

統一理論

Last update: 2023 年 10 月 17 日

目次

1	統一理論 : notations	23
1.1	時空関連	23
1.1.1	計量	23
1.2	スピノール関連	23
1.2.1	Γ 行列	23
1.2.2	荷電共役	23
1.2.3	スピノール場	24
2	時空と対称性	25
2.1	Minkowski 時空	25
2.1.1	Poincare 代数	25
2.1.2	Gamma 行列	26
2.1.2.1	Lorentz 変換	27
2.1.2.2	荷電共役変換	28
2.2	高次元スピノール	29
2.2.1	γ 行列	29
2.2.2	スピノール表現	32
2.2.2.1	Clifford 代数	32
2.2.2.2	スピノール	33
2.2.3	スピノールの接続	35
2.2.4	SO(6) スピノール	37
2.2.4.1	諸定義	37
2.2.4.2	Fierz 恒等式	38
2.2.4.3	形式系	38
2.2.5	SO(7) スピノール	40
2.2.5.1	諸定義	40
2.2.5.2	部分代数	40
2.2.5.3	SO(8) 型表示	41
2.3	SUSY	42

2.3.1	一般論	42
2.3.2	Super-Poincare algebra	43
2.3.3	超代数	45
2.3.4	Lie 超代数	47
2.3.4.1	分類	48
2.3.4.2	表現	48
2.4	単純 Lie 超代数	50
2.4.1	単純複素 Lie 超代数	50
2.4.2	古典 Lie 超代数	52
2.4.2.1	$\mathfrak{gl}(m N)$:	52
2.4.2.2	$\mathfrak{osp}(N 2p)$:	52
2.4.2.3	$\mathfrak{sl}(m N)$:	53
2.4.2.4	$P(n)$ と $Q(n)$:	53
2.4.2.5	$D(2, 1, \alpha), G(3), F(4)$:	54
2.4.3	Cartan 型超代数	55
2.4.3.1	$W(n) (n \geq 3)$:	55
2.4.3.2	$S(n) (n \geq 3)$:	55
2.4.3.3	$\tilde{S}(n) (n \geq 4)$:	56
2.4.3.4	$H(n) (n \geq 4)$:	56
2.4.4	単純実 Lie 超代数	57
2.4.4.1	分類	57
2.4.4.2	単純超対称代数	59
2.5	超空間	61
2.5.1	平坦な超空間	62
2.5.1.1	超空間	62
2.5.1.2	超場	63
2.5.1.3	Lorentz 変換	64
2.5.1.4	Majorana 型 Grassmann 座標系	64
2.5.1.5	超対称変換	65
2.5.1.6	$(\partial_\alpha)^\dagger$ について	67
2.5.2	超多様体	67
2.5.2.1	定義	67
2.5.2.2	超テンソル	68
2.5.2.3	超接続	70
2.5.2.4	超重力場	73

3	場の量子論	75
3.1	1粒子状態	75
3.1.1	正質量粒子	75
3.1.2	ゼロ質量粒子	76
3.2	離散変換	77
3.2.1	P変換	77
3.2.1.1	正質量粒子	78
3.2.1.2	ゼロ質量粒子	79
3.2.2	T変換	80
3.2.2.1	正質量粒子	81
3.2.2.2	ゼロ質量粒子	82
3.3	散乱理論	83
3.3.1	Fock空間	83
3.3.2	始状態・終状態とLippmann-Schwinger方程式	84
3.3.3	S行列	85
3.3.4	ポアンカレ不変性	85
3.3.5	摂動論	86
3.3.6	生成消滅演算子	87
3.3.7	クラスター分解条件	88
3.4	自由場	90
3.4.1	場による表現：正質量粒子	90
3.4.2	場による表現：ゼロ質量粒子	93
3.4.3	高次元におけるゼロ質量1粒子状態に対応するゲージ場	95
3.4.3.1	ゼロ質量粒子を表す場の一般型	95
3.4.3.2	偏極ベクトルに対する整合条件	96
3.4.4	スカラ場	111
3.4.4.1	古典論	111
3.4.4.2	量子論	112
3.4.5	電磁場	113
3.4.5.1	古典論	113
3.4.5.2	量子論	115
3.4.6	4次元スピノール場	117
3.4.6.1	古典論：一成分Diracスピノール	118
3.4.6.2	古典論：多成分カイラルスピノール系	119

