000B) _____□

【注 3.84】 一般に, Kähler オービフォールド X が孤立していない特異点をもつ場合, そのクレパントな特異点解消が Kähler になるとは限らない. しかし, その中の少なくとも一つは Kähler となることが示される. (<Joyce2000B) _____□

【定理 3.85 (Calabi-Yau from a toroidal Kähler orbifold)】 (T^6, J, g) を平坦な Kähler トーラス, Ω をその正則 3 形式, G を (J, g, Ω) を不変にする T^6 の自己同形からなる有限群とする. このとき, コンパクトな複素オービフォールド $X = T^6/G$ は少なくとも一つのクレパントな Kähler 特異点解消 (\tilde{X}, π) をもつ. さらに, \tilde{X} には Ricci 平坦な Kähler 計量で, $\text{Hol}(\tilde{g}) \subseteq \text{SU}(3)$ となるものが存在する. $\text{Hol}(\tilde{g}) = \text{SU}(3)$ となるための必要十分条件は, $\pi_1(T^6/G)$ が有限群となることである. (<Joyce2000B) □

【例 3.86 (T^6/\mathbb{Z}_3 のブローアップ)】

1. T^6/\mathbb{Z}_3 : $\zeta = e^{2i\pi/3}$ として, \mathbb{C}^3 の格子 Λ を

$$\Lambda = \{(a_1 + b_1\zeta, a_2 + b_2\zeta, a_3 + b_3\zeta) \mid a_i, b_j \in \mathbb{Z}\} \quad (3.5.4)$$

とすると, Λ は変換

$$\alpha : (z_1, z_2, z_3) \mapsto (\zeta z_1, \zeta z_2, \zeta z_3) \quad (3.5.5)$$

で不変となる. これより, $G = \{1, \zeta, \zeta^2\}$ として, $X = \mathbb{C}^3/\Lambda/G$ により複素オービフォールドを定義する.

2. オービフールド点 :

$$(\zeta z_1, \zeta z_2, \zeta z_3) = (z_1, z_2, z_3) + (a_1 + b_1 \zeta, a_2 + b_2 \zeta, a_3 + b_3 \zeta) \quad (3.5.6)$$

の解は,

$$z_i = \frac{-2a_i + b_i}{3} - \frac{a_i + b_i}{3} \zeta. \quad (3.5.7)$$

基本領域内のものに限定すると, 各 z_i について

$$z_i = 0, \quad \frac{2 + \zeta}{3}, \quad \frac{1 + 2\zeta}{3} \quad (3.5.8)$$

の3個なので, 特異点は $3^3 = 27$ 個.

3. トポロジー: X のクレパントな特異点解消 $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ はブローアップのみで, $\pi_1(X) = \{1\}$ が言えるので (RM20180104 参照), 上記の一般定理より, \tilde{X} は Calabi-Yau. ブローアップにより各特異点ごとに $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ の $(1, 1)$ コサイクルが1個生成されるので, Hodge 数 $h^{1,1}$ は

$$h^{1,1}(\tilde{X}) = 3^2 + 27 = 36. \quad (3.5.9)$$

また, T^6 の $(2, 1)$ コサイクル $dz^i \wedge dz^j \wedge dz^k$ で α で不変なものはないので, $h^{2,1}(\tilde{X}) = h^{2,1}(T^6/\mathbb{Z}^3) = 0$.

□

3.5.6 重み付き射影空間の部分多様体による構成

[定義 3.87 (重み付き射影空間, 多項式, 超曲面)] a_0, \dots, a_m を整数の組として, $\mathbb{C}\mathbb{P}^{m+1} \setminus \{0\}$ に対する $\mathbb{C}\mathbb{P}^*$ の作用

$$(z_0, \dots, z_m) \rightarrow (\lambda^{a_0} z_0, \dots, \lambda^{a_m} z_m), \quad \lambda \in \mathbb{C}^* \quad (3.5.10)$$

を考える. この作用による $\mathbb{C}\mathbb{P}^{m+1} \setminus \{0\}$ の商空間を重み付き射影空間 (weighted projective space) と呼び, $\mathbb{C}\mathbb{P}_{a_0, \dots, a_m}^m$ と表記する.

また, \mathbb{C}^{m+1} の多項式 $f(z_0, \dots, z_m)$ が

$$f(\lambda^{a_0} z_0, \dots, \lambda^{a_m} z_m) = \lambda^d f(z_0, \dots, z_m), \quad \forall \lambda, z_0, \dots, z_m \in \mathbb{C} \quad (3.5.11)$$

を満たす時, f を次数 d の重み付き同次多項式という. さらに, このような多項式を用いて定義される

$$X = \{[z_0 : \dots : z_m] \in \mathbb{C}\mathbb{P}_{a_0, \dots, a_m}^m \mid f(z_0, \dots, z_m) = 0\} \quad (3.5.12)$$

は, $\mathbb{C}\mathbb{P}_{a_0, \dots, a_m}^m$ の超曲面となり, $\mathbb{C}\mathbb{P}_{a_0, \dots, a_m}^m$ の次数 d の超曲面という. □

3.6 位相的性質

3.6.1 基本群

【定理 3.88 (3次元コンパクト複素多様体の基本群 [Tau92, ABC⁺96])】

有限表示をもつ任意の群 G に対し, 基本群が G と同型となる 3次元コンパクト複素多様体が, あるコンパクト (実4次元) 自己双対多様体のツイスター空間として実現される. _____□

3.7 多変数複素関数

3.7.1 1変数複素関数

【定理 3.89 (Cauchy の積分公式)】 \mathbb{C} の開円盤 Δ において, 任意の関数 $f \in C^\infty(\Delta)$ と $z \in \Delta$ に対して, 次の公式が成り立つ:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\Delta} \frac{f(w)dw}{w-z} + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\Delta} \frac{\partial f(w)}{\partial \bar{w}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z}$$

□

Proof. Stokes の定理より

$$\int_{\Delta-\{z\}} \frac{\partial f(w)}{\partial \bar{w}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z} = - \int_{\Delta-\{z\}} d \left(\frac{f dw}{w-z} \right) = - \int_{\partial(\Delta-\{z\})} \frac{f dw}{w-z}.$$

Q.E.D.

【系 3.90】 \mathbb{C} の開集合 U において, $f \in C^\infty(U)$ が正則であるための必要十分条件は, f が解析的, すなわち任意の点の近傍でべき級数展開可能であることである. □

【補題 3.91 (1変数の $\bar{\partial}$ -Poincaré の補題)】 開円盤 Δ 上の任意の $g(z) \in C^\infty(\Delta)$ に対して,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\Delta} \frac{g(w)}{w-z} dw \wedge d\bar{w}$$

により定義される関数は $C^\infty(\Delta)$ に属し,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$$

を満たす. □

3.7.2 基本的性質

【定理 3.92 (Hartogs の定理)】 U を $\mathbb{C}^n (n > 1)$ の多重円盤 $\Delta(r) = \{(z_1, \dots, z_n) \mid |z_i| < r, i = 1, \dots, n\}$, V をそれに含まれる多重円盤 $\Delta(r')(r' < r)$ とするとき, $U - V$ 上の正則関数は常に U 全体の正則関数に拡張できる. □

【系 3.93】 $\mathbb{C}^n (n > 1)$ の開集合 U において, U から一点を除く領域で定義された正則関数は, U 全体で定義された正則関数に一意的に拡張可能である. □

【定義 3.94 (Weierstrass 多項式)】 $a_i(z)$ を $z \in \mathbb{C}^{n-1}$ の正則関数として, 次の形の w の多項式を **Weierstrass 多項式** という.

$$w^d + a_1(z)w^{d-1} + \cdots + a_d(z), \quad a_i(0) = 0.$$

【定理 3.95 (Weierstrass の準備定理)】 f が \mathbb{C}^n の原点近傍で正則かつ, w -軸上で高踏的にはゼロでないとき, 原点の適当な近傍において f は, 一意的に

$$f = g \cdot h$$

と表される. ここで, g は次数 d の Weierstrass 多項式, h は $h(0) \neq 0$ を満たす正則関数である. □

Proof. 各 $z = (z_1, \dots, z_{n-1})$ に対し, $f(z, w)$ の w に関するゼロ点の個数 d は z に依らず, その値は $w = \lambda_i(z) (i = 1, \dots, d)$ で与えられる. このとき,

$$\lambda_1^q + \cdots + \lambda_d^q = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|w|=r} \frac{w^q (\partial f / \partial w)(z, w)}{f(z, w)} dw$$

より, 対応する Weierstrass 多項式 $g(z, w)$ の係数関数 $a_i(z)$ が一意的に定まる. また, 構成法より $h(z, w) = f(z, w)/g(z, w)$ は原点近傍で正則な関数に位置的に拡張される. Q.E.D.

【定理 3.96 (Riemann の拡張定理)】 $f(z, w)$ が円盤 $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ において正則で, $g(z, w)$ が $\bar{\Delta} - \{f = 0\}$ において有界正則だとする. このとき, g は Δ 全体で正則な関数に拡張可能である. □

Proof. z を固定したとき, $g(z, w)$ は有限個の点を除いて正則でかつ全域で有界なので, w の関数 \tilde{g} として Δ 全体に正則に拡張される (1 変数の Riemann 拡張定理). すると, $\{f = 0\} \subset \Delta(r) \subset \Delta$ となる適当な r に対して,

$$\tilde{g}(z, w) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|u|=r} \frac{\tilde{g}(z, u) du}{u - w}$$

より, g は Δ 全域で正則に拡張される. Q.E.D.

【定義 3.97 (正則関数の局所環)】 \mathbb{C}^n において, 点 z の近傍で正則な関数の作る環を $\mathcal{O}_{n,z}$ と表記する. 特に, $z = 0$ に対して, $\mathcal{O}_{n,0} = \mathcal{O}_n$ と略記する. □

【命題 3.98 (局所環の性質)】 $\mathcal{O}_{n,z}$ は局所環で, 一意分解環 (UFD) である. □

【定理 3.99 (Weierstrass の剰余定理)】 $g(z, w) \in \mathcal{O}_{n-1,0}[w]$ を w に関する次数 k の Weierstrass 多項式とする. このとき, 任意の $f \in \mathcal{O}_{n,0}$ に対し,

$$f = g \cdot h + r$$

が成り立つ. ここで, $r(z, w)$ は w に関して次数 $< k$ の多項式である. □

Proof. 十分小さい $\epsilon, \delta > 0$ に対して, $\|z\| < \epsilon, |w| < \delta$ において

$$h(z, w) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|u|=\delta} \frac{f(z, w)}{g(z, w)} \frac{du}{u-w}$$

は正則で,

$$\begin{aligned} r(z, w) &\equiv f(z, w) - g(z, w) \cdot h(z, w) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|u|=\delta} \frac{f(z, w)g(z, u) - g(z, w)}{g(z, w)} \frac{du}{u-w} \end{aligned}$$

は, w について $k-1$ 次以下の多項式.

Q.E.D.

【系 3.100 (弱い零点定理)】 $f(z, w) \in \mathcal{O}_n$ が既約で, $h \in \mathcal{O}_n$ が $f(z, w) = 0$ となる集合でゼロとなるなら, f は \mathcal{O}_n において h を整除する. □

3.7.3 留数定理

【定義 3.101 (有理 n 形式の留数)】 \mathbb{C}^n の原点の開近傍を $U = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < \epsilon\}$, $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(\bar{U})$ を $f^{-1}(0) = \{0\}$ となる \bar{U} の開近傍での正則関数の組とする. このとき, 有理 n 形式

$$\omega = \frac{g(z) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{f_1(z) \cdots f_n(z)}, \quad g \in \mathcal{O}(\bar{U})$$

の原点 0 での留数を

$$\text{Res}_{\{0\}}\omega \equiv \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^n \int_{\Gamma} \omega$$

により定義する. ここで Γ は n 次元トーラス

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |f_i(z)| = \epsilon_i\}.$$

□

【命題 3.102 (非縮退な極の留数)】 $f = (f_1, \dots, f_n)$ が非縮退, すなわち

$$\mathcal{J}_f(0) \equiv \left| \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(z_1, \dots, z_n)}(0) \right| \neq 0$$

のとき, 有理 n 形式 ω の留数に対して次の式が成り立つ:

$$\text{Res}_{\{0\}} = \frac{g(0)}{\mathcal{J}_f(0)}.$$

□

【命題 3.103 (留数の $2n-1$ 形式の積分による表示)】 \mathbb{C}^n の原点近傍 U で定義された有理 n 形式

$$\omega = \frac{g(z)dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{f_1(z) \cdots f_n(z)}, \quad g \in \mathcal{O}(\bar{U})$$

に対して, $D_i = (f_i)$, $D = D_1 + \dots + D_n$, $U_i = U - D_i$, $U^* = U - \{0\} = \bigcup_{i=1}^n U_i$ とおく. このとき, 同型

$$H^0(\cap_i U_i, \Omega^n) \cong H^{n-1}(U^*, \Omega^n) \cong H_{\bar{\partial}}^{n, n-1}(U^*) \cong H_{\text{DR}}^{2n-1}(U^*)$$

により $\omega \in H^0(U - D, \Omega^n)$ に対応する $H_{\text{DR}}^{2n-1}(U^*)$ の微分形式を η_ω ,

$$\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^n \omega \mapsto \eta_\omega$$

とするとき, 次の関係が成り立つ:

$$\text{Res}_{\{0\}}\omega = \int_{S^{2n-1}} \eta_\omega.$$

ここで, S^{2n-1} は原点を囲む微小球面. _____ □

【命題 3.104 (distinguished Dolbeault representative)】 η_ω は具体的に次式で与えられる：

$$\eta_\omega = g(z) \frac{n! \sum_i (-1)^{i-1} \bar{f}_i \left(\bigwedge_{j \neq i} \overline{df_j} \right) \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}{\|f\|^2}.$$

□

【定理 3.105 (留数定理)】 M をコンパクト複素多様体 M' の相対コンパクトで境界が滑らかな開部分多様体, U を \bar{M} の開近傍とする. M 上の有理 n 形式 ω に対して, $D = D_1 + \cdots + D_n$ をその有効極因子として, $Z = D_1 \cap \cdots \cap D_n$ が有限個の孤立点の集合となるとする. このとき, $\omega \in H^0(M, \mathcal{O}(D))$ に対応する $2n-1$ 形式を $\eta_\omega \in H_{\bar{\partial}}^{n, n-1}(M) \cong H_{\text{DR}}^{2n-1}(M)$ とすると,

$$\sum_{P \in Z} \text{Res}_P \omega = \int_{\partial M} \eta_\omega$$

が成り立つ. 特に, M がコンパクトな閉多様体のとき,

$$\sum_{P \in Z} \text{Res}_P \omega = 0$$

となる.

□

【命題 3.106 (留数の変換則)】 \mathbb{C}^n の原点の開近傍 U において, $f^{-1}(0) = \{0\} = g^{-1}(0)$ を満たすその上の正則写像 $f, g: \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}^n$ が, 線形関係式

$$g(z) = A(z)f(z) \Leftrightarrow g_i(z) = \sum_j a_{ij}(z)f_j(z)$$

を満たすとする. このとき, 任意の $h(z) \in \mathcal{O}(\bar{U})$ に対して,

$$\text{Res}_{\{0\}} \left(\frac{h dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}{f_1 \cdots f_n} \right) = \text{Res}_{\{0\}} \left(\frac{h \det(A) dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}{g_1 \cdots g_n} \right)$$

が成り立つ.

□

【定理 3.107 (局所双対定理)】 $f = (f_1(z), \cdots, f_n(z))$ を \mathbb{C}^n の原点の開近傍 U で定義された正則写像で, $f^{-1}(0) = \{0\}$ を満たすものとする. このとき, $g(z) \in \mathcal{O}(\bar{U})$ として, 任意の $h(z) \in \mathcal{O}(\bar{U})$ に対して

$$\int_{|f_i(z)|=\epsilon} \frac{g(z)h(z) dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}{f_1(z) \cdots f_n(z)} = 0$$

が成り立つなら, $g(z)$ は $\{f_1, \cdots, f_n\}$ が生成する $\mathcal{O}(U)$ のイデアルに属する.

□

3.7.4 交点数

【定義 3.108 (局所交点数)】 $U \subset \mathbb{C}^n$ を原点の開近傍, D_1, \dots, D_n を U の因子として, $D_1 \cap \dots \cap D_n = \{0\}$ が成り立つとする. いま, $f_i \in \mathcal{O}(\bar{U})$ を因子 D_i の定義関数とすると, $f = (f_1, \dots, f_n)$ に対し $f^{-1}(0) = \{0\}$ がなりたつ. このとき,

$$\omega(f_1, \dots, f_n) = \frac{df_1}{f_1} \wedge \dots \wedge \frac{df_n}{f_n}$$

として, D_i の局所交点数 (local intersection number) を

$$(D_1, \dots, D_n)_{\{0\}} \equiv \text{Res}_{\{0\}} \omega(f_1, \dots, f_n)$$

により定義する. □

【命題 3.109 (局所交点数の基本的な性質)】 局所交点数 $(D_1, \dots, D_n)_{\{0\}}$ は次の性質をもつ:

- (a) 値は整数で, イデアル $I = \{f_1, \dots, f_n\} \subset \mathcal{O}(\bar{U})$ のみに依存し, 生成元 f_1, \dots, f_n の取り方に依存しない. これより, 局所交点数の値は, 因子のみに依存し, その定義関数の選び方によらない.
- (b) 局所交点数は, 各因子 D_i に線形に依存する.
- (c) 因子系 D_i に対し, 領域 U におけるそれらの各交点における局所交点数の総和で定義される総交点数は, D_i の連続変形に対して変化しない.
- (d) 原点において交叉する因子系 D_i のうち, D_1 は非特異であるとする. このとき, $D'_i = D_1 \cap D_i$ に対して,

$$(D_1, \dots, D_n)_{\{0\}} = (D'_2, \dots, D'_n)_{\{0\}}$$

が成り立つ. これより,

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(z_1, \dots, z_n)} \neq 0, \quad (D_1, \dots, D_n)_{\{0\}} > 0$$

が導かれる.

- (e) 局所交叉数は, 写像 $f : U^* \rightarrow \mathbb{C}^n - \{0\}$ の写像度 $\deg(f)$ と一致する.

(f) $I = \{f_1, \dots, f_n\}$ を $\mathcal{O}(\bar{U})$ のイデアルとすると、 \mathcal{O}/I は有限次元複素ベクトル空間で、その次元は

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}/I) = (D_1, \dots, D_n)_{\{0\}}$$

で与えられる.

□

【定理 3.110 (Jacobi 関係式)】 $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の因子系 D_1, \dots, D_n のすべての交差点 P_ν が $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ に含まれるとして、それらの定義関数を f_1, \dots, f_n , 次数を d_1, \dots, d_n とする. このとき、大域的留数定理より、

$$\sum_{\nu} \text{Res}_{P_\nu} \left(\frac{g(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}{f_1(x) \cdots f_n(x)} \right) = 0, \quad \deg(g) \leq (d_1 + \dots + d_n) - (n+1)$$

が成り立つ.

これより、特に、 D_i が $d_1 \cdots d_n$ 個の異なる点で横断的に交わるときには、次の **Jacobi 関係式** (Jacobi 1834) が成り立つ:

$$\sum_{\nu} \frac{g(P_\nu)}{(\partial(f_1, \dots, f_n)/\partial(x_1, \dots, x_n))(P_\nu)} = 0, \quad \deg(g) \leq \sum d_i - (n+1).$$

$n = 1$ のとき、これは多重零点を持たない 1 変数多項式 f に対する次の Lagrange 補間公式

$$\sum_{P: f(P)=0} \frac{g(P)}{f'(P)} = 0, \quad \deg(g) \leq \deg(f) - 2.$$

に帰着する.

□

【系 3.111 (Cayley-Bacharach の定理)】 \mathbb{C} と \mathbb{D} を、 \mathbb{C}^2 のそれぞれ m 次、 n 次の曲線で、異なる mn 個の点で交わるものとする. このとき、次数が $m+n-3$ で、これらの交点のうち $mn-1$ 個を通過する曲線 E は、必ず残りの交点も通過する. □

【系 3.112 (Cayley-Bacharach の定理の一般化)】 $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ の曲線 C, D の交叉が

$$C \cdot D = \sum_{\nu} m_{\nu} P_{\nu}$$

と表され、かつ、 C はこれらすべての交点において滑らかとする。このとき、 $m+n-3$ 曲線 E と C の交点数が、ある ν_0 に対して

$$(C \cdot E)_{P_\nu} \geq m_\nu \quad (\nu \neq \nu_0), \quad (C \cdot E)_{P_{\nu_0}} \geq m_{\nu_0} - 1$$

を満たすなら、 $(C \cdot E)_{P_{\nu_0}} \geq m_{\nu_0}$ が成り立つ。 _____ □

【系 3.113 (Pascal の定理とその逆)】 $\mathbb{C}P^2$ の滑らかな 2 次曲面 Q 上に頂点を持つ 6 角形に対して、3 組の対辺対の延長線の交点は直線上に乗る。

逆に、 $\mathbb{C}P^2$ 上の 6 角形 $H = L_1 L_2 \cdots L_6$ の対辺対の延長線の交点が直線上に乗るなら、 H の頂点は適当な 2 次曲面にのる。 _____ □

【系 3.114 (Cayley-Bacharach の定理の逆)】 $\mathbb{C}P^2$ の n^2 個の異なる点からなる 0-サイクル $\Gamma = P_1 + \cdots + P_{n^2}$ に対して、 Γ の $n^2 - 1$ 個の点を通る任意の次数 $2n - 3$ の曲線 E は、必ず残りの点も通過するとする。このとき、 Γ を固定点集合に含む n 次曲線の 1 次元線形系が存在する。 _____ □

【系 3.115 (Reiss 関係式)】 方程式 $f(x, y) = 0$ により決まる \mathbb{C}^2 の曲線 C と直線 $L: x = 0$ が n 個の異なる点で交わるとする。このとき、次の関係式が成り立つ：

$$\sum_{(x,y) \in L \cdot C} \frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_x f_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3} = 0.$$

L と C の交点 P_ν における C の曲率を κ_ν 、その点での接線と y 軸のなす角を θ_ν とするとき、この関係式は、

$$\sum_{\nu} \frac{\kappa_\nu}{\sin^3 \theta_\nu} = 0$$

と書き換えられる。 _____ □

【命題 3.116 (複素面上の曲線の交点への一般化)】 L, L' を複素曲面上の直線束、 K を標準直線束、 $C \in |L|$ と $C' \in |L'|$ を $d = L \cdot L'$ 個の点で横断的に交わる S 上の曲線とする。このとき、これらの交点の内 $d - 1$ を通過する曲線 $D \in |K + L + L'|$ は、必ず残りの交点も通過する。 _____ □

Proof. $\sigma \in H^0(S, \mathcal{O}(L))$ および $\sigma' \in H^0(S, \mathcal{O}(L'))$ を $C = (\sigma)$, $C' = (\sigma')$ となる切断, $\psi \in H^0(S, \mathcal{O}(K + L + L')) = H^0(S, \Omega^2(L + L'))$ を $D = (\psi)$ となる切断とすると,

$$\omega = \frac{\psi}{\sigma \otimes \sigma'}$$

は, $C + C'$ を極因子とする S 上の有理 2 形式となる. この有理 2 形式に留数定理を適用すると,

$$\sum_{P_\nu \in C \cap C'} \text{Res}_{P_\nu}(\omega) = 0$$

となるが, 仮定で D が通過する点 $d-1$ 個の交点では, $\psi(P_\nu) = 0$ より, 留数はゼロとなる. したがって, 残りの交点でも $\psi(P_\nu) = 0$ となる. これは, D がすべての交点を通ることを意味する. Q.E.D.

3.7.5 局所環

【命題 3.117 (正則関数の局所環)】 \mathbb{C}^n の局所正則関数の層の原点でのストーク

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_n \equiv \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \{0\} \in U}} \mathcal{O}(U)$$

は, 局所環となる, すなわち極大イデアルを一個のみ持ち, 次の性質をもつ:

1. \mathcal{O} は一意分解環である.
2. \mathcal{O} は Noether 環である.
3. M を有限生成 \mathcal{O} 加群とすると, \mathcal{O} 加群 R に対して, 完全系列

$$0 \rightarrow R \rightarrow \mathcal{O}^{(k)} \rightarrow M \rightarrow 0$$

が成り立つなら, R も有限生成である. ここで,

$$\mathcal{O}^{(k)} = \overbrace{\mathcal{O} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}}^k$$

である.

4. 有限生成 \mathcal{O} 加群 P, Q, R に対して, 完全系列

$$0 \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow 0$$

が成り立つなら, 任意の有限生成 \mathcal{O} 加群 M に対して, 次の2つの系列は完全になる:

$$\begin{aligned} P \otimes_{\mathcal{O}} M &\rightarrow Q \otimes_{\mathcal{O}} M \rightarrow R \otimes_{\mathcal{O}} M \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(M, P) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(M, Q) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(M, R). \end{aligned}$$

□

【補題 3.118 (中山の補題)】 m を \mathcal{O} の極大イデアルとするとき, 有限生成 \mathcal{O} 加群 M に対して $M = mM$ となれば, $M = (0)$ である. □

【系 3.119】 $[v_1], \dots, [v_k]$ が $M_0 \equiv M/mM$ を生成するなら, v_1, \dots, v_k は M を生成する. □

【系 3.120】 $\phi: M \rightarrow N$ を \mathcal{O} 加群の準同形とする. もし $\phi_0: M_0 \rightarrow N_0$ が全射なら, ϕ も全射となる. □

【命題 3.121 (射影加群)】 M を有限生成 \mathcal{O} 加群とする. このとき, M が射影的であるための必要十分条件は, M が自由加群となることである. □

3.7.6 Tor と Ext

【定義 3.122 (射影分解)】 R 加群 M に対し, 射影 R 加群からなる複体 (E_*, ∂) が存在して, 完全系列

$$E_*(M) : \cdots \longrightarrow E_m \xrightarrow{\partial} E_{m-1} \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} E_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

が成り立つとき, $E_*(M)$ を R 加群 M の射影分解 (projective resolution) と呼ぶ.

$E_*(M)$ に対して, (E_*, ∂) のホモロジーを $H_*(E_*(M))$ と表す. このとき, $H_0(E_*(M)) \cong M$ となる. □

【命題 3.123 (射影分解の性質)】

- 射影分解は常に存在する.
- 加群の準同形写像 $\phi: M \rightarrow N$ と, 射影分解 $E_*(M)$ および $E_*(N)$ が与えられたとき, 複体写像 $\Phi: E_*(M) \rightarrow E_*(N)$ がチェーンホモトピー同値写像の自由度を除いて一意的に存在し, 次の図式が可換となる:

$$\begin{array}{ccc} H_0(E_*(M)) & \xrightarrow{\Phi_*} & H_0(E_*(N)) \\ \cong & & \cong \\ M & \xrightarrow{\phi} & N \end{array}$$

- 加群の短完全系列 $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ に対して, 複体写像の系列 $0 \rightarrow E_*(M') \rightarrow E_*(M) \rightarrow E_*(M'') \rightarrow 0$ が完全となる射影分解が存在する.

□

【定義 3.124 ($\text{Tor}_n^R(M, N)$)】 M, N を R 加群, $E_*(M)$ を M の射影分解とすると, 複体 $(E_k(M) \otimes_R N, \partial \otimes 1)$ のホモロジー群 $H_k(E_*(M) \otimes_R N)$ を $\text{Tor}_k^R(M, N)$ と表し, M と N のねじれ積 (torsion product) と呼ぶ. □

【命題 3.125 (ねじれ積の基本的な性質)】

- $\text{Tor}_0^R(M, N) = M \otimes_R N$.
- R が可換環のとき, $\text{Tor}_n^R(M, N) \cong \text{Tor}_n^R(N, M)$.
- M が平坦な R 加群 (例えば, 射影加群, 自由加群) のとき, $\text{Tor}_k^R(M, N) = 0 (k = 1, 2, \dots)$.
- R が単項イデアル環のとき, $\text{Tor}_k^R(M, N) = 0 (k = 2, 3, \dots)$.
- $\text{Tor}_*^R(M, N)$ は, R 加群の圏の積 $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ から次数付き R 加群の圏への関手を与え, M, N について共変的となる.
- $\text{Tor}_k^R(\oplus_i M_i, N) \cong \oplus_i \text{Tor}_k^R(M_i, N)$.
- $\text{Tor}_k^R(\lim_{\rightarrow} M_i, N) \cong \lim_{\rightarrow} \text{Tor}_k^R(M_i, N)$.

8. R 加群の短完全系列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

に対して、長完全系列

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Tor}_k^R(M_1, N) & \xrightarrow{f_*} & \mathrm{Tor}_k^R(M_2, N) & \xrightarrow{g_*} & \mathrm{Tor}_k^R(M_3, N) \\ & & \xrightarrow{\partial} & & \mathrm{Tor}_{k-1}^R(M_1, N) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^R(M_3, N) \\ & & \xrightarrow{\partial} & & M_1 \otimes_R N & \longrightarrow & M_2 \otimes_R N & \longrightarrow & M_3 \otimes_R N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

が成り立つ。

□

【補題 3.126】 \mathbb{C}^n 上の正則関数の層の原点における局所環を \mathcal{O} , m をその極大イデアルとして、同一視 $\mathcal{O}/m \cong \mathbb{C}$ のもとで、 $\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}}(\mathbb{C}, N) = 0$ なら N は自由 \mathcal{O} 加群である。 □

【定理 3.127 (Syzygy 定理)】 \mathcal{O} を \mathbb{C} の原点での局所環とする。 \mathcal{O} 加群 F に対して、有限生成 \mathcal{O} 加群 M と、射影的 \mathcal{O} 加群列 E_k が存在して、次の完全系列が成立するなら、 F は射影加群である。

$$0 \rightarrow F \rightarrow E_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow E_1 \rightarrow E_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

□

【定義 3.128 ($\mathrm{Ext}_R^k(M, N)$)】 M, N を R 加群, $E_*(M)$ を M の射影分解とするとき、複体 $(\mathrm{Hom}_R(E_k(M), N), \partial^*)$ のコホモロジー群 $H^k(\mathrm{Hom}_R(E_*(M), N))$ を $\mathrm{Ext}_R^k(M, N)$ と表し、 M と N のねじれ積 (torsion product) と呼ぶ。 □

【命題 3.129 (Ext の基本的な性質)】

1. $\mathrm{Ext}_R^0(M, N) = \mathrm{Hom}_R(M, N)$.
2. M が射影 R 加群, または N が入射 R 加群なら, $\mathrm{Ext}_R^k(M, N) = 0 (k = 1, 2, \dots)$.
3. R が単項イデアル環のとき, $\mathrm{Ext}_R^k(M, N) = 0 (k = 2, 3, \dots)$.
4. $\mathrm{Ext}_R^*(M, N)$ は, R 加群の圏の積 $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ から次数付き R 加群の圏への関手を与え, N について共変的, M について反変的となる。

$$5. \text{Ext}_R^k(\oplus_i M_i, \prod_j N_j) \cong \prod_{i,k} \text{Ext}_R^k(M_i, N_j).$$

6. R 加群の短完全系列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & 0 \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

に対して, 長完全系列

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \text{Ext}_R^k(M_2, N) & \longrightarrow & \text{Ext}_R^k(M_1, N) & \xrightarrow{\partial} & \text{Ext}_R^{k+1}(M_3, N) & \longrightarrow & \cdots \\ \cdots & \longrightarrow & \text{Ext}_R^k(M, N_2) & \longrightarrow & \text{Ext}_R^k(M, N_3) & \xrightarrow{\partial'} & \text{Ext}_R^{k+1}(M, N_1) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

が成り立つ.

□

【命題 3.130】 \mathcal{O} を局所環, M を \mathcal{O} 加群とする. $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(M, E) = 0$ が任意の射影 \mathcal{O} 加群 E に対して成り立つことは, M が射影的であるための必要十分条件である. □

3.7.7 局所双対定理

この項では, \mathbb{C}^n の原点の局所環を $\mathcal{O} = \mathcal{O}_n$ と記す.

【定義 3.131 (\mathcal{O} の正則列)】 \mathcal{O} の元の列 (f_1, \dots, f_r) に対して, イデアール I_k を $I_k = \{f_1, \dots, f_k\} (k = 0, \dots, r)$ により定義する. このとき, 任意の $k = 1, \dots, r$ に対し, 常に \mathcal{O}/I_{k-1} において $[f_k] \neq 0$ のとき, (f_1, \dots, f_r) を正則列 (regular sequence) という. この条件は, 任意の $k = 1, \dots, r$ に対して, 解析部分集合 $V_k = \{f_1(z) = \dots = f_k(z) = 0\}$ の余次元が k となることと同等である. □

【定義 3.132 (Koszul 複体)】 $V = \mathbb{C}^r, e_1, \dots, e_r$ を V の標準基底, (f_1, \dots, f_r) を $\mathcal{O} = \mathcal{O}_n$ の正則列として, 複体 $(E_*(f), \partial_*)$ を次のように定義する. まず,

$$E_k = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^k V, \quad k = 0, 1, \dots, r.$$

($E_0 = \mathcal{O}$). つぎに, E_k の基底を

$$e_J = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}, \quad J = (j_1, \dots, j_k) \subset (1, \dots, r)$$

として, 境界作用素 $\partial_k : E_k \rightarrow E_{k-1}$ を

$$\partial(e_J) = \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} f_{j_\nu} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge \check{e}_{j_\nu} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}$$

により定義する. □

【補題 3.133 (Koszul 複体による局所環の射影分解)】 (f_1, \dots, f_r) を $\mathcal{O} = \mathcal{O}_n$ の正則列, I をイデアル $I = \{f_1, \dots, f_r\}$ とするとき, Koszul 複体 $E_*(f)$ は \mathcal{O}/I の射影分解を与える. □

【命題 3.134 (Koszul 複体の自己双対性)】 $E_*(f)$ を Koszul 複体とすると, 対応

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(E_k, \mathcal{O}) \ni (e_J)^* \mapsto e_{J^*} = \pm e_{J^c} \in E_{r-k}, \quad J^c = (1, \dots, r) - J, \quad e_J \wedge e_{J^*} = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

により $E_*(f)$ は双対複体 $\mathrm{Hom}(E_*(f), \mathcal{O})$ と同型になる.

これより, $I = \{f_1, \dots, f_r\}$ に対して,

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}}^k(\mathcal{O}/I, \mathcal{O}) = 0 \quad (k < r), \quad \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}}^r(\mathcal{O}/I, \mathcal{O}) \cong \mathcal{O}/I$$

が成り立つ.

さらに, $I' = I(f')$ を I に含まれる正規イデアルとして, $f'_i = \sum_j a_{ij} f_j$, $\Delta = \det(a_{ij})$ とおくと, 次の可換図式が成り立つ:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}}^r(\mathcal{O}/I, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{O}/I \\ \downarrow & & \downarrow \Delta \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}}^r(\mathcal{O}/I', \mathcal{O}) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{O}/I' \end{array}$$

ここで, 下向きの写像はいずれも単射となる. □

【定義 3.135 (双 1 次留数形式)】 (f_1, \dots, f_n) を $\mathcal{O} = \mathcal{O}_n$ の正則列とする. このとき,

$$\mathrm{res}_f(h, g) = \mathrm{Res}_{\{0\}} \left(\frac{g(z)h(z)dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}{f_1(z) \cdots f_n(z)} \right)$$

により定義される \mathcal{O} 上の双 1 次形式は, 同一視 $\Omega^n \cong \mathcal{O}$ のもとで, \mathcal{O}/I 上の双 1 次形式

$$\mathrm{res}_f : \mathcal{O}/I \otimes \mathcal{O}/I \rightarrow \mathbb{C}$$

を定義する. □

目次へ

【定理 3.136 (局所双対定理 II (Intrinsic version))】 正則イデア
ル $I = \{f_1, \dots, f_n\}$ に対し, res_f から定義される写像

$$\text{res} : \mathcal{O}/I \otimes \text{Ext}_{\mathcal{O}}^n(\mathcal{O}/I, \Omega^n) \rightarrow \mathbb{C}$$

は, 局所座標系および I の正則生成列の取り方に依存しない, 非退化双 1
次形式を与える. _____ □

3.8 層係数コホモロジー

3.8.1 de Rham の定理

【定理 3.137 (de Rham の定理)】 M を (パラコンパクトで) なめらかな多様体とする.

1. M の単体分割を K とすると,

$$\check{H}^*(M, \mathbb{Z}) \cong H^*(K, \mathbb{Z}) \cong H_{\text{sing}}^*(M, \mathbb{Z}).$$

2. $\check{H}^*(M, *)$ は完全なコホモロジー関手で,

$$\check{H}^*(M, *) = H^*(M, *).$$

3. (Poincaré の補題) 定数層 \mathbb{R} の次の層分解は完全である :

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^2 \rightarrow \dots$$

4. \mathcal{A}^p は散布層である. したがって,

$$H^k(M, \mathcal{A}^p) = 0, \quad k \geq 1.$$

5. M 上のコホモロジー環に対して,

$$H_{\text{DR}}^*(M, \mathbb{R}) \cong \check{H}^*(M, \mathbb{R}) \cong H_{\text{sing}}^*(M, \mathbb{R}).$$

□

3.8.2 Dolbeault の定理

【定義 3.138 (Dolbeault コホモロジー)】 複素多様体 M 上で大域的に定義された微分形式の線形空間 $A^{p,q} = \Gamma(M, \mathcal{A}^{p,q})$ から定義される双対複体

$$0 \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots$$

のコホモロジーを Dolbeault コホモロジーといい, $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$ と表す. □

【定理 3.139 ($\bar{\partial}$ -Poincaré 補題)] Δ^n を原点を中心とする \mathbb{C}^n の多重円盤, $\Delta^{*n} = \Delta^n - \{0\}$ とする. このとき,

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\Delta^{*k} \times \Delta^l) = 0, \quad q \geq 1. \quad (3.8.1)$$

□

【定理 3.140 (Dolbeault の定理)] M を複素多様体とする.

1. $\check{H}^*(M, *)$ は完全なコホモロジー関手で,

$$\check{H}^*(M, *) = H^*(M, *).$$

2. ($\bar{\partial}$ -Poincaré 補題) 層 Ω^p の次の層分解は完全である :

$$0 \rightarrow \Omega^p \rightarrow \mathcal{A}^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p,2} \rightarrow \dots$$

3. $\mathcal{A}^{p,q}$ は散布層である. したがって,

$$H^k(M, \mathcal{A}^{p,q}) = 0, \quad k \geq 1.$$

4. M 上のコホモロジー環に対して,

$$H^q(M, \Omega^p) \cong H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M). \quad (3.8.2)$$

□

【命題 3.141 (諸定理)]

1. 任意の n 次元複素多様体 M に対し,

$$H^q(M, \mathcal{O}) \cong H_{\bar{\partial}}^{0,q}(M) = 0, \quad q > n.$$

- 2.

$$H^q(\mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^l, \mathcal{O}) = 0, \quad q > 0.$$

- 3.

$$H^q(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}^*) = 0, \quad q > 0.$$

これより, \mathbb{C}^n の任意の解析的超曲面は一個の正則関数のゼロ点集合として表される.

- 4.

$$H^p(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \Omega^q) = \begin{cases} \mathbb{C} & p = q \leq n, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

□

3.9 調和理論

3.9.1 Hodge 理論

【定義 3.142 (Hodge 双対と調和形式)】

1. n 次元複素多様体 M のエルミート計量 h のユニタリ基底を ϕ_i ,

$$h = \sum_i \phi_i \otimes \bar{\phi}_i$$

対応する体積要素を

$$\Phi = (-1)^{n(n-1)/2} \left(\frac{i}{2}\right)^n \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n \wedge \bar{\phi}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\phi}_n$$

とする. これを用いて, 微分形式の Hodge 双対

$$* : A^{p,q}(M) \rightarrow A^{n-p,n-q}(M)$$

を, 任意の $\psi \in A^{p,q}$ に対して,

$$\psi(z) \wedge *\eta(z) = (\psi(z), \eta(z))\Phi$$

が成り立つという条件で定義する. ただし, $(\psi(z), \eta(z))$ は $\psi(z)$ と $\eta(z)$ のエルミート内積である. Kähler 計量に対応する Hermite 計量を

$$h = \sum_{i,j} \delta_{ij} \phi^i \otimes \bar{\phi}^j$$

として, (p, q) 形式の基底を

$$\begin{aligned} I = (i_1, \dots, i_p) &\mapsto \phi^I = \phi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi^{i_p}, \\ J = (j_1, \dots, j_q) &\mapsto \bar{\phi}^{\bar{J}} = \bar{\phi}^{j_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\phi}^{j_q} \end{aligned}$$

で表すと,

$$(\phi^I \wedge \bar{\phi}^{\bar{J}}, \phi^{I'} \wedge \bar{\phi}^{\bar{J}'}) = \delta_{I'}^I \delta_{J'}^{\bar{J}}$$

より, (p, q) 形式

$$\lambda = \sum_{I, \bar{J}} \lambda_{I, \bar{J}} \phi^I \wedge \bar{\phi}^{\bar{J}}$$

に対して,

$$(*\lambda)_{I', \bar{J}'} = \frac{(-1)^{pq+p+q}}{p!q!} \sum_{I, \bar{J}} \epsilon^{I' I \bar{J}' \bar{J}} \lambda_{I, \bar{J}}$$

が成り立つ。ここで,

$$\phi^{I'} \wedge \phi^I \wedge \bar{\phi}^{J'} \wedge \bar{\phi}^{J} = \epsilon^{I' I J' J} \Phi$$

である。これより, 特に

$$* * \lambda = (-1)^{p+q} \lambda$$

が成り立つ。

2. Hodge 双対を用いて

$$\bar{\partial}^* := - * \bar{\partial} * : A^{p,q} \rightarrow A^{p,q-1}$$

と定義すると, $\psi \in A^{p,q}, \eta \in A^{p,q-1}$ に対して

$$(\bar{\partial}^* \psi, \eta) = (\psi, \bar{\partial} \eta)$$

が成り立つ。ただし,

$$(\psi, \eta) := \int (\psi(z), \eta(z)) \Phi(z)$$

3. $\bar{\partial}$ -Laplacian を

$$\Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial} \bar{\partial}^* + \bar{\partial}^* \bar{\partial}$$

で定義するとき,

$$\Delta_{\bar{\partial}} \psi = 0$$

を満たす微分形式を調和形式といい, 調和 (p, q) 形式の全体を $\mathcal{H}^{p,q}(M)$ と表す。

□

【定理 3.143 (Hodge の定理)】 M をコンパクト複素多様体とする。

1. $\dim \mathcal{H}^{p,q}(M) < \infty$.
2. $\mathcal{H} : A^{p,q}(M) \rightarrow \mathcal{H}^{p,q}(M)$ を関数空間としての垂直射影とすると, 次の性質をもつ Green 作用素

$$G : A^{p,q}(M) \rightarrow A^{p,q}(M)$$

が一意的に存在する :

$$G(\mathcal{H}^{p,q}(M)) = 0, \tag{3.9.1}$$

$$\bar{\partial} G = G \bar{\partial}, \quad \bar{\partial}^* G = G \bar{\partial}^*, \tag{3.9.2}$$

$$I = \mathcal{H} + \Delta_{\bar{\partial}} G. \tag{3.9.3}$$

3. 自然な写像 $\mathcal{H}^{p,q}(M) \rightarrow H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$ は同型である.

□

【定理 3.144 (Kodaira-Serre 双対定理)】 M を n 次元コンパクト複素多様体とする.

0. $*\Delta_{\bar{\partial}} = \Delta_{\bar{\partial}}*$ より, 微分形式に対する Hodge 双対 $*$ は次の同型写像を誘導する:

$$* : \mathcal{H}^{p,q}(M) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}^{n-p,n-q}(M).$$

1. $H^n(M, \Omega^n) \cong \mathbb{C}$.

2. 双線形写像

$$H^p(M; \Omega^q) \cup H^{n-p}(M; \Omega^{n-q}) \rightarrow H^n(M; \Omega^n)$$

は非退化である.

□

3.9.2 Hodge 分解

【定理 3.145 (Hodge 分解)】 Kähler 多様体上での Laplace 作用素

$$\Delta_d = dd^* + d^*d = -(d*d* + *d*d), \quad \Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial} = -(\bar{\partial}*\bar{\partial}* + *\bar{\partial}*\bar{\partial})$$

に対しては,

$$\Delta_{\bar{\partial}} = \frac{1}{2}\Delta_d$$

が成り立つので, コンパクト Kähler 多様体 M の複素係数コホモロジーは次の関係式を満たす:

$$H^r(M, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(M), \quad (3.9.4a)$$

$$H^{p,q}(M) \cong \overline{H^{q,p}(M)}. \quad (3.9.4b)$$

□

【系 3.146】 複素次元 n のコンパクト Kähler 多様体 M に対して,

$$b_r = \dim_{\mathbb{C}} H^r(M, \mathbb{C}), \quad h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(M)$$

とおくとき, 次の関係式が成り立つ:

$$b_r = \sum_{p+q=r} h^{p,q}, \quad (3.9.5)$$

$$h^{p,q} = h^{q,p}, \quad h^{p,q} = h^{n-p,n-q}. \quad (3.9.6)$$

□

【系 3.147】 $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の Dolbeault コホモロジーに対して,

$$H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \Omega^p) \cong H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \begin{cases} 0 & : p \neq q \\ \mathbb{C} & : p = q \end{cases}. \quad (3.9.7)$$

特に, $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \Omega^p) = 0$ ($p > 0$) より, $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ 上には大域的な正則微分形式は存在しない. □

【定義 3.148 (微分形式における昇降演算子)】 ケーラー多様体 (M, J, ω) 上の (p, q) 形式の作る線形集合を $A^{p,q}(M)$ として, 線形作用 L を

$$L : A^{p,q}(M) \rightarrow A^{p+1,q+1}(M); \quad L(\chi) = \chi \wedge \omega \quad (3.9.8)$$

により定義し, その共役作用素を Λ とする:

$$\Lambda = L^* : A^{p,q}(M) \rightarrow A^{p-1,q-1}(M). \quad (3.9.9)$$

さらに, 射影演算子 $\Pi^{p,q}$ を

$$\Pi^{p,q} : A(M) \rightarrow A^{p,q}(M), \quad (3.9.10)$$

として, $\Pi^p = \sum_{i+j=p} \Pi^{i,j}$ とおく. □

【命題 3.149】

1. 作用素 Λ は次の交換関係を満たす:

$$[\Lambda, \bar{\partial}] = -\sqrt{-1}\partial^*, \quad [\Lambda, \partial] = \sqrt{-1}\bar{\partial}^*. \quad (3.9.11)$$

これより, 特に, $\Delta = dd^* + d^*d$ に対して,

$$[L, \Delta] = 0, \quad [\Lambda, \Delta] = 0. \quad (3.9.12)$$

2. $h : A(M) \rightarrow A(M)$ を

$$h = \sum_p^{2n} (n-p) \Pi^p \quad (3.9.13)$$

により定義するとき, $\{h, L, \Lambda\}$ は $\mathfrak{sl}(2)$ の $A(M)$ への表現を与える:

$$[h, L] = -2L, \quad [h, \Lambda] = 2\Lambda, \quad [\Lambda, L] = h. \quad (3.9.14)$$

□

【定理 3.150 (Hard Lefschetz Theorem)】 線形写像

$$L^k : H^{n-k}(M) \rightarrow H^{n+k}(M)$$

は同型対応を与える. さらに, primitive cohomology を

$$P^{n-k}(M) = \text{Ker}(L^{k+1} : H^{n-k}(M) \rightarrow H^{n+k+2}(M)) = (\text{Ker} \Lambda) \cap H^{n-k}(M)$$

により定義すると, 次の Lefschetz 分解公式が成り立つ:

$$H^m(M) = \bigoplus_k L^k P^{m-2k}(M).$$

□

【定理 3.151 (Hodge-Riemann 双線形関係)】 複素 n 次元コンパクトケーラー多様体 (M, J, ω) において, $H^{n-k}(M)$ 上の双線形形式

$$Q : H^{n-k}(M) \otimes H^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{C}$$

を

$$Q(\xi, \eta) \equiv \int_M \xi \wedge \eta \wedge \omega^k$$

により定義する. このとき,

$$Q(H^{p,q}(M), H^{p',q'}(M)) = 0, \quad \text{for } p \neq p' \text{ or } q \neq q',$$

$$Q(L^k \eta, L^k \xi) = Q(\eta, \xi)$$

が成り立つ. さらに, primitive class $\xi \in P^{p,q}(M)$ ($p+q = n-k$) に対して, 次の不等式が成り立つ:

$$(\sqrt{-1})^{p-q} (-1)^{(n-k)(n-k-1)/2} Q(\xi, \bar{\xi}) > 0$$

この不等式と Lefschetz 分解公式より, Q は $H^{n-k}(M)$ で非退化となる.

□

【定理 3.152 (指数定理)】 複素 $2n$ 次元のケーラー多様体 M に対して, その指数

$$I(M) \equiv \text{signature}(Q); \quad Q(\xi, \eta) = \int_M \xi \wedge \eta, \quad \xi, \eta \in H^n(M, \mathbb{R})$$

は, Hodge 数 $h^{p,q} = \dim H^{p,q}(M)$ を用いて

$$I(M) = \sum_{p+q:\text{even}} (-1)^p h^{p,q} \quad (3.9.15)$$

と表される. □

3.9.3 ベクトルバンドへの一般化, Kodaira-Serre の双対定理

【定理 3.153 (Hodge の定理 : 正則複素ベクトルバンドルへの一般化)】

$E \rightarrow M$ をコンパクト複素多様体 M 上の正則複素ベクトルバンドルとするとき, $\bar{\partial} : A^{p,q}(E) \rightarrow A^{p,q+1}(E)$ が自然に定義される. $\bar{\partial}^* = -*_E \cdot \bar{\partial} \cdot *_E$ をその共役作用素として, E 上の $\bar{\partial}$ -Laplacian を

$$\Delta \equiv \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial} : A^{p,q}(M) \rightarrow A^{p,q}(M)$$

により定義する.

1. 調和空間 $\mathcal{H}^{p,q}(E) = \text{Ker } \Delta$ は有限次元である.
2. $\mathcal{H} : A^{p,q}(E) \rightarrow \mathcal{H}^{p,q}(E)$ を直交射影とすると, 線形作用素 $G : A^{p,q}(E) \rightarrow A^{p,q}(E)$ が存在して, 次の条件を満たす :

$$\begin{aligned} G\mathcal{H} &= 0, \\ [G, \bar{\partial}] &= [G, \bar{\partial}^*] = 0, \\ I &= \mathcal{H} + \Delta G. \end{aligned}$$

3. 次の同型写像が存在する :

$$\mathcal{H}^{p,q}(E) \rightarrow H_{\bar{\partial}}^{p,q}(E) \cong H^q(M, \Omega^p(E)).$$

[出典・証明 : Griffiths P, Harris J: "Principles of Algebraic Geometry" (Wiley, 1994)] □

目次へ

【定理 3.154 (Kodaira-Serre の双対定理)】 n 次元複素多様体 M において、双対作用素 $*$ は、次の同型を与える：

$$H^q(M, \Omega^p(E)) \cong H^{n-q}(M, \Omega^{n-p}(E^*))^*.$$

特に、 $p = 0$ に対応する次の同型は、**Kodaira-Serre** の双対定理と呼ばれる：

$$H^q(M, \mathcal{O}(E)) \cong H^{n-q}(M, \mathcal{O}(E^* \otimes K_M))^*.$$

〔出典・証明：Griffiths P, Harris J: "Principles of Algebraic Geometry" (Wiley, 1994)〕 _____ □

3.10 因子と線バンドル

3.10.1 線バンドル

【定義 3.155 (正則線バンドル)】 複素多様体 M の \mathbb{C} をファイバーとする複素 1 次元ベクトルバンドル L において, その開被覆 $\{U_\alpha\}$ に関する自明化

$$\phi_\alpha : L_{U_\alpha} = \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C} \quad (3.10.1)$$

において, 遷移関数 $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{C}^*$,

$$g_{\alpha\beta}(z) = (\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})|_{L_z} \in \mathbb{C}^* \quad (3.10.2)$$

が非ゼロ正則関数となるとき, L を正則線バンドルと呼ぶ. $g_{\alpha\beta}$ は遷移関数に対する条件

$$(*) \quad g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\alpha} = 1, \quad g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} \cdot g_{\gamma\alpha} = 1$$

を満たす.

U_α 上の非ゼロ正則関数 $f_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$ が存在して,

$$(**) \quad g'_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} \cdot g_{\alpha\beta}$$

を満たすとき, 2つの正則線バンドルは同型と定義する. □

3.10.2 因子

【定義 3.156 (因子)】 複素多様体 M において, その既約解析的超曲面の局所有限な \mathbb{Z} 係数形式和

$$D = \sum_i a_i V_i$$

を M 上の因子といい, その全体を $\text{Div}(M)$ と表す. □

【定義 3.157 (有理型関数)】 M を複素多様体とする.

1. M 上の関数 f が局所的に互いに素な正則関数 g, h を用いて $f = g/h$ と表されるとき有理型関数という.

2. $\mathcal{M}(U)$ が U の有理型関数の全体となる M 上の層を \mathcal{M} , $\mathcal{M}^*(U)$ が恒等的にゼロでない有理型関数の全体となる \mathcal{M} の部分層を \mathcal{M}^* と表す.

□

【定義 3.158 (関数の因子)】

1. (正則関数の超曲面に沿う位数) V を M の既約解析的超曲面とする. $p \in V$ の近傍 U における V の局所定義関数を $f (\in \mathcal{O}_p)$ とするとき, 任意の $g \in \mathcal{O}(U)$ は \mathcal{O}_p において, 整数 a および f と互いに素な関数 $h \in \mathcal{O}_p$ を用いて

$$g = f^a h$$

と分解される. このとき, $\text{ord}_{V,p}(g) = a$ と定義し, g の p における V に沿う位数という. g が M 上の正則関数の時, $\text{ord}_{V,p}(g)$ は p の取り方に依らないので, その値を単に $\text{ord}_V(g)$ と表し, g の V に沿う位数という. このとき, $g, h \in \mathcal{O}(M)$ に対して,

$$\text{ord}_V(gh) = \text{ord}_V(g) + \text{ord}_V(h)$$

が成り立つ.

2. (有理型関数の因子) M 上の有理型関数 f が局所的に $f = g/h$ ($g, h \in \mathcal{O}_p$, 互いに素) と表されるとき, 既約超曲面 V に沿う f の位数を

$$\text{ord}_V(f) = \text{ord}_V(g) - \text{ord}_V(h)$$

により定義する. $\text{ord}_V(f)$ は f の局所的な表現に依存しない. この位数を用いて, f の因子 (f) を

$$(f) = \sum_V \text{ord}_V(f) V$$

により定義する.

3. ($\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ の大域的断面の因子) 商層 $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ の大域的断面 s は, M の適当な開被覆 $\{U_\alpha\}$ で $\{[f_\alpha]\}$ ($f_\alpha \in \mathcal{M}^*(U_\alpha)$) により表される. このとき,

$$(s) = \sum_V \text{ord}_V(f_\alpha) V, \quad (V \cap U_\alpha \neq \emptyset)$$

は, 代表元 $f_\alpha \pmod{\mathcal{O}^*(U_\alpha)}$ や $U_\alpha \cap V \neq \emptyset$ の取り方に依存せず, 断面 s の因子を定義する.

4. (線バンドルの有理型断面の因子) 線バンドル L の有理型断面, すなわち層 $\mathcal{O}(L) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}$ のゼロでない大域的断面 s は, L の局所座標近傍 U_α で, $f_\alpha \in \mathcal{M}^*(U_\alpha)$ により表される. この有理型関数から定義される

$$(s) = \sum_V \text{ord}_V(f_\alpha) V, \quad (V \cap U_\alpha \neq \emptyset)$$

は局所座標近傍の取り替え $f_\beta = g_{\beta\alpha} f_\alpha$ ($g_{\beta\alpha} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$) により不変で, s の因子を定義する.

□

【定義 3.159 (因子の正則写像による引き戻し)】 複素多様体の正則写像 $\pi : M \rightarrow N$ に対して, 因子の引き戻し写像 π^* を

$$\pi^* : \text{Div}(N) \ni D = (\{U_\alpha\}, \{f_\alpha\}) \rightarrow \pi^* D = (\{\pi^{-1}U_\alpha\}, \{\pi^* f_\alpha\}) \in \text{Div}(M)$$

により定義する. □

3.10.3 線形系

【定義 3.160 (因子の線形系)】

- 2つの因子 D, D' が有理型関数 f を用いて $D' = D + (f)$ と表されるとき, 2つの因子は線形同値であるという.
- 因子 D が $D = \sum_i a_i V_i$ ($a_i \geq 0$) と表されるとき, D は有効であるといい, $D \geq 0$ と表す.
- 因子 D と線形同値な有効因子の全体を $|D|$ と表す:

$$|D| = \{D + (f) \geq 0 \mid f \in \mathcal{M}^*(M)\}.$$

また, $D + (f) \geq 0$ となる有理型関数全体のつくる線形空間を完備線形系といい, $\mathcal{L}(D)$ と表記する:

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathcal{M}(M) \mid D + (f) \geq 0\}.$$

$|D|$ と $\mathcal{L}(D)$ は次の関係にある:

$$|D| \cong \mathbb{C}\mathbb{P}(\mathcal{L}(D))$$

4. 一般にある因子 D について, $\mathcal{L}(D)$ の線形部分空間に対応する $|D|$ の部分集合を線形系という.
5. 線形系 $|D|$ の任意の有効因子 $D' \in |D|$ に対して, $D' - E$ が常に有効となる有効因子 E が存在するとき, E を固定成分 (fixed component) という. また, E を $|D|$ の最大の固定成分として,

$$F = \bigcap_{D' \in |D|} (D' - E)$$

が空集合でないとき, F を基点集合 (base points) という.

□

【定理 3.161 (Bertini の定理)】 因子の線形系の一般元 D_λ は, 線形系の基点集合以外では滑らかである. すなわち, D_λ の局所定義関数 f_λ は非退化 ($df \neq 0$) である. _____ □

【命題 3.162 (固定成分の断面への影響)】 E を複素多様体 M 上の線形系 $|D|$ の固定成分とすると,

$$h^0(M, \mathcal{O}(D)) = h^0(M, \mathcal{O}(D - E))$$

□

3.10.4 Picard 群

【定義 3.163 (Picard 群)】 複素多様体 M 上の正則線バンドルの全体は, テンソル積に関して乗法群となる:

$$\begin{aligned} L : \{g_{\alpha\beta}\}, L' : \{g'_{\alpha\beta}\} &\rightarrow L \otimes L' : \{g_{\alpha\beta}g'_{\alpha\beta}\}, \\ L : \{g_{\alpha\beta}\} &\rightarrow L^{-1} : \{g_{\alpha\beta}^{-1}\}. \end{aligned}$$

この群を M の Picard 群といい, $\text{Pic}(M)$ と表す. _____ □

3.10.5 因子と正則線バンドルの対応

【命題 3.164 (因子と正則線バンドルの対応)】

1. 商層 $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ の大域的切断 s とその因子 (s) の対応は次の同型を与える :

$$H^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \cong \text{Div}(M).$$

また, Picard 群は $\check{H}^1(M, \mathcal{O}^*)$ と自然に同一視できる :

$$\check{H}^1(M, \mathcal{O}^*) \cong \text{Pic}(M).$$

これと, 層の完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow \mathcal{M}^* \rightarrow \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* \rightarrow 0$$

から得られるコホモロジー完全系列

$$H^0(M, \mathcal{M}^*) \longrightarrow H^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta^0} H^1(M, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{M}^*) \quad (3.10.3)$$

より, $\text{Div}(M)$ から $\text{Pic}(M)$ への対応が定義される :

$$\begin{aligned} H^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) &\cong \text{Div}(M) \\ s = \{(U_\alpha, f_\alpha)\} &\mapsto D = (s) \end{aligned}$$

$$\delta^0 \downarrow g_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} \qquad \downarrow$$

$$\begin{aligned} \check{H}^1(M, \mathcal{O}^*) &\cong \text{Pic}(M) \\ \{(U_\alpha \cap U_\beta, g_{\alpha\beta})\} &\mapsto L = [D]. \end{aligned}$$

特に, $L = [D]$ の局所切断の組 $\{(s_\alpha, U_\alpha)\}$ が大域的切断となる条件は,

$$\frac{s_\alpha}{f_\alpha} = \frac{s_\beta}{f_\beta}, \quad \forall U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset \quad (3.10.4)$$

2. 対応 $\delta^0 : \text{Div}(M) \rightarrow \text{Pic}(M)$ の核は主因子群と一致する :

$$\text{Ker } \delta^0 = \text{Div}_0(M) = \{(f) \mid f \in H^0(M, \mathcal{M}^*)\}.$$

また, δ^0 の像は, 大域的な有理切断をもつ線バンドルの全体と一致する :

$$\text{Im } \delta^0 = \{L = [(s)] \mid \exists s \neq 0 \in H^0(M, \mathcal{M}(L))\}.$$

ここで, $\mathcal{M}(L)$ は線バンドル L の局所有理切断の層 $\mathcal{M}(L) = \mathcal{O}(L) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}$ である. さらに, $L \in \text{Im } \delta^0$ の逆像は

$$(\delta^0)^{-1}(L) \cong (H^0(M, \mathcal{M}(L)) - \{0\}) / H^0(M, \mathcal{O}^*).$$

したがって, $s_0 \in H^0(M, \mathcal{M}(L)), D = (s_0)$ とすると, つぎの図式が成り立つ:

$$\begin{array}{ccc} H^0(M, \mathcal{O}^*) \supset & H^0(M, \mathcal{M}(L)) - \{0\} & \rightarrow & (\delta^0)^{-1}(L) \\ & s & \mapsto & (s) \\ & \cup & & \cup \\ & H^0(M, \mathcal{O}(L)) - \{0\} & \rightarrow & |L| = |D| \\ & \cong \uparrow \otimes_{s_0} & D + (f) \nearrow & \\ & \mathcal{L}(D) \ni f & & \end{array}$$

すなわち,

- 因子の線形同値類 \Leftrightarrow 大域的有理切断を持つ正則線バンドルの同値類
- 同一同値類内の各因子 \Leftrightarrow 正則線バンドルの大域的有理切断
- 有効因子 \Leftrightarrow 正則線バンドルの大域的有理切断

□

3.10.6 直線バンドルの Chern 類

【定義 3.165 (線バンドルの Chern クラス)】 \mathcal{A} および \mathcal{A}^* を複素多様体 M 上の C^∞ 級複素関数およびゼロとならない C^∞ 級複素関数の層, \mathcal{O} および \mathcal{O}^* を M 上の正則関数およびゼロとならない正則関数の層に対して, 短完全系列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{j} & \mathcal{A} & \xrightarrow{\text{exp}} & \mathcal{A}^* \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow j & & \uparrow j \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{j} & \mathcal{O} & \xrightarrow{\text{exp}} & \mathcal{O}^* \longrightarrow 0 \end{array}$$

を考える. この短完全系列 から得られるコホモロジーの完全系列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = H^1(M, \mathcal{A}) & \xrightarrow{\text{exp}} & H^1(M, \mathcal{A}^*) & \xrightarrow{\delta=c_1} & H^2(M, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{j} & H^2(M, \mathcal{A}) = 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \parallel & & \uparrow \\ H^1(M, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\text{exp}} & H^1(M, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta=c_1} & H^2(M, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{j} & H^2(M, \mathcal{O}) \end{array}$$

において, C^∞ 線バンドル $L \in H^1(M, \mathcal{A}^*)$ に対して, $c_1(L) = \delta(L) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ を L の Chern 類とよぶ. この対応を正則線バンドルに制限したのも, Chern 類とよぶ. □

【定義 3.166 (複素直線バンドルの曲率形式)】 複素直線バンドル $L \rightarrow M$ のエルミート計量を h , 対応する計量接続 (すなわち, 計量および複素構造と整合的な接続) を D とする. L の局所切断 $e (\neq 0)$ に対し, $De = \chi e$ により定義される接続形式 χ は, 局所切断の取り替え $e' = \lambda e$ に対して,

$$\chi' = \chi + \lambda^{-1}d\lambda$$

と変換するので, 曲率形式 Θ は切断の取り方に依存しない:

$$\Theta = d\chi \Rightarrow \Theta' = \Theta. \quad (3.10.5)$$

この 2 形式 Θ は, 複素直線バンドル L の曲率形式と呼ばれる. □

【公式 3.167 (接続形式と曲率形式の正則切断による表示)】 正則直線バンドル L に対して, エルミート計量 h が与えられたとき, 計量との整合性条件 ($Dh = 0$) と複素構造との整合性条件 ($D = D' + D'', D'' = \bar{\partial}$) を満たす接続が一意的に存在し, 接続形式 χ は $(1, 0)$ 形式, 曲率形式 Θ は $(1, 1)$ 形式となる. L の局所正則切断を s , $h(s, s) = \|s\|^2$ として, χ と Θ は

$$\chi = \partial \ln \|s\|^2, \quad \Theta = -\partial \bar{\partial} \ln \|s\|^2$$

と表される. □

【注 3.168 (実形式との対応)】 複素直線バンドル $L \rightarrow M$ を実 2 次元ベクトルバンドルと見なしたときの, 切断の基底を v_1, v_2 , その双対基底を f^1, f^2 とする. このとき,

$$s = (1/2)(v_1 - \sqrt{-1}v_2), \quad \phi = f^1 + \sqrt{-1}f^2$$

が複素直線バンドルおよびその双対バンドルの切断を与える. このとき, $Dv_a = v_b \chi^b_a$ により定義される実接続 χ^a_b が複素直線バンドルの接続を与えるとすると, s に関する接続係数を χ として,

$$(\chi^a_b) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \chi = \alpha + \sqrt{-1}\beta$$

が成り立つ.

これより, L が正則直線バンドル, s が正則断面のとき, 曲率形式 $\Theta = d\chi$ は, 実形式での曲率形式 \mathcal{R}^a_b を用いて

$$\Theta = \sqrt{-1}d\beta = \sqrt{-1}d\chi^2_1 = \sqrt{-1}\mathcal{R}^2_1 \quad (3.10.6)$$

と表される. すなわち, χ の実部 α は曲率に寄与しない.

特に, リーマン面 $M = S$ の接バンドル $L = T'(S)$ に対して, そのエルミート計量を

$$ds^2 = h\phi\bar{\phi} = h((f^1)^2 + (f^2)^2), \quad \omega = \sqrt{-1}\frac{h}{2}\phi \wedge \bar{\phi} = hf^1 \wedge f^2$$

と置くとき, 曲率形式は

$$\Theta = -\sqrt{-1}R^{12}_{12}hf^1 \wedge f^2 \Rightarrow \sqrt{-1}\Theta = \frac{1}{2}R_s\omega \quad (3.10.7)$$

が成り立つ. これより,

$$\int_S \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta = \frac{1}{4\pi} \int R_s\omega = \chi(S) \quad (3.10.8)$$

□

【定理 3.169 (Chern 類と曲率形式, 因子との関係)】

1. 複素線バンドル L の曲率形式を Θ とするとき, 次の関係式が成り立つ:

$$c_1(L) = \left[\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta \right] \in H^2_{\text{DR}}(M).$$

2. 複素多様体 M の因子 $D \in \text{Div}(M)$ に対応する正則複素線バンドル $L = [D]$ に対して, その Chern 類は D の位相的なポアンカレ双対 η_D と一致する:

$$c_1(L) = \eta_D \in H^2_{\text{DR}}(M). \quad (3.10.9)$$

[出典・証明: Griffiths P, Harris J: "Principles of Algebraic Geometry" (Wiley, 1994)] □

【証明あり】

【系 3.170 (線形系の因子のホモロジー)】 互いに線形同値な因子は、ホモロガスである。特に、線形系 $|D|$ に属する因子は、互いにホモロガスである。 □

【系 3.171 ($\mathbb{C}P^n$ の正則複素線バンドルと超平面バンドル対応)】 完全系列

$$0 = H^1(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}) \xrightarrow{\text{exp}} H^1(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) \xrightarrow{j} H^2(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}) = 0$$

より,

$$\text{Pic}(\mathbb{C}P^n) \cong H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

で、 $\mathbb{C}P^n$ 上の (正則) 複素線バンドルは、Chern 類と 1 対 1 に対応する。特に、 $\mathbb{C}P^n$ の任意の因子は、超平面因子の整数倍 kH と線形同値となる。

【例 3.172 ($\mathbb{C}P^n$ 上の正則複素バンドルの例)】

1. $\mathbb{C}P^n$ の普遍バンドル

$$J = \{(z, u) \mid z = [Z_0 : \cdots : Z_n] \in \mathbb{C}P^n, u = \lambda(Z_0, \cdots, Z_n), \lambda \in \mathbb{C}\} \\ \subset \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}$$

に対して、 $u = (1, Z_1/Z_0, \cdots, Z_n/Z_0)$ が大域的有理切断となるので、

$$J = [-H]$$

2. $\mathbb{C}P^n$ の標準線バンドル $K_{\mathbb{C}P^n} = \bigwedge^n T'(\mathbb{C}P^n)$ に対して、

$$\omega|_{U_0} = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dz_n}{z_n}$$

が大域的有理断面となるので、

$$K_{\mathbb{C}P^n} = [-(n+1)H].$$

□

3.10.7 標準正則直線バンドル

【定義 3.173 (標準直線バンドル)】 n 次元複素多様体 M に対し, その余接バンドル $T'^*(M)$ の外積から定義される直線バンドル

$$K_M \equiv \bigwedge^n T'^*(M)$$

を標準直線バンドル (canonical line bundle) と呼ぶ. _____□

【定義 3.174 (超曲面の法バンドルと余法バンドル)】 複素多様体 M の超曲面 V に対して, 接バンドルの商バンドル

$$N_V \equiv T'(M)/T'(V)$$

により定義される正則直線バンドルを V の法バンドル (normal bundle), その双対バンドル N_V^* を余法バンドル (conormal bundle) と呼ぶ. _____□

【公式 3.175 (Adjunction formula)】 M をコンパクト複素多様体, V をその滑らかな解析的超曲面とする.

1. V の M における法バンドルを N_V , その共役バンドルを N_V^* とするとき,

$$N_V^* = [-V]|_V \Leftrightarrow N_V = [V]|_V$$

2. $(\bigwedge^n T_M^*)|_V = N_V^* \otimes \bigwedge^{n-1} T_V^*$ より,

$$K_M|_V = N_V^* \otimes K_V \Leftrightarrow K_V = (K_M \otimes [V])|_V.$$

_____□

Proof. 1. V の開近傍 U_α における局所定義関数を $f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ とすると, $df_\alpha|_V$ が N_V^* の非ゼロ局所切断を与え, $[-V]$ の遷移関数 $g_{\alpha\beta} = f_\beta/f_\alpha$ を用いて, V 上で $df_\beta g_{\beta\alpha} = df_\alpha$ が成り立つため, $g_{\alpha\beta}|_V$ は N_V^* の遷移関数と一致.

2. 明らか.

Q.E.D.

3.10.8 $\mathcal{E}(D), \mathcal{E}(-D)$

【命題 3.176 ($\mathcal{E}(D), \mathcal{E}(-D)$)] $D = \sum_i a_i V_i$ を有効因子, s_0 を $D = (s_0)$ となる $\mathcal{O}([D])$ の大域的正則切断 $s_0 \in H^0(M, \mathcal{O}([D]))$, \mathcal{E} を正則ベクトルバンドル E の正則切断の層とする.

1. D の台以外で正則かつ V_i 上で位数が a_i 以下の極をもつ \mathcal{E} の有理切断の層を $\mathcal{E}(D)$ とすると, 次の同型対応が成り立つ:

$$\mathcal{E}(D) \xrightarrow{\otimes s_0} \mathcal{O}(E \otimes [D]).$$

2. V_i 上で位数が a_i 以上の零点をもつ \mathcal{E} の正則切断の層を $\mathcal{E}(-D)$ とすると, 次の同型対応が成り立つ:

$$\mathcal{E}(-D) \xrightarrow{\otimes s_0^{-1}} \mathcal{O}(E \otimes [-D]).$$

3. D がなめらかな解析超曲面のとき, 次の層の完全系列が成り立つ:

$$0 \rightarrow \mathcal{E}(-D) \xrightarrow{\otimes s_0} \mathcal{E} \xrightarrow{r} \mathcal{E}|_D \rightarrow 0.$$

ここで, r は制限写像である. また, 層 $\mathcal{E}|_D$ は

$$\mathcal{E}|_D(U) = \begin{cases} \varinjlim_{U' \supset U \cap V} \mathcal{E}(U') & (U \cap V \neq \emptyset) \\ 0 & (U \cap V = \emptyset) \end{cases}$$

により定義される.

□

【命題 3.177】 D を複素多様体 M の有向因子, i_D を埋め込み写像 $i_D: D \subset M$ として, $\mathcal{E}|_D$ を係数とするコホモロジーに対して,

$$H^*(M, \mathcal{E}|_D) \cong H^*(D, i_D^*(\mathcal{E}))$$

が成り立つ. _____ □

【系 3.178 (反有効因子に対応する直線バンドルの切断)] D が有効因子のとき, $h^0(M, \mathcal{O}(-D)) = 0$, _____ □

【定義 3.179 (ポアンカレ留数写像)】 M をコンパクト複素多様体, V をその滑らかな解析的超曲面, f を開近傍 U における V の局所定義関数とする. このとき,

$$\frac{g(z)}{f(z)} dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \rightarrow (-1)^{i-1} g(z) \frac{dz_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dz_i} \cdots \wedge dz_n}{\partial f / \partial z_i} \Big|_{f=0}$$

により, 写像

$$\text{P.R.} : \Omega_M^n(V) \rightarrow \Omega_V^{n-1}$$

が定まる. この写像を **Poincare residue map** と呼ぶ. \square

【命題 3.180】 M をコンパクト複素多様体, V をその滑らかな解析的超曲面とすると, 次の層の短完全系列が成り立つ:

$$0 \longrightarrow \Omega_M^n \longrightarrow \Omega_M^n(V) \xrightarrow{\text{P.R.}} \Omega_V^{n-1} \longrightarrow 0.$$

これより, 次のコホモロジー完全系列が得られる:

$$H^0(M, \Omega_M^n(V)) \xrightarrow{\text{P.R.}} H^0(M, \Omega_V^{n-1}) \xrightarrow{\delta} H^1(M, \Omega_M^n).$$

これより, 特に, $M = \mathbb{C}P^n$ に対して $H^1(\mathbb{C}P^n, \Omega_M^n) = 0$ より, K_V の大域的正則切断は, すべて, K_M の大域的有理切断より得られる. \square

3.10.9 複素線バンドルに対するコホモロジー消滅定理,

【定義 3.181 (正の複素直線バンドル)】 複素多様体 M 上の複素線バンドル L の適当な計量接続の接続形式 Θ に対して, $(\sqrt{-1}/2\pi)\Theta$ が正定値 $(1,1)$ 形式となるとき, 線バンドル $L \rightarrow M$ は正であるという. さらに, 双対バンドル L^* が正のとき, L は負であるという. また, 線バンドル $[D]$ が正の時, 因子 D は正であるという.

因子 D が正ならば, M の任意の既約曲線 C に対して, D との交差数 $D \cdot C$ は正となる. \square

【定理 3.182 (正則直線バンドルの曲率形式の自由度)】 複素多様体 M 上の正則直線バンドルを L とする.

$$[\omega] = c_1(L) \in H_{\text{DR}}^2(M)$$

を満たす M 上の任意の実閉 $(1,1)$ 形式 ω に対し, 曲率形式 Θ が $(\sqrt{-1}/2\pi)^{-1}\omega$ と一致する L の計量接続が常に存在する. したがって, L が正であるための必要十分条件は, $c_1(L)$ が正の $(1,1)$ 形式を含むことである. \square

【例 3.183 (CPⁿ の超平面バンドル)】 CPⁿ の超平面バンドルを $[H]$, 普遍線バンドルを $J = [-H]$ とする:

$$J = \{(z, u) \mid z = [Z_0 : \cdots : Z_n], u = \lambda(Z_0, \dots, Z_n), \lambda \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}$$

J のエルミート計量を $h(u, u) = \|u\|^2 \equiv |u_0|^2 + \cdots + |u_n|^2$ とすると, その曲率形式は

$$\Theta = -\partial\bar{\partial} \ln \|Z(z)\|^2 \Rightarrow \sqrt{-1}\Theta = -\omega \quad (3.10.10)$$

で与えられる. ここで, ω は CPⁿ の Fubini-Study 計量に対応するケーラー形式 (の 1/4) である. これより, J は負, $[H]$ は正であることがわかる. また, 一般に, $[kH]$ は $k > 0$ のとき正, $k < 0$ のとき負となる. —□

【補題 3.184 (基本恒等式)】 M をコンパクトケーラー多様体, ω をその基本形式として, 線形作用素 L を

$$L : A^{p,q}(E) \rightarrow A^{p+1,q+1}(E), \quad L(\chi \otimes s) = \chi \wedge \omega \otimes s.$$

により定義する. $\Lambda = L^* : A^{p,q}(E) \rightarrow A^{p-1,q-1}(E)$ をその随伴作用素, $D = D' + D'' (D'' = \bar{\partial})$ とするとき, 次の関係式が成り立つ:

$$[\Lambda, \bar{\partial}] = -\frac{\sqrt{-1}}{2} D'^*.$$

□

【定理 3.185 (小平・中野の消滅定理)】 コンパクトケーラー多様体上の正の正則複素線バンドル $L \rightarrow M$ に対して, 次の式が成り立つ:

$$H^q(M, \Omega^p(L)) = 0, \quad p + q > n.$$

この式の双対を取ると, 負の線バンドル L に対し, 次の式が成り立つ:

$$H^q(M, \Omega^p(L)) = 0, \quad p + q < n$$

□

【系 3.186 (射影空間の正則線バンドルに対するコホモロジー消滅定理)】 CPⁿ 上の任意の正則線バンドル L に対して,

$$H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, L) = 0, \quad 1 \leq \forall q \leq n - 1$$

□

【定理 3.187 (Lefschetz の超曲面定理)】 M をコンパクトな複素多様体, V を $L = [V]$ が正となる滑らかな超曲面とする. このとき,

1. 包含写像 $i: V \rightarrow M$ から誘導されるコホモロジーの写像

$$H^q(M, \mathbb{Q}) \rightarrow H^q(V, \mathbb{Q})$$

は, $q \leq n-2$ に対して同型, $q = n-1$ に対して単射となる.