3.4.6.3	量子論：複素スピノール	120
3.4.6.4	量子論：Majorana スピノール	121
3.4.6.5	混合	122
3.4.7	離散変換 C, P, T	124
3.4.8	Green 関数	124
3.5	S 行列と反応率	126
3.5.1	一般公式	126
3.5.2	反応率	128
3.6	発散	129
3.6.1	繰り込み	129
3.6.1.1	摂動論	129
3.7	ゲージ理論	130
3.7.1	定式化	130
3.8	対称性の自発的破れ	132
3.8.1	Goldstone ボゾン	132
3.8.2	近似的対称性の自発的破れ	134
3.9	σ モデル	135
3.9.1	一般的定義	135
3.9.2	ゲージ場との相互作用	135
3.10	膨張宇宙	136
3.10.1	自由スカラ場	136
3.10.1.1	空間的に平坦な RW 時空	136
3.10.1.2	Flat de Sitter	137
3.10.2	重力波	138
3.10.2.1	空間的に平坦な FLRW 宇宙	138
3.10.2.2	W^3 型相互作用	139
3.10.3	相互作用	148
3.10.3.1	de Sitter 時空	148
4	量子アノマリー	150
4.1	歴史	150
4.2	特性類と指数定理	150
4.2.1	特性類	150
4.2.2	Euler 類	150
4.2.3	Chern 類	151
4.2.4	Pontrjagin 類	152

4.2.5	指数定理	153
4.2.5.1	一般 Atiyah-Singer 指数定理	153
4.3	カイラルアノマリー (4次元)	153
4.3.1	概要	153
4.3.2	経路積分法による証明 (藤川和夫 1979)	155
4.3.3	クォークモデルにおけるカイラルアノマリー	157
4.3.3.1	$\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 崩壊	157
4.3.3.2	インスタントンと $U(1)_A$ 問題の解決	159
4.3.3.3	QCD 真空と QCD CP 問題	162
4.3.3.4	θ 真空	162
4.3.3.5	強い相互作用における CP の破れ	163
4.3.3.6	中性子電気双極子モーメント	165
4.3.4	Triangle anomaly の直接計算	167
4.3.4.1	Counter terms	167
4.3.4.2	Vector current	169
4.3.4.3	Axial current	170
4.3.5	*ゲージアノマリーの直接計算	172
4.3.5.1	積分表式	172
4.4	Gauge and gravitational anomaly	172
4.4.1	一般的構造	173
4.4.2	10次元超重力理論	174
4.4.3	Green-Schwarz 機構	176
4.5	参考文献	177
5	大統一理論	179
5.1	標準モデル	179
5.1.1	基本構造	179
5.1.2	ゲージアノマリー	181
5.1.3	実験的制限	182
5.1.4	問題点	182
5.2	ゲージセクターの統一	183
5.2.1	標準モデル \Rightarrow 大統一理論	183
5.2.2	可能な大統一群 G	184
5.2.3	対称性の自発的破れ	186
5.2.4	SSB 前後のゲージ結合係数の関係	188
5.2.4.1	$H = U(1)$ の場合	189