2. 包含写像 i から誘導されるホモトピー群の写像

$$\pi_k(V) \rightarrow \pi_k(M)$$

は $k \leq n-2$ に対して同型, $k = n-1$ に対して全射となる.

以上の定理は, M, V がオービフォールドの場合や, さらに特異点をもつ複素解析集合の場合にも成り立つ. □

Proof. 1. Griffiths-Harris 1974, p.156

2. Gorensky M, MacPherson R: *Stratified Morse Theory* (Springer, 1988), p.153; Hamm HA: *Lefschetz theorems for singular varieties*, in *Singularities*, vol. 40k part. 1 of Proc. Symposia in Pure Math., p. 547-557 (AMS, 1983)

Q.E.D.

【定理 3.188 (B 定理)】 M をコンパクト複素多様体, $L \rightarrow M$ を正の線バンドルとする. このとき, 任意の正則複素ベクトルバンドル $E \rightarrow M$ に対して, 数 μ_0 が存在して,

$$H^q(M, \mathcal{O}(L^\mu \otimes E)) = 0, \quad \forall \mu > \mu_0, q > 0 \quad (3.10.11)$$

が成り立つ. □

【定理 3.189 (射影多様体の Picard 群と因子の対応)】 M を $\mathbb{C}P^n$ の部分多様体とすると, M の任意の正則線バンドル L は因子 D を用いて $L = [D]$ と表される:

$$\text{Pic}(M) \cong \text{Div}(M) / (\text{主因子 } (f) \text{ の全体}) \quad (3.10.12)$$

□

【予想 3.190 (Hodge 予想)】 M をコンパクトケーラー複素多様体において, コホモロジー類 $\eta \in H^{2p}(M, \mathbb{C})$ が適当な解析的部分多様体 V で代表されるホモロジー類のポアンカレ双対となっているとき, η は解析的であるという. このとき, 任意の調和形式に対して

$$\int_M \psi \wedge \eta = \int_V \psi = \int_V \psi^{n-p, n-p} = \int_M \psi \wedge \eta^{p,p}$$

より, η は (p, p) 形式となる. この逆, すなわち, 射影空間の部分多様体 M に対し, 任意の有理係数 (p, p) 型コホモロジー類が解析的であるという予想が Hodge 予想である. \square

【定理 3.191 ((1, 1) 類に対する Lefschetz の定理)】 $\mathbb{C}P^n$ の部分多様体 M に対して, その任意の $(1, 1)$ 型コホモロジー類

$$\gamma \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$$

は解析的である. \square

3.10.10 交点数

【定義 3.192 (コンパクト複素解析多様体における交点数)】 M を n 次元の (なめらかとは限らない) コンパクト複素解析多様体とする. このとき, M の特異点集合は余次元が 2 以上のコンパクト閉集合となるので, M の基本ホモロジー類 $[M] \in H_{2n}(M, \mathbb{Z})$ が一意的に定まる. 同様に, M の d 次元閉部分多様体 Z には, ホモロジー類 $[Z] \in H_{2d}(M, \mathbb{Z})$ が一意に対応する.

1. 指数関数 $\epsilon(h) = \exp(2\pi\sqrt{-1}h)$ による完全系列

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow \mathcal{O}_M \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{O}_M^\times \longrightarrow 0$$

より, コホモロジー完全系列

$$H^1(M, \mathcal{O}_M) \xrightarrow{\epsilon} H^1(M, \mathcal{O}_M^\times) \xrightarrow{c_1} H^2(M, \mathbb{Z})$$

が導かれる. M 上の可逆層 \mathcal{L} を $H^1(M, \mathcal{O}_M^\times)$ の元とみなすとき, この完全系列により定義されるコホモロジー類 $c_1(\mathcal{L}) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ を \mathcal{L} の第 1 Chern 類という. この定義より,

$$c_1(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) = c_1(\mathcal{L}) + c_1(\mathcal{M})$$

が成り立つ.

目次へ

2. M 上の可逆層 $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_d$ と d 次元の閉部分多様体 Z に対して, 交点数 (intersection number) $(\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_d \cdot Z)$ を

$$(\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_d \cdot Z) := (c_1(\mathcal{L}_1) \cup \cdots \cup c_1(\mathcal{L}_d))[Z] \in \mathbb{Z}$$

により定義する. $(\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_n \cdot M)$ は, しばしば, $(\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_n)_M$ ないし $(\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_n)$ と表す.

3. M の d -次元閉部分多様体の形式的整数係数有限和 $Z = \sum_j a_j Z_j$ を d -サイクルという. このとき,

$$(\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_d \cdot Z) := \sum_j a_j (\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_d \cdot Z_j)$$

と定義する.

□

3.11 射影多様体

3.11.1 GAGA の原理

【命題 3.193 ($\mathbb{C}P^n$ の正則直線バンドルの正則断面)] $\mathbb{C}P^n$ の正則直線バンドル $[dH]$ ($d = 1, 2, \dots$) の正則断面は, \mathbb{C}^{n+1} 上の d 次同次多項式と 1 対 1 に対応する:

$$H^0(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}(dH)) \cong \text{Sym}^d(\mathbb{C}^{n+1*}).$$

□

Proof. $L = [dH]$ とおくと, 普遍バンドル $J = [-H] = [H]^* \rightarrow \mathbb{C}P^n$ の各点 $[X] \in \mathbb{C}P^n$ でのファイバーは $\ell = \{(\lambda X) \mid \lambda \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ と表され, J の双対バンドル $[H]$ の各点 $[X]$ でのファイバーの点は ℓ 上の線形汎関数と対応するので, $[H]$ の d 個のテンソル積である $L \rightarrow \mathbb{C}P^n$ の各点でのファイバーは, ℓ 上の λ に関して d 次の関数となる. 今, $F(X)$ を \mathbb{C}^{n+1} 上の d 次の同次多項式とすると, $F|_{\ell}$ は ℓ 上の d 次の関数となり, $\ell = [X]$ に正則に依存するので, L の正則な切断 σ_F を与える. したがって, 写像 $\Phi: \text{Sym}^d(\mathbb{C}^{n+1*}) \rightarrow H^0(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}(L))$ が定義され, 明らかに, σ_F がゼロ切断なら $F \equiv 0$ となるので, Φ 単射となる.

次に, $\sigma \in H^0(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}(L))$ に対して, F を \mathbb{C}^{n+1} 上の d 次の同次多項式, σ_F を対応する L の正則切断として, $G' = \pi^*(\sigma/\sigma_F)$ (π は $\mathbb{C}^{n+1} - 0$ から $\mathbb{C}P^n$ への標準射影) とおくと, G' は $F = 0$ のみを極としてもつ $\mathbb{C}^{n+1} - 0$ 上の有理型関数となる. したがって, $G = G'F$ は $\mathbb{C}^{n+1} - 0$ で正則な関数となり, Hartogs の定理より, \mathbb{C}^{n+1} 全体で正則な関数となる. さらに, $G'(\lambda X) = G'(X)$ より, G は F と同様, $G(\lambda X) = \lambda^d G(X)$ と振る舞う. G の原点でのべき級数展開を用いると, これは, G が X の d 次の同次多項式であることを意味する. 一方, $\sigma/\sigma_G = \sigma/\sigma_F \times \sigma_F/\sigma_G = G' \times F/G = 1$ が成り立つので, $\sigma = \sigma_G$. よって, Φ は全射となる. Q.E.D.

【定義 3.194 (代数多様体)] $\mathbb{C}P^n$ の部分集合 V が, 同次座標系において, 同次多項式の集合 $\{F_\alpha(X_0, \dots, X_n)\}$ の共通零点となるとき, V は射影代数多様体と呼ばれる. □

【定理 3.195 (Chow の定理)] 射影空間の解析的部分多様体は, 射影代数多様体である. □

Proof. まず, V が $\mathbb{C}P^n$ の超曲面の時は, 直線バンドル $[V]$ の正則断面 σ で $(\sigma) = V$ となるものがあることと, σ は常に, $\mathbb{C}P^n$ の同次座標 X の同次多項式 $F(X)$ と対応し, (σ) が $F = 0$ と表されることより, 題意は成り立つ.

次に, $\dim V = k < n - 1$ のとき, 任意の $p \notin V$ に対して, $p \in K \cong \mathbb{C}P^{n-k-1}$ と $p \notin K' \cong \mathbb{C}P^{n-k-2} \subset K$ で, $K \cap V = \emptyset$, かつ任意の $q \in V$ に対して, $\overline{K', q} \cap V$ が離散的な点となるものが存在する. このとき, K' の補空間 $N \cong \mathbb{C}P^{k+1}$ への K' に沿った射影 $\pi : q \mapsto N \cap \overline{q, K'}$ による像 $\pi(V) = V'$ は N の超曲面となるので, $\mathbb{C}P^n$ の同次座標を $K' = (X_{k+2} = \dots = X_n = 0)$ と取ると, V' は同次多項式を用いて $F(X_0, \dots, X_{k+1}) = 0$ と表される. 対応して, π による引き戻しにより, V はやはり $F = 0$ を満たす. ここで, 構成法より, $\pi(p) \notin V'$ なので, F は p でゼロでない. 以上より, 任意の点 $p \notin V$ に対し, V 上でゼロかつ $F(p) \neq 0$ となる同次多項式 F が存在するので, V はそれらの共通ゼロ点として表される. Q.E.D.

【定義 3.196 (有理関数)】 $\mathbb{C}P^n$ の解析的部分集合上の関数は, $\mathbb{C}P^n$ の同次座標の同じ次数の同次多項式 $F(X_0, \dots, X_n), G(X_0, \dots, X_n)$ を用いて $F(X_0, \dots, X_n)/G(X_0, \dots, X_n)$ と表されるとき, 有理関数 (rational function) であるという. □

【定理 3.197 (射影代数多様体上の有理関数体)】 射影代数多様体上の有理型関数は, 有理関数である. □

【定理 3.198 (GAGA の原理)】 射影代数多様体上のすべての解析的構造物は代数的である. 例えば,

1. 滑らかな多様体上の有理型微分形式は, 有理関数とその微分で表される.
2. 滑らかな射影代数多様体間の正則写像は, 有理関数で表される.
3. 滑らかな射影代数多様体上の正則ベクトルバンドルの遷移関数は有理関数で表される.

□

3.11.2 射影多様体の次数

【定義 3.199 (射影多様体の次数)】 k 次元射影代数多様体 $V \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ に対して, そのホモロジー類が $H_{2k}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元 H^k を用いて, $V \sim dH^k$ と表されるとき, d を V の次数と呼び $\deg V$ で表す. \square

【命題 3.200 (次数の意味)】 k 次元射影代数多様体 $V \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ が次数 d を持つとする. このとき,

1. $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の一般的な H^{n-k} と V の交点の数は次数 d と一致する.
2. (Wirtinger の定理) ω を $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ のケーラー形式とすると,

$$\int_V \omega^k = \deg V.$$

3. V が $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の超曲面のとき, V は d 次の同次多項式 $F(X_0, \dots, X_n)$ の零点となる.

□

【定理 3.201 (交叉多様体の次数)】 V と W がそれぞれ次数 d_1, d_2 をもつ $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の部分多様体として, それらの交叉 $V \cdot W$ の既約成分を Z_i とすると, 次の関係式が成り立つ.

$$d_1 d_2 = \sum_i \text{mult}_{Z_i}(V \cdot W) \deg Z_i.$$

□

【定理 3.202 (Bezout の定理)】 2 つの互いに素な 2 変数多項式 $f(x, y), g(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ がそれぞれ次数 d_1, d_2 を持つとき, $f = g = 0$ の解の個数はたかだか $d_1 d_2$ 個である. \square

【定理 3.203 (射影代数多様体の $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ への埋め込み)】 任意の k 次元射影代数多様体は $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2k+1}$ に解析的部分多様体として埋め込むことができる. \square

【定義 3.204 (非退化部分多様体)】 $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の部分多様体 V がどのような超平面 H にも含まれないとき, V は非退化であるという. \square

【定理 3.205 (非退化多様体に対する次数の下限)】 $\mathbb{C}P^n$ の k 次元非退化部分多様体 V の次数に対して, 次の不等式が成り立つ:

$$\deg V \geq n - k + 1.$$

□

3.11.3 接空間

【定義 3.206 (接空間)】 k 次元多様体 $V \subset \mathbb{C}P^n$ の滑らかな点 p において, そのユークリッド座標系での接空間の閉包により得られる $\mathbb{C}P^n$ の線形部分空間 $\sim H^k$ を, V の p における接空間と定義する.

V が同次座標系の同次多項式系 $\{F_\alpha(X_0, \dots, X_n)\}$ の共通零点として表されるとき, 接空間は次の同次方程式系により表される:

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial F_\alpha}{\partial X_i}(p) X_i = 0.$$

□

【定義 3.207 (接触錐)】 $\mathbb{C}P^n$ の (一般に特異な) 超曲面 V が同次多項式 $F(X_0, \dots, X_n) = 0$ と表されるとする. 点 $p \in V$ の重複度を m とするとき, m 次の同次式により定義される次の部分多様体を, V の p における接触錐 (tangent cone) とよぶ.

$$T_p(V) = \left(\sum_{m_1 + \dots + m_n = m} \frac{1}{m_1! \dots m_n!} \frac{\partial^m F}{\partial X_1^{m_1} \dots \partial X_n^{m_n}}(p) X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n} = 0 \right)$$

□

3.11.4 正則直線バンドルと射影埋め込みの対応

【命題 3.208 (線バンドルと射影埋め込みの対応)】 M をコンパクト複素多様体, $L \rightarrow M$ をその正則線バンドルとする. 基点を持たない線形系 $E \subset H^0(M, \mathcal{O}(L))$ を指定すると, 各点 $p \in M$ に対して, 線形写像 $l_p : E \rightarrow L$ が $l_p(s) = s(p)$, $s \in E$ により定まる. この写像は $i_E(p) \in$

$\mathbb{C}P(E)^* \cong (\mathbb{C}P^N)^*(\dim(E) = N + 1)$ と同一視できる. これによって定義される対応 $p \rightarrow i_E(p)$ は, M の $\mathbb{C}P^N$ への非退化正則写像

$$i_E : M \rightarrow \mathbb{C}P^N \cong (\mathbb{C}P^N)^* \cong \mathbb{C}P(E)^*$$

を定める. E の基底を s_0, \dots, s_N とするとき, この写像は $p \mapsto [s_0(p) : \dots : s_N(p)] \in \mathbb{C}P^N$ と表される. これにより, H を $\mathbb{C}P^N$ の超平面として,

$$L = i_E^*([H]), \quad E = i_E^*(H^0(\mathbb{C}P^N, \mathcal{O}(H)))$$

が成り立つことが分かる.

逆に, 非退化正則写像 $f : M \rightarrow \mathbb{C}P^N$ が与えられたとき, $L = f^*([H])$, $E = f^*(H^0(\mathbb{C}P^N, \mathcal{O}(H)))$ とおくと, $i_E \cong f$ が成り立つ.

以上より, 次の 1 対 1 対応が成り立つ:

$$L \in \text{Pic}(M), \quad E \subset H^0(M, \mathcal{O}(L)) \quad (|E| : \text{no base point})$$

\Leftrightarrow

$$\text{non-degenerate } f : M \rightarrow \mathbb{C}P^N, \quad \dim(E) = N + 1 \pmod{\text{proj. trfs}}$$

□

【定理 3.209 (Chern 類の自然性)】 複素多様体 V から M への正則写像を f とするとき, M 上の正則直線束 L の V への引き戻しで定義される V 上の正則直線束 f^*L に対して,

$$\Phi(f^*L) = f^*\Phi(L) \Rightarrow c_1(f^*L) = f^*c_1(L)$$

が成り立つ. 特に, V 上の正則直線束 L の誘導する写像 $i_L : V \rightarrow \mathbb{C}P^N$ が V の $\mathbb{C}P^N$ への埋め込みないし沈め込みを与えるなら, L は正である.

□

【定義 3.210 (正規部分多様体)】 非退化射影多様体 $V \subset \mathbb{C}P^n$ は, 包含写像 $j : V \rightarrow \mathbb{C}P^n$ に対応する線形系が完備のとき, 正規 (normal) であるという. $\mathbb{C}P^n$ の超曲面は, 常に正規となる. _____ □

【定理 3.211】 $\mathbb{C}P^n$ の 2 つの超曲面は, 次元が 3 以上で次数が $d \neq n + 1$ なら, $\mathbb{C}P^n$ の線形射影変換で移り合うとき, かつそのときに限り, 複素解析的に同型となる. _____ □

【例 3.212 (Veronese 写像)】 射影空間 $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の因子 dH から決まる正規埋め込み

$$\iota_{dH} : \mathbb{C}\mathbb{P}^n \ni [Z_0, \dots, Z_n] \rightarrow [\dots, Z^\alpha, \dots] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^N, \quad N+1 = \binom{n+d}{d} C_d$$

は Veronese 写像と呼ばれる。ここで、 $Z^\alpha \equiv Z_0^{\alpha_0} \dots Z_n^{\alpha_n}$ は Z の d 次の単項式。一般論より、 $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の任意の次数 d の超曲面は、 $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$ の超平面と $\iota_{dH}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ との交叉となる。

1. $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の有理正規曲線 (rational normal curve) : $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ の因子 np ($p \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1, n = 1, 2, \dots$) に対する Veronese 写像は、 $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ の座標系 $[1, t]$ において

$$\iota_{dp} : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \ni t \mapsto [1, t, \dots, t^n] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n \quad (3.11.1)$$

と表される。この曲線に対しては、次数 d が埋め込まれた射影空間の次元 n と一致する。

逆に、 $C \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ が次数 $d = n$ となる既約非退化曲線とすると、 C は有理正規曲線となる。実際、 $\Gamma = \{p_1, \dots, p_{n-1}\}$ を C 上の異なる線形独立な点列とすると、 Γ を含む $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の超曲面 H と C は、一般に、 Γ 以外のもう一点 q で交わる (接する場合は、 $q \in \Gamma$)。これにより定まる写像 $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow C$ は明らかに全単射、したがって同型写像となり、対応する埋め込み $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ は次数 $d = n$ をもつ。 $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ 上の正則直線バンドルは次数のみで決まるので、この埋め込みは Veronese 写像と一致する。

2. $\mathbb{C}\mathbb{P}^5$ の Veronese 曲面 : $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ から $\mathbb{C}\mathbb{P}^5$ への Veronese 写像

$$f = \iota_{2H} : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \ni [1, s, t] \mapsto [1, s, t, s^2, st, t^2] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^5 \quad (3.11.2)$$

により得られる曲面 $S = \iota_{2H}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)$ の次数は、

$$\deg S = \int_S \omega^2 = \int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} c_1(f^* H_{\mathbb{C}\mathbb{P}^5})^2 = \int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} c_1(2H)^2 = 4$$

よって、 $\mathbb{C}\mathbb{P}^5$ の最小次数曲面となる。

Veronese 曲面 S は、弦多様体 $C(S) = \cup_{p,q} \overline{pq}$ が $\mathbb{C}\mathbb{P}^5$ の真部分多様体となる唯一の $\mathbb{C}\mathbb{P}^5$ の非退化曲面である。

□

【例 3.213 (Segre 写像)】 2つの複素線形空間 V, W の直積からテンソル積への写像 $j : V \times W \rightarrow V \otimes W$ から誘導される写像 $j_* : \mathbb{P}V \times \mathbb{P}W \rightarrow \mathbb{P}(V \otimes W)$ を **Segre 写像** という. V, W の次元を n, m とするとき, この写像は, 射影空間の同次座標系 X_i, Y_j を用いて,

$$j_* : \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m \ni ([X_0, \dots, X_n], [Y_0, \dots, Y_m]) \mapsto [X_0Y_0, \dots, X_iY_j, \dots, X_nY_m] \in \mathbb{C}P^{nm+n+m}$$

と表される.

$\pi_i (= 1, 2)$ を $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m$ からそれぞれ, 第1因子および第2因子への射影とすると, この写像は, 直線バンドル

$$L = \pi_1^* H_{\mathbb{C}P^n} \otimes \pi_2^* H_{\mathbb{C}P^m} \Leftrightarrow D = H_{\mathbb{C}P^n} \times \mathbb{C}P^m + \mathbb{C}P^n \times H_{\mathbb{C}P^m}$$

の定める写像 i_L と一致する.

Segre 写像の像は, $\mathbb{C}P^{nm+n+m}$ の同次座標を行列 $Z = (Z_{ij}; i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m)$ で表すとき, その2次小行列式の共通零点, したがって2次小曲面族の交わりとなる. □

3.11.5 小平の埋め込み定理

【定理 3.214 (小平の埋め込み定理)】 M をコンパクト複素多様体, $L \rightarrow M$ を正の正則線バンドルとする. このとき, 数 k_0 が存在し, 任意の整数 $k \geq k_0$ に対して, 写像

$$i_{L^k} : M \rightarrow \mathbb{C}P^N$$

が定義され, M の埋め込みを与える. この埋め込みによる $\mathbb{C}P^N$ の Fubini-Study 計量の引き戻しにより, M は Kähler-Hodge 多様体となる. □

Proof. 概要: i_{L^k} が埋め込みとなるためには, 次の2つの条件が満たされることが必要十分:

1. 任意の $x \neq y \in M, k \geq k_0$ に対して, 制限写像 $r_{x,y} : H^0(M, \mathcal{O}(L^k)) \rightarrow L_x^k \oplus L_y^k$ が全射.
2. 任意の $x \in M, k \geq k_0$ に対して, 微分写像 $d_x : H^0(M, \mathcal{I}_x(L^k)) \rightarrow T_x^{*'} \otimes L_x^k$ が全射.

点 x と点 y でのブローアップを $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$, 対応する例外因子を $E = E_x + E_y$, $\tilde{L} \rightarrow \tilde{M}$ を $L \rightarrow M$ の π による引き戻しとする. このとき, $H^0(M, \mathcal{O}(L^k)) \cong H^0(\tilde{M}, \mathcal{O}(\tilde{L}^k))$ および, $H^0(M, \mathcal{I}_x(L^k)) \cong H^0(\tilde{M}, \mathcal{O}(\tilde{L}^k - E))$ が成り立つので, 以上の条件は,

$$\begin{aligned} r_E: H^0(\tilde{M}, \mathcal{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k)) &\rightarrow H^0(E, \mathcal{O}_E(\tilde{L}^k)) \cong L_x^k \oplus L_y^k, \\ r'_E: H^0(\tilde{M}, \mathcal{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k - E)) &\rightarrow H^0(E, \mathcal{O}_E(\tilde{L}^k - E)) \cong T_x^{*'} \otimes L_x^k \end{aligned}$$

の全射性に帰着される. 層の完全系列に対するコホモロジー完全系列より, これらは, $\mathcal{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k - E)$ および $\mathcal{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k - 2E)$ に対する H^1 コホモロジー消滅定理に帰着される. Q.E.D.

【系 3.215 (正の正則直線束の存在条件)】 コンパクト複素多様体が正の正則直線束をもつための必要十分条件は, それが射影代数多様体であることである. □

【定理 3.216 (小平の埋め込み定理 2)】 コンパクト複素多様体 M が射影代数多様体であるための必要十分条件は, コホモロジー類 $[\omega]$ が有理的となる正の閉 $(1,1)$ 形式 ω が存在することである. □

Proof. 適当な自然数 m に対して, $[m\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$ となる. ところが, $[m\omega] \in H_{\bar{\partial}}^{1,1}(M)$ に対して, $H^2(M, \mathcal{O}_M) \cong H_{\bar{\partial}}^{0,2}(M)$ なので, 完全系列

$$H^1(M, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i} H^2(M, \mathcal{O})$$

において, $i_*([m\omega]) = 0$. よって, $c_1(L) = [m\omega]$ となる M 上の正の直線束 L が存在し, ι_L が M の射影空間への埋め込みを与える. Q.E.D.

【系 3.217】 M, M' が射影代数多様体なら, $M \times M'$ も代数的である. □

【系 3.218】 M が射影代数多様体なら, その 1 点ブローアップもまた代数的である. □

【系 3.219】 $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ を複素多様体の非分岐有限被覆とするとき, M が代数的であるための必要十分条件は \tilde{M} が代数的となることである. □

目次へ

【定義 3.220】 射影代数多様体 M 上の正則直線バンドル $L \rightarrow M$ は, $H^0(M, \mathcal{O}(L))$ が埋め込み $M \rightarrow \mathbb{C}P^N$ を与えるとき, 非常に豊富 (very ample) であるという. _____□

【定理 3.221 (小平の埋め込み定理の一般化)】 $E \rightarrow M$ を任意の正則直線バンドル, $L \rightarrow M$ を正の正則直線バンドルとすると, $k \gg 0$ に対して, $L^k + E$ は非常に豊富となる. _____□

3.12 Abel 多様体

3.12.1 Riemann 条件

【定義 3.222 (Abel 多様体)】 複素 n 次元線形空間 V と, 階数が $2n$ の格子 $\Lambda \subset V$ から定義される複素トーラス V/Λ は, 複素射影空間への埋め込みが存在するとき, **Abel 多様体** (Abelian variety) という. —□

【定義 3.223 (周期行列)】 複素多様体 V/Λ に対して, V の複素基底を e_1, \dots, e_n , Λ の基底を $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ と置くととき,

$$\lambda_i = \sum_{\alpha=1}^n \omega_{\alpha i} e_{\alpha}$$

により定義される行列 $\Omega = (\omega_{\alpha i}) \in M(n, 2n; \mathbb{C})$ を複素トーラス V/Λ の周期行列 (period matrix) という.

この行列を用いると, $\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i x_i$ により定義される V の実座標 $x_i (i = 1, \dots, 2n)$ と, $\sum_{\alpha=1}^n e_{\alpha} z_{\alpha}$ により定義される複素座標 $z_{\alpha} (\alpha = 1, \dots, n)$ の間に

$$z_{\alpha} = \sum_{i=1}^{2n} x_i \omega_{\alpha i} \Leftrightarrow (z) = \Omega(x)$$

の関係が成り立つ. —□

【定理 3.224 (複素トーラスに対する Riemann 条件)】 複素多様体 $M = V/\Lambda$ が Abel 多様体となるための必要十分条件は, Λ の \mathbb{Z} 基底 $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$, V の複素基底 e_1, \dots, e_n が存在して, 周期行列 Ω が

$$\Omega = (\Delta_{\delta}, Z), \quad {}^T Z = Z, \quad \text{Im } Z > 0$$

と表されることである. ここで, $\delta = [\delta_1, \dots, \delta_n]$ は $\delta_k | \delta_{k+1}$ となる自然数の列, Δ_{δ} は δ を対角成分にもつ対角行列である.

このとき, M 上の 2 形式

$$\omega = \sum_{\alpha} \delta_{\alpha} dx_{\alpha} \wedge dx_{n+\alpha} \cdot \delta_{\alpha} | \delta_{\alpha+1}$$

は Hodge 形式となる. この 2 形式の定めるコホモロジー類 $[\omega]$ は M の偏極 (polarization), δ_{α} は基本因子 (elementary divisors) と呼ばれる. 特に, $\delta_{\alpha} = 1$ となる偏極は主偏極 (principal polarization) と呼ばれる. —□

【注 3.225 (偏極の自由度)】 一般に, 与えられた Abel 多様体に対して, その許される偏極は一意的でなく, 少なくとも, 基本因子として $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ が許されるなら, k を $k\delta_1$ が整数となる任意の有理数として, $\{k\delta_1, \dots, k\delta_n\}$ も許される. \square

【系 3.226 (Jacobi 多様体)】 周期行列に対する Riemann の関係式より, Riemann 面 S の周期行列は $\Omega = (I_g, Z)$ (${}^tZ = Z, \text{Im } Z > 0$) と表されるので, Jacobi 多様体 $\mathcal{J}(S)$ は主偏極 Abel 多様体となる. \square

3.12.2 複素トーラスのホモロジーとコホモロジー

【注 3.227 (複素トーラスの内在的構成)】 複素トーラス $M = V/\Lambda$ のホモロジー・コホモロジーと V, Λ の間には次の関係がある:

$$\begin{aligned} H_1(M, \mathbb{Z}) &\cong H^{2n-1}(M, \mathbb{Z}) \cong \Lambda, & H^1(M, \mathbb{Z}) &\cong \Lambda^*, \\ H^1(M, \mathcal{O}) &\cong H^0(M, \Omega^1) \cong V^*, & H^n(M, \Omega^{n-1}) &\cong H^{n-1}(M, K_M) \cong V \end{aligned}$$

また, Λ が抽象的な \mathbb{Z} 自由加群として与えられると, 複素トーラスが次のように構成される:

$$\begin{aligned} \Lambda &\rightarrow V_{\mathbb{R}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \\ V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &= V \oplus \bar{V} \rightarrow V, \\ \Lambda &\rightarrow \Lambda + \bar{\Lambda}, \quad \Lambda \subset V. \end{aligned}$$

ここで, $V_{\mathbb{C}} = V \oplus \bar{V}$ の分解には, $V_{\mathbb{R}}$ の複素構造が必要となるが, 複素トーラスの場合, これは, コホモロジーの Hodge 分解

$$V_{\mathbb{C}} \cong H^{2n-1}(M, \mathbb{C}) \cong H^{n-1, n}(M) + H^{n, n-1}(M)$$

より決まる. また, M の偏極 Q は

$$Q \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cong H^1(M, \mathbb{Z}) \wedge H^1(M, \mathbb{Z}) \cong (H_1(M, \mathbb{Z}) \wedge H_1(M, \mathbb{Z}))^*$$

より, 双線形関数

$$Q : \Lambda \wedge \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$$

により決定される. \square

【定義 3.228 (Albanese 多様体)】 n 次元コンパクト複素多様体 M に対するコホモロジーの Hodge 分解

$$H^{2q-1}(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{r+s=2q-1} H^{r,s}(M) = V_q \oplus \bar{V}_q,$$

$$V_q = H^{q-1,q}(M) \oplus \cdots \oplus H^{0,2q-1}(M)$$

により定義される複素線形空間 V_q と,

$$H^{2q-1}(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \Lambda_q \subset V_q$$

により定義される格子 Λ_q を用いて定義される複素トーラス

$$\mathcal{J}(M) \equiv \frac{V_q}{\Lambda_q}$$

を q 次の中間 Jacobi 多様体という。

特に, $\mathcal{J}_n(M)$ を Albanese 多様体と呼び, $\text{Alb}(M)$ と表記する :

$$\mathcal{J}_1(M) = \frac{H^{0,1}(M)}{H^1(M, \mathbb{Z})} \cong \frac{H^1(M, \mathcal{O})}{H^1(M, \mathbb{Z})} \equiv \text{Pic}^0(M),$$

$$\mathcal{J}_n(M) = \frac{H^{n-1,n}(M)}{H^{2n-1}(M, \mathbb{Z})} \cong \frac{H^0(M, \Omega^1)^*}{H_1(M, \mathbb{Z})} \equiv \text{Alb}(M).$$

□

【命題 3.229 (Albanese 写像)】 コンパクト複素多様体 M からその Albanese 多様体への写像 μ を

$$\mu : M \ni p \mapsto \mu(p) = \int_{p_0}^p \omega \in H^0(M, \Omega^1)^* / H_1(M, \mathbb{Z}) = \text{Alb}(M)$$

により定義するとき, μ は次の同型写像を誘導する :

$$\mu_* : \frac{H_1(M, \mathbb{Z})}{\text{torsion}} \xrightarrow{\cong} H_1(\text{Alb}(M), \mathbb{Z})$$

$$\mu^* : H^0(\text{Alb}(M), \Omega^1) \xrightarrow{\cong} H^0(M, \Omega^1).$$

さらに, これより, 次の関係が成り立つ :

$$\text{Pic}^0(\text{Alb}(M)) = \text{Pic}^0(M), \quad \text{Alb}(\text{Pic}^0(M)) = \text{Alb}(M).$$

□

3.12.3 Abel 多様体上の直線バンドル

【定義 3.230 (複素トーラス上の直線バンドルの乗数)】 複素トーラス $M = V/\Lambda$ 上の直線バンドル L を $\pi: V \rightarrow M$ により $V \cong \mathbb{C}^n$ に引き戻すと, $H^1(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) = H^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}) = 0 \Rightarrow H^1(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}^*) = 0$ より, $\tilde{L} = \pi^*L$ は常に自明となる. そこで, \tilde{L} を大域的断面 $\sigma(z)$ により自明化 $\tilde{L} \rightarrow V \times \mathbb{C}$ する. このとき, $\lambda \in \Lambda$ に対応する V の並進変換 τ_λ は, \tilde{L} の自己同形を誘導する. そこで,

$$(\tau_\lambda)_*\sigma(z) = e_\lambda(z)\sigma(z + \lambda), \quad \lambda \in \Lambda$$

とおくと, $e_\lambda(z) \in \mathbb{C}^*$ は次の条件を満たす V 上の正則関数となる:

$$e_\lambda(z + \lambda')e_{\lambda'}(z) = e_{\lambda'}(z + \lambda)e_\lambda(z), \quad \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda.$$

対応して, σ による自明化により得られる \tilde{L} の座標を (z, ξ) とおくと,

$$(\tau_\lambda)^*(z, \xi) = (z + \lambda, e_\lambda(z)\xi)$$

が成り立つ. 逆に, この変換による $V \times \mathbb{C}$ の商空間は, L と同型となる.

以上により定義される正則関数の系 $e_\lambda(z)$ は, 複素トーラス上の直線バンドル L の乗数 (multipliers) という. □

【命題 3.231 (ケーラー多様体上の Chern 類がゼロの直線束)】 ケーラー多様体上の直線束 L に対して, $c_1(L) = 0$ となる必要十分条件は, 適当な局所座標系のもとで, L の遷移関数が定数となることである. □

【命題 3.232 (複素トーラス上の Chern 類の等しい直線束)】 複素トーラス M 上の 2 つの直線束 L, L' が同じ Chern 類を持つための必要十分条件は, それらが M の適当な並進で互いに移り合うことである. □

【命題 3.233 (アーベル多様体上の直線バンドルに対する偏極と乗数の対応)】 アーベル多様体 M の規格化された周期行列を (Δ_δ, Z) , 偏極を $\omega = \sum_\alpha \delta_\alpha dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha}$, とする. このとき, 乗数が

$$e_{\lambda_\alpha}(z) = 1, \quad e_{\lambda_{n+\alpha}}(z) = e^{-2\pi\sqrt{-1}z_\alpha}$$

で与えられる M 上の直線束 L_0 の第 1 Chern 類は, $c_1(L_0) = [\omega]$ となる. また, $c_1(L) = [\omega]$ となる M 上の直線束は, L_0 の並進で与えられる. □

【命題 3.234 (双対 Abel 多様体)】 アーベル多様体 $M = V/\Lambda$ のコホモロジーに対して,

$$\Lambda^* \cong H^1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(M, \mathcal{O}) \cong \mathcal{H}^{0,1}(M) \cong \bar{V}^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\bar{V}, \mathbb{C})$$

より,

$$\text{Pic}^0(M) \cong H^1(M, \mathcal{O})/H^1(M, \mathbb{Z}) \cong \bar{V}^*/\bar{\Lambda}^*$$

が成り立ち, $\text{Pic}^0(M)$ は複素トーラスとなる. M の規格化された周期行列が $\Omega = (\Delta_\delta, Z)$ であ与えられるとき, この複素トーラスの周期行列 Ω^* は,

$$\Omega^* = (\delta_n \Delta_\delta^{-1}, \delta_n \Delta_\delta^{-1} Z \Delta_\delta^{-1})$$

で与えられる. したがって, $\text{Pic}^0(M)$ も再びアーベル多様体となり, M の双対 Abel 多様体 (dual Abelian variety) と呼ばれる. \square

3.12.4 θ 関数

【定理 3.235 (アーベル多様体上の正直線束の切断)】 M をアーベル多様体, $L \rightarrow M$ を正直線束, $\delta_1, \dots, \delta_n$ を M の偏極 $c_1(L)$ に対する基本因子系とする. このとき, 次が成り立つ:

1. $\dim H^0(M, \mathcal{O}(L)) = \prod_{\alpha} \delta_{\alpha}$.
2. $H^0(M, \mathcal{O}(L^k))$ は, $k \geq 2$ のとき基点を持たず, さらに $k \geq 3$ のとき M の射影空間への埋め込みを与える.

\square

【系 3.236 (Riemann の θ 関数)】 規格化された周期行列 $\Omega = (\Delta_\delta, Z)$ により定義される Abel 多様体 $M = V/\Lambda$ に対して, その上の正直線束 L の Chern 類 $c_1(L)$ が主偏極となるとき, $H^0(M, \mathcal{O}(L))$ は 1 次元で, 次の V 上の関数 θ の適当な並進に対応する L の正則断面 $\tilde{\theta}$ により生成される:

$$\theta(z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} e^{\pi i \langle l, Zl \rangle} e^{2\pi i \langle l, z \rangle}$$

この関数は **Riemann の θ 関数** と呼ばれ, 次の性質に依り完全に特徴づけられる:

$$\begin{aligned} \theta(z + \lambda_\alpha) &= \theta(z), \\ \theta(z + \lambda_{n+\alpha}) &= e^{-2\pi i (z_\alpha + Z_{\alpha\alpha}/2)} \theta(z), \\ \theta(z) &= \theta(-z). \end{aligned}$$

ここで, $\lambda_i (i = 1, \dots, 2n)$ は Λ の基底ベクトル. また, M 上の因子 $\Theta = (\tilde{\theta})$ は, L により一意的に定まり, **Riemann** の θ 因子と呼ばれる. —□

3.12.5 群構造

【命題 3.237 (コンパクト複素 Lie 群)】 連結でコンパクトな複素 Lie 群は, 複素トーラスに限られる. —□

【命題 3.238 (複素トーラスの間の正則写像)】 複素トーラスの間の正則写像は, 並進変換と自己同形写像の合成に限られる. —□

【定理 3.239 (Abel 多様体の線形自己同形)】 Abel 多様体 $M \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^N$ の自己同形のうち, $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$ の線形変換から誘導されるものは有限個である. —□

3.13 有理写像

【定義 3.240 (有理写像)】 複素多様体 M から射影空間 $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ への写像 f が, M 上の n 個の大域的な有理関数 $f_1(z), \dots, f_n(z)$ を用いて

$$f : M \ni z \mapsto [1, f_1(z), \dots, f_n(z)] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$$

と表されるとき, f は M から $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ への有理写像という. また, 2つの複素多様体の写像 $f : M \rightarrow N$ は, N の適当な $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ への埋め込みに対し, 有理写像 $f : M \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ と一致するとき, 有理写像 (rational map) であるという. □

【定義 3.241 (双有理写像)】 有理写像 $f : M \rightarrow N$ に対して, 有理写像 $g : N \rightarrow M$ が存在して, $f \circ g$ が有理写像として恒等写像となるとき, 双有理写像 (birationally map) という. また, このとき, M と N は双有理同型 (birationally isomorphic), あるいは単に双有理 (birational) という. □

3.13.1 関連する基本定理

【定理 3.242 (固有写像定理 (Remmert))】 M, N を複素多様体, $V \subset M$ を解析的集合とする. このとき, 正則写像 $f : M \rightarrow N$ の V への制限が固有写像 (任意のコンパクト集合の逆像が常にコンパクト) なら, $f(V)$ は N の解析的集合となる. □

【定理 3.243 (Levi の拡張定理 (I))】 V を複素多様体 M の余次元が 2 以上の解析的集合とする. このとき, $M - V$ 上で定義された有理関数 f は, 常に, M 全体で定義された有理関数に拡張可能である. □

【定理 3.244 (Levi の拡張定理 (II))】 $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の多重円盤 Δ^n において, V を余次元が 2 以上の解析的集合, D を $\Delta^n - V$ の余次元が 1 の解析的集合とする. このとき, D の Δ^n における閉包 \bar{D} は, Δ^n の解析的集合となる. □

3.13.2 有理写像の特徴づけ

【命題 3.245 (定義域)】 有理写像 $f : M \rightarrow N$ は、一般に、 M の余次元 2 以上の解析的集合 V を除いた領域で定義され、 $M - V$ で正則となる。逆に、 V を M の余次元が 2 以上の解析的集合として、正則写像 $f : M - V \rightarrow N$ は、 M から N への有理写像となる。 □

Proof. Levi の拡張定理より

Q.E.D.

【命題 3.246 (因子の線形系との対応)】 複素多様体 M に対し、固定点集合の余次元が 2 以上となる M 上の因子の n 次元線形系は、 M から $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ への有理写像と $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の自己同形の自由度を除いて 1 対 1 に対応する。 □

Proof. 線形系 $D_\lambda (\lambda \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ に対して、 $f : M \ni p \mapsto f(p) = \{\lambda \mid p \in D'_\lambda\} \in (\mathbb{C}\mathbb{P}^n)^* \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^n$. ここで、 D'_λ は、 D_λ から共通有効成分を取り除いた線形系。 Q.E.D.

【命題 3.247 (グラフを用いた記述)】 M を k 次元複素多様体とするとき、有理写像 $f : M \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ は、ファイバー $\{p\} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ との交叉数が 1 となる $M \times \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の k 次元既約解析的集合 Γ と 1 対 1 に対応する。 □

3.13.3 Blow-up と blow-down

【定義 3.248 (単項的変換)】 滑らかな n 次元複素多様体 M の一点 p の開近傍 $U : z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ において、

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \{(z, l) \in U \times \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \mid z = 0 \text{ or } z \in l\}, \\ \pi : \tilde{U} \ni (z, l) &\rightarrow z \in U \end{aligned}$$

と置く。このとき、開近傍 $U' \subset M - p$ と U の重複部分において、変換 $\pi : \tilde{U} \cap \pi^{-1}(U') \rightarrow U \cap U'$ は正則な局所同型写像となるので、この写像による $M - p$ と \tilde{U} の貼り合わせは正則な複素多様体 \tilde{M} と写像 $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ を定義する。 \tilde{M} と π の組は、単項変換 (monoidal transformation) ないしブローアップ (blow-up) という。

$E = \pi^{-1}(p)$ は $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ と同型となり、例外因子 (exceptional factor) と呼ばれる。 $\pi : \tilde{M} - E \rightarrow M - p$ は同型写像となる。 □

【命題 3.249 (ブローアップの局所チャート)】 点 p のブローアップ $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ において, p の開近傍を $U \cong \mathbb{C}^n$, $E = \pi^{-1}(p)$ の開近傍を $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$ とする. いま, \tilde{U} の開集合 $\tilde{U}_j (j = 1, \dots, n)$ を

$$\tilde{U}_j = \{(z, l) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \mid l_j \neq 0\}$$

により定義すると, $\tilde{U} = \bigcup_j \tilde{U}_j$. \tilde{U}_j の複素座標系 $z(j) = (z(j)_i)$ を

$$z(j)_i = l_i/l_j \ (i \neq j), \quad z(j)_j = z_j$$

により定義すると, $z(j)$ は \mathbb{C}^n 全体を動き,

$$z_i = z(j)_i \cdot z(j)_j \ (i \neq j), \quad z_j = z(j)_j$$

より, $\pi : \tilde{U}_j \rightarrow U$ は正則な写像で表される.

以上より, $(z(j), U_j) (j = 1, \dots, n)$ が \tilde{M} における E の近傍での座標近傍系を与える. □

【命題 3.250 (N_E)】 点 p でのブローアップ $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ の例外因子 $E = \pi^{-1}(p)$ に対して

$$N_E^* \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}}(1) : \text{hyperplane line bundle over } \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}.$$

□

Proof. \tilde{M} の例外因子 E 近傍での座標近傍系を $(\tilde{U}_j, z(j))$ とするとき, 座標近傍 \tilde{U}_j での E の局所表現は

$$E|_{\tilde{U}_j} \Leftrightarrow z(j)_j = 0$$

これより, $N_E \cong [E]|_E$ の $\tilde{U}_j \cap \tilde{U}_k$ での遷移関数は,

$$g_{kj}(N_E) = z(k)_k/z(j)_j = l_k/l_j.$$

これに対して, E 上の超平面バンドル $H = \mathcal{O}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}}(1)$ の遷移関数は, $H = (l_1 = 0)$ のとき,

$$g_{kj}(H) = (l_1/l_k)/(l_1/l_j) = l_j/l_k.$$

よって, $N_E^* \cong H$.

Q.E.D.

【命題 3.251 (複素曲面における例外因子の交叉数)】 複素曲面 M の一点 p における単項変換 $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ において, その例外因子 E に対して

$$E \cdot E = -1.$$

□

Proof.

$$E \cdot E = \int_E c_1(E) = \deg([E]|_E) = \deg(N_E) = \deg(\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(-1)) = -1$$

Q.E.D.

【注 3.252 ($E \cdot E = -1$ となる幾何学的理由)】 複素曲面 \tilde{M} 内の複素曲線 E の自己交差数がマイナスになるのは, 幾何学的には次のように理解される. まず, $\mathbb{C}P^1$ の標準バンドル $J = \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(-1)$ の局所座標系を

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0 &: (z, \lambda) \rightarrow ([1, z], (\lambda, \lambda z)) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}, \\ \tilde{U}_1 &: (\zeta, \mu) \rightarrow ([\zeta, 1], (\mu\zeta, \mu)) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}, \\ \tilde{U}_0 \cap \tilde{U}_1 &: \zeta = 1/z, \quad \mu = \lambda z \end{aligned}$$

とする. このとき, J は正則切断をもたないが, $\mathbb{C}P^1$ 上で1個の極をもつ有理切断 s が存在する. この極を $[1, 0]$ に選ぶと, s は

$$\lambda = 1/z, \quad \mu = 1$$

となる. この極は, 複素解析的でない関数をつけることにより, 除くことができる:

$$s' = s \times \frac{|z|^2}{1 + |z|^2} \Rightarrow s'|_{\tilde{U}_0} = \frac{\bar{z}}{1 + |z|^2}, \quad s'|_{\tilde{U}_1} = \frac{1}{1 + |\zeta|^2}.$$

この新たな切断は解析的ではないがなめらかで, 1点 $z = 0$ に1位の零点をもち, ほかでは決してゼロとならない.

したがって, J のゼロ断面を E , s' に対応する断面を E' とすると, E' は E の無限小の連続変形と見なすことができ, 両者は $O = (0, 0) \in \tilde{U}_0$ のみ交わる. このとき, s' は O の近傍で $(z, \bar{z}) \in \mathbb{C}^2$ と表されるので, E から連続変形で得られる E' の向きは, \tilde{M} と複素構造から E' に誘導される向きと反対となる. これが, 交差数が (-1) となる理由である. —□

【命題 3.253 (標準因子の対応)】 M を n 次元複素多様体, $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ を M の点列 p_1, \dots, p_k でのブローアップ, E_1, \dots, E_k を対応する例外因子とする. このとき, M と \tilde{M} の標準因子の間に次の関係が成り立つ:

$$K_{\tilde{M}} = \pi^* K_M + (n-1)(E_1 + \dots + E_k).$$

□

【定理 3.254 (Castelnuovo-Enriques の可縮性判定条件)】 M を代数曲面, C を自己交叉数が -1 となる M 滑らかな有理曲線とする. このとき, 滑らかな代数曲面 N と正則写像 $\pi: M \rightarrow N$ で, $C = \pi^{-1}(p_0)$ ($p_0 \in N$) となるものが存在し, π は N の p_0 におけるブローアップとなる. —□

Proof. $\iota_{L'}: M \rightarrow \mathbb{C}P^N$ の像が $\iota_{L'}(M) = N$ となり, $\iota_{L'} = \pi$ が題意の条件を満たす複素直線バンドル L' を構成する.

まず, $L \rightarrow M$ を十分豊富な直線バンドルとすると, 消滅定理 B より $H^1(M, \mathcal{O}(L)) = 0$. また, $L \cdot C = m$ とおくと, $(L+kC) \cdot C = (m-k)$ と小平・中野の消滅定理より, $H^1(C, \mathcal{O}(L+kC)) = H^1(\mathbb{C}P^1, \mathcal{O}((m-k)H)) = H^1(\mathbb{C}P^1, \Omega^1((m-k+2)H)) = 0$ ($k < m+2$). よって, 層の短完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_M(L + (k-1)C) \rightarrow \mathcal{O}_M(L + kC) \rightarrow \mathcal{O}_C(L + kC) \rightarrow 0$$

から得られるコホモロジー完全系列より, 完全系列

$$H^1(M, \mathcal{O}(L + (k-1)C)) \rightarrow H^1(M, \mathcal{O}(L + kC)) \rightarrow 0 \quad (k = 1, \dots, m+1)$$

が得られる. これと, $H^1(M, \mathcal{O}(L)) = 0$ より, $H^1(M, \mathcal{O}(L+kC)) = 0$ ($k = 1, \dots, m+1$). よって, $k = 1, \dots, m+2$ に対し, 完全系列

$$H^0(M, \mathcal{O}(L+kC)) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}((m-k)H)) \rightarrow H^1(M, \mathcal{O}(L+(k-1)C)) = 0$$

が成り立つ. これより, $k \leq m$ のとき, M 上の線形系 $|L+kC|$ の C への制限は C 上の線形系 $|(m-k)H|$ への全射となり, $|(m-k)H|$ は固定点を持たないので, $|L+kC|$ は C 上に固定点を持たない. また, 豊富因子 $|L|$ は固定点を持たないので, $|L+kC|$ の部分線形系 $|L|+kC$ は, C 以外に固定点をもたない. したがって, $k \leq m$ のとき $|L+kC|$ は固定点を持たない.

そこで, $L' = L + mC$ とおく. このとき, L の大域的な正則断面は C 上で m 次でゼロとなる L' の大域的な正則切断と見なせる. L は豊富な

で, $H^0(M, \mathcal{O}(L))$ は M の $\mathbb{C}\mathbb{P}^M$ への埋め込みを与え, したがって, それに対応する $H^0(M, \mathcal{O}(L'))$ の切断は, $M - C$ での埋め込みを与える. 一方, $L \cdot C = 0$ なので, $L|_C$ は自明となり, $H^0(M, \mathcal{O}(L'))$ の C への制限は定数となる. 以上より, $\iota_{L'} : M \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^N$ は, C 以外で埋め込みを与え, C を一点 p_0 に写す.

いま, 図式

$$\begin{array}{ccc}
 H^0(M, \mathcal{O}(L' - C)) & \xrightarrow{r} & H^0(C, \mathcal{O}(H)) \longrightarrow 0 \\
 \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\
 \xi'_1, \xi'_2 & \xrightarrow{\quad} & \eta_1, \eta_2 \\
 \downarrow j & & \\
 H^0(M, \mathcal{O}(L')) & & \\
 \downarrow \psi & & \\
 \xi_0, \xi_1, \xi_2 & &
 \end{array}$$

において, 制限写像 r は全射なので, η_1, η_2 を $(L' - C)|_C$ の大域的正則断面で $\eta_1(q_1) = \eta_2(q_2) = 0 (q_1 \neq q_2 \in C)$ となるものとして, ξ'_1, ξ'_2 を $r(\xi'_1) = \eta_1, r(\xi'_2) = \eta_2$ となる $L' - C$ の大域的正則切断, ξ_1, ξ_2 を埋め込み j による ξ'_1, ξ'_2 の像とする. また, ξ_0 を j の像に含まれない L' の大域的正則切断とする. このとき, L' は C 上で自明なので, ξ_0 は C 近傍でゼロとならない. そこで, これらを用いて M 上の有理関数を

$$z_1 = \xi_1/\xi_0, \quad z_2 = \xi_2/\xi_0$$

により定義すると, (z_1, z_2) は C の近傍から \mathbb{C}^2 への正則な写像を定義する. さらに, $(z_1/z_2, z_2)$ と $(z_2/z_1, z_1)$ は, それぞれ $C - q_2$ および $C - q_1$ の開近傍において正則な M の座標系を与える. これは, M が適当な複素多様体 N の点 $p_0 (z_1 = z_2 = 0$ に対応) におけるブローアップで, C がその例外サイクルであることを示している. Q.E.D.

【定義 3.255 (極小多様体)】 複素多様体は, 第 1 種例外曲線 (exceptional curve of the first kind), すなわち自己交差数 (-1) の滑らかな有理曲線を含まないとき, 極小 (minimal) であるという. □

3.13.4 有理写像の例

【例 3.256】

1. ブローアップ: 複素多様体 M の点 p でのブローアップ $\pi_{\text{BD},p}: \tilde{M} \rightarrow M$ に対して,

$$\pi_{\text{BD},p}^{-1}: M - \{p\} \rightarrow \tilde{M}.$$

2. 線形射影: 解析的集合 $V \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ に対して, $p \in V$ を基点とする $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ への射影

$$\pi_p: V - \{p\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$$

この有理写像は, V の p でのブローアップ \tilde{V} から $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ への正則写像に一意的に持ち上げられる. また, V が 2 次超曲面のときは, 双有理写像となる.

3. Gauss 写像: k 次元複素多様体 M から $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ への正則写像 $\phi: M \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ に対し, $p \in M$ に $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の線形部分空間 $\phi^*(T_p(M))$ を対応させる Gauss 写像

$$\mathcal{G}: M^* \rightarrow G(k, n+1)$$

は, 有理写像となる. ここで, M^* は, $d\phi$ のランクが k となる M の点の全体. ϕ の同次座標時を $[\phi_0(z), \dots, \phi_n(z)]$ として, Plücker 埋め込み $G(k, n+1) \rightarrow \mathbb{P}(\wedge^k \mathbb{C}^{n+1})$ のもとで, Jacobi 行列 $\partial\phi_i/\partial z_\alpha$ の小行列式全体の組が, $\mathcal{G}(p)$ の同次座標表示を与える.

□

3.13.5 双有理不変量

【定義 3.257 (小平次元)】 滑らかな複素多様体 M に対して, 次数付き代数

$$G(M, K_M) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H^0(M, \mathcal{O}(mK_M))$$

は, 双有理不変量となり, 標準環 (canonical ring) と呼ばれる. 特に, その \mathbb{C} 上の超越次元を ν とするとき, $\kappa(M) = \nu - 1$ は双有理不変量で, 小平次元 (Kodaira dimension) という. ただし, $\nu = 0$ のときには, $\kappa = -\infty$ と約束する. M が n 次元の時, $\kappa(M)$ の取り得る値は $-\infty, 0, 1, \dots, n$ である.

□

【定理 3.258 (双有理不変量)】 一般に, $M \mapsto (E_M \rightarrow M)$ を複素多様体の圏からベクトルバンドルの圏への反変関手とするとき, 有理写像 $f: M \rightarrow N$ は, 一意的な写像

$$f^*: H^0(N, \mathcal{O}(E_N)) \rightarrow H^0(M, \mathcal{O}(E_M))$$

を誘導し, f が双有理写像なら f^* は同型写像となる.

Ω_M^q を n 次元複素多様体 M の正則 q 次微分形式の層とし,

$$h^{q,p} = \dim_{\mathbb{C}} H^p(M, \Omega_M^q)$$

とおく. このとき, 次の諸量は, 双有理不変量である:

1. $p_g(M) = h^{n,0}$: 幾何種数 (geometric genus)
2. $p_a(M) = \sum_{q=1}^n (-1)^{n-q} h^{q,0} = (-1)^n (\chi(\mathcal{O}_M) - 1)$: 算術種数 (arithmetic genus)
3. $q(M) = h^{1,0}$: 不正則数 (irregularity)
4. $P_m(M) = h^0(M, \mathcal{O}(mK_M))$: m 種数 (多重種数) (plurigenera)
5. 小平次元 $\kappa(M)$
5. $\pi_1(M)$: 基本群

□

3.14 リーマン面（代数曲線）

3.14.1 歴史に関するノート

- 1841 解析接続の概念 [Weierstrass K(1841-1842)]
- 1851 Riemann 面の概念の誕生 [Riemann の博士論文 "Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse"]
- 1907 Riemann 面一意化定理の完成 [Poincaré H]
- 1928 Grötzsch 問題を解くために擬等角写像の概念を導入 [Grötzsch H]
- 1935 「擬等角写像」という用語を導入 [Ahlfors LV]
- 1935 単連結領域から別の単連結領域への擬等角写像の一般的構成 [Lavrent'ev MA 1938, 1948]
- 1940 擬等角写像を用いて, 閉 Riemann 面のモジュライ自由度を研究し, Teichmüller 空間の概念を導入 [Teichmüller O]

3.14.1.1 Riemann の写像定理

【定理 3.259 (Vitali の定理)】 領域 D において, 正則関数の列 $f_n(z) (n = 1, 2, \dots)$ が, D において一様に有界であるとする. このとき, D の内部に集積点を持つような点集合 E において $f_n(z)$ が収束するならば, $f_n(z)$ は D において広義一様収束する.

[証明: 能代清「初等関数論」(1954)] _____□

【定理 3.260】 正則関数の列 $f_n(z) (n = 1, 2, \dots)$ が, D において一様に有界であるとする. このとき, D において広義一様収束する $f_n(z)$ の部分列が存在する.

[証明: 能代清「初等関数論」(1954)] _____□

【定理 3.261】 D を, 単位円 $|z| < 1$ に含まれるが $|z| < 1$ とは一致しない, 原点を内部に含む領域とする. このとき,

$$\chi(0) = 0, \quad |\chi'(0)| > 1, \quad |\chi(z)| < 1 (z \in D)$$

を満たす D 上の単葉正則関数 $\chi(z)$ が存在する.

[証明: 能代清「初等関数論」(1954)] _____□

【定理 3.262 (Riemann の写像定理)】 D を複素平面の (無限遠点を含まない) 単連結領域で, 境界が少なくとも 2 点を含むものとする. このとき, D を単位円盤 $|w| < 1$ に 1 対 1 かつ等角に移す関数で, D の一点 z_0 において, θ を勝手な実数として,

$$f(z_0) = 0, \quad \arg f'(z_0) = \theta$$

を満たすものが一意的に存在する.

[証明: 能代清「初等関数論」(1954)] _____ □

3.14.1.2 一意化定理

【定義 3.263 (多価関数の局所一意化)】

\mathbb{C} の領域 D で定義された多価解析関数の分枝 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ に対して, 領域 $\tilde{D} \subset \mathbb{C}$ と有理写像 $\pi: \tilde{D} \rightarrow D$ が存在して, $\tilde{f} = f \circ \pi: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{C}$ が一価の解析関数となるとき, f は π により局所一意化 (local uniformization) されたという.

これは, 解析接続に基づく Riemann 面の概念と対応する.

[出典: 岩波数学事典第 4 版] _____ □

【定義 3.264 (代数曲線の一意化)】 $\mathbb{C}^2 \ni (z, w)$ の代数曲線 $C: h(z, w) = 0$ に対して, 領域 $D \subset \mathbb{C}$ と有理関数 $F(t) = (f(t), g(t))$ が存在して, $z = f(t), w = g(t)$ が C と一致し, D に作用する固有離散的な正則変換群 G が存在して, $F: D/G \rightarrow C$ となるとき, (F, D, G) を代数曲線 C の一意化 (uniformization) という.

これは, 局所的には C を $w = w(z)$ で記述すると, 局所一意化に対応する. また, 大域的には, 代数曲線を特異点解消した上で普遍被覆を取ることに相当する,

[出典: Encyclopedia of Mathematics] _____ □

【定義 3.265 (Riemann 面の一意化)】 Riemann 面 S に対し, \mathbb{C}^1 の単連結領域 D から S への正則被覆写像 $\pi: D \rightarrow S$ および D の正則変換からなる固有離散変換群 G が存在して, G が π の被覆変換群と一致するとき, (D, π, G) を Riemann 面 S の一意化という.

[出典: Encyclopedia of Mathematics] _____ □

【定理 3.266 (コンパクト Riemann 面から $\mathbb{C}P^1$ への写像の全射性)】

コンパクトな Riemann 面 S から $\mathbb{C}P^1$ への正則写像 f は、定数写像でなければ全射である。さらに、 $df = 0$ となる点の集合 p_1, \dots, p_n を S から除いた開集合を S_0 とすると、 $f : S_0 \rightarrow f(S_0)$ はある被覆度 n をもつ被覆写像となる。また、 S の各点 p において、その多重度 $m(p)$ を、 $f^{(m(p)-1)}(p) = 0, f^{m(p)}(p) \neq 0$ により定義すると、

$$\sum_{f(p)=q} m(p) = n, \quad \forall q \in f(S)$$

が成り立つ。特に、 $\mathbb{C}P^1$ の開集合 U 上で f の被覆度が 1 なら、 f は正則同型写像となる。 _____□

【定理 3.267 (単連結な閉 Riemann 面)】 第 2 可算公理を満たす単連結な 2 次元閉多様体は 2 次元球面に微分同相である。特に、単連結な閉 Riemann 面 S は、複素球面 $\mathbb{C}P^1$ と双正則同型である。 _____□

【証明へ】

【定理 3.268 (Riemann 面の一意化定理 (Koebe P, Poincaré, Klein F))】 任意の極大な Riemann 面 S は、次にいずれかの \mathbb{C}^1 の領域 D とその正則固有離散変換群 G に対して、 D/G と共形となる。

- 楕円型: $D = \mathbb{C}P^1, G = \{e\}$.
- 放物型: $D = \mathbb{C}$
 - 全複素平面: $G = \{e\}$
 - 円筒: $G = \{z \rightarrow z + n\omega \mid n \in \mathbb{Z}\}$. ここで、 $\omega \neq 0$.
 - トーラス: $G = \{z \rightarrow z + n\omega_1 + m\omega_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$. ここで、 $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} - \{0\}, \text{Im}(\omega_1/\omega_2) \neq 0$.
- 双曲型: $D = \Delta$ (単位円盤), $G =$ 振れない Fuchs 群.

□

【定義 3.269 (Fuchs 群)】 \mathbb{C} の一次分数変換 (= $\mathbb{C}P^1$ の線形変換)

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1$$

からなる、固有離散変換群 Γ を Fuchs 群という。 _____□

文献：

- [1] Klein F: "Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheories",
Math. Ann. 21, 141-218 '1883),
- [2] Poincaré H: "Sur l'uniformisation des fonctions analytiques", Acta
Math. 31, 1-64 (1907),
- [3] Koebe P: "Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurvesn
III", Machr. K. Ges. Wissenschaft. Göttinger Math. Phys. Kl.,
177-198 (1907).

3.14.2 基本定理

【定理 3.270 (因子の次数と位相指数の対応, Riemann-Hurwitz 公式)
 S をコンパクト連結リーマン面とする.

1. 因子 $D = \sum_i n_i p_i$ の次数を $\deg D = \sum_i n_i$ により定義すると,

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_S \Theta = \langle c_1([D]), [S] \rangle = \deg D.$$

2. S の複素接バンドル $T'(S)$ に対して, $\sqrt{-1}\Theta = \frac{1}{2}R_s\omega$ より,

$$\deg T'(S) \equiv \langle c_1(T'(S)), [S] \rangle = \frac{1}{4\pi} \int R_s \omega = \chi(S). \quad (3.14.1)$$

ここで, ω はケーラー形式, R_s はそのスカラ曲率, $\chi(S)$ はオイラー数.

$K_S \cong (T'(S))^*$ なので, これより

$$\deg K_S = -\chi(S) = 2g - 2. \quad (\text{Riemann-Hurwitz 公式})$$

□

Proof. 曲率形式, Chern 類, 因子の対応に関する一般論 (定理 3.169) および注 3.168 より. Q.E.D.

【命題 3.271 (正則直線バンドルの正值性条件)】 コンパクトリーマン面 S 上の正則直線バンドル $L \rightarrow S$ は, $\deg L > 0$ なら正である. □

Proof. 層の完全系列 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow 0$ に対応する S の層係数コホモロジーの完全系列は, $H^2(S, \mathcal{O}) \cong H^2_0(S) = 0$ より, 次の完全系列を与える:

$$0 \longrightarrow H^1(\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

$$\cong \oplus^{2g} \mathbb{Z} \quad \cong \oplus^g \mathbb{C} \quad \cong \text{Pic}(S) \quad \cong \mathbb{Z}$$

ここで, $H^q(\mathcal{S}) = H^q(S, \mathcal{S})$ である. これより, $\text{Pic}(S) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$ は全射なので, S のケーラー形式を条件

$$\int_S \omega = 1$$

を満たすようスケールした閉 $(1, 1)$ 形式 ω に対し, $[\omega]$ が Chern 類となる正則直線バンドル L_1 が存在し, L_1 は正, かつ $\deg(L_1) = 1$ となる. 次に, 任意の正則直線バンドル L に対して, $k = \deg L > 0$ なら, $c_1(L) = kc_1(L_1) = [k\omega]$ となり, $c_1(L)$ は正の $(1, 1)$ 閉形式を含むので, 定理 3.182 より, L は正. Q.E.D.

【命題 3.272 (リーマン面のコホモロジー)】 コンパクトリーマン面 S に対して,

$$\mathcal{H}^{q,0}(S) \cong \mathcal{H}^{0,q}(S) \cong H^q(S, \mathcal{O}) \cong H^0(S, \Omega^q) = \begin{cases} \mathbb{C}^g & : q = 1 \\ 0 & : q > 1 \end{cases},$$

$$\text{Pic}(S) \cong H^1(S, \mathcal{O}^*) \cong \mathcal{I}(S) \oplus \mathbb{Z},$$

$$H^q(S, \mathcal{O}^*) = 0 \quad (q > 1).$$

ここで g は S の種数, $\mathcal{I}(S)$ は Jacobi 多様体. □

Proof. 第 1 式は, Dolbeault の定理, Hodge の定理, Kodaira-Serre の双対定理, Hodge 分解および諸定理 3.141 より.

第 2 式は, コホモロジーの長完全系列の一部

$$0 \longrightarrow H^1(S, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(S, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(S, \mathcal{O}) = 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \mathbb{Z}^{2g} & & \mathbb{C}^g & & \text{Pic}(S) & & \mathbb{Z} \end{array}$$

より. 第 3 式も, 同じ完全系列の高次部分 ($q \geq 2$)

$$0 = H^q(S, \mathcal{O}) \xrightarrow{\text{exp}} H^q(S, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(S, \mathbb{Z}) = 0$$

より. Q.E.D.

【定理 3.273 (リーマン面上の正則直線バンドル)】 L をコンパクトリーマン面 S 上の正則直線バンドルとする.

1. $\deg L < 0$ のとき, $H^0(S, \mathcal{O}(L)) = 0$
2. $\deg L > \deg K_S$ のとき, $H^1(S, \mathcal{O}(L)) = 0$
3. $\deg L > \deg K_S + 2$ のとき, $\iota_L : S \rightarrow \mathbb{C}P^N$ が定義され, 埋め込みを与える.

□

Proof. 1 は, $\deg L < 0$ なら, L の任意の大域的切断は極をもつため. 2 は, $L - K_S > 0$ に対しする小平・中野の消滅定理より. 3 は小平の埋め込み定理の精密化. Q.E.D.

【定理 3.274 (射影空間への埋め込み)】 任意の滑らかなコンパクトリーマン面 S は, $\mathbb{C}P^3$ に埋め込み可能である. また, 高々2重点のみをもつ $\mathbb{C}P^2$ への埋め込みが存在する. □

Proof. 埋め込み $S \subset \mathbb{C}P^N$ のコード解析的多様体 $C(S)$ の複素次元 3 であることと, $p \notin C(S)$ から $\mathbb{C}P^N$ の超平面への射影が S の $\mathbb{C}P^{N-1}$ への埋め込みを与えることを用いる. 後半は, $\mathbb{C}P^3$ に埋め込まれた代数曲線 S に対して, $p \in \mathbb{C}P^3$ からの射影 $\pi_p : S \rightarrow \mathbb{C}P^2$ が題意の条件を満たさない p の集合が複素 2 次元以下であることより. Q.E.D.

【定義 3.275 (分岐被覆の被覆度と分岐指数)】 コンパクトリーマン面 S から別のコンパクトリーマン面 S' への正則写像 (分岐被覆) を $f : S \rightarrow S'$ とする. f から誘導されるホモロジーの準同形 $f_* : H_2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(S', \mathbb{Z})$ に対して,

$$f_*([S]) = n[S']$$

により決まる整数 n を, f の被覆度 (sheet number/degree) とよぶ, また, 任意の点 p に対して, p の局所座標 z おおび $f(p)$ の局所座標 w を適当にとると,

$$w = z^{v(p)}$$

が成り立つ. このとき, $v(p)$ を f の p における分岐指数 (ramification index) という. また, $v(p) > 1$ のとき, p を分岐点 (branch point) と呼ぶ.

□

【定理 3.276 (Riemann-Hurwitz 公式)】 コンパクトリーマン面 S から別のコンパクトリーマン面 S' への定数写像でない正則写像 (分岐被覆) $f: S \rightarrow S'$ に対し, 点 $q \in S$ での分岐指数を $v(q)$, f の被覆度を n とする.

1. f は全射で, 分岐点以外では S の n 重被覆となり, 任意の点 $p \in S'$ に対し, $\sum_{f(q)=p} v(q) = n$ が成り立つ.
2. 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}\chi(S) &= n\chi(S') - \sum_{q \in S} (v(q) - 1), \\ K_S &= f^* K_{S'} + \sum_{p \in S} (v(p) - 1) p, \\ g(S) &\geq g(S')\end{aligned}$$

□

Proof. S' 上の 1 形式の大域的有理切斷 ω に対応する因子 $(\omega) = K_{S'}$, および分岐点を頂点に含む単体分割の, f による引き戻しに対する (分岐点での) 振る舞いを具体的に決定. Q.E.D.

【定理 3.277 (種数公式)】 $\mathbb{C}P^2$ 内の d 次代数曲線 S に対して,

$$g(S) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

□

Proof. 3 種類の証明法が可能. 適当に座標系を選び, 座標系 $[1: z_1: z_2]$ において S の定義式を $f(z_1, z_2) = 0$, $p = [0: 0: 1] \notin S$, $H: Z_2 = 0$ と S は横断的に交わるとする.

- i) 射影 $\pi_p: S \rightarrow H \cong \mathbb{C}P^1$ にオイラー数に対する Riemann-Hurwitz の公式を使う. π_p の被覆度が d , 分岐指数の和 $\sum_{q \in S} (v(q) - 1)$ が, S と曲線 $\partial f / \partial z_2 = 0$ の交点数 $d(d-1)$ と一致することを用いる.
- ii) $K_S = (K_{\mathbb{C}P^2} \otimes [S])|_S = [-3H + S]|_S = [(d-3)H]|_S$ より $\deg K_S = (d-3)\sharp(H \cdot S) = d(d-3)$ と Riemann-Hurwitz の公式 $g(S) = 2 - \chi(S) = 2 + \deg K_S$ を用いる.

iii) Poincareの留数写像 P.R.: $\Omega_{\mathbb{C}P^2}^2(S) \rightarrow \Omega_S^1$ が 1 対 1 写像 $H^0(\mathbb{C}P^2, \Omega^2(S)) \rightarrow H^0(S, \Omega^1) \cong H^1(S, \mathcal{O})$ を与えることより, $\dim(H^0(\mathbb{C}P^2, \Omega^2(S))) = g(S)$ となることに着目し, $g(S)$ を決定する.

Q.E.D.

【定理 3.278 (留数定理)】 コンパクトリーマン面上の有理 1 形式 ϕ に対し, その極点を p_1, \dots, p_k とするとき,

$$\sum_i \text{Res}_{p_i}(\phi) = 0$$

□

【定理 3.279 (種数 $g = 0$ のリーマン面)】 リーマン面 S が種数 $g = 0$ を持つとき,

1. S は $\mathbb{C}P^1$ と同型である.
2. 任意の点 $p \in S$ に対し, $H^0(S, \mathcal{O}(mp)) \cong \mathbb{C}^{m+1}, m = 0, 1, 2, \dots$.

□

Proof. 1. $g = 0$ のとき, $H^1(S, \mathcal{O}) \cong H^{0,1} = 0$ より, S の勝手な点 p に対し, $H^0(S, \mathcal{O}(p)) \rightarrow [p]_p$ は全射となる. これより, 高々 p に一位の極をもち, p 以外では正則な S 上の有理関数 f が存在し, $[1, f(z)]$ は全射正則写像 $\phi: S \rightarrow \mathbb{C}P^1$ を与える. $\phi(p) = [0, 1]$ となるが, f の極は p のみなので, $\phi^{-1}([0, 1]) = \{p\}$ で, 極がただか1位なので, p での重複度は 1 となる. したがって, p は分岐点でなく, f は同型写像となる.

2. $H^1(S, \mathcal{O}(mp)) \cong H^0(S, \mathcal{O}(K_S - mp)) = H^0(S, \mathcal{O}(-(m+2)p)) = 0$ および, 層の完全系 $0 \rightarrow \mathcal{O}((m-1)p) \rightarrow \mathcal{O}(mp) \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0$ に対するコホモロジー完全系列より,

$$H^0(S, \mathcal{O}(mp)) \cong \mathbb{C} \oplus H^0(S, \mathcal{O}((m-1)p)), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Q.E.D.

【系 3.280 (リーマン面上の単極有理関数)】 種数 $g > 0$ のリーマン面 S では, 1 位の極を一個のみもつ有理関数は存在しない. すなわち, 任意の点 $p \in S$ に対し, $H^0(S, \mathcal{O}(p)) \cong \mathbb{C}$. □

Proof. 存在すると、同型対応 $S \rightarrow \mathbb{C}P^1$ が得られるから。 Q.E.D.

【定理 3.281 (種数 $g = 1$ リーマン面)】 $g = 1$ のリーマン面は、 $\mathbb{C}P^2$ の 3 次曲線として埋め込むことができ、その定義方程式は $\mathbb{C}P^2$ の適当なアフィンチャート $[1, x, y]$ を用いて、

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \quad (3.14.2)$$

と表される。ここで、 $\lambda \in \mathbb{C}$ はモジュライパラメータである。このとき、 dx/y はリーマン面上の大域的な正則 1 形式を与える。 □

Proof. $g = 1$ のとき、点 $p \in S$ に対し、 $\deg K_S = 0 < 1 = \deg[p]$ なので、定理 3.273 より $H^1(S, \mathcal{O}(p)) = 0$ 。これより、 $H^0(S, \mathcal{O}(2p)) \rightarrow [2p]_p$ は全射となるので、 S 上に p で高々 2 位の極を持ち、 p 以外で正則な関数 F が存在し、 p の適当な局所座標 z を用いて

$$X = \frac{1}{z^2} + a_1 z + O(z^2)$$

と表される。また、 $H^0(S, \Omega^1) \cong H^{1,0} \cong \mathbb{C}$ より、大域的に正則な S 上の 1 形式 α が存在し、 $0 = \deg K_S = (\alpha)$ より、 α は零点を持たない。また、 $X\alpha$ に対する留数定理より、 $\alpha = c_0 + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$ となる。これより、

$$Y = -\frac{c_0}{2} \frac{dX}{\alpha} + \frac{a_1 c_0 + 2c_3}{2c_0} = \frac{1}{z^3} - \frac{c_2}{c_0} \frac{1}{z} - \frac{c_0^2 a^2 + c_0 c_4 - c_2^2}{c_0^2} z + O(z^2)$$

が成り立つ。

X と Y を用いて、写像

$$S \ni q \mapsto [1, X(q), Y(q)] \in \mathbb{C}P^2$$

により S を $\mathbb{C}P^2$ に沈め込むと、

$$Y^2 + 3a_1 Y - X^3 + \frac{2c_2}{c_3} X^2 + \frac{5a_2 c_0^2 + 2c_0 c_4 - 3c_2^2}{c_0^2} X = O\left(\frac{1}{z}\right)$$

が成り立つが、 $S \not\cong \mathbb{C}P^1$ なので、この式の右辺は定数となる。 Q.E.D.

【命題 3.282 (種数 $g = 1$ 上の単極有理関数)】 種数 1 のリーマン面 S と任意の点 $p \in S$ に対し、

$$H^0(S, \mathcal{O}(mp)) \cong \mathbb{C} \quad (m = 0, 1), \quad \mathbb{C}^m \quad (m = 2, 3, \dots)$$

すなわち、 S 上に極を一個のみ持つ有理関数は、2 位の極を持つ関数 \mathcal{P} とその導関数 (および定数) の線形結合である。(\mathcal{P} は Weierstrass の \wp 関数に対応。) □

Proof. 層の短完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S((m-1)p) \xrightarrow{\otimes s_0} \mathcal{O}_S(mp) \xrightarrow{r} \mathcal{O}_S(mp)|_p \longrightarrow 0$$

から得られる完全系列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(S, \mathcal{O}((m-1)p)) & \xrightarrow{j} & H^0(S, \mathcal{O}(mp)) & \xrightarrow{r^*} & H^0(p, \mathbb{C}) \\ & & \xrightarrow{\delta} & H^1(S, \mathcal{O}((m-1)p)) & \xrightarrow{j} & H^1(S, \mathcal{O}(mp)) & \end{array}$$

において, 定理 3.273 より, $H^1(S, \mathcal{O}(mp)) = 0 (m = 1, 2, \dots)$ より,

$$H^0(S, \mathcal{O}(mp)) \cong \mathbb{C} \oplus H^0(S, \mathcal{O}((m-1)p)) \quad (m = 2, 3, \dots)$$

Q.E.D.

3.14.3 Abel の定理

【定理 3.283 (Abel の定理 1)】 C を \mathbb{CP}^2 の種数 1 の代数曲線 ($y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$, $\omega = dx/y$ を C 上の大域的正則 1 形式とする).

1. p_0 を C 上の任意の基準点, \mathbb{CP}^2 の直線 ℓ と C の 3 つの交点を $p_i (i = 1, 2, 3)$ とするとき

$$\psi(\ell) \equiv \sum_{i=1}^3 \int_{p_0}^{p_i} \omega \quad (3.14.3)$$

は ℓ に依存しない定数となる.

2. f を C 上の有理関数, D をその因子 $D = (f) = \sum_i p_i - \sum_i q_i$ とするとき,

$$\sum_i \int_{q_i}^{p_i} \omega \equiv 0 \pmod{\Lambda} \quad (3.14.4)$$

□

Proof. 1. ψ が $\ell \in \mathbb{CP}^{2*} \cong \mathbb{CP}^2$ から \mathbb{C}/Λ (Λ は周期格子) への正則写像を与えるので, $\psi^* dz (dz$ は \mathbb{C}/Λ の大域的正則 1 形式) は \mathbb{CP}^2 上の大域的
正則 1 形式. しかし, $H^0(\mathbb{CP}^2, \Omega^1) = 0$.

2. パラメータ系 $D = (\lambda_0 f + \lambda_1)$ から定義される写像 $\mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ について同様の議論を行う. Q.E.D.

【定義 3.284 (リーマン面の周期と Jacobi 多様体)】 S を種数 g のリーマン面, $\omega_i (i = 1, \dots, g)$ を $H^0(S, \Omega^1)$ の基底, $(\delta_I) = (\alpha_i, \beta_i) (I = 1, \dots, 2g, i = 1, \dots, g)$ を $H_1(S, \mathbb{Z})$ の正規基底とする.

1. $2g$ 個の列ベクトル

$$\Pi_I = {}^T \left(\int_{\delta_I} \omega_1, \dots, \int_{\delta_I} \omega_g \right) \in \mathbb{C}^g$$

を S の周期, これらのベクトルから作られる $g \times 2g$ 行列

$$\Omega \equiv (\Pi_1, \dots, \Pi_{2g})$$

を S の周期行列と呼ぶ.

2. 周期ベクトル $\Pi_I (I = 1, \dots, 2g)$ から生成される格子を

$$\Lambda \equiv \{m_1 \Pi_1 + \dots + m_{2g} \Pi_{2g} \mid m_I \in \mathbb{Z}\} \quad (3.14.5)$$

とすると, $\mathcal{J}(S) = \mathbb{C}^g / \Lambda$ をヤコビ多様体 (Jacobian variety) という.

□

【定理 3.285 (1 形式に対する相互則)】 リーマン面 S において, 正則微分形式 ω と第 3 種微分形式 (高々 1 位の極しか持たない 1 形式) η に対して, それらの周期ベクトルを Π^I, N^I とするとき, $(\eta)_\infty = \sum_\lambda s_\lambda, s_0$ を勝手な基点として,

$$\sum_{i=1}^g (\Pi^i N^{g+i} - \Pi^{g+i} N^i) = 2\pi\sqrt{-1} \sum_\lambda \text{Res}_{s_\lambda}(\eta) \int_{s_0}^{s_\lambda} \omega$$

が成り立つ. ただし, 積分は s_0, s_λ を含む単連結領域に含まれる経路にそって行うものとする. □

Proof. $\pi(p) \equiv \int_{s_0}^p \omega$ として, S をホモロジー基底により切り裂いて得られる基本領域 Δ に対して, $\int_{\partial\Delta} \pi\eta$ を留数定理による計算と, 直接計算の 2 つの方法で計算する. Q.E.D.

【系 3.286 (周期に対する Riemann の第 1 双線形関係式)】 リーマン面 S 上の 2 つの正則 1 形式 ω, ω' に対して,

$$\int_S \omega \wedge \bar{\omega}' = \sum_{i=1}^g (\Pi^i \bar{\Pi}'^{g+i} - \Pi^{g+i} \bar{\Pi}'^i),$$

$$\sum_{i=1}^g (\Pi^i \Pi'^{g+i} - \Pi^{g+i} \Pi'^i) = 0.$$

□

【系 3.287】 リーマン面の周期行列は、基底の取り替えにより、次の形に規格化できる：

$$\Omega = (I_g, Z), \quad {}^T Z = Z, \quad \text{Im } Z > 0 \text{ (as a symmetric real matrix)}$$

□

【補題 3.288】 リーマン面 S 上の点列 p_λ および条件 $\sum_\lambda a_\lambda = 0$ を満たす任意の複素数列 a_λ に対して、 $\text{Res}_{p_\lambda}(\eta) = a_\lambda$ となり、 $S - \sum_\lambda p_\lambda$ で正則な第 3 種 1 形式 η が存在する。 □

Proof. 層の完全系列

$$0 \longrightarrow \Omega^1 \longrightarrow \Omega^1(\sum_\lambda p_\lambda) \xrightarrow{\text{res.}} \oplus \mathbb{C}_{p_\lambda} \longrightarrow 0$$

と $H^1(S, \Omega^1) \cong H^0(S, \mathcal{O}) = \mathbb{C}$ より.

Q.E.D.

【定義 3.289】 リーマン面 S の次数ゼロの因子の線形集合 $\text{Div}^0(S)$ から Jacobi 多様体 $\mathcal{J}(S)$ への写像を,

$$\mu : D = \sum_\lambda (p_\lambda - q_\lambda) \mapsto \mu(D) = \left(\sum_\lambda \int_{q_\lambda}^{p_\lambda} \omega_i; i = 1..g \right)$$

により定義する。 □

【定理 3.290 (Abel の定理 2)】 $D \in \text{Div}^0(S)$ に対し、 $\mu(D) \equiv 0 \pmod{\Lambda}$ となるための必要十分条件は、 S の適当な有理関数 f に対して $D = (f)$ となることである。 □

Proof. 十分性の証明は, Abel の定理 1 の項目 2 の証明と同じく, $D = (\lambda_0 f + \lambda_1)$ に対して $\mu(D)$ が $[\lambda_0, \lambda_1]$ に依存しないことと, $\lambda_0 \rightarrow 0$ で $\mu(D) \rightarrow 0 \pmod{\Lambda}$ となることより.

必要性の証明: 上記補題より, $D = \sum_{\lambda} (p_{\lambda} - q_{\lambda}) = \sum_i m_i r_i$ に対して, $\text{Res}_{r_i}(\eta) = m_i$ となる第 3 種微分形式 η が存在. この 1 形式に適当な正則 1 形式を加えた η' は, 周期ベクトルのすべての成分が整数となることを, 1 形式に対する相互則を用いて示す. すると, $f = \exp(2\pi\sqrt{-1} \int_{p_0}^p \eta)$ が曖昧さ無く定義され, $D = (f)$ となる. Q.E.D.

【定理 3.291 (Jacobi 反転定理)】 S を種数 g のリーマン面, p_0 をその勝手な基点とするとき, 任意の $\lambda \in \mathcal{J}(S)$ に対して, S の点列 p_1, \dots, p_g が存在して, $\mu(\sum_i (p_i - p_0)) = \lambda$ が成り立つ. さらに, 一般の λ に対して, $\sum_i p_i$ は一意的である. □

Proof. S の g 個の対称積により定義される g 次元複素多様体 $S^{(g)} = S^g / \text{Sym}(g)$ から $\mathcal{J}(S)$ への正則写像 F を $[(p_1, \dots, p_g)] \mapsto \mu(\sum_{\lambda} (p_{\lambda} - p_0))$ により定義する. F の Jacobi 行列が一般点で正則となることより, F の全射性が言える. また, $F^{-1}(\lambda)$ に対応する因子集合が一般に線形系に対応する射影空間となることと, F が一般点で被覆写像となることより, 一般点で, F が 1 対 1 写像であることが結論される. Q.E.D.

【系 3.292】 種数 g のリーマン面において, $\deg D \geq g$ となる因子 D は有効因子に線形同値, すなわち $h^0(D) > 0$ である. □

Proof. リーマン面 S の基点を p_0 とするとき, $\deg D = d$ に対し, $D \sim dp_0 + (D - dp_0) \sim dp_0 + \sum_{i=1}^g (p_i - p_0) = (d - g)p_0 + \sum_{i=1}^g p_i > 0$. Q.E.D.

【定理 3.293 (楕円曲線と複素トーラスの同型性)】 種数 $g = 1$ のリーマン面 S のおいて, p_0 を勝手な基点, $\omega \in H^0(S, \Omega^1)$ とする. このとき, S から Jacobi 多様体 $\mathcal{J}(S) \cong \mathbb{C}/\Lambda$ への次の写像は同型対応を与える:

$$\mu : S \ni p \mapsto \int_{p_0}^p \omega \in \mathcal{J}(S)$$

□

【系 3.294 (Weierstrass の \wp 関数)】 複素トーラス \mathbb{C}/Λ の標準複素座標を z とするとき, $z = 0$ に 2 位の極をもち $\wp = \frac{1}{z^2} + O(z)$ と振る舞う有理関数が一意的に存在する. この関数を用いて定義される写像

$$\psi : \mathbb{C}/\Lambda \ni z \rightarrow [1, \wp(z), \wp'(z)] = [1, x, y] \in \mathbb{CP}^2$$

は, 複素トーラスから \mathbb{CP}^2 の種数 1 の代数曲線

$$C : f(x, y) \equiv y^2 - 4x^3 + g_2x + g_3, \quad (g_2, g_3 \in \mathbb{C})$$

への正則写像を与える. このとき, $dz = dx/y$ より,

$$\psi^{-1}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dx}{y}, \quad p_0, p \in C$$

が成り立つ. さらに, Abel の定理より,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0 \pmod{\Lambda} &\Leftrightarrow p_1, p_2, p_3 \in \ell(\text{line}) \subset \mathbb{CP}^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \wp(z_1) & \wp'(z_1) \\ 1 & \wp(z_2) & \wp'(z_2) \\ 1 & \wp(z_3) & \wp'(z_3) \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. □

3.14.4 Riemann-Roch の定理

【定理 3.295 (第 1 種と第 2 種微分形式に対する相互則)】 ω と η を, それぞれ, リーマン面 S 上の正則微分形式, および点 p に留数ゼロの極をもち, それ以外で正則な微分形式とし, p を原点とする複素座標 z に関して次の Laurent 展開を持つとする:

$$\begin{aligned} \omega(z) &= (b_0^p + b_1^p z + \cdots) dz, \\ \eta(z) &= (a_{-n}^p z^{-n} + \cdots + a_0^p + a_1^p z + \cdots) dz, \quad a_{-1}^p = 0. \end{aligned}$$

$H_1(S, \mathbb{Z})$ の基底 $\delta_I (I = 1, \dots, 2g)$ に関する ω と η の周期ベクトルを Π^I, N^I とするとき, 次の関係式が成り立つ:

$$\sum_{i=1}^g (\Pi^i N^{i+g} - \Pi^{i+g} N^i) = 2\pi\sqrt{-1} \sum_{p,j} \frac{a_{-j}^p b_{j-2}^p}{j-1}.$$

□

Proof. 第1種と第3種微分形式に対する相互則の場合と同様. 基本領域 $\Delta = S - \cup_I \delta_I$ において, $\pi = \int_{s_0}^p \omega$ とおき, $\int_{\partial\Delta} \pi\omega$ を直接計算と留数定理の2つの方法で計算する. Q.E.D.

【定義 3.296 (ベクトルバンドルの Euler 特性数)】 複素多様体 M 上のベクトルバンドル E に対し,

$$h^q(E) \equiv h^q(M, \mathcal{O}(E)) \equiv \dim_{\mathbb{C}} H^q(M, \mathcal{O}(E)), \quad (3.14.6)$$

$$\chi(E) = \sum_p (-1)^p h^p(E) \quad (3.14.7)$$

により定義される整数 $\chi(E)$ を, E のオイラー特性数 (Euler characteristic) という. □

【定理 3.297 (Riemann-Roch の定理)】 S を種数 g のリーマン面, K をその標準因子, D を勝手な因子とするとき, 次の関係式が成り立つ:

$$h^0(D) = \deg D - g + 1 + h^0(K - D).$$

この関係式は, $L = [D]$ とおくと, $\chi(L) = h^0(L) - h^1(L) = h^0(D) - h^0(K - D)$, および $\chi(\mathcal{O}_S) = h^{0,0}(S) - h^{0,1}(S) = 1 - g$ より,

$$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_S) + c_1(L) \quad (3.14.8)$$

と書き換えられる. □

Proof.

- 1) 初等的な証明: まず, $D = \sum_{\lambda} p_{\lambda}$ のとき, $H^0(S, \Omega^1(2D))$ の元 η で, p_{λ} での留数がゼロ, かつ周期ベクトル $N^I = 0$ となる1形式と, $f \in H^0(S, \mathcal{O}(D))$ とが, $\eta = df$ の対応により, $f \rightarrow f + \text{const}$ の自由度を除いて1対1に対応.

一方, $H^1(S, \Omega^1(D)) = 0$ と完全系列

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(S, \Omega^1(D)) \longrightarrow H^0(S, \Omega^1(2D)) \longrightarrow \mathbb{C}^d \\ &\longrightarrow H^1(S, \Omega^1(D)) = 0 \end{aligned}$$

より, $(a_{\lambda}; \lambda = 1, \dots, d = \deg D) \in \mathbb{C}^d$ に対して, 各 p_{λ} の近傍で, $\phi_a = (a_{\lambda}/z^2 + O(1))dz$ と振る舞い, $S - D$ で正則な1形式が, 正則1形式を加える自由度を除いて一意的存在. この正則1形式の自由度は, ϕ_a のA-サイクルに対する周期がゼロとなることを要求すると, 完全取り除かれる.

このとき、線形写像

$$\psi : W \cong \mathbb{C}^d \ni [a_\lambda] \mapsto \left(\int_{\delta_{g+i}} \phi_a; i = 1..g \right) \in \mathbb{C}^g$$

の核に属する ϕ_a が、求める η を与える： $h^0(D) = \dim \ker \psi + 1$.

ここで、 $\omega_1, \dots, \omega_g$ を正則微分形式の標準基底として、第1種および第2種の微分形式に対する相互則を (ω_j, ϕ_a) に適用すると、

$$\int_{\delta_{g+j}} \phi_a = 2\pi\sqrt{-1} \sum_{\lambda} a_\lambda (\omega_j/dz_\lambda)(p_\lambda)$$

となるので、 $h^0(S, \Omega^1(-D)) = h^0(K-D)$ より、 $\dim(\ker \psi) = d - \text{rank } \psi = d - (g - h^0(K-D))$. よって、 $h^0(D) = d - g + 1 + h^0(K-D)$. D が有効因子でない場合も、 $D \rightarrow K-D$ により同じ式が成り立つことが示される.

- 2) 層係数コホモロジー完全系列を用いた証明： D が有効因子とする.
このとき、Kodaira-Serre 双対定理 $H^1(\mathcal{O}(D)) \cong H^0(\Omega^1(-D)) = H^0(\mathcal{O}(K-D))$ および、層の短完全系列 $0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(D) \rightarrow \bigoplus_{\lambda} \mathbb{C}_\lambda \rightarrow 0$ より、コホモロジー完全系列

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}) \rightarrow H^0(\mathcal{O}(D)) \rightarrow \mathbb{C}^d \rightarrow H^1(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}(D)) \rightarrow 0$$

が得られる. この系列に対する特性数 $\sum_j (-1)^j \dim_j = 0$ より、題意の式が得られる.

次に、 D_1, D_2 を共通部分を持たない有効因子として、 $D = D_1 - D_2$ となる場合、 $m = \deg(D_2)$ として、短完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(D) \longrightarrow \mathcal{O}(D_1) \longrightarrow \mathcal{O}(D_1)|_{D_2} \cong \mathbb{C}^m \longrightarrow 0$$

より、

$$\chi(\mathcal{O}(D)) = \chi(\mathcal{O}(D_1)) - m = \deg(D) + m + 1 - g - m = \deg(D) + 1 - g.$$

Q.E.D.

3.14.5 標準曲線

【定義 3.298 (標準曲線)】 種数 $g \geq 2$ のリーマン面 S に対し, その標準バンドル K に対する線形系 $|K|$ は基点を持たず, S から $\mathbb{C}P^{g-1}$ への写像

$$\iota_K : S \rightarrow \mathbb{C}P^{g-1}, \quad p \mapsto [\omega_1(p), \dots, \omega_g(p)]$$

が定義される. この写像を標準写像 (canonical mapping), 代数曲線 $\iota_K(S)$ を標準曲線 (canonical curve) という. □

【命題 3.299 (標準写像が埋込となる条件)】 リーマン面 S 上に 2 個の極のみをもつ有理関数が存在する場合, かつその場合に限り, 標準写像 ι_K は埋込とならない. この条件は, S から $\mathbb{C}P^1$ への被覆度 2 の正則写像が存在することと同等で, そのような分岐被覆写像が存在するとき, S は超楕円型 (hyperelliptic) であるという. □

Proof. ι_K が 1 対 1 となる条件は, 任意の 2 点 p, q に対して, $\omega(p) = 0, \omega(q) \neq 0$ となる正則 1 形式 ω が存在すること. これは, $h^0(K - p - q) < h^0(K - p) (= g - 1)$ と同等. Riemann-Roch より, この条件は, $h^0(K - p - q) = 2g - 4 - g + 1 + h^0(p + q) = g - 3 + h^0(p + q) < g - 1 \Leftrightarrow h^0(p + q) = 1$. Q.E.D.

【命題 3.300】 $S \subset \mathbb{C}P^{g-1}$ を非退化な種数 g , 次数 $2g - 2$ の代数曲線とすると, S は標準曲線である. □

Proof. $\iota_S : S \rightarrow \mathbb{C}P^{g-1}$ に対応する S の因子 ($D = \iota_S^* H$) に, $h^0(K - D) = 0 (K \neq D), 1 (K = D)$ となることに注意して, Riemann-Roch の定理を適用. Q.E.D.

【系 3.301 (Riemann-Roch の定理の幾何学的表現)】 代数曲線の因子 $D = \sum p_i$ に対して, その標準曲線上の像が張る部分線形空間の次元は, $\deg D - \dim |D| - 1$ で与えられる. □

3.14.6 特殊線形系

【定義 3.302 (特殊線形系)】 有効因子 D は, $h^0(K - D) \neq 0$ のとき特殊 (special) であるという. さらに, 特殊有効因子 D は, $h^0(D) > 1$, すなわち $h^0(K - D) > g - d$ のとき, 不規則 (irregular) であるという. \square

【補題 3.303 (非退化代数曲線の超平面因子の一般性)】 $C \subset \mathbb{C}P^n$ を非退化代数曲線とすると, C と一般的超平面の交点は一般的な配置ある, すなわち, どのような n 個の部分集合に対しても, それらすべてを含む $(n - 2)$ 平面が存在しない. \square

Proof. n 次元複素多様体 $C^n = C \times \cdots \times C$ において, q_1, \dots, q_n が線形従属となる点 (q_1, \dots, q_n) の集合 N は, C^n の閉部分解析多様体となる. もし, $\dim N = n$ なら $N = C^n$ となる. しかし, C が非退化なので, C 上の $n + 1$ 個の点 p_0, \dots, p_n で線形独立となるものが存在し, (p_1, \dots, p_n) とその近傍は N に含まれないので, $N \neq C^n$ より, $\dim N < n$.

いま, $d = \deg C$ として, $\{1, 2, \dots, d\}$ の任意の部分集合 $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ に対して, $\mathbb{C}P^n$ の超平面の全体 $\mathbb{C}P^{n*}$ から C^n への正則写像 π_I を, $H \in \mathbb{C}P^{n*}$ と C の交点を $p_1(H), \dots, p_d(H)$ として, $\pi_I(H) = (p_{i_1}(H), \dots, p_{i_n}(H))$ により定義する. すると, 任意の点 $(q_1, \dots, q_n) \in C^n$ に対して, その近傍の任意の点 $(r_1, \dots, r_n) \in C^n$ に対し, r_1, \dots, r_n を含む超平面が存在する. したがって, π_I は全射となり, $\pi_I^{-1}(N)$ は $\mathbb{C}P^{n*}$ の $(n - 1)$ 次元以下の閉部分解析多様体となる. Q.E.D.

【定理 3.304 (Clifford の定理)】 コンパクトリーマン面 S 上の 2 つの有効因子 D, D' に対して,

$$\dim |D| + \dim |D'| \leq \dim |D + D'|$$

が成り立つ. さらに, 特殊因子 D に対して,

$$\dim |D| \leq \frac{1}{2} \deg D$$

が成り立つ. ここで, 等号は $D = 0, D = K$ ないし S が超楕円曲線の時にのみ成り立つ. \square

Proof. 前半:一般に自由度のカウントより, 線形系 $|D|$ に対して, $\dim |D| \geq t$ と, S の任意の点列 p_1, \dots, p_t に対して, $p_1, \dots, p_t \in E$ となる $E \in |D|$ が存在することは同値. これより, 任意の $n = h^0(D) - 1$ 個の点列 q_1, \dots, q_n に対して, これらを含む $E \in |D|$ が, 別の任意の $n' = h^0(D') - 1$ 個の点列 $q_{n+1}, \dots, q_{n+n'}$ に対して, これらを含む $E' \in |D'|$ が存在し, $q_1, \dots, q_{n+n'} \in E + E' \sim D + D' \in |D + D'|$ なので, $\dim |D + D'| \geq n + n' = \dim |D| + \dim |D'|$.

後半: D が特殊なとき, 有効因子 $D' \sim K - D$ に対して, Riemann-Roch より,

$$\begin{aligned} g - 1 &= \dim |K| = \dim |D + K - D| = \dim |D + D'| \\ &\geq \dim |D| + \dim |D'| = \dim |D| + \dim |K - D| = g - 1 - d + 2 \dim |D| \\ &\Leftrightarrow 2 \dim |D| \leq d. \end{aligned}$$

等号が成り立つとき, 標準写像 $\iota_K : S \rightarrow \mathbb{C}P^{g-1}$ が単射とすると, S の任意の超平面断面 $E \sim K$ は,

$$E = E_1 + E_2, \quad E_1 \sim D, \quad E_2 \sim K - D$$

と分解される. ここで, $H^0(S, \mathcal{O}(K))$ の基底 $\omega_0, \dots, \omega_{g-1}$ を適当にとると,

$$\iota_K : p \mapsto [\omega_0(p), \dots, \omega_{g-1}(p)] \in \mathbb{C}P^{g-1}$$

に対して, $\dim |D| = n, \dim |D'| = n' (n + n' = g - 1)$ とおき,

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathbb{C}P^{g-1} \ni [Z_0, \dots, Z_{g-1}] &\mapsto [Z_0, \dots, Z_n, 0, \dots, 0] \in \mathbb{C}P^n \subset \mathbb{C}P^{g-1}, \\ \pi_2 : \mathbb{C}P^{g-1} \ni [Z_0, \dots, Z_{g-1}] &\mapsto [Z_0, 0, \dots, 0, Z_{n+1}, \dots, Z_{g-1}] \in \mathbb{C}P^{n'} \subset \mathbb{C}P^{g-1} \end{aligned}$$

により線形射影 π_1, π_2 を定義すると, $\iota_D = \pi_1 \circ \iota_K, \iota_{D'} = \pi_2 \circ \iota_K$ と見なすことができる. さらに, $\mathbb{C}P^n$ および $\mathbb{C}P^{n'}$ の適当な超平面 L, L' に対して, $\pi_1(D)$ は $\pi_1(S)$ の L との交点集合と, $\pi_2(D')$ は $\pi_2(S)$ の L' との交点集合と一致する. $\pi_1 \pi_2(\mathbb{C}P^{g-1}) = \text{pt} = [1, 0, \dots, 0]$ より, これは, $\iota_K(D) \subset \mathbb{C}P^{n-1}, \iota_K(D') \subset \mathbb{C}P^{n'-1}$ となる場合にのみ可能. よって, $nn' \neq 0$ なら $\iota_K(D)$ も $\iota_K(D')$ も $g - 2$ 次元以下の平面に含まれる. $\deg D + \deg D' = \deg K = 2g - 2$ なので, ι_K が単射なら, E の任意の $g - 1$ 個が線形独立であるという一般定理 (補題) と矛盾. よって, $D \neq 0, K$ なら ι_K は単射でない, すなわち S は超楕円曲線. Q.E.D.

【系 3.305】 $C \subset \mathbb{C}P^n$ を次数 $d < 2n$ で種数が g の代数曲線とすると, $g \leq d - n$ が成り立つ. ただし, 等号は C が正規曲線のとき, かつそのときに限り成り立つ. □

【命題 3.306 (非退化代数曲線の種数に対する不等式)】 非退化代数曲線 $C \subset \mathbb{C}P^n$ が次数 d を持つとき, 次が成り立つ:

- i) $d < n \Rightarrow C$ は退化曲線となるので, あり得ない.
- ii) $d = n \Leftrightarrow C$ は有理正規曲線.
- iii) $n < d < 2n \Rightarrow g \leq d - n$. 等号は C が正規のとき.
- iv) $d = 2n \Rightarrow g \leq n + 1$. 等号は, C が標準曲線の時, かつそのときに限り成立.
- v) $d \geq 2n \Rightarrow g \leq \frac{1}{2}m(m-1)(n-1) + m\epsilon$ (**Castelnuovo の不等式**).
ここで,

$$m = \left[\frac{d-1}{n-1} \right], \quad d-1 = m(n-1) + \epsilon.$$

□

Proof. i) 定理 3.205 より.

ii) 例 3.212 より.

iii) 上の系 3.305 より.

iv), v) $\mathbb{C}P^n$ の超平面 H を一つ取り, $D = C \cap H$ とする. 短完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C((k-1)D) \longrightarrow \mathcal{O}_C(kD) \xrightarrow{r} \mathcal{O}_D(kD) \cong \mathbb{C}^d \longrightarrow 0$$

より,

$$h^0(kD) - h^0((k-1)D) = \dim(\text{Im}(r)).$$

まず, $k(n-1) + 1 \leq d$ ($k = 1, 2, \dots, m, m = [(d-1)/(n-1)]$) のとき, D に属する $k(n-1) + 1$ 個の点からなる集合を Γ とする. 任意の点 $q \in \Gamma$ に対して, $\Gamma - q$ をそれぞれが $(n-1)$ 個の点からなる k 個の組に分割する:

$$\Gamma_1 = \{p_1^1, \dots, p_{n-1}^2\}, \dots, \Gamma_k = \{p_1^k, \dots, p_{n-1}^k\}$$

このとき、 $H \cap C$ の任意の n 個の点は線形独立なので、 Γ_i を含み q を含まない超平面 $H_i (i = 1, \dots, k)$ が存在する。このとき、 $H_1 + \dots + H_k \sim kH$ は $\Gamma - q$ でゼロ、かつ q でゼロでない $[kD]$ の切断を与える。 q は Γ の任意の点だったので、 $r|_{\Gamma}$ は全射。したがって、

$$h^0(kD) - h^0((k-1)D) \geq k(n-1) + 1, \quad k = 1, \dots, m$$

次に、 $k = m+1, m+2, \dots$ すなわち $k(n-1) + 1 > d$ のとき、 $d = 1 + m(n-1) + \epsilon (\epsilon = 0, \dots, n-2)$ より、勝手な $p \in D$ に対して、 $D-p$ の点を重複して利用することにより、それぞれが $D-p$ の $n-1$ 個の点からなる集合列 $\Gamma_i (i = 1, \dots, k)$: $\cup_i \Gamma_i = D-p$ を作る事ができ、各 Γ_i を含み、 p を含まない超平面の系列 $H_i (i = 1, \dots, k)$ が存在する。よって、 $k \leq m$ の場合と同様に

$$h^0(kD) - h^0((k-1)D) \geq d, \quad k = m+1, m+2, \dots$$

これらの不等式より、 $l > m$ に対して、

$$h^0(lD) \geq \frac{m(m+1)}{2}(n-1) + m+1 + (l-m)d.$$

ここで、 l が十分大きいとき、 $\deg(K-lD) < 0$ で lD は特殊でなくなり、Riemann-Roch より、 $h^0(lD) = ld - g + 1$ となることを考慮すると、

$$g \leq \frac{m(m+1)}{2}(n-1) + m(d-1-m(n-1))$$

を得る。

Q.E.D.

【定理 3.307 (Noether の定理)】 超楕円的でない代数曲線 $C \subset \mathbb{C}P^n$ において、写像

$$\text{Sym}^l H^0(C, \mathcal{O}(K)) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}(lK))$$

は、任意の自然数 l に対して全射となる。 _____ □

【定理 3.308 (超楕円リーマン面の $\mathbb{C}P^2$ への埋め込み)】 任意の種数 g の超楕円リーマン面 S は、 $\mathbb{C}P^2$ の代数曲線として埋め込み可能で、 $\mathbb{C}P^2$ の座標系 $[1, z, w]$ において、適当な $2g+2$ 次多項式 $g(z)$ を用いて

$$w^2 = g(z); \quad \deg g(z) = 2g + 2$$

と表される. 与えられた S に対して, $g(z)$ は, $\mathbb{C}P^1$ の自己同形変換に対応する自由度を除いて一意的に定まる. □

Proof. S は超楕円的なので, S 上に 2 個の極をもつ有理関数 f が存在し, S から $\mathbb{C}P^1$ への 2 重分岐被覆写像 $f : S \rightarrow \mathbb{C}P^1$ を定義する. この写像の分岐点の数 b は, Riemann-Hurwitz の定理より, $b = \deg(K_S - f^*K_{\mathbb{C}P^1}) = 2g - 2 - 2 \times (-2) = 2g + 2$. これらの分岐点のアフィン座標を $z_i (i = 1, \dots, 2g+2) \in \mathbb{C}P^1$ として, $\mathbb{C}P^2 \ni [1, z, w]$ の曲線 $C : w^2 = g(z) \equiv (z - z_1) \cdots (z - z_{2g+2})$ を考えると, 射影 $\pi : C \rightarrow \mathbb{C}P^1$ と $f : S \rightarrow \mathbb{C}P^1$ の対応より, $\pi \circ \Phi = f$ となる写像 $\Phi : S \rightarrow C$ が一意的に定まり, 正則同型写像を与える. Q.E.D.

【系 3.309 (超楕円リーマン面の標準曲線)】 種数 g の超楕円リーマン面 S を $\mathbb{C}P^2$ の $2g + 2$ 次超曲面 $w^2 = g(z)$ として表すとき, 正則微分形式の集合は $H^0(S, \Omega^1) = \{\phi(z)dz/w \mid \deg \phi \leq g - 1\}$ となる. これより, S の標準写像は

$$\iota_K : [1, z, w] \mapsto [1, z, \dots, z^{g-1}] \in \mathbb{C}P^{g-1}$$

となる. すなわち, 標準曲線は有理正規曲線となる. □

【定理 3.310 (超楕円リーマン面一般リーマン面のモジュライ自由度 (Riemann count))】 リーマン面の種数を g とする.

1. 超楕円リーマン面のモジュライ自由度は, $2g - 1$.
2. 一般リーマン面のモジュライ自由度は, $3g - 3$.

□

Proof. 1. 種数 g の超楕円リーマン面 S 上の 2 つ極をもつ有理関数 f は, $f : S \rightarrow \mathbb{C}P^1$ を通して, $(2g + 2)$ 次の多項式 $g(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_{2g+2})$ により決まる $\mathbb{C}P^2$ の曲線 $C : w^2 = g(z)$ との同型対応を与える. f の自由度は極の位置と関数のスケーリングの自由度より 3 となるので, 超楕円リーマン面モジュライ自由度は $2g + 2 - 3 = 2g - 1$ となる.

2. 種数 g の超楕円的でないリーマン面 S 上の $n(\geq 2g)$ 個の極をもつ有理関数 f は, 被覆度 n の分岐被覆写像 $f: S \rightarrow \mathbb{CP}^1$ を与える. この写像の分岐点の数 (重複度を考慮) b は, Riemann-Hurwitz の定理より, $b = 2g - 2 - n \times (-2) = 2n + 2g - 2$. 逆に, \mathbb{CP}^1 上の $2n + 2g - 2$ の分岐点を与えられると, 分岐点を端点とする $n + g - 1$ 個の弧に沿って \mathbb{CP}^1 を切り開き, その n 個のコピーを切り口の弧に沿って適当に貼り合わせ, 分岐点で $z - z_i = w^{v_i}$ (v_i は分岐指数) により定義される w を新たな複素座標とすることにより, 滑らかなリーマン面が一意的に構成される.

分岐点の自由度は $2n + 2g - 2$, 写像 f の自由度は, f の n 個の極に対応する因子を B とするとき, B の自由度が n , 各 B に対する f の自由度が, $h^0(B) = n - g + 1$, $h^0(B - p_1) = n - g$ より, $n - g + 1$ となるので, リーマン面のモジュライ自由度は $2n + 2g - 2 - (n + n - g + 1) = 3g - 3$.
Q.E.D.

【例 3.311 (超楕円的でない $g = 3, 4, 5$ のリーマン面)】

1. $g = 3$: 標準写像は $\iota_K: S \rightarrow \mathbb{CP}^2$ となる. \mathbb{CP}^2 の曲線に対して, 次数 d と種数は $g = (d - 1)(d - 2)/2$ の関係にあるので $d = 4$, すなわち種数 3 のリーマン面は \mathbb{CP}^2 の 4 次超曲面として実現できる.

\mathbb{CP}^2 の 4 次超曲面の自由度は ${}_{4+2}C_2 - 1 = 14$, \mathbb{CP}^2 の自己同形の自由度は $\dim \text{GSL}(3) = 8$ より, 種数 3 のリーマン面のモジュライ自由度は $14 - 8 = 6$.

2. $g = 4$: 標準写像は $\iota_K: S \rightarrow \mathbb{CP}^3$. 制限写像

$$r: H^0(\mathbb{CP}^3, \mathcal{O}(2H)) \rightarrow H^0(S, \mathcal{O}(2H \cap S)) = H^0(S, \mathcal{O}(2K_S))$$

において, $h^0(\mathbb{CP}^3, \mathcal{O}(2H)) = {}_{3+2}C_2 = 10$, $h^0(S, \mathcal{O}(2K_S)) = 2 \times 6 - 4 + 1 = 9$ より, $\ker r \neq 0$. これは, S が $Q \sim 2H$ となる \mathbb{CP}^3 の次数 2 の因子に対応する多様体に含まれることを意味するが, S は超平面に含まれないので, Q は既約な 2 次曲面となる. 同様に, 制限写像

$$r': H^0(\mathbb{CP}^3, \mathcal{O}(3H)) \rightarrow H^0(S, \mathcal{O}(3K_S))$$

において, $h^0(\mathbb{CP}^3, \mathcal{O}(3H)) = {}_{3+3}C_3 = 20$, $h^0(S, \mathcal{O}(3K_S)) = 3 \times 6 - 4 + 1 = 15$ より, S は \mathbb{CP}^3 の 3 次超曲面の 4 次元族に含まれる. Q を含

む3次曲面族の次元は、 $h^0(\mathbb{CP}^3, \mathcal{O}(3H-Q)) - 1 = h^0(\mathbb{CP}^3, \mathcal{O}(H)) - 1 = 3$ なので、この4次元族は Q を含まない既約な3次超曲面 Q' を含んでおり、 $S = Q \cap Q'$ となる。

逆に、任意の2次超曲面 Q と3次超曲面に対し、その交叉を C とすると、標準因子に対する公式より、

$$\begin{aligned} Q \subset \mathbb{CP}^3 & : K_Q = (K_{\mathbb{CP}^3} + Q)|_Q = (-4H + 2H)|_Q = (-2H)|_Q, \\ C \subset Q & : K_C = (K_Q + C)|_C = (-2H + Q')|_C = H|_C \equiv D. \end{aligned}$$

よって、 C が \mathbb{CP}^3 の非退化曲線なので、Rieman-Roch より

$$4 = h^0(C, \mathcal{O}(D)) = 2 \times 3 - g + 1 + h^0(C, \mathcal{O}(K_C - D))8 - g \Rightarrow g = 4.$$

以上より、種数4のリーマン面は、 \mathbb{CP}^3 の2次超曲面と3次強曲面の交叉と同型になる。2次曲面 Q の自由度は ${}_{3+2}C_2 - 1 = 9$ 、3次曲面 Q' の自由度は ${}_{3+3}C_3 - 1 = 19$ 、 Q 上でゼロとなる3次の同次式の自由度は $h^0(\mathbb{CP}^3, \mathcal{O}(3H-Q)) = h^0(\mathbb{CP}^3, \mathcal{O}(H)) = {}_{3+1}C_1 = 4$ 、 \mathbb{CP}^3 の自己同形の自由度は $4^2 - 1 = 15$ 。ここで、 $[C] = [Q']|_Q = [3H]|_Q$ は Q 上の正の直線バンドルなので、小平・中野の消滅定理より、 $H^0(Q, \Omega^1(-C)) = 0$ 。これより、 C でゼロとなる Q 上の非自明な正則ベクトル場が存在しないので、2つの3次超曲面がいずれも Q と C で交わるとすると、それらを定義する同時3次式の差は、 Q 全体でゼロとならないといけない。これより、種数4のリーマン面のモジュライ自由度は、 $9 + 19 - 4 - 15 = 9$ となり、一般公式と一致する。

3. $g = 5$: 標準写像は $\iota_K : S \rightarrow \mathbb{CP}^4$. 制限写像

$$r : H^0(\mathbb{CP}^4, \mathcal{O}(2H)) \rightarrow H^0(S, \mathcal{O}(2H|_S)) = H^0(S, \mathcal{O}(2K_S))$$

の核は、 $h^0(\mathbb{CP}^4, \mathcal{O}(2H)) = {}_{4+2}C_2 = 15$ 、 $h^0(S, \mathcal{O}(2K_S)) = 2 \times 8 - 5 + 1 = 12$ より、3次元。これより、 C を通る線形独立な2次の超曲面が3個存在する。

逆に、任意の3個の超曲面 Q_1, Q_2, Q_3 に対して、 $C = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$ とおくと、

$$\begin{aligned} K_{Q_1} &= (K_{\mathbb{CP}^4} + Q_1)|_{Q_1} = (-5H + 2H)|_{Q_1} = (-3H)|_{Q_1}, \\ K_{Q_1 \cap Q_2} &= (K_{Q_1} + Q_2)|_{Q_1 \cap Q_2} = (-3H + 2H)|_{Q_1 \cap Q_2} = (-H)|_{Q_1 \cap Q_2}, \\ K_C &= (K_{Q_1 \cap Q_2} + Q_3)|_C = (-H + 2H)|_C = (H)|_C \equiv D. \end{aligned}$$

また, $\deg D = 2^3 = 8$. よって, Riemann-Roch より,

$$5 = h^0(D) = 8 - g + 1 + 1 = 10 - g \Rightarrow g = 5.$$

ここで, Q_1, Q_2, Q_3 の定義式である 2 次式 F_1, F_2, F_3 は, ${}_{4+2}C_2 = 15$ 次元空間のベクトルで, F_1, F_2, F_3 の線形変換は同じ曲線 $C = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$ を定義するので, 射影変換の自由度が $\dim \text{GSL}(4) = 5^2 - 1 = 24$ となることより, $g = 5$ となるリーマン面のモジュライ自由度は,

$$(15 \times 3 - 3^2) - 24 = 36 - 24 = 12 (= 3g - 3)$$

□

【定理 3.312 (一般リーマン面上の線形系の次元と次数に対する不等式)】

種数 g のリーマン面が, 次数 d , 次元 r の線形系を持つための必要十分条件は,

$$d \geq \frac{rg}{r+1} + r.$$

この条件が満たされるとき, 一般に, そのような線形系のモジュライ自由度は, $(d-r)(r+1) - rg$. □

【系 3.313 ($\mathbb{C}P^1$ への分岐被覆写像の最小被覆度)】 種数 g の一般的なリーマン面は, 被覆度 $d = \left\lceil \frac{g+1}{2} \right\rceil + 1$ をもつ $\mathbb{C}P^1$ の分岐被覆として表すことができ, それより少ない被覆度の分岐被覆は存在しない. 特に, g が偶数の時には, 可能な分岐被覆写像は, $\mathbb{C}P^1$ の自己同形の自由度を除いて, 有限個である. 一方, g が奇数の時には, 分岐被覆写像のモジュライ自由度 1 をもつ. □

【系 3.314 ($\mathbb{C}P^2$ への埋め込みの最小次数)】 一般の種数 g のリーマン面は, $\mathbb{C}P^2$ 内の次数

$$d = \left\lceil \frac{2g+2}{3} \right\rceil + 2$$

の曲線として表すことができる. ただし, これより低い次数での表現はできない. □

【定理 3.315 (Brill-Noether 問題)】

1. 種数 $g = 4$ の一般的なリーマン面を $\mathbb{C}P^1$ の 3 重分岐被覆として表現する方法は, 2 通り.

2. 種数 $g = 6$ の一般的なリーマン面を \mathbb{CP}^1 の 4 重分岐被覆として表現する方法は, 5 通り.
3. 種数 $g = 8$ の一般的なリーマン面を \mathbb{CP}^1 の 5 重分岐被覆として表現する方法は, 14 通り.

□

Proof. 1. S を種数 $g = 4$ のリーマン面とするとき, 3 重分岐被覆 $S \rightarrow \mathbb{CP}^1$ は, 適当な因子 $D = p + q + r$ を含む 1 次元線形系 D_λ と 1 対 1 に対応. Clifford の定理より, $\dim |D| \leq 1$ かつ, $\deg D' \leq 2$ なら $\dim |D'| = 0$ より, この条件は, $\dim |D| = 1$ と同等. Riemann-Roch の幾何学版より, この条件は, S の標準曲線 $\iota_K : S \rightarrow C \subset \mathbb{CP}^3$ 上で 3 点 p, q, r が共線となっていることと同等. したがって, 異なる 3 重分岐被覆の数は, 与えられた一般点 $p \in C$ を通る 3 重裁線の数と一致. この数は, p を基点とする \mathbb{CP}^2 への標準射影による C の像 $C' \subset \mathbb{CP}^2$ の通常 2 重点の数と等しいので, $d = \deg K_S - 1 = 5$ として

$$\delta = (d-1)(d-2)/2 - g = 2$$

2. S を種数 $g = 6$ のリーマン面とするとき, 4 重分岐被覆 $S \rightarrow \mathbb{CP}^1$ は, 適当な因子 $D = p + q + r + s$ を含む 1 次元線形系 D_λ と 1 対 1 に対応. Clifford の定理より, $\dim |D| \leq 1$ かつ, $\deg D' \leq 2$ なら $\dim |D'| = 0$ かつ, $\deg D' = 3$ に対して, $\dim |D'| = 1$ なら $\dim |D| \geq 2$ となることより, この条件は, $\dim |D| = 1$ と同等.

Riemann-Roch より, このとき, $h^0(K_S - D) = h^0(D) - (4 + 1 - 6) = 3$ となるので, $\deg(K_S - D) = 6$ より, この条件は, 標準曲線 $\iota_J : S \rightarrow C \subset \mathbb{CP}^5$ において, $\{p, q, r_1, \dots, r_4\}$ が 3 次元平面に含まれることと同等. 線形系 $|K_S - D|$ は 2 次元なので, 勝手な (p, q) を指定すると, それを含む有効因子 $D' = p + q + r_1 + \dots + r_4 \in |K_S - D|$ が一つ存在し, r_1, \dots, r_4 は 3 次元平面に含まれる. いま, 直線 $\overline{p, q}$ から \mathbb{CP}^3 への標準射影を $\pi : \mathbb{CP}^5 - \overline{p, q} \rightarrow \mathbb{CP}^3$ とすると, $\pi(r_1), \dots, \pi(r_4)$ は共線となる. よって, 求める線形系の自由度は, $C' = \pi(C) \subset \mathbb{CP}^3$ の 4 重裁線の本数と一致. すなわち, $d = 10 - 2 = 8$ として,

$$Q = \frac{1}{12}(d-2)(d-3)^2(d-4) - \frac{g}{2}(d^2 - 7d + 13 - g) = 50 - 45 = 5.$$

4. 未確認. Ref. Griffith-Harris1978B, p.299

Q.E.D.

3.14.7 Plücker 公式

【定義 3.316 (随伴曲線)】 $f : S \rightarrow \mathbb{C}P^n$ と表される代数曲線 C に対し, その局所的な \mathbb{C}^{n+1} への持ち上げを $v(z)$ とする: $f(z) = [v_0(z), v_1(z), \dots, v_n(z)]$. このとき,

1. 写像

$$f_k : S \rightarrow G(k+1, n+1) \subset \mathbb{P} \left(\bigwedge^{k+1} \mathbb{C}^{n+1} \right) \cong \mathbb{C}P^m, \quad m = {}_{n+1}C_{k+1} - 1$$

$$f_k(z) = [v(z) \wedge v'(z) \wedge \dots \wedge v^{(k)}(z)].$$

を随伴曲線 (associated curve) という.

2. $f_k(z) \neq 0$ のとき, $f_k(z)$ は点 $f(z)$ において曲線 C に k 次の精度で接触する最小次元の線形部分空間を表す. この線形部分空間は, 接触 k 平面 (osculating k -plane) と呼ぶ.
3. 特に, $f_1(z)$ は, ガウス写像, すなわち各点での C の接線を表し, f の双対曲線 (dual curve) と呼ばれる.

□

【定義 3.317 (分岐指数)】 曲線 $f : S \rightarrow \mathbb{C}P^n$ に対して, 点 z_0 の近傍でのアフィン座標表示を $(f_1(z), \dots, f_n(z))$ とするとき,

$$\beta(z_0) = \min_{j=1, \dots, n} (\text{ord}_{z_0}(\partial_z f_j(z)))$$

をこの曲線の $z = z_0$ での分岐指数 (ramification index) という. □

【命題 3.318 (曲線の正規形)】 曲線 $f : S \rightarrow \mathbb{C}P^n$ に対して, 点 $z = z_0$ での分岐指数を $\beta_k(z_0) = \alpha_{k+1}$ とするとき, $\mathbb{C}P^n$ の適当な同次座標のもとで, f の持ち上げ $v(z) \in \mathbb{C}^{n+1}$ は

$$v(z) = (1 + \dots, (z - z_0)^{1+\alpha_1} + \dots, \dots, (z - z_0)^{n+\alpha_1+\dots+\alpha_n} + \dots)$$

と表される. この形を, 正規形 (normal form) という. □

【定理 3.319 (Plücker 公式 I)】 種数 g の代数曲線 $f: S \rightarrow \mathbb{C}P^n$ に対して, 随伴曲線 f_k の分岐指数の総和を β_k , 次数を d_k とするとき,

$$d_{k-1} - 2d_k + d_{k+1} = 2g - 2 - \beta_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

□

【系 3.320 (非分岐曲線)】 正規有理曲線が唯一の非分岐な代数曲線である.

□

Proof. Plücker 公式の両辺に $(n-k)$ をかけて, k について 0 から $n-1$ まで和を取って得られる公式

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\beta_k = (n+1)d + n(n+1)(g-1)$$

より. ($d_0 = d = \deg f$)

Q.E.D.

【定義 3.321 (Weierstrass 点)】 種数 g のリーマン面 S の点 p において, 点 p 以外で正則で p において k 位の極をもつ有理関数が存在しないとき, k はギャップ値 (gap value) であるという. $k \geq 2g-1$ のとき, $h^0(kp) = k - g + 1$ となり, $h^0(K - kp)$ は k の非増加関数なので $h^0(kp)$ は k が 1 増大するごとに高々 1 しか増加しない. これより, ギャップ値は g 個存在し, それらを大小順に並べたものを, $a_1 < a_2 < \dots < a_g$ と表記する.

一般点では, kp はすべて正則で, $a_i = i$ ($i = 1, \dots, g$) となる. この性質が成り立たない点 p , すなわち, p 以外で正則かつ, p で位数が g 以下の極をもつ有理関数が存在するとき, p は Weierstrass 点という. また,

$$W(p) = \sum_i (a_i - i)$$

を点 p の Weierstrass ウェイトと呼ぶ.

特に, $a_i = 2i - 1$ となる点は, 超楕円型 Weierstrass 点という. また, ギャップ値が $1, 2, \dots, g-1, g+1$ となる点は, 正常 Weierstrass 点という.

□

【命題 3.322 (Weierstrass 点のウエイトの総和公式)】 S を種数 g の非超楕円リーマン面, $C \subset \mathbb{C}P^{g-1}$ をその標準曲線とする. このとき, 点 p が Weierstrass 点となるための必要純分条件は, p が $C = \iota_K$ のいずれかの随伴曲線の特異点となることである.

より, 正確には, p を原点とする標準曲線の局所表示

$$\iota_K(z) = [1, z^{1+\alpha_1} + \dots, \dots, z^{g-1+\alpha_1+\dots+\alpha_{g-1}} + \dots]$$

に対して,

$$a_1 = 1, a_2 = 2 + \alpha_1, \dots, a_g = g + \alpha_1 + \dots + \alpha_{g-1} \quad (3.14.9)$$

が成り立つ. ここで, $\alpha_{k+1} = \beta_k(p)$.

特に,

$$\sum_p W(p) = g(g-1)(g+1).$$

□

Proof. 前半は, $\dim(kp) = r$ となるための必要十分条件が, $[f_k(p)] \subset \mathbb{C}P^{k-r-1}$ かつ $[f_k(p)] \not\subset \mathbb{C}P^{k-r-2}$ となることより.

後半は, Plücker 公式の系で導いた β_k の和公式より. Q.E.D.

【定理 3.323 (リーマン面の自己同形)】 種数が 2 以上のリーマン面の自己同形は有限個である. さらに, 種数が 3 以上の一般的なリーマン面は, 自己同形を持たない. □

【命題 3.324 (Weierstrass 点の数)】 種数 $g \geq 3$ の一般的リーマン面に対し,

1. ギャップ値が $a_i > i (i < g)$ となる Weierstrass 点は存在しない.
2. $\dim |(g+1)p| \geq 3$ となる点 p は存在しない.
3. Weierstrass 点はすべて正常である.

□

3.14.8 平面曲線

【定義 3.325 (通常特異点)】 代数曲線 $f : S \rightarrow \mathbb{CP}^2$ は, $p \in S$ が次のいずれかからなるとき, 通常特異点 (traditional singularities) をもつという.

1. 正則点 (regular point): f およびその双対曲線 f^* のいずれも滑らかな点 p . 正則点 p では, 随伴曲線の分岐指数に対して, $\beta_0(p) = \beta_1(p) = 0$ が成り立ち, 近傍で, f は次の正規形をもつ:

$$f(z) = [1, z + \dots, z^2 + \dots]$$

2. 通常変曲点 (ordinary flex): f の正則点で, 接線が3次の接触をする点. この点の近傍での正規形は,

$$f(z) = [1, z + \dots, z^3 + \dots], \quad f^*(z) = [1, z^2 + \dots, z^3 + \dots]$$

3. 尖点 (cusp): 代数曲線 $f(S)$ の特異点で, その近傍での f の正規形が

$$f(z) = [1, z^2 + \dots, z^3 + \dots], \quad f^*(z) = [1, z + \dots, z^3 + \dots]$$

4. 二重接線 (bitangent): 変曲点でなく, かつそこでの接線が他の点で曲線に接する点.

5. 通常2重点 (double point): $f(S)$ の非特異な2つの分枝の交点

□

【公式 3.326 (古典 Plücker 公式)】 代数曲線 $f : S \rightarrow \mathbb{CP}^2$ とその双対曲線 $f^* : S \rightarrow \mathbb{CP}^2$ が, 通常特異点のみを持つとする. このとき, $C = f(S)$, $C^* = f^*(S)$ に対し, 次のようにおく:

- g : S の種数, $d = \deg C$, $d^* = \deg C^*$
- b : C の2重接線の本数, b^* : C^* の2重接線の本数
- f : C の変曲点の数, f^* : C^* の変曲点の数
- κ : C の尖点の数, κ^* : C^* の尖点の数
- δ : C の2重点の数, δ^* : C^* の2重点の数

このとき、常に双対関係

$$b^* = \delta, b = \delta^*, f = \kappa^*, f^* = \kappa$$

が成り立ち、さらに、

$$d^* = d(d-1) - 2\delta - 3\kappa, \quad g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta - \kappa,$$

$$d = d^*(d^* - 1) - 2b - 3f, \quad g = \frac{(d^* - 1)(d^* - 2)}{2} - b - f$$

が成り立つ。 _____ □

【公式 3.327 (平面曲線の標準因子)】 平面曲線 $f : S \rightarrow \mathbb{CP}^2$ に対し、 $f(S)$ の次数を d 、 f の特異点の f による逆像 (ただし、尖点は2重に計算) で定義される因子を D とするとき、

$$K_S = f^*((d-3)H) - D$$

_____ □

3.14.9 対応

【定義 3.328 (対応)】 2つの代数曲線 C, C' において、各 $p \in C$ に対し、次数 d の因子 $T(p) \subset C'$ が指定されていて、 $T(p)$ が p に正則に依存するとき、 $T : C \rightarrow C'$ を対応 (correspondence) という。また、因子 $T(p)$ の次数を、 T の次数 (degree) という。

- 対応 $T : C \rightarrow C'$ を定義することは、 $C \times C'$ の代数曲線 $D = \{(p, q) \mid q \in T(p)\}$ をしてすることと同等である。対応曲線が既約のとき、対応が既約であるという。
- 対応 $T : C \rightarrow C'$ に対して、 $D \subset C \times C'$ をその対応曲線とするとき、代数曲線 $D' = (q, p) \mid (p, q) \in D \subset C' \times C$ を T の逆対応と呼び、 R^{-1} と表記する。

_____ □

【定義 3.329 (対応の特殊点)】

- 一致点 (a coincidence point): 対応 $T : C \rightarrow C'$ に対して, q の $T(p)$ における多重度 m が 2 以上となる点 $(p, q) \in C \times C'$ を, 多重度 $(m-1)$ の一致点という. この条件は, T の曲線を D とするとき, (p, q) が被覆写像 $\pi : D \rightarrow C$ の分岐点であることと同等である.
- 連合点 (a united point): 対応 $T : C \rightarrow C$ において, $p \in T(p)$ となる点. $T(p)$ における p の多重度を連合点 p の多重度という.
- 共通点 (a common point): 2 つの対応 $T, S : C \rightarrow C'$ に対して, それぞれ定義曲線を D, F とするとき, $(p, q) \in D \cap F$.

□

【定義 3.330 (対応の価数)】 C を種数 $g \geq 1$ の代数曲線とする. 対応 $T : C \rightarrow C$ に対して, 因子 $T(p) + kp$ の線形同値類が p に依らず同一となる時, k を対応 T の価数 (valence) という. □

【補題 3.331 (対応の随伴曲線のホモロジー類)】 $T : C \rightarrow C$ を代数曲線の対応, $D \subset C \times C$ をその定義曲線とする. このとき, T が価数 k を持つための必要十分条件は, D のホモロジー類が

$$D \sim aE + bF - k\Delta$$

と表されることである. ここで, π_1 を $C \times C$ の第 1 成分への射影, π_2 を第 2 成分への射影とすると, $E = \pi_1^{-1}(p_0)$, $F = \pi_2^{-1}(q_0)$, Δ は $C \times C$ の対角線. □

Proof. T の価数が k とすると, $D' = D + k\Delta$ の定義する対応 T' に対し, C の因子 $T'(p)$ の線形同値類は p に依らず一定. したがって, $F' = \pi_2^{-1}T'(p_0)$ を $C \times C$ の因子として, 因子 $D'' = D' - F'$ から定義される対応 $T'' : C \rightarrow C$ に対し, $T''(p) \equiv 0$. よって, $D''' = D'' - E'$ とおくと, 因子 D''' に対応する正則直線バンドル $L \rightarrow C \times C$ は, $\pi_1^{-1}(p_0)$ および $\pi_2^{-1}(q_0)$ への制限が自明となる. これより, L は自明であることが言えるので, 結局 $D \equiv E' + F' + k\Delta$. このとき, 明らかに, $D \sim aE + bF - k\Delta$.

つぎに, 可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H^1(C \times C, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(C \times C, \mathcal{O}) & \longrightarrow & \text{Pic}^0(C \times C) & \longrightarrow \\
 & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow r & \\
 0 & \longrightarrow & H^0(C, \mathbb{Z}) \oplus H^0(C, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^0(C, \mathcal{O}) \oplus H^0(C, \mathcal{O}) & \longrightarrow & \text{Pic}^0(C) \oplus \text{Pic}^0(C) & \longrightarrow
 \end{array}$$

を考える. ここで, $\text{Pic}^0(M)$ は M 上の Chern 類がゼロとなる正則直線バンドルの可換群を意味する. この図式で, 水平方向の図式は短完全系列なので, 縦方向の左2つの射が同型であることより, 射 r も同型となる. これより, $C \times C$ 上の2つの正則直線バンドルに対応する因子 D_1, D_2 がホモロークなら, Chern 類は一致するので, その差は, $D_1 - D_2 \equiv \sum_i a_i E_{p_i} + \sum_j b_j F_{q_j}$ と表される. ここで, $E_p = \pi_1^{-1}(p), F_q = \pi_2^{-1}(q)$. よって, $D \sim aE + bF - k\Delta$ なら, $D \equiv E' + F' - k\Delta$. このとき, 明らかに T は価数 k を持つ. Q.E.D.

【定理 3.332 (対応の特殊点の数)】 C を種数 g の代数曲線, 対応 $T : C \rightarrow C$ の価数を $k, \deg(T) = d, \deg(T^{-1}) = d'$ とする.

1. (Cayler-Brill の公式) T の連合点の数は $d + d' + 2kg$.
2. 対応 $S : C \rightarrow C$ に対して, $\deg(S) = e, \deg(S^{-1}) = e', S$ の価数を l とするとき, T と S の共通点の数は $ed' + e'd - 2gkl$.
3. T の一致点の数は, $2dd' + 2(g-1)d' - 2gk^2 - \delta$. ここで, δ は D の通常2重点の数.

□

Proof. 1. 連合点の数は, $\#(D \cdot \Delta)$. これに, $D \sim (d+k)E + (d'+k)F - k\Delta$, $\#(E \cdot \Delta) = \#(F \cdot \Delta) = 1, \#(\Delta \cdot \Delta) = 2 - 2g$ を代入して題意の公式を得る.

2. T と S の定義曲線を D_T, D_S とするとき, 共通点の数は $\#(D_T \cdot D_S)$ となることより.
3. 一致点の数は被覆写像 $\pi_1 : D \rightarrow C$ の分岐指数 b と一致. D がなめらかで既約とすると, Riemann-Hurwitz 公式より,

$$K_D = dK_C + \sum (v(p) - 1)p \Rightarrow \deg K_D = d(2g - 2) + b$$

一方, 随伴公式より

$$K_D = (K_{C \times C} + D)|_D \Rightarrow \deg K_D = \#(K_{C \times C} \cdot D) + \#(D \cdot D).$$

ここで, C 上の有理1形式 ω, ω' に対し,

$$K_{C \times C} = (\pi_1^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\omega)) = \pi_1^*(K_C) + \pi_2^*(K_C) = (2g - 2)(E + F)$$

以上より,

$$b = 2(g-1)\#((E+F)\cdot D) - 2(g-1)d + \#(D\cdot D).$$

これに, $D \sim (d+k)E + (d'+k)F - k\Delta$ を代入すると, $\delta = 0$ の場合の題意の公式を得る.

Q.E.D.

【例 3.333 (有理関数の定義する対応)】 S を種数 g のリーマン面とすると, S 上の有理関数と S から \mathbb{CP}^1 への分岐被覆が 1 対 1 に対応する:

$$S \text{ 上の有理関数 } f \Leftrightarrow f : S \rightarrow \mathbb{CP}^1 \text{ (branched covering)}$$

さらに, この被覆写像は, S 上の 1 次元線形系

$$D_\lambda (\lambda \in \mathbb{CP}^1) : \forall p \in S \exists \lambda \in \mathbb{CP}^1 \text{ st } p \in D_\lambda$$

と 1 対 1 に対応. さらに, これらは,

$$D = \{(p, q) \mid p, q \in D_\lambda, \exists \lambda \in \mathbb{CP}^1\}$$

を定義曲線とする対称な対応 $T = T^{-1}$ を定義する.

この対応に対して,

- 次数 : $\deg T = d - 1$. (d は f の被覆度)
- 価数 : $k = 1$.
- 連合点の数 : $u = \#(D \cdot \Delta) = 2g - 2 + 2d$
- 一致点の数 : $c = 2d^2 - 6d + 2 + 2g(d - 1)$

□

3.14.10 空間曲線

【定義 3.334 (非退化な振る舞い)】 空間曲線 C が素朴な次元計算から予想されない振る舞いを示さないとき, 非退化な振る舞いをするという. 具体的には, 次の諸条件を満足することを意味する.

1. 5 重裁線を持たない.

2. 4重裁線と C の4個の交点の接線は互いに交わらない.
3. C と3次の接触をする接線は存在しない. この条件は, C の1次の随伴曲線が滑らかであるという条件と同等.
4. C の接触2次元面は, 他の点で C に接しない.

□

【公式 3.335 (3重裁線対応)】 種数 g , 次数 d の空間曲線 $S \rightarrow \mathbb{CP}^3$ を C , $C \times C$ の代数曲線

$$D = \{(p, q) \mid \overline{pq} \text{ は, } C \text{ の3重裁線}\}$$

により定義される対応を $T: C \rightarrow C$ とするとき, 以下が成り立つ:

1. T の次数: $\deg T = (d-2)(d-3) - 2g$.
2. T の価数: $k = d - 4$
3. C の接触3重裁線 (C の接線でもう1点で C と交わる直線) の数:

$$t = 2(d-2)(d-3) + 2(d-6)g$$

4. C の定常3重裁線 (3重裁線で, そのうちの2点の接線が交叉するもの) の数:

$$s = 2(d-2)(d-3)(d-4) + 2g(d^2 - 10d + 26 - 2g).$$

5. C の4重裁線の数:

$$Q = \frac{1}{12}(d-2)(d-3)^2(d-4) - \frac{1}{2}g(d^2 - 7d + 13 - g).$$

□

Proof. 1. $p \in C$ を基点とする \mathbb{CP}^2 への射影を $\pi_p: \mathbb{CP}^3 - p \rightarrow \mathbb{CP}^2$ ($q \in \mathbb{CP}^3 \mapsto \overline{pq} \cap \mathbb{CP}^2$), $C' = \overline{\pi_p(C)}$ とおく. このとき, 一般的な p に対して, $(p, q) \in D$ は, $\pi_p(q)$ が C' の通常2重点であることと同等. よって, カスプがない場合の平面曲線に対する通常2重点の数 δ に対する公式 $\delta = (d-2)(d-3)/2 - g$, および $\deg T = 2\delta$ より, 題意の式を得る.

2. 1の射影 $\pi_p : C \rightarrow \mathbb{C}P^2$ に対し, $T(p)$ は次数 $(d-1)$ の平面曲線 $\pi_p(C)$ の通常2重点の集合と一致するので, 平面曲線の標準因子に対する公式より,

$$\begin{aligned} K_C &= \pi_p^*((d-4)H_{\mathbb{C}P^2}) - T(p) = (d-4)(H_{\mathbb{C}P^3} \cdot C) - p - T(p) \\ &\Leftrightarrow T(p) + (d-4)p = (d-4)(H_{\mathbb{C}P^3} \cdot C) - K_C \end{aligned}$$

より, T の価数は $(d-4)$.

3. 接触3重裁線は, T の連合点と対応. したがって, 一般公式より

$$t = 2\deg T + 2kg = 2(d-2)(d-3) + 2g(d-6).$$

4. 対応 S をグラフ

$$G = \{(p, q) \mid T_p(C) \cap T_q(C) \neq \emptyset, p \neq q\} \subset C \times C$$

により定義する. このとき, $p \in C$ とそこでの接線 L によ, 標準射影 $\pi_L : \mathbb{C}P^3 - L \rightarrow \mathbb{C}P^1$ を定義すると, $(p, q) \in D$ は π_L の分岐点と1対1に対応する. したがって, Riemann-Hurwitz より

$$\begin{aligned} K_C &= \pi_L^*(K_{\mathbb{C}P^1}) \cap C + S(p) = \pi_L^*(-2H_{\mathbb{C}P^1}) \cap C + S(p) \\ &= -2(H_{\mathbb{C}P^3} - L) \cap C + S(p) = -2H_{\mathbb{C}P^3} \cap C + 4p + S(p) \end{aligned}$$

この両辺の次数より

$$\deg K_C = -2d + 4 + \deg S \Leftrightarrow \deg S = 2d + 2g - 6.$$

また, $S(p) + 4p$ が p によらないので, S の価数は $l = 4$.

次に, (p, q) が T と S の共通点のとき, $r \in C$ が存在して, p, q, r は直線上にのり, $r \neq p, q$ のとき, $\overline{p, q, r}$ は定常3重裁線となる. 一方, $r = q$ あるいは $r = p$ のときには, $p \in T_r(C)$ ないし $q \in T_r(C)$ となるので, 接触3重裁線が対応する. 逆に, 定常3重裁線 $\overline{p, q, r}(T_p(C) \cap T_q(C) \setminus \emptyset)$ に対して, $(p, q), (q, p)$ の2点が S と T の共通点となる. また, 接触3重裁線 $\overline{p, q}(= T_p(C))$ には, (p, q) と (q, p) の2点が S と T の共通点を与える. 以上より, 接触3重裁線の数を t , 定常3重裁線の数を s とおくと, 共通点の数に関する一般公式より,

$$2t + 2s = 2(\det T)(\deg S) - 2gkl$$

これを s について解いて題意の式を得る。

5. p からの標準射影 $\pi_p : \mathbb{CP}^3 - p \rightarrow \mathbb{CP}^2$ において、対応 T の一致点は、 $\pi_p(C)$ の通常 2 重点が消滅なし合体するような p と対応。まず、2 重点が消滅する場合は、 $\overline{p, q}$ ($p \in T_q(C)$) が接触 3 重裁線となる。各 1 接触 3 重裁線では、 $D \rightarrow C$ の分岐指数が 1 減少。つぎに、2 個の 2 重点が合体する場合には、対応する $(p, q) \in D$ を含む裁線 $\overline{p, q, r}$ は、 C の定常 3 重裁線となる。この定常 3 重裁線では、 $D \rightarrow C$ の分岐指数が 2 減少。最後に、3 個の 2 重点が合体する場合には、 C は 4 重裁線 $\overline{p, q, r, s}$ をもつ。このとき、各 4 重裁線 $\overline{p_1 p_2 p_3 p_4}$ は、4 個の点 p_i で 3 個の $T(p)$ の点を (p_i, p_j) を生成する。これら 12 個の D の点は、 D の 2 重点となっている。

以上より、4 重裁線の本数を Q とすると、 $t + 2s = 2(\deg T)^2 + 2(g - 1)\deg T - 2gk^2 - 24Q$ が成り立つ。これを Q について解くと、題意の表式を得る。

Q.E.D.

3.14.11 命題の証明

定理 3.267 の証明. K_S を S の標準因子とすると、Riemann-Roch の定理より、

$$\begin{aligned} \deg K_S + 1 &= \chi(K_S) = h^0(S, K_S) - h^1(S, K_S) = h^0(S, K_S) - h^0(S, \mathcal{O}_S), \\ \deg \mathcal{O}_S + 1 &= \chi(\mathcal{O}_S) = h^0(S, \mathcal{O}_S) - h^1(S, \mathcal{O}_S) = h^0(S, \mathcal{O}_S) - h^0(S, K_S) \end{aligned}$$

これらを足すと、

$$\deg K_S = -2.$$

次に、 p を S の 1 点として、Riemann-Roch の定理より

$$h^0(S, \mathcal{O}(p)) = \deg p + 1 - h^0(K_S - p) = 2 - h^0(K_S - p).$$

$\deg K_S - p = -3$ より、 $h^0(K_S - p) = 0$ となるので、

$$h^0(S, \mathcal{O}(p)) = 2$$

$h^0(S, \mathcal{O}) = 1$ なので、これは、 S 上に点 p のみに 1 位の極を持ち、 p 以外では正則な関数 $f : S \rightarrow \mathbb{CP}^1$ が存在することを意味する。このとき、極は一個のみで、極点 p の多重度は 1 なので、 f は正則な同型写像となる。

[目次へ](#)

次に、滑らかな閉曲面 S が第二可算公理を満たすとき、 S 上には必ず Riemann 計量が存在し、各点の近傍で共形的に平坦となる局所座標系が存在する。この局所座標は S に複素構造を与え、 S は Riemann 面となる。したがって、 S が単連結なら、 $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \cong S^2$ と同相となる。 Q.E.D.

[【定理 3.267 に戻る】](#)

3.15 複素曲面

以下, 2次元コンパクト複素多様体を複素曲面 (complex surface), それらのうち射影空間に埋め込み可能なものを代数曲面 (algebraic surface) という.

3.15.1 Riemann-Roch の定理

【定義 3.336 (曲面上での因子の交叉数)】 代数曲面 M 上の2つの因子 D, D' に対し, その交叉数 $D \cdot D'$ を, それらの定義する $H_2(M, \mathbb{Z})$ の元 $(D), (D')$ のホモロジーとしての交叉数により定義する. また, M 上の2つの直線バンドル $L \rightarrow M, L' \rightarrow M$ の交叉数 $L \cdot L'$ を

$$L \cdot L' = (c_1(L) \cup c_1(L'))[M]$$

により定義する. さらに, 因子 D と直線バンドル L の交叉数 $D \cdot L$ を $c_1(L)[(D)]$ により定義する.

以上の定義の元で, 任意の因子 D, D' に対して

$$D \cdot D' = L(D) \cdot D' = D \cdot L(D') = L(D) \cdot L(D')$$

が成り立つ. □

【命題 3.337】

1. L が正の直線バンドルなら, 任意の有効因子 D に対して, $L \cdot D > 0$.
2. 任意の有効因子 D, D' に対して, D と D' が共通な部分因子を持たないなら, $D \cdot D' \geq 0$.
3. (指数定理) $D \cdot D > 0$ となる因子 D に対して, $D' \cdot D = 0$ となる因子 D' が存在すれば, $D' \cdot D' < 0$ ないし $(D') = 0$ となる.

Proof. 1. L が正の直線バンドルなら, その Chern 類 $c_1(L)$ は正の閉 $(1, 1)$ 形式を含むので, $L \cdot D = \int_D c_1(L) > 0$.

2. D と D' を異なる既約曲線とするとき, $D \cap D'$ は離散的な点となり, 複素解析性より各交点において, D と D' の向きは M から誘導される無機と一致するので, $D \cdot D' > 0$.

3. Hard Lefschetz 定理と Hodge-Riemann 双線形関係式より, $H^{1,1}(M)$ 上で双 1 次形式は非退化で, 原始成分 $P^{1,1}(M)$ では負定値となる. また, $P^{1,1}(M)$ の $H^{1,1}(M)$ での余次元は 1 となる. この $SL(2)$ の 3 次元表現に含まれる $H^{1,1}(M)$ の単位ベクトルを η_M とすると, $D = a\eta_M + X (X \in P^{1,1}(M))$ となる. 仮定より, $D \cdot D > 0$ となるとすると, $\eta_M \cdot \eta_M = 1$ で $a^2 + X \cdot X > 0$ となる. いま, $D' = b\eta_M + Y (Y \in P^{1,1}(M))$ に対して, $D \cdot D' = 0$ なら, $ab + X \cdot Y = 0$. これらより, $a^2 D' \cdot D' = a^2 b^2 + a^2 Y \cdot Y \leq (X \cdot Y)^2 - (X \cdot X)(Y \cdot Y) \leq 0$. ここで, 等号が成り立つのは, $D' = 0$ のときのみ.

Q.E.D.

【命題 3.338 (曲面上のなめらかな既約曲線の種数)] C を曲面 M 上の既約でなめらかな曲線とすると, その種数 g は

$$g = \frac{K \cdot C + C \cdot C}{2} + 1.$$

と表される. ここで, K は M の標準因子である. _____□

Proof. 標準因子に対する変換公式より, $K_C = (K+C)|_C$. これを $\deg(K_C) = 2(g-1)$ に代入すると題意を得る. Q.E.D.

【定義 3.339 (曲面上の曲線と仮想種数)] 曲面 M 上の有効因子を曲線と呼ぶ. 特に, 曲線が滑らかな部分多様体の多重度 1 の和となるとき, 滑らかという. また, 2 つの因子の和に分解できないとき既約という.

M の標準因子を K とするとき, M 上の曲線 C の仮想種数 (virtual genus) を

$$\pi(C) \equiv \frac{K \cdot C + C \cdot C}{2} + 1$$

により定義する. C が滑らかで既約な時, この量は C の幾何種数 g と一致する. _____□

【定理 3.340 (曲面上の直線バンドルに対する Riemann-Roch の定理)]

曲面 M の標準因子を K とするとき, M 上の直線バンドル L に対して次式が成り立つ:

$$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_M) + \frac{L \cdot L - L \cdot K}{2}$$

_____□

【証明へ】

【定理 3.341 (Noether の公式)】 K を曲面 M の標準因子とするととき,

$$\chi(\mathcal{O}_M) = \frac{1}{12} (c_1(M)^2 + c_2(M)) = \frac{1}{12} (K \cdot K + \chi(M)).$$

□

3.15.2 $\mathbb{C}P^3$ の超曲面

【定理 3.342 ($\mathbb{C}P^3$ の 2 次超曲面)】

1. $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ は次の写像により, $\mathbb{C}P^3$ に 2 次超曲面として埋め込まれる:

$$\sigma : \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \ni ([s_0, s_1], [t_0, t_1]) \mapsto [s_0 t_0, s_0 t_1, s_1 t_0, s_1 t_1] \in \mathbb{C}P^3$$

2. $\mathbb{C}P^3$ の滑らかな 2 次超曲面はすべて同型で, $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ と一致する.
3. $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ は, $\mathbb{C}P^2$ を 2 点 $p \neq q$ でブローアップして得られる複素曲面 $\tilde{\mathbb{C}P}_{p,q}^2$ において, $\overline{pq} \subset \mathbb{C}P^2$ の固有像のブローダウンにより得られる. このブローダウンは, p, q に対応する例外因子を E_p, E_q , $\pi : \tilde{\mathbb{C}P}_{p,q}^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ とするとき, $\tilde{\mathbb{C}P}_{p,q}^2$ 上の因子 $\tilde{D} = \pi^* 2H - E_p - E_q$ に対する線形系 $|\tilde{D}|$ が定める写像 $\iota_{\tilde{D}} : \tilde{\mathbb{C}P}_{p,q}^2 \rightarrow \mathbb{C}P^3$ により具体的に与えられる.

□

【定理 3.343 ($\mathbb{C}P^3$ の 3 次曲面)】 $\mathbb{C}P^3$ の任意の滑らかな 3 次曲面は, $\mathbb{C}P^2$ の次の条件を満たす 6 個の点 p_1, \dots, p_6 でのブローアップ $\tilde{\mathbb{C}P}_{p_1, \dots, p_6}^2$ を, これらの点を通る $\mathbb{C}P^2$ の 3 次曲線の線形系の $\tilde{\mathbb{C}P}_{p_1, \dots, p_6}^2$ における固有像が定める写像により $\mathbb{C}P^3$ に埋め込むことによって得られる:

1. どの 3 点も直線に乗らない.
2. 6 点すべてを含む 2 次曲線が存在しない.