5.2.4.2	H が非可換単純群の場合	190
5.2.5	量子補正	192
5.2.5.1	Higgs ポテンシャル	192
5.2.6	SU(5) GUT	193
5.2.6.1	対称性の自発的破れ	193
5.2.6.2	24次元 Higgs 系の4次のポテンシャルの 臨界点	194
5.2.6.3	24次元 Higgs に対する 1-loop ポテンシャル	199
5.2.6.4	24次元+5次元 Higgs 系の4次ポテンシヤ ルの臨界点	201
5.2.6.5	臨界点解析のまとめ	213
5.2.6.6	$SU_3 \times U_1^{\text{em}}$ 臨界点における Higgs 場の質量	214
5.2.6.7	フェルミ粒子の質量	216
5.2.7	SO(10) GUT	221
5.2.7.1	Higgs セクターの構造	221
5.2.7.2	フェルミ場の湯川結合と質量項	223
5.2.8	E_6 GUT	230
5.2.8.1	Symmetry Breaking Pattern (1)	231
5.2.8.2	Symmetry Breaking Pattern (15)	233
5.2.8.3	Symmetry Breaking Pattern (6)	235
5.2.8.4	Symmetry Breaking Pattern (7)	237
5.2.8.5	Symmetry Breaking Pattern (8)	239
5.2.8.6	Symmetry Breaking Pattern (10)	241
5.2.8.7	Symmetry Breaking Pattern (11)	243
5.2.8.8	Symmetry Breaking Pattern (7')	246
5.2.8.9	Symmetry Breaking Pattern (12)	248
5.2.9	諸命題・諸定理の証明	250
5.3	超対称理論	252
5.3.1	大統一理論 \Rightarrow SGUT	252
5.3.2	SGUT \Rightarrow 超重力統一理論	253
5.3.3	SUGRA インフレーションモデル	256
5.4	高次元理論へ	258
5.4.1	Family repetition problem	259
5.4.2	(3 + 2) 分解	260
5.5	位相欠陥	261

5.5.1	Spheron	261
5.5.1.1	歴史	261
5.5.2	モノポール	261
5.5.2.1	歴史	262
5.5.2.2	U(1) ゲージ理論 –Dirac の量子化条件– . . .	263
5.5.2.3	球対称 Monopole 解を記述する場の配位の 分類	264
5.5.2.4	SO(3) ゲージ理論における monopole/dyon	268
5.5.2.5	Weinberg-Salam 理論におけるモノポール /dyon	301
6	超重力理論	317
6.1	4次元 $N = 1$ 大域的超対称理論	317
6.1.1	Chiral multiplet	319
6.1.1.1	1 成分系	319
6.1.1.2	多成分化	322
6.1.2	実超組とベクトル超組	325
6.1.3	超場による記述	328
6.1.4	ゲージ理論の一般論の復習	332
6.1.5	カイラル超対称理論のゲージ化	334
6.2	純超重力理論	336
6.2.1	準備的事項	336
6.2.2	重力場	338
6.2.3	Rarita-Schwinger 場	340
6.2.4	4次元極小超重力理論	345
6.3	4次元 $N = 1$ 超重力理論–超共形アプローチ	347
6.3.1	一般座標変換	347
6.3.2	Einstein 重力に対する共形的アプローチ	348
6.3.3	4次元純超重力理論に対する超共形アプローチ . . .	352
6.3.4	物質セクターとの結合	361
6.3.5	カイラル超組およびゲージ超組と結合した超重力理 論の導出	365
6.3.6	最も一般的な4次元超重力理論の最終形	375
6.3.7	Dirac の量子化条件	379
6.3.8	Kähler-Hodge 条件	380
6.4	4次元 $N = 1$ 超重力理論–超空間アプローチ	381

6.4.1	超場	381
6.4.1.1	超空間の変換	381
6.4.1.2	超場の変換	382
6.4.1.3	Chiral 超場	382
6.4.1.4	ベクトル超場	383
6.4.1.5	可換ゲージ超場	383
6.4.1.6	非可換ゲージ超場	384
6.4.2	超対称作用積分	385
6.4.2.1	Chiral 超組	385
6.4.2.2	一般カイラル相互作用	386
6.4.2.3	ゲージ超組	386
6.4.2.4	ゲージ相互作用	387
6.4.3	曲がった超空間	388
6.4.3.1	超空間	388
6.4.3.2	アフィン接続	389
6.4.3.3	超 Riemann 接続	391
6.4.3.4	超場	393
6.4.4	単純超重力理論	398
6.4.4.1	作用積分	398
6.4.4.2	場の方程式	399
6.4.4.3	超対称性	400
6.4.5	一般カイラル場との結合	401
6.4.6	一般のカイラル場およびゲージ場との結合	403
6.4.6.1	構成要素	403
6.4.6.2	Lagrangian	404
6.4.6.3	変換則	406
6.5	4次元 $\mathcal{N} = 2$ 超重力理論	407
6.5.1	大域的 $\mathcal{N} = 2$ 超対称理論におけるゲージ超組	407
6.5.2	大域的 $\mathcal{N} = 2$ 超対称理論におけるハイパー超組	412
6.5.3	$\mathcal{N} = 2$ 4次元超重力理論	419
6.5.3.1	最終的な基本場	419
6.5.3.2	スカラー多様体の構造	419
6.5.3.3	超重力理論の最も一般的な作用積分	424
6.5.3.4	超対称変換	426