□

【定理 3.344 ($\mathbb{C}P^2$ と有理同値な $\mathbb{C}P^3$ の超曲面)】 $\mathbb{C}P^2$ よりブローアップとブローダウンにより得られる $\mathbb{C}P^3$ の滑らかな超曲面は, 2 次曲面と 3 次曲面に限られる. □

3.15.3 特異点解消

【定理 3.345 (代数曲面内の曲線の特異点解消)】 S を代数曲面, C をその上の既約曲線とすると, 常にコンパクトリーマン面 \tilde{C} と正則写像

$$\psi: \tilde{C} \rightarrow C \subset S$$

で, C の正則点上では 1 対 1 となるものが存在する. このとき, (\tilde{C}, ψ) は C の特異点解消 (desingularization) と呼ばれる. □

Proof. Weierstrass の準備定理より, C の定義関数 f は, 各特異点 $p \in C_s$ の近傍で, Weierstrass 多項式

$$f(z, w) = \prod_{r=1}^k (w - a_r(z)) = w^k + p_1(z)w^{k-1} + \cdots + p_k(z)$$

で表されるとして良い. このとき, C が p で既約なら, $\{a_r(z)\}$ へのモノドロミー変換が位数 k をもつことより, 適当な円盤 $\zeta \in \Delta \subset \mathbb{C}$ からの分岐被覆型の写像 $\psi(\zeta) = (\zeta^k, b(\zeta))$ ($b(\zeta) = a_1(\zeta^k)$) が, 特異点解消写像を与える. 既約でないときは, 各既約成分に対して, 同様の写像を考えればよい. Q.E.D.

【定義 3.346 (実種数)】 代数曲面 S 内の曲線 C に対して, その特異点解消で得られる滑らかな曲線の種数を **実種数** (real genus), **有効種数** (effective genus), ないし単に **種数** (genus) と呼び, $g(C)$ で表す. □

【定理 3.347 (実種数と仮想種数の関係)】 代数曲面 S 上の曲線 C の特異点を $\{p_i\}$, 対応する多重度を k_i とするとき, 実種数 $g(C)$ と仮想種数 $\pi(C) = (C \cdot C + C \cdot K_S)/2 + 1$ との間に次の不等式が成り立つ:

$$g(C) \leq \pi(C) - \sum_i \frac{k_i(k_i - 1)}{2}.$$

特に, $g(C) \leq \pi(C)$ で, 等号は C が滑らかなとき, かつそのときに限り成り立つ. □

【系 3.348】 代数曲面 S 上の任意の既約曲線 C に対して $\pi(C) \geq 0$ で, $\pi(C) = 0$ なら C は滑らかとなる. □

【系 3.349 (ブローダウンに対する Castelnuovo-Enriques の判定条件の強いバージョン)】 代数曲面 S 上の既約曲線は, $C \cdot C$ と $K \cdot C$ が共に負となる場合, かつその場合に限り C でのブローダウンが存在する.

□

【命題 3.350 (ブローアップによる仮想種数の変化)】 代数曲面 S に含まれる曲線 C が, 点 $p \in C$ において多重度 k の特異点を持つとする. このとき, S の点 p におけるブローアップ $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ による C の固有変換を \tilde{C} とすると, 次式が成り立つ:

$$\pi(\tilde{C}) = \pi(C) - \frac{k(k-1)}{2}.$$

□

Proof. $K_{\tilde{S}} \sim \pi^*K_S + E$ および $\tilde{C} \sim \pi^*C - kE$ が成り立つことより. Q.E.D.

【定理 3.351 (ブローアップによる特異点解消)】 代数曲面 S に含まれる代数曲線 C の特異点は, S の何度かのブローアップにより解消される.

□

Proof. C が特異なら仮想種数 $\pi(C)$ が特異点でのブローアップにより単調減少することと, 仮想種数が常に非負であることより. Q.E.D.

【命題 3.352 (特異曲線の Euler 標数)】 代数曲面 S 内の代数曲線 C の特異点を p_i , その多重度を k_i , C とホモロークな滑らかな曲線を C_0 とするとき,

$$\chi(C) \geq \chi(C_0) + \sum_i (k_i - 1)^2.$$

□

【命題 3.353 (代数曲面上の代数曲線の Lefschetz 線形系の Euler 標数)】

$\{C_\lambda\}$ を代数曲面 S 上の代数曲線の 1 次元線形系とする. 各曲線の自己交叉数を n , 線形系に含まれる特異曲線の数を μ とするとき, 次の関係が成り立つ:

$$\chi(S) = 2\chi(C) + \mu - n.$$

ここで, $\chi(C)$ は線形系の一般的な滑らかな曲線に対する Euler 標数である.

□

【命題 3.354 (代数曲線上の 2 次元代数的ファイバー空間の Euler 標数)】

2次元代数曲面 S から代数曲線 B への正則写像 $f: S \rightarrow B$ において、 C を f の一般的ファイバー、 $C_{p_i} = f^{-1}(p_i)$ ($i = 1, \dots, \mu$) を特異ファイバーとすると、

$$\chi(S) = \chi(B)\chi(C) + \sum_i (\chi(C_{p_i}) - \chi(C)) \geq \chi(B) \cdot \chi(C).$$

□

3.15.4 代数曲面の双有理写像の構造

【定理 3.355 (代数曲面の双有理写像とブローアップの対応)】 任意の代数曲面間の双有理写像は、ブローアップとブローダウンの組み合わせで実現される。すなわち、2つの代数曲面 M, N の間の双有理写像 $f: M \rightarrow N$ に対して、代数曲面 \tilde{M} とブローアップ正則写像 $\pi_1: \tilde{M} \rightarrow M$ 、 $\pi_2: \tilde{M} \rightarrow N$ が存在して、次の図式が可換となる：

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{M} & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

□

Proof. (1) $f \circ \pi_1$ が正則写像となるブローアップ $\pi_1: \tilde{M} \rightarrow M$ の構成：双有理写像 $f: \tilde{M} \rightarrow N \subset \mathbb{C}P^n$ に対応する M の因子線形系を $\{D_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{C}P^{n*}}$ とする。このとき、この線形系の基点集合は離散的な有限点集合となり、適当なブローアップを $\pi_1: \tilde{M} \rightarrow M$ で、対応する $\{D_\lambda\}$ の固有変換を $\{\tilde{D}_\lambda\}$ が基点を持たないものが存在する。実際、基点 $p \in M$ での $\{D_\lambda\}$ の多重度を k とするとき、 p でのブローアップ $\phi: M_1 \rightarrow M$ における D_λ の固有変換 D_λ^1 は、例外因子を $E = \pi^{-1}(p)$ とするとき、

$$D_\lambda^1 = \pi^* D_\lambda - kE$$

と表される。これより、 $D_\lambda^1 \cdot D_\lambda^1 = D_\lambda \cdot D_\lambda - k^2$ が成り立つ。 $\{D_\lambda^1\}$ が基点を持つ場合、さらにブローアップするという操作を繰り返すと、 $D_\lambda \cdot D_\lambda > D_\lambda^1 \cdot D_\lambda^1 > \dots$ という系列が得られる。ところが、これらの線形系は固定

成分を持たないので, $D_\lambda^i \cdot D_{\lambda'}^i \geq 0$ となるので, $D_\lambda^i \cdot D_\lambda^i \geq 0$. よって, 有限回のブローアップ操作で, 基点を持たない線形系 $\{\tilde{D}_\lambda\}$ が得られる.

この線形系に対応する写像を $\pi_2: \tilde{M} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ とする. すると, $\{\tilde{D}_\lambda\}$ は基点を持たないので, π_2 は正則写像となり, 構成法より, B を有限個の点集合として, $\pi_1^{-1}(M - B)$ 上で $f \circ \pi_1$ と一致する. よって, $\pi_2(\tilde{M}) = N$ で, 題意の可換図式が成立する.

(2) π_2 が N のブローアップの繰り返しで得られること: まず, 固有写像定理より, $p \in N$ に対して, $\pi_1^{-1}(p)$ は連結であることが言えるので, π_2 が可逆でない N の点 p では, $\pi_2^{-1}(p)$ は曲線 C となる. この曲線は, 常に第1種の例外曲線を含むことを示す. まず, C_1, \dots, C_m を C の既約成分, E を p を通過しない N の正の因子 (超平面因子を用いる) とすると,

$$(\pi_2^* E \cdot \pi_2^* E) = (E \cdot E) > 0, \quad (\pi_2^* E \cdot C_i) = 0 \quad \forall i$$

となるので, 指数定理より, C_i 同士の交叉形式は負定値となる.

つぎに, N の p で正則な有理2形式を ω とすると, $\pi_2^* \omega$ は C_i に沿ってゼロとなるので,

$$K_M = (\pi_2^* \omega) = D + \sum_i a_i C_i, \quad a_i > 0, \quad D \cap C = \emptyset$$

が成り立つ. よって,

$$0 > \left(\sum_i a_i C_i \cdot \sum_j a_j C_j \right) = \left(\sum_i a_i C_i \cdot K_M \right)$$

となるので, 適当な i に対して, $C_i \cdot K < 0, C_i \cdot C_i < 0$ となることが結論される. これは, Castelnuovo-Enriques の判定基準の強いバージョンより, C_i が第1種の例外曲線であることを意味する.

以上より, π_2 が双正則でなれば, π_2 は, ブローアップ $\sigma_1: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}_1$ と双有理正則写像 $\pi'_1: \tilde{M}_1 \rightarrow N$ の合成に分解される. もし, π'_1 が双正則でなければ, π'_1 はさらにブローアップと双有理正則写像の合成 $\sigma_2 \circ \pi'_2$ に分解される. このとき, ブローダウンごとに $b_2(\tilde{M}) > b_2(\tilde{M}_1) > b_2(\tilde{M}_2) > \dots$ と減少するので, $b_2 \geq 0$ より, この操作は必ず有限回で終了し, $\pi_2 = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_s$ となる. Q.E.D.

3.15.5 有理曲面

【定義 3.356 (有理曲面)】 $\mathbb{C}P^2$ と双有理同値な代数曲面を有理曲面 (rational surface) という. □

【命題 3.357 ($\mathbb{C}P^2$ と同型となる条件)】 代数曲面 M が $\mathbb{C}P^2$ と同じ Betti 数を持ち, かつ K_M が正でないなら, M は $\mathbb{C}P^2$ と正則同型である.

□

【証明へ】

【定義 3.358 (Cremona 変換)】 $\mathbb{C}P^2$ から自分自身への双有理変換を Cremona 変換という.

□

【例 3.359 (Cremona 変換)】

1. 2 次変換:

$$\phi_{abc} : [X_0, X_1, X_2] \rightarrow [X_1X_2, X_2X_0, X_0X_1]$$

この変換は, $\mathbb{C}P^2$ の 3 点 $a = [1, 0, 0], b = [0, 1, 0], c = [0, 0, 1]$ においてブローアップして得られる $\tilde{\mathbb{C}P}^2$ において, さらに, 3 本の例外曲線 $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ac}$ をブローダウンして得られる $\mathbb{C}P^2$ の有理変換と一致する.

2. $\mathbb{C}P^2$ の 6 個の点 a_1, \dots, a_6 が一般的, すなわち, どの 3 点も直線上に乗らず, 6 点すべてを通過する 2 次曲線が存在しないとして, $\mathbb{C}P^2$ のこれら 6 点でのブローアップを $\tilde{\mathbb{C}P}^2$ とする. このとき, a_1, \dots, a_6 の 5 点を通過する 2 次曲線 $G_1, \dots, G_6 (a_i \notin G_i)$ は互いに交わらない例外曲線となり, $\tilde{\mathbb{C}P}^2$ をそれらに沿ってブローダウンすると再び $\mathbb{C}P^2$ が得られる. このようにして定義される $\mathbb{C}P^2$ の有理写像 $\mathbb{C}P^2 - \{a_1, \dots, a_6\} \rightarrow \mathbb{C}P^2$ は, 双有理写像となる.

この写像は, 各 a_i を 2 重点として持つ $\mathbb{C}P^2$ の 5 次曲線からなる線形系から誘導される有理写像と一致する.

□

【定理 3.360 (Cremona 変換のつくる群)】 Cremona 変換の作る群は, 2 次変換 ϕ_{abc} により生成される.

□

【定義 3.361 (有理線織面)】 互いに交わらない既約有理曲線からなる 1 次元線形系 $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{C}P^1}$ をもつ代数曲面を有理線織面 (rational ruled surface) という.

□

【命題 3.362 (有理線織面の正則ファイバー束としての特徴づけ)】 S を有理線織面, $\{C_\lambda\}$ をその互いに交わらない滑らかな有理曲線の 1 次元線形系とする. このとき, この線形系から定まる正則写像 $\iota: S \rightarrow \mathbb{CP}^1$ は, S に \mathbb{CP}^1 をファイバーとする \mathbb{CP}^1 上の正則ファイバー束の構造を与える. □

Proof. $L \rightarrow S$ を十分正で $H^1(S, \mathcal{O}(L - C)) = 0$ となる直線束とすると (存在要確認), 層の短完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(L - C) \longrightarrow \mathcal{O}_S(L) \longrightarrow \mathcal{O}_{C_\lambda}(L) \longrightarrow 0$$

より, 各 λ に対し

$$H^0(S, \mathcal{O}(L)) \longrightarrow H^0(C_\lambda, \mathcal{O}(L)) \longrightarrow 0$$

を得る. これより, $L \cdot C_\lambda = n$ とすると, $L|_{C_\lambda} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(n)$ なので, L の大域的断面 $\sigma_0, \dots, \sigma_n$ で, λ_0 の十分小さな近傍 U を取ると, $\lambda \in U$ に対し, L の $C_0 = C_\lambda$ への制限が $H^0(C_\lambda, \mathcal{O}(L))$ を生成するものが存在する. このとき $[\sigma_0, \dots, \sigma_n]$ が定義する写像 $\iota_\sigma: \iota^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{CP}^n$ は各曲線 C_λ を \mathbb{CP}^n の正規有理曲線として埋め込む.

λ_0 の \mathbb{CP}^1 における十分小さな開近傍を U として, C_{λ_0} 上の $(n-1)$ 個の点 p_1, \dots, p_{n-1} をその ι_σ による像が $(n-2)$ 次元線形空間を張るようにとる. さらに, U の p_i を通る持ち上げを U_i とすると, $\lambda \in U$ のとき, $U_i \cap C_\lambda$ は 1 点 $p_i(\lambda)$ で交わり, $\iota_\sigma(p_1(\lambda)), \dots, \iota_\sigma(p_{n-1}(\lambda))$ は $(n-2)$ 次元線形空間 $V(\lambda)$ を張る. いま, $V(\lambda) (\lambda \in U)$ と交わらない直線 \mathbb{CP}^1 をとり, $\mathbb{CP}^n - V(\lambda)$ から \mathbb{CP}^1 への射影 π_λ を用いて, $\psi: \iota^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{CP}^1$ を $\psi(x) = (\lambda, \pi_\lambda(x)) (x \in C_\lambda)$ により定義すると, $\pi_\lambda|_{C_\lambda}: C_\lambda \rightarrow \mathbb{CP}^1$ は同型写像となるので, ψ は正則同型写像となり, $S \rightarrow \mathbb{CP}^1$ に対し, ファイバを \mathbb{CP}^1 , 底空間を \mathbb{CP}^1 とする正則束としての局所座標系を与える. Q.E.D.

【定義 3.363 (線織面)】 滑らかな代数曲面 S は, 滑らかな代数曲線への正則全射写像 $\pi: S \rightarrow B$ が存在し, その幾何学的ファイバーがすべて既約代数曲線で \mathbb{CP}^1 に同型なとき, 線織面 (ruled surface) という. □

【定義 3.364 (随伴射影束)】 複素多様体 M 上の正則ベクトル束 $E \rightarrow M$ に対し, 各点 $x \in M$ で $\mathbb{P}(E_x)$ をファイバーとするファイバー束 $\mathbb{P}(E) \rightarrow M$ を随伴射影束 (associated projective bundle) という. □

【命題 3.365 (射影束とベクトル束の対応)】 リーマン面 S 上の $\mathbb{C}P^{r-1}$ をファイバーとする任意の射影束 P は, ランク r の適当な正則ベクトル束 $E \rightarrow S$ の随伴射影束 $\mathbb{P}(E) \rightarrow S$ と一致する. \square

Proof. P の遷移関数 $\tilde{g}_{\alpha\beta} \in \text{GSL}(r)$ の勝手な $GL(r)$ への持ち上げを $g_{\alpha\beta}$ とすると, $h_{\alpha\beta\gamma} \equiv g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha}$ が $Z^2(S, \mathcal{O}^*)$ の Čech コサイクルを与える. ところが, $H^2(S, \mathcal{O}^*) = 0$ なので, $h_{\alpha\beta\gamma} = j_{\alpha\beta}j_{\beta\gamma}j_{\gamma\alpha}$ となり, $g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}/j_{\alpha\beta}$ が $\mathbb{P}(E) = P$ となる階数 r の正則ベクトル束 $E \rightarrow S$ の遷移関数を与える. Q.E.D.

【命題 3.366 ($\mathbb{C}P^1$ 上の正則ベクトル束の可約性)】 $\mathbb{C}P^1$ 上の任意の正則ベクトル束は, 常に, 直線束の直和に分解可能である. \square

Proof. 適当な k に対して $H^k \otimes E$ が分解するなら, 正則ベクトルバンドル $E \rightarrow \mathbb{C}P^1$ は分解する. そこで, 以下, k を十分大きく取り, $H^k \otimes E$ を E' と表記する.

k を十分大きく取ると, $H^1(\mathbb{C}P^1, \mathcal{O}(H^{k-1} \otimes E)) = 0$ となるので, 短完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(H^{k-1} \otimes E) \rightarrow \mathcal{O}(H^k \otimes E) \rightarrow (H^k \otimes E)_p \rightarrow 0$$

に対するコホモロジー完全系列より, $H^0(\mathbb{C}P^1, \mathcal{O}(H^k \otimes E)) \rightarrow (H^k \otimes E)_p \rightarrow 0$ がなりたつ. これより, $E' \rightarrow \mathbb{C}P^1$ は正則な大域的切断をもつ. それらのうち, 零点の数 n が最大のものを σ とする. このとき, $\mathbb{C}P^1$ の適当な有理関数 ϕ を用いて, 断面 $\sigma' = \phi\sigma$ が正則で, かつ, σ と共通の零点を持たないものを作ることができる.

まず, $\dim E' = 2$ の場合に, この2つの断面の線形結合により定義される E' の1次元部分束を L_1 , $L_2 = E'/L_1$ とすると, 短完全系

$$0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow E' \xrightarrow{\pi} L_2 \longrightarrow 0 \quad (3.15.1)$$

が成り立つ.

このとき, $m = \deg(L_2) \leq n = \deg(L_1)$ となる. 実際, $m \geq n+1$ とすると, p_1, \dots, p_{n+1} でゼロとなる L_2 の断面 $\tilde{\tau}$ が存在する. $H^1(\mathbb{C}P^1, \mathcal{O}(L_1)) = H^0(\mathbb{C}P^1, \mathcal{O}(-2H - L_1)) = 0$ より, $H^0(\mathbb{C}P^1, \mathcal{O}(E')) \rightarrow H^0(\mathbb{C}P^1, \mathcal{O}(L_2)) \rightarrow 0$ となる. よって, $\pi(\tau) = \tilde{\tau}$ となる E' の断面 τ が存在し, $\tau(p_i) \in L_1 (i = 1, \dots, n+1)$ となる.

つぎに、任意の点列 q_1, \dots, q_{n+1} に対して、 $\deg(L_1 - (q_1 + \dots + q_{n+1})) = -1$ および短完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(L_1 - (q_1 + \dots + q_{n+1})) \rightarrow \mathcal{O}(L_1 - (q_1 + \dots + q_n)) \rightarrow \mathbb{C}_{q_{n+1}} \rightarrow 0$$

より、 $H^0(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}(L_1 - (q_1 + \dots + q_n))) \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0$ となる。すなわち、 q_1, \dots, q_n でゼロとなり、 q_{n+1} で指定された L_1 のベクトルと一致する L_1 の断面が存在する。これより、各 $i = 1, \dots, n+1$ に対して、 $q_j (j \neq i)$ でゼロ、 q_i で $\tau(q_i)$ と一致する L_1 の断面 τ_i が存在する。すると、 $\tau - \sum_i \tau_i$ は p_1, \dots, p_{n+1} でゼロとなる E' の断面となるので、 n の定義に反する。

つぎに、短完全系列

$$0 \rightarrow \text{Hom}(L_2, L_1) \rightarrow \text{Hom}(L_2, E') \rightarrow \text{Hom}(L_2, L_2) \rightarrow 0$$

において、 $\deg \text{Hom}(L_2, L_1) = \deg L_1 - \deg L_2 \geq 0 \Rightarrow H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}(\text{Hom}(L_2, L_1))) = 0$ より、 $H^0(\text{Hom}(L_2, E')) \rightarrow H^0(\text{Hom}(L_2, L_2)) \rightarrow 0$ となるので、 $\text{Hom}(L_2, E')$ の元 j で $\pi \circ j = 1 \in \text{Hom}(L_2, L_2)$ となるものが存在する。したがって、 $E' = L_1 \oplus L_2$ となる。

つぎに、 $\dim E' > 2$ の場合を数学的帰納法で示す。 $\dim E' = l - 1$ のとき題意が成り立つとすると、 $\dim E' = l$ のとき、 $0 \rightarrow L_1 \rightarrow E' \rightarrow E'' = \bigoplus_{i=2}^l L_i \rightarrow 0$ となる。 $\deg L_i \leq \deg L_1$ なので、

$$H^0(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}(\text{Hom}(E'', L_1))) = \bigoplus_{i=2}^l H^0(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}(\text{Hom}(L_i, L_1))) = 0$$

より、 $E'' = L_2$ の場合と同様に、分裂写像 $E'' \rightarrow E'$ が存在し、 $E' = L_1 \oplus E'' = \bigoplus_{i=1}^l L_i$ となる。 Q.E.D.

【命題 3.367 (Hirzebruch 曲面)】 \mathbb{CP}^1 上の \mathbb{CP}^1 束 S_n を

$$S_n \equiv \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1})$$

により定義する。対応する複素曲面は **Hirzebruch 曲面** と呼ばれる。

このファイバー束において、 σ を \mathbb{CP}^1 上の直線束 $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(n)$ の任意の有理断面として、 S_n の断面に対応する曲線 E_∞, E_0, E_σ を次のように定義する：

$$(\sigma, 0) \mapsto E_\infty, \quad (0, 1) \mapsto E_0, \quad (\sigma, 1) \mapsto E_\sigma$$

このとき、 C を S_n の任意のファイバーとして、 S_n のホモロジー群は次の構造をもつ：

$$\begin{aligned} H_2(S_n, \mathbb{Z}) &\cong H_2(C \cup E_0, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\{(C), (E_0)\} \cong \mathbb{Z}^2, \\ H_1(S_n, \mathbb{Z}) &\cong H_1(C \cup E_0, \mathbb{Z}) = 0. \end{aligned}$$

さらに、 $H^1(S_n, \mathcal{O}) = H^2(S_n, \mathcal{O}) = 0$ より、 $H^1(S_n, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(S_n, \mathbb{Z})$ は同型となり、交差数について

$$\begin{aligned} E_0 \cdot E_0 &= n, & E_0 \cdot E_\infty &= 0, \\ E_\sigma \cdot E_0 &= \deg(\sigma)_0, & E_\sigma \cdot E_\infty &= \deg(\sigma)_\infty, \\ E_0 \cdot C &= E_\infty \cdot C = E_\sigma \cdot C = 1. \end{aligned}$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} E_\infty &\sim E_0 - nC \Rightarrow E_\infty \cdot E_\infty = -n, \\ E_\sigma &\sim E_0 + \deg(\sigma)_\infty C \end{aligned}$$

となる。また、 S_n の標準因子は

$$K_{S_n} = -2E_0 + (n-2)C \cong -2E_\infty - (n+2)C$$

と表される。 □

【命題 3.368 (CP¹ 上の CP¹ 束の分類)】 CP¹ 上の CP¹ 束 (Hirzebruch 曲面) S_n に対して、次が成り立つ：

1. 有理線織面はいずれかの S_n と同型である。
2. S_n は、既約 $(-n)$ 曲線をもつ唯一の CP¹ 上の CP¹ 束である。
3. $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}$ の断面 $(\sigma, 0)$ に対応する S_n の断面を E_∞ とおくと、 E_∞ に含まれないファイバー C_λ の点 $x \in C_\lambda$ における S_n のブローアップを $\tilde{S}_n \rightarrow S_n$, C_λ のブローアップによる固有変換を \tilde{C}_λ とする。このとき、 \tilde{C}_λ は (-1) 曲線となり、 \tilde{C}_λ による \tilde{S}_n のブローダウンを S とすると、 E_∞ の像が S の $(-n+1)$ 曲線となるので、 S は S_{n-1} と同型となる。また、今の逆の操作を行うと、 S_{n-1} から S_n がブローアップとブローダウンにより得られる。
4. $S_0 = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, S_1 は $\mathbb{C}P^2$ の一点でのブローアップと一致する。これより、 S_n 、したがって、有理線織面はすべて有理曲面となる。

□

【補題 3.369 (有理曲面の線形系による特徴づけ (Noether の補題))】

代数曲面 S が有理的であるための必要十分条件は、 $\dim |C| \geq 1$ となる既約有理曲線 C を含むことである。 □

Proof. $S \in \mathbb{C}P^n$ における超平面断面を考えることにより, 必要性は明らか. そこで, 有理曲線の1次元線形系 $\{C_\lambda\}$ の存在を仮定する. まず, この線形系が基点を持つ場合は, 基点でのブローアップで基点をなくすことができる. $\{C_\lambda\}$ はその固有変換に置き換わる. 次に, 線形系が可約な曲線 $C_{\lambda_0} = \sum_\nu a_\nu C_\nu$ を含む場合には, 線形系が既約で滑らかな有理曲線を含むことと λ に対する連続性より仮想種数が $\pi(C_{\lambda_0}) = 0$ となること, および, $C_{\lambda_0} \cdot C_{\lambda_0} = 0$ より, C_ν の中に (-1) 曲線が含まれるので, この曲線をブローダウンする. すると, $b_2(S)$ が1減少するので, この操作を何度か繰り返すと, $\{C_\lambda\}$ は基点をもたず, すべての C_λ が既約なものに置き換わる. すなわち, S は有理線織面と双有理同型なので, やはり有理曲面となる. Q.E.D.

【定理 3.370 (有理曲面の幾何学的特徴づけ)】 任意の有理曲面は, $\mathbb{C}P^2$ ないし S_n のブローアップで得られる. □

3.15.6 $\mathbb{C}P^n$ の極小次数の曲面

【命題 3.371 (Hirzebruch 曲面の射影空間への埋め込み)】 Hirzebruch 曲面 S_n において, S_n 上の線形系 $|E_0 + kC| (k = 0, 1, 2, \dots)$ は, $\mathbb{C}P^1$ 上の直線束 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(n)$ の有理切断 σ のうち, k 個の極を持つものと対応し, S_n の射影空間への埋め込み

$$\phi_{k,n} = \iota_{E_0+kC} : S_n \rightarrow \mathbb{C}P^{n+2k+1}$$

を定義する.

この写像の像 $S_{k,n}$ は $\mathbb{C}P^{n+2k+1}$ での最小次数の曲面となり, E_0, E_∞ の像を D_0, D_∞ とするとき, D_0 と D_∞ は $\mathbb{C}P^{n+2k+1}$ の相補的な部分空間 $\mathbb{C}P^{n+k}, \mathbb{C}P^k$ の次数 $(n+k)$ および k の正規有理曲線となる. さらに, $S_{k,n}$ は, D_0 の点と D_∞ の点を結ぶ直線で生成され, 有理正規巻物 (rational normal scroll) と呼ばれる. □

【定理 3.372 (最小次数の曲面の分類)】 $\mathbb{C}P^m$ の次数 $(m-1)$ の既約非退化曲面は, 有理線織巻物ないし Veronese 面 $\iota_{2H}(\mathbb{C}P^2) \subset \mathbb{C}P^5$ のいずれかと一致する. □

【定義 3.373 (Castelnuovo 曲線)】 $\mathbb{C}P^n$ における次数 $d > 2n$ の曲線のうち, 最大種数 $g = m(m-1)(n-1)/2 + m\epsilon$ ($d-1 = m(n-1) + \epsilon$) のものを Castelnuovo 曲線という. □

【命題 3.374 (Castelnuovo 曲線の性質)】

1. $\mathbb{C}P^n$ の Castelnuovo 曲線 C を含む 2 次超曲面の線形系の次元は $(n-1)(n-2)/2 - 1$ 以上である.
2. C の一般的な超曲面断面 $\Gamma = C \cap \mathbb{C}P^{n-1}$ は, それを含む $\mathbb{C}P^{n-1}$ の 2 次超曲面に対して $2n-1$ 個の条件しか課さない.

□

【命題 3.375 (有理正規曲線の Steiner 構成法)】 $\mathbb{C}P^n$ の線形独立な n 個の点 p_1, \dots, p_n に対して, $H_i(\lambda)$ を $p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n$ を含む超平面の線形系とする. このとき, 曲線

$$C = \cup_{\lambda} H_1(\lambda) \cap \dots \cap H_n(\lambda)$$

は, 次数 n の有理正規曲線となる. 逆に, 任意の有理正規曲線 C は, この方法で得られる.

これより, 特に, 正規有理曲線は 2 次式系 $Q_{ij} = \cup_{\lambda} H_i(\lambda) \cap H_j(\lambda)$ の共通零点となる. また, 一般の位置にある任意の $(n+3)$ 個の点に対し, それを通過する有理正規曲線が一意的に存在する. □

【命題 3.376 (Castelnuovo の補題)】 $\mathbb{C}P^n$ において一般の位置にある点集合 $p_1, \dots, p_d (d \geq 2n+3)$ は, それらを通る 2 次超曲面に対して $(2n+1)$ 個の条件しか課さないなら, 適当な有理正規曲線に含まれる. □

【命題 3.377 (Castelnuovo 曲線と有理曲面の関係)】 Castelnuovo 曲線は, 次のいずれかに分類される:

1. $\mathbb{C}P^n$ における有理正規巻物 $S_{k,1}$ と $(m+1)$ 次超曲面の完全交差で得られる可約曲線から, $(n-2-\epsilon)$ 本の直線, ないし $(n-k-2)$ 本の直線と準線を取り除いて得られる既約曲線.
2. $\mathbb{C}P^5$ における Veronese 曲面内の滑らかな曲線.

□

【補題 3.378 (代数曲線と超平面交点列の一般性-II)】 $\mathbb{C}P^n$ の任意の非退化曲線 C において, $p \in \mathbb{C}P^n$ を C の無限個のコード (弦) に含まれない点とするとき, p を通過する一般的な超平面 H に対して, 点集合 $\{p\} \cup (H \cap C)$ は一般の位置にある, すなわちそのどの n 個も $(n-2)$ 次元平面に含まれない. □

【定理 3.379 (Enriques-Petri の定理)】 $C \subset \mathbb{C}P^n$ を標準曲線とするとき、次のいずれかが成り立つ：

1. C は 2 次超曲面族の交叉となる。
2. C は $\mathbb{C}P^1$ の 3 重被覆面。この場合、 C を含むすべての 2 次超曲面の共通部分は、 C の 3 点を通る弦全体を線織線とする有理正規巻物。
3. C は平面 5 次曲線の $\mathbb{C}P^5$ への埋め込み。この場合、 C を含むすべての 2 次超曲面の共通部分は、 C 上の共面な 5 点を通る平面 2 次曲線で掃かれる Veronese 曲面 $\iota_{2H}(\mathbb{C}P^2) \subset \mathbb{C}P^5$ 。

□

3.15.7 有理曲面の双有理不変量による特徴づけ

【補題 3.380 (Bertini の定理の系)】 $\{D_\lambda\}$ を複曲面上の曲線の 1 次元線形系とする。 $\{D_\lambda\}$ の一般的元が可約で、 E を固定成分として、 $D_\lambda = E + \sum C_\nu(\lambda)$ と表されるとき、 $C_\nu \cdot C_{\nu'} \geq 0$ となる。 □

【定理 3.381 (Castelnuovo-Enriques の定理)】 代数曲面 S が有理曲面であるための必要十分条件は、 $q(S) = P_2(S) = 0$ となることである。 □

Proof. 必要ならブローダウンにより S の (-1) 曲線をなくすることができるので、 S は (-1) 曲線を含まないとして良い。

K_S が非自明な大域的正則切断 σ をもつと、 $\sigma \otimes \sigma$ は K_S^2 の非自明な大域的正則切断を与えるので、 $P_2(S) = 0 \Rightarrow p_g(S) = h^2(\mathcal{O}_S) = h^0(\mathcal{O}(K_S)) = 0$ 。よって、 $\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q(S) + p_g(S) = 1$ 。さらに、 S の任意の曲線 C に対し、 $h^0(K_S) = 0 \Rightarrow h^2(C) = h^0(K_S - C) = 0$ 。よって、Riemann-Roch 公式

$$h^0(C) \geq \frac{C \cdot C - K_S \cdot C}{2} + 1$$

が成り立つ。特に、 C が有理曲線で $C \cdot C \geq 0$ の時、 $-2 = \deg K_C = C \cdot (K_S + C) \geq C \cdot K_S$ より、 $h^0(C) \geq 2$ 、すなわち、 $\dim |C| \geq 1$ となる。これより、条件

$$\pi(C) = 0, \quad C \cdot C \geq 0$$

となる S 上の既約曲線 C が存在するなら, Noether の補題 3.369 より, S は有理曲面となる.

以下, $K = K_S$ の自己交叉数の符号で場合分けする. (以下, 概要)

I. $K \cdot K = 0$ の場合: まず, $-K$ に Riemann-Roch を適用し, $h^0(-K) \geq 1$ を示す. つぎに, S 上の非常に豊富な正の直線バンドル $L = [E]$ を適当に取り, $D \in |-K|$ に対して, $h^0(L - D) > 0$ となるようにする. このとき, $E \cdot K = -E \cdot D < 0$ より, $m \gg 0$ に対して $h^0(E + mK) = 0$ となるので,

$$h^0(E + nK) > 0, \quad h^0(E + (n + 1)K) = 0$$

となる自然数 n が存在する. このとき, $D' = \sum a_\nu C_\nu \in |E + nK|$ に対して, $K \cdot C_{\nu_0} < 0$ となる ν_0 が存在する. Riemann-Roch を用いると, この C_{ν_0} が上記の条件を満たす有理曲線であることが言える.

II. $K \cdot K < 0$ の場合: まず, 任意の因子 E に対し, $h^0(E + mK) = 0 (m \gg 0)$ を示し,

$$h^0(E + nK) \geq 2, \quad h^0(E + (n + 1)K) \leq 1$$

となる自然数 n をとる. このとき, $D = E + \sum C_\nu \in |E + nK|$ に対して, $C_\nu \cdot C_\nu \geq 0, \pi(C_\nu) = 0$ を示す.

III. $K \cdot K > 0$ の場合: まず, Riemann-Roch より $\dim |-K| \geq 1$ となるので, $D \in |-K|$ が可約なら, C_ν が求める曲線となること Riemann-Roch を用いて示す. 次に, D が既約な時, S 上の非常に豊富な因子で K に比例しないもの E が存在することを示す. 次に, 自然数 n_0 を

$$h^0(E + n_0K) \geq 1, \quad h^0(E + (n_0 + 1)K) = 0$$

となるように選ぶと, $D' \in |E + n_0K|$ に対して, $D' = E + \sum C_\nu$ と分解するとき, $K \cdot C_\nu < -1$ なら C_ν が求める曲線, それ以外の場合は, (-1) 曲線が存在することを示す. Q.E.D.

【系 3.382 (Luroth の定理)】 M を有理曲面とする. このとき, M から曲面 N への全射正則写像 $f: M \rightarrow N$ が存在すれば, N は有理曲面である. □

3.15.8 Albanese 写像

【命題 3.383 (像が曲線となる Albanese 写像)】 $q(S) > 0$ かつ $p_g(S) = 0$ となる複素曲面 S に対して、Albanese 写像 $\Psi : S \rightarrow \text{Alb}(S) = H^{1,2}(S)/H^1(S, \mathbb{Z})$ による像は、複素曲線 E となる。さらに、 $\Psi : S \rightarrow E$ の一般的ファイバーは、非特異かつ既約となる。 \square

Proof. $\omega_i (i = 1, \dots, q)$ を $H^0(S, \Omega^1)$ の基底とすると、 $\omega_i \wedge \omega_j (i \neq j)$ は $H^0(S, \Omega^2) = H^0(S, K)$ の元となるので、 $p_g(S) = 0$ ならゼロ。すなわち、 $\omega_i = f_i \omega$ となる。これより、Albanese 写像 $\Psi(q) = [(\int_{p_0}^p \omega_1, \dots, \int_{p_0}^p \omega_q)]$ の Jacobi 行列のランクは 1。

後半については、まず、 E の 1 次元線形系 D_λ の引き戻しにより得られる S 上の線形系 $\Psi^* D_\lambda$ の因子は、 Ψ のファイバーからなるので、Bertini の定理より、 Ψ の一般のファイバーは非特異となる。特に、 Ψ のファイバーが既約でないとする、既約成分は互いに交差しないので、 Ψ のファイバーの既約成分の全体の集合を F とすると、 F から E への被覆度 $m \geq 2$ の被覆写像 α が自然に誘導され、次の可換な図式が成り立つ：

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ \Psi' \swarrow & & \searrow \Psi \\ F & \xrightarrow{\alpha} & E \end{array}$$

ここで、 $b_1(S) = b_1(\text{Alb}(S)) \equiv b_1(E)$ より $g(E) = q(S)$ なので、 $q(S) \geq 2$ または α が分岐点をもつとき、分岐点の数を $2b$ として、Riemann-Hurwitz より

$$g(F) \geq m(q-1) + 1 + b > q = g(E)$$

ところが、 $\Psi'^* : H^0(F, \Omega_F^1) \rightarrow H^0(S, \Omega_S^1)$ は単射なので、 $q \geq g(F)$ となり矛盾。一方、 α が分岐点をもたず、 $q = 1$ のときには、 $g(F) = 1$ で、 $\alpha_*(H_1(F, \mathbb{Z}))$ は $\mathcal{H}_1(E, \mathbb{Z})$ の真部分加群となる。しかし、これは、合成写像

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{\Psi}_* : H_1(S, \mathbb{Z})/\text{torsion} & \xrightarrow{\Psi'_*} & H_1(F, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\alpha_*} & H_1(E, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi_*} & H_1(\text{Alb}(S), \mathbb{Z}) \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & \mathbb{Z}^2 & & \mathbb{Z}^2 & & \mathbb{Z}^2 \end{array}$$

が同型写像となることと矛盾。よって、 $S \rightarrow E$ の一般ファイバーは滑らかで既約。 Q.E.D.

3.15.9 非有理線織面

【定義 3.384 (非有理線織面)】 非有理曲線 E 上の $\mathbb{C}P^1$ をファイバーとする正則ファイバー束 $\pi : S \rightarrow E$ を非有理線織面 (irrational ruled surface) という. □

【命題 3.385 (線織面の共通の性質)】 線織面 $\Psi : S \rightarrow E$ に対して, 次が成り立つ:

1. 正則 1 形式の引き戻し写像

$$\Psi^* : H^0(E, \Omega_E^1) \rightarrow H^0(S, \Omega_S^1)$$

は, 同型写像である.

2. Leray のスペクトル系列ないし, ファイバーバンドルのホモトピーに対する完全系列より,

$$\Psi_* : H_1(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(E, \mathbb{Z})$$

は同型写像.

3. C を任意のファイバーとするととき, $K \cdot C = -2$, $C \cdot C = 0$ より,

$$P_m(S) = 0$$

4. q を S の不正則数とするととき, Noether の公式より,

$$\chi(S) = 2\chi(E) = 4 - 4q \Rightarrow K \cdot K = 8 - 8q.$$

□

【定理 3.386 (Castelnuovo-de Franchis の定理)】 複素曲面 S が極小でかつ $\chi(S) < 0$ なら, S は非有理線織面である. □

【系 3.387】 $\chi(S) < 0$ となる複素曲面 S は, 非有理線織面かそのブローアップである. □

【定理 3.388】 複素曲面 S が極小でかつ $c_1^2(S) < 0$ なら, S は非有理線織面である. □

【系 3.389】 $\chi(\mathcal{O}_S) < 0$ となる極小複素曲面 S は, 非有理線織面である. □

3.15.10 楕円曲面

【定義 3.390 (楕円曲面)】 複素曲面 S から複素曲線 E への正則写像 $\Psi : S \rightarrow E$ が存在して, その一般的ファイバーが既約楕円曲線となるとき, S は E を底空間とする楕円曲面 (elliptic surface) と呼ばれる. \square

【定義 3.391 (多重ファイバー)】 楕円曲面 $\Psi : S \rightarrow E$ において, $p \in E$ を原点とする E の局所座標 z に対し, S 上の関数 Ψ^*z が p 上のファイバー $C_p = \Psi^{-1}(p)$ において多重度 $m > 1$ をもつとき, C_p は多重度 m の多重ファイバーであるという. \square

【注 3.392 (多重ファイバーの性質)】

1. C_p が多重度 m の多重ファイバーのとき, 一般的ファイバー C_λ は mC_p にホモロークである.
2. $\gamma : \Delta \rightarrow S$ を多重度 m の多重ファイバー C_p に横断的な正則写像とすると, $\gamma(0) \in C_p$ として, $\Psi \circ \gamma : \Delta \rightarrow \Delta$ は $z = 0$ を分岐点とする, m 重分岐写像となる.
3. $\mathbb{C}P^1$ をファイバーとする線織面は多重ファイバーをもたない. また, 種数 $g > 1$ の曲線をファイバーとする曲面では, 多重ファイバーの多重度は $g - 1$ の約数に限られ, 多重ファイバーの種数 $g' = (g - 1)/m + 1 < g$ となる. これに対して, 楕円曲面の多重ファイバーの多重度に対するアプリアリな制限はなく, また, ファイバーの種数は常に $g = 1$ となる.

\square

【例 3.393 (多重ファイバーをもつ楕円曲面の例 (局所的構成))】 F を楕円曲線 $\mathbb{C}/\{1, \tau\}$, Δ を \mathbb{C} の円盤として, ファイバー空間を

$$\psi' : \Delta \times F \ni (z, w) \mapsto z^m \in \Delta$$

により定義する. ここで, $\Delta \times F$ の自由な変換 ϕ を

$$\phi : (z, w) \mapsto \left(e^{2\pi i/m} z, w + \frac{\tau}{m} \right)$$

により定義し, ϕ の生成する有限群 Γ による $\Delta \times F$ の商空間を S とすると, ψ' より, 正則写像

$$\Psi : S \ni [(z, w)] \mapsto z^m \in \Delta$$

が誘導され、 S は $z = 0$ に多重度 m の多重ファイバーをもつ楕円曲面となる。□

【例 3.394 (対数変換 (多重ファイバーの小平構成法))】 楕円曲面 $\Psi_0 : S_0 \rightarrow E$ において、 $p \in E$ をファイバー C_p が非特異で非多重な底空間の点とする。 p を原点とする E の局所座標を z とし、 $U = \{|z| < 1\}$ の Ψ_0 による逆像 $\Sigma_0 = \Psi_0^{-1}(U)$ は特異ファイバーを含まないとする。

このとき、 Σ_0 の切断 $\alpha : U \rightarrow \Sigma_0$ を用いて、ファイバー C_z の原点を $\alpha(z)$ により固定すると、 C_z を 2次元可換群と見なすことができる。この同一視のもとで、 Σ_0 に位数 m の元の全体は U_0 の非分岐被覆となる。 U_0 が単連結なので、この被覆は U_0 と同相な複素曲線の離散的な直和となる。その連結成分のひとつに対応する断面を $\beta : U \rightarrow \Sigma_0$ とする。各ファイバーの複素トーラスとしての表現を適当にとると、 $C_z \cong \mathbb{C}/\{1, \tau(z)\}$ かつ $\beta(z) = \alpha(z) + k/m$ とできる。ここで、 k は m と互いに素な自然数。

以上の設定で、 $\Delta \times \Sigma_0$ の超平面 Σ を

$$\Sigma = \{(w, r) \mid z(r) = w^m\} \subset \Delta \times \Sigma_0$$

により定義する。このとき、射影

$$w : \Sigma \ni (w, r) \mapsto w \in \Delta$$

により、 Σ は Δ を底空間とする楕円曲面となる。この楕円曲面は、ファイバー空間 $\Psi_0 : \Sigma_0 \rightarrow U$ の $\Delta \ni w \mapsto z = w^m \in U$ による引き戻しと一致し、 $\Sigma \ni (w, r) \mapsto r \in \Sigma_0$ は C_p を分岐曲線とする、 Σ_0 の m 重分岐被覆を与える。

この超曲面は、変換

$$\phi : (w, r) \mapsto (e^{2\pi i k/m} w, r + \beta(w^m)) \quad (3.15.2)$$

で不変で、 ϕ の生成する有限離散群 Γ の元は不動点を持たないので、 $\Sigma_1 = \Sigma/\Gamma$ は滑らかな複素曲面となり、ファイバー空間

$$\Psi_1 : \Sigma_1 \ni [(w, r)] \mapsto w^m = z \in U$$

は、 C'_0 を多重度 m の多重ファイバーとする楕円曲面となる。

中心のファイバーを除いた空間 $\Sigma_0 - C_p$ と $\Sigma_1 - C'_0$ は、次の対数変換 (logarithmic transformation) より誘導される正則写像 α により同型となる：

$$\bar{\alpha} : \Sigma - C'_0 \ni (w, r) \mapsto r - \frac{m}{k} \frac{\log w}{2\pi\sqrt{-1}} \beta(w^m) \in \Sigma_0 - C_p$$

そこで、この正則写像により、 $S_0 - C_p$ に Σ_1 を貼り付けることによりできる複素曲面

$$S_1 = (S_0 - C_p) \cup_{\alpha} \Sigma_1$$

は、多重度 m の多重ファイバーをもつ楕円曲面となる。

この操作を逆にたどると、多重ファイバーを取り除くことができる。□

【命題 3.395】 滑らかな多重ファイバーをもつすべての楕円曲面は、多重ファイバーを持たない楕円曲面から対数変換により得られる。□

【補題 3.396 (多重ファイバーの法バンドル)】 楕円曲面 $\Psi: S \rightarrow E$ において、 B を多重度 m の多重ファイバーとすると、 B の法バンドル $N_{B/S} = [B]_B$ は、 $\text{Pic}^0(B)$ の位数 m の振れ元である。□

【命題 3.397 (楕円曲面の標準因子)】 楕円曲面 $\Psi: S \rightarrow E$ の多重ファイバーを B_i 、その多重度 m_i とするとき、 S の標準因子 K は

$$K = \Psi^* D + \sum_i (m_i - 1) B_i$$

と表される。ここで、 D は E の因子で、

$$\deg D = 2g(E) - 2 + \chi(\mathcal{O}_S).$$

□

3.15.11 曲面の分類

【定義 3.398 (曲面の小平次元)】 複素曲面 S に対し、多重種数 $P_m(S)$ の m が増大したときの振る舞いにより、 S 小平次元 $\kappa(S)$ を次のように定義する：

1. $\kappa = -\infty$: $P_m(S) = 0, \forall m = 1, 2, \dots$
2. $\kappa = 0$: $P_m(S) = 0$ or 1 .
3. $\kappa = 1$: $P_m(S) \leq cm, \exists c > 0$.
4. $\kappa = 2$: $P_m(S)/m$ が非有界.

次数付き代数

$$\bigoplus_{m=0}^{\infty} H^0(S, \mathcal{O}(mK_S))$$

の超越次数は $\kappa + 1$ となる. また, mK_S の誘導する写像 $\iota_{mK_S} : S \rightarrow \mathbb{C}P^N$ に対して,

$$\max_m \dim \text{Im}(\iota_{mK_S}) = \kappa$$

となる. _____ □

【例 3.399 (小平次元)】

- 線織面 $\Rightarrow \kappa = -\infty$
- 楕円曲面 $\Rightarrow \kappa \neq 2$

_____ □

【補題 3.400】 極小曲面 S に対して, $\kappa(S) = 0, 1$ なら, $K_S \cdot K_S = c_1(S)^2 = 0$ となる. _____ □

Proof. $K_S \cdot K_S < 0$ とすると, S は非有理線織面となるので, $\kappa(S) = -\infty$.
一方, $K_S \cdot K_S > 0$ とすると, Riemann-Roch より

$$h^0(S, \mathcal{O}(mK_S)) + h^0(S, \mathcal{O}(-(m-1)K_S)) \geq \frac{m(m-1)}{2} K \cdot K$$

となる. $\kappa(S) = 0, 1$ より, $h^0(S, \mathcal{O}(mK_S)) < cm$ なので, $h^0(S, \mathcal{O}(-mK_S)) = O(m^2)$. 特に, m_0 が存在して, $m \geq m_0$ では $D > 0$ が存在して, $mK \sim -D$. よって, $h^0(S, \mathcal{O}(mK_S)) = 0, m \geq m_0$. これは, 任意の m に対して $h^0(S, \mathcal{O}(mK_S)) = 0$, すなわち $\kappa(S) = -\infty$ を意味する. Q.E.D.

【命題 3.401 (楕円曲面の小平次元)】 楕円曲面 $\Psi : S \rightarrow E$ の標準因子 K が有効でかつゼロでなければ, $\kappa(S) = 1$. これより, E の種数 g が 2 以上なら, $\kappa(S) = 1$. _____ □

Proof. 楕円曲面の一般公式より, 適当な自然数 k に対して, $kK = \Psi^*(D)$ で, 仮定より, D は E 上のゼロでない有効因子. このとき, E に対する Riemann-Roch より, $k|m$ に対して, $h^0(mK) \propto m(m/k \gg 1)$ となるので, $\kappa(S) = 1$. 特に, $g(E) \geq 2$ のとき, 楕円曲面の K に対する一般公式より, K は有効因子に線形同値なので, $\kappa(S) = 1$. Q.E.D.

【補題 3.402】 極小曲面 S 上の標準バンドル K に対して $K \cdot K = 0$ となるとき、有効因子 $D \in |mK|$ の任意の既約成分 D_i は次の式を満たす：

$$K \cdot D_i = 0, \quad D_i \cdot D_i = 0 \text{ or } -2.$$

□

Proof. D を $D = \sum_i n_i D_i (n_i > 0)$ と既約分解するとき、

$$mK \cdot D_i = n_i D_i \cdot D_i + \sum_{j \neq i} n_j D_j \cdot D_i \geq n_i D_i \cdot D_i$$

より、 $K \cdot D_i < 0$ なら、 $D_i \cdot D_i < 0$ より D_i が第1種例外因子となるので、仮定より $K \cdot D_i \geq 0$ ($\forall i$)。このとき、

$$0 = D \cdot D = mK \cdot D = m \sum_i n_i K \cdot D_i \geq 0$$

より、 $K \cdot D_i = 0$ ($\forall i$)。したがって、上の不等式より、 $D_i \cdot D_i \leq 0$ 。Adjunction 公式より、 $2(g(D_i) - 1) = \deg K_{D_i} = K \cdot D_i + D_i \cdot D_i \leq 0$ より、 $D_i \cdot D_i = 0, -2$. Q.E.D.

【命題 3.403 ($c_1^2 = c_2 = p_g = 0$ となる曲面)】 $c_1^2 = c_2 = p_g = 0$ ($\Rightarrow q = 1$) となる複素曲面 S は、 $\kappa(S) < 1$ なら、 $\kappa(S) = 0$ となる。 $\kappa(S) = 0$ のときには、Albanese 写像 $\Psi : S \rightarrow E = \text{Alb}(S) \cong \mathbb{C}/\Lambda$ のファイバーはすべて既約で滑らかな多重度ゼロの楕円曲線となり、 C をそのホモロジー類とするととき、条件

$$K \cdot F = K \cdot F' = 0, F \cdot C > 0, F' \cdot C > 0; \quad F' \subset G \in |n(K + F)|$$

を満たす交叉しない2つの既約楕円曲線 F, F' をもつ。さらに、1次元線形系 $G_\lambda \in |2K + 2F + 2F'|$ は、 S にもう一つの楕円曲面構造 $\pi : S \rightarrow B = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ を与え、 $K \sim 0$ となる。 □

【証明へ】

【定理 3.404 (Enriques-小平の分類定理)】 複素曲面 S は、小平次元 $\kappa(S)$ により次のように分類される：

1. $\kappa(S) = -\infty$ の極小曲面は、 $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ ないし線織面である。

2. $\kappa(S) = 0$ の極小曲面は，次のいずれかである：

- (a) $q = 0, p_g = 1$: K3 曲面
- (b) $q = p_g = 0$: Enriques 曲面
- (c) $q = 1$: 超楕円曲面
- (d) $q = 2$: Abel 多様体

3. $\kappa(S) = 1$ の極小複素曲面は，楕円曲面である。

4. $\kappa(S) = 2$: 一般型曲面（詳細分類なし）

□

[【証明へ】](#)

【定理 3.405 (極小曲面の分類に関する Enriques の定理)】 $P_4(S) = P_6(S) = 0$ となる極小曲面 S は， $\mathbb{C}P^2$ か線織面に限られる。 □

[【証明へ】](#)

3.15.12 4次元多様体の微分同相類との対応

【定理 3.406 (4次元多様体微分同相類の複素構造の自由度 (Friedman–Morgan 1994))] M を向き付けられた4次元 C^∞ 多様体とするととき， M の許容する代数曲面としての複素変形類の数は有限である。

[出典・証明：R. Friedman & J.W. Morgan, "Smooth Four-Manifolds and Complex Surfaces (Springer, 1994)] □

【定理 3.407 (複素曲面の小平次元と微分同相類の対応 (Friedman–Morgan 1994))] 複素曲面 S_1, S_2 が微分同相なら，両者が同じ小平次元を持つか，または，いずれかが有理曲面で残りが一般型の曲面となる。すなわち， $\kappa = 0, \kappa = 1, \kappa = -\infty, 2$ の3つのクラスは異なる微分同相類からなる。

[出典・証明：R. Friedman & J.W. Morgan, "Smooth Four-Manifolds and Complex Surfaces (Springer, 1994)] □

【定理 3.408 (K3 構造と微分同相類の対応 (Friedman-Morgan 1994))】

K3 曲面に微分同相な複素曲面は K3 曲面である.

[出典・証明: R. Friedman & J.W. Morgan, "Smooth Four-Manifolds and Complex Surfaces (Springer, 1994)] _____□

【定理 3.409 (楕円曲面と微分同相類の対応 (Friedman-Morgan 1994))】

楕円曲面 S_1 と S_2 が非有限の基本群をもち, 互いに微分同相なら, S_1 は S_2 ないし \bar{S}_2 と同じ複素変形類に属する.

[出典・証明: R. Friedman & J.W. Morgan, "Smooth Four-Manifolds and Complex Surfaces (Springer, 1994)] _____□

3.15.13 諸命題の証明

定理 3.340 の証明. まず, L に対応する因子がなめらかな既約曲線 C で与えられる場合を考える. このとき, 層の短完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_M \longrightarrow \mathcal{O}_M(L) \longrightarrow \mathcal{O}_C(L) \longrightarrow 0$$

に対する層係数コホモロジー完全系列より,

$$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_M) + \chi(\mathcal{O}_C(L))$$

ここで, 曲線に対する Riemann-Roch 定理より

$$\chi(\mathcal{O}_C(L)) = \deg(L|_C) + 1 - \pi(C) = \frac{L \cdot L - L \cdot K}{2}$$

次に, L が一般の直線束の滝にも成り立つことを示す. 2通りの証明が可能である. いずれも, 射影代数多様体上には必ず正の正則直線束が存在することと, 小平の埋め込み定理の一般化を用いる.

1. 小平の埋め込み定理の一般化により, M 上の正の直線バンドル P に対して, 正整数 m を十分大きく取れば, $[D] = mP$ と $L + [D]$ が共に非常に豊富にできる. このとき, 線形系 $|D|$ および $|L + D|$ の因子は, 適当な $\mathbb{C}P^N$ における超平面と M の埋め込み像の交わりとなるので既約で, Bertini の定理よりそれらの一般元は正則な部分多様体となる. したがって, $L' = L + D$ とおくと, 短完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_M(L) \longrightarrow \mathcal{O}_M(L') \longrightarrow \mathcal{O}_D(L') \longrightarrow 0$$

は,

$$\chi(L) = \chi(L') - \chi(L'|_D)$$

を与える. しかし, 曲線に対する Riemann-Roch 定理より

$$\chi(L'|_D) = -\pi(D) + \deg L'|_D + 1 = -\frac{D \cdot D + D \cdot K}{2} + L' \cdot D$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} \chi(L) &= \chi(\mathcal{O}_M) + \frac{L' \cdot L' - L' \cdot K}{2} + \frac{D \cdot D + D \cdot K - 2(L' \cdot D)}{2} \\ &= \chi(\mathcal{O}_M) + \frac{L \cdot L - L \cdot K}{2} \end{aligned}$$

を得る.

[出典: Griffith & Harris "Algebraic Geometry (1978)]

2. 今度は, 豊富な因子 P と整数 m を $-L + mP$ が非常に豊富になるように取り,

$$A_m = -\pi(-L + mP), \quad B_m = \chi(\mathcal{O}_M) - \chi(L - mP) - 1$$

と置くと, いずれも m の 2 次式で m が十分大きいとき $A_m = B_m$ となる. したがって, $m = 0$ に対しても等号が成することになり, 一般の場合の Riemann-Roch の定理を得る.

[出典: 飯高茂著「代数幾何学」(岩波講座基礎数学, 1977)]

Q.E.D.

[【定理 3.340 に戻る】](#)

命題 3.357 の証明. まず, Betti 数に関する条件より,

$$b_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad h^{2,0} = h^{0,2} = h^2(M, \mathcal{O}_M) = 0, \quad h^{1,1} = 1,$$

$$b_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad h^{0,1} = h^1(M, \mathcal{O}_M) = 0,$$

$$b_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \chi(M) = 2 * b_0 - 2 * b_1 + b_2 = 1.$$

よって、短完全系列 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_M \rightarrow \mathcal{O}_M^* \rightarrow 0$ に対応するコホモロジー完全系列より

$$\begin{aligned} 0 = H^1(M, \mathcal{O}_M) &\longrightarrow \text{Pic}(M) \cong H^1(M, \mathcal{O}_M^*) \xrightarrow{\cong} H^2(M, \mathbb{Z}) \\ &\longrightarrow H^2(M, \mathcal{O}_M) = 0 \end{aligned}$$

すると、 $H^2(M, \mathbb{Z})$ の生成元は、 M の因子 D を用いて $c_1([D]) \in H^{1,1}(M)$ と表される。

D は $H_2(M, \mathbb{Z})$ の生成元なので、既約でなければならない。また、 M は射影的なので、適当な正因子 D' の線形系 $|D'|$ により $\mathbb{C}P^n$ に埋め込まれる。ところが、 D はホモロジー生成元なので、 $D' \sim mD$ と表される。よって、(必要なら $D \rightarrow -D$ とすることにより) D は正となり、 $D \cdot D = 1$ が得られる。

同様に、題意の仮定より、 M の標準因子 K は、 $K \sim -mD$ ($m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$) と表される。ここで、Nöther の公式より

$$1 = \chi(\mathcal{O}_M) = \frac{K \cdot K + \chi(M)}{12} \Rightarrow m^2 = K \cdot K = 9 \Rightarrow m = 3$$

となる。また、種数公式より、

$$0 \leq g(D) \leq \pi(D) = \frac{D \cdot D + D \cdot K}{2} + 1 = \frac{3 - m}{2} = 0$$

これは、 D が滑らかでかつ $g(D) = 0$ 、すなわち $\mathbb{C}P^1$ と同型であることを意味する。

次に、

$$\chi(\mathcal{O}_M) = h^{0,0} - h^{0,1} + h^{0,2} = 1$$

および Riemann-Roch の定理より、 $L = [D]$ に対して、

$$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_M) + \frac{D \cdot D - K \cdot D}{2} = 3$$

ここで、小平の消滅定理より

$$h^1(M, \mathcal{O}_M(L)) = h^1(M, \Omega^2(-K + D)) = h^1(M, \Omega^2(4D)) = 0.$$

また、

$$h^2(M, \mathcal{O}_M(L)) = h^0(M, \mathcal{O}_M(K - D)) = h^0(M, \mathcal{O}_M(-4D)) = 0$$

よって,

$$h^0(L) = 3$$

となるので, L に対応する線形系は有理写像

$$i_L : M \rightarrow \mathbb{CP}^2$$

を与える.

次に, 因子 $p = H_{\mathbb{CP}^1}$ は $\mathbb{CP}^1 \cong D$ 上で非常に豊富なので, D 上の線形系 $|p|$ は D 上の異なる 2 点を分離する. ところが, 短完全系列 $0 \rightarrow \mathcal{O}_M \rightarrow \mathcal{O}_M(L) \rightarrow \mathcal{O}_D(L) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(p) \rightarrow 0$ に対するコホモロジー完全系列より

$$H^0(M, \mathcal{O}_M(L)) \longrightarrow H^0(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(p)) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{O}_M) = 0$$

となり, また, $\dim |D| = 2$ なので M の任意の 2 点 p, q に対してそれを通る $|D|$ の因子が存在するので, $|D|$ は M 上の任意の 2 点を分離する. したがって, i_L は単射となる.

よって, 各因子 $D' \in |D|$ の i_L による像は \mathbb{CP}^2 の超平面となり, $\dim |D| = 2$ より, それらは固定点を持たない. したがって, $|D|$ は固定点を持たず, i_L は正則な同型写像となる. Q.E.D.

[【命題 3.357 に戻る】](#)

命題 3.403 の証明. Albanese 写像の一般ファイバーは, 滑らかで既約曲線で, 線織面でないので, その種数は $g \geq 1$ となる. また, S が有理曲線を含むと Ψ によるその像は 1 点となるので, ファイバーに含まれることになり, $g \geq 1$ と矛盾. よって, S は有理曲線を含まない.

次に, S が \mathbb{CP}^1 を底空間とする楕円曲面の構造を持つことをしめす.

Step 1. S は Ψ のファイバー C_λ と横断的で, $K \cdot F = F \cdot F = 0, F \cdot C > 0$ を満たす既約曲線 F を含む.

- $g \geq 2$ の場合: S が $2K$ にホモロガスな有効曲線 G を含むことを示せば, 随伴公式より $G \cdot C_\lambda = 4(g-1) > 0$ なので, G の既約成分 F が題意の条件を満たす.

G を見つけるために、線形系 $|2K+C_\lambda|$ を考える。もし、 $-K \simeq D > 0$ とすると、 $D \cdot C_\lambda = -K \cdot C_\lambda < 0$ となるが、 C_λ は既約で $C_\lambda \cdot C_\lambda = 0$ なので、 $D \cdot C_\lambda \geq 0$ となり、矛盾。よって、 $h^0(-K) = 0$ なので、

$$0 \leq h^2(2K + C_\lambda) = h^0(-K - C_\lambda) \leq h^0(-K) = 0$$

よって、Riemann-Roch より、

$$h^0(2K + C_\lambda) \geq \frac{(2K + C_\lambda) \cdot (K + C_\lambda)}{2} = 3g - 3.$$

一方、 $\deg K_{C_0} = K \cdot C_0 = 2g - 2 > 0$ より、

$$h^0(C_0, \mathcal{O}_{C_0}(2K_{C_0})) = 2\deg(K_{C_0}) - g + 1 = 3g - 3.$$

ここで、 S 上の直線バンドル $[2K + C_\lambda]$ の C_0 への制限に対応する制限写像

$$r_\lambda : H^0(S, \mathcal{O}_S(2K + C_\lambda)) \rightarrow H^0(C_0, \mathcal{O}_{C_0}(2K_{C_0}))$$

が単射でなければ、 $2K + C_\lambda - C_0$ に線形同値な有効因子が存在し、題意が満たされる。一方、 r_λ が単射のときには、 r_λ は同型写像となるので、 $D = P_1 + \cdots + P_{4g-4} \in |2K_{C_0}|$ に対して、 $C_0 \cap D_\lambda = D$ となる曲線 $D_\lambda \in |2K + C_\lambda|$ が一意的に存在。いま、対応 I を

$$I = \{(\lambda, p) \in E \times S \mid p \in D_\lambda\} \subset \times S$$

により定義すると、異なる λ に対応する D_λ が異なるなら、 I の射影 π_2 による像は曲線でなく、かつ I はコンパクトなので、 $\pi_2 : I \rightarrow S$ は全射となる。よって、任意の $Q \in C_0, Q \neq P_i$ に対して、 Q を含む D_λ が存在する。ところが、これは D_λ が $D = D_\lambda \cap C_0$ の次数を超える $4g - 3$ 個の点からなることになり、 $C_0 \subset D_\lambda$ を意味する。よって、 $F = D_\lambda - C_0 \in |2K + C_\lambda - C_0|$ が題意を満たす有効因子となる。

一方、 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ に対して $D_{\lambda_1} = D_{\lambda_2}$ となるとすると、 $C_{\lambda_1} \simeq C_{\lambda_2}$ より、これらのファイバーを含む 1 次元線形系 $D'_\lambda (\lambda \in \mathbb{CP}^1)$ が存在し、 S に \mathbb{CP}^1 を底空間とする楕円曲面の構造 $\pi' : S \rightarrow \mathbb{CP}^1$ を与える。この場合、 E は楕円曲線 $\neq \mathbb{CP}^1$ なので、 $D'_{\lambda'} \cdot C_\lambda > 0$ となる $D'_{\lambda'}$ と C_λ が存在。ところが、 $D'_{\lambda'} \cdot C_\lambda$ は λ に依存しないので、 $0 < D'_{\lambda'} \cdot C_{\lambda_1} = D'_{\lambda'} \cdot D'_{\lambda'_1} = 0$ となり、矛盾。よって、 $D_{\lambda_1} = D_{\lambda_2}$ となることはない。

- $g = 1$ の場合：このとき、 $\Psi : S \rightarrow E$ は楕円曲線となり、一般公式より、 $K \simeq \Psi^*D_E + \sum_i (m_i - 1)B_i$ ($\deg D_E = 0$) となる。したがって、 Ψ が多重ファイバーを持てば、適当な m に対して、 $mK \sim \Psi^*D'_E$ ($\deg D'_E > 0$) となるので、 $h^0(S, \mathcal{O}_S(mK)) = h^0(E, \mathcal{O}_E(D'_E))$ より、 $\kappa(S) = 1$ となる。

一方、 Ψ が多重ファイバーを持たない時には、 $K \sim 0$ となる。 $C_\lambda \cdot H = m$ となる S の曲線 H を勝手に取り、複素曲線 F を

$$F = \bigcup_{\lambda, i} \{p_i^\lambda\}; \quad [mp_i^\lambda] = [H]|_{C_\lambda} \in \text{Pic}(C_\lambda) \quad (3.15.3)$$

により定義すると、自然な写像 $\pi : F \rightarrow E$ は、 E の m^2 重の非分岐被覆となり、その既約成分 F_i は楕円的で、 $K \sim 0$ より $K \cdot F_i = 0$ 、したがって $F_i \cdot F_i = \deg K_{F_i} - F_i \cdot K = 0$ となるので、 F_i が求める曲線を与える。

Step 2. S は、 Ψ のファイバーと横断的に交わり、 $K \cdot F = K \cdot F' = 0, F' \cdot C > 0, F \cdot C > 0$ を満たす共通点を持たない 2 つの既約楕円曲線 F, F' を含む。

整数 n に対し、 $nK_F = [nK + nF]|_F = 0$ なので、短完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(nK + (n-1)F) \rightarrow \mathcal{O}_S(nK + nF) \rightarrow \mathcal{O}_F \rightarrow 0$$

が成り立つ。これより、 $h^2(nK + (n-1)F) = h^0(-(n-1)K - (n-1)F) \leq h^0(-(n-2)K) = 0$ なので、 $h^1(nK + nF) \geq h^1(\mathcal{O}_F) = 1$ が成り立つ。また、 $h^2(nK + nF) = h^0(-(n-1)K - nF) = 0$ 。よって、Riemann-Roch より、

$$h^0(nK + nF) = \frac{n(K+F) \cdot ((n-1)K + nF)}{2} + \chi(\mathcal{O}_S) + h^1(nK + nF) \geq 1.$$

したがって、 $|nK + nF|$ は有効因子 G_n を含む。もし、任意の n に対して G_n が F に比例するとすると、 $G_n \simeq mF, G_{n+1} \simeq m'F$ とするとき、 $K \simeq (m' - m - 1)F$ 。ここで、 $G_{n+1} \dot{C} = (n+1)F \cdot C > nF \cdot C = G_n$ より、 $m' > m$ なので、 $p_g > 0$ となり、仮定に反する。よって、 F と異なる既約曲線 F' を含む G_n が存在し、補題より、 F' は楕円曲

線で $K \cdot F' = 0$ 。さらに、 $G_n \cdot F = 0$ より、 F と F' は交差せず、 $F \cdot C > 0 \Rightarrow F' \cdot C > 0$ より、 F' は Ψ のファイバー C と横断的に交わる。

Step 3. S は有理曲線 $\mathbb{C}P^1$ を底空間とする楕円曲面。

Step 2 と同様の議論で、 $h^2(2K+2F+2F') = h^1(2K+2F+2F') \geq 2$ が言えるので、 $|2K+2F+2F'|$ は有効因子の 1 次元線形系 $\{G_\lambda\}$ を含み、補題より、各 G_λ は交差しない楕円曲線の和となる。これより、 S は楕円曲線の構造 $\pi: S \rightarrow B$ をもつ。 $G_\lambda \cdot F = F \cdot F = 0$ より、 π のファイバーは F と一致しなければ、 F と交差せず、 Ψ のファイバー C と横断的に交わる。したがって、もし B が有理曲線でなければ、 B の正則 1 形式の π による引き戻しにより、 Ψ のファイバーにそった方向でゼロとならない S 上の正則 1 形式が存在し、 $q \geq 2$ となるので、仮定に反する。よって、 B は $\mathbb{C}P^1$ となる。

以上より、 S は楕円曲線 $\pi: S \rightarrow \mathbb{C}P^1$ の構造をもち、 $K_S = \pi^*D'$ 。 Ψ のファイバー C の種数 g が 2 以上の場合、 $K_S \cdot C > 0$ となるので、 $\deg D' > 0$ より、 $\kappa(S) = 1$ 。一方、 $g = 1$ の場合は、上で示したように $K_S \sim 0$ となる。したがって、適当な自然数 m が存在して、 $mK_S = \sum_i \pi^*D_E$ ($\deg D_E = 0$) と表される。 $\mathbb{C}P^1$ 上では、 $D_E \sim 0$ となるので、 $mK_S \simeq 0$ となる。これは、 $\kappa(S) = 0$ を意味する。 Q.E.D.

[【命題 3.403 に戻る】](#)

定理 3.404 の証明.

1. $\kappa = -\infty$ の場合: S は極小とする。まず、 $P_2 = 0$ なので、 $q = 0$ なら、Castelnuovo-Enriques の定理より S は有理曲面となるので、OK。次に、 $q \neq 0$ のとき、 $c_1^2 < 0$ ないし $c_2 < 0$ なら、 S は線織面となるので、OK。

したがって、 $c_1^2, c_2 \geq 0$ の場合を示せばよい。このとき、 $\chi(\mathcal{O}_S) \geq 0$ なので、Riemann-Roch より、 $\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q \geq 0 \Rightarrow q = 1 \Rightarrow K \cdot K = \chi(S) = 0$ 。したがって、上の命題より、この条件下で、 S が線織面でないとすると、 $\kappa = 0$ ないし 1 となり、仮定に反する。よって、 S は線織面か $\mathbb{C}P^2$ に限られる。

2. $\kappa = 0$ の場合 : 仮定より $p_g \leq 1$ で, 補題より $c_1^2 = K \cdot K = 0$. また, S は線織面でないので $c_2 \geq 0$:

$$\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q + p_g = \frac{1}{2}c_2 \geq 0.$$

よって, 許される組み合わせは,

- i) $q = 0, p_g = 0, 1$.
- ii) $q = 1, p_g = 0, 1$
- iii) $q = 2, p_g = 1$.

(1) $q = 0$ の場合.

(1-a) $p_g = 1$: この場合, $\chi(\mathcal{O}_S) = 2$ なので,

$$h^0(2K) + h^0(-K) \geq \frac{2K \cdot 2K - 2K \cdot K}{2} + \chi(\mathcal{O}_S) = 2$$

$\kappa = 0$ のとき $h^0(mK) \leq 1 (m \in \mathbb{N})$ なので, $h^0(-K) \geq 1$. $h^0(K) = p_g = 1$ なので, これは $-K \simeq D_1 \geq 0, K \simeq D_2 \geq 0$ かつ $D_1 + D_2 \simeq 0$ となるので, $K \simeq 0$. よって, S は K3 曲面 ($K = 0, q = 0$).

(1-b) $p_g = 0$: この場合, $\chi(\mathcal{O}_S) = 1$ なので,

$$h^0(3K) + h^0(-2K) \geq \chi(\mathcal{O}_S) = 1$$

いま, $h^0(3K) > 0$ とすると, $\exists \tau \in H^0(S, \mathcal{O}_S(3K))$. また, $P_2(S) = 0$ なら S は有理曲面で $\kappa = -\infty$ となるので, $P_2(S) = 1$ より, $\exists \sigma \in H^0(S, \mathcal{O}_S(2K))$. すると, $\tau^2, \sigma^3 \in H^0(S, \mathcal{O}_S(6K))$ となるが, $h^0(6K) \leq 1$ なので, 適当な $\lambda \in \mathbb{C}^*$ が存在して, $\sigma^3 = \lambda \tau^2$. いま, $\text{ord}_C \sigma = k > 0$ とすると, $\text{ord}_C \tau = 3k/2$ となるので, k は偶数で, τ/σ は $[K]$ の大域的正則切断を与えることになり, $p_g = 0$ と矛盾. よって, $h^0(3K) = 0$. すると, 上の Riemann-Roch 関係式より, $h^0(-2K) > 0$ となり, $P_2(S) = h^0(2K) > 0$ とあわせて, $2K \simeq 0$. したがって, S は Enriques 曲面 ($q = p_g = 0, 2K \simeq 0$).

(2) $q = 2$ の場合 : このとき, $p_g = 1, \chi(\mathcal{O}_S) = 0$.

η_1, η_2 を $H^0(S, \Omega^1)$ の基底として, Albanese 写像

$$\Psi : S \rightarrow \text{Alb}(S) \cong \mathbb{C}^2/\Lambda$$

を考える. いま, $\eta_1 \wedge \eta_2 \equiv 0$ とすると, Ψ の像は曲線 E となり, $\Psi : S \rightarrow E$. E の種数は, $E \subset \mathbb{C}^2/\Lambda$ より $g(E) \geq 2$ となり, Euler 数の公式より, $\chi(\mathcal{O}_S) = 0 \Rightarrow \chi(C) = 0$ となるので, Ψ のファイバー C の種数は 1 となる. よって, 補題より, $\kappa(S) = 1$ となり, 仮定に反する. よって, $\omega = \eta_1 \wedge \eta_2 \neq 0$ が $H^0(S, \mathcal{O}_S(K))$ の生成元となる.

ここで, $D = (\omega) > 0$ とする. もし, $\dim \Psi(D) = 0$ とすると, Ψ は 1 対 1 の双有理正則写像となることが示される. これは, Ψ がブローダウン写像となることを意味し, S が極小という仮定に反する. よって, $\Psi(D)$ は曲線となる. このとき, 補題より, D の既約成分 D_i はすべて楕円曲線となる. $E = \Psi(D_i)$ の種数は, Riemann-Hurwitz より, $1 = g(D_i) \geq g(E) \geq 1$ より, $g(E) = 1$ であつ E は Abel 多様体 $A = \text{Alb}(S)$ の部分群となる (そうでなければ $g(E) \geq 2$). そこで, t_λ を $\lambda \in A$ に対応する A の並進変換として, 写像

$$\mu : A \ni \lambda \mapsto [t_\lambda(E) - E] \in \text{Pic}^0(A)$$

を考えると, その像 $B = \mu(A)$ は 1 次元, ファイバーは E とホモログとなることが示されるので, \tilde{B} を適当な B の分岐被覆として, A は楕円曲面 $\tilde{\mu} : A \rightarrow \tilde{B}$ となる. 対応して, $\tilde{\mu} \circ \Psi : S \rightarrow \tilde{B}$ は D_i をファイバーとする楕円曲面となる. ところが, K は有効因子に線形同値なので, 補題より, $\kappa(S) = 1$ となり, 仮定に反する. よって, $D = 0$, すなわち $K \simeq 0$ で, Ψ は同型写像を与えるので, S は Abel 多様体となる.

(3) $q = 1$ の場合: 超楕円曲面 ($\kappa = 0, q = 1$)

超楕円曲面に対しては, $q = 1$ より, $\mathbb{Z} \subset \pi_1(S)$ なので, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して, S の m 重非分岐 $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ が存在する. もし, $p_g(S) = 1$ とすると, $\chi(\mathcal{O}_S) = 1$ より, $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}}) = m\chi(\mathcal{O}_S) = m$ なので, $p_g(\tilde{S}) \geq m$. 特に $m = 2$ に対して, 写像

$$\pi_* : H^0(\tilde{S}, K_{\tilde{S}}) \rightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S(mK_S)), \quad (\pi_*\sigma)(p) = \sigma(q_1) \otimes \sigma(q_2), \quad \pi^{-1}(p) = \{q_1, q_2\}$$

は単射. したがって, $p_g(\tilde{S}) \geq 2$ より, 適当な点 $q \in \tilde{S}$ に対して, $\sigma_1(q) = 0, \sigma_2(q_i) \neq 0 (\pi(q) = \pi(q_i))$ となる 2 つの $K_{\tilde{S}}$ の断面が存在するので, $P_2(S) \geq 2$ となる. これは, $\kappa(S) = 1$ を意味するので, 仮定に反する. よって, $p_g(S) = 0$, したがって, $c_1^2 = c_2 = 0$.

次に, S の有限被覆が楕円曲線の直積であることを示す. まず, 命題 3.403 より, S は Albanese 写像により既約曲線族 $C_\sigma (\sigma \in E)$ をファイバーとする多重ファイバーを持たない楕円曲面の構造 $\Psi: S \rightarrow E \subset \text{Alb}(S)$ をもつと同時に, 1次元線形系 $G_\lambda \simeq G$ をファイバーとする楕円曲面 $S \rightarrow \mathbb{C}P^1$ の構造をもち, $G \cdot C_\lambda > 0$ となる. いま, \tilde{S} を

$$\tilde{S} = \{(p, q) \in S \times G \mid \Psi(p) = \Psi(q)\}$$

により定義すると, $\pi_1: \tilde{S} \rightarrow S$ は非分岐被覆写像となり, $\pi_2: \tilde{S} \rightarrow G$ は多重ファイバーを持たず, ファイバーが滑らかな楕円曲面の構造を与える. したがって, $\tilde{G} = \{(p, p) \in \tilde{S} \mid p \in G\}$ とおくと,

$$K_{\tilde{S}}|_{\tilde{G}} = \pi_1^* K_S|_{\tilde{G}} = K_S|_G = 0$$

より, $K_{\tilde{S}} = 0$, したがって $p_g(\tilde{S}) = 1$ となる. また, $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}}) = m\chi(\mathcal{O}_S) = 0$ (m は $\tilde{S} \rightarrow S$ の被覆度) より, $q(\tilde{S}) = 2$ を得る. さらに,

$$h^0(K_{\tilde{S}}^{\otimes m}) > 1 \Rightarrow h^0(K_S^{\otimes mn}) > 1 \Rightarrow \kappa(S) = 1$$

より, $\kappa(\tilde{S}) = 0$ となる. したがって, \tilde{S} は Abel 多様体となる.

いま, \tilde{C}_0 を $\tilde{S} \rightarrow E$ の一般的ファイバーとして, 写像 $\mu: \tilde{S} \rightarrow \tilde{C}_0 \times \tilde{G}$ を $\mu_1 = \pi_2, \mu_2(\lambda) = t_\lambda(\tilde{G}) \cap \tilde{C}_0$ により定義すると, μ は同型写像となる. よって, S は直積型の Abel 多様体 $\tilde{S} \cong \tilde{C}_0 \times \tilde{G}$ を不動点を持たない有限群で割った曲面となる.

3. $\kappa = 1$ の場合: 上記の補題より, $K \cdot K = 0$. また, $\kappa = 1$ なら, 適当な $m \in \mathbb{N}$ に対して, $D_\lambda \in |mK|$ となる 1次元線形系 $D_\lambda (\lambda \in \mathbb{C}P^1)$ が存在し, D_λ の既約成分は $g = 0, 1$. $g = 0$ の各既約成分の自己交差数は -2 なので, これらの成分は D_λ の固定成分 F となる. そこで, $D'_\lambda = D_\lambda - F$ とおくと, D'_λ は固定成分を持たず, 各既約成分の自己交差数はゼロ. さらに, $\deg(mK_F) = D_\lambda \cdot F + mF \cdot F$ において, $\deg(K_F) = -2n = F \cdot F$ (n は F の規約成分の数) より,

$D_\lambda \cdot F = 0$ 。よって、

$$D'_\lambda \cdot D'_\lambda = D_\lambda \cdot D_\lambda + F \cdot F \leq D_\lambda \cdot D_\lambda = 0$$

ここで、 D'_λ は固定成分を持たないので、 $D'_\lambda \cdot D'_\lambda \geq 0$ 、よって、 $D'_\lambda \cdot D'_\lambda = 0$ 。さらに、一般的な λ に対して、既約分解は $D'_\lambda = \sum_i D'_{\lambda,i}$ ($D'_{\lambda,i} \neq D'_{\lambda,j}, i \neq j$)。よって、

$$0 = D'_\lambda \cdot D'_\lambda = \sum_{i \neq j} D'_{\lambda,i} \cdot D'_{\lambda,j} = 0 \geq D'_{\lambda,i} \cdot D'_{\lambda,j} \geq 0$$

より、 $D'_{\lambda,i} \cdot D'_{\lambda,j} = 0 (\forall i, j)$ となるので、 D'_λ は基点をもたない。

これより、 S は楕円曲線によるファイバー空間となり、底空間 E を $E = \{D_{\lambda,i}\}_{\lambda,i}$ により定義すると、 S に楕円曲面の構造

$$\begin{array}{ccc} \pi : & S \xrightarrow{\pi'} E \longrightarrow \mathbb{C}P^1 \\ & p \longmapsto D'_{\lambda,i} \ni p \longmapsto \lambda \end{array}$$

が得られる。

Q.E.D.

[【定理 3.404 に戻る】](#)

定理 3.405 の証明. まず、 $P_4(S) = 0$ なら $P_2(S) = 0$ なので、 $q(S) = 0$ の場合は S は有理曲面となるので OK. また、 $q(S) \geq 2$ で線織面でないとする、Enriques-小平の分類定理の $\kappa = -\infty$ の場合の証明の冒頭部分より、 $q = 1$ となり矛盾. よって、 $q(S) = 1$ の場合に題意を示せばよい. このとき、同定理の証明より、 $K \cdot K = \chi(\mathcal{O}_S) = \chi(S) = 0$ で、Albanese 写像 $\Psi : S \rightarrow E$ のファイバーの種数 g が 2 以上の場合は、同証明の議論がそのまま使えるので、次のいずれかが起きる：

1. $\Psi : S \rightarrow E$ は楕円曲線 E 上の楕円曲面となる.
2. S は $\mathbb{C}P^1$ 上の楕円曲面 $\pi : S \rightarrow \mathbb{C}P^1$ となる.

Case 1: 楕円曲面の標準因子に対する一般公式より,

$$K_S = \Psi^*D + \sum_i (m_i - 1)B_i, \quad \deg D = 0.$$

となるので,

$$2K_S = (2\Psi^*D + \sum_i m_i B_i) + \sum_i (m_i - 2)B_i \geq 0$$

よって, $P_2(S) \neq 0 \Rightarrow P_4(S) \neq 0$ となり矛盾.

Case 2: このとき, 一般公式より

$$K_S = -2B + \sum_{i=1}^k (m_i - 1)B_i.$$

仮定より, $\kappa(S) \geq 0$ なので,

$$\sum_{i=1}^k \frac{m_i - 1}{m_i} \geq 2 \quad (\text{等号は } \kappa(S) = 0 \text{ のとき})$$

となる. m_i を $m_1 < m_2 < \dots < m_k$ と並べ直すと, 許される場合は次の4通り:

- i) $k \geq 4$
- ii) $k = 3, m_1 = 2, m_2 = 3, m_3 \geq 6$.
- iii) $k = 3, m_1 = 2, m_3 \geq m_2 \geq 4$
- iv) $k = 3, m_2 \geq m_3 \geq m_1 \geq 3$

まず, i) の場合

$$2K_S = -4B + \sum_{i=1}^4 m_i B_i + \sum_i (m_i - 2)B_i \geq 0$$

より, $P_2(S) > 0$ となり矛盾. 残りの場合も, 同様の評価により, ii) $6K_S \geq 0$, iii) $4K_S \geq 0$, iv) $3K_S \geq 0$ となり矛盾. Q.E.D.

[【定理 3.405 に戻る】](#)

3.16 複素多様体の例

3.16.1 Fundamental manifolds

3.16.1.1 $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

【定義 3.410 (Complex projective space)】 $P_n(\mathbb{C})$ は $(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*$ と同型でコンパクト.

$$P_n(\mathbb{C}) := \{L \subset \mathbb{C}^{n+1} \mid L \text{ は原点を通る } 1 \text{ 次元複素線形部分空間}\}. \quad (3.16.1)$$

□

【公式 3.411 ($\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の Betti 数と Hodge 数)】

1. Betti 数

$$\begin{aligned} b_0 &= b_2 = \cdots = b_{2n} = 1, \\ b_1 &= b_3 = \cdots = b_{2n-1} = 0. \end{aligned}$$

2. Hodge 数

$$\begin{aligned} h^{p,p} &= 1, \quad p = 0, 1, \dots, n, \\ h^{p,q} &= 0, \quad p \neq q. \end{aligned}$$

□

【公式 3.412 (Fubini-Study 計量)】 Fubini-Study 計量

$$ds^2 = \frac{\sum_{j=1}^n dz^j d\bar{z}^j}{(1 + \|z\|^2)} - \frac{(\sum_{j=1}^n \bar{z}^j dz^j)(\sum_{k=1}^n z^k d\bar{z}^k)}{(1 + \|z\|^2)^2} \quad (3.16.2)$$

は、 $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ 上の $U(n+1)$ 対称性をもつ (定数倍を除いて) 唯一の Kähler 計量である。対応する Kähler 形式は

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} \left(\frac{\sum dz^j \wedge d\bar{z}^j}{(1 + \|z\|^2)} - \frac{\sum \bar{z}^j dz^j \wedge \sum z^k d\bar{z}^k}{(1 + \|z\|^2)^2} \right)$$

この Kähler 形式より決まる $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の体積は、

$$\omega^n = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n \frac{(\sum_j dz^j \wedge d\bar{z}^j)^n}{(1 + \|z\|^2)^{n+1}} = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n \frac{(n! \prod_j dz^j \wedge d\bar{z}^j)}{(1 + \|z\|^2)^{n+1}}$$

より、

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) &= n! \int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n} \frac{dx^1 \wedge dy^1 \cdots dx^n \wedge dy^n}{(1 + \|z\|^2)^{n+1}} = n! \text{vol}(S^{2n-1}) \int_0^\infty \frac{r^{2n-1} dr}{(1 + r^2)^{n+1}} \\ &= \frac{(n-1)!}{2} \text{vol}(S^{2n-1}) = \pi^n. \end{aligned}$$

□

【公式 3.413 ($\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ 上の正則直線束)】

1. Chern 類との対応

$$\text{Pic}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \cong H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}) \cong H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}).$$

特に、任意の因子 D は超平面因子 H の整数倍と線形同値: $D \sim mH$.

2. 標準バンドル

$$K_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n} \sim -(n+1)H$$

3. 普遍バンドル

$$L_u \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}(-H).$$

4. 直線バンドルの断面の層 $\mathcal{O}(m) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}(mH)$ のコホモロジー

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{O}(m)) &= {}_{n+m}C_m, \\ h^q(\mathcal{O}(m)) &= 0, \quad 0 < q < n, \\ h^n(\mathcal{O}(m)) &= {}_{-m-1}C_{-n-m-1}. \end{aligned}$$

ただし、 $q < 0$ のとき ${}_pC_q = 0$.

5. 複素接バンドルの特性類 Fubini-Study 計量の Kähler 形式 ω の表式より、Fubini-Study 計量から複素接バンドル $T'(M)$ に誘導されるユニタリ接続の曲率形式は

$$\begin{aligned} \Psi^j_k &\equiv R^j_{kl\bar{m}} dz^l \wedge d\bar{z}^m = (-2i\omega)\delta^j_k + \alpha^j_k, \\ \alpha^j_k &\equiv \frac{dz^j \wedge d\bar{z}^k}{1 + \|z\|^2} - \frac{dz^j \bar{z}^k (\sum_l z^l d\bar{z}^l)}{(1 + \|z\|^2)^2} \end{aligned}$$

となる。ここで,

$$(\alpha^2)^j_k = 2i\omega \wedge \alpha^j_k, \quad \sum \alpha^j_j = -2i\omega$$

を考慮すると,

$$\sum (\Psi^q)^j_j = (n+1)(-2\sqrt{-1}\omega)^q$$

を得る。いま, 全 Chern 類を

$$c = 1 + c_1 + \cdots + c_n = (1 + \xi_1) \cdots (1 + \xi_n)$$

と表すと,

$$P_q \equiv \sum_j \lambda_j^q = \text{Tr} \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \Psi \right)^q = (n+1) \left(\frac{\omega}{\pi} \right)^q,$$

$$\Rightarrow c_q = \lambda_1 \cdots \lambda_q + \cdots (\text{基本対称式}) = {}_{n+1}C_q \left(\frac{\omega}{\pi} \right)^q$$

を得る。よって,

$$c = \left(1 + \frac{\omega}{\pi} \right)^{n+1}$$

をえる。ここで,

$$c_1 = -K_M = (n+1)[H] \Rightarrow [H] = \frac{\omega}{\pi}$$

となる。

さらに, Chern 特性類は

$$\begin{aligned} \text{ch}(c) &= \sum_j e^{\xi_j} = n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} P_k \\ &= (n+1)e^{\omega/\pi} - 1. \end{aligned}$$

また, Tod 多項式は

$$\begin{aligned} \text{td}(c) &= \sum_{k=0}^n \text{td}_k(c_1, \dots, c_k) = \prod_{j=1}^n \frac{\xi_j t}{1 - e^{-\xi_j t}} \Bigg|_{t=1} \\ &= \exp \left[\sum_j \log \frac{\xi_j t}{1 - e^{-\xi_j t}} \right]_{t=1} = \exp \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k \right) \\ &= \exp \left\{ (n+1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\omega/\pi)^k \right\} \\ &= \left(\frac{\omega/\pi}{1 - e^{-\omega/\pi}} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$



3.16.1.2 Complex Lie group

【定義 3.414 (Complex Lie group)】 群 G が同時に複素多様体でかつ群演算 $(a, b) \in G \times G \rightarrow ab^{-1} \ni G$ が正則写像となるとき, G を複素 Lie 群という.

Property: Lie 群 G が複素 Lie 群となるための必要十分条件は, その Lie 代数 \mathcal{L} が複素 Lie 代数となること, すなわち, \mathcal{L} の複素構造 J が存在して J が ad と可換となることである. □

3.16.1.3 Grassmann manifold

【定義 3.415 (Complex Grassmann manifold)】

$$G_{p,q}(\mathbb{C}) := \{L \subset \mathbb{C}^{p+q} \mid L \text{ は原点を通る } p \text{ 次元複素線形部分空間}\}. \quad (3.16.3)$$

z^1, \dots, z^{p+q} を \mathbb{C}^{p+q} の自然な複素座標系, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ を $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_p \leq p+q$ となる自然数の組, $\alpha_{p+1} < \dots < \alpha_{p+q}$ を $(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+q})$ が $(1, \dots, p+q)$ の置換となる数の組として,

$$\mathcal{U}_\alpha = \{L \in G_{p,q}(\mathbb{C}) \mid z^{\alpha_1}, \dots, z^{\alpha_p} \text{ は } L \text{ 上で } 1 \text{ 次独立}\}, \quad (3.16.4)$$

$$\phi_\alpha(L) = (l_j^k) \in M(q, p; \mathbb{C}); \quad z^{\alpha_{p+k}}|_L = \sum_{j=1}^p l_j^k z^{\alpha_j}|_L \quad (k = 1, \dots, q) \quad (3.16.5)$$

とおくと, $\phi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow M(q, p; \mathbb{C})$ は 1 対 1 の全射で, $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)$ の全体は $G_{p,q}(\mathbb{C})$ の複素構造を定める. □

Property

- i) 複素次元が pq でコンパクト.
- ii) $G_{p,q}(\mathbb{C}) \cong U(p+q)/U(p) \times U(q)$.

3.16.1.4 S^n の複素構造

【定理 3.416 (Kirchhoff)】 S^n が概複素構造を持つならば, S^{n+1} は絶対平行化可能である. □

【定理 3.417 (Adams)】 S^{n+1} が絶対平行化可能となるのは, $n+1 = 1, 3, 7$ の場合に限られる. □

【定理 3.418 (Borel and Serre)】 S^n は $n = 2, 6$ 以外の場合には, 概複素構造を持たない. □

【注 3.419】 S^6 が複素構造を持つかどうかは分かっていない. □

3.16.2 Quotient manifolds

【例 3.420 (Complex torus)】

Definition: Γ を $2n$ 次元実ベクトル空間と見た \mathbb{C}^n の一次独立な有限個のベクトルから生成される \mathbb{C}^n の離散部分 Abel 群とするととき, \mathbb{C}^n/Γ .

Property: 複素トーラスはコンパクト複素可換 Lie 群であり, 逆に任意のコンパクト複素 Lie 群は適当な複素トーラスと同型である.

□

【例 3.421 (Hopf surface)】

Definition:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{z \in \mathbb{C}^2 - \{0\}\}/\Gamma; \\ \Gamma &= \{\phi^n \mid \phi(z) = 2z, n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned} \quad (3.16.6)$$

Property: Hopf surface はどのような次元の射影空間にも埋め込めない.

□

【例 3.422 (Hopf manifold)】

Definition: λ を $|\lambda| \neq 1, 0$ を満たす複素数, Γ_λ を $z \mapsto \lambda z$ により定義される \mathbb{C}^{p+1} の離散線形変換群とすると,

$$M_\lambda^p := (\mathbb{C}^{p+1} - \{0\})/\Gamma_\lambda. \quad (3.16.7)$$

Property: $M_\lambda^p \approx S^{2p+1} \times S^1$ (微分同相)

□

【例 3.423 (Calabi-Eckmann manifold)】

Definition: τ_1, τ_2 を実一次独立な 2 つの複素数, Γ をそれらの生成する \mathbb{C} の離散部分群とする. $[z^0, \dots, z^p], [w^0, \dots, w^q]$ を $P_p(\mathbb{C}), P_q(\mathbb{C})$ の同次座標系, U_α, V_λ をそれぞれ $z^\alpha \neq 0, w^\lambda \neq 0$ に対応するアフィン開近傍として, $P_p(\mathbb{C}) \times P_q(\mathbb{C})$ の開被覆 $\{U_\alpha \times V_\lambda\}$ に関する遷移関数 $\psi_{\beta\mu,\alpha\lambda}: (U_\alpha \times V_\lambda) \cap (U_\beta \times V_\mu) \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ を

$$\psi_{\beta\mu,\alpha\lambda} = \frac{1}{2\pi i} (\tau_1 \log z^\beta / z^\alpha + \tau_2 \log w^\mu / w^\lambda) \quad (3.16.8)$$

により定義する. このときこの遷移関数の定める主ファイバーバンドルを

$$M_{\tau_1, \tau_2}^{p,q}(P_p(\mathbb{C}) \times P_q(\mathbb{C}), \mathbb{C}/\Gamma) \quad (3.16.9)$$

と表す.

Property:

- i) $M_{\tau_1, \tau_2}^{p,q} \approx S^{2p+1} \times S^{2q+1}$ (微分同相).
- ii) $M_{\tau_1, \tau_2}^{p,q}$ には $GL(p+1; \mathbb{C}) \times GL(q+1; \mathbb{C})$ が正則かつ推移的に作用する.

□

3.16.3 Kähler manifold

【例 3.424 (\mathbb{C}^n , complex torus)】

Definition:

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^n dz^\alpha d\bar{z}^\alpha, \quad (3.16.10)$$

$$\omega = -i \sum_{\alpha=1}^n dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\alpha. \quad (3.16.11)$$

Property: コンパクトで複素平行化可能な複素多様体の中で Kähler 計量を持つものは複素トーラスに限られる。

□

【例 3.425 ($\mathbb{C}\mathbb{P}^n$: Fubini-Study metric)】

定義: $[Z^0, \dots, Z^n]$ を $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の同次座標系, $\pi: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ を標準射影とすると,

$$\omega = \pi_*(\tilde{\omega}); \quad \tilde{\omega} = i\partial\bar{\partial} \log(Z^0\bar{Z}^0 + \dots + Z^n\bar{Z}^n). \quad (3.16.12)$$

局所座標系 $z^\alpha = Z^\alpha/Z^0$ では

$$ds^2 = \frac{(1 + \sum_{\alpha} z^\alpha \bar{z}^\alpha) \sum_{\alpha} dz^\alpha d\bar{z}^\alpha - (\sum_{\alpha} \bar{z}^\alpha dz^\alpha)(\sum_{\alpha} z^\alpha d\bar{z}^\alpha)}{(1 + \sum_{\alpha} z^\alpha \bar{z}^\alpha)^2}. \quad (3.16.13)$$

特に, $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \cong S^2$ に対して, その単位球面の標準計量を ds_{std}^2 とすると,

$$ds_{\text{std}}^2 = 4ds_{\text{FS}}^2$$

となる. また, $\mathbb{C}\mathbb{P}^k \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ に対して

$$\int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^k} \omega^k = (2\pi)^k \quad (3.16.14)$$

対称性: $P_n(\mathbb{C})$ に推移的に作用する $U(n+1)$ に対して Fubini-Study 計量は不変である. この不変性をもつ $P_n(\mathbb{C})$ の Kähler 計量は, この計量の定数倍に限られる.

曲率: $P_n(\mathbb{C})$ は, 正曲率の Einstein 空間となる:

$$\text{Ricci 形式: } \rho = (2n-1)\omega.$$

□

3.16.4 複素曲面

3.16.4.1 超楕円曲面

【定義 3.426 (超楕円曲面)】 小平次元 $\kappa = 0$ で $q = 1$ となる複素曲面を超楕円曲面 (hyperelliptic surface) という。 □

【定理 3.427 (超楕円曲面のリスト)】 超楕円曲面 S は、楕円曲線 $F \cong \mathbb{C}/\{1, \tau\}$ および $C \cong \mathbb{C}/\{1, \sigma\}$ と、不動点を持たない正則同型写像で生成される有限群 Γ を用いて、 $S = (F \times C)/\Gamma$ と表される。 Γ の作用は F の並進変換群 Γ_F を誘導し、 S に C をファイバーとする楕円曲面 $\Psi: S \rightarrow E = F/\Gamma_F \cong \text{Alb}(S)$ の構造を与える。一方、 Γ が C に誘導する変換群 Γ_C は m 次の不動点を持つ \mathbb{Z}_m に同型な正規部分群を含み、対応する楕円曲面の構造 $\pi: S \rightarrow B = C/\Gamma_C$ は不動点上に多重度 m の多重ファイバーをもつ。

長楕円曲面は、次の7つのクラスに分類される: $(z, w) \in F \times C, T^2(a, b) = \mathbb{C}^2/\{a, b\}$

I_a $\Gamma \cong \mathbb{Z}_2, K_S \neq 0, 2K_S \equiv 0. C, F$ は任意で、変換群は

$$\Gamma = \{1, \phi\} : \phi(z, w) = (z + \tau/2, -w).$$

基底曲線は

$$E = T^2(1, \tau/2), \quad B = T^2(1, \sigma)/\mathbb{Z}_2 \simeq S^2[2, 2, 2, 2]$$

I_b $\Gamma \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, K_S \neq 0, 2K_S \equiv 0. C, F$ は任意で、変換群は

$$\Gamma = \{1, \phi\} \times \{1, \phi'\} :$$

$$\phi(z, w) = (z + \tau/2, -w), \quad \phi'(z, w) = (z + 1/2, w + 1/2)$$

基底曲線は

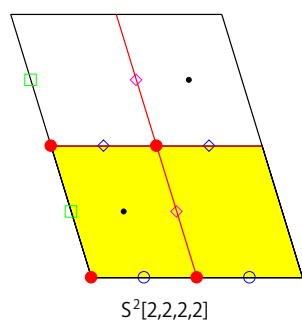
$$E = T^2(1/2, \tau/2), \quad B = T^2(1/2, \sigma)/\mathbb{Z}_2 \simeq S^2[2, 2, 2, 2]$$

II_a $\Gamma \cong \mathbb{Z}_4, K_S, 2K_S, 3K_S \neq 0, 4K_S \equiv 0. C = T^2(1, i), F$ は任意。変換群は

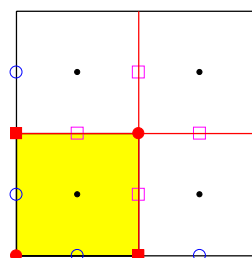
$$\Gamma = \{\phi^k, k = 0, \dots, 3\} : \phi(z, w) = (z + \tau/4, iw).$$

基底曲線は

$$E = T^2(1, \tau/4), \quad B = T^2(1, i)/\mathbb{Z}_4 \simeq S^2[2, 4, 4],$$



$S^2[2,2,2,2]$



$S^2[2,4,4]$

II_b $\Gamma \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $K_S, 2K_S, 3K_S \neq 0, 4K_S \equiv 0$. $C = T^2(1, i)$, F は任意.
変換群は

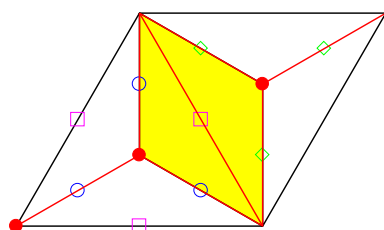
$$\Gamma = \{\phi^k, k = 0, \dots, 3\} \times \{1, \phi'\} :$$

$$\phi(z, w) = (z + \tau/4, iw), \quad \phi'(z, w) = (z + 1/2, w + (1 + i)/2).$$

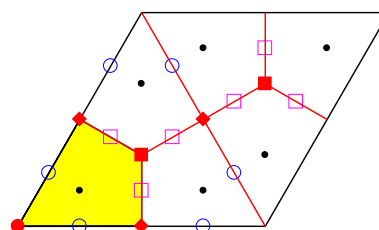
基底曲線は

$$F = T^2(1/2, \tau/4),$$

$$B = T^2((1 + i)/2, (-1 + i)/2)/\mathbb{Z}_4 \simeq T^2(1, i)/\mathbb{Z}_4 \simeq S^2[2, 4, 4]$$



$S^2[3,3,3]$



$S^2[2,3,6]$

III_a $\Gamma \cong \mathbb{Z}_3$, $K_S, 2K_S \neq 0, 3K_S \equiv 0$. F は任意で、 $C = T^2(1, e^{i\pi/3})$. 変換群は、

$$\Gamma = \{\phi^k; k = 0, 1, 2\} : \phi(z, w) = (z + \tau/3, e^{2\pi i/3} w).$$

基底曲線は

$$E = T^2(1, \tau/3). \quad B = T^2(1, e^{i\pi/3})/\mathbb{Z}_3 \simeq S^2[3, 3, 3]$$

III_b $\Gamma \cong \mathbb{Z}_6$, $K_S, \dots, 5K_S \neq 0, 6K_S \equiv 0$. F は任意で, $C = T^2(1, e^{i\pi/3})$.
変換群は

$$\Gamma = \{\phi^k; k = 0, \dots, 5\} : \phi(z, w) = (z + \tau/6, e^{\pi i/3} w).$$

基底曲線は

$$E = T^2(1, \tau/6), \quad B = T^2(1, e^{i\pi/3})/\mathbb{Z}_6 \simeq S^2[2, 3, 6]$$

III_c $\Gamma \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, $K_S, 2K_S \neq 0, 3K_S \equiv 0$. F は任意で, $C = T^2(1, e^{i\pi/3})$.
変換群は

$$\Gamma = \{1, \phi, \phi^2\} \times \{1, \phi', \phi'^2\} : \\ \phi(z, w) = (z + \tau/3, e^{2\pi i/3} w), \quad \phi'(z, w) = (z + 1/3, w + (3 + \sqrt{3}i)/6).$$

基底曲線は

$$E = \mathbb{C}/\{1/3, \tau/3\}, \\ B = T^2((3 + \sqrt{3}i)/6, \sqrt{3}i/3)/\mathbb{Z}_3 \simeq T^2(1, e^{i\pi/3})/\mathbb{Z}_3 \simeq S^2[3, 3, 3]$$

□

3.16.4.2 K3 曲面

【定義 3.428 (K3 曲面)】 $K_S \simeq 0$ (標準直線束が自明), $q = 0$ ($H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$) となる複素曲面を **K3 曲面** という。 [数学事典, GH1978] _____ □

【定理 3.429 (K3 曲面の性質)】

K3 曲面に対して次が成り立つ :

- i) K3 曲面は単連結であり, すべて互いに可微分同相である.
- ii) K3 曲面 S のホモロジーは

$$H_k(S; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, 4 \\ \mathbb{Z}^{22} & k = 2, \\ 0 & k = 1, 3 \end{cases}$$

また, S の交叉形式は

$$2(-E_8) \oplus 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- iii) すべての K3 曲面は Kähler 計量をもつ.
- iv) K3 曲面のモジュライ空間は 20 次元である. ただし, Hausdorff ではない. そのなかで, 代数的 K3 曲面は無数個の連結成分をもつ 19 次元の部分空間となる.

[Barth, W., Peters, C. and Van de Ven, A.: Compact Complex Surfaces (1984)] _____ □

【定理 3.430 ($\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ への埋め込み)】 $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の正規 K3 曲面 S と超平面 H の交差曲線 $C = H \cap S$ の種数は n で, $\iota_S : S \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ から決まる埋め込み $\iota_C : C \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ は, 正規標準曲線となる. これより, S の次数は, $2n - 2$ で与えられる. _____ □

Proof. 証明 1: まず, $K_S = 0$ より,

$$K_C = (K_S + C)|_C = C|_C = (S \cap H)|_C = H|_C$$

より, 埋め込み ι_C は K_C に対応する標準曲線. また, S は正規なので, $\iota_S^* : H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(H)) \rightarrow H^0(S, \mathcal{O}(C))$ は全射で, 完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_S(H) = \mathcal{O}_S(C) \xrightarrow{r} \mathcal{O}_C(H) \longrightarrow 0$$

と, $H^1(S, \mathcal{O}_S) = q(S) = 0$ より, 写像 $H^0(S, \mathcal{O}_S(C)) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(H))$ も全射. よって, $\iota_C^* : H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(H)) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(H))$ は全射なので, C は正規標準曲線. したがって, C の種数を g として, $n = g$ で, $\deg C = \deg K_C = 2g - 2 = 2n - 2$. これより

$$\deg S = \#(S \cap H \cap H) = \#(C \cap H) = \deg C = 2n - 2.$$

証明 2: $K_S = 0$ より $q(S) = 0, p_g(S) = 1$ なので, $\chi(\mathcal{O}_S) = 2$. また, $[C]_S = [H]_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}|_S$ より $[C]$ は正直線束となるので, $K_S = 0$ と小平の消滅定理より, $H^i(S, \mathcal{O}_S(C)) = H^i(S, \Omega^2(C)) = 0 (i = 1, 2)$. したがって, S が正規であることを考慮すると, $\chi(\mathcal{O}_S(C)) = h^0(\mathcal{O}_S(C)) = h^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(H)) = n + 1$. よって, S 上の直線束 $[C]$ に対する Riemann-Roch より

$$n + 1 = \chi(\mathcal{O}_S(C)) = \frac{1}{2}(C \cdot C - C \cdot K_S) + \chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{2}C \cdot C + 2$$

よって,

$$\deg S = \#(C \cap H) = C \cdot C = 2(n - 1).$$

Q.E.D.

【例 3.431 ($\mathbb{C}P^n$ の正規 K3 曲面)】 $n = 2, \dots, 5$ に対して, $\mathbb{C}P^n$ に正規曲面として含まれる K3 曲面は, 以下で尽くされる. また, そのモジュライ自由度はいずれも 19.

1. $\mathbb{C}P^3$ の 4 次の超曲面.
2. $\mathbb{C}P^4$ の 2 次超曲面と 3 次超曲面の完全交差.
3. $\mathbb{C}P^5$ の 3 個の 2 次超曲面の完全交叉.
4. 6 次曲線で分岐する $\mathbb{C}P^2$ の 2 重被覆面.

□

Proof. 1. まず, $S \subset \mathbb{C}P^3$ が正規な K3 曲面とすると, 次数が $2n-2 = 4$ なので, S は 4 次の超曲面となる. 逆に, S を $\mathbb{C}P^3$ の 4 次の超曲面とすると, Lefschetz の超平面定理より, $H^1(S, \mathbb{Z}) \cong H^1(\mathbb{C}P^3, \mathbb{Z}) = 0$ なので, $q(S) = 0$. また, 随伴公式より, $K_S = (K_{\mathbb{C}P^3} + S)|_S = (-4H + 4H)|_S = 0$. よって, S は K3 曲面.

次に, $\mathbb{C}P^3$ の 4 次同次多項式の自由度は, ${}_4H_4 - 1 = {}_7C_4 - 1 = 34$. また, $\mathbb{C}P^3$ の射影変換の自由度は $4^2 - 1 = 15$. よって, S の自由度は, $34 - 15 = 19$.

2. $S \subset \mathbb{C}P^4$ が正規な K3 曲面とする. このとき, $C = H \cap S$ は正直線束で, $K_S = 0$ なので, 小平の消滅定理により, $h^i(\mathcal{O}_S(2C)) = h^i(\Omega_S^2(2C)) = 0$ ($i = 1, 2$). よって, $CC = \deg C = 6$ より,

$$h^0(\mathcal{O}_S(2C)) = \chi(\mathcal{O}_S(2C)) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(2C \cdot 2C - 2C \cdot K_S) = 2 + \frac{1}{2}(4 \cdot 6) = 14.$$

$\mathcal{O}(2H)$ の断面の S への制限により得られる線形空間の次元は $h^0(S, \mathcal{O}(2C)) = 14$ で, $\mathbb{C}P^4$ の 2 次同次式のつくる線形空間の次元は, $h^0(\mathbb{C}P^4, \mathcal{O}(2H)) = {}_5H_2 = {}_6C_2 = 15$. よって, S を含む 2 次超曲面 Q が一つ存在.

次に, $\mathbb{C}P^3$ の 3 次超曲面の線形系に対して同様の計算を行うと,

$$h^0(\mathcal{O}_S(3C)) = \chi(\mathcal{O}_S(3C)) = 29.$$

また, 3 次同次式全体の空間の次元は ${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$. よって, S を含む 3 次曲面の自由度は 5. また, Q を含む 3 次曲面の自由度は,

$h^0(\mathbb{CP}^4, \mathcal{O}(H)) - 1 = 4$. これより, S は Q と適当な 3 次超曲面 Q' の交叉に含まれる. ところが, S の次数は $6 = 2 \times 3$ なので, $Q \cap Q'$ は S と一致する.

次に, S が \mathbb{CP}^n の 2 次超曲面 Q と 3 次超曲面 Q' の完全交叉だとする. このとき, 系列 $S \subset Q \subset \mathbb{CP}^4$ に Lefschetz の超曲面定理を 2 度使うことにより, $H^1(S, \mathbb{C}) \cong H^1(Q, \mathbb{C}) \cong H^1(\mathbb{CP}^4, \mathbb{C}) = 0$ となるので, $q(S) = 0$. また, 標準因子に対する同伴公式を繰り返し使うことにより,

$$K_S = (K_Q + S)|_S = (K_{\mathbb{CP}^4} + Q + Q')|_S = (-5H + 2H + 3H)|_S = 0.$$

よって, S は K3 曲面.

\mathbb{CP}^4 の 2 次超曲面 Q の自由度は 14, 3 次超曲面 Q' の自由度は 34, 各 Q に対して同じ S を与える 3 次超曲面の自由度は 5, \mathbb{CP}^4 の射影変換の自由度は $5^2 - 1 = 24$ なので, S のモジュライ自由度は, $14 + 34 - 5 - 24 = 19$.

3. S を \mathbb{CP}^5 の正規 3K 曲面とする. \mathbb{CP}^5 の 2 次同次式全体の線形空間の次元は ${}_6H_2 = {}_7C_2 = 21$. 一方, $\deg C = 8$ より, $h^0(S, \mathcal{O}_S(2C)) = \chi(\mathcal{O}_S(2C)) = 1/2(4 \times 8) + 2 = 18$. よって, S を含む独立な 3 個の 2 次超曲面 Q_i が存在.

逆に, S を \mathbb{CP}^5 の 3 個の 2 次超曲面 Q_i の完全交叉とする. このとき, \mathbb{CP}^4 の場合と全く同様にして, $H^1(S, \mathbb{C}) = 0 \Rightarrow q(S) = 0$, および

$$\begin{aligned} K_S &= (K_{Q_{12}} + S)|_S = (K_{Q_1} + Q_{12} + Q_{13})|_S \\ &= (K_{\mathbb{CP}^5} + Q_1 + Q_2 + Q_3)|_S = (-6H + 2H + 2H + 2H)|_S = 0. \end{aligned}$$

よって, S は K3 曲面.

自由度は, 2 次同次多項式全体の線形空間が 21 次元, S を与える 3 個の 2 次同次式はその 3 次元部分空間に対応するので, 射影変換の自由度 $6^2 - 1 = 35$ を考慮して, $\dim G(3, 21) - 35 = 3 \times 18 - 35 = 19$.

4. K3 曲面 S から \mathbb{CP}^2 への正規全射正則写像を $\iota: S \rightarrow \mathbb{CP}^2$ とする. このとき, S の次数 $2n - 2 = 2$ は被覆度と一致するので, ι は 2 重被覆.

\mathbb{CP}^2 の任意の直線 l に対して, 一般論より, 曲線 $\iota: \tilde{l} = \iota^{-1}l \rightarrow \mathbb{CP}^2$ は正規標準曲線なので, \tilde{l} の種数は $g = n = 2$. したがって, Riemann-Hurwitz より, $\tilde{l} \rightarrow l$ の分岐点の数 b は $2(2-1) = 2(-2) + b$ より, $b = 6$. したがって, ι は 6 次曲線 B 上で分岐する \mathbb{CP}^2 への 2 重被覆写像となる.

逆に, \mathbb{CP}^2 の 6 次曲線 B が与えられたとする. このとき, 同型写像

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}(3) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}(3) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}(6) \\ \xi \otimes \xi & \longmapsto & \sigma \end{array}$$

において, σ を $(\sigma) = B$ となるように取り, \mathbb{CP}^2 上の直線束 $E = [3H]$ の部分集合として, S を

$$S = \{(p, \xi) \in E \mid \xi \otimes \xi = \sigma(p), p \in \mathbb{CP}^2\}$$

により定義すると, $\pi: S \rightarrow \mathbb{CP}^2$ は, B で分岐する \mathbb{CP}^2 の 2 重被覆を与える. \mathbb{CP}^2 上の有理 2 形式 $\omega = f(w)dw_1 \wedge dw_2$ に対して,

$$\begin{aligned} K_S = (\pi^*\omega) &= \left(f(w(z)) \frac{D(w)}{D(z)} dz_1 \wedge dz_2 \right) \\ &= \pi^* K_{\mathbb{CP}^2} + \tilde{B} \end{aligned}$$

となり ($\tilde{B} = \pi^{-1}B$), $2\tilde{B} = \pi^*(6H)$ なので, $2K_S = \pi^*(-6H+6H) \simeq 0$ となる.

一方, 平面曲線に対する種数公式より, B の種数は $g = (d-1)(d-2)/2 = 10$ なので, 単体分割と Euler 数に対する Euler の公式より,

$$\chi(S) = 2\chi(\mathbb{CP}^2) - \chi(B) = 2 \times 3 - 2(1-10) = 24.$$

したがって, Riemann-Roch より,

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{4} (2K_S) \cdot (2K_S) + \chi(S) \right) = 2 \Rightarrow p_g(S) = q(S) + 1$$

$2K_S \simeq 0$ より, $h^0(S, \mathcal{O}(2mK_S)) = 0$, $h^0(S, \mathcal{O}((2m+1)K_S)) = p_g$ なので, $p_g = 0, 1$. よって, $q = 0, p_g = 1, \kappa = 0$, すなわち S は K3 曲面となる.

$\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ 上の 6 次同次方程式の空間の次元は ${}_3H_6 = {}_8C_6 = 28$ で, $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ の射影変換の自由度は $3^2 - 1 = 8$ なので, このタイプの K3 曲面の自由度は, $28 - 1 - 8 = 19$.

Q.E.D.

【定理 3.432 ($\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ の正規 K3 曲面の自由度)】 $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ に正規曲面として埋め込まれる K3 曲面の集合 Γ_n の次元は n によらず 19. \square

【定義 3.433 (偏極 K3 曲面)】 K3 曲面 X において, $h \in H^2(X, \mathbb{Z})$ を, A を h に双対なホモロジーを代表する因子として, $(h, h) = A \cdot A = 2d (d \in \mathbb{N})$ を満たすように取る. A がネフで豊富, すなわち, 対応する直線束 $[A]$ が正となる時, 組 (X, h) を偏極 K3 曲面 (polarized K3 surface) という.

偏極 K3 曲面 (X, h) に対し, 複素直線 $H^{2,0}(X) \subset H^2(X, \mathbb{C})$ に対応する $\mathbb{P}(H^2(X, \mathbb{C}))$ の点 $P(X, h)$ を周期, 対応 $(X, h) \mapsto \mathbb{P}(H^2(X, \mathbb{C}))$ を周期写像 (period map) という. $H^{2,0}(X)$ の生成元は次の条件を満たす:

$$\int_A \omega = \int_X \omega \wedge h = 0, \quad \int_X \omega \wedge \omega = 0, \quad \int_X \omega \wedge \bar{\omega} > 0.$$

 \square

【定理 3.434 (偏極 K3 曲面のモジュライ空間)】 偏極 K3 曲面 (X, h) のモジュライ空間は, 19 次元の有界対称領域である周期領域 (period domain)

$$\Omega^h = \{P \in \mathbb{P}(H^2(X, \mathbb{C})) \mid (P, h) = (P, P) = 0, (P, \bar{P}) > 0\}$$

で与えられる. \square

3.16.4.3 Enriques 曲面

【定義 3.435 (Enriques 曲面)】 $q(S) = 0, 2K_S = 0 (K_S \neq 0)$ となる曲面を Enriques 曲面という. Enriques 曲面に対しては, 次が成り立つ:

1. $q = p_g = 0 \Rightarrow \chi(\mathcal{O}_S) = 1.$
2. $c_1(S)^2 = 0 \Rightarrow \chi(S) = 12$
3. $h^0(S) = h^4(S) = 1, \quad h^{2,0}(S) = h^{0,2}(S) = 0, \quad h^{1,1}(S) = 10.$
4. $\text{Pic}(S) = H^1(S, \mathcal{O}^*) \cong H^2(S, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{10}.$



【例 3.436 (Enriques 曲面)】 $\mathbb{C}P^3$ の線形変換

$$T : [X_0, X_1, X_2, X_3] \rightarrow [X_0, \sqrt{-1}X_1, -X_2, -\sqrt{-1}X_3]$$

により生成される位数 4 の変換群を $\Gamma = \{\text{id}, T, T^2, T^3\} \cong \mathbb{Z}_4$ とおく. T の不動点集合は

$$[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1]$$

の 4 点, $T^2 : [X_0, X_1, X_2, X_3] \rightarrow [X_0, -X_1, X_2, -X_3]$ の不動点集合は, 2 本の直線

$$X_1 = X_3 = 0, \quad X_0 = X_2 = 0$$

となる.

4 次の Fermat 曲面 $F_4 \subset \mathbb{C}P^3$ は, この変換群 Γ で不変となるが, T の不動点は F_4 に含まれない. しかし, T^2 の不動点は F_4 上に 8 個存在し,

$$\begin{aligned} p_1 &= [1, 0, 1, 0], \quad p_2 = [1, 0, \lambda, 0], \quad p_3 = [1, 0, \lambda^2, 0], \quad p_4 = [1, 0, \lambda^3, 0], \\ p_5 &= [0, 1, 0, 1], \quad p_6 = [0, 1, 0, \lambda], \quad p_7 = [0, 1, 0, \lambda^2], \quad p_8 = [0, 1, 0, \lambda^3] \end{aligned}$$

で与えられる. ここで, $\lambda = \sqrt{-1}$.

F_4 をこれら 8 点でブローアップした複素曲面を \tilde{F}_4 ($\pi : \tilde{F}_4 \rightarrow F_4$), 対応する例外因子を E_1, \dots, E_8 とすると, \tilde{F}_4 は次の性質をもつ:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_4 : \quad q &= 0, \quad p_g = 1, \quad K_{\tilde{F}_4} = E_1 + \dots + E_8, \\ \pi_1 &= 0, \quad b_0 = b_4 = 1, \quad b_1 = b_3 = 0, \quad b_2 = 30, \quad h^{1,1} = 28, \quad \chi(\tilde{F}_4) = 32. \end{aligned}$$

次に, T の \tilde{F}_4 への持ち上げを \tilde{T} として, \tilde{F}_4 の $\Gamma_0 = \{\text{id}, \tilde{T}^2\}$ による商空間を S' とすると, S' は滑らかな複素多様体となり, 商写像 $\iota' : \tilde{F}_4 \rightarrow S'$ は, $E'_i = \iota'(E_i) (i = 1, \dots, 8)$ で分岐する 2 重分岐被覆を与える. S' は次の性質を持つ:

$$\begin{aligned} q &= 0, \quad K_{S'} = 0, \quad p_g = 1, \quad P_m = 1 (m = 2, \dots), \\ \pi_1(S') &= 0, \quad b_0 = b_4 = 1, \quad b_1 = b_3 = 0, \quad b_2 = 22, \quad h^{1,1} = 20, \quad \chi(S') = 24. \end{aligned}$$

最後に, \tilde{T} から誘導される S' の変換 T' は, 不動点を持たないので, $S = S'/\{\text{id}, T'\}$ は, 滑らかな複素曲面となり, $\iota'' : S' \rightarrow S$ は不分岐 2 重

被覆を与える。この曲面は Enriques 曲面と呼ばれ、次の性質を持つ：

$$\begin{aligned} q = 0, \quad p_g = 0, \quad P_m = 1(m : \text{even}), 0(m : \text{odd}), \\ \pi_1(S) = 0, \quad b_0 = b_4 = 1, \quad b_1 = b_3 = 0, \quad b_2 = 10, \quad h^{1,1} = 10, \quad \chi(S') = 12, \\ K_S = C'_2 - C'_0 \quad (C'_k = \iota''_* \iota'_* \pi^* S \cap \{X_k = 0\}), \quad K_S \cdot K_S = 0. \end{aligned}$$

□

【定理 3.437 (K3 曲面との関係)】 任意の Enriques 曲面は、適当な K3 曲面の不動点を持たない対合変換による商空間と同型となる。——□

Proof. S を Enriques 曲面とすると、 $K_S \otimes K_S \simeq \mathcal{O}_S$ となる。その零点を持たない大域的な切断を σ とすると、

$$\tilde{S} = \{(p, \xi) \in K_S \mid p \in S, \xi \otimes \xi = \sigma(p)\}$$

により定義される K_S の超曲面は、 S の非分岐 2 重被覆を与え、 $K_S \neq 0$ なので、 \tilde{S} は連結となる。

このとき、 $H_1(\tilde{S}, \mathbb{C}) = H_1(S, \mathbb{C})$ より、 $q(\tilde{S}) = 0$ 。また、 $K_{\tilde{S}}$ は

$$K_{\tilde{S}} = \pi^* K_S \Leftrightarrow K_{\tilde{S}}((p, \xi)) = K_S(p)$$

で与えられる。したがって、 $K_{\tilde{S}}$ は零点を持たない大域的な切断

$$\sigma((p, \xi)) = \sigma(p)$$

をもち、 $K_{\tilde{S}} \simeq 0$ 、すなわち \tilde{S} は K3 曲面、 $S = \tilde{S}/\mathbb{Z}_2$ となる。 Q.E.D.

【定理 3.438 (楕円曲面としての Enriques 曲面)】 $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ の 9 個の点を固定点とする 3 次曲線の 1 次元線形系を、これら 9 個の点でブローアップすると、 $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ を底空間とする多重ファイバーを持たない楕円曲面が得られる。この楕円曲面に対数変換を施して、2 つのファイバーを多重度 2 の多重ファイバーに変換することによって得られる楕円曲面は Enriques 曲面となる。また、すべての Enriques 曲面はこのようにして得られる。これより、特に、Enriques 曲面のモジュライ自由度は $9 + 9 - 8 = 10$ となる。 □

3.17 Grassmann 多様体

【定義 3.439 (複素 Grassmann 多様体)】 \mathbb{C}^n の複素 k 次元線形部分空間 Λ の全体

$$G(k, n) = \{\Lambda \subset \mathbb{C}^n \mid \dim \Lambda = k\} \quad (3.17.1)$$

は, $GL(k) \backslash M(k, n)$ と同一視できる. $G(k, n)$ にこの同一視により位相を与えたものを **Grassmann 多様体** という.

数列 $I = [i_1, \dots, i_k] (1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n)$ に対応する, $M(k, n) = (v_1 \cdots v_n) (v_i \in \mathbb{C}^k)$ の k 次の小行列 $(v_{i_1} \cdots v_{i_k})$ が単位行列 I_k となる $M(k, n)$ の部分集合に対応する $G(k, n)$ の部分酒豪を U_I とおくと, $U_I \cong \mathbb{C}^{k(n-k)}$ で, U_I は $G(k, n)$ の複素開被覆を与え, 複素構造を定義する. これにより, $G(k, n)$ は $k(n-k)$ 次元の複素多様体となる.

\mathbb{C}^n に適当なエルミート計量を与え, 各 $\Lambda \in G(k, n)$ に対して, \mathbb{C}^n の正規直交基底 e_1, \dots, e_n を $e_1, \dots, e_k \in \Lambda$ と取ると, $G(k, n)$ から $U(n)/(U(k) \times U(n-k))$ への同型対応が得られる. したがって, $G(k, n)$ はコンパクト多様体となる. □

3.17.1 位相構造

【定義 3.440 (Schubert 多様体)】 \mathbb{C}^n の線形部分空間の列 V_1, \dots, V_n は, 条件

$$0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_n = \mathbb{C}^n$$

を満たすとき, \mathbb{C}^n の旗 (flag) という.

旗 $\{V_j\}$ が与えられたとき, 整数列 $n-k \geq a_1 \geq \dots \geq a_k \geq 0$ から条件

$$W_a = \{\Lambda \in G(k, n) \mid \dim(\Lambda \cap V_{n-k+i-a_i}) = i \text{ \& } \dim(\Lambda \cap V_{-k+i-1-a_i}) = i-1\}$$

は開部分多様体となる. また, その閉包

$$\sigma_a \equiv \bar{W}_a = \{\Lambda \in G(k, n) \mid \dim(\Lambda \cap V_{n-k+i-a_i}) \geq i\}$$

は $G(k, n)$ の解析的閉部分多様体となり **Schubert 多様体** ないし **Schubert サイクル** と呼ばれる. □

【命題 3.441 (Schubert サイクルによる CW 分割)】

1. $W_a \cap W_b \neq \emptyset \Leftrightarrow a = b.$
2. $\cup_a W_a = G(k, n)$
3. $\dim W_a = k(n - k) - \sum_i a_i.$
4. $\dot{\sigma}_a = \cup_{b>a} W_b.$ ここで, $b > a \Leftrightarrow b_i \geq a_i \forall i \text{ \& } b \neq a,$

□

Proof.

- 1.& 2. 任意の $\Lambda \in G(k, n)$ に対して, $i = 1, \dots, k$ に対して, $\dim(\Lambda \cap V_j)$ が $i - 1$ から i に変わる $j = n - k + i - a_i$ が一意的に定まる.
3. 任意の i に対して, $a_{i-1} > a_i$ のとき, $a_i \rightarrow a'_i = a_i + 1$ と変化させると, $\Lambda \in W_a$ に対する条件は, $\alpha_i = n - k + i - a_i$ として, $\Lambda \cap V_{\alpha_{i-1}}$ についての条件のみが変化する. 具体的には, その両側を含めて, $\Lambda \cap V_{\alpha_{i-2}} = \Lambda \cap V_{\alpha_{i-1}} = i - 1, \Lambda \cap V_{\alpha_i} = i$ から $\Lambda \cap V_{\alpha_{i-2}} = i - 1, \Lambda \cap V_{\alpha_{i-1}} = \Lambda \cap V_{\alpha_i} = i$ と変化する. 前者の場合, この区間での Λ の自由度の増加は, 2次元空間において1次元部分空間を選ぶ自由度, すなわち1となるが, 後者の場合, $V_{i-2} \rightarrow V_{i-1}$ での次元の増加と Λ の次元の増加が同じなので, Λ の選択の自由度は変化しない. したがって, $a_i \rightarrow a_i + 1$ で W_a の次元は常に1減少. これと, $a_1 = \dots = a_k = 0$ のとき, 条件は $\Lambda \cap V_{n-k} = \{0\}$ となるので, $\dim W_0 = k(n - k)$ が成り立つことを合わせると, 題意の式が得られる.
4. $\Lambda \in G(k, n)$ を $GL(k) \setminus M(k, n)$ の元により表すとき, $\Lambda \in W_a$ となる条件は, 各 i に対して, Λ の第 $n - k + i - a_i$ 列より右の部分のランクが $k - i$, かつ $n - k + i - a_i - 1$ 列より右の部分のランクが $k - i + 1$ となること. この条件の極限 (閉包) に対応する条件は, Λ の第 $n - k + i - a_i$ 列より右の部分のランクが $k - i - 1$ 以下となること. この条件は, $\Lambda \cap V_{n-k+i-a_i} \geq i$ と同等. これは, $\Lambda \in W_b$ とすると, $b > a$ と同等.

Q.E.D.

【定理 3.442 (Grassmann 多様体のホモロジー)】

1. Grassmann 多様体のホモロジー群 $H_{2r}(M(k, n), \mathbb{Z})$ は Schubert サイクル $\sigma_a (\sum_i a_i = k(n-k) - r)$ により生成される自由加群.
2. Schubert サイクルの交叉数は, $\dim \sigma_a + \dim \sigma_b = k(n-k)$ のとき,

$$\#(\sigma_a \cdot \sigma_b) = \begin{cases} 1 & : a_i + b_{k-i+1} = n - k \quad \forall i, \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases} .$$

□

Proof.

1. CW 複体のホモロジーの一般論より, $G(k, n)$ のホモロジー群は, $H_j(\bar{X}^j, \bar{X}^{j-1}; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{\dim \sigma_a = j} \mathbb{Z} \sigma_a$ をチェーン複体とする系列に対するホモロジー群と一致. これと, すべてのサイクルが偶数次元であることを合わせると, 題意の結果が得られる.
2. \mathbb{C}^n の 2 つの旗 V_i, V'_i を $V_i + V'_{n-i} = \mathbb{C}^n$, $V_i \cap V'_{n-i} = 0$ となるように取る. このとき, $\Lambda \in \sigma_a(V) \cap \sigma_b(V')$ となる条件は,

$$\begin{aligned} \dim(\Lambda \cap V_{n-k+i-a_i}) &\geq i, & \dim(\Lambda \cap V'_{n-i+1-b_{k-i+1}}) &\geq k-i+1 \\ \Rightarrow L_i \equiv V_{n-k+i-a_i} \cap V'_{n-i+1-b_{k-i+1}} &\neq 0 & \Leftrightarrow a_i + b_{k-i+1} &\geq n-k \end{aligned}$$

最後の式を i について足すと, $2k(n-k) - \dim \sigma_a - \dim \sigma_b \geq k(n-k) \Leftrightarrow \dim \sigma_a + \dim \sigma_b \leq k(n-k)$. よって, すべての i について等号が成立し, $a_i + b_{k-i+1} = n-k$. さらに, このとき, $\dim L_i = 1$ かつ, 旗に対する条件より, $L_i \cap L_j = 0$ ($i \neq j$) となるので, $\sigma_a \cap \sigma_b$ の元は $\Lambda = \bigoplus_i L_i$ となり一点のみ. 交叉数は旗 V' の連続的な変化に対して不変なので, V, V' の取り方によらず題意が成立.

Q.E.D.

3.17.2 普遍ベクトルバンドルと Chern 類

【定義 3.443 (Grassmann 多様体の普遍ベクトルバンドル)】 Grassmann 多様体 $G(k, n)$ に対して,

$$S = \{(\Lambda, v) \in G(k, n) \times \mathbb{C}^n \mid v \in \Lambda \subset \mathbb{C}^n\}$$

により, 自明なバンドル $G(k, n) \times \mathbb{C}^n$ の部分バンドルとして定義される k 次元複素ベクトルバンドル $S \rightarrow G(k, n)$ を **普遍ベクトルバンドル (universal)** という. また, 短完全系列

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{\iota} G(k, n) \times \mathbb{C}^n \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

により定義される商ベクトルバンドル Q を $G(k, n)$ 上の **普遍商ベクトルバンドル (universal quotient bundle)** という. \square

【定義 3.444 (Grassmann 多様体間の双対変換)】 $G(k, n)$ の点 $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ に対して, \mathbb{C}^n の $n - k$ 次元部分空間

$$\Lambda^* = \{l \in \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}) \mid l(\Lambda) = 0\} \subset (\mathbb{C}^n)^* \cong \mathbb{C}^n \quad (3.17.2)$$

を対応させることにより, 同型対応

$$* : G(k, n) \ni \Lambda \mapsto \Lambda^* \in G(n - k, n)$$

が得られる. この対応により, 普遍バンドルと普遍商バンドルの双対バンドルが互いに移り合う:

$$\begin{array}{ccccccc} Q^* & & S & & S^* & & Q \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G(k, n) & \xrightarrow{*} & G(n - k, n) & & G(k, n) & \xrightarrow{*} & G(n - k, n) \end{array}$$

\square

【定義 3.445 (ベクトルバンドルの退化サイクル)】 $E \rightarrow M$ を階数 k の複素ベクトルバンドル, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ をそのなめらかな大域的断面の列とする. このとき,

$$D_i(\sigma) = \{x \in M \mid \sigma_1(x) \wedge \dots \wedge \sigma_i(x) = 0\}$$

を σ の退化集合という.

断面列 σ は, 各 $i = 0, \dots, k - 1$ に対して, $\sigma_{i+1}(M)$ と同相) が $\sigma_1, \dots, \sigma_i$ の張る E の部分多様体 ($i = 0$ のときは, $M \times 0$) と横断的に交わるとき, 一般的 (generic) であるという. このとき, $x \in D_{i+1} \Leftrightarrow \sigma_{i+1} \in \langle \sigma_1, \dots, \sigma_i \rangle$ or $x \in D_i$ となるので, $D_{i+1} - D_i$ は実次元 $m + m + 2i - (m + 2k) = m - 2(k - i)$ の部分多様体となる ($m = \dim M$). この部分多様体に自然な向きを与えたものを退化サイクル (degeneracy cycle) という. \square

【定理 3.446 (Chern 類に対する Gauss-Bonnet 型の定理)】

1. σ_a を Grassmann 多様体の Schubert サイクル, σ_a^* をその Poincaré 双対サイクルとすると, 普遍ベクトルバンドル $S \rightarrow G(k, n)$ の Chern 類に対して

$$c_r(S) = (-1)^r \underbrace{\sigma_{1 \dots 1}}_r$$

2. 任意の階数 k の複素ベクトルバンドル $E \rightarrow M$ に対して, その一般的な断面列 ϕ_1, \dots, ϕ_k に適当になめらかな大域的断面列を加えて, ϕ_1, \dots, ϕ_n が各点 $x \in M$ で階数 k をもつようにする.

$M(k, n)$ の普遍ベクトルバンドルの双対バンドル S^* のファイバーは, $\Lambda \in M(k, n)$ において, $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ の線形汎関数の全体と一致するので,

$$\iota: M \ni x \mapsto \Lambda = [(\phi_1(x) \cdots \phi_n(x))] \in G(k, n)$$

により, なめらかな写像 ι を定義すると,

$$E_x \ni \sum_i v_i \phi_i(x) \mapsto l_v(u) = \sum_i v_i u_i \in S_{\iota(x)}^*, \quad (u_i = \langle w, \phi_i(x) \rangle) \in \Lambda = \iota(x)$$

は, E_x から $S_{\iota(x)}^*$ への同型対応を曖昧さなく定め, $\iota^*(S^*) = E$ が成り立つ.

3. 2. において, D_i を断面列 ϕ に対する退化サイクル, D_i^* をその双対サイクルとすると, $c_r(E) = D_{k-r+1}^*$ が成り立つ.
4. n 次元コンパクト複素多様体 M に対して,

$$c_n(M) \equiv c_n(T'(M))(M) = \chi(M)$$

□

Proof.

1. σ_a の次元が r のとき, $a \neq [(n-k)_r, (n-k-1)_{k-r}]$ とすると, $\Lambda \in \sigma_a$ に対し,

$$a_{k-r+1} = n - k \Leftrightarrow \dim(\Lambda \cap V_{k-r+1}) \geq k - r + 1 \Leftrightarrow \Lambda \supset V_{k-r+1}$$

よって, $S|_{\sigma_a}$ は自明バンドル $V_{k-r+1} \times \sigma_a$ を部分バンドルとして含むので, 短完全系列

$$0 \longrightarrow V_{k-r+1} \times \sigma_a \longrightarrow S|_{\sigma_a} \longrightarrow \tilde{S}|_{\sigma_a} \longrightarrow 0$$

が得られる. これより,

$$c_r(S)|_{\sigma_a} = (c(V_{k-r+1} \times \sigma_a)c(\tilde{S}|_{\sigma_a}))_r = c_r(\tilde{S})|_{\sigma_a}.$$

ところが, \tilde{S} のランクは $k - (k - r + 1) = r - 1 < r$ なので, 右辺, したがって左辺もゼロ.

次に,

$$\Lambda \in Z_r \equiv \sigma_{(n-k)_{k-r}, (n-k-1)_r} \Leftrightarrow V_{k-r} \subset \Lambda \subset V_{k+1}$$

ここで,

$$Z_k \equiv \sigma_{(n-k-1)_k} = \{\Lambda \in G(k, n) \mid \Lambda \subset V_{k+1}\}$$

とおくと, $Z_k = \text{Proj}(V_{k+1})^* \cong \mathbb{CP}^k$. さらに, 各点 $\Lambda \in Z_k$ 上のファイバーに対して, 短完全系列

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow V_{k+1} \longrightarrow V_{k+1}/\Lambda \cong \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

が成立. ここで, $\text{Proj}(V_{k+1})^*$ の普遍直線バンドルを S' とすると, $x = [\psi] \in \text{Proj}(V_{k+1})^*$ ($\psi \in \text{Hom}(V_{k+1}, \mathbb{C})$) における S' のファイバー $l = \{\phi \in \text{Hom}(V_{k+1}, \mathbb{C}) \mid \phi(\Lambda) = 0\}$ と V_{k+1}/Λ は互いに双対. よって, 上の短完全系列は,

$$0 \longrightarrow S|_{Z_k} \longrightarrow V_{k+1} \times Z_k \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

を誘導する. ここで, Q は \mathbb{CP}^k の超平面直線バンドル. よって,

$$c_r(S)|_{Z_k} = (c(Q)^{-1})_r = ((1 + \omega)^{-1})_r = (-1)^r \omega^r.$$

ここで, ω は $\mathbb{CP}^k \cong \text{Proj}(V_{k+1})^*$ の超平面に双対な 2 形式. よって,

$$c_r(S)(Z_r) = c_r(S|_{Z_k})(Z_r) = (-1)^r \omega^r(Z_r) = (-1)^r \omega^r(\mathbb{CP}^r) = (-1)^r.$$

2. 明らか.

3. \mathbb{C}^n の基底を e_1, \dots, e_n として, 旗 V_i を $V_i = \langle e_{n-i+1}, \dots, e_n \rangle$ により定義すると, E の大域的切断 $\phi = [\phi_1, \dots, \phi_n]$ により定義される写像 $\iota: M \rightarrow G(k, n)$ に対して,

$$\begin{aligned} \iota(x) = \Lambda \in \sigma_{(1)_r} &\Leftrightarrow \dim(\Lambda \cap V_{n-k+r-1}) \geq r \\ &\Leftrightarrow \text{rank}[\phi_1(x) \cdots \phi_{k-r+1}(x)] < k - r + 1 \Leftrightarrow x \in D_{k-r+1} \end{aligned}$$

が成り立つ. すなわち, $\iota^{-1}\sigma_{(1)_r} = D_{k-r+1}$. よって, M の任意の $2r$ サイクル α に対し,

$$c_r(E)(\alpha) = \iota^*(c_r(S^*))(\alpha) = (-1)^r c_r(S)(\iota(\alpha)) = \#(\sigma_{(1)_r} \cdot \iota(\alpha)) = \#(D_{k-r+1} \cdot \alpha)$$

となるので, 題意が成立.

Q.E.D.

3.17.3 埋め込み定理

【定義 3.447 (正則ベクトルバンドルの定めるコンパクト複素多様体から Grassmann 多様体への正則写像)】 M をコンパクト複素多様体, $E \rightarrow M$ を階数 k の正則複素ベクトルバンドル, $V = H^0(M, \mathcal{O}(E))$ を E の大域的切断の作る n 次元線形空間として, 各点 $x \in M$ において $\dim \langle \sigma(x) \mid \sigma \in V \rangle = k$ が成り立つとする.

このとき, M から $G(n-k, n)$ への正則写像が

$$\iota_E: M \ni x \mapsto \Lambda^* = \{\sigma \in V \mid \sigma(x) = 0\} \in G(n-k, V) \stackrel{*}{\cong} G(k, n)$$

により定まる. この写像は, C^∞ のカテゴリーで E の切断の列 $[(\sigma_1, \dots, \sigma_n)] = \Lambda(V$ の基底) を用いて構成した写像 $\iota: M \rightarrow G(k, n)$ と双対同型である. 特に, S を $G(k, n)$ の普遍ベクトルバンドルとして, $E = \iota_E^* S^*$ が成り立つ. □

【定理 3.448 (コンパクト複素多様体の Grassmann 多様体への埋め込み定理)】 M をコンパクト複素多様体, $E \rightarrow M$ を階数 k の正則複素ベクトルバンドル, $L \rightarrow M$ を正の複素直線バンドルとする. このとき, 十分大きい $m \in \mathbb{Z}$ に対して, $\iota_{E \otimes L^m}: M \rightarrow G(k, n)$ は埋め込みとなり, $E = \iota_{E \otimes L^m}^* S^*$ が成り立つ. □

Proof. 小平の埋め込み定理より, 適当な m_0 に対して, 複素直線バンドル $L^{m_0} \rightarrow M$ の切断により M は射影空間 $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$ に埋め込まれ, L^{m_0} は超平面バンドル (H) となる. 以下, $L^{m_0} \rightarrow L$ と置き換えて考える.

埋め込みであることを証明するには, 単射性と微分写像の非退化性を示すことが必要. まず, $M \rightarrow G(n-k, n)$ と見た写像の定義では, 制限写像 $H^0(M, \mathcal{O}(E \otimes L^m)) \rightarrow (E \otimes L^m)_x$ のゼロ核が Λ_x^* なので, 任意の $x \neq y \in M$ に対して, 制限写像

$$H^0(M, \mathcal{O}(E \otimes L^m)) \rightarrow (E \otimes L^m)_x \oplus (E \otimes L^m)_y$$

が全射なら, $\iota_{E \otimes L^m}$ の単射性が言える.

そこで, この全射性を M の次元に関する数学的帰納法で示す. まず, M がゼロ次元の時は明らか. つぎに, $L = (H)$ として, H を $x, y \in M$ を含む $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$ の超平面にとり, $V = M \cap H$ おくと, 小平・中野の消滅定理 B より, 十分大きい m に対して, $H^1(M, \mathcal{O}(E \otimes L^m)) = 0$ が成り立つので, 短完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_M(E \otimes L^{m-1}) \rightarrow \mathcal{O}_M(E \otimes L^m) \rightarrow \mathcal{O}_V(E \otimes L^m) \rightarrow 0$$

に対するコホモロジー完全系列より, $H^0(M, \mathcal{O}(E \otimes L^m)) \rightarrow H^0(V, \mathcal{O}(E \otimes L^m))$ は全射となる. したがって, 帰納法の仮定より, M より 1 次元低い V では, $H^0(V, \mathcal{O}(E \otimes L^m)) \rightarrow (E \otimes L^m)_x \oplus (E \otimes L^m)_y$ は全射なので, M に対しても全射性が言える.

微分の全射性についての証明法は不明 (Griffith-Harris の証明は理解できない). Q.E.D.

【定理 3.449 (Grassmann 多様体の射影空間への埋め込み)】 複素直線バンドル $L = \det S^* \cong \det Q$ の定義する Grassmann 多様体 $G(k, V)$ ($V = \mathbb{C}^n$) から射影空間 $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$ への埋め込みは, Plücker 写像

$$p: G(k, V) \ni \Lambda \mapsto \bigwedge^k \Lambda \in \text{Proj}(\bigwedge^k V) \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^N \quad (N = {}_n C_k - 1)$$

により与えられる. 特に, Schubert サイクル $\sigma_1 = \{\Lambda \in G(k, n) \mid \dim(\Lambda \cap V_{n-k}) \geq 1\}$ は, $p(G(k, n))$ の超曲面断面, すなわち L に対応する因子となる.

さらに, $\Xi \in \bigwedge^{k+1} V^*$ に対して, 内積作用素 $i_\Xi: \bigwedge^k V \rightarrow V^*$ を,

$$\langle i_\Xi \Lambda, v \rangle = \langle \Xi, \Lambda \wedge v \rangle, \quad \forall \Lambda \in \bigwedge^k V, v \in V$$

により定義するとき, $p(G(k, V))$ は, 次の2次式の線形系で定義される $\mathbb{C}P^N$ の部分多様体となる:

$$i_{i_{\Xi}\Lambda}\Lambda = 0, \quad \forall \Xi \in \bigwedge^{k+1} V^*$$

この条件は

$$i_{\Xi}\Lambda \wedge \Lambda = 0, \quad \forall \Xi \in \bigwedge^{k-1} V^*$$

と同等である. □

【系 3.450 ($G(2, 4)$ の $\mathbb{C}P^5$ への埋め込み)】 $G(2, V)$ の $\mathbb{C}P^N$ への埋め込みの像は, 同次座標 $\Lambda \in V \wedge V \cong \mathbb{C}^{N+1}$ を用いて, $\Lambda \wedge \Lambda = 0$ と表される. 特に, $V \cong \mathbb{C}^4$ のとき, $\Lambda = \sum_{i,j} \lambda_{ij} e_i \wedge e_j$ と表すと. $p(G(2, 4))$ は, 次の同次2次式で定義される $\mathbb{C}P^5$ の超曲面となる:

$$\lambda_{12}\lambda_{34} - \lambda_{13}\lambda_{24} + \lambda_{14}\lambda_{23} = 0$$

□

3.18 指数定理

3.18.1 C^∞ 写像に対する Lefschetz の不動点定理

【定義 3.451 (不動点の指数)】 コンパクト多様体 M の滑らかな変換 $f : M \rightarrow M$ の不動点 $p = f(p)$ において, f の Jacobi 行列 $\mathcal{J}_f(p) : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ が条件 $\det(\mathcal{J}_f(p) - I) \neq 0$ を満たす時, p は非退化 (nondegenerate) であるという. さらに, このとき

$$\iota_f(p) = \text{sign } \det(\mathcal{J}_f(p) - I)$$

を f の p における指数という. _____□

【定義 3.452 (変換の Lefschetz 数)】 コンパクト多様体 M の滑らかな変換 $f : M \rightarrow M$ が, 非退化な不動点のみを持つとする. このとき,

$$L(f) \equiv \sum_p (-1)^p \text{tr}(f^*|_{H_{\text{DR}}^p(M)})$$

を Lefschetz 数という. _____□

【定理 3.453 (Lefschetz の不動点定理)】 コンパクト多様体 M の滑らかな変換 f の不動点がすべて非退化で孤立しているとき,

$$\sum_{p=f(p)} \iota_f(p) = \sharp(\Delta \cdot \Gamma_f)_{M \times M} = L(f)$$

が成り立つ. ここで, Δ は $M \times M$ の対角線集合, Γ_f は $M \times M$ における f のグラフである. _____□

Proof. M の de Rahm コホモロジーの基底となる閉 p 形式を $\psi_{\mu,p}$, $M \times M$ の対応する基底を $\psi_{\mu,\nu,p,q} = \pi_1^* \psi_{\mu,p} \wedge \pi_2^* \psi_{\nu,q}$ とするとき, Δ に双対なコホモロジーの元が $\eta_\Delta = \sum_{p,\mu} (-1)^{n-p} \psi_{\mu,\mu,p,n-p}$ と表されることを用いて, $\int_{\Gamma_f} \eta_\Delta$ を計算. Q.E.D.

【定義 3.454 (ベクトル場の指数)】 滑らかな多様体上のベクトル場 v が零点 $p(v_p = 0)$ をもつとする. p の近傍での局所座標系 x_i による成分表示で, $A_{ij} = \partial v_i / \partial x_j(p)$ により定義される行列が正則なとき, p は非退化な零点という. また, このとき, $\det A$ の符号を p でのベクトル場の指数とよび, $\iota_v(p)$ で表す. _____□

【定理 3.455 (Hopf の指数定理)】 コンパクトで滑らかな多様体 M 上のベクトル場 v が非退化で孤立した零点のみをもつとき, 次の関係式が成り立つ:

$$\sum_{v(p)=0} \iota_v(p) = \chi(M).$$

□

Proof. ベクトル場の生成する変換 $\phi_t = \exp(tv)$ に Lefschetz の不動点定理を適用. Q.E.D.

3.18.2 正則写像に対する不動点定理

【定義 3.456 (正則変換に対する Lefschetz 数)】 M をコンパクト複素多様体, f をその正則な変換とするとき,

$$L(f, \mathcal{O}) = \sum_q (-1)^q \text{tr} \left(f^* |_{H_{\mathbb{C}}^{0,q}(M)} \right)$$

を f の正則 Lefschetz 数という. □

【定理 3.457 (正則変換に対する不動点定理)】 M をコンパクトな複素多様体, f を非退化で孤立した不動点のみをもつ正則変換とする. このとき, 各不動点 p_α において, その近傍での正則局所座標系 z^i を用いて, $B_\alpha = (b_{ij}) : b_{ij} = \partial f_i / \partial z_j(p_\alpha)$ とおくと,

$$L(f, \mathcal{O}) = \sum_{f(p_\alpha)=p_\alpha} \frac{1}{\det(I - B_\alpha)}$$

が成り立つ. □

3.18.3 Hirzebruch-Riemann-Roch 公式

【定理 3.458 (Bott の留数公式)】 M をコンパクトな n 次元複素多様体が大域的な正則ベクトル場 v を持つとする. このとき, Θ を正則接バンドル $T'(M)$ の任意の接続形式, P を次数 n の任意の不変多項式, v の零点 p において $A_p = (\partial v_i / \partial z_j(p)) \in \text{GL}(n)$ とおくと,

$$\sum_{v(p)=0} \frac{P(A_p)}{\det(A_p)} = \int_M P \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \Theta \right).$$

□

Proof. 証明の概要 : $T'(M)$ の任意の接続に対して, τ を torsion 形式, Θ を曲率形式, $\omega = v_*$, $E = -Dv + i_v\tau$, \tilde{P} を P の偏極関数 (P を $P(\Theta) = \tilde{P}(\Theta, \dots, \Theta)$ により与える, 対称 n -線形不変関数) として,

$$\Phi = \sum_{i=0}^n \Phi_i; \quad \Phi_i = \omega \wedge (\bar{\partial}\omega)^{n-r-1} \wedge P_r(E, \Theta),$$

$$P_r(E, \Theta) = {}_n C_r \tilde{P}(\underbrace{E, \dots, E}_{n-r}, \underbrace{\Theta, \dots, \Theta}_r)$$

とおくと, $P(\Theta) = -\bar{\partial}\Phi$ が成り立つ. これより, 計量を v の零点 p_α の近傍で平坦にとると,

$$\int_M P\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta\right) = \int_{\partial B_r(p_\alpha)} \Phi = \int_{\partial B_r(p_\alpha)} \omega \wedge (\bar{\partial})^{n-1} P(E)$$

を得る. ここで, $B_r(p)$ は p を中心とする微小半径 r の球体. この最後の表面積分を Bochner-Martinelli の公式を用いて計算すると, 題意の公式を得る. Q.E.D.

【定義 3.459 (Todd 多項式)】 t を複素変数, A を任意の n 次行列, $P^i(A) (i = 1, \dots)$ を i 次の n 変数基本対称式として, t についての Laurent 展開

$$\frac{\det(tA)}{\det(I - e^{-tA})} = \sum_i \text{Td}_i(P^1(A), \dots, P^i(A)) t^i$$

により定義される多項式 $\text{Td}_i(Z^1, \dots, Z^i) (i \leq n)$ を **Todd 多項式** という. Td_i は $i \leq n$ である限り, n の取り方によらない.

具体的表式は

$$\begin{aligned} \text{Td}_1 &= \frac{1}{2}c_1, & \text{Td}_2 &= \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2), & \text{Td}_3 &= \frac{1}{24}c_1c_2, \\ \text{Td}_4 &= \frac{1}{720}(-c_1^4 + 4c_1^2c_2 + 3c_2^2 + c_1c_3 - c_4), \\ \text{Td}_5 &= \frac{1440}{(} - c_1^3c_2 + 3c_1c_2^2 + c_1^2c_3 - c_1c_4), \\ \text{Td}_6 &= \frac{1}{60480}(2c_1^6 - 12c_1^4c_2 + 11c_1^2c_2^2 + 10c_2^3 + 5c_1^3c_3 + 11c_1c_2c_3 \\ &\quad - c_3^2 - 5c_1^2c_4 - 9c_2c_4 - 2c_1c_5 + 2c_6). \end{aligned}$$

□

【定理 3.460 (Hirzebruch-Riemann-Roch の定理)】 n 次元コンパクトケーラー多様体 M に対して,

$$\chi(\mathcal{O}_M) = \text{Td}_n(c_1(M), \dots, c_n(M))$$

が成り立つ. □

Proof. M 上に大域的な正則ベクトル場 v が存在する場合での証明の概要. v の生成する 1 径数変換群を $f_t = \exp(tv)$ とし、 f_t の不動点 p_α 近傍での v の展開を $v = \sum_{ij} a_{ij} z_j \partial / \partial z_i + [2]$, $A_\alpha = (a_{ij})$ とする. このとき, f_t に正則変換に対する不動点定理 3.457 を適用すると,

$$\begin{aligned} L(f_t, \mathcal{O}_M) &= \sum_{f_t(p_\alpha)=p_\alpha} \frac{1}{\det(1 - e^{tA_\alpha})} = \sum_{f_t(p_\alpha)=p_\alpha} \frac{(-1)^n \det((-t)A_\alpha)}{t^n \det(A_\alpha) \det(1 - e^{tA_\alpha})} \\ &= \sum_{f_t(p_\alpha)=p_\alpha} \text{Td}_n(P^1(A_\alpha), \dots, P^n(A_\alpha)) \end{aligned}$$

ここで, $t \rightarrow 0$ で $L(f_t, \mathcal{O}_M) = \chi(\mathcal{O}_M)$. これと, 右辺の t 展開に Bott の留数公式 3.458 を適用すると, 題意の公式を得る. Q.E.D.

【系 3.461】

1. コンパクトリーマン面 S に対して,

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{2}c_1(S) \Leftrightarrow \frac{1}{2}b_1 = g.$$

2. (Nöther の公式) コンパクトケーラー複素曲面 M に対して,

$$\chi(\mathcal{O}_M) = \frac{1}{12} (c_1(M)^2 + c_2(M)).$$

□

3.19 Twistor

3.19.1 Basic definitions

3.19.1.1 Spinor description

【定義 3.462 (Twistor equation)】

1. $(1, 0)$ 型スピノール ω^A に対するスピノール方程式

$$\nabla_{A'}^{(A} \omega^{B)} = 0 \quad (3.19.1)$$

をツイスター方程式, その解を基本ツイスターないし $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 型ツイスターといい, シンボリックに Z^α, W^β のように表す. また, 基本ツイスター全体の作る線形空間をツイスター空間といい, \mathbb{T} と表す.

2. ツイスター空間 \mathbb{T} の双対空間を共役ツイスター空間といい \mathbb{T}^* と表す. また, 共役ツイスター空間の元を基本共役ツイスターないし $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 型ツイスターといい, シンボリックに Z_α, W_β のように表す.

□

【命題 3.463 (Twistor equation の整合性)】

1. $\nabla_{AA'}$ が一般に電磁場が存在する曲がった時空上の共変微分とすると, ツイスター方程式より

$$\Psi_{ABCD} \omega^D = -ie\phi_{(AB}\omega_{C)} \quad (3.19.2)$$

が得られる. 特に, 電磁場が存在しないとき, ゼロ以外のツイスターが存在するためには, 時空が共形的に平坦であることが必要である.

2. ツイスター方程式は共形変換

$$\epsilon_{AB} \rightarrow \hat{\epsilon}_{AB} = \Omega \epsilon_{AB}, \quad (3.19.3)$$

$$\omega^A \rightarrow \hat{\omega}^A = \omega^A \quad (3.19.4)$$

に対して

$$\hat{\nabla}_{A'}^{(A} \hat{\omega}^{B)} \equiv \Omega^{-1} \nabla_{A'}^{(A} \omega^{B)} = 0 \quad (3.19.5)$$

と変換する. したがって, 共形不変である.

□

【命題 3.464】 任意の基本ツイスター ω^A に対して, $k^a = \omega^A \bar{\omega}^{A'}$ は null conformal Killing ベクトルとなる. 逆に, 任意の null conformal Killing ベクトル k^a は適当なツイスター ω^A を用いて $k^a = \omega^A \bar{\omega}^{A'}$ と表される. □

【命題 3.465 (Minkowski 時空の twistor)】

1. Minkowski 時空において, ツイスター方程式は次の 2 式に分解される:

$$\nabla_{BA'} \omega^C = -i \epsilon_B^C \pi_{A'}, \quad (3.19.6)$$

$$\nabla_{AA'} \pi_{B'} = 0. \quad (3.19.7)$$

これより, 基本ツイスターは 4 個の複素数 $(\omega^A(0), \pi_{A'})$ を用いて

$$\omega^A = \omega^A(0) - ix^{AA'} \pi_{A'} \quad (3.19.8)$$

と表され, 複素線形空間として同型 $\mathbb{T}^\alpha \cong \mathbb{C}^4$ が成り立つ.

2. $(\omega^A(0), \pi_{A'})$ は Lorentz 変換に対しては $(1, 0)$ 型および $(0, 1)$ 型スピノールの組として変換し, 並進 $x^{AA'} \rightarrow x^{AA'} + a^{AA'}$ に対しては,

$$\omega^A(0) \rightarrow \omega^A(0) + ia^{AA'} \pi_{A'}, \quad (3.19.9)$$

$$\pi_{A'} \rightarrow \pi_{A'} \quad (3.19.10)$$

と変換する.

3. 2 つの基本ツイスター $Z^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'})$, $W^\alpha = (\lambda^A, \sigma_{A'})$ に対して,

$$\Phi(Z, W) = Z^\alpha \bar{W}_\alpha = \omega^A \bar{\sigma}_A + \pi_{A'} \bar{\lambda}^{A'} \quad (3.19.11)$$

とおくと, 右辺は x が実 Minkowski 時空の点であるとき x によらない一定の値を取り, ツイスター空間 \mathbb{T} に符号が $(+ + - -)$ のエルミート内積を定義する. この内積はツイスター空間から共役ツイスター空間への反線形写像

$$\mathbb{T} \ni (\omega^A, \pi_{A'}) \rightarrow (\bar{\pi}_A, \bar{\omega}^{A'}) \in \mathbb{T}^* \quad (3.19.12)$$

を与える.

□

【定義 3.466 (Helicity)】

1. 基本ツイスター $Z^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'})$ に対して,

$$s = \frac{1}{2} Z^\alpha \bar{Z}_\alpha \quad (3.19.13)$$

で定義される s をヘリシティという.

2. ヘリシティがゼロ, 正, 負の基本ツイスターからなるツイスター空間の部分集合をそれぞれ $\mathbb{T}^0, \mathbb{T}^+, \mathbb{T}^-$ と表す.

□

【命題 3.467 (運動量, 角運動量との関係)】

1. ヘリシティ s のツイスター ω^A に対して, 対応する null ベクトル $k^a = \omega^A \bar{\omega}^{A'}$ は

$$\epsilon^{abcd} \nabla_a k_b k_c = 2s k_d, \quad (3.19.14)$$

$$\nabla_k k^a = i(\omega^A \bar{\pi}_A - \bar{\omega}^{A'} \pi_{A'}) k^a, \quad (3.19.15)$$

$$\nabla_{(a} k_{b)} = \frac{i}{2} (\omega^A \bar{\pi}_A - \bar{\omega}^{A'} \pi_{A'}) g_{ab} \quad (3.19.16)$$

を満たす. 特に, k^a は shear-free null congruence を与える.

2. 質量ゼロの粒子の4元運動量を P^a , 角運動量を $M^{ab} = x^a P^b - x^b P^a$ とすると, それらは適当なツイスター $Z^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'})$ を用いて,

$$P_a = \bar{\pi}_A \pi_{A'}, \quad M^{ab} = i \left(\omega^{(A} \bar{\pi}^{B)} \epsilon^{A'B'} - \bar{\omega}^{(A'} \pi^{B')} \epsilon^{AB} \right) \quad (3.19.17)$$

と表される. さらに, Z^α のヘリシティを s とすると

$$\frac{1}{2} \epsilon^{abcd} P_b M^{cd} = s P^a \quad (3.19.18)$$

が成り立つ. (P^a, M^{ab}) は Z^α を全体としての位相 ($Z^\alpha \rightarrow e^{i\theta} Z^\alpha$) を除いて一意的に決定する.

□

【命題 3.468】

1. 複素 Minkowski 時空 \mathbb{CM}^4 上で, 各基本ツイスター $Z^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'})$ に対して, $\pi_{A'} \neq 0$ のとき, $\omega^A(x) = 0$ となる点 $x \in \mathbb{CM}^4$ の全体は接ベクトルがすべて複素 null ベクトルからなる 2 次元複素平面となる. これは α 平面と呼ばれ, Z^α の成分の比 $[\omega^A(0), \pi_{A'}]$ のみで決まる.
2. α 平面と実 Minkowski 時空 \mathbb{M}^4 の交わりは, ヘリシティ $s = 0$, すなわち $Z^\alpha \in \mathbb{T}^0$ の時かつその時のみ空でなく, $k^a = \bar{\pi}^A \pi_{A'}$ に平行な null line となる.
3. 逆に複素 Minkowski 時空 \mathbb{CM}^4 上の点 x に対して, $\omega^A(x) = 0$ を満たす基本ツイスターの全体は \mathbb{T} の 2 次元複素線形部分空間 L_x となる.
4. \mathbb{T} の任意の 2 次元複素線形部分空間 L は $L = L_x$ により一意的に複素 Minkowski 時空 \mathbb{CM}^4 の点 x を定める. x が実 Minkowski 時空の点となるための必要十分条件は, L が \mathbb{T}^0 に含まれることである.

□

【定義 3.469】 ツイスター空間を 4 次元複素線形空間と見たとき, 対応する射影空間を射影ツイスター空間といい, \mathbb{PT} と表す. ツイスター空間のヘリシティによる分割に対応して射影ツイスター空間は 3 つの部分集合 $\mathbb{PT}^+, \mathbb{PT}^0, \mathbb{PT}^-$ に分割される. □

【命題 3.470】 射影ツイスター空間 \mathbb{PT} の複素射影直線の全体は, Grassmann 多様体 $M_{2,2}(\mathbb{C})$ と同相な 4 次元コンパクト複素多様体 \mathbb{C}^4 となるが, それから無限遠点 $[\omega^A(0), \pi_{A'}] = [\omega^A(0), 0, 0]$ を除いた部分集合は, 自然に複素 Minkowski 時空 \mathbb{CM}^4 と同一視できる. この同一視のもとで, \mathbb{PT}^0 に含まれる複素射影直線の全体は実 Minkowski 時空 \mathbb{M}^4 の 1 点コンパクト化を与える. □

3.19.1.2 Twistor algebra

【定義 3.471】

1. ツイスター空間とその双対空間のテンソル積, $(\otimes^p \mathbb{T}) \otimes (\otimes^q \mathbb{T}^*)$ の元を $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ -型ツイスターという. $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ -型ツイスターは一般に, 2^{p+q} 個の混合スピノール場の組

$$T^{A_1 \dots A_p}_{B_1 \dots B_q}, T_{A'_1}{}^{A_2 \dots A_p}_{B_1 \dots B_q}, \dots, T_{A'_1 \dots A'_p}{}^{B'_1 \dots B'_q} \quad (3.19.19)$$

で表され, Minkowski 時空ではそれぞれ時空座標 x について上付き添え字の数と同じ次式の式で表される. これらのスピノール場は, 時空の並進に対して, そのツイスター空間への表現のテンソル積表現に従って変換する.

2. $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ -型ツイスターを表現する場の中で $T^{A_1 \dots A_p B'_1 \dots B'_q}$ という成分表示をもつものを **primary** スピノール成分という.

2. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ -型ツイスター

$$E^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} \theta^A{}_B & \xi^{AB'} \\ \eta_{A'B} & \zeta_{A'B'} \end{pmatrix} \quad (3.19.20)$$

が条件

$$\bar{E}_\beta{}^\alpha = E^\alpha{}_\beta : \xi^{AB'} = \bar{\xi}^{AB'}, \eta_{AB'} = \bar{\eta}_{AB'}, \theta^A{}_B = \bar{\zeta}_B{}^A \quad (3.19.21)$$

を満たすとき, **Hermitian** ツイスターという.

3. $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ -型ツイスター

$$S^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \sigma^{AB} & \rho^A{}_{B'} \\ \tau_{A'}{}^B & \kappa_{A'B'} \end{pmatrix} \quad (3.19.22)$$

が条件

$$\bar{S}_{\beta\alpha} = \pm S^{\alpha\beta} : \sigma^{AB} = \pm \sigma^{BA}, \rho^A{}_{B'} = \pm \tau_{B'}{}^A, \kappa_{A'B'} = \pm \kappa_{B'A'} \quad (3.19.23)$$

を満たすとき, **対称** ツイスター (+), **反対称** ツイスター (-) という.

4. $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ -型ツイスターが

$$T^{\alpha\cdots\delta}_{\rho\cdots\tau} = T^{(\alpha\cdots\delta)}_{(\rho\cdots\tau)}, \quad (3.19.24)$$

$$T^{\alpha\beta\cdots\delta}_{\alpha\sigma\cdots\tau} \quad (3.19.25)$$

を満たすとき, **trace-free symmetric** ツイスターという.

□

【命題 3.472】

1. 対称 $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ -ツイスター

$$S^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \sigma^{AB} & \rho^{A_{B'}} \\ \tau_{A'}^B & \kappa_{A'B'} \end{pmatrix} \quad (3.19.26)$$

の各成分は次の方程式を満たす:

$$\nabla_{CC'}\sigma^{AB} = -i\epsilon_C^A\tau_{C'}^B - i\epsilon_C^B\rho_{C'}^A, \quad (3.19.27)$$

$$\nabla_{CC'}\rho_{B'}^A = -i\epsilon_C^A\kappa_{C'B'}, \quad (3.19.28)$$

$$\nabla_{CC'}\tau_{A'}^B = -i\epsilon_C^B\kappa_{A'C'}, \quad (3.19.29)$$

$$\nabla_{CC'}\kappa_{A'B'} = 0. \quad (3.19.30)$$

特に, primary part σ^{AB} は方程式

$$\nabla_{C'}^{(C}\sigma^{AB)} = 0 \quad (3.19.31)$$

を満たし, その任意の解は $S^{\alpha\beta}$ を一意的に決定する.

2. $S^{\alpha\beta}$ の primary part σ^{AB} を用いて

$$Q^{ab} = i\sigma^{AB}\epsilon^{A'B'} - i\bar{\sigma}^{A'B'}\epsilon^{AB} \quad (3.19.32)$$

とおくと, Q^{ab} は Killing-Yano テンソル, すなわち

$$\nabla_{(a}Q_{b)c} = 0 \quad (3.19.33)$$

を満たす. さらに

$$\xi^a = \frac{1}{3}\nabla_b Q^{ba} = -\rho^{AB'} - \bar{\rho}^{AB'} \quad (3.19.34)$$

は Killing ベクトルとなる.

□

【定義 3.473 (Killing spinor)】 (p, q) 型スピノール場 $\xi^{A\cdots DR'\cdots T'}$ が方程式

$$\nabla_{(U'}^{(E} \xi_{R'\cdots T')}^{A\cdots D)} = 0 \quad (3.19.35)$$

を満たすとき, **Killing スピノール** という. □

【命題 3.474】

1. Trace-free symmetric ツイスターの primary part $T^{A\cdots DR'\cdots T'} = \lambda^{A\cdots DR'\cdots T'}$ は Killing スピノールとなり, trace-free symmetric ツイスターのすべての成分を一意的に決定する.
2. $\xi^{A\cdots DR'\cdots T'}$ を Killing スピノール, $p^a = \pi^A \bar{\pi}^{A'}$ を質量ゼロ粒子の運動量とすると,

$$\nabla_p \pi^A = 0 \quad (3.19.36)$$

のとき,

$$Q = \xi^{A\cdots DR'\cdots T'} \pi_A \cdots \pi_D \bar{\pi}_{R'} \cdots \bar{\pi}_{T'} \quad (3.19.37)$$

は運動の保存量となる.

□

【命題 3.475】

1. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 型エルミートツイスター

$$E^\alpha{}_\beta = \begin{pmatrix} \theta^A{}_B & \xi^{AB'} \\ \eta_{A'B} & \zeta_{A'B'} \end{pmatrix} \quad (3.19.38)$$

の各成分は方程式

$$\nabla_{CC'} \xi^{AB'} = i\epsilon_{C'}{}^{B'} \theta^A{}_C - i\epsilon_C{}^A \zeta_{C'}{}^{B'}, \quad (3.19.39)$$

$$\nabla_{CC'} \theta^A{}_B = -i\epsilon_C{}^A \eta_{C'}{}^B, \quad (3.19.40)$$

$$\nabla_{CC'} \zeta_{A'}{}^{B'} = i\epsilon_{C'}{}^{B'} \eta_{A'}{}^C, \quad (3.19.41)$$

$$\nabla_{CC'} \eta_{A'}{}^B = 0 \quad (3.19.42)$$

を満たす.

2. E^α_β の primary part $\xi^{AB'}$ は方程式

$$\nabla_{(B'}^{(B} \xi^{A)} = 0 \quad (3.19.43)$$

を満たし, conformal Killing vector と 1 対 1 に対応する.

□

【命題 3.476 (角運動量ツイスター)】 運動量 $p^a = p^{AA'}$ および角運動量 M^{ab} のスピノール表示

$$M^{ab} = \bar{\mu}^{AB} \epsilon^{A'B'} + \mu^{A'B'} \epsilon^{AB} \quad (3.19.44)$$

を用いて,

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & p_A{}^{B'} \\ p^{A'}{}_B & 2i\mu^{A'B'} \end{pmatrix} \quad (3.19.45)$$

とおくと, $A_{\alpha\beta}$ は対称ツイスターとなる. _____ □

3.19.1.3 Vector description

【命題 3.477 (Minkowski 時空のコンパクト化)】

1. $\hat{x} = (x^{\alpha\beta})$ ($\alpha, \beta = 0, \dots, 3$) を反対称テンソルとして,

$$\text{CM}^\sharp := \{[x^{\alpha\beta}] \in \mathbb{CP}^5 \mid x^{[\alpha\beta} x^{\gamma\delta]} = 0\} \quad (3.19.46)$$

により, \mathbb{CP}^5 の 4 次元コンパクト超曲面 CM^\sharp を定義すると,

$$ds^2 = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} dx^{\alpha\beta} dx^{\gamma\delta} \quad (3.19.47)$$

は CM^\sharp に共形的に平坦な共形構造を与える.

2. $\rho \in GL(4, \mathbb{C})$ を用いて, \mathbb{CP}^5 のアフィン変換を

$$\hat{x} \mapsto \rho \hat{x} \rho^T \quad (3.19.48)$$

により定義すると, この変換は CM^\sharp に共形変換を誘導する.

3. \mathbb{CM}^\sharp の開集合 $x^{23} \neq 0$ を

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 & s & -w & \tilde{z} \\ -s & 0 & -z & \tilde{w} \\ w & z & 0 & 1 \\ -\tilde{z} & -\tilde{w} & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.19.49)$$

($s = z\tilde{z} - w\tilde{w}$) と座標付けすると, 計量 ds^2 は

$$ds^2 = \mu(dzd\tilde{z} - dwd\tilde{w}) \quad (3.19.50)$$

と表され, 複素 Minkowski 時空 \mathbb{CM}^4 と共形となる.

□

【定義 3.478】 \mathbb{CM}^\sharp の null 2次元面は, その 1次独立な接ベクトル L, M から作られる bivector $L \wedge M$ が自己共役のとき, α 平面という. また, $L \wedge M$ が反自己共役のとき, β 平面という. □

【命題 3.479】 \mathbb{CM}^4 の双 null 座標を $(z, \tilde{z}, w, \tilde{w})$ とおく :

$$ds^2 = 2(dzd\tilde{z} - dwd\tilde{w}). \quad (3.19.51)$$

1. \mathbb{CM}^4 の自己双対 2次形式の基底は

$$dz \wedge dw, d\tilde{z} \wedge d\tilde{w}, dz \wedge d\tilde{z} - dw \wedge d\tilde{w} \quad (3.19.52)$$

で与えられる. 特に, 自己双対 null 2次形式 $\pi^{ab}\pi_{ab} = 0$ は

$$\zeta_0^2 d\tilde{z} \wedge d\tilde{w} + \zeta_0 \zeta_1 (-dz \wedge d\tilde{z} + dw \wedge d\tilde{w}) - \zeta_1^2 dz \wedge dw \quad (3.19.53)$$

と表される.

2. \mathbb{CM}^4 の反自己双対 2次形式の基底は

$$dz \wedge d\tilde{w}, d\tilde{z} \wedge dw, dz \wedge d\tilde{z} + dw \wedge d\tilde{w} \quad (3.19.54)$$

で与えられる. 特に, 自己双対 null 2次形式 $\pi^{ab}\pi_{ab} = 0$ は

$$\zeta_0'^2 dz \wedge d\tilde{w} + \zeta_0' \zeta_1' (dz \wedge d\tilde{z} + dw \wedge d\tilde{w}) - \zeta_1'^2 d\tilde{z} \wedge dw \quad (3.19.55)$$

と表される.

□

【命題 3.480】 CM^\sharp の同次座標 $\hat{x} = (x^{\alpha\beta})$ を用いると, 各 α 平面 Z は, $[Z^\alpha] \in \mathbb{CP}^3$ を用いて

$$x^{[\alpha\beta} Z^{\gamma]} = 0 \quad (3.19.56)$$

と表される. 特に, $(Z^2, Z^3) \neq 0$ に対して, この方程式は double null 座標を用いて,

$$Z^2 \tilde{z} + Z^3 w = Z^0, \quad Z^2 \tilde{w} + Z^3 z = Z^1 \quad (3.19.57)$$

と表され, 接ベクトルは

$$L = Z^2 \partial_z - Z^3 \partial_{\tilde{w}}, \quad M = -Z^2 \partial_w + Z^3 \partial_{\tilde{z}} \quad (3.19.58)$$

で与えられる. □

【定義 3.481】

1. CM の α 平面の全体を (射影) ツイスター空間といい, PT と表す. PT は \mathbb{CP}^3 の開集合

$$\mathbb{CP}^3 - \mathbb{CP}^1 = \{[Z^\alpha] \in \mathbb{CP}^3 \mid (Z^2, Z^3) \neq 0\}$$

となる.

2. CM^\sharp の開集合 U に対して, U と交わる α 平面の全体を U のツイスター空間といい, $\mathcal{P}(U)$ と表す:

$$\mathcal{P}(U) = \{Z \in \text{PT} \mid Z \cap U \neq \emptyset\} \quad (3.19.59)$$

3. CM^\sharp の開集合 U に対して, $U \times \mathcal{P}(U)$ の部分集合

$$\mathcal{F} = \{(x, Z) \in U \times \mathcal{P}(U) \mid x \in Z\} \quad (3.19.60)$$

を対応空間という. \mathcal{F} から U および \mathcal{P} への全射が存在する:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} & \\ q \swarrow & & \searrow p \\ U & & \mathcal{P} \end{array} \quad (3.19.61)$$

目次へ

射影 q に対するファイバーは \mathbb{CP}^1 , 射影 p に対するファイバーは α 平面と U の交わりとなる. したがって, \mathcal{F} は直積 $U \times \mathbb{CP}^1$ に同相で, その部分集合 $U \times \mathbb{C}$ 上では p, q は具体的に次のように表される:

$$p : (w, z, \tilde{w}, \tilde{z}, \zeta) \mapsto (\lambda, \mu, \zeta) = (\zeta w + \tilde{z}, \zeta z + \tilde{w}, \zeta) \quad (3.19.62)$$

$$q : (w, z, \tilde{w}, \tilde{z}, \zeta) \mapsto (w, z, \tilde{w}, \tilde{z}) \quad (3.19.63)$$

□

3.20 解析空間

3.20.1 解析的部分集合

【定義 3.482 (複素部分多様体)】 n 次元複素多様体 M の部分集合 N に対し、各点 $x \in N$ の適当な近傍 U_x において、階数が k の正則な関数の組 f_1, \dots, f_k で、 $N \cap U_x$ が f_1, \dots, f_k の共通零点となるものが存在するとき、 N を M の複素部分多様体という。 N はそれ自体で $n - k$ 次元の複素多様体となる。 □

【定義 3.483 (解析的部分集合)】

1. n 次元複素多様体 M の部分集合 V は、その各点 x に対して近傍 U_x と U_x 上の適当な正則関数の組 $\{f_1, \dots, f_m\}$ が存在して、 $V \cap U_x = \{z \in U_x \mid f_1(z) = \dots = f_m(z) = 0\}$ が成り立つとき、解析的部分集合という。特に、各点の近傍で1個の正則関数の零点となる解析的部分集合は主解析的部分集合または解析的超曲面という。
2. M の解析的部分集合 V に対して、 V が $x \in V$ の近傍で複素部分多様体となるとき、 x を正則点といい、正則点全体からなる部分集合を V^* と表す。(V が空集合でなければ) V^* は決して空集合となることはない。また、正則点以外の点を特異点といい、その全体 $V - V^*$ を V_s と表す。

□

【定義 3.484 (既約性)】 複素多様体 M の解析的部分集合 V は、2つの解析的部分集合 $V_1, V_2 \neq V$ を用いて $V = V_1 \cup V_2$ と表されるとき可約、可約でないとき既約という。 □

【命題 3.485】 解析的部分集合 V が既約であるための必要十分条件は、 V^* が連結となることである。 □

3.20.2 解析的局所モデル

【定義 3.486 (\mathbb{C}^n の構造層)】 \mathbb{C}^n の各開集合 U に対して U 上の正則関数の全体 $\mathcal{O}(U)$ を対応させることにより得られる可換環の層を $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ 、その $z \in \mathbb{C}^n$ 上でのストーク \mathcal{O}_z を $\mathcal{O}_{n,z}$ と表す。特に、 $\mathcal{O}_{n,0}$ を \mathcal{O}_n と表記する。 $\mathcal{O}_{n,z}$ は局所環となるので、 $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$ は局所環付空間である。 □

【命題 3.487 (\mathcal{O}_n の性質)】

1. \mathcal{O}_n は局所環で, $f(0) = 0$ となる関数の全体がその極大イデアルとなる.
2. \mathcal{O}_n は一意分解整域である.
3. (弱い零点定理) $f \in \mathcal{O}_n$ が既約で, $h \in \mathcal{O}_n$ が f の零点集合上でゼロとなるなら, \mathcal{O}_n において h は f により割り切れる.

□

【定義 3.488 (局所モデル)】 V を複素多様体 M の解析的部分集合, M の開集合 U に

$$\mathcal{I}(U) = \{f \in \mathcal{O}_M(U) \mid f|_{U \cap V} = 0 \text{ if } U \cap V \neq \emptyset\}$$

を対応させることにより定義される \mathcal{O}_M のイデアル層を \mathcal{I} , \mathcal{J} を \mathcal{I} の部分層で $\sqrt{\mathcal{J}} = \mathcal{I}$ となるイデアル層とする. このとき, 商層 $\mathcal{O}_M/\mathcal{I}$ は ($M - V$ 上でストークが自明となるので) V 上の局所環の層と見なすことができる. M が \mathbb{C}^n の開集合のとき, このようにして構成される局所環付空間 (V, \mathcal{O}_V) を解析的局所モデル, 層 $\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_M/\mathcal{I}$ をその構造層という, 特に, $\mathcal{I} = \mathcal{I}$ のとき, (V, \mathcal{O}_V) を被約な解析的局所モデルという,

□

3.20.3 解析空間

【定義 3.489 (解析空間)】 局所環付空間 (X, \mathcal{O}_X) が解析空間であるとは, X が Hausdorff で, 開被覆 $X = \cup_i U_i$ と解析的局所モデルの系 (V_i, \mathcal{O}_{V_i}) が存在し, 局所環付空間としての同型 $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) \cong (V_i, \mathcal{O}_{V_i})$ が成り立つことである. また, 解析的局所モデルと同型な開集合を座標近傍とよぶ.

□

【定義 3.490 (部分空間)】 (X, \mathcal{O}_X) を解析空間とする,

1. X の開集合 U に対して, 局所環付空間 $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ は解析空間となり, (X, \mathcal{O}_X) の開部分空間という.

2. X の閉集合 Z は, 各座標近傍 U において $Z \cap U$ が適当な有限個の関数が生成するイデアル $I \subset \mathcal{O}_X(U)$ の共通零点 $V(I)$ として表されるとき, $\mathcal{I}(U) = I$ により定義されるイデアル層を \mathcal{I} として, 構造層 $\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}|_Z$ をもつ解析空間となる. このとき, (Z, \mathcal{O}_Z) は (X, \mathcal{O}_X) の閉部分空間, \mathcal{I} はその定義イデアルと呼ばれる. さらに, 解析空間 (Y, \mathcal{O}_Y) から (X, \mathcal{O}_X) への射 (i, i^*) に対して, $V = i(Y)$ となる (X, \mathcal{O}_X) の閉部分空間 (V, \mathcal{O}_V) が存在し, 射 (i, i^*) が同型 $(Y, \mathcal{O}_Y) \cong (V, \mathcal{O}_V)$ を誘導するとき, 射 (i, i^*) は閉埋め込みと呼ばれる,

□

【定理 3.491 (接続イデアル層)】 解析空間 (X, \mathcal{O}_X) の接続イデアル層 \mathcal{I} と解析的閉部分空間 (V, \mathcal{O}_V) とは, $V = \text{Supp}(\mathcal{I})$, $\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ の関係により, 1 対 1 に対応する. □

【定義 3.492 (特異点)】 解析空間 (X, \mathcal{O}) の点 x において, \mathcal{O}_x が正則局所環となるとき, x は非特異点, そうでないとき特異点という. □

【注 3.493 (正則局所環)】 単位元をもつ可換環 R は, その任意のイデアルが有限生成のときネター環という. ネター環の素イデアルの昇鎖 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ の長さ n は最大値をもち, その値を Krull 次元 (K-dim) と呼ぶ. ネター局所環 (R, \mathfrak{m}) は, その Krull 次元を n として, \mathfrak{m} が適当な n 個の元 a_1, \dots, a_n により生成されるとき, 正則局所環といい, a_1, \dots, a_n をそのパラメータ系という. □

【命題 3.494】 解析空間 X が被約かつ既約のとき, その特異点集合 X_{sing} は X の解析的閉部分集合で, その補集合は X で稠密となる. □

3.20.4 代数幾何学との対応

【定理 3.495 (GAGA の原理 [Serre JP (1956)])】 (X, \mathcal{O}_X) を射影的スキーム, (X^h, \mathcal{O}_{X^h}) を対応するコンパクト複素解析空間とする. このとき, X 上の接続 \mathcal{O}_X -加群層のカテゴリールから, X^h 上の接続 \mathcal{O}_{X^h} -加群層のカテゴリールへの自然な関手

$$(\text{Coh}_X) \rightarrow (\text{Coh}_{X^h}); \quad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^h$$

は, カテゴリール同値を与える. □

【系 3.496】

- 射影的スキーム X 上の任意の連接 \mathcal{O}_X -加群層 \mathcal{F} と任意の整数 p に対して, コホモロジー群の自然な写像

$$H^p(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X^h, \mathcal{F}^h)$$

は同型写像となる.

- 射影空間の複素解析的閉部分空間には, 自然に代数的閉部分スキームの構造がはいる.
- 射影的スキーム X, Y の間の複素解析空間としての射 $g: X^h \rightarrow Y^h$ に対して, スキーム射 $f: X \rightarrow Y$ が存在して, $g = f^h$ となる.
- 射影的スキーム X に対して, 自然な準同型

$$p^*: H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \rightarrow H^1(X^h, \mathcal{O}_{X^h}^\times)$$

は同型写像となる.

□

【定義 3.497 (Moishezon 多様体)】 コンパクト複素多様体 \mathcal{X} は, その有理型関数体に対して $\text{tr.d.}K(\mathcal{X}) = \dim \mathcal{X}$ が成り立つとき, **Moishezon 多様体** という. □

【定義 3.498 (Hodge 多様体)】 コンパクト Kähler 多様体 \mathcal{X} は, Kähler 類 ($\in H^2(\mathcal{X}, \mathbb{C})$) が $H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$ に含まれるとき, **Hodge 多様体** という. [< [Har77]] □

【注 3.499 (射影的となる条件)】

- 任意の 1 次元コンパクト複素多様体は射影的代数曲線である. [Riemann]
1 次元非特異 : コンパクト = 完備代数的 = 射影的
- 複素多様体が代数的であるためには, Moishezon 多様体であることが必要である.

3. 2次元以上では，定数以外に有理型関数をもたないコンパクト複素多様体が存在する．したがって，代数的でないコンパクト複素多様体が存在する．
4. 2次元 Moishezon 多様体は，射影的代数曲面となる． [Chow & Kodaira (1952)]
2次元非特異：コンパクト \supseteq Moishezon = 完備代数的 = 射影的
5. 3次元以上では，代数的でない Moishezon 多様体が存在する． [Hironaka H (1960), Moishezon BG (1967)]
3次元以上で非特異：
コンパクト \supseteq Moishezon \supseteq 完備代数的 \supseteq 射影的
6. すべての Moishezon 多様体は，非特異点を中心とするブローアップを有限回行うことにより射影的となる． [Moishezon]
7. Moishezon 多様体は Kähler ならば，射影的である． [Moishezon BG (1967)]
8. コンパクト多様体が射影的であるための必要十分条件は，Hodge 多様体となることである． [Kodaira K (1954)]
Kähler で非特異：
コンパクト \supset Hodge = Moishezon = 完備代数的 = 射影的

[< [Har77]] _____ \square

【定理 3.500 (Artin の代数化定理)】 x を解析空間 X の孤立特異点とすると， \mathbb{C} 上の射影代数多様体 A とその特異点 P が存在し， X における x の適当な近傍と A を解析空間と見なした場合の P の適当な近傍が解析空間として同型となる． _____ \square

4 Algebraic Geometry

Last update: 2011/7/18

4.1 スキーム代数多様体

4.1.1 代数的局所モデル

4.1.1.1 アフィン代数多様体

【定義 4.1 (Zariski 位相)】

1. k を体として, 多項式環 $R = k[x_1, \dots, x_n]$ を空間 k^n 上の関数の環と見なすとき, R のイデアル I に属する関数の共通零点全体の集合を I により定義される代数的部分集合といい, $V(I)$ で表す.
2. k^n の代数的部分集合の全体は位相に対する閉集合の公理を満たす. この位相は **Zariski 位相** という.

□

【命題 4.2 (アフィン空間)】 空間 k^n において, 多項式環 $k[x_1, \dots, x_n]$ を R と記し, そのイデアルから定義される Zariski 位相を k^n に導入する.

1. $f \in R$ として, $U(f) = k^n \setminus V(f)$ の全体は Zariski 位相の開集合の基となる. すなわち, 任意の R のイデアル I と点 $x \in U(I) = k^n - V(I)$ に対して, 適当に f を取れば, $x \in U(f) \subset U(I)$. また, $U(f) \subset U(g)$ なら, $f = gh (h \in R)$ である.
2. k^n 上の前層を

$$\begin{aligned} U(f) &\mapsto R_{(f)} = R[1/f], \\ U(f) \subset U(g) &\mapsto p = p_{U(f)U(g)} : R_{(g)} \rightarrow R_{(f)}; \quad p(1/g) = h/f \\ &\quad (f = gh) \end{aligned}$$

により定義する. この前層の層化により得られる層を \mathcal{O}_{k^n} とすると, \mathcal{O}_{k^n} の点 $x = a$ におけるストーク $\mathcal{O}_{k^n, a}$ は, M_a を R の極大イデアル $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ として, 局所環 $(R_{M_a}, R_{M_a} M_a)$ となる. このようにして得られる局所環付空間 (k^n, \mathcal{O}_{k^n}) を体 k 上の n 次元アフィン空間といい, \mathbb{A}_k^n と記す. また, $R = k[x_1, \dots, x_n]$ はその座標環という.

□

【定義 4.3 (アフィン代数多様体)】 局所環付空間としてのアフィン空間 $\mathbb{A}_k^n = (k^n, \mathcal{O}_{k^n})$ において, その座標環 R のイデアル I は, 対応 $U(f) \mapsto R_{(f)}I$ により \mathcal{O}_{k^n} のイデアル層 \mathcal{I} を与え, 商層 $\mathcal{O}_{k^n}/\mathcal{I}$ の台は $X = V(I)$ となる, したがって, この商層は X 上の層 \mathcal{O}_X と同一視でき, また, X 上の点 p でのストークは局所環 $\mathcal{O}_{k^n, p}/I$ となる. このようにして構成される局所環付空間 (X, \mathcal{O}_X) をアフィン代数的集合, I と R/I をその定義イデアルおよび座標環という. また, 既約なアフィン代数的集合をアフィン代数多様体という. □

4.1.1.2 アフィンスキーム

【定義 4.4 (アフィンスキーム圏)】 R を可換環, $\text{Spec}(R)$ をその素イデアル全体の集合とする. この集合から次の方法で局所環付空間 (X, \mathcal{O}_X) を構成する.

- 1, R の任意の部分集合 E に対して,

$$\begin{aligned} V(E) &= \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid E \subseteq \mathfrak{p}\}, \\ U(E) &= \text{Spec}(R) - V(E) \end{aligned}$$

とおくとき, 様々な R のイデアル I に対する $V(I)$ の全体は閉集合の公理を満たし, $\text{Spec}(R)$ に **Zariski** 位相を定義する. 以下, $\text{Spec}(R)$ にこの位相を付加した空間を X とおく. このとき, $x \in U(I)$ は, $I \not\subseteq \mathfrak{p}_x$ と同等.

2. $f \in R$ に対して, イデアル (f) に対応する閉集合と開集合を $V(f), U(f)$ と書くことにすると, $U(f)$ の全体は X の開集合の生成系となる. また, $U(f) \subset U(g)$ なら $f = gh$ ($h \in R$) となる.
3. 対応

$$\begin{aligned} U(f) &\mapsto R_f = R[1/f], \\ U(f) \subset U(g) &\mapsto p = p_{gf} : R_g \rightarrow R_f; \quad p(1/g) = h/f \\ &(f = gh) \end{aligned}$$

により, X 上の前層を構成し, その層化により得られる層を \mathcal{O}_X とおく. このとき, 点 x 上のストークは局所環 $R_{\mathfrak{p}_x}$ となる.

このようにして構成される局所環付空間 (X, \mathcal{O}_X) を可換環 R の定めるアフィンスキームといい, $(\text{Spec}(R), \tilde{R})$ で表す. また, R を座標環, $\mathcal{O}_X = \tilde{R}$ を構造層という. アフィンスキームの全体とそれらの間の局所環付空間としての射は, アフィンスキーム圏をつくる.

4. 特に, 体 k 上の多項式環 $k[x_1, \dots, x_n]$ の剰余環 $R = k[x_1, \dots, x_n]/I$ の定めるアフィンスキームを体 k 上の代数的アフィンスキームという. \square

【定理 4.5 (環論との同値性)】 環の準同型写像 $f: A \rightarrow B$ とアフィンスキームの射 $(g, \theta): \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ の間には自然な一対一対応があり, 可換環の圏からアフィンスキームの圏への反変関手はカテゴリーの同値を与える:

$$(\text{Ring}) \rightarrow (\mathcal{A}f - \mathcal{S}ch)^o, \quad A \mapsto \text{Spec}(A). \quad (4.1.1)$$

□

【定義 4.6 (加群層)】 環 A 上の加群 M に対して, アフィンスキーム $X = \text{Spec}(A)$ 上の \mathcal{O}_X -加群層 \tilde{M} を次の対応により定める:

$$U(f) \mapsto \Gamma(U(f), \tilde{M}) = M_f = A_f \otimes_A M.$$

□

【定理 4.7】 環 A とそのアフィンスキーム $X = \text{Spec}(A)$ に対して, A -加群の圏から \mathcal{O}_X -加群層の圏への関手

$$(A - \mathcal{M}od) \rightarrow (\mathcal{O}_X - \mathcal{M}od), \quad M \mapsto \tilde{M} \quad (4.1.2)$$

は, 充満忠実な完全関手 (fully faithful exact functor) を与える. \square

【定理 4.8 (アフィンスキーム上の準連接層のコホモロジー)】 R を任意の単位可換環として, $X = \text{Spec}(R)$ とおくと, 任意の準連接 \mathcal{O}_X 加群層 \mathcal{F} に対して,

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathcal{F}) &= \Gamma(X, \mathcal{F}), \\ H^i(X, \mathcal{F}) &= 0, \quad \forall i > 0. \end{aligned}$$

[< [宮西 90] < Grothendieck A & Dieudonné J, EGA] \square

4.1.2 スキーム

4.1.2.1 基本定義

【定義 4.9 (スキーム圏)】

1. 局所環付空間 (X, \mathcal{O}_X) において, X の各点 x に対して x の開近傍 U と可換環 A_x が存在し, $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ と $(\text{Spec}(A_x), \tilde{A}_x)$ が局所環付空間として同型となるとき, (X, \mathcal{O}_X) をスキーム, \mathcal{O}_X をその構造層という.
2. スキームの開集合 U は, $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ があるアフィンスキーム $(\text{Spec}(A), \tilde{A})$ に局所環付空間として同型となるとき, アフィン開集合と呼ばれる.
3. 二つのスキーム (X, \mathcal{O}_X) と (Y, \mathcal{O}_Y) の間の局所環付空間としての射 $(f, \phi) : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ をスキームの射という. また, このような射 f が存在するとき, Y を X 上のスキーム, f を構造射という.
4. \mathcal{I} が \mathcal{O}_X の準連接イデアル層ならば, $Y = \text{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$, $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}|_Y$ として, (Y, \mathcal{O}_Y) はスキームである. このように表されるスキームを X の閉部分スキームという.

□

【定義 4.10 (S -スキーム圏)】 スキーム X からスキーム S へのスキーム射 $f : X \rightarrow S$ が存在するとき, 射組 (X, f) ないし X を S -スキーム, f を構造射という. また, 2つの S -スキーム $f : X \rightarrow S, g : Y \rightarrow S$ の間の射 $h : X \rightarrow Y$ は, $g \circ h = f$ となるとき S (上の) 射 (morphism over S) と呼ばれる. 特に, k を体として, $\text{Spec}(k)$ 上のスキームを単に k -スキームとよぶ. □

4.1.2.2 ファイバー積

【定義 4.11 (ファイバー積)】 2つの S -スキーム $f : X \rightarrow S, g : Y \rightarrow S$ に対して, それらの S -スキーム圏での直積, すなわち次の普遍写像性を満たす S -スキーム $X \times_S Y \rightarrow S$ および S 射 $p : X \times_S Y \rightarrow X, q : X \times_S Y \rightarrow Y$ の組をファイバー積 (fibre product) という.

任意の S -スキーム Z と S 射 $a : Z \rightarrow X$, $b : Z \rightarrow Y$ に対して,
 $p \circ c = a, q \circ c = b$ となる S 射 $c : Z \rightarrow X \times_S Y$ が一意的に存在.

特に, 体 k 上のスキームに対しては, k -スキームとしてのファイバー積を
しばしば直積とよぶ. _____□

【定理 4.12 (ファイバー積の存在)】 任意の S -スキーム $f : X \rightarrow S$,
 $g : Y \rightarrow S$ に対して, ファイバー積 $X \times_S Y \rightarrow S$ は常に存在する. $\{U_i\}_{i \in I}$
を X のアフィン開被覆, $\{V_j\}_{j \in J}$ を Y のアフィン開被覆とすると, $X \times_S Y$
のアフィン開被覆 $\{W_{ij}\}_{i \in I, j \in J}$ が存在して, $U_i \times_S V_j \cong W_{ij}$ となる. また,
 X, Y, S がすべてアフィンスキームで, $X = \text{Spec}(A), Y = \text{Spec}(B), S =$
 $\text{Spec}(C)$ のとき,

$$\text{Spec}(A) \times_{\text{Spec}(C)} \text{Spec}(B) = \text{Spec}(A \otimes_C B)$$

が成り立つ. _____□

4.1.2.3 有限射と固有射

【定義 4.13 (分離的射)】 任意の S -スキーム X に対して, $p_1 \circ \Delta =$
 $p_2 \circ \Delta = \text{id}_X$ により決まる S -射 $\Delta : X \rightarrow X \times_S X$ を対角線射という. 特
に, Δ が X から $X \times_S X$ の閉部分スキームへの同型射となっているとき,
 X は S 上分離的 (separated) という. _____□

【定義 4.14 (局所有限型射)】 スキーム X からアフィンスキーム
 $Y = \text{Spec}(B)$ への射 f に対して, X のアフィン開被覆 (有限アフィン開
被覆) $U_i = \text{Spec}(A_i)_{i \in I}$ が存在して, A_i が f^*B 上有限生成となるとき, f
は局所有限型 (有限型) であるという. Y が一般のスキームのときには,
適当な Y のアフィン開被覆 $\{V_j\}_{j \in J}$ に対して, $f|_{f^{-1}(V_j)}$ が局所有限型 (有
限型) となるとき, スキーム射 $f : X \rightarrow Y$ は局所有限型 (有限型) であ
るといふ. _____□

【定義 4.15 (固有射)】 スキームの射 $f : X \rightarrow Y$ が次の条件を満たす
とき, 固有射という.

- i) f は分離的かつ有限型である.
- ii) 任意の Y -スキーム Z に対して, 射影 $X \times_Y Z \rightarrow Z$ が閉写像である.

□

【定義 4.16 (有限射)】 スキームの射 $f: X \rightarrow Y$ は, Y の任意のアフィン開集合 U の逆像 $V = f^{-1}(U)$ がアフィンスキームとなるとき, アフィン射という. このアフィン射において, $U = \text{Spec}(A), V = \text{Spec}(B)$ と書くとき, 常に A が B 上有限生成加群となるなら, f を有限射という.

□

【命題 4.17 (有限射の特徴付け)】 Y が局所 Noether スキーム (例えば代数的スキーム) のとき, スキーム射 $f: X \rightarrow Y$ について, 次の3つの条件は同値である:

- i) 有限射.
- ii) 固有かつアフィン射
- iii) 固有射で, 任意の $y \in Y$ について $f^{-1}(y)$ は有限集合.

□

4.1.2.4 局所自由層と準連接層

【定義 4.18 (局所自由層)】

1. スキーム (X, \mathcal{O}_X) 上の \mathcal{O}_X -加群層 \mathcal{F} は, 構造層の有限ないし無限個の直和 $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_X$ と同型となるとき, 自由層 (free sheaf) という. また, 層 \mathcal{F} は, 各点の適当な近傍 U で $\mathcal{F}|_U$ が自由層となるとき, 局所自由層 (locally free sheaf) といい, r が U の取り方に依らないときは, r を \mathcal{F} の階数 (rank) という.
2. 階数 1 の局所自由層を可逆層 (invertible sheaf) という. X 上の可逆層の全体はテンソル積に関して Abel 群となる. この群は Picard 群といい, $\text{Pic}(X)$ で表す. Picard 群の単位元は \mathcal{O}_X , \mathcal{L} の逆元は $\mathcal{L}^{(-1)} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ で与えられる.

□

目次へ

【命題 4.19 (局所自由層に対する射影公式)】 スキーム射 $f: X \rightarrow Y$, X 上の \mathcal{O}_X 加群層 \mathcal{F} および Y 上の有限階数局所自由層 \mathcal{G} に対して, つぎの公式が成り立つ:

$$f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G}) \cong f_*\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}.$$

□

【定義 4.20 (準連接層)】 スキーム X 上の \mathcal{O}_X 加群層 \mathcal{F} は, 次の条件を満たすとき準連接層 (quasi-coherent sheaf) であるという:

任意の点 $P \in X$ に対して, その適当な近傍 $U \subset X$ において自由層による表示 (完全系列)

$$\mathcal{O}_U^{\Lambda_1} \longrightarrow \mathcal{O}_U^{\Lambda_0} \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0$$

が存在する.

□

4.1.3 代数的スキーム

4.1.3.1 定義

【定義 4.21 (代数的スキーム)】 スキームは, 有限個のアフィン開集合からなる被覆 $\{U_i\}$ をもち, 各アフィン開集合が代数的アフィンスキームと同型となるとき, 代数的スキームという. 基礎体が k の代数的スキーム (X, \mathcal{O}_X) は自然に k -スキーム $X \rightarrow \text{Spec}(k)$ となる. \square

【定義 4.22 (既約性と被約性)】 位相空間 X は, その真部分閉集合 X_1, X_2 を用いて $X = X_1 \cup X_2$ と表されるとき可約 (reducible), 可約でないとき既約 (irreducible) という.

スキームは, 各点の局所環がべき零元を持たないとき被約 (reduced) といわれる. \square

【定義 4.23 (代数多様体)】 スキームは, 各点の局所環がべきゼロ元を持たないとき被約 (reduced) という. 既約かつ被約で分離的な代数的スキームを代数多様体 (algebraic variety) という. \square

【定義 4.24 (一般点と閉点)】 (X, \mathcal{O}_X) を基礎体が k の代数的スキームとする.

1. 代数的スキームの点 x は, その閉包がスキーム全体となるとき生成点または一般点 (generic point) という, これは, x が各アフィン開近傍でゼロイデアルに対応することを意味し, したがって一意的である. また, x の閉包が $\{x\}$ となる点は閉点という, 閉点は, それを含むアフィン開近傍で極大イデアルに対応する,
2. k -スキーム $X \rightarrow \text{Spec}(k)$ としての構造より, k から各点 x の剰余体 $k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ への同型が定まる. したがって, 開集合 U に対し, $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ の閉点 $x \in U$ での値が意味をもち, f を U (の閉点からなる部分集合) 上の関数と見なすことができる. この同一視のもとで, X の任意のアフィン開集合 U での有理関数体 $k(U)$ は, U の取り方によらず X に一般点 η_X での剰余体 $k(X) := \mathcal{O}_{X,\eta_X}/\mathfrak{m}_{\eta_X}$ と一致し, X の有理関数体と呼ばれる.

\square

【命題 4.25 (アフィンスキームとその閉部分スキームの閉点の対応)】

R を単位元を持つ可換環, I をそのイデアル, π を自然な射影

$$\pi: R \rightarrow A = R/I$$

とするとき,

1. R のイデアル \tilde{J} の π による像 $J = \pi(\tilde{J})$ は A のイデアル (A を含む) となる. 逆に, A の任意のイデアル J の π による逆像 $\tilde{J} = \pi^{-1}(J)$ は R のイデアルとなる:

$$\begin{aligned} A \supset J: \text{イデアル} &\longrightarrow I \subset \pi^{-1}(J) \subset R: \text{イデアル} \\ A \supset \pi(\tilde{J}): \text{イデアル} &\longleftarrow I \subset \tilde{J} \subset R: \text{イデアル} \end{aligned}$$

2. J が A の素イデアルなら, $\tilde{J} = \pi^{-1}(J)$ は素イデアルとなる:

$$A \supset J: \text{素イデアル} \longrightarrow I \subset \pi^{-1}(J) \subset R: \text{素イデアル}$$

この対応は, 閉部分アフィンスキームの埋め込み

$$\pi^*: \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(R)$$

を与える. しかし, R の素イデアル \tilde{J} の像 $J = \pi(\tilde{J})$ は素イデアルとなるとは限らない.

3. I を含む R の極大イデアル \tilde{M} の π による像 $M = \pi(\tilde{M})$ は A の極大イデアルとなる. 逆に, A の極大イデアル M の逆像 $\tilde{M} = \pi^{-1}(M)$ は I を含む R の極大イデアルとなる.

$$\begin{aligned} A \supset J: \text{極大イデアル} &\longrightarrow I \subset \pi^{-1}(J) \subset R: \text{極大イデアル} \\ A \supset \pi(\tilde{J}): \text{極大イデアル} &\longleftarrow I \subset \tilde{J} \subset R: \text{極大イデアル} \end{aligned}$$

これは, $\text{Spec}(A)$ の閉点と $\text{Spec}(R)$ の閉点の対応を表す.

□

【定義 4.26 (有理写像)】 2つの代数多様体 X, Y を与える.

1. U, V を X の開集合として, 2つの射 $f: U \rightarrow Y$ と $g: V \rightarrow Y$ は $U \cap V$ で $f = g$ となるとき, 有理同値と定義する. この同値関係による X の開集合から Y への射の同値類を有理写像といい, $f: X \rightsquigarrow Y$ で表す.

2. 代数多様体間の射 $f: X \rightarrow Y$ は、その像が Y の生成点を含むとき、**支配的** (dominating) であるという。有理写像については、それを代表する射が支配的なとき、**支配的な有理写像** という。支配的な有理写像 $f: X \rightsquigarrow Y$ は、有理関数の単射 $f^*: k(Y) \rightarrow k(X)$ を導く。また、2つの有理写像 $f: X \rightsquigarrow Y, g: Y \rightsquigarrow Z$ において f が支配的なら合成有理写像 $g \circ f: X \rightsquigarrow Z$ が定まる。
3. 有理写像として逆写像が存在する有理写像を、**双有理写像** (birational map) という。射 $f: X \rightarrow Y$ が双有理写像となるとき、**双有理射** (birational morphism) という。このとき、 $f|_U$ が同型射となる最大の開集合 U に対して、 $E := X \setminus U$ を f の**例外集合** (exceptional set) という。特に、 E が因子となるとき、**例外因子** (exceptional divisor) と呼ばれる。

□

【定義 4.27 (代数多様体の次元)】 環 A の素イデアル \mathfrak{p} の高さ (height) を、素イデアル列

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_h = \mathfrak{p}$$

の長さ h の最大値で定義する。 A のすべての素イデアルの高さの最大値を A の **Krull 次元** といい、 $K - \dim A$ で表す。高さ h の素イデアル \mathfrak{p} に対して、 $\dim A_{\mathfrak{p}} = h$ となるので、 $\dim A = \max_{\mathfrak{p}} \dim A_{\mathfrak{p}}$ が成り立つ。

スキーム X の点 P における次元を、 $\dim_P X = K - \dim \mathcal{O}_{X,P}$ で定義する。また、 X の次元を $\dim X = \max_{P \in X} \dim_P X$ により定義する。 □

【定理 4.28 (代数多様体の次元と関数体の関係)】 X を代数多様体とすると、 X の次元は有理関数体 $\mathbb{C}(X)$ の \mathbb{C} 上の超越次数と一致する：

$$\dim X = \text{trans.deg}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(X).$$

また、 X の閉部分多様体の極大列 $Y_0 \subset Y_1 \subset \cdots \subset Y_n = X$ の長さ n は常に X の次元と一致する。 [出典：Atiyah M, MacDonald I: "Introduction to Commutative Algebra" (Addison-Wesley, 1960) Theorem 11.25] □

4.1.3.2 非特異点・特異点

【定義 4.29 (Noether 環)】 単位元をもつ可換環 R において, その真イデアルからなる任意の集合が包含関係に関して常に極大元をもつとき, R を **Noether 環** という. □

【例 4.30】

1. 単項イデアル環は Noether 環である. したがって, \mathbb{Z} , 体 k 上の整式環 $k[X]$ は Noether 環である.
2. Noether 環の商環は Noether 環である.
3. R が Noether 環ならその上の有限生成環 $R[X_1, \dots, X_n]/I$ も Noether 環となる. (**Hilbert の基底定理**)

□

【命題 4.31 (Noether 環の基本性質)】 単位元をもつ可換環 R について, つぎの 4 条件は同等である.

- i) R は Noether 環.
- ii) R のイデアルの任意の昇鎖列 $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots$ について, 適当な $N > 0$ が存在して $I_N = I_{N+1} = \dots$.
- iii) R の任意のイデアルは有限生成イデアルである.
- iv) 有限生成 R 加群の部分加群は有限生成 R 加群である.

□

【定義 4.32 (局所環)】 単位元をもつ可換環 R が極大イデアルを一つしか持たないとき, 局所環といい, 極大イデアルを \mathfrak{m} として, (R, \mathfrak{m}) で表す. □

【定義 4.33 (根基)】 環 R のイデアル I に対して, $\sqrt{I} = \{x \in R \mid x^n \in I \exists n \in \mathbb{N}\}$ である. □

【定義 4.34 (パラメーター系)】 Noether 局所環 (R, \mathfrak{m}) について, \mathfrak{m} の元の列 $\{a_1, \dots, a_d\}$ ($d = \text{K-dim } R$) を用いて $\mathfrak{m} = \sqrt{(a_1, \dots, a_d)}$ となるとき, $\{a_1, \dots, a_d\}$ を R のパラメーター系という. □

【定義 4.35 (正則局所環)】 Noether 局所環 (R, \mathfrak{m}) が $\mathfrak{m} = (a_1, \dots, a_d)$ となるパラメーター系 $\{a_1, \dots, a_d\}$ ($d = \dim R$) をもつとき, (R, \mathfrak{m}) を正則局所環, $\{a_1, \dots, a_d\}$ をその正則パラメーター系という. \square

【定理 4.36 (Auslander)】 正則局所環は素元分解環であり, したがって正規環である. \square

【定義 4.37 (非特異点・特異点)】 スキーム (X, \mathcal{O}_X) の点 P において, $\mathcal{O}_{X,P}$ が正則局所環 (regular local ring) となるとき, P は非特異点 (non-singular point), そうでないとき特異点 (singular point) という. 非特異点において局所環 $\mathcal{O}_{X,P}$ の極大イデアル \mathfrak{m}_P は, 次元 d 個の元 x_1, \dots, x_d で生成される. この生成元の列を正則パラメーター系 (regular parameter system) という. 特に, P が閉点のとき, その適当な開近傍 U が存在し, U 内の任意の閉点 Q において $x_1 - x_1(Q), \dots, x_d - x_d(Q)$ が \mathfrak{m}_Q の正則パラメーター系となる. このような $x_1, \dots, x_d \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ を U における局所座標系 (local coordinate system) という. \square

【命題 4.38】 スキーム X が被約かつ既約のとき, その特異点集合 X_{sing} は X の閉部分スキームで, その補集合は X で稠密となる. \square

4.1.3.3 ベクトル束と接続層

【定理 4.39 (局所自由層の平坦性)】 R を Noether 環, $X = \text{Spec}(R)$ とすると, 接続 \mathcal{O}_X 加群層 \mathcal{F} について, 次の 2 条件は同値である:

- 1) \mathcal{F} は局所自由である.
- 2) 任意の点 $P \in X$ に対して, \mathcal{F}_P は $\mathcal{O}_{X,P}$ 平坦である.

これより, X を代数的スキーム, \mathcal{F} を X 上の局所自由層とすると, 任意の \mathcal{O}_X 加群層の完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

は, 完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

を誘導する. \square

【定義 4.40 (アフィン射)】 \mathcal{B} をスキーム S 上の \mathcal{O}_S -加群の準連接層で、 \mathcal{O}_S -多元環の構造を持つものとする。このとき、次のようにして構成される S -スキーム $f: X = \text{Spec}_S \mathcal{B} \rightarrow S$ をアフィン射とよぶ:

1. $S = \text{Spec}(A)$ と書けるとき、 $\mathcal{B} = \tilde{B}$ と表されるので、このとき $X = \text{Spec} B$ と定義.
- 2.

□

【定義 4.41 (ベクトル束)】 代数的スキーム X 上の階数 r の局所自由層 \mathcal{F} を与える。このとき、 \mathcal{O}_X 上の対称積

$$\text{Sym}_{\mathcal{O}_X}^* \mathcal{F} = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \text{Sym}_{\mathcal{O}_X}^m \mathcal{F}$$

には、自然に \mathcal{O}_X 多元環層の構造が入る。これより定まる X -上の代数的スキーム

$$\mathbb{A}_X(\mathcal{F}) := \text{Spec}_X(\text{Sym}_{\mathcal{O}_X}^* \mathcal{F})$$

を、 \mathcal{F} に伴う X 上のベクトル束 (vector bundle) という。特に、 \mathcal{F} が可逆層のとき、 $\mathbb{A}_X(\mathcal{F})$ は直線束 (line bundle) と呼ばれる。 □

【命題 4.42 (接続層)】 代数的スキーム (X, \mathcal{O}_X) 上の接続 \mathcal{O}_X -加群層 \mathcal{F} について次が成り立つ、

- i) \mathcal{F} の台は閉集合.
- ii) $x \in X$ について、 \mathcal{F}_x が自由 $\mathcal{O}_{X,x}$ -加群なら、 \mathcal{F} は x の近傍で局所自由である.
- iii) X の各既約成分上に空でない開集合 U が存在して、 $\mathcal{F}|_U$ は局所自由層となる.

□

【命題 4.43 (接続イデアル層)】 代数的スキーム (X, \mathcal{O}_X) を与える。このとき、 X の閉部分スキーム Y にそのイデアル層 $\mathcal{O}_X(-Y)$ を対応させることにより、閉部分スキーム全体のなす集合と接続イデアル層全体のなす集合の間の 1 対 1 対応が得られる。 □

4.1.3.4 接層・余接層

【定義 4.44 (接層・余接層)】 X を体 k 上の非特異 n 次元代数多様体, $\Delta : X \rightarrow X \times X$ を対角線射, $p_i : X \times X \rightarrow X (i = 1, 2)$ を射影とする.

1. \mathfrak{m}_P を閉点 P に対する極大イデアルとすると, $T_P^* = \mathfrak{m}_P / \mathfrak{m}_P^2$ を P における余接空間, $T_P = \text{Hom}_k(T_P^*, k)$ を接空間という.
2. $X \times X$ における $\Delta_X = \Delta(X)$ の定義イデアル層を $\mathcal{I} = \mathcal{O}_{X \times X}(-\Delta_X)$ とする. X の閉点 P の十分小さな開近傍 U における局所座標系を x_1, \dots, x_n とすると, $y_i = p_1^* x_i, z_i = p_2^* x_i (i = 1, \dots, n)$ はアフィン開近傍 $V = U \times U \subset X \times X$ における局所座標系となり, $\mathcal{I}|_V$ は $z_1 - y_1, \dots, z_n - y_n$ で生成される. したがって, $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ は Δ_X 上の階数 n の局所自由層となる. そこで, X 上の階数 n の局所自由層を

$$\Omega_X^1 = p_{1*}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \quad (4.1.3)$$

により定義し, X の余接層 (cotangent sheaf) とよぶ.

3. 対応 $z_i \mapsto x_i, y_i \mapsto x_i(P)$ により, $\Omega_{X,P}^1 / \mathfrak{m}_P \Omega_{X,P}^1$ から $\mathfrak{m}_P / \mathfrak{m}_P^2$ への k 線形空間としての同型対応が存在する,
4. \mathcal{O}_X から Ω_X^1 への k -加群層としての射を

$$d = p_{1*} \circ (p_2^* - p_1^*) : \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1 \quad (4.1.4)$$

により定義し, 微分写像 (derivation) という. このとき, 任意の $s, t \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ および $c \in k$ に対して, 次が成り立つ:

- (1) $d(s + t) = ds + dt$
- (2) $d(ct) = cdt$
- (3) $d(st) = sdt + tds$

これより, $\Gamma(U, \Omega_X^1)$ は, $dx_i = z_i - y_i$ により生成される.

5. 余接層の双対層として, 接層 (tangent sheaf) $\mathcal{T}_X = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^1, \mathcal{O}_X)$ が定義される. 接層の切断は正則ベクトル場という. 余接層の基底 dx_1, \dots, dx_n の双対基底を $\partial_1, \dots, \partial_n$ とすると, 正則ベクトル場 v は

$$v = h_i \partial_i \quad (4.1.5)$$

と表される.



4.1.3.5 微分形式

【定義 4.45 (微分形式)】 X を体 k 上の非特異 n 次元代数多様体, Ω_X^1 をその余接層とする.

1. Ω_X^1 の外積により定義される局所自由層

$$\Omega_X^p = \wedge^p \Omega_X^1 \quad (4.1.6)$$

を p 次微分形式の層 (sheaf of differential p -form) という. U における局所座標系を x_1, \dots, x_n とすると, p 次微分形式 $s \in \Gamma(U, \Omega_X^p)$ は

$$s = h_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \quad (4.1.7)$$

と表される.

2. 層 Ω_X^p には, 自然に外積 (exterior product)

$$\wedge; \Omega_X^p \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^q \rightarrow \Omega_X^{p+q} \quad (4.1.8)$$

が定義される. また, 次の条件を満たす外微分 $d: \Omega_X^p \rightarrow \Omega_X^{p+1}$ が一意的に定まる: $s \in \Gamma(U, \Omega_X^p), t \in \Gamma(U, \Omega_X^q)$ に対して

- (1) $d(s+t) = ds + dt$
- (2) $d(s \wedge t) = ds \wedge t + (-1)^p s \wedge dt$.

3. 非特異代数多様体の間の正則写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して, \mathcal{O}_X 加群層としての引き戻し準同型写像 (pull-back homomorphism) $f^*: f^* \Omega_Y^p \rightarrow \Omega_X^p$ を, 次の 2 条件により一意的に定義することができる:

- 1) $p=0$ のとき, 関数の引き戻し写像 $f^* \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ と一致.
- 2) 任意の局所的な切断 s に対して, $f^*(ds) = d(f^*s)$.
- 3) $f^*(s \wedge t) = f^*s \wedge f^*t$ が成り立つ.



【定義 4.46 (標準層)】 X を n 次元非特異代数多様体とすると, Ω_X^n は可逆層となる. この可逆層を標準層 (canonical sheaf) といい, ω_X で表す.



4.1.4 解析空間との対応

【注 4.47 (一般的事実)】 X, Y をスキーム, X^h, Y^h を対応する解析空間とする.

1. X が \mathbb{C} 上分離的 $\Leftrightarrow X^h$ が Hausdorff.
2. X が Zariski 位相に関して連結 $\Leftrightarrow X^h$ が連結.
3. X が被約 $\Leftrightarrow X^h$ が被約.
4. X が非特異 $\Leftrightarrow X^h$ が複素多様体.
5. 射 $f: X \rightarrow Y$ が固有 \Leftrightarrow 射 $f^h: X^h \rightarrow Y^h$ が固有 (すなわち, コンパクト集合の f^h による逆像が常にコンパクト).
6. X が完備 $\Leftrightarrow X^h$ がコンパクト.

□

4.2 因子と加群層

4.2.1 正規多様体

【定義 4.48 (正規環)】 整域 R において, その商体 $Q(R)$ の元のうち, いずれかの R 係数のモニック多項式 $f(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n$ の根となるものが R の元に限られるとき, R を整閉整域, あるいは正規環という. _____□

【定義 4.49 (正規性)】 スキーム X は, 任意の点での局所環が正規環となるときの正規 (normal) であるという. _____□

【命題 4.50 (アフィンスキームの正規性)】 A が整域のとき, アフィンスキーム $X = \text{Spec}(A)$ に対して, 次は同値である:

- (1) X は正規である.
- (2) 任意の閉点 $P \in X$ に対して, $\mathcal{O}_{X,P}$ は正規環である.
- (3) A は正規環である.

[< [川又 97] < Atiyah M & MacDonald I (1969)] _____□

【定理 4.51 (正規化定理)】

1. 任意の代数多様体 X に対して, 正規代数多様体 \tilde{X} と双有理有限射 $f: \tilde{X} \rightarrow X$ の組 (\tilde{X}, f) が双正則同型を除いて一意に存在する. この組を X の正規化という.
2. $f: \tilde{X} \rightarrow X$ を正規化とすると, X のアフィン開集合 $U = \text{Spec}(A)$ に対して, X の関数体 $k(X)$ での A の整閉包を \tilde{A} とすると, $f^{-1}(U) = \text{Spec}(\tilde{A})$ となる.
3. $f: X \rightarrow Y$ を代数多様体の間の支配的な射 (像が一般点を含む射), $\nu_X: \tilde{X} \rightarrow X$ と $\nu_Y: \tilde{Y} \rightarrow Y$ を正規化とする. このとき, $f \circ \nu_X = \nu_Y \circ \tilde{f}$ となる射 $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ が一意に定まる.

_____□

【定理 4.52 (正規多様体の性質)】

1. X を正規代数多様体とすると, その特異点集合は余次元が 2 以上の閉部分多様体となる. 逆に, 非特異代数多様体内の閉超曲面 X に対しては, X の特異点集合の余次元が 2 以上なら X は正規となる.
2. X を代数多様体, U を $X \setminus U$ の余次元が 2 以上となる正規開集合, $j: U \hookrightarrow X$ を開部分スキームとしての埋め込みとする. このとき, 次の 2 条件は同値である:
 - i) X は正規.
 - ii) $\mathcal{O}_X = j_*(\mathcal{O}_U)$.
 - iii) X 上の任意の局所自由層 \mathcal{F} に対して, 自然な準同型写像 $\mathcal{F} \rightarrow j_*(\mathcal{F}|_U)$ (すなわち, 任意の V に対して, $p: \Gamma(V, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U \cap V, \mathcal{F})$) は全単射.

□

4.2.2 因子

4.2.2.1 Weil 因子と Cartier 因子

【定義 4.53 (因子可逆層対応)】 X を正規代数多様体とする.

1. X の余次元 1 の閉部分多様体を素因子 (prime divisor), 素因子の整数係数形式和を (Weil) 因子 (Weil divisor) という. 因子 $D = \sum_i n_i D_i$ は, すべての係数が $n_i \geq 0$ となるとき有効因子 (effective divisor) という. 因子全体のなす加法群を $Z^1(X)$ で表す.
2. X は正規なので, 任意の素因子 D_i に対応する X の (スキームとしての) 点を η_i とすると, 局所環 \mathcal{O}_{X, η_i} は離散付値環となる. 対応する付値を ord_{D_i} とすると, 任意の有理関数 $f = a/b \in k(X)$ に対して, D_i に沿う位数が $\text{ord}_{D_i}(f) = \text{ord}_{D_i}(a) - \text{ord}_{D_i}(b)$ により定義される. したがって, 解析空間の場合と同様に, 有理関数の因子 $(f) = \sum_{D_i} \text{ord}_{D_i}(f) D_i$ が定義できる.
3. 因子 D が局所方程式をもつ, すなわち任意の点に対して開近傍 U とその上の有理関数 $h_U \in k(U)$ が存在して $D|_U = (h_U)$ が成り立つとき, D は Cartier 因子であるという. Cartier 因子全体のなす $Z^1(X)$ の部分群を $\text{Div}(X)$ で表す.

4. Cartier 因子 D に伴う可逆層 $\mathcal{O}_X(D)$ を, 有理関数体 $k(X)$ の定数層 \mathcal{M}_X の部分層として次のように定義する:

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) = \{g \in \Gamma(U, \mathcal{M}_X) \mid (g) + D|_U \geq 0\}. \quad (4.2.1)$$

特に, 有効な Cartier 因子 D に対して, $\mathcal{O}_X(-D)$ は接続イデアル層となり, D に対応する閉部分スキームを定義する.

(注: Cartier でない因子 D に対しても \mathcal{O}_X 加群層 $\mathcal{O}_X(D)$ を上記の式により定義することができる. ただし, この場合, $\mathcal{O}_X(D)$ は階数 1 の接続層となるが可逆層とならない.)

5. 可逆層 \mathcal{L} に対して, $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X$ の切断 s を \mathcal{L} の有理切断 (rational section) という. 各点の適当な開近傍 U において, $\Gamma(U, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X) \cong k(U)$ より, 大域的有理切断 $s \in \Gamma(X, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X)$ に対しては, U 上で $k(U)/\mathcal{O}_X^*(U)$ の元が一意的に定まるので, U 上での因子 $(s)|_U$ が有理関数の因子と同様に定まる. このようにして構成された異なる開集合上の因子は, 整合的に張り合わされて X 上の Cartier 因子 (s) を与える. \mathcal{L} の U 上での局所切断 t が正則である条件は $(t)|_U \geq 0$ となるので, $f = t/s$ とおくと, $\Gamma(U, \mathcal{L})$ は $(f) + (s)|_U \geq 0$ となる. したがって, 4 の定義より, $\mathcal{O}_X((s)) = \mathcal{L}$ となり, また, 切断 s は $1 \in \Gamma(X, \mathcal{M}(X)) = k(X)$ に対応する. よって, $1 \in k(X)$ に対応する $\mathcal{O}_X(D)$ の大域的有理切断を s_D とすると, $D = (s_D)$ が成り立つ.

□

【注 4.54 (滑らかな多様体上の因子)】 正則局所環は一意分解環なので, 滑らかな代数多様体上の Weil 因子はすべて Cartier 因子となる.

[出典: 川又雄二郎「代数多様体論」(共立出版 1997)] □

【例 4.55 (Cartier 因子でない Weyl 因子の例)】 アフィン曲面

$$S \subset \mathbb{C}^3 : S = \text{Spec}(A), \quad A = \mathbb{C}[x, y, z]/(xy + z^2) = R/I$$

を考える. S の関数体 $K(S)$ は

$$K(S) \ni f = a(x, y) + b(x, y)z \pmod{I * K(S)}; \quad a, b \in \mathbb{C}(x, y), \\ z^2 + xy = 0$$

より, $K(S)$ は \mathbb{C} 上の超越次数 2 の関数体 $\mathbb{C}(x, y)$ の 2 次の代数拡大なので,

$$\dim S = 2$$

となる.

次に, R の極大イデアル

$$R \supset M_{(a,b,c)} (x - a, y - b, z - c) \cdot R$$

が I を含むための必要十分条件は, $ab + c^2 = 0$ となる. よって, この条件が満たされる $M_{a,b,c}$ と A の極大イデアル, したがって, S の閉点が 1 対 1 に対応する. これらのうち, $a \neq 0$ となる点では, $1/x \in \mathcal{O}_{(a,b,c)}$ なので,

$$a \neq 0 \Rightarrow y = -\frac{z^2}{x} \Rightarrow \mathfrak{m}_{(a,b,c)} = M_{(a,b,c)} \mathcal{O}_{(a,b,c)} = (x - a \cdot z - c) \mathcal{O}_{(a,b,c)}$$

より, $(\mathcal{O}_{(a,b,c)}, \mathfrak{m}_{(a,b,c)})$ は正則局所環となる. 同様に,

$$b \neq 0 \Rightarrow x = -\frac{z^2}{y} \Rightarrow \mathfrak{m}_{(a,b,c)} = M_{(a,b,c)} \mathcal{O}_{(a,b,c)} = (y - b \cdot z - c) \mathcal{O}_{(a,b,c)}$$

より, $b \neq 0$ となる点も正則点となる.

一方, 原点 $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ では, $\mathbb{C}^*(x, y)$ を原点で正則な有理関数の全体として,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_0 &= \mathbb{C}^*(x, y) + z \cdot \mathbb{C}^*(x, y), \\ \mathfrak{m}_0 &= (x, y) \mathcal{O}_0 + z \cdot \mathbb{C}^*(x, y). \\ \mathfrak{m}_0^2 \subset (x, y) \mathcal{O}_0 &\equiv \mathfrak{n}_0, \quad f^n \in \mathfrak{n}_0 \Rightarrow f \in \mathfrak{m}_0 \\ &\Rightarrow \mathfrak{m}_0 = \sqrt{\mathfrak{n}_0} \neq \mathfrak{n}_0 \end{aligned}$$

が成り立つので, (x, y) が局所環 $(\mathcal{O}_0, \mathfrak{m}_0)$ のパラメーター系となり, 原点 $(0, 0, 0)$ は S の特異点となることがわかる. ただし, この点でも正規であることが容易に確かめられる.

次に S の因子として, y 軸に対応する曲線 Y を考える:

$$\begin{aligned} Y = \text{Spec}(A/J) : \quad J &= (x, z)A, \\ A/J &= R/\tilde{J}; \quad \tilde{J} = (x, z, z^2 + xy)R \end{aligned}$$

この因子 $D = Y$ は, S において Cartier とならない. これを見るために, Y での局所環 $(\mathcal{O}_Y, \mathfrak{m}_Y)$ を求めると,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_Y &= \{f_0^*(x, y) + z f_1^*(x, y) \mid f_0^*, f_1^* \in \mathcal{O}_Y\}, \\ \mathfrak{m}_Y &= \{x f(x, y) + z g(x, y) \mid f^*, g^* \in \mathcal{O}_Y\} \end{aligned}$$

となる。これより,

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_Y^2 &= \{xf^*(x, y) + xzg^*(x, y) \mid f^*, fg^* \in \mathcal{O}_Y\}, \\ \mathfrak{m}_Y^3 &= \{x^2f^*(x, y) + xzg^*(x, y) \mid f^*, g^* \in \mathcal{O}_Y\}, \\ \mathfrak{m}_Y^4 &= \{x^2f^*(x, y) + x^2zg^*(x, y) \mid f^*, g^* \in \mathcal{O}_Y\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_Y/\mathfrak{m}_Y^2 &= \mathbb{C}(y)z, \\ \mathfrak{m}_Y^2/\mathfrak{m}_Y^3 &= \mathbb{C}(y)x, \\ \mathfrak{m}_Y^3/\mathfrak{m}_Y^4 &= \mathbb{C}(y)xz, \\ &\dots \end{aligned}$$

を得る。これより, $\text{ord}_Y(f) = 1$ となる局所関数 f より定まる因子 $\text{div}(f)$ は必ず Y 以外の既約成分をもつので, $\text{div}(f) = Y$ となる関数 f は存在しない。一方, $x = 0$ は S 上では $z = 0$ を意味するので, (x) は既約成分として Y しか含まない。ただし, $x \in \mathfrak{m}_Y^2/\mathfrak{m}_Y^3$ より $\text{ord}_Y(x) = 2$ なので,

$$(x) = 2Y$$

を得る。すなわち, Y は Cartier でないが, $2Y$ は Cartier となる (\mathbb{Q} -Cartier 因子)。□

【命題 4.56 (Weil 因子に対応する接続層)】 滑らかな代数多様体では, Weil 因子は常に Cartier 因子となる。さらに, 一般に, X を正規代数多様体, X_0 をその非特異部分からなる開部分多様体, $j: X_0 \hookrightarrow X$ を埋め込みとすると, X 上の Weil 因子 D は X_0 上で Cartier 因子となり可逆層 $\mathcal{O}_{X_0}(D|_{X_0})$ を定め, さらにその j による順像

$$\mathcal{O}_X(D) := j_*\mathcal{O}_{X_0}(D|_{X_0})$$

は接続層となる。□

【定義 4.57 (Cartier 因子の引き戻し)】 $f: Y \rightarrow X$ を正規代数多様体間の射, D を X 上の Cartier 因子とする。もし, D の各既約成分が像 $f(Y)$ を含まないならば, $f^*\mathcal{O}_X(D)$ は再び可逆層となり, $\text{Supp}(f^*D) = f^{-1}(\text{Supp}(D))$ および $\mathcal{O}_Y(f^*D) = f^*\mathcal{O}_X(D)$ となる Y 上の Cartier 因子として引き戻し (pull-back) f^*D が次のようにして定まる: X の各点の適当な近傍で $D|_U = \text{div}(h)$ のとき, $f^*D|_{f^{-1}(U)} = \text{div}(f^*h)$ 。□

4.2.2.2 標準因子

【定義 4.58 (標準因子)】 X が非特異代数多様体のとき, その標準層 ω_X に対応する因子 K_X を標準因子という. また, X が正規代数多様体のときには, X の非特異部分を U として, K_U から一意的に決まる X 上の Weil 因子を標準因子 K_X と定義する. _____□

【例 4.59 (\mathbb{P}^n の標準因子)】 \mathbb{P}^n の可逆層 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ に対応する因子は

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \Leftrightarrow D = mH \quad (H \text{ は超平面}). \quad (4.2.2)$$

特に, 標準層は

$$\omega_{\mathbb{P}^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1), \quad (4.2.3)$$

標準因子は

$$K_{\mathbb{P}^n} = -(n+1)H \quad (4.2.4)$$

となる.

実際, 斉次座標系

$$\mathbb{A}^{n+1} \ni (X_0, X_1, \dots, X_n) \mapsto [X_0 : X_1 : \dots : X_n] \in \mathbb{P}^n \quad (4.2.5)$$

を用いると,

$$s = d(X_1/X_0) \wedge \dots \wedge d(X_n/X_0) \quad (4.2.6)$$

は $\omega_{\mathbb{P}^n}$ の有理切断を与え, $j \neq 0$ に対して

$$s = -(X_0/X_j)^{-n-1} d(X_0/X_j) \wedge \dots \wedge d(X_{j-1}/X_j) \wedge d(X_{j+1}/X_j) \wedge \dots \wedge d(X_n/X_j) \quad (4.2.7)$$

より, $K_{\mathbb{P}^n} \cong \div(s) = -(n+1) \div(X_0) \cong -(n+1)H$. _____□

【定理 4.60 (標準因子の変換公式)】 X を滑らかな代数多様体, Y をその滑らかな素因子とする. このとき,

$$(K_X + Y)|_Y = K_Y$$

すなわち,

$$\mathcal{O}_X(K_X + Y) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y(K_Y)$$

が成り立つ. _____□

4.3 射影的スキーム

4.3.1 射影的スキームの位置付け

【注 4.61】

1. すべての代数的多様体は完備な代数的多様体に稠密な開部分スキームとして埋め込むことができる. [Nagata M (1962)]
2. すべての完備な代数曲線は射影的である.
3. すべての非特異で完備な代数曲面は射影的である. [Zeriski O (1958)]
4. 特異で完備な非射影的代数曲面が存在する. [Nagata M (1957)]
5. 非特異かつ完備で非射影的な3次元代数多様体が存在する. [Nagata M (1958), Hironaka H (1960)]

[< [Har77]] _____ □

4.3.2 Proj スキーム

【定義 4.62 (定義)】 $A = \bigoplus_j A_j$ を任意の非負の次数付き環 ($j < 0$ のとき $A_j = 0$) とする. $t \in k^*$ による A の線形変換を $a \in A_j \mapsto t^j a \in A_j$ により定義し, それらの作る変換群を G_m で表す. A からスキーム $\text{Proj}(A) = (X, \mathcal{O}_X)$ を次のように構成する:

0. 次数付き環 A のイデアル I が,

$$I = \bigoplus_j I_j, \quad I_j = I \cap A_j$$

を満たすとき, 斉次イデアルという. この条件は $G_m I \subset I$ と同値となる.

1. 点集合としては, A の斉次素イデアル \mathfrak{p} で $A_+ = \sum_{j>0} A_j$ を含まないものの全体を X とする.

$$X = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid G_m \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}, A_+ \not\subset \mathfrak{p}\}. \quad (4.3.1)$$

2. A の適当な斉次イデアル I を用いて

$$\tilde{V}(I) = \{\mathfrak{p} \in X \mid I \subset \mathfrak{p}\} = V(I) \cap X \quad (4.3.2)$$

と表される部分集合を X の閉集合と定義する. これは閉集合の公理をみたし, X に位相を定義する. このとき, 斉次元 $h \in A$ を用いて

$$\begin{aligned} \tilde{U}(h) &= \text{Proj}(A) \setminus \tilde{V}((h)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(A) \mid h \notin \mathfrak{p}\} \\ &= \text{Proj}(A) \cap U(h), \quad G_m(h) = (h) \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

と表される集合の族が開集合の基本系となり, 基本開部分集合という.

3. A_+ に属する斉次元 h に対して, 局所化 A_h の次数ゼロの元で作る部分環を $A_{(h)} = A_{h,0}$ とおくと, 基本開部分集合 $\tilde{U}(h)$ は, 位相空間として $\text{Spec}(A_{(h)})$ と同相となる. そこで, 対応

$$\tilde{U}(h) \mapsto \Gamma(\tilde{U}(h), \mathcal{O}_X) = A_{(h)} = \{f \in A[1/h] \mid G_m f = f\} \quad (4.3.4)$$

により前層をつくり層化をすると, X は局所環付空間となり, $\tilde{U}(h)$ はアフィン開集合となる:

$$\mathcal{O}_X|_{\tilde{U}(h)} = \tilde{A}_{(h)}, \quad (4.3.5)$$

$$\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = A_{(\mathfrak{p})} = \{f \in A_{\mathfrak{p}} \mid G_m f = f\}. \quad (4.3.6)$$

すなわち, $\text{Proj}(A)$ は $\text{Spec}(A) \setminus \mathfrak{p}_0$ (\mathfrak{p}_0 は原点に対応する素イデアル) を G_m の作用で不変な”点”および関数に制限したものである. \square

【注 4.63 (Spec との関係)】 次数付き多元環 A が退化するとき, すなわち, $A_j = 0 (j = 1, 2, \dots)$ となるとき,

$$\text{Proj}(A) = \text{Spec}(A_0)$$

となる. \square

【命題 4.64 (Proj 関手の非単射性)】 次数付環 $A = \bigoplus_{j \geq 0} A_j$ と正の整数 d に対して, $A^{(d)} := \bigoplus_{j \geq 0} A_{dj}$ と定義する. このとき, 自然な同型

$$\text{Proj}(A) \rightarrow \text{Proj}(A^{(d)}); \quad \mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p} \cap A^{(d)} \quad (4.3.7)$$

が存在する. \square

【定義 4.65 (Proj 上の準連接層)】 A を非負の次数付環, $M = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} M_j$ を A 上の次数付加群とする. $t \in G_m = k^*$ の M への作用を, $v \in M_j \mapsto t^j v \in M_j$ により定義する.

1. $\text{Proj}(A)$ の各基本開集合 $\tilde{U}(h)$ で

$$\tilde{M}|_{\tilde{U}(h)} = \tilde{M}(h); \quad (4.3.8)$$

$$M_{(h)} := \{v \in M_h = M \otimes_A A_h \mid G_m v = v\} \quad (4.3.9)$$

とおくことにより, $\text{Proj}(A)$ 上の準連接層 \tilde{M} が定義される.

2. 特に, 整数 m に対して, 次数付 A 加群 $A(m)$ を

$$A(m)_j = A_{m+j} \quad (4.3.10)$$

により定義するとき, $X = \text{Proj}(A)$ に対して

$$\mathcal{O}_X(m) := \widetilde{A(m)} \quad (4.3.11)$$

と定義する.

□

【命題 4.66 (Proj の閉部分スキーム)】 A を非負の次数付環, I をその斉次イデアルとする. このとき, $\text{Proj}(A/I)$ は, 台が $\tilde{V}(I)$, 構造層が \mathcal{O}_X/\tilde{I} となるような $\text{Proj}(A) = (X, \mathcal{O}_X)$ の閉部分スキームになる. —□

4.3.3 射影的スキーム

【定義 4.67 (射影空間)】 $A = k[x_0, \dots, x_n]$ における次数付けを, $t \in G_m = k^*$ の作用を $x_j \rightarrow tx_j$ により定義することで定める. この次数付けでの $\text{Proj}(A)$ を射影空間という:

$$\mathbb{P}^n := \text{Proj}(k[x_0, \dots, x_n]) = (\mathbb{A}^{n+1} - \{0\})/G_m, \quad (4.3.12)$$

□

【命題 4.68 (射影空間の接続層)】 射影空間 $\mathbb{P}^n = \text{Proj}(k[x])$ ($[x] = [x_0, \dots, x_n]$) において, M がその有限個の斉次元から生成される次数付 $k[x]$ -加群ならば, \tilde{M} は \mathbb{P}^n 上の接続層となる. M の生成元を v_1, \dots, v_k , その次数を d_1, \dots, d_k とすると, 基本開集合 $\tilde{U}(h)$ ($\deg(h) = d$) において

$$\Gamma(\tilde{U}(h), \tilde{M}) = \sum_j \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\tilde{U}(h))[x]_{dl_j-d_j} h^{-l_j} v_j \quad (4.3.13)$$

となる. ここで, l_j は $dl_j - d_j \geq 0$ となる整数, $R[x]_m$ は R 係数の m 次同次多項式の全体で張られる R 加群.

特に, 任意の整数 m に対して, $A(m) = k[x](m)$ は次数 $-m$ の 1 個の元 1 により生成される次数付 $k[x]$ -加群なので, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ は可逆層となり, アフィン開集合 $U_j = \tilde{U}(x_j)$ では

$$\Gamma(U_j, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = k[x/x_j] x_j^m \quad (j = 0, 1, \dots, n) \quad (4.3.14)$$

となる. したがって, 大域的切断は

$$\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = (k[x_0, \dots, x_n])_m \quad (m \text{ 次の斉次多項式の全体}) \quad (4.3.15)$$

□

【定義 4.69 (射影的スキーム)】 スキーム X は適当な次元の射影空間 \mathbb{P}^n への閉部分スキームとしての埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ が存在するとき, 射影的スキーム (projective scheme) という. 射影的スキームは代数的スキームである. 特に, X が代数多様体となるときには, 射影的多様体 (projective variety) という. □

【定理 4.70 (射影的スキームの分離性)】 射影的なスキームは分離的代数的スキームとなる. □

【定義 4.71 (重み付き射影空間)】 $\{a_0, \dots, a_n\}$ を最大公約数が 1 となる正整数の組とする. $G_{a_0, \dots, a_n} = k^* \ni t$ の $A = k[x_0, \dots, x_n]$ への作用 (準同型) を $x_j \mapsto t^{a_j} x_j$ により定め, この作用によりかかる t のべきにより A の各元の次数付けを行う. このようにして得られる次数付環を A_{a_0, \dots, a_n} とするとき, $\text{Proj}(A_{a_0, \dots, a_n})$ を重み付き射影空間 (weighted projective space) といい,

$$\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n) = \text{Proj}(A_{a_0, \dots, a_n}) = (\mathbb{A}^{n+1} - \{0\})/G_{a_0, \dots, a_n} \quad (4.3.16)$$

で表す。これは、 \mathbb{P}^n の商空間となる：

$$\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n) = \mathbb{P}^n / (\mathbb{Z}_{a_0} \times \dots \times \mathbb{Z}_{a_n}). \quad (4.3.17)$$

□

【命題 4.72 (Proj の射影性)】 重み付き射影空間 $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$ は、射影的代数多様体である。これより、次数付環 A において、 $A_0 = k$ で A が A_0 上有限個の斉次元で生成されるならば、 $\text{Proj}(A)$ は射影的スキームとなる。 □

【証明へ】

4.3.4 接続層

【定義 4.73 (大域的切断で生成される接続層)】 X を代数的スキーム、 \mathcal{F} を X 上の接続層、 V を $\mathcal{F}(X)$ の有限次元部分空間とする。自然な \mathcal{O}_X 加群層の射 $V \otimes_k \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}$ が全射となるとき、 \mathcal{F} は V で生成される (generated) という。特に、 $V = \mathcal{F}(X)$ のとき、 \mathcal{F} は大域的切断で生成されるという。 □

【定義 4.74 (可逆層の豊富さ)】 X を射影的スキームとして、その射影空間 \mathbb{P}^n への埋め込みにより

$$\mathcal{O}_X(m) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \otimes_{\mathbb{P}^n} \mathcal{O}_X \quad (4.3.18)$$

とおく。 \mathcal{L} を X 上の可逆層とすると、

- 1) (適当な埋め込みにより) $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(1)$ となるとき、非常に豊富 (very ample) であるという。
- 2) 適当な正の整数 m が存在して、 $\mathcal{L}^{\otimes m}$ が非常に豊富となるとき、豊富 (ample) であるという。
- 3) 適当な正の整数 m が存在して、 $\mathcal{L}^{\otimes m}$ が大域的切断で生成されるとき、半豊富 (semi-ample) であるという。

□

【定理 4.75 (大域的切断と豊富さ)】 X を射影的なスキーム, \mathcal{L} その上の可逆層とする. このとき, X 上の任意の連接層 \mathcal{F} に対して整数 m_0 が存在し, 任意の整数 $m \geq m_0$ に対して $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}$ は大域的切断で生成される. □

【定理 4.76 (大域的切断と射影射)】 代数的スキーム X 上の可逆層 \mathcal{L} と \mathcal{L} を生成する有限次元線形部分空間 $V \subset H^0(X, \mathcal{L})$ を与える. このとき, 射

$$\Phi_V : X \rightarrow \mathbb{P}(V)$$

が存在して, $\mathcal{L} = \Phi_V^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ となる. □

【定理 4.77 (射影性と Proj の関係)】 X を射影的スキーム, \mathcal{L} をその上の半豊富な可逆層とする. このとき, 次数付環

$$A = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes m}) \quad (4.3.19)$$

は有限生成な k 多元環となる. さらに, \mathcal{L} が豊富な可逆層なら, $X \cong \text{Proj}(A)$ が成り立つ. □

4.3.5 双対定理と消滅定理

【定理 4.78 (射影的スキーム上の連接層のコホモロジー)】 \mathcal{F} を射影的スキーム X 上の連接層とする. このとき, 任意の整数 p に対して, $H^p(X, \mathcal{F})$ は有限次元 k -ベクトル空間となる. また, $p > n = \dim X$ ならば, $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$ となる. [川又 97] [Har77] □

【定理 4.79 (Serre の双対定理)】 X を滑らかで射影的な n 次元代数多様体, \mathcal{F} をその上の局所自由層, $\check{\mathcal{F}} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ をその双対層とする. このとき,

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^{n-i}(X, \check{\mathcal{F}} \otimes \omega_X)' \quad (4.3.20)$$

が成り立つ. ここで, 右辺において V' は線形空間 V の双対空間を表す. 特に, 可逆層 $\mathcal{O}_X(D)$ に対して,

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(D)) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{O}_X(K_X - D))' \quad (4.3.21)$$

また, Ω^p を正則 p -形式の層として,

$$H^q(X, \Omega^p) \cong H^{n-q}(X, \Omega^{n-p}). \quad (4.3.22)$$

[< [Har77]] _____ □

【定理 4.80 (小平の消滅定理 [Kodaira K (1963)])】 X を滑らかで射影的な \mathbb{C} 上の n 次元代数多様体, \mathcal{L} をその上の豊富な可逆層とする. このとき,

$$H^p(X, \mathcal{L} \otimes K_X) = 0 \quad \text{for } p > 0, \quad (4.3.23a)$$

$$H^q(X, \mathcal{L}^{-1}) = 0 \quad \text{for } q < n. \quad (4.3.23b)$$

_____ □

【注 4.81】 小平の消滅定理は, 係数体の標数が正の時には成り立たない. [Raynaud] [< [Har77]] _____ □

【定理 4.82 (Serre の消滅定理, 豊富性の判定条件)】 X を射影的なスキームとすると, その上の可逆層 \mathcal{L} に対するつぎの 2 つの条件は同値である:

- (1) \mathcal{L} は豊富である.
- (2) X 上の任意の連接層 \mathcal{F} に対して, 整数 m_0 が存在して, 任意の正の整数 p および任意の整数 $m \geq m_0$ に対して, $H^p(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) = 0$ となる.

[< [川又 97] < [Har77]] _____ □

4.3.6 線形系

【定理 4.83 (完備線形系)】 X を正規な射影的代数多様体, D をその上の Cartier 因子とすると, 次の全単射が存在する:

$$\mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(D))) \rightarrow |D| := \{D' \mid D' \geq 0, D' \sim D\}.$$

ここで, 有効な Cartier 因子の集合 $|D|$ を D の完備線形系 (complete linear system) という. _____ □

【定義 4.84 (線形系)】 X を正規な射影的代数多様体とする.

1. D を X 上の Cartier 因子とすると、 $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ の有限次元線形部分空間 V に対応する完備線形系 $|D|$ の射影的線形部分空間 Λ を線形系 (linear system) という. $\dim V = r+1$ のとき、 $\Lambda \cong \mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^r$ となるので、 r を線形系 Λ の次元という.
2. X の点 P は、すべての因子 $D' \in \Lambda$ に対して、 $P \in \text{Supp}(D')$ となるとき、線形系 Λ の固定点 (fixed point) であるという. 固定点全体の集合 $\text{Bs } \Lambda$ は閉集合をなす.
3. 点 P が線形系 Λ の固定点でないとき、 Λ は P で自由 (free) であるという. すべての点で自由な線形系は、単に自由な線形系という.
4. 線形系 Λ において、任意の $D' \in \Lambda$ に対し $F \leq D'$ となる有効因子 F のうちで最大のものを、 Λ の固定部分 (fixed part) といい、 $M = D - F$ を可動部分 (movable part) という.

□

4.3.7 交点数

【定義 4.85 (射影的代数多様体での交点数)】 M が射影的代数多様体 X に伴うコンパクト解析的多様体であるとき、 X 上の可逆層 $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_d$ と代数的 d サイクル Z との交点数を

$$(\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_d \cdot Z) := (\mathcal{L}_1^h \cdots \mathcal{L}_d^h \cdot Z^h)$$

により定義する.

□

【命題 4.86 (被覆写像と交点数)】 $f: Y \rightarrow X$ を 2 つの n 次元射影的代数多様体の間の全射正則射、 $m = [\mathbb{C}(Y) : \mathbb{C}(X)]$ を関数体の拡大次数とする. このとき、

- i) $f_*[Y^h] = m[X^h] \in H_{2n}(X^h, \mathbb{Z})$ となる.
- ii) X 上の可逆層たち \mathcal{L}_i ($i = 1, \dots, n$) に対して、 $(f^* \mathcal{L}_1 \cdots f^* \mathcal{L}_n) = m(\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_n)$ となる.

□

【定義 4.87 (Cartier 因子の交点数)】 X を n 次元の射影的代数多様体とする. X 上の Cartier 因子 D_i ($i = 1, \dots, d$) および d 次元閉部分多様体 Z に対して

$$(D_1 \cdots D_d \cdot Z); = (\mathcal{O}_X(D_1) \cdots \mathcal{O}_X(D_d) \cdot Z)$$

と定義する.

□

【定理 4.88 (Cartier 因子の Chern 類)】 D を滑らかな射影的代数多様体 X 上の Cartier 因子, $[D]^*$ をそのホモロジー類の Poincaré 双対とすると, 次の関係式が成り立つ:

$$c_1(\mathcal{O}_X(D)) = [D]^* \in H^2(X^h, \mathbb{Z}).$$

□

【定理 4.89 (Euler 数の評価)】 X を n 次元の射影的スキーム, \mathcal{L} を可逆層, \mathcal{F} を接続層とする.

1. $\chi(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m})$ は m に関して次数が高々 n の多項式となる.
2. 任意の正の整数 p に対して, $\dim H^p(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m})$ は m に関する n 次の多項式で上からおさえられる.

□

4.3.8 Riemann-Roch の定理

この節では, 係数体はすべて \mathbb{C} とする.

4.3.8.1 Chern 標数と Todd 標数

【定理 4.90 (Chern 類の存在)】 滑らかな射影的代数多様体 X 上の階数 r の局所自由層 \mathcal{F} に対して, 次の性質を満たす i 番目の Chern 類 $c_i(\mathcal{F}) \in H^{2i}(X^h, \mathbb{Z})$ ($0 \leq i \leq r$) が定義できる. ただし, $c(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^r c_i(\mathcal{F}) \in H^*(X^h, \mathbb{Z})$ は全 Chern 類である.

- 0) $c_0 = 1$.
- 1) 滑らかな射影的代数多様体間の正則射 $f : X \rightarrow Y$ に対して, $c(f^*\mathcal{F}) = f^*c(\mathcal{F})$.
- 2) 局所自由層たちの完全系列 $0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3 \rightarrow 0$ に対して, $c(\mathcal{F}_2) = c(\mathcal{F}_1)c(\mathcal{F}_3)$.
- 3) 可逆層 \mathcal{L} に対して, $c(\mathcal{L}) = 1 + c_1(\mathcal{L})$.

□

【定理 4.91 (Chern 類の別の定義)】 滑らかな射影的代数多様体 X 上の階数 r の局所自由層 \mathcal{F} に対して, $p : Y = \mathbb{P}(\mathcal{F}) \rightarrow X$ を対応する射影空間束, $\xi = c_1(\mathcal{O}_Y(1))$ とすると,

$$\sum_{i=0}^r (-1)^i p^* c_i(\mathcal{F}) \xi^{r-i} = 0$$

が成り立つ.

□

【命題 4.92 (接束の第 1 Chern 類)】 $c_1(\mathcal{F}) = c_1(\det(\mathcal{F}))$ となる. 特に, $c(X) := c(\mathcal{T}_X)$ と定義すると, $c_1(X) = c_1(-K_X)$ が成り立つ. □

【定義 4.93 (Chern 標数)】 滑らかな射影的代数多様体 X 上の階数 r の局所自由層 \mathcal{F} に対して, 次数 1 の形式元 ξ_j ($j = 1, \dots, r$) を用いてその全 Chern 類を

$$c(\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^r (1 + \xi_j)$$

と形式的に分解する. このとき,

$$ch(\mathcal{F}) := \sum_j e^{\xi_j} \in H^*(X, \mathbb{Q})$$

によって定義される全コホモロジー環の元 $ch(\mathcal{F})$ を **Chern 標数** (Chern characteristic) という. このとき,

$$ch(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{\infty} ch_i(\mathcal{F}); \quad ch_i(\mathcal{F}) \in H^i(X, \mathbb{Q})$$

により定義されるコホモロジー類 $ch_i(\mathcal{F})$ は $c_1(\mathcal{F}), \dots, c_i(\mathcal{F})$ の (r に依存しない) 多項式となる. 具体的な形は,

$$\begin{aligned} ch_0 &= r, \\ ch_1 &= c_1, \\ ch_2 &= \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2), \\ ch_3 &= \frac{1}{6}(c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3), \\ ch_4 &= \frac{1}{24}(c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 + 2c_2^2 - 4c_4). \end{aligned}$$

□

【定義 4.94 (Todd 標数)】 滑らかな射影的代数多様体 X 上の階数 r の局所自由層 \mathcal{F} に対して, 次数 1 の形式元 ξ_j ($j = 1, \dots, r$) を用いてその全 Chern 類を

$$c(\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^r (1 + \xi_j)$$

と形式的に分解する. このとき,

$$td(\mathcal{F}) := \prod_j \frac{\xi_j}{1 - e^{-\xi_j}} \in H^*(X, \mathbb{Q})$$

によって定義される全コホモロジー環の元 $td(\mathcal{F})$ を **Todd 標数** (Todd characteristic) という. このとき,

$$td(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{\infty} td_i(\mathcal{F}); \quad td_i(\mathcal{F}) \in H^i(X, \mathbb{Q})$$

により定義されるコホモロジー類 $td_i(\mathcal{F})$ は $c_1(\mathcal{F}), \dots, c_i(\mathcal{F})$ の (r に依存しない) 多項式となる. 具体的な形は,

$$\begin{aligned} td_0 &= 1, \\ td_1 &= \frac{1}{2}c_1, \\ td_2 &= \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2), \\ td_3 &= \frac{1}{24}c_1c_2, \\ td_4 &= \frac{1}{720}(-c_1^4 + 4c_1^2c_2 + 3c_2^2 + c_1c_3 - c_4). \end{aligned}$$

□

4.3.8.2 Riemann-Roch の定理

【定理 4.95 (Hirzebruch-Riemann-Roch)】 滑らかな n 次元射影的代数多様体 X 上の局所自由層 \mathcal{F} に対して, 次の関係式が成り立つ:

$$\chi(X, \mathcal{F}) = (ch(\mathcal{F}) td(\mathcal{T}_X))_{2n} [X]. \quad (4.3.24)$$

□

説明. 例えば, \mathcal{F} が可逆層のとき, $c_1(\mathcal{F}) = \xi, c_i = c_i(X)$ とおくと, $n = 1, 2, 3, 4$ に対して

$$\begin{aligned} \chi(X_1, \mathcal{F}) &= \xi + \frac{1}{2}c_1, \\ \chi(X_2, \mathcal{F}) &= \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}c_1\xi + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2), \\ \chi(X_3, \mathcal{F}) &= \frac{1}{6}\xi^3 + \frac{1}{4}c_1\xi^2 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2)\xi + \frac{1}{24}c_1c_2, \\ \chi(X_4, \mathcal{F}) &= \frac{1}{24}\xi^4 + \frac{1}{12}c_1\xi^3 + \frac{1}{24}(c_1^2 + c_2)\xi^2 + \frac{1}{24}c_1c_2\xi \\ &\quad + \frac{1}{720}(-c_1^4 + 4c_1^2c_2 + 3c_2^2 + c_1c_3 - c_4). \end{aligned}$$

Q.E.D.

【定理 4.96 (交点数と Euler 数の関係)】 X を n 次元の射影的代数多様体とする.

1. X 上の可逆層 \mathcal{L} に対して, $(\mathcal{L}^n) = (\mathcal{L} \cdots \mathcal{L})$ とおくと,

$$\chi(X, \mathcal{L}^{\otimes m}) = \frac{m^n}{n!}(\mathcal{L}^n) + (m \text{ に関して低次の多項式}).$$

2. X 上の可逆層 $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$ に対して,

$$\begin{aligned} \chi(X, \mathcal{L}_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_n^{\otimes m_n}) \\ = (\mathcal{L}_1 \cdots \mathcal{L}_n)m_1 \cdots m_n + (m_1, \dots, m_n \text{ に関する他の項}) \end{aligned}$$

□

4.3.9 射影的射

【定義 4.97 (相対射影的スキーム)】 代数的スキーム X とその上の次数付 \mathcal{O}_X -多元環の層 $\mathcal{A} = \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{A}_m$ で次の条件を満たすものを考える:

- 1) 任意の m に対して, \mathcal{A}_m は連接層となる.
- 2) \mathcal{A} は \mathcal{A}_0 多元環の層として, 有限個の m に対する \mathcal{A}_m たちで生成される.

このとき, X の各アフィン開集合 U_j において, 自然な射 $\mathcal{O}_X(U_j) \rightarrow \mathcal{A}(U_j)$ は, スキーム射

$$Y_j = \text{Proj}(\mathcal{A}(U_j)) \rightarrow U_j = \text{Spec}(\mathcal{O}_X(U_j))$$

を誘導し, 張り合わせにより X 上の代数的スキーム Y を定める. この Y を $\text{Proj}_X \mathcal{A}$ と書き, X 上の射影的スキームまたは射影的 X -スキームとよぶ. 射影 $f: Y \rightarrow X$ は射影的射 (projective morphism) と呼ばれる. \square

【定義 4.98 (射影空間束)】 代数的スキーム X 上の局所自由層 \mathcal{V} から, 対称テンソル積により X 上の次数付加群層 $\mathcal{A} = \text{Sym}_{\mathcal{O}_X}^* \mathcal{V}$ を作る. この次数付加群層から構成される X 上の射影的スキーム $\text{Proj}_X \mathcal{A}$ を射影空間束 (projective space bundle) といい, $\mathbb{P}_X(\mathcal{V})$ で表す. \square

説明. X の各点で適当なアフィン開集合 U と k 上の線形空間 \mathcal{V} が存在して, $\mathcal{V}|_U = \mathcal{O}_U \otimes_k \mathcal{V}$ となる. これより, $\mathcal{A}|_U \cong \mathcal{O}_U[\mathcal{V}] = \mathcal{O}_U \otimes_k k[\mathcal{V}]$ ($k[\mathcal{V}]$ は $\dim \mathcal{V}$ 個の変数をもつ多項式環) となるので, $W = \mathbb{P}_U(\mathcal{V}|_U) \cong U \times_k \mathbb{P}(\mathcal{V})$ となる. $\mathbb{P}_X(\mathcal{V})$ はこれらを張り合わせたもの. したがって, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(\mathcal{V})}(1)|_W = p_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{V})}(1)$ が成り立つ.

さらに, これより, $p: \mathbb{P}_X(\mathcal{V}) \rightarrow X$ を自然な射影的射とすると, $p_* \mathcal{O}_W(m) = \mathcal{O}_U \otimes_k \Gamma(\mathbb{P}(\mathcal{V}), \mathbb{P}(\mathcal{V})(m))$. よって, m が正の整数のとき,

$$p_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(\mathcal{V})}(m) \cong \text{Sym}_{\mathcal{O}_X}^m \mathcal{V}$$

となる.

Q.E.D.

【定理 4.99 (射影空間束への埋め込み)】 Y が代数的スキーム X 上の射影的スキームであることと, Y が X 上の射影空間束の閉部分スキームであることは同等である. 正確には次が成り立つ.

$f: Y \rightarrow X$ を代数的スキーム X 上の射影的スキームとすると, X 上の射影空間束 $p: \mathbb{P}_X(\mathcal{V}) \rightarrow X$ への Y の閉スキームとしての埋め込み $j: Y \hookrightarrow \mathbb{P}_X(\mathcal{V})$ が存在して, $f = p \circ j$ となる.

逆に, 代数的スキーム Y が, 代数的スキーム X 上の射影空間束 $p: \mathbb{P}_X(\mathcal{V}) \rightarrow X$ の閉スキームとすると, Y は X 上の射影的スキーム $f: Y = \text{Proj}_X \mathcal{A} \rightarrow X$ となり, 埋め込みを $j: Y \hookrightarrow \mathbb{P}_X(\mathcal{V})$ として $f = p \circ j$ が成り立つ. ここで, $\mathcal{O}_Y(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(\mathcal{V})}(1) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(\mathcal{V})}} \mathcal{O}_Y$ に対して, $\mathcal{A} = \bigoplus_{j \geq 0} f_* \mathcal{O}_Y(j)$. □

【定義 4.100 (f -豊富)】 $f: Y = \text{Proj}_X \mathcal{A} \rightarrow X$ を X 上の射影的スキームとすると, アフィン開集合 $U \subset X$ 上で, $\tilde{U} = f^{-1}(U) = \text{Proj} \mathcal{A}(U)$ となるので, \tilde{U} 上で可逆層 $\mathcal{O}_{\tilde{U}}(1) = \mathcal{A}(U)(1)$ が構成でき, 張り合わせにより, Y 上の可逆層 $\mathcal{O}_Y(1)$ を定義する. このとき, 一般に Y 上の可逆層 \mathcal{L} について,

1. 適当な表現 $Y = \text{Proj}_X \mathcal{A}$ のもとで, $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_Y(1)$ となるとき, 非常に f -豊富 (f -very ample) であるという.
2. 適当な正の整数 m が存在して, $\mathcal{L}^{\otimes m}$ が非常に f -豊富となるとき, f -豊富であるという.

□

4.3.10 豊富性の数値的判定

4.3.10.1 \mathbb{Z} -可逆層

【命題 4.101 (閉部分スキームへの制限)】 射影的な代数的スキーム X に対して, その上の可逆層 \mathcal{L} が豊富となるための必要十分条件は, X の任意の閉部分多様体 Z に対して $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z$ が豊富となることである. □

【命題 4.102 (豊富さの伝播)】 射影的な代数的スキーム間の有限射 $f: X \rightarrow Y$ と Y 上の可逆層 \mathcal{L} に対して, \mathcal{L} が豊富なら $f^* \mathcal{L}$ も豊富である. さらに, f が全射ならば, 逆も成り立つ. □

【定理 4.103 (中井の判定条件)】 射影的な代数的スキーム X の上の可逆層 \mathcal{L} が豊富になるためには, 任意の閉部分多様体 Z に対して,

$$(\mathcal{L}^d \cdot Z) > 0 \quad (d = \dim Z)$$

が成り立つことが必要十分である. _____□

【定義 4.104 (数値的同値性)】 射影的な代数多様体 X 上の可逆層 \mathcal{L} と \mathcal{L}' は, X 上の任意の曲線 C に対して $(\mathcal{L} \cdot C) = (\mathcal{L}' \cdot C)$ となるとき, 数値的に同値 (numerically equivalent) であるといい, $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}'$ で表す. 特に, $\mathcal{L} \equiv 0$ のとき, 数値的に自明 (numerically trivial) であるという.

X が正規な場合, Cartier 因子 D と D' は, $\mathcal{O}_X(D) \equiv \mathcal{O}_X(D')$ となるとき, 数値的に同値であるといい, $D \equiv D'$ で表す. _____□

【定理 4.105 (数値的同値性と Chern 類との関係)】 滑らかな射影的代数多様体 X の上の可逆層 \mathcal{L} と \mathcal{L}' が数値的に同値になるための必要十分条件は, $c_1(\mathcal{L}) = c_1(\mathcal{L}') \in H^2(X^h, \mathbb{Q})$ となることである. _____□

【系 4.106】 可逆層 \mathcal{L} に対して, $\mathcal{L} \equiv 0$ ならば, $\chi(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}) = \chi(X, \mathcal{F})$ となる. _____□

4.3.10.2 \mathbb{Q} -可逆層, \mathbb{R} -可逆層

【定義 4.107 (\mathbb{Q} -可逆層, \mathbb{R} -可逆層)】 代数多様体 X に対して, Picard 群 $\text{Pic}(X)$ を \mathbb{R} 係数に拡大した群 $\text{Pic}(X)_{\mathbb{R}} = \text{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ の元を \mathbb{R} -可逆層 (\mathbb{R} -invertible sheaf) という. また, その部分群 $\text{Pic}(X)_{\mathbb{Q}} = \text{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の元を \mathbb{Q} -可逆層 (\mathbb{Q} -invertible sheaf) という. _____□

【定義 4.108 (数値的同値性とネフ)】 X を射影的な代数多様体とする. 可逆層と閉部分多様体の交点数の定義は \mathbb{R} -可逆層に自然に拡張できる.

1. 任意の曲線 $C \subset X$ に対して $(\mathcal{L} \cdot C) \geq 0$ となる (\mathbb{R} -) 可逆層 \mathcal{L} は, 数値的に半正 (numerically semi-positive) またはネフ (nef) であるという.
2. 2つの \mathbb{R} -可逆層 \mathcal{L} と \mathcal{L}' は, X 上の任意の曲線 C に対して $(\mathcal{L} \cdot C) = (\mathcal{L}' \cdot C)$ となるとき, 数値的に同値であるといい, $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}'$ で表す.

3. X 上の2つの \mathbb{R} -1 サイクル $C, C' \in Z_1(X)_{\mathbb{R}}$ は, X 上の任意の可逆層 \mathcal{L} に対して, $(\mathcal{L} \cdot C) = (\mathcal{L} \cdot C')$ となるとき, 数値的に同値であるといい, $C \equiv C'$ で表す.

□

【定理 4.109 (射影公式)】 射影的な代数多様体間の射 $f: X \rightarrow Y$ が与えられたとき, X 上の曲線 C と Y 上の可逆層 \mathcal{L} に対して

$$(f^* \mathcal{L} \cdot C) = (\mathcal{L} \cdot f_* C)$$

が成り立つ. _____ □

【命題 4.110 (ネフの伝播)】 射影的な代数多様体間の射 $f: X \rightarrow Y$ と Y 上の \mathbb{R} -可逆層 \mathcal{L} に対して, \mathcal{L} がネフなら, $f^* \mathcal{L}$ もネフとなる. さらに, f が全射なら, 逆もなりたつ. _____ □

【定理 4.111 (ネフ可逆層と部分多様体の交わり)】 射影的な n 次元代数多様体 X 上のネフな可逆層を \mathcal{L} とすると, 任意の部分多様体 Y ($\dim Y = d$) に対して, $(\mathcal{L}^d \cdot Y) \geq 0$ となる. _____ □

【定義 4.112 (豊富錘と曲線の錘)】 射影的な代数多様体 X に対して, 互いに双対な有限次元実ベクトル空間を次のように定義する:

$$\begin{aligned} N^1(X) &= \{\mathbb{R}\text{-可逆層の数値的同値類}\} \\ &= \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \{\text{可逆層の数値的同値類}\}, \\ N_1(X) &= \{\mathbb{R}\text{-1-サイクルの数値的同値類}\} \\ &= \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \{1\text{-サイクルの数値的同値類}\} \end{aligned}$$

$N^1(X)$ は, **Neron-Severi 群**

$$NS(X) := c_1(\text{Pic}(X)) \subset H^2(X^h, \mathbb{Z})$$

に対応する実線形空間 $NS(X)_{\mathbb{R}}$ と同型である:

$$N^1(X) \cong NS(X)_{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} NS(X).$$

この空間の次元を **Picard 数** といい,

$$\rho(X) := \dim NS(X)_{\mathbb{R}}$$

で表す.

豊富な可逆層の数値的同値類たち全体が生成する, $N^1(X)$ 中の凸錐体 $Am(X)$ を豊富錐 (ample cone) という. 豊富錐は開集合となる. また, 曲線の数値的同値類たち全体が生成する, $N_1(X)$ 中の閉じた凸錐体 $Cv(X)$ を曲線の錐 (cone of curves) という. $Cv(X)$ は $\overline{NE}(X)$ と表す. —□

【定理 4.113 (Kleiman の判定条件)】 射影的な代数多様体 X の豊富錐と曲線の錐は次に意味で互いに双対錐となる :

$$\begin{aligned} Am(X) &= \{z \in N^1(X) \mid (z \cdot w) > 0 \forall w \in Cv(X) \setminus \{0\}\}, \\ Cv(X) \setminus \{0\} &= \{w \in N_1(X) \mid (z \cdot w) > 0 \forall z \in Am(X)\}, \end{aligned}$$

□

【注 4.114 (Abel 曲面の豊富錐)】 ネフという概念は豊富という概念に非常に近いものである. 実際, Abel 曲面 (複素トーラスと同型となる滑らかな射影的代数曲面) に対しては, $N^1(X)$ 中で $[\mathcal{L}]^2 > 0$ により定義される錐体は2つの連結成分を持ち, その一つが $Am(X)$ と一致する.

□

【定義 4.115 (相対的 1-サイクルと f -ネフ)】 $f: X \rightarrow S$ を代数多様体間の射影的正則射とする.

1. X 上の曲線 C は, $f(C)$ が S 上の1点となる時, f に関して相対的 (relative) であるという. f に関して相対的な曲線たちの形式的な \mathbb{R} 係数1次結合 $\sum_i a_i C_i$ を相対的 \mathbb{R} -1-サイクル (relative \mathbb{R} -1-cycle) という.
2. X 上の \mathbb{R} -可逆層 \mathcal{L} は, 任意の相対的な曲線 $C \subset X$ に対して $(\mathcal{L} \cdot C) \geq 0$ となる時, f に関して数値的に半正 (numerically semi-positive for f) または f -ネフ (f -nef) であるという.
3. 2つの \mathbb{R} -可逆層 \mathcal{L} と \mathcal{L}' は, 任意の相対的な曲線 C に対して $(\mathcal{L} \cdot C) = (\mathcal{L}' \cdot C)$ となる時, f に関して数値的に同値 (numerically equivalent for f) であるといい, $\mathcal{L} \equiv_S \mathcal{L}'$ で表す.

この定義の元で, 互いに双対な有限次元実線形空間を

$$\begin{aligned} N^1(X/S) &= \{\mathbb{R}\text{-可逆層の } f \text{ に関する数値的同値類}\} \\ &= \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \{\text{可逆層の } f \text{ に関する数値的同値類}\}, \\ N_1(X) &= \{\text{相対的 } \mathbb{R}\text{-1-サイクルの数値的同値類}\} \\ &= \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \{\text{相対的 } 1\text{-サイクルの数値的同値類}\} \end{aligned}$$

により定義する.

f -豊富な可逆層の数値的同値類たち全体が生成する, $N^1(X/S)$ 中の凸錐体 $Am(X/S)$ を f -豊富錐 (f -ample cone) という. f -豊富錐は開集合となる. また, f に関して相対的な曲線の数値的同値類たち全体が生成する, $N_1(X/S)$ 中の閉じた凸錐体 $Cv(X/S)$ を相対的曲線の錐 (cone of relative curves) という. $Cv(X/S)$ は $\overline{NE}(X/S)$ とも表す.

□

4.3.11 \mathbb{Q} -因子, \mathbb{R} -因子

【定義 4.116 (諸定義)】 X を正規多様体とする.

1. X 上の素因子の実数係数 (有理数係数) 線形結合 $D = \sum_i a_i D_i$ を \mathbb{R} -因子 (\mathbb{R} -divisor) (\mathbb{Q} -因子 (\mathbb{Q} -divisor)) という. すべての a_i が非負のとき, D は有効であるという. \mathbb{R} -因子の全体は \mathbb{R} 上の線形空間 $Z^1(X)_{\mathbb{R}} = Z^1(X) \otimes \mathbb{R}$ を, \mathbb{Q} -因子の全体は \mathbb{Q} 上の線形空間 $Z^1(X)_{\mathbb{Q}} = Z^1(X) \otimes \mathbb{Q}$ をなす.
2. \mathbb{R} -因子は Cartier 因子 E_j の実数係数の線形結合 $\sum_j b_j E_j$ で書かれるとき, \mathbb{R} -Cartier 因子であるという. 同様に, \mathbb{Q} -因子は b_j が有理数となる同様の線形結合で表されるとき, \mathbb{Q} -Cartier 因子であるという. これらの全体のつくる可換群は, それぞれ $\text{Div}(X)_{\mathbb{R}} = \text{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, $\text{Div}(X)_{\mathbb{Q}} = \text{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ で表される.
3. 準同型 $s : \text{Div}(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$, $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ は自然に準同型 $s : \text{Div}(X)_{\mathbb{R}} \rightarrow \text{Pic}(X)_{\mathbb{R}}$ に拡張される. この拡張のもとで, 2つの \mathbb{R} -Cartier 因子 D_1, D_2 は, $s(D_1) = s(D_2) \in \text{Pic}(X)_{\mathbb{R}}$ のとき, \mathbb{R} -線形同値 (\mathbb{R} -linearly equivalent) であるといい, $D_1 \sim_{\mathbb{R}} D_2$ で表す. 2つの \mathbb{Q} -Cartier 因子 D_1, D_2 の, \mathbb{Q} -線形同値 (\mathbb{Q} -linearly equivalent) $D_1 \sim_{\mathbb{Q}} D_2$ も同様に定義される.
4. 全射正則写像 $f : Y \rightarrow X$ に対しては, \mathbb{R} -Cartier 因子 $\sum_j b_j E_j$ の引き戻しが式 $f^*D := \sum_j b_j f^*E_j$ により定義でき, D の表し方に依存しない. また, \mathbb{R} -可逆層の引き戻しも整合的となる.

□

【定義 4.117 (Q-分解的)】 正規な代数多様体は, その上の任意の素因子が \mathbb{Q} -Cartier 因子となるとき, すなわち適当な整数をかければ Cartier 因子となるとき, \mathbb{Q} -分解的 (\mathbb{Q} -factorial) であるという. \square

4.3.12 双有理不変量

4.3.12.1 小平次元

【定義 4.118 (飯高・小平次元)】 X を正規な射影的代数多様体, D をその上の Cartier 因子とする. 正の整数 m に対して, $H^0(X, mD) \neq 0$ なら, 線形系 $|mD|$ に伴う有理写像 $\Phi_{|mD|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, mD))$ が構成できる. このような m が存在するとき, 飯高・小平次元 $\kappa(X, D)$ を

$$\kappa(X, D) := \max_{m \in \mathbb{N}} \dim \text{Im} (\Phi_{|mD|})$$

により定義する. 一方, 存在しないときには, $\kappa(X, D) = -\infty$ と約束する. $\kappa(X, D) = \dim X$ となる因子は, 巨大 (big) であるという. \square

【定理 4.119 ($h^0(X, mD)$ の増大度による特徴付け)】 一般に, 正の実数 α, β と正の整数 m_0 が存在して, m_0 の任意の正倍数 m に対して, 次の評価式が成り立つ.

$$\alpha m^{\kappa(X, D)} \leq h^0(X, mD) \leq \beta m^{\kappa(X, D)}.$$

[出典・証明: 川又雄二郎「代数多様対論」(1997) p.125] \square

【定理 4.120 (飯高・小平次元の伝搬性)】 $f : X \rightarrow Y$ を正規で射影的な代数多様体間の正則な全射, D を Y 上の Cartier 因子とすると,

$$\kappa(X, f^*D) = \kappa(Y, D)$$

が成り立つ.

[出典・証明: 川又雄二郎「代数多様対論」(1997) p.125] \square

【定義 4.121 (射影多様体の種数と小平次元)】 X を滑らかな射影的代数多様体とする.

1. 正の整数 m に対して,

$$P_m(X) := \dim H^0(X, mK_X)$$

を X の m 重種数 (m -genus) という. 特に,

$$p_g(X) := P_1(X)$$

を X の幾何種数 (geometric genus) という.

2. X の小平次元 $\kappa(X)$ を

$$\kappa(X) := \kappa(X, K_X)$$

により定義する. 特に, $\kappa(X) = \dim X$ となるとき, X は一般型 (general type) であるという.

□

【定理 4.122 (多重種数の双有理不変性)】 滑らかな射影的代数多様体間の双有理正則射 $f: X \rightarrow Y$ を与える. このとき, 任意の正の整数 m に対して, 引き戻し準同型 $f^*: H^0(Y, mK_Y) \rightarrow H^0(X, mK_X)$ は全単射となる. 特に, $\kappa(X) = \kappa(Y)$.

[出典・証明: 川又雄二郎「代数多様対論」(1997) p.126] _____ □

【定理 4.123 (小平の補題)】 正規な射影的代数多様体 X において, D を巨大な Cartier 因子. H を豊富な Cartier 因子とすると, 正の整数 m が存在して, $H^0(X, mD - H) \neq 0$ となる.

[出典・証明: 川又雄二郎「代数多様対論」(1997) p.126] _____ □

【系 4.124】 正規な射影的代数多様体 X において, Cartier 因子 D が巨大となるための必要十分条件は, 豊富な \mathbb{Q} -Cartier 因子 A と有効な Cartier 因子 B が存在して, $D = A + B$ と書けることである. [出典: 同上] _____ □

【定義 4.125 (数値的飯高・小平次元)】 \mathcal{L} を n 次元の射影的代数多様体 X 上のネフな可逆層とすると, 組 (X, \mathcal{L}) の数値的飯高・小平次元 (numerical Iitaka-Kodaira dimension) $\nu(X, \mathcal{L})$ を次のように定義する:

$$\nu(X, \mathcal{L}) := \max \{t \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid [\mathcal{L}]^t \neq 0\}.$$

ここで, $[\mathcal{L}]^t \neq 0$ は, t 次元の閉部分多様体 Y が存在して, $([\mathcal{L}]^t \cdot Y) \neq 0$ となることを意味する. 定義から, $0 \leq \nu(X, \mathcal{L}) \leq n$ となる. ネフな Cartier 因子に対しては,

$$\nu(X, D) := \nu(X, \mathcal{O}_X(D))$$

とおく. _____ □

【定理 4.126 ($\nu(X, D)$ と $\kappa(X, D)$ の関係)】 X が正規な射影的代数多様体, D がネフな Cartier 因子のとき,

$$\nu(X, D) \geq \kappa(X, D)$$

が成り立つ.

[出典・証明: 川又雄二郎「代数多様体論」(1997) p.128] _____ □

4.3.13 定理・命題の証明

命題 4.72 の証明.

前半: $\mathbb{C}P^n = \text{Proj} \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, $\mathbb{C}P^n(a_0, \dots, a_n) = \text{Proj}(\mathbb{C}[y_0, \dots, y_n]_{a_0, \dots, a_n})$ のとき, d を a_0, \dots, a_n の最小公倍数, $c_j = d/a_j$ とする. このとき,

$$f : \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] \mathbb{C}[y_0, \dots, y_n]_{a_0, \dots, a_n} : x_j = y_j^{c_j} \quad (j = 0, \dots, n)$$

に準同型写像の像は $\text{Image } f = \mathbb{C}[y_0, \dots, y_n]_{a_0, \dots, a_n}^{(d)}$ となる. ところが, $\text{Proj } A = \text{Proj } A^{(d)}$ なので, f は埋め込み $f^* \mathbb{C}P(a_0, \dots, a_n) \rightarrow \mathbb{C}P^n$ を与える.

後半: A の生成斉次元を h_0, \dots, h_m , h_j の次数を a_j とするとき,

$$\text{Proj } A \cong \text{Proj } k[h_0, \dots, h_m]_{a_0, \dots, a_m} / I \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_m) \subset \mathbb{P}$$

より, $\text{Proj } A$ は射影スキームとなる.

Q.E.D.

[【命題 4.72 に戻る】](#)

4.4 被覆空間

4.4.1 被覆空間と分岐

【定義 4.127 (被覆空間)】 正規な代数多様体間の有限射 $f: Y \rightarrow X$ を被覆空間 (covering space) という。 □

【定理 4.128 (正規化による被覆空間の構成)】 X を正規な代数多様体, $K = k(X)$ をその関数体とすると, アフィン開被覆 $X = \cup_j \text{Spec } A_j$ に対して, A_j たちの商体はすべて K と一致し, A_j は K の中で整閉となっている. いま, L を K の有限次代数的拡大体として, A_j の L の中で整閉包を B_j とすると, B_j は A_j -加群として有限生成で, その商体はすべて L となる. さらに, $\text{Spec } B_j$ を張り合わせるにより, k 上の正規な代数多様体 Y (正規化) が得られ, 自然な射 $\pi: Y \rightarrow X$ は被覆空間となる. 逆に, 任意の被覆空間はこのようにして構成することができる. □

【定義 4.129 (分岐指数)】 $f: Y \rightarrow X$ を正規代数多様体から滑らかな代数多様体への全射有限射とする. X の素因子 D の f による引き戻しを, 相異なる素因子 E_i により $f^*D = \sum_i a_i E_i$ と分解したとき, $a_i \geq 2$ となるなら f は E_i で分岐している (ramified) といい, a_i を分岐指数 (ramification index) という. □

【定理 4.130 (分岐因子)】 $f: Y \rightarrow X$ を正規代数多様体から滑らかな代数多様体への全射有限射とする. このとき, Y 上の有効因子 R が存在して,

$$K_Y = f^*K_X + R; \quad R = \sum_i (a_i - 1)E_i$$

と書ける. R は f の分岐因子と呼ばれ, 写像 f の Jacobi 行列式の因子となる. ここで, E_i は分岐する素因子, a_i は分岐指数である. 特に, 分岐する素因子の数は有限である. □

【定義 4.131 (エタール)】 滑らかな多様体間の全射有限射 $f: Y \rightarrow X$ は, f の分岐因子がゼロとなるとき, エタール (étale) であるという. f がエタールとなるための必要十分条件は, 複素解析多様体の射として局所同型射となることである. □

【定理 4.132 (分岐集合の純粋性 [Zariski])】 $f: Y \rightarrow X$ を正規代数多様体から滑らかな代数多様体への全射有限射とする. もし, 分岐因子がゼロならば, Y も滑らかで, f はエタールとなる. □

4.5 特異点

4.5.1 ブローアップ

4.5.1.1 一般的定義

【定義 4.133 (ブローアップ)】 代数的スキーム X とその閉部分スキーム C を与える. C に対応する連接イデアル層を \mathcal{I} とし, $\mathcal{B} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d$ に自然な次数付 \mathcal{O}_X -多元環の構造をいれる. このとき, X 上の射影的スキームからの自然な射 $\mu: Y = \text{Proj}_X \mathcal{B} \rightarrow X$ を, C を中心とした X のブローアップという. □

説明. $\text{Proj}_X \mathcal{B}$ は X のアフィン開集合上の Proj スキームの張り合わせなので, X がアフィンスキーム $X = \text{Spec}(A)$ の場合を考える. このとき, C の定義イデアルを I として,

$$B = \bigoplus_{j \geq 0} I^j = A \oplus I \oplus I^2 \cdots \quad (4.5.1)$$

とおくと, μ は

$$\mu: \text{Proj}(B) \rightarrow \text{Spec}(A); \quad \mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q} \cap B_0 = \mathfrak{q}_0$$

で与えられる. ここで, 次数付環としての 1 変数多項式環 $A[x]$ を

$$A[x] \cong A \oplus A \oplus \cdots$$

と表すと, B は $A[x]$ の (次数付環としての) 部分環となる. また, A の素イデアル \mathfrak{p} に対して

$$\mathfrak{p}[x] = \mathfrak{p}A[x] \cong \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{p} \oplus \cdots$$

は $A[x]$ の斉次素イデアルとなる. よって, 任意の $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ に対して,

$$\tilde{\mathfrak{p}} := \mathfrak{p}[x] \cap B = \mathfrak{p} \oplus (\mathfrak{p} \cap I) \oplus (\mathfrak{p} \cap I^2) \oplus \cdots$$

は B の斉次素イデアルとなり, $\tilde{\mathfrak{p}} \not\subset B_+$ なら $\text{Proj}_A(B)$ の点となる.

1. $X \setminus C$ 上での対応: $\mathfrak{p} \notin C$ のとき, $C = V(I)$ より, $I \not\subset \mathfrak{p}$. したがって, $h \in I$, $h \notin \mathfrak{p}$ となる $h \in A$ が存在. このとき, B の h を含まない (斉次) 素イデアル \mathfrak{q} と B_h の (斉次) 素イデアル \mathfrak{q}_h は 1 対 1 に

対応する ($\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_h \cap B$) ので, $\mathfrak{q} \in \mu^{-1}(\mathfrak{p})$ は B_h の斉次素イデアル \mathfrak{q}_h で $(\mathfrak{q}_h)_0 = \mathfrak{p}_h$ となるものと 1 対 1 に対応. ところが, $h \in I$ より

$$\begin{aligned} B_h &= A_h \oplus I_h \oplus (I^2)_h \oplus \cdots \\ &= A_h \oplus A_h \oplus A_h \oplus \cdots = A_h[X] \end{aligned}$$

となるので, $\mathfrak{q}_h = \mathfrak{p}_h A_h[x] = \hat{\mathfrak{p}}_h$, したがって $\mathfrak{q} = \tilde{\mathfrak{p}}$ となる. これより, $X \setminus C$ 上では μ は 1 対 1 写像となる:

$$\mu: \tilde{\mathfrak{p}} \mapsto \mathfrak{p} \in X \setminus C.$$

また, $\mu^{-1}(U(h)) = \tilde{U}(h)$ で, $\mathcal{O}_Y(\tilde{U}(h)) = B_{(h)} = A_h = \mathcal{O}_X(U(h))$ より, μ は $X \setminus C$ 上で同型射となる.

2. $\mathfrak{p} \in C$ の逆像: このとき, $I \subset \mathfrak{p}$. まず, $\mathfrak{q} \in \mu^{-1}(\mathfrak{p})$ なら, $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{p}$ より, $\mathfrak{q} \cap (B_0 \setminus \mathfrak{p})$. よって, $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ を $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$ の極大イデアルとして, \mathfrak{q} は,

$$B_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}} \oplus IA_{\mathfrak{p}} \oplus I^2 A_{\mathfrak{p}} \oplus \cdots$$

の斉次イデアル $\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}$ で $(\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}})_0 = \mathfrak{m}$ となるものと 1 対 1 に対応 (問題の局所化). この $\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}$ に対する条件は,

$$\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m} \oplus I\mathfrak{m} \oplus I^2\mathfrak{m} \oplus \cdots,$$

とおくと,

$$\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}} \subset \tilde{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m} \oplus IA_{\mathfrak{p}} \oplus I^2 A_{\mathfrak{p}} \oplus \cdots$$

と同等. したがって, \mathfrak{q} は

$$\hat{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \subset \tilde{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} = 0 \oplus k(\mathfrak{p})I \oplus k(\mathfrak{p})I^2 \oplus \cdots$$

を満たす

$$\hat{B}_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} = k(\mathfrak{p}) \oplus k(\mathfrak{p})I \oplus k(\mathfrak{p})I^2 \oplus \cdots$$

の斉次素イデアル $\hat{\mathfrak{q}}$ と 1 対 1 に対応. すなわち,

$$\mu^{-1}(\mathfrak{p}) \Leftrightarrow \text{Proj}(\hat{B}_{\mathfrak{p}}).$$

3. 基本開部分集合の対応: $h \in I^d$ を B_d の元と見るときは h_d と書くことにすると, $Y = \text{Proj}_A(B)$ の基本開部分集合は, $\tilde{U}(h_d) (h \in I^d, d \geq 1)$ により与えられる. ここで, $\mathfrak{q} \in \tilde{U}(h_d)$ は, 斉次素イデアル

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{q}_d \oplus \cdots, \quad h \notin \mathfrak{q}_d, \quad B_+ \not\subset \mathfrak{q}$$

により表される. $X = \text{Spec}(A)$ の基本開部分集合 $U(h)$ の点 $\mathfrak{p} \in U(h)$ に対して, $h \notin \mathfrak{p}$ より, $\mathfrak{p} \cap I^d \subsetneq I^d$ となるので, 斉次素イデアル $\tilde{\mathfrak{p}}$ は $\tilde{U}(h_d)$ に含まれる. また, $\mathfrak{p} \notin V(I)$ なら $\mathfrak{q} = \tilde{\mathfrak{p}} = \mu^{-1}(\mathfrak{p})$ となり, $h \notin \mathfrak{q}_d = \mathfrak{p} \cap I^d$ より, $h \notin \mathfrak{p}$, すなわち $\mathfrak{p} \in U(h)$. よって,

$$\mu(\tilde{U}(h_d)) \supset U(h), \quad \mu(\tilde{U}(h_d)) \setminus U(h) \subset V(I).$$

$\mu(\tilde{U}(h_d))$ が $V(I)$ のどのような部分を含むかは, I の詳細の依存する.

Q.E.D.

4.5.1.2 例外因子

【定義 4.134 (イデアル層としての引き戻し)】 スキーム射 $f: Y \rightarrow X$ と \mathcal{O}_X のイデアル層 \mathcal{I} に対して, 逆像 $f^*\mathcal{I}$ からの自然な準同型写像 $f^*\mathcal{I} \hookrightarrow f^*\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$ の像から生成される \mathcal{O}_Y のイデアル層を, イデアル層としての逆像または引き戻し (inverse image or pull-back as ideal sheaf) とよび, $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y$ で表す. □

【定理 4.135 (ブローアップの例外因子)】 $\mu: Y \rightarrow X$ を C を中心とした X のブローアップ, \mathcal{I} を C に対応する \mathcal{O}_X の接続イデアル層とする. このとき,

- (1) μ は, 同型写像 $Y \setminus E \rightarrow X \setminus C$ を誘導する.
- (2) $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y$ は可逆層となり, $\mu^{-1}(C)$ に台をもつ有効な Cartier 因子 (例外因子) E のイデアル層となる. しかも, $-E$ は非常に μ -豊富な因子となる.

□

Proof. (1) は, ブローアップの定義に続く説明より明らか. (2) に関して, $U = \text{Spec}(A) \subset X$, $C \cap U = V(I)$ とすると, $\mu^{-1}(U) = \text{Proj}_A(B)$, $B = A \oplus I \oplus \cdots$.

i) $\mathcal{O}_Y/\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y$ の台 : まず, (1) より

$$\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y|_{Y \setminus E} = \mathcal{O}_Y|_{Y \setminus E}.$$

つぎに, $U \cap C \neq \emptyset$ のとき, $h_d \in I^d$ に対応する $\text{Proj}_A(B)$ の基本開集合 $\tilde{U}(h_d)$ において,

$$\Gamma(\mathcal{O}_Y, \tilde{U}(h_d)) = B_{(h_d)} = A + \frac{I^d}{h_d} + \frac{I^{2d}}{h_d^2} + \cdots,$$

$$\Gamma(\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y, \tilde{U}(h_d)) = IB_{(h_d)}.$$

任意の $\mathfrak{q} \in E \cap \tilde{U}(h_d) = \mu^{-1}(C) \cap \tilde{U}(h_d)$ に対して, $\mathfrak{q}_0 \in C \Leftrightarrow I \subset \mathfrak{q}_0$ より, $IB_{(h_d)} \subset \mathfrak{q}_{(h_d)}$. よって,

$$\text{Supp}(\mathcal{O}_Y/\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y) = E.$$

ii) $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y$ の可逆性 : $Y - E$ で可逆層となることは明らか. 一方, U 上では, $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y|_U \cong (\bigoplus_{j \geq 0} I^{j+1})$ で, U_{h_d} 上で

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y|_{U_{h_d}} &\cong \sum_{0 \leq j \leq kd, k \geq 0} \frac{I^{kd-j} I^{j+1}}{h_d^k} \\ &= \sum_{-1 \leq j \leq kd, k \geq 0} \frac{I^{kd-j} I^{j+1}}{h_d^k} \cong \left(\bigoplus_{j \geq -1} I^{j+1} \right)|_{U_{h_d}} \end{aligned}$$

より, $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y|_U \cong \tilde{B}(1)$. よって, $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y$ は可逆層で, かつ μ -豊富.

Q.E.D.

【定義 4.136 (厳密変換と全変換)】 $\mu : Y \rightarrow X$ を C を中心とした X のブローアップ, $E = \mu^{-1}(C)$ とする. このとき, C に含まれない X の閉部分多様体 Z に対して,

- i) $\mu^{-1} : X \setminus C \rightarrow Y \setminus E$ による $Z \setminus C$ の像の閉包を $\mu_*^{-1}Z$ と書き, Z の厳密変換 (strict transform) または固有変換 (proper transform) という.
- ii) Z に対応する \mathcal{O}_X の接続イデアル層を $\mathcal{I} = \mathcal{O}_X(-Z)$ とするとき, イデアル層としての引き戻し $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y(-\mu^*Z)$ に対応する閉部分スキーム μ^*Z は, Z の全変換 (total transform) と呼ばれる.

一般の因子 $D = \sum_i a_i D_i$ に対して, その厳密変換が $\mu_*^{-1} D = \sum_i a_i \mu_* D_i$ により定義される. また, D が有効な Cartier 因子の差として $D = D' - D''$ と書けるときには, D の全変換が $\mu^* D = \mu^* D' - \mu^* D''$ により定義される. □

【命題 4.137 (閉部分スキームのブローアップ)】 $\mu : Y \rightarrow X$ を C を中心とした X のブローアップ, $E = \mu^{-1}(C)$ をその例外因子, \mathcal{I} を C に対応する接続イデアル層とする:

$$\mu : Y = \text{Proj}_X \left(\bigoplus_{j \geq 0} \mathcal{I}^j \right) \rightarrow X (\supset C).$$

いま, C に含まれない X の閉部分多様体 Z に対して, \mathcal{I} をその接続イデアル層, $W = \mu_*^{-1} Z$ とすると, 射影 $\mu|_W : W \rightarrow Z$ は, スキーム論的交わり $C \cap Z$ を中心とした Z のブローアップと一致し,

$$\mu|_W : W = \text{Proj}_Z \left(\bigoplus_{j \geq 0} (\mathcal{I}^m + \mathcal{I}) / \mathcal{I} \right) \rightarrow Z (\supset C \cap Z).$$

さらに, ブローアップ $\mu|_W$ の例外因子はスキーム論的交わり $E \cap W$ で与えられる. □

【定義 4.138 (ブローアップの中心に沿った位数)】 X を滑らかな代数多様体, C をその滑らかな閉部分多様体, \mathcal{I} を C のイデアル層, $\mu : Y \rightarrow X$ を C を中心とするブローアップとする:

$$\mu : Y = \text{Proj}_X \left(\bigoplus_{j \geq 0} \mathcal{I}^j \right) \rightarrow X (\supset C).$$

このとき, 任意の閉点 $P \in C$ に対して, 開近傍 U とその上での局所座標系 x_1, \dots, x_n が存在して, イデアル層 \mathcal{I} が U 上では x_1, \dots, x_r により生成されるようにできる.

1. 例外因子 E の Y 上でのイデアル層 $\mathcal{O}_Y(-E) = \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y$ は, $\mu^{-1}(U)$ 上で $(\bigoplus_{j \geq 0} I^{j+1})$ と表されるので, E は U 上では $IA = \bigoplus_{j \geq 0} I^{j+1}$ を含む $A = \bigoplus_{j \geq 0} I^j$ の有効斉次素イデアルの全体となる. これは, $A/IA = \bigoplus_{j \geq 0} I^j / I^{j+1} \cong \text{Sym}_{\mathcal{O}_{X(U)}/1}^* I/I^2$ の有効斉次素イデアルの全体と 1 対 1 に対応. よって, $E \cap \mu^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{P}^{r-1}$ で, 大域的には E は C 上の \mathbb{P}^{r-1} -束:

$$E \cong \mathbb{P}_C(\mathcal{N}_{C/X}^*); \quad \mathcal{N}_{C/X}^* = \mathcal{I} / \mathcal{I}^2 \cong \text{Ker}(\Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow \Omega_C^1).$$

ここで、 $\mathcal{N}_{C/X}^*$ は C の X 内での法余層 (conormal sheaf) と呼ばれる。また、

$$K_Y = \mu^* K_X + (r-1)E$$

となる。

さらに、 U_j を $U \cap U(x^j)$ とすると、 $V_j = \mu^{-1}(U_j)$ 上での Y のアフィン環は

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_Y(V_j) &= k[x_1, \dots, x_n, x_1/x_j, \dots, x_n/x_j] \cong k[y_1, y_2, \dots, y_n], \\ x_j &= y_j, \quad x_i = y_j y_i (i \neq j, i \leq r), \quad x_{r+1} = y_{r+1}, \dots, x_n = y_n. \end{aligned}$$

このとき、

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = (y_j)^{r-1} dy_1 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n.$$

いま、 $\mu^* \omega_X$ の有理切斷を s とすると、($\mu^* \omega_X$ と ω_Y を共に $\omega_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{M}_Y$ の部分層と見なすことにより) s は ω_Y の有理切斷もあたえる。したがって、 V_j 上で

$$s = f_j dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = f_j (y_j)^{r-1} dy_1 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dy_n$$

とすると、

$$K_Y = \operatorname{div}(f_j (y_j)^{r-1}) = \operatorname{div}(f_j) + (r-1) \operatorname{div}(y_j) = \mu^* K_X + (r-1)E.$$

2. 点 $P \in X$ と $h \in \mathcal{O}_{X,P}$ に対して、 $h \in \mathcal{I}_P^d$ かつ $h \notin \mathcal{I}_P^{d+1}$ が成り立つとき、 d をイデアル層 \mathcal{I} に沿った (または中心 C に沿った) P での h の零点の位数 (order) とよび、 $d = \operatorname{ord}_I(h) = \operatorname{ord}_C(h)$ で表す。また、 $h_d = h \bmod \mathcal{I}_P^{d+1} \in \mathcal{I}_P^d / \mathcal{I}_P^{d+1}$ を h の先導項 (leading term) という。
3. X 上の素因子 D が $D = \operatorname{div}(h)$ と表されるとき、 $d = \operatorname{ord}_C(h) = \min_{P \in X} \{\operatorname{ord}_C(h_P)\}$ は、 D の C に沿ったの重複度 (multiplicity) と呼ばれ、 $\operatorname{mult}_C(D)$ で表される。このとき、 D の μ による全変換 $\mu^* D = \operatorname{div}(\mu^* h)$ と厳密変換 $\mu_*^{-1} D$ の間には、 $\mu_*^{-1} D = \mu^* D - dE$ の関係がある。また、ブローアップ $\mu_*^{-1} D \rightarrow D$ の例外因子 $E \cap \mu_*^{-1} D$ は、射影空間束 E の中で、先導項 h_d により定義される超曲面の族となっている。

□

4.5.1.3 1点でのブローアップ

【例 4.139 (\mathbb{A}^n の 1 点ブローアップ)】 $X = \mathbb{A}^n$ の原点 O を中心とするブローアップ $\mu: Y \rightarrow X$ は, O 以外では, 次のような Y の射影空間束 $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ への埋め込みと一致する:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} & \hookrightarrow & Y \ni (x_1, \dots, x_n, [x_1 : \dots : x_n]) \\ p \downarrow & & \swarrow \mu \\ \mathbb{A}^n = X \ni (x_1, \dots, x_n) & & \end{array}$$

また, $\mu^{-1}(O) = O \times \mathbb{P}^{n-1}$ となる.

Y は n 個のアフィン開集合 U_j ($j = 1, \dots, n$) により覆われ, $U_j \cong \mathbb{A}^n$ となる. U_j での局所座標系を y_{ji} ($i = 1, \dots, n$) とすると,

$$\mu^* x_j = y_{jj}, \quad \mu^* x_i = y_{jj} y_{ji} \quad (i \neq j)$$

が成り立つ. したがって, 例外因子 $E = \mu^{-1}(O)$ は, $E|_{U_j} = \text{div}(y_{jj})$ と表され, 次の対応により \mathbb{P}^{n-1} と同型になる:

$$\begin{aligned} E \cap U_j \ni (y_{j1}, \dots, y_{j,j-1}, 0, y_{j,j+1}, \dots, y_{jn}) \\ \mapsto [y_{j1} : \dots : y_{j,j-1} : 1 : y_{j,j+1} : \dots : y_{jn}] \in \mathbb{P}^{n-1} \end{aligned}$$

さらに, 標準因子は

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = y_{jj}^{n-1} dy_{j1} \wedge \dots \wedge dy_{jn}$$

より,

$$K_Y = \mu^* K_X + (n-1)E$$

により対応する. □

【命題 4.140 (射影空間の標準線バンドルとの対応)】 アフィン空間 $X = \mathbb{A}^n$ の原点を中心とするブローアップ $p: Y \rightarrow X$ において, Y を $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ の閉部分代数多様体と見なす. このとき,

1. Y は射影空間 \mathbb{P}^{n-1} 上の標準線バンドル γ_{n-1}^1 と同型である:

$$Y \cong \gamma_{n-1}^1 = \mathbb{A}_{\mathbb{P}^{n-1}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)).$$

また, \mathbb{P}^{n-1} の点を \mathbb{A}^n の原点を通過する直線 L と同一視すると, 射影 $p: Y \rightarrow X$ は

$$Y = \gamma_{n-1}^1 \ni (L, \mathbf{x} \in L) \mapsto \mathbf{x} \in X = \mathbb{A}^n$$

で与えられる. 特に, 例外因子 $E \cong \mathbb{P}^{n-1}$ は γ_{n-1}^1 のゼロ切断に対応する.

2. 標準線バンドル $Y = \gamma_{n-1}^1$ のゼロ断面 $E = \mathbb{P}^{n-1}$ への標準射影を $\pi: \gamma_{n-1}^1 \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ とおく. このとき,

$$\mathcal{O}_Y(E) \cong \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$$

が成り立つ.

□

証明. $\mathbb{P}^{n-1} = \text{Proj } \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$ の標準アフィン被覆を $\bigcup_{j=1}^n U_j$ ($U_j = \tilde{U}(y_j)$) とすると, その標準線バンドル γ_{n-1}^1 は

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\mathbb{P}^{n-1}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)) &= \text{Spec } \mathbb{C}[\mathbf{z}_1][t_1] \cup \dots \cup \text{Spec } \mathbb{C}[\mathbf{z}_n][t_n] \\ &= U_1 \times \mathbb{A}^1 \cup \dots \cup U_n \times \mathbb{A}^1 \\ &\quad \cup \qquad \qquad \qquad \cup \\ &\quad (\mathbf{z}_1, t_1) \quad \dots \quad (\mathbf{z}_n, t_n) \end{aligned}$$

で与えられる. ここで, \mathbf{z}_i は $U_j \cong \mathbb{A}^{n-1}$ のアフィン座標

$$\mathbf{z}_i = (y_1/y_i, \dots, y_n/y_i)$$

である. また, $V_i = U_i \times \mathbb{A}^1$ とおくと, $V_i \cap V_j$ での座標変換は, $t_i/y_i = t_j/y_j$ より,

$$t_k = z_{jk} t_j, \quad \mathbf{z}_k = \mathbf{z}_j / z_{jk}$$

で与えられる.

1. 標準線バンドルのこの開被覆のもとで, 各アフィン開集合 $V_i = \text{Spec } \mathbb{C}[\mathbf{z}_i][t_i]$ から Y への写像 ν を

$$\nu: V_i \ni (\mathbf{z}_i, t_i) \mapsto (t_i \mathbf{z}_i, [\mathbf{z}_i]) \in Y \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$$

により定義すると, 明らかに ν は $V_i \cap V_j$ で一致し, γ_{n-1}^1 と Y の同型対応を与える. この対応により Y と γ_{n-1}^1 を同一視すると, 射影 $p: Y \rightarrow X$ が題意の写像と一致し, 例外因子 E が γ_{n-1}^1 のゼロ断面 ($x_i = 0$) に対応することは明らか.

2. Y 上で $E \cap V_i = \text{div}(t_i)$ となっている. ここで, $f|_{V_i} = 1/t_i$ とおくと, f は Y 上の有理関数となり, $f|_{V_i} = y_i/y_1/t_i$. よって,

$$(E + \text{div}(f))|_{V_i} = \text{div}(y_i/y_1) = -\text{div}(y_1)$$

これは,

$$\mathcal{O}_Y(E) = \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$$

を意味する.

Q.E.D.

【例 4.141 (\mathbb{P}^n の 1 点ブローアップ)】 \mathbb{A}^n の原点でのブローアップは, 自然に \mathbb{P}^n の一点でのブローアップに埋め込まれる. そのためには, $\mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ として, 次のような対応を考えればよい:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1} & = & \text{Proj}_{\mathbb{P}^n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}[y_1, \dots, y_n] \quad \supset \quad \text{Proj}_{U_i} R_i[y_1, \dots, y_n] \\ \cup & & \downarrow y_i = x_i \\ Y & = & \text{Proj}_{\mathbb{P}^n} \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{I}^m \quad \supset \quad \text{Proj}_{U_i} R_i[x_1, \dots, x_n] \\ & & \cup \\ & & ([x_0, \dots, x_n], [x_1, \dots, x_n]) \\ \downarrow \mu & & \downarrow \\ X & = & \mathbb{P}^n \ni [x_0, \dots, x_n] \quad \supset \quad U_i = \text{Spec } R_i. \end{array}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n &= \text{Proj } \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n], \\ R_i &= \mathbb{C}[x_0/x_i, \dots, x_n/x_i]. \end{aligned}$$

また, \mathcal{I} は原点 $O \in \mathbb{A}^n = U_0 \subset \mathbb{P}^n$ に対応する \mathbb{P}^n 上の連接イデアル層である.

ブローアップ μ の例外因子 $E = \mu^{-1}(O)$ は, $O \times \mathbb{P}^{n-1} (\subset Y)$ と一致する. また, 射影 $\pi: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ から誘導される写像

$$\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^{n-1} \cong E$$

は, $\mu^{-1}(\mathbb{A}^n) (\subset Y)$ に制限すると, \mathbb{P}^{n-1} の標準線バンドルの標準射影 $\pi: \gamma_{n-1}^1 \rightarrow E$ と一致する. Y は全体としては, γ_{n-1}^1 のファイバー \mathbb{A}^1 を \mathbb{P}^1 にコンパクト化した空間 (Thom 空間) となり, コンパクトで射影的代数多様体である. そのアフィン被覆は, $U_i = \tilde{U}(y_i)$ ($i = 1, \dots, n$) を \mathbb{P}^{n-1} の開被覆として,

$$\begin{aligned} V_{i0} &\cong U_i \times \mathbb{A}^1 \ni (y_1/y_i, \dots, y_n/y_i, t_i) \mapsto ([y_i, t_i y_1, \dots, t_i y_n], [y_1, \dots, y_n]), \\ V_{i1} &\cong U_i \times \mathbb{A}^1 \ni (y_1/y_i, \dots, y_n/y_i, s_i) \mapsto ([s_i y_i, y_1, \dots, y_n], [y_1, \dots, y_n]), \end{aligned}$$

座標変換は

$$V_{i0} \cap V_{j0} : t_i/t_j = y_i/y_j,$$

$$V_{i1} \cap V_{j1} : s_i/s_j = y_j/y_i,$$

$$V_{i0} \cap V_{j1} : t_i s_j = y_i/y_j$$

で与えられ, 例外因子 E は, $E \cap V_{i0} = \text{div}(t_i)$, $E \cap V_{i1} = 0$ と表される. また, $f|_{V_{i0}} = 1/t_i$ は

$$f|_{V_{i0}} = \left(\frac{y_1}{y_i}\right)^{-1} \frac{1}{t_i}, \quad f|_{V_{i1}} = \left(\frac{y_1}{y_i}\right)^{-1} s_i$$

により, Y 上の有理関数に拡大される. したがって, \mathbb{A}^n のブローアップの場合と同様に,

$$V_{i0} \cap (E + \text{div}(f)) = \text{div}(y_i/y_1) = -\text{div}(y_1),$$

$$V_{i1} \cap (E + \text{div}(f)) = \text{div}(s_i y_i/y_1) = -\text{div}(y_1) + \text{div}(s_i).$$

よって, $E' := \mu^{-1}(\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{A}^n) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ とおくと,

$$\mathcal{O}_Y(E - E') = \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$$

を得る. □

【命題 4.142 (射影空間上の \mathbb{P}^1 バンドルとの対応)】 射影空間 $X = \mathbb{P}^n$ の一点 P を中心とするブローアップ $\mu: Y \rightarrow X$ において, Y を $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ の閉部分代数多様体と見なす. このとき,

1. 点 P を通る X の直線 $L (\cong \mathbb{P}^1)$ とその上の点 $x \in L$ の組の全体は, \mathbb{P}^{n-1} の標準線バンドル γ_{n-1}^1 のファイバー \mathbb{A}^1 を \mathbb{P}^1 にコンパクト化して得られる多様体 $\hat{\gamma}_{n-1}^1$ と同一視できる. このとき, Y はこのコンパクトな射影的代数多様体 $\hat{\gamma}_{n-1}^1$ と同型となる:

$$Y = \hat{\gamma}_{n-1}^1 \ni (L, Q) \text{ st } P, Q \in L \mapsto Q \in X = \mathbb{P}^n.$$

特に, 例外因子 E は $\hat{\gamma}_{n-1}^1$ の中で $\{(L, P) \mid P \in L\} \cong \mathbb{P}^{n-1}$ に対応する.

2. \mathbb{P}^1 バンドル $Y = \hat{\gamma}_{n-1}^1$ の \mathbb{P}^{n-1} への標準射影を $\pi : \hat{\gamma}_{n-1}^1 \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$, P_L^* を L の中での P の共役点として

$$E' := \{(L, P_L^*)\} \cong \mathbb{P}^{n-1}$$

とおく. このとき,

$$\mathcal{O}_Y(E - E') \cong \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$$

が成り立つ.

□

4.5.2 特異点解消

特異点解消とは, 代数多様体の各双有理同値類が非特異代数多様体を含むかどうかを問う問題である.

【定義 4.143 (特異点解消)】 代数多様体 X が与えられたとき, なめらかな代数多様体 Y からの双有理的で射影的な射 $f : Y \rightarrow X$ を特異点の解消 (resolution of singularities) という. □

【定理 4.144】 正規で射影的な代数多様体間の双有理射 $f : X \rightarrow Y$ を与える. このとき, Y の余次元が 2 以上の閉集合 Z が存在し, 制限射 $f : f^{-1}(Y \setminus Z) \rightarrow Y \setminus Z$ は同型射となる. □

【系 4.145】 正規で射影的な代数多様体間の有理写像 $f : X \rightsquigarrow Y$ を与える. このとき, X の余次元が 2 以上の閉集合 Z が存在し, f が射 $X \setminus Z \rightarrow Y$ により代表される. □

【定義 4.146 (正規交差因子)】 滑らかな多様体 X の余次元 1 の閉部分スキーム D は, 次の条件を満たすとき, 正規交差因子 (normal crossing divisor) という :

各閉点 $P \in X$ に対して, その近傍 U と局所座標系 x_1, x_2, \dots, x_n が存在して, ある整数 r ($0 \leq r \leq n$) によって $\mathcal{O}_U(-D) = \square (x_1 \cdots x_r) \mathcal{O}_U$ と書ける. ただし, $r = 0$ は $P \notin D$ に対応する. □

【定義 4.147 (埋め込み特異点解消)】 滑らかな代数多様体 X とその上の有効因子 D を考える. このとき, 滑らかな代数的多様体からの射影的
双有理射 $f: Y \rightarrow X$ であって, 全逆像 f^*D の台が正規交差因子となる
ものを, 組 $D \subset X$ の埋め込み特異点解消という. _____□

【定義 4.148 (クレパント)】 正規代数多様体 X において, 標準因子 K_X が Cartier 因子になっていると仮定する. このとき, 特異点解消 $\mu: Y \rightarrow X$ は, $K_Y = \mu^*K_X$ となるならば, クレパント (crepant) である
という. _____□

【定義 4.149 (法平坦性)】 代数多様体 X の部分多様体を C , そのイ
デアル層を \mathcal{I}_C とする. もし, 次数付き \mathcal{O}_C -加群層 $\bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{I}_C^j / \mathcal{I}_C^{j+1}$ が局
所自由層となるとき, X は C に沿って法平坦 (normally flat) であるとい
う. _____□

4.5.3 広中の定理

【定理 4.150 (広中の定理 I)】 \mathbb{C} 上の代数多様体 X に対して, 次の
ようなブローアップの列

$$Y = X_N \xrightarrow{\mu_N} X_{N-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\mu_1} X_0 = X$$

が存在する:

- i) Y はなめらかである.
- ii) $\mu_i: X_i \rightarrow X_{i-1}$ の中心 C_i は滑らかで, X_{i-1} の特異点集合に含まれる.
- iii) X_{i-1} は C_i に沿って法平坦である.

_____□

【定理 4.151 (交差の正規化)】 X を滑らかな \mathbb{C} 上の代数多様体, Z をその代数的閉部分集合とする. このとき, ブローアップの列

$$Y = X_N \xrightarrow{\mu_N} X_{N-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\mu_1} X_0 = X$$

が存在して, 次の条件を満たす:

- i) $\mu_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$ の中心 C_i は滑らかで, Z の集合論的逆像に含まれる.
- ii) 合成写像 $\mu : Y \rightarrow X$ に対して, 集合論的逆像 $\mu^{-1}(Z)$ は正規交差因子となる.

□

【定理 4.152 (線形系の自由化)】 X を滑らかな \mathbb{C} 上の代数多様体, $\Lambda = \{D_\lambda\}$ をその上の線形系とする. このとき, ブローアップの列の合成 $\mu : Y \rightarrow X$ が存在して, 全逆像 $\mu^*\Lambda = \{\mu^*D_\lambda\}$ が自由な線形系 $\Lambda_Y = \{L_\lambda\}$ と固定部分 F に分解する:

$$\mu^*D_\lambda = L_\lambda + F.$$

しかも, F の台が正規交差となるようにできる. _____ □

【定理 4.153 (有理写像の不確定点除去)】 滑らかな射影的代数多様体間の有理写像 $\alpha : X \rightsquigarrow Z$ に対して, ブローアップの列の合成 $\mu : Y \rightarrow X$ が存在して, 合成写像 $\alpha \circ \mu : Y \rightarrow Z$ が正則写像となる. _____ □

4.5.4 特異点の分類

4.5.4.1 Gorenstein 族

【定義 4.154 (M -正則列)】 環 A とその上の加群 M に対して, A の元の列 x_1, \dots, x_d は, 次の条件を満たすとき, 長さ d の M -正則列 (M -regular sequence) であるという:

$i = 1, \dots, d$ に対して, x_i 倍写像

$$x_i : M/(x_1, \dots, x_{i-1})M \rightarrow M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$$

が単射であり全射でない.

□

【定義 4.155 (Cohen-Macaulay 環)】 A を Noether 局所環, M を有限生成 A -加群とする. A の極大イデアルに含まれる M -正則列の長さの最大値を M の深さといい, $\text{depth } M$ で表す.

このとき, $\dim A = \text{depth } A$ となる Noether 局所環は **Cohen-Macaulay 環** と呼ばれる. _____ □

【定義 4.156 (Cohen-Macaulay 型)】 正規特異点 P において, その局所環が Cohen-Macaulay 環となる時, **Cohen-Macaulay 型特異点** という. □

【定義 4.157 (\mathbb{Q} -Gorenstein 特異点)】 正規特異点 P の近傍 X において, ある正整数 r が存在し, $\omega_X^{\otimes r}$ が可逆層になるとき, (X, P) を **\mathbb{Q} -Gorenstein 特異点**, r の最小値を指数 (index) という. 指数 r の \mathbb{Q} -Gorenstein 特異点を **r -Gorenstein 特異点** という. また, 1-Gorenstein かつ Cohen-Macaulay 型となる特異点を単に **Gorenstein 特異点** という. □

【定義 4.158 (対数的特異点)】 正規な代数多様体 X とその上の \mathbb{R} -因子 D の組 (X, D) は, つぎの条件をみたすとき, **対数的劣末端特異点** (sub-log terminal singularity) のみをもつといい, 略して **subLT** :

- (1) $K_X + D$ は \mathbb{R} -Cartier 因子である.
- (2) 非特異代数多様体からの射影的有理正則射 $f : Y \rightarrow X$ と, Y 上の \mathbb{R} -因子で正規交差な台をもつもの E が存在して, $K_Y + E = f^*(K_X + D)$ かつ $E = \sum_i e_i E_i, e_i < 1 (E_i \text{ は素因子})$ となる.

さらに, D が有効ならば, 組 (X, D) は**対数的末端特異点** (log terminal singularity) のみをもつといい, 略して **LT** であるという.

上記の条件 (2) の代わりに $e_i \leq 1$ が成り立つ場合, 組 (X, D) は, **対数的劣標準特異点** (sub-log canonical singularity) のみをもつといい, 略して **subLC** という. また, D が有効ならば, 組 (X, D) は**対数的標準特異点** (log canonical singularity) のみをもつといい, 略して **LC** であるという. □

4.5.4.2 有理特異点

【定義 4.159 (有理特異点)】 正規な代数多様体 Y の特異点解消 $\mu : X \rightarrow Y$ において,

$$R^p \mu_* \mathcal{O}_X = 0, \quad \forall p > 0$$

が成り立つとき, Y は**有理特異点**のみをもつという. [\llcorner [川又 97]] □

【命題 4.160 (有理特異点の性質)】 有理特異点の局所環は Cohen-Macaulay 環となる. [\llcorner [川又 97] \llcorner Kempf G, Knudsen F, Mumford D & Saint-Donat B (1973)] _____□

【定理 4.161】 正規な代数多様体とその上の \mathbb{R} -因子の組 (X, D) が LT であるなら, X は有理特異点のみをもつ. 特に, 商特異点是有理特異点である. [\llcorner [川又 97]] _____□

4.5.5 代数曲面の特異点

4.5.5.1 極小特異点解消

【定義 4.162 (極小特異点解消)】 正規な代数曲面または複素解析曲面の特異点解消 $\mu : X \rightarrow Y$ において, 例外曲線に (-1) -曲線が含まれないとき, μ は Y の極小特異点解消 (minimal resolution of singularities) という. [\llcorner [川又 97]] _____□

【定理 4.163 (極小特異点解消の存在)】 任意の正規な代数曲面または複素解析曲面 Y は, 同型を除いてただ 1 つの極小特異点解消をもつ.

さらに, 特異点解消 $\mu : X \rightarrow Y$ が極小特異点解消であるための必要十分条件は, K_X が μ -ネフとなる, すなわち任意の例外曲線 C に対して, $(K_X \cdot C) \geq 0$ となることである. [\llcorner [川又 97]] _____□

【定義 4.164 (基本サイクル)】 正規な代数曲面 Y とその上の特異点 P に対して, 極小特異点解消 $\mu : X \rightarrow Y$ における P 上の例外曲線たちを C_1, \dots, C_m とする. このとき, 次の 2 条件を満たす有効因子 $Z = \sum_i a_i C_i$ を, 特異点 (Y, P) の基本サイクル (fundamental cycle) という:

- i) すべての i に対して, $a_i > 0$ かつ $(Z \cdot C_i) \leq 0$.
- ii) 任意のゼロでない因子 $W = \sum_i b_i C_i$ に対して $(W \cdot C_i) \leq 0, \forall i$ となるならば, $W \geq Z$ となる.

基本サイクルは常に存在する. [\llcorner [川又 97]] _____□

【命題 4.165 (基本サイクルの数値的性質)】 正規な代数曲面の特異点 (Y, P) の極小特異点解消 $f : X \rightarrow Y$ に対する基本サイクルを Z とする. このとき, Z を X の閉部分スキームと見なすと,

$$(Z^2) + (K_X \cdot Z) \geq -2$$

が成り立つ。しかも、等号が成り立つ必要十分条件は、 $H^1(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$ で与えられる。[< [川又 97]] _____□

4.5.5.2 有理特異点

【定義 4.166 (有理特異点)】 正規な代数曲面の特異点 (Y, P) の極小特異点解消 $f: X \rightarrow Y$ に対する基本サイクル Z に対して $H^1(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$ が成り立つとき、 (Y, P) を有理特異点 (rational singularity) という。

有理特異点は、 $(Z^2) = -d$ のとき、有理 d 重点 (rational d -uple point) であるという。 $d \geq 2$ である。[< [川又 97]] _____□

【定理 4.167 (LT 特異点の有理性)】 正規な代数多様体とその上の \mathbb{R} -因子の組 (X, D) が LT であるなら、 X は有理特異点のみをもつ。特に、商特異点は有理特異点である。

[出典：川又雄二郎「代数多様対論」(1979) 定理 5.2.21] _____□

【定理 4.168 (有理特異点のみを持つ代数曲面)】 Y を有理特異点のみをもつ代数曲面とすると、 Y は \mathbb{Q} -分解的である。

[出典：川又雄二郎「代数多様対論」(1979) 定理 5.2.23] _____□

4.5.5.3 商特異点

【定義 4.169 (商特異点)】 G を複素一般線形群 $GL(n, \mathbb{C})$ の有限部分群とする。このとき、 $GL(n, \mathbb{C})$ のアフィン空間 \mathbb{C}^n への標準的な線形作用から誘導される G の $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ への作用に関して不変な多項式の全体 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G$ は、 \mathbb{C} 上有限生成で正規な多項式環となる。この多項式環により定義されるアフィンスキーム $X = \text{Spec } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G$ を \mathbb{A}^n/G で表し、商特異点 (quotient singularity) をもつという。 _____□

4.5.5.4 有理 2 重点

【定義 4.170 (A_n 型特異点)】 正の整数 n に対して、多項式

$$A_n : x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0$$

により定義される \mathbb{A}^3 の超曲面の原点 $P = (x, y, z)$ を A_n -型特異点という。この特異点の特異点解消の例外因子は (-2) 曲面のみからなり、それらの交差は A_n -型の Dynkin 図式で与えられる：

$$A_n: \circ \text{---} \circ \text{---} \text{---} \text{---} \circ \text{---} \circ$$

□

【定義 4.171 (D_n 型特異点)】 4 以上の整数 n に対して、多項式

$$D_n: x^2 + y^2z + z^{n-1} = 0$$

により定義される \mathbb{A}^3 の超曲面の原点 $P = (x, y, z)$ を D_n -型特異点という。この特異点の特異点解消の例外因子は (-2) 曲面のみからなり、それらの交差は D_n -型の Dynkin 図式で与えられる：

$$D_n: \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \text{---} \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$$

□

【定義 4.172 (E_n 型特異点)】 多項式

$$E_6: x^2 + y^3 + z^4 = 0,$$

$$E_7: x^2 + y^3 + yz^3 = 0,$$

$$E_8: x^2 + y^3 + z^5 = 0$$

により定義される \mathbb{A}^3 の超曲面の原点 $P = (x, y, z)$ をそれぞれ E_6 -型, E_7 -型, E_8 -型特異点という。この特異点の特異点解消の例外因子は (-2) 曲面のみからなり、それらの交差は次の Dynkin 図式で与えられる：

$$\begin{array}{c} E_6: \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array} \\ E_7: \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array} \\ E_8: \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array} \end{array}$$

【定義 4.173 (有理 2 重点)】 クレパントな特異点解消をもつ正規代数曲面の特異点を, 有理 2 重点 (rational double point) または **Du Val** 特異点という. □

【定理 4.174 (有理 2 重点の特徴付け)】 正規な代数曲面 X の特異点 P に対して, 次の各条件は同値である.

- (0) クレパントな特異点解消をもつ.
- (1) 極小特異点解消の例外因子が (-2) -曲線からなり, その Dynkin 図形が, A_n 型, D_n 型, E_n 型のいずれかの特異点と同じになる.
- (2) 複素解析空間としての P の実位相近傍が存在して, A_n 型, D_n 型, E_n 型のいずれかの特異点の複素解析空間としての近傍と同型になる.
- (3) 2次元の標準特異点である.
- (4) $SL(2, \mathbb{C})$ の有限部分群によるアフィン空間 \mathbb{C}^2 の商特異点と複素解析的に局所同型となる.

【命題 4.175 (有理 2 重点の商特異点としての記述)】 各タイプの有理 2 重点は次のような $SL(2, \mathbb{C})$ の有限部分群 G に対応する商特異点となる:

A_n : 位数 $n + 1$ の巡回群

D_n : 位数 $4n$ の 2 項 2 面体群 (binary dihedral group)

E_6 : 位数 24 の 2 項 4 面体群 (binary tetrahedral group)

E_7 : 位数 48 の 2 項 8 面体群 (binary octahedral group)

E_8 : 位数 120 の 2 項 12 面体群 (binary icosahedral group)

□

4.6 代数曲面

4.6.1 双有理不変量

【定義 4.176 (種数と不正則数)】 Ω_S^q を代数的閉体 k 上の代数曲面 S の正則 q 次微分形式の層とし,

$$h^{q,p} = \dim_k H^p(S; \Omega_S^q)$$

とおく.

不正則数 (irregularity): $q(S) = h^{0,1}$

幾何種数 (geometric genus): $p_g(S) = h^{2,0}$

算術種数 (arithmetic genus): $p_a(S) = h^{0,2} - h^{0,1}$

$\chi(\mathcal{O}_S) = h^{0,2} - h^{0,1} + h^{0,0}$

□

【定義 4.177 (多重種数と小平次元)】 K_S を代数的閉体 k 上の代数曲面 S の標準因子 (の定める可逆層), $\rho_{|mK_S|}$ を完備線形系 $|mK_S| (m = 1, 2, \dots)$ の定める有理写像

$$\rho_{|mK_S|} : H^0(S; mK_S) \rightsquigarrow \mathbb{C}P^{\dim |mK_S|}$$

とする.

m -種数 (多重種数): $P_m = \dim H^0(S; mK_S)$

小平次元: $\kappa = \max_m \dim \text{Im } \rho_{|mK_S|}$ ただし, $P_m = 0 (\forall m)$ の時は $\kappa = -\infty$ と定める.

□

4.6.2 曲面上の交点理論

【定理 4.178 (仮想種数)】 C を滑らかな射影的代数曲面 X 上の種数 g の曲線とする. このとき, 仮想種数 (virtual genus) と呼ばれるゼロ以上の整数 $\pi(C)$ が存在して,

$$2\pi(C) - 2 := (C^2) + (K_X \cdot C) \geq 2g - 2$$

が成り立つ. しかも, 等号が成り立つのは, C が滑らかであることと同等である. [川又 97] _____□

【命題 4.179 ($K_C \sim 0$ 曲線)】 滑らかな射影的代数曲面 X 上の曲線 C に対して, $K_C \sim 0$ となるならば, つぎのいずれかが成り立つ:

- 1) C は滑らかな楕円曲線 ($g = 1$).
- 2) C はただ 1 つの特異点 P をもった有理曲線 ($g = 0$) である. しかも, X に伴う複素解析的曲面 X^h での P^h の実位相での近傍で, 局所座標系 x, y を用いて, C^h が $xy = 0$ (結節点) または $x^3 + y^2 = 0$ (尖点) で表される.

[川又 97] _____□

【定理 4.180 (Riemann-Roch の定理)】 滑らかな射影的代数曲面 X に対して, Riemann-Roch の定理は次のように表される:

$$\begin{aligned}\chi(X, \mathcal{O}_X(D)) &= \frac{1}{2}D(D - K_X) + \chi(X, \mathcal{O}_X), \\ \chi(X, \mathcal{O}_X) &= \frac{1}{12}(K_X^2 + \chi(X)).\end{aligned}$$

ここで, 2 番目の式は Noether の公式と呼ばれる. _____□

【定理 4.181 (Hodge の指数定理)】 滑らかで射影的な代数曲面 X に対して, $q([D]) = (D^2)$ で定義される 2 次形式 $q: N^1(X) \rightarrow \mathbb{R}$ は, 符号数 $(1, \rho(X) - 1)$ をもつ. [川又 97] _____□

【定理 4.182 (例外曲線の交点行列)】 正規な代数曲面の特異点解消 $\mu: Y \rightarrow X$ において, μ の例外曲線たちを C_1, \dots, C_m とすると, その交点行列 $[(C_i \cdot C_j)]_{i,j}$ は負定値である. [川又 97] _____□

【定理 4.183 (代数曲線上のファイバーの交点行列)】 滑らかな代数曲面 X から滑らかな代数曲線 B への、連結なファイバーをもった射影的な射 $f: X \rightarrow B$ を与える. このとき, 閉点 $P \in B$ の Cartier 因子としての引き戻しを $f^*P = \sum_i a_i C_i$ とすると, 任意の因子 $D = \sum_i b_i C_i$ に対して $(D^2) \leq 0$ で, 等号は D が f^*P の定数倍となる場合にのみ成り立つ. [川又 97] □

【定義 4.184 (擬有効 \mathbb{R} -因子)】 射影的な代数曲面 X 上の \mathbb{R} -因子は, その数値的同値類が曲線の錘にはいるとき擬有効 (pseudo-effective) であるという. この条件は, 任意のネフな因子 L に対して, $(L \cdot D) \geq 0$ となることと同等である. □

【定理 4.185 (Zariski 分解)】 滑らかな射影的代数曲面 X において, D をその上の擬有効な \mathbb{R} -因子とする. このとき, \mathbb{R} -因子たち P と E で, 次の条件を満たすものが存在する:

- (1) $D = P + E$.
- (2) P はネフで, E は有効.
- (3) $E_i (i = 1, \dots, n)$ を E の既約成分とすると, すべての i に対して $(P \cdot E_i) = 0$ となる, また, 行列 $[(E_i \cdot E_j)]_{1 \leq i, j \leq n}$ が負定値となる.

しかも, P と E はこれら 3 つの条件により一意的に定まる. 特に, E は D の数値的同値類のみに依存して定まる. また, D が \mathbb{Q} -因子ならば, P と E も \mathbb{Q} -因子となる.

[出典・証明: [川又 97]] □

【系 4.186】 上の定理の下で, 任意の正整数 m に対して, 自然な準同形写像

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(mP)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(mD))$$

は同型写像になる. [出典・証明: [川又 97]] □

4.6.3 曲面の分類と極小モデル

【定義 4.187 ((-1)-曲線)】 滑らかな代数曲面 X 上の曲線 C は, $C \cong \mathbb{P}^1$ で $(C^2) = -1$ となるとき, (-1)-曲線という. また, $C \cong \mathbb{P}^1$ で $(C^2) = -2$ となるとき, (-2)-曲線という. □

【定理 4.188 (滑らかな射影的代数曲面の粗分類)】 滑らかな射影的代数曲面 X において, 次のいずれかが成り立つ:

- i) 標準因子 K_X はネフになる.
- ii) (-1) -曲線が存在する.
- iii) X は滑らかな射影的代数曲線 B 上の \mathbb{P}^1 束になる.
- iv) $X \cong \mathbb{P}^2$

[< [川又 97]] _____ □

【定義 4.189 (相対的極小モデル)】 滑らかな射影的代数曲面 X は, 次の性質をもつとき相対的に極小 (relatively minimal) であるという:

滑らかな射影的代数曲面 X' への双有理正則射 $f: X \rightarrow X'$ が存在するならば, f は同型射となる.

与えられた滑らかな射影的代数曲面 X に双有理同値な相対的極小曲面を, X の相対的極小モデル (relatively minimal model) という. 相対的極小モデルは常に存在するが, 一意的とは限らない. [< [宮西 90]] _____ □

【定理 4.190 (Castelnuovo の縮約定理)】 滑らかな射影的代数曲面 X が (-1) -曲線 C をもつとする. このとき, もう一つの滑らかな射影的代数曲面 Y と双有理正則射 $f: Y \rightarrow X$ で, 次の条件を満たすものが (同型を除いて) 一意的に存在する:

- i) $P = f(C)$ は 1 点となる.
- ii) f は $P \in Y$ を中心とするブローアップに一致する.

[< [川又 97]] _____ □

【命題 4.191 (縮約回数の有限性)】 Castelnuovo の縮約定理におけるブローアップ $f: X \rightarrow Y$ において, $b_2(X^h) = b_2(Y^h) + 1$, $\rho(X) = \rho(Y) + 1$ が成り立つ. [< [川又 97]] _____ □

【定理 4.192 (双有理射の分解定理)】 $f: X \rightarrow Y$ を射影的代数曲面の間の双有理射とする. $n(f)$ を, f により 1 点につぶれる既約曲線の数とすると, f は $n(f)$ 個のブローアップの合成に分解される. [< [Har77]] _____ □

【定理 4.193 (相対的極小モデルの存在)】 滑らかな射影的代数曲面が相対的に極小であるための必要十分条件は, (-1) -曲線を持たないことである. さらに, 任意の滑らかな射影的代数曲面 X に対して, ある相対的極小モデル Y への双有理射 $f: X \rightarrow Y$ が存在する. [\square [Har77]] \square

【定義 4.194 ((絶対的) 極小モデル)】 滑らかな射影的代数曲面 X が, (同型を除いて) ただ一つ相対的極小モデルをもつとき, それを (絶対的) 極小モデル ((absolutely) minimal model) という. [\square [宮西 90]] \square

【定理 4.195 (絶対極小モデルの存在条件)】 滑らかな射影的代数曲面 X が, 絶対極小モデルを持つための必要十分条件は, K_X が擬有効となることである. また, 相対的極小モデル X が絶対的極小モデルであるための必要十分条件は, K_X がネフとなることである. [\square [川又 97]] \square

【定義 4.196 (数値的小平次元)】 滑らかで射影的な代数曲面 X の標準因子 K_X がネフのとき, 数値的小平次元 (numerical Kodaira dimension) を $\nu(X) := \nu(X, K_X)$ により定義する. H を豊富因子として

$$\begin{aligned}\nu(X) = 0 &\Leftrightarrow (H \cdot K_X) = 0, \\ \nu(X) = 1 &\Leftrightarrow (H \cdot K_X) \neq 0, (K_X^2) = 0 \\ \nu(X) = 2 &\Leftrightarrow (K_X^2) > 0.\end{aligned}$$

 \square

【定理 4.197 (極小曲面の分類)】 X を極小曲面, すなわち標準因子 K_X がネフとなる滑らかで射影的な代数曲面とする. このとき, 次元が $\nu(X)$ に等しい正規射影的代数多様体 B および連結なファイバーをもつ全射正則射 $\pi: X \rightarrow B$ が存在する. さらに, B 上の豊富な \mathbb{Q} -因子 H が存在して,

$$K_X \sim_{\mathbb{Q}} \pi^* H$$

が成り立つ. 詳しくは, 次のいずれかが成り立つ:

1) $\nu(X) = 0$ のとき:

1-1) **K3** 曲面: $K_X \sim 0, q(X) = 0$.

1-2) **Enriques** 曲面: $K_X \neq 0, 2K_X \sim 0, q(X) = 0$.

1-3) **Abel** 曲面: $K_X \sim 0, q(X) = 2$.

- 1-4) 超楕円曲面 (hyperelliptic) または 2 重楕円曲面 (bielliptic): $K_X \simeq 0$, $12K_X \sim 0$, $q(X) = 1$.
- 2) $\nu(X) = 1$ のとき: 一般楕円曲面 (elliptic surface of general type): B は滑らかな代数曲線で, $\pi: X \rightarrow B$ の幾何学的一般ファイバーは楕円曲線となる.
- 3) $\nu(X) = 2$ のとき: 一般型曲面 (surface of general type): B は高々有理 2 重点をもつ正規な代数曲面で, K_B は豊富な Cartier 因子となる. また, π はクレパントな双有理正則射となる ($K_X = \pi^* K_B$).

□

4.6.4 有理曲面

【定義 4.198 (有理曲面)】 射影平面と双有理同値な曲面を, 有理曲面 (rational surface) という. [数学事典] _____ □

【定理 4.199 (Castelnuovo の有理性判定条件)】 有理曲面に対して, $q = P_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) である. 逆に, $q = P_2 = 0$ となる曲面は有理曲面である. (この定理は, $k = \mathbb{C}$ のみでなく標数正の体に対しても成り立つ.) [数学事典] _____ □

4.6.5 線織曲面

【定義 4.200 (線織曲面)】 滑らかな射影的代数曲面 X は, 滑らかな代数曲線への全射正則射 $\pi: X \rightarrow C$ が存在し, その任意のファイバーが \mathbb{P}^1 と同型となるとき, C 上の線織曲面 (ruled surface) という. (線織面の射影 π は常に, 大域的切断をもつ.) [\llcorner [Har77]] _____ □

【定義 4.201 (双有理的線織曲面)】 射影直線 \mathbb{P}^1 と代数曲線 C の直積 $C \times \mathbb{P}^1$ と双有理同値な曲面を, 双有理的線織曲面 (birationally ruled surface) という. [\llcorner [Har77]] _____ □

【定理 4.202 (Enriques の線織性判定条件)】 双有理的線織曲面に対して, $P_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) (すなわち $\kappa = -1$) である. 逆に, $P_4 = P_6 = 0$ (あるいは $P_{12} = 0$) となる曲面は双有理的線織曲面である. (この定理は, $k = \mathbb{C}$ のみでなく標数正の体に対しても成り立つ.) _____ □

【定理 4.203 (Castelnuovo-Enriques の定理)】 曲面 S が極小モデルを持つための必要十分条件は, S が双有理的線織曲面でないこと, すなわち $\kappa(S) \geq 0$ となることである. [数学事典] _____□

【定理 4.204 (線織曲面の構造と分類)】 $\pi: X \rightarrow C$ を C 上の線織曲面とする.

1. C 上の階数 2 の局所自由層 \mathcal{E} が存在し, $X \cong \mathbb{P}(\mathcal{E})$ となる. 逆に, このように書ける C 上の射影的曲面は線織曲面となる.
2. \mathcal{E} と \mathcal{E}' を C 上の階数 2 の局所自由層とすると, $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ と $\mathbb{P}(\mathcal{E}')$ が C 上の線織曲面として同型となるための必要十分条件は, C 上の可逆層 \mathcal{L} を用いて $\mathcal{E}' \cong \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}$ と書けることである.
3. C の種数を g とすると,

$$p_a(X) = -g, \quad p_g(X) = 0, \quad q(X) = g.$$

4. $C_0 \subset X$ を X の大域的切断とすると,

$$\text{Pic}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \pi^* \text{Pic}(C).$$

ここで, \mathbb{Z} は C_0 で生成される. また,

$$N^1(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

生成元は, C_0 およびファイバー $F \cong \mathbb{P}^1$ で, $(C_0 \cdot F) = 1, (F^2) = 0$.

5. 表示 $X \cong \mathbb{P}(\mathcal{E})$ において, C 上の階数 2 の局所自由層 \mathcal{E} を, $H^0(C, \mathcal{E}) \neq 0$ かつ任意の C 上の可逆層 \mathcal{L} で $\deg \mathcal{L} < 0$ となるものに対して $H^0(C, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) = 0$ という条件を満たすようにとることができる. このとき, $e := -\deg \mathcal{E}$ は双有理不変量となり, X の大域的切断 C_0 に対して

$$(C_0^2) = -e$$

が成り立つ.

6. C の種数を g として, \mathcal{E} を 5) のように規格化された C 上の局所自由層とすると, 次が成り立つ.

- a) \mathcal{E} が2つの可逆層の直和に分解可能なら, $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}$ ($\deg \mathcal{L} < 0$) となる. 特に, $e \geq 0$ で, この条件を満たす任意の e が許される.
- b) \mathcal{E} が分解不可能なら, $-2g \leq e \leq 2g - 2$ となる.

[< [Har77]] _____ □

4.6.6 楕円曲面

【定義 4.205 (楕円曲面)】 曲面 S から完備非特異な代数曲線 C への全射正則写像 $\pi: S \rightarrow C$ で幾何学的一般ファイバーが楕円曲線 (種数1の曲線) となるものが存在するとき, S は楕円曲面の構造をもつという. [川又雄二郎「代数多様体論」] _____ □

4.6.7 代数的 K3 曲面

【定義 4.206 (代数的 K3 曲面)】 複素解析的 K3 曲面が代数的であるとき, 代数的 K3 曲面という. 代数的 K3 曲面 S とその上の豊富層 \mathcal{L} の組 (S, \mathcal{L}) は, $([\mathcal{L}]^2) = 2d$ となるとき, 次数 $2d$ の偏極 K3 曲面という. [川又雄二郎:「代数多様体論」] _____ □

【定理 4.207 (代数的 K3 曲面の存在)】 任意の正の整数 d に対して, 次数 $2d$ の K3 曲面が存在する. [Barth, W., Peters, C. and Van de Ven, A.: Compact Complex Surfaces (1984)] _____ □

4.7 代数群

【定義 4.208】 代数多様体 G が群構造を持ち, (x, y) に xy^{-1} を対応させる写像 $G \times G \rightarrow G$ が正則写像のとき, G を代数群という. 特に, G が既約な時, 群多様体, 完備な群多様体を **Abel 多様体**という. \square

4.7.1 Abel 多様体

4.7.1.1 Albanese 多様体

【定義 4.209】 既約代数多様体 V に対して, Abel 多様体 A と V から A への有理写像の組 (A, f) が次の条件を満たすとき, A を V の **Albanese 多様体**, f を **Albanese 写像**という:

- i) f の像は A を生成する, すなわち f の像から生成される A の部分加群の閉包が A と一致する.
- ii) Abel 多様体への任意の有理写像 $g: V \rightarrow B$ に対して, Abel 多様体の準同型 $h: B \rightarrow A$ と $b \in B$ が常に定まり, $g = h \circ f + b$ を満たす.

Albanese 多様体は同型を除いて一意的存在し, f は平行移動を除いて一意である. これらの定義で, 有理写像を正則写像で置き換えると, 強い意味での **Albanese 多様体**の定義となる. それは常に存在し, Albanese 多様体の商多様体である. 特に, V が非特異の時, 両者は一致する. [数学事典] \square

【命題 4.210】 V を非特異完備複素多様体とすると, その Albanese 多様体 A と Albanese 写像 f は, V の適当な基点 o を固定して, o と任意の点 $x \in M$ を結ぶ曲線 γ_x にそう $\omega \in H^0(V; \Omega^1(V))$ の積分 $\langle x, \omega \rangle$ から決まる, M から複素トーラスへの写像で与えられる.

$$f: V \rightarrow (H^0(V; \Omega^1(V)))^*/H_1(V; \mathbb{Z}) = A$$

[数学事典] \square

4.8 トーリック多様体

文献

- Danilov VI: "The geometry of toric varieties", Russian Math. Survey 33, n.2, 97 (1978).
- Oda T: "Convex bodies and algebraic geometry" (Springer, 1988).
- Fulton W: "Introduction to toric varieties" (Princeton Univ. Press, 1993).
- Ewald G: "Combinatorial convexity and algebraic geometry", GTM 168, Springer (1996).
- Cox D: "Recent developments in toric geometry", AMS Proc. Symp. Pure Math. 62, 389 (1997) [alg-geom/9606016].
- Cox D: "Update on toric geometry", Séminaires et Congrès 6, SMF 2002.
- Cox D: "Minicourse on Toric Varieties": <http://www.amherst.edu/~dcox/>.
- Batyrev VV: "Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties", J. Alg. Geom. 3: 493 (1994) [arXiv: alg-geom/9310003].
- Kreuzer M: "Toric Geometry and Calabi-Yau Compactifications", hep-th/0612307.

【定義 4.211 (トーリック多様体)】 k を代数的閉体とし, $k^* = k \setminus \{0\}$ とする. k 上局所有限生成の正規概型 X に, 代数的トーラス $T = (k^*)^n$ が作用し, T と同型な X の開かつ稠密な軌道のあるとき, X をトーラス埋め込み (torus embedding) あるいはトーリック多様体 (toric variety) という. □

4.8.1 構成法

【定義 4.212 (扇)】 $N \cong \mathbb{Z}^n$ を \mathbb{R}^n の格子, O を \mathbb{R}^n の原点として, 次の条件を満たす \mathbb{R}^n の O を頂点とする強凸錐の集合 Σ を扇 (fan) と呼ぶ.

- i) 錐 $\sigma \in \Sigma$ は N のベクトルで生成され, $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ (強凸).
- ii) $\sigma \in \Sigma$ なら, σ のすべての面に対応する錐 $\tau < \sigma$ も Σ に含まれる.
- iii) $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ なら, $\sigma_1 \cap \sigma_2 < \sigma_1, \sigma_2$.

□

【定義 4.213 (指標群)】 代数的トーラス T の指標

$$\begin{aligned} \chi^m &: T \rightarrow k^* \\ t = (t_1, \dots, t_n) &\mapsto t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n} \end{aligned} \quad (4.8.1)$$

の全体 M は \mathbb{Z}^n に同型な可換群となる.

正則準同型

$$\begin{aligned} \phi_u &: k^* \rightarrow T \\ \lambda &\mapsto (\lambda^{u_1}, \dots, \lambda^{u_n}) \end{aligned} \quad (4.8.2)$$

の全体 N は \mathbb{Z}^n と同型な可換群となる.

写像の結合 $\chi^m \circ \phi_u(\lambda) = \lambda^{\langle u, m \rangle}$ は準同型 $M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$ を定義し, この内積 $\langle u, m \rangle$ により, N と M は互いに双対となる. □

【定理 4.214 (Toric variety と扇の一対一对応)】 錐 σ と指標群 M に対して,

$$M \cap \sigma^\vee = \{m \in M \mid m(y) \geq 0 \forall y \in \sigma\} \quad (4.8.3)$$

は, 単位元 0 を含む有限生成半群で, 加群 M を生成する.

半群 k 代数 $k[M \cap \sigma^\vee] = \bigoplus_{m \in M \cap \sigma^\vee} k\chi^m$ の定めるアフィン概型を U_σ と定義する. このとき, 扇 Σ に対する条件 iii) より, $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ は自然に貼り合わさって, トーリック多様体 $X_\Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} U_\sigma$ を与える.

逆に, 隅広による代数的トーラス作用に関する定理 (1974, 1975) より, すべてのトーリック多様体はこの方法で得られる. □

□

【構成 4.215 (Toric Variety)】 \mathbb{R}^n の扇 $\Sigma \Rightarrow$ Toric Variety X_Σ :

- 1) 扇頂点集合 Δ : Σ の 1 次元スケルトン

$$\Sigma^{(1)} = \{\mathbb{R}v_1, \dots, \mathbb{R}v_r\}, \quad v_j \in \mathbb{Z}^n. \quad (4.8.4)$$

から \mathbb{Z}^n の格子点の集合

$$\Delta := \{v_1, \dots, v_r\} \quad (4.8.5)$$

が一意的に決まる.

- 2) 変換指数ベクトル: Δ の線形従属関係を生成する線形独立な格子ベクトル集合 $q^{(1)}, \dots, q^{(r-n)} \in \mathbb{Z}^r$,

$$q = l_1 q^{(1)} + \dots + l_{r-n} q^{(r-n)} \quad (l_k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow q_1 v_1 + \dots + q_r v_r = 0. \quad (4.8.6)$$

- 3) 除外集合 $Z \subset k^r$: P_j を $z_j = 0$ となる座標面

$$P_j = \{z = (z_1, \dots, z_r) \in k^r \mid z_j = 0\} \quad (j = 1, \dots, r), \quad (4.8.7)$$

部分頂点集合 $\sigma = \{v_{j_1}, \dots, v_{j_l}\} \subset \Delta$ に対して

$$P_\sigma = P_{j_1} \cap \dots \cap P_{j_l}, \quad (4.8.8)$$

$$\langle \sigma \rangle = \mathbb{R}v_{j_1} + \dots + \mathbb{R}v_{j_l} \quad (4.8.9)$$

とおくとき,

$$Z = \cup_{\langle \sigma \rangle \notin \Sigma} P_\sigma. \quad (4.8.10)$$

- 4) 以上の要素を用いて, 扇 Σ に対応するトーリック多様体 X_Σ が次で定義される:

$$X_\Sigma = (k^r - Z) / \sim; \quad (4.8.11)$$

$$(z_1, \dots, z_r) \sim \left(\prod_l \lambda_l^{q_l^{(1)}} z_1, \dots, \prod_l \lambda_l^{q_l^{(r-n)}} z_r \right), \quad \lambda_1, \dots, \lambda_{r-n} \in k^* \quad (4.8.12)$$

- 5) 埋め込み $T \rightarrow X_\Sigma$: 次の写像より誘導される.

$$z = (z_j) \in k^r - Z \mapsto t = \prod_{j=1}^r \phi_{v_j}(z_j) \in T \quad (4.8.13)$$

6) 因子 D_j :

$$D_j = (P_j - Z)/\sim. \quad (4.8.14)$$

7) アフィン開集合 U_σ ($\langle\sigma\rangle \in \Sigma$):

$$U_\sigma = \bigcap_{v_j \neq \sigma} (X_\Sigma - D_j) \quad (4.8.15)$$

この開集合上で, 指標 χ^m は

$$\chi^m = t^m = \prod_j z_j^{\langle m, v_j \rangle}, \quad m \in M \quad (4.8.16)$$

と表されるので, 正則となる条件は,

$$m \in \sigma^\vee = \{x \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle x, v \rangle \geq 0 \ \forall v \in \langle\sigma\rangle\} \quad (4.8.17)$$

よって, U_σ 上の座標環 A_σ が

$$A_\sigma = k[\sigma^\vee \cap M] \cong \bigoplus_{m \in \sigma^\vee \cap M} k\chi^m \quad (4.8.18)$$

により定義され,

$$(U_\sigma, \mathcal{O}_X|_{U_\sigma}) = (\text{Spec}(A_\sigma), \tilde{A}_\sigma). \quad (4.8.19)$$

[Kreuzer M:hep-th/0612307] _____ □

【定理 4.216 (コンパクト性と正則性)】

1. 扇 Σ に対応するトーリック多様体がコンパクトとなるための必要十分条件は, 扇が完全, すなわち $|\Sigma| = \cup_\sigma \langle\sigma\rangle = N_{\mathbb{R}}$ となることである.
2. 扇 Σ に対応するトーリック多様体が非特異となるための必要十分条件は, Σ が単体的かつ基本的, すなわちすべての錐 $\langle\sigma\rangle$ が N の格子基底の一部で生成されることである.

_____ □

4.8.2 例

【例 4.217 (射影空間 $\mathbb{C}P^n$)】1) 扇: N を \mathbb{R}^n の標準格子 \mathbb{Z}^n , $r = n + 1$ として, 頂点集合 Δ を

$$\Delta = \{v_0, \dots, v_n\} \quad v_1 = e_1, \dots, v_n = e_n, v_0 = -\sum_{i=1}^n e_i. \quad (4.8.20)$$

と取り, 扇 Σ を, $\sigma \subset \Delta$ として,

$$\sigma \in \Sigma \Leftrightarrow \sigma \subset \Delta - \{v_j\} \exists j \quad (4.8.21)$$

により定義する.

2) 変換指数ベクトル:

$$q = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (4.8.22)$$

よって, 同一視変換は

$$(\lambda z_0, \dots, \lambda z_n) \sim (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}. \quad (4.8.23)$$

3) 除外集合:

$$Z = (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}. \quad (4.8.24)$$

4) トーリック多様体:

$$X_\Sigma = (\mathbb{C}^{n+1} - Z) / \sim = \mathbb{C}P^n. \quad (4.8.25)$$

5) 基本因子

$$D_j = (P_j - Z) / \sim \cong [\mathbb{C}P^{n-1}]. \quad (4.8.26)$$

これらはすべて線形同値.

6) アフィン開集合: $\sigma_j = \Delta - \{v_j\}$, $U_j = U_{\sigma_j}$ は

$$U_j = X_\Sigma - D_j = (\mathbb{C}^{n+1} - P_j) / \sim, \\ U_j \ni [z_0 : \dots : z_n] \cong (\zeta_1, \dots, \zeta_n) = (z_0/z_j, \dots, z_n/z_j).$$

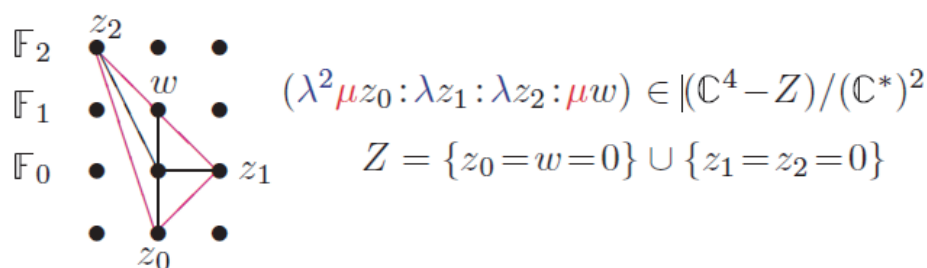


Fig. 1: The Hirzebruch surface \mathbb{F}_2 as blowup of $W\mathbb{P}_{211}$.

7) 座標環 :

$$\begin{aligned}
 U_0 & : \sigma^\vee \cap M = \mathbb{Z}^+ e_1 + \cdots + \mathbb{Z}^+ e_n, \\
 & \quad \zeta_1 = z_1/z_0, \cdots, \zeta_n = z_n/z_0 \Rightarrow A_\sigma \cong \mathbb{Z}[\zeta_1, \cdots, \zeta_n], \\
 U_l & : \sigma^\vee \cap M = \mathbb{Z}^+(e_1 - e_l) + \cdots + \mathbb{Z}^+(e_n - e_l) + \mathbb{Z}^+(-e_l), \\
 & \quad \zeta_j = z_j/z_l \ (j \neq l), \zeta_l = z_0/z_l \Rightarrow A_\sigma \cong \mathbb{Z}[\zeta_1, \cdots, \zeta_n].
 \end{aligned}$$

□

【例 4.218 (Hirzebruch surface \mathbb{F}_n)】

1) 扇 : $\Delta = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ を頂点集合とする単体的扇 Σ .

$$v_0 = (0, -1), \quad v_1 = (1, 0), \quad v_2 = (-1, n), \quad v_3 = (0, 1). \quad (4.8.27)$$

2) 除外集合 :

$$Z = \{z_0 = w = 0\} \cup \{z_1 = z_2 = 0\}. \quad (4.8.28)$$

3) 同一視 : 線形関係

$$q^{(1)} = (1, 0, 0, 1) : v_0 + v_3 = 0, \quad (4.8.29a)$$

$$q^{(2)} = (n, 1, 1, 0) : nv_0 + v_1 + v_2 = 0, \quad (4.8.29b)$$

より,

$$\mathbb{F}_n = (\mathbb{C}^4 - Z) / \sim \ni (\lambda^n \mu z_0 : \lambda z_1 : \lambda z_2 : \mu w). \quad (4.8.30)$$

4) 基本因子 :

$$\begin{aligned} D_0 &:= \{(0 : z_1 : z_2 : w)\}, & D_1 &:= \{(z_0 : 0 : z_2 : w)\}, \\ D_2 &:= \{(z_0 : z_1 : 0 : w)\}, & D_3 &:= \{(z_0 : z_1 : z_2 : 0)\}. \end{aligned}$$

空でない交差を持つのは,

$$D_0 \cap D_1, D_0 \cap D_2, D_1 \cap D_3, D_2 \cap D_3. \quad (4.8.31)$$

5) Affine 開集合 :

$$U_{0,1} = \mathbb{F}_n - D_2 - D_3 : \sigma = \{v_0, v_1\}$$

$$\begin{aligned} \sigma^\vee \cap M &= \mathbb{Z}^+ e_1 + \mathbb{Z}^+ (-e_2), \\ \zeta_1 &= \frac{z_1}{z_2}, \zeta_2 = \frac{z_0}{z_2^n z_3} \Rightarrow A_1 \cong \mathbb{Z}[\zeta_1, \zeta_2] \end{aligned}$$

$$U_{0,2} = \mathbb{F}_n - D_1 - D_3 : \sigma = \{v_0, v_2\}$$

$$\begin{aligned} \sigma^\vee \cap M &= \mathbb{Z}^+ (-e_1) + \mathbb{Z}^+ (-ne_1 - e_2), \\ \zeta_1 &= \frac{z_2}{z_1}, \zeta_2 = \frac{z_0}{z_1^n z_3} \Rightarrow A_1 \cong \mathbb{Z}[\zeta_1, \zeta_2] \end{aligned}$$

$$U_{1,3} = \mathbb{F}_n - D_0 - D_2 : \sigma = \{v_1, v_3\}$$

$$\begin{aligned} \sigma^\vee \cap M &= \mathbb{Z}^+ e_1 + \mathbb{Z}^+ e_2, \\ \zeta_1 &= \frac{z_1}{z_2}, \zeta_2 = \frac{z_2^n z_3}{z_0} \Rightarrow A_1 \cong \mathbb{Z}[\zeta_1, \zeta_2] \end{aligned}$$

$$U_{2,3} = \mathbb{F}_n - D_0 - D_1 : \sigma = \{v_2, v_3\}$$

$$\begin{aligned} \sigma^\vee \cap M &= \mathbb{Z}^+ (-e_1) + \mathbb{Z}^+ (ne_1 + e_2), \\ \zeta_1 &= \frac{z_2}{z_1}, \zeta_2 = \frac{z_1^n z_3}{z_0} \Rightarrow A_0 \cong \mathbb{Z}[\zeta_1, \zeta_2] \end{aligned}$$

□

【例 4.219 (重み付き射影空間 CP_{n11})】

1) 扇 $\Delta = \{v_0, v_1, v_2\}$ を頂点集合とする単体的扇 Σ .

$$v_0 = (0, -1), \quad v_1 = (1, 0), \quad v_2 = (-1, n). \quad (4.8.32)$$

2) 除外集合 :

$$Z = \{z_0 = z_1 = z_2 = 0\}. \quad (4.8.33)$$

3) 同一視 : 線形関係

$$q = (n, 1, 1) : nv_0 + v_1 + v_2 = 0, \quad (4.8.34)$$

より,

$$X = (\mathbb{C}^3 - Z) / \sim \cong \mathbb{C}P_{n11} \ni (\lambda^n z_0 : \lambda z_1 : \lambda z_2). \quad (4.8.35)$$

4) 基本因子 :

$$\begin{aligned} D_0 &:= \{(0 : z_1 : z_2)\}, & D_1 &:= \{(z_0 : 0 : z_2)\}, \\ D_2 &:= \{(z_0 : z_1 : 0)\}, \end{aligned}$$

空でない交差を持つのは,

$$D_0 \cap D_1, D_0 \cap D_2, D_1 \cap D_2. \quad (4.8.36)$$

5) Affine 開集合 :

$$U_{0,1} = \mathbb{C}P_{n11} - D_2 : \sigma = \{v_0, v_1\}$$

$$\begin{aligned} \sigma^\vee \cap M &= \mathbb{Z}^+ e_1 + \mathbb{Z}^+ (-e_2), \\ \zeta_1 &= \frac{z_1}{z_2}, \zeta_2 = \frac{z_0}{z_2^n} \Rightarrow A_1 \cong \mathbb{Z}[\zeta_1, \zeta_2] \end{aligned}$$

$$U_{0,2} = \mathbb{C}P_{n11} - D_1 : \sigma = \{v_0, v_2\}$$

$$\begin{aligned} \sigma^\vee \cap M &= \mathbb{Z}^+ (-e_1) + \mathbb{Z}^+ (-ne_1 - e_2), \\ \zeta_1 &= \frac{z_2}{z_1}, \zeta_2 = \frac{z_0}{z_1^n} \Rightarrow A_1 \cong \mathbb{Z}[\zeta_1, \zeta_2] \end{aligned}$$

$$U_{1,2} = \mathbb{C}P_{n11} - D_0 : \sigma = \{v_1, v_2\}$$

$$\begin{aligned} \sigma^\vee \cap M &= \mathbb{Z}^+ e_2 + \mathbb{Z}^+ (e_2 + e_1) + \cdots + \mathbb{Z}^+ (e_2 + ne_1), \\ w_0 &= \frac{z_2^n}{z_0}, w_1 = \frac{z_1 z_2^{n-1}}{z_0}, \cdots, w_n = \frac{z_1^n}{z_0} \\ &\Rightarrow A_1 \cong \mathbb{Z}[w_0, w_1, \cdots, w_n] / (w_0 w_n = w_1 w_{n-1} = \cdots = w_{[n/2]} w_{n-[n/2]}) \end{aligned}$$

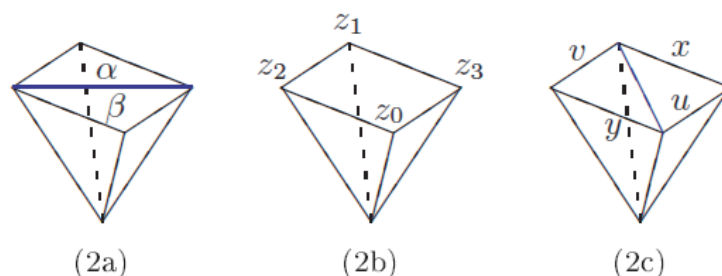


Fig. 2: Toric desingularizations of the conifold.

- 6) 特異点解消: $\mathbb{C}P_{n11}$ は $U_{1,2}$ 内の点 $(1:0:0)$ を巡回商特異点としてもつ. Hirzebruch 面 \mathbb{F}_n からこの多様体への有理写像 f を

$$f: \mathbb{F}_n \ni (z_0: z_1: z_2: w) \mapsto (z_0: z_1: z_2) \in \mathbb{C}P_{n11} \quad (4.8.37)$$

により定義すると,

$$f: \mathbb{F}_n - D_3 \cong \mathbb{C}P_{n11} - (1:0:0) \quad (4.8.38)$$

で, かつ

$$D_3 = \{(z_0: z_1: z_2: 0)\} \cong \{(1: z_1: z_2: 0)\} / \mathbb{C}^* \cong \mathbb{C}P^1. \quad (4.8.39)$$

よって, \mathbb{F}_n はブローアップによる $\mathbb{C}P_{n11}$ の特異点解消を与える.

□

【例 4.220 (Conifold $\mathbb{C}P(1, 1, -1, -1)$)】

- 1) 扇: Σ を次の 4 個の頂点集合 $\Delta = \Delta_4$ から生成される 1 個の錐 $\sigma = |\Delta_4|$ とその辺で構成する:

$$v_0 = e_1, \quad v_1 = e_2, \quad v_2 = e_1 + e_3, \quad v_3 = e_2 - e_3. \quad (4.8.40)$$

- 2) Δ の従属関係は

$$q = (1, 1, -1, -1): v_0 + v_1 = v_2 + v_3 \quad (4.8.41)$$

で, 除外集合は $Z = \emptyset$ となるので,

$$X_\Sigma = \mathbb{C}P^4 / \sim \cong \mathbb{C}P(1, 1, -1, -1): (\lambda z_0: \lambda z_1; \frac{1}{\lambda} z_2; \frac{1}{\lambda} z_3) = (z_0: z_1: z_2: z_3) \quad (4.8.42)$$

3) 基本因子 :

$$\begin{aligned} D_0 &:= \{(0 : z_1 : z_2 : z_3)\}, & D_1 &:= \{(z_0 : 0 : z_2 : z_3)\}, \\ D_2 &:= \{(z_0 : z_1 : 0 : z_3)\}, & D_3 &:= \{(z_0 : z_1 : z_2 : 0)\}. \end{aligned}$$

4) 座標環 :

$$\sigma^\vee \cap M = \mathbb{Z}^+ e_1 + \mathbb{Z}^+ e_2 + \mathbb{Z}^+(e_1 - e_3) + \mathbb{Z}^+(e_2 + e_3) \quad (4.8.43)$$

より,

$$\begin{aligned} U_\sigma &: x = z_0 z_2, y = z_1 z_3, u = z_1 z_2, v = z_0 z_3 \\ &\Rightarrow A_\sigma = \mathbb{Z}[x, y, u, v]/(xy = uv). \end{aligned} \quad (4.8.44)$$

これは, $x = y = u = v = 0$ に conifold 特異点をもつ.

5) 特異点解消 : Δ_4 を図 (2a) のように 2 つの単体錐

$$\sigma_\alpha = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle, \quad \sigma_\beta = \langle v_0, v_2, v_3 \rangle \quad (4.8.45)$$

に分割して得られる扇 Σ' を考えると, 除外集合が

$$Z' = \{(0 : 0 : z_2 : z_3)\} \quad (4.8.46)$$

となり, 基本因子の交差は

$$D_0 \cap D_2, \quad D_0 \cap D_3, \quad D_1 \cap D_2, \quad D_1 \cap D_3, \quad D_2 \cap D_3. \quad (4.8.47)$$

また,

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^\vee \cap M &= \mathbb{Z}^+ e_1 + \mathbb{Z}^+(e_1 - e_3) + \mathbb{Z}^+(-e_1 + e_2 + e_3), \\ \sigma_\beta^\vee \cap M &= \mathbb{Z}^+ e_2 + \mathbb{Z}^+(e_2 + e_3) + \mathbb{Z}^+(e_1 - e_2 - e_3), \end{aligned}$$

より, アフィン開近傍は

$$U_\alpha = X' - D_0:$$

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= z_0 z_2 = x, \quad \zeta_2 = z_0 z_3 = v, \quad \zeta_3 = z_1/z_0, \\ &\Rightarrow A_\alpha = \mathbb{Z}[x, v, z_1/z_0] \end{aligned} \quad (4.8.48)$$

$$U_\beta = X' - D_1:$$

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= z_1 z_3 = y, \quad \zeta_2 = z_1 z_2 = u, \quad \zeta_3 = z_0/z_1, \\ \Rightarrow A_\beta &= \mathbb{Z}[y, u, z_0/z_1] \end{aligned} \quad (4.8.49)$$

X の特異点は $(P_0 \cap P_1) \cup (P_2 \cap P_3) \subset \mathbb{C}P^4$ に対応するので, X' では $x = y = u = v = 0$ ($(z_0, z_1) \neq (0, 0)$ は任意) と対応. これは $\mathbb{C}P^1$ と同型.

同様に, Δ_4 を次のような 2 つの単体

$$\sigma_\gamma = \{v_0, v_1, v_2\}, \quad \sigma_\gamma = \{v_0, v_1, v_3\} \quad (4.8.50)$$

に分割すると, 除外集合が

$$Z'' = \{(z_0, z_1, 0, 0)\} \quad (4.8.51)$$

となり, 別のブローアップ X'' を与える.

(注) $X' \cong X'' \cong (\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{C}P^1)$.

□

4.8.3 性質

以下, X_Σ を $N \cong \mathbb{R}^n$ の扇 Σ に対応する非特異コンパクトトーリック多様体, $D_j (j = 1, \dots, r)$ をその基本因子系, M を $(\mathbb{C}^*)^n = X_\Sigma \setminus \cup_j D_j$ から \mathbb{C}^* への正則準同型 χ^m の集合とする.

【定義 4.221 (Chow 群)】 代数多様体 X の r 次元閉部分既約多様体の \mathbb{Z} 係数形式和 $\sum_i a_i [Z_i]$ を (代数的) r -輪体 (algebraic r -cycle) という. 2 つの r -輪体 c_1, c_2 は, それらを含む $(r+1)$ 次元部分多様体 Y とその上の有理関数 f が存在し, Y 上の因子として $c_1 - c_2 = (f)$ が成り立つとき, 有理同値 (rationally equivalent) という. X 上の r -輪体の有理同値類全体のつくる加群 $A_r(X)$ を **Chow 群** (Chow group) と呼ぶ. □

【命題 4.222 (トーリック多様体の Chow 環)】 トーリック多様体 X_Σ に対して,

1. Chow 群 $A_k(X_\Sigma)$ は, $V_\sigma = \cap_{v \in \sigma} D_v$ ($\sigma \in \Sigma$) により生成される.

2. $|I| \neq \Sigma$ となる $I \subset \Delta_\Sigma$ に対して, $R_I = \prod_{v \in I} D_v$ とおくと, $m \in M$ として, X_Σ の Chow 環は

$$A_*(X_\Sigma) = \mathbb{Z}[D_1, \dots, D_r] / \left\langle R_I, \sum_j \langle m, v_j \rangle D_j \right\rangle \quad (4.8.52)$$

で与えられる.

3. $A_k(X_\sigma, \mathbb{Z}) \cong H_{2k}(X_\Sigma, \mathbb{Z})$

□

【命題 4.223 (トーリック多様体の Chern 類)】 トーリック多様体 $X = X_\Sigma$ に対して,

1. X の標準層は

$$\Omega_X^n = \mathcal{O}_X(-\sum_{j=1}^r D_j). \quad (4.8.53)$$

2. X の接バンドル T_X の全 Chern 類と全 Tod 類は

$$c(T_X) = \prod_{j=1}^r (1 + *[D_j]) = \sum_{\sigma \in \Sigma} *[V_\sigma], \quad (4.8.54a)$$

$$\text{td}(T_X) = \prod_{j=1}^r \frac{*[D_j]}{1 - \exp(-*[D_j])} = 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}c_1^2c_2 + \dots \quad (4.8.54b)$$

ここで, 輪体 c に対して $*c$ はその Poincare 双対. 特に,

$$c_1(X) = \sum_{j=1}^r *[D_j]. \quad (4.8.55)$$

□

4.8.4 超曲面

【命題 4.224 (線バンドルの断面)】 X を扇 Σ に対応するトーリック多様体とする.

1. Weil 因子 $D = \sum a_j D_j$ が Cartier となるための必要十分条件は, Σ の各極大錐 σ に対し, $\langle m_\sigma, v_j \rangle = -a_j (\forall v_j \in \sigma)$ となる $m_\sigma \in M$ が存在することである. このとき, 各開近傍 U_σ で

$$D|_{U_\sigma} = (\chi^{m_\sigma}). \quad (4.8.56)$$

2. X が非特異なら, Weil 因子は常に Cartier である.
 3. Σ が単体的ならば, kD が Cartier となる $k \in \mathbb{N}$ が存在.
 4. Cartier 因子 D に対して, 区分線形な $N_{\mathbb{R}}$ 上の関数

$$\psi_D(v) = \langle m_\sigma, v \rangle \quad v \in \sigma \quad (4.8.57)$$

を support 関数という.

5. X がコンパクトで $D = \sum a_j D_j$ が Cartier のとき,
- $\mathcal{O}(D)$ が大域的断面で生成されるための必要十分条件は ψ_D が凸であることである.
 - D が豊富であるための必要十分条件は, ψ_D が強凸であること, すなわち $\dim \sigma = n$ となる錐 σ と頂点 $v_j \notin \sigma$ に対して $\langle m_\sigma, v_j \rangle > -a_j$ となることである.

6. Cartier 因子 D に対して,

$$\Delta_D := \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, v_j \rangle \geq -a_j, \forall j\} \quad (4.8.58)$$

は凸な格子ポリトープを定義し, その格子点は $\mathcal{O}(D)$ の大域的切断を与える. さらに

- D が大域的切断で生成されるための必要十分条件は, Δ_D が $\{m_\sigma\}$ の凸包であること.
 - D が豊富であるための必要十分条件は, Δ_D が $m_\sigma (\sigma \in \Sigma^{(n)})$ を頂点とする n -次元体で, $\sigma \neq \tau \in \Sigma^{(n)}$ に対し $m_\sigma \neq m_\tau$ となることである. このとき, Σ は Δ_D の法扇となる.
7. ポリトープ Δ に対し, その極ポリトープ $\Delta^\circ \subset N_{\mathbb{R}}$ を

$$\Delta^\circ = \{y \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle x, y \rangle \geq -1, \forall x \in \Delta\} \quad (4.8.59)$$

により定義する. このとき, Δ の法扇 Σ_Δ は, Δ° の面とその共通の内点から作られる錐で生成される.

8. コンパクトでなめらかなトーリック多様体 X では, すべての T -不変な豊富因子は非常に豊富である.
8. トーリック多様体 X_Σ が射影的であるための必要十分条件は, Σ がある格子ポリトープ $\Delta \subset M_{\mathbb{R}}$ の法扇となることである.

□

【定理 4.225 (Batyrev)】 トーリック多様体 X_Σ の超曲面 Y に対し $c_1(Y) = 0$ となるための必要十分条件は, $\mathcal{O}(D)$ の断面が Y を与える因子 D に対して, ポリトープ $\Delta_D \subset M_{\mathbb{R}}$ の極ポリトープ $\Delta_D^\circ \subset N_{\mathbb{R}}$ が, Σ の格子頂点の凸閉包 Δ^* と一致することである. □

【定義 4.226 (reflexive polytope)】 格子ポリトープは, その極ポリトープが再び格子ポリトープとなるとき, reflexive であるという. □

5 Gauge Field Theories

Last update: 2011/7/18

5.1 Fundamentals

Principal fibre bundle $P(M, G)$ 局所座標系を $(\psi_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$, 局所切断を σ_α とする :

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \ni u \mapsto (\pi(u), \phi_\alpha(u)) \in \mathcal{U}_\alpha \times G, \quad (5.1.1)$$

$$\sigma_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha). \quad (5.1.2)$$

このとき, 次が成り立つ :

$$\psi_\alpha(ug) = \psi_\alpha(u)g, \quad \phi_\alpha(ug) = \phi_\alpha(u)g, \quad \forall g \in G, \quad (5.1.3)$$

$$\psi_\alpha^{-1}(x, g) = \sigma_\alpha(x)g. \quad (5.1.4)$$

座標変換 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ は変換関数

$$U_{\beta\alpha} : \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \rightarrow G, \quad (5.1.5)$$

を用いて,

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(x, g) = (x, U_{\beta\alpha}(x)g) \quad (5.1.6)$$

と表される. また, 局所切断を用いると

$$\sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x)U_{\beta\alpha}(x)^{-1} = \sigma_\alpha(x)U_{\alpha\beta}(x) \quad (5.1.7)$$

となる.

$P(M, G)$ の接続形式 ω の局所切断による引き戻しを

$$\omega_\alpha = \sigma_\alpha^* \omega, \quad (5.1.8)$$

とおくと, その座標変換に対する変換則は

$$\omega_\beta = \text{ad}(U_{\alpha\beta}^{-1})\omega_\alpha + U_{\alpha\beta}^* \theta \quad (5.1.9)$$

となる. ここで, θ はリー群の標準 1 形式

$$\theta_g(\xi_g) = (L_{g^{-1}})_* \xi_g \quad (5.1.10)$$

である。 G が行列群のとき、

$$\begin{aligned}\omega_\alpha &\mapsto A, \\ U_{\beta\alpha} &\mapsto U,\end{aligned}$$

に対して、この変換則は

$$A' = \text{ad}(U)A - dUU^{-1} \quad (5.1.11)$$

と表される。

随伴ベクトルバンドル $E(M, V, G, P)$ 主バンドル P の随伴ベクトルバンドルは G の左作用の定義された線形空間 V に対して、

$$E = P \times_G V \ni [u, v]; \quad [u, v] = \{(ug, g^{-1}v) \mid g \in G\} \quad (5.1.12)$$

により定義される。 P の局所座標 $(\psi_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$ に対応して、 E の局所座標 $(\psi_{E\alpha}, \mathcal{U}_\alpha)$ が

$$\psi_{E\alpha} : \pi_E^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \ni [u, v] \mapsto (\pi(u), \phi_\alpha(u)v) \in \mathcal{U}_\alpha \times V \quad (5.1.13)$$

により定義される。 $\psi_{E\alpha}$ は ψ_α に対応する P の局所切断 σ_α を用いて

$$\psi_{E\alpha}^{-1}(x, v) = [\sigma_\alpha(x), v] \quad (5.1.14)$$

と表される。

E の座標変換は

$$\psi_{E\beta} \circ \psi_{E\alpha}^{-1}(x, v) = (x, U_{\beta\alpha}v) \quad (5.1.15)$$

となる。したがって、 E の切断 Φ の座標表示を

$$\psi_{E\alpha} \circ \Phi(x) = (x, \Phi_\alpha(x)) \quad (5.1.16)$$

とおくと、 Φ_α の変換則は

$$\Phi_\beta = U_{\beta\alpha} \Phi_\alpha, \quad (5.1.17)$$

あるいは、省略記法で

$$\Phi'(x) = U(x)\Phi(x) \quad (5.1.18)$$

となる。

共変微分と曲率 局所座標表示に対する省略記法のもとで，ベクトル場 Φ の共変微分は

$$D_X \Phi = X\Phi + A(X)\Phi, \quad (5.1.19)$$

あるいは，

$$D\Phi = d\Phi + A\Phi \quad (5.1.20)$$

で定義される．また，曲率形式 Ω の局所切断による引き戻し

$$F = \sigma^*\Omega \quad (5.1.21)$$

は，ゲージ場 A を用いて

$$F = dA + A \wedge A \quad (5.1.22)$$

と表される．ここで，

$$A \wedge A(X, Y) = [A(X), A(Y)] \quad (5.1.23)$$

である．これと共変微分の関係は

$$(D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X, Y]})\Phi = F\Phi \quad (5.1.24)$$

となる．

6 Noncommutative Geometry

Last update: 2011/7/18

6.1 超幾何学

6.1.1 教科書とレビュー

- Kac VG: Lie superalgebras, *Adv. Math.* **26**, 8–96 (1977).
- Kostant B: *Graded manifolds, graded Lie theory and prequantization*, Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics, Lecture Notes in Mathematics 570 (Springer, 1977), 177–306.
- Batchelor M: Graded Manifolds and Supermanifolds, *Mathematical Aspects of Superspace*, eds. Seifert H-J, Clarke CJS, Rosenblum A, NATO ASI Series, Mathematical and Physical Sciences 132 (D.Reidel Pub. Company, 1984), 91–134.
- Rogers A: *Mathematical Aspects of Superspace*, eds. Seifert H-J, Clarke CJS, Rosenblum A, NATO ASI Series, Mathematical and Physical Sciences 132 (D.Reidel Pub. Company, 1984), 91–134.
- Brezin FA: *Introduction to Superanalysis*, D. Reidel Pub. Co. (1987).
- DeWitt B: *Supermanifolds*, Cambridge Univ. Press (1992).
- Bartocci C. Bruzzo U, Hernandez-Ruiperez D: *The Geometry of Supermanifolds, Mathematics and Its Applications*, Kluwer (1992).
- Deligne P, Morgan JW: *Notes on supersymmetry (following Joseph Bernstein)*, Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians, vols. 1, 2, Amer. Math. Soc. (1999).
- Deligne P, Freed DS: *Supersolutions*, Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians, vols. 1, 2, Amer. Math. Soc. (1999) [*hep-th/9901094*].
- Tuynman GM: *Supermanifolds and Supergroups*, *Kluwer Academic Pub.* (2004).

- *Goertsches O: Riemannian Supergeometry, math.DG/0604143.*

6.2 History

- 1966 超空間の導入 (Salam A, Strathdee J 1974[SS74]; Volkov DV, Akukov VP 1973[VA73]; Wess J, Zumino B 1977[WZ77])
- 1975 次数付き多様体の導入 (Berezin FA, Leites DA 1975[BL75]; Kostant B 1977[Kos77]; cf. Dell J, Smolin L 1979[DS79])
- 1977 幾何学的超多様体の導入 (DeWitt BS 1977; Batchelor M 1980[Bat80]; DeWitt BS 1984[Dew84])
- 1980 G^∞ 超多様体の導入 (接層が局所自由でない) (Rogers A [Rog80])
- 1981 **JP** 超多様体 (Jadczyk A, Pilch K 1981[JP81])
- 1986 超多様体の公理 (Rothstein MJ[Rot86])
- GH^∞ 超多様体の導入 (接層は局所自由だが、節空間が一般に同型な超ベクトル空間とならない) (Rogers A [Rog86])
- 1987 **G**-超多様体 (Bartocci C, Bruzzo U[BB87]; Bartocci C, Bruzzo U, Hernández-Ruipérez D 1989[BBHR89])

6.3 超多様体

参考文献

- [ABC⁺96] Amoros, J., Burger, M., Corlette, K., Kotschick, D. and Toledo, D.: *Fundamental groups of compact Kähler manifolds*, AMS (1996).
- [Bat80] Batchelor, M.: Two approaches to supermanifolds, *Trans. Am. Math. Soc.* **258**, 257–70 (1980).
- [BB87] Bartocci, C. and Bruzzo, U.: Some remarks on the differential-geometric approach to supermanifolds, *J. Geom. Phys.* **4**, 391–404 (1987).
- [BBHR89] Bartocci, C., Bruzzo, U. and Hernández-Ruipérez, D.: A remark on a new category of supermanifolds, *J. Geom. Phys.* **6**, 509–16 (1989).
- [Ber00] Berger, M.: *Riemannian Geometry During the Second Half of the Twentieth Century*, American Mathematical Society (2000).
- [BG04] Boyer, C. P. and Galicki, K.: Sasakian Geometry, Hypersurface Singularities, and Einstein Metrics, *math.DG/0405256* (2004).
- [BL75] Berezin, F. and Leites, D.: Supermanifolds, *Soviet Math. Dokl.* **16**, 1218–22 (1975).
- [Dew84] Dewitt, B.: *Supermanifold*, Cambridge Univ. Press (1984).
- [DS79] Dell, J. and Smolin, L.: Graded Manifold Theory as the Geometry of Supersymmetry, *Comm. Math. Phys.* **66**, 197–221 (1979).
- [Fom87] Fomenko, A. T.: *Differential Topology and Geometry (translated by D.A. Leites)*, Prentice-Hall, New York (1987).
- [Ham82] Hamilton, R.: Three-manifolds with positive Ricci curvature, *J. Diff. Geom.* **17**, 255–306 (1982).
- [Har77] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*, Springer (1977).

- [Haw77] Hawking, S.: Gravitational instantons, *Phys. Lett. A* **60**, 81–83 (1977).
- [Joy00] Joyce, D.: Oxford Univ. Press (2000).
- [JP81] Jadczyk, A. and Pilch, K.: Superspaces and supersymmetry, *Comm. Math. Phys.* **78**, 373–90 (1981).
- [Kos77] Kostant, B.: Graded manifolds, graded Lie theory and pre-quantization, in Bleuler, K. and Reetz, A. eds., *Differential Geometric Methods in Mathematical Physics, Lecture Notes in Mathematics 570*, 177–306, Springer Verlag (1977).
- [Per02] Perelman, G.: The Entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, *arXiv:math/0211159* (2002).
- [Per03a] Perelman, G.: Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, *arXiv:math/0307245* (2003).
- [Per03b] Perelman, G.: Ricci flow with surgery on three-manifolds, *arXiv:math/0303109* (2003).
- [Rog80] Rogers, A.: A global theory of supermanifolds, *J. Math. Phys.* **21**, 1352–65 (1980).
- [Rog86] Rogers, A.: Graded manifolds, supermanifolds and infinite-dimensional Grassmann algebras, *Comm. Math. Phys.* **105**, 375–84 (1986).
- [Rot86] Rothstein, M.: The Axioms of Supermanifolds and a New Structure Arising From Them, *Trans. Amer. Math. Soc.* **297**, 159–180 (1986).
- [SS74] Salam, A. and Strathdee, J.: Supergauge transformations, *Nucl. Phys. B* **76**, 477–82 (1974).
- [Tau92] Taubes, C.: The existence of anti-self-dual conformal structures, *J. Diff. Geom.* **36**, 163–253 (1992).
- [VA73] Volkov, D. and Akulov, V.: *Phys. Lett. B* **46**, 109 (1973).

- [WZ77] Wess, J. and Zumino, B.: Superspace formulation of supergravity, *Phys. Lett. B* **66**, 361–4 (1977).
- [YK84] Yano, K. and Kon, M.: *Structures on Manifolds*, World Scientific (1984).
- [宮西 90] 宮西正宜 : 代数幾何学, 裳華房 (1990).
- [川又 97] 川又雄二郎 : 代数多様体論, 共立出版 (1997).