6.5.4	$\mathcal{N} = 2$ 4次元超重力理論の超共形アプローチによる導出	427
6.6	高次元超重力理論の一般的分類	431
6.6.1	次元と最大超対称性への制限	431
6.6.2	基本超対称代数	432
6.6.3	各次元の基本超対称代数の構造	434
6.6.4	基本超重力理論の構造と一意性	437
6.6.5	理論の変形とゲージ化された超重力理論	438
6.6.6	中心電荷	439
6.7	高次元の SUGRA 理論	441
6.7.1	Notation	441
6.7.2	共通の構造	442
6.8	11次元理論	443
6.8.1	定式化	443
6.8.2	物理自由度	447
6.8.3	理論の一意性	451
6.8.3.1	11次元1粒子状態とトーラスコンパクト化による4次元1粒子状態の対応	451
6.8.3.2	線型理論レベルでの11次元場の決定	453
6.8.3.3	線型レベルでの11次元作用積分の決定	461
6.8.3.4	一般共変的かつゲージ不変な作用積分の一般形	466
6.8.3.5	超対称変換	473
6.8.3.6	極小モデルの一意性	483
6.8.3.7	極小モデルの存在	487
6.8.4	Killing スピノール	500
6.8.5	Null スピノール	501
6.8.5.1	標準光的スピノール	502
6.8.5.2	不変群	504
6.8.5.3	双対関係式	509
6.8.5.4	Spin(7) 分解	509
6.8.6	超対称解の分類 II. 光的 Killing(GGP 形式)	512
6.8.6.1	光的基底	512
6.8.6.2	代数的関係式	512
6.8.6.3	接続係数と F の決定	513

	6.8.6.4	局所 $(\text{Spin}(7) \times \mathbb{R}^8) \times \mathbb{R}$ 変換	520
	6.8.6.5	ゲージ固定	523
6.9		10次元 IIB 型理論	526
	6.9.1	基本公式	526
	6.9.2	Schwarz-West の定式化	526
	6.9.3	Polchinski 記号法での表式	530
	6.9.4	超対称性	534
	6.9.5	厳密解	536
	6.9.5.1	$\text{SO}(4) \times \text{SO}(4)$ 対称 1/2 BPS 解	536
6.10		10次元 IIA 型理論	538
	6.10.1	基本場	538
	6.10.2	作用積分	538
	6.10.3	場の方程式	539
	6.10.4	厳密解	540
	6.10.4.1	超対称 AdS コンパクト化	540
6.11		10次元 II 型理論の Democratic formulation	543
	6.11.1	基本場	543
	6.11.2	擬作用積分	544
	6.11.3	場の方程式	545
	6.11.4	対称性	547
6.12		10次元 I 型理論	548
	6.12.1	基本場	548
	6.12.2	作用積分	548
	6.12.3	場の方程式	549
6.13		10次元ヘテロ型理論	551
	6.13.1	基本場	551
	6.13.2	作用積分	551
	6.13.3	場の方程式	552
	6.13.4	超対称変換	552
6.14		6次元理論	553
	6.14.1	Conventions	553
	6.14.2	場の物理自由度	554
	6.14.3	双線形形式	554
	6.14.4	Fierz 恒等式	555
	6.14.4.1	$M_1 = \gamma_a, M_2 = \gamma_b$	555

6.14.4.2	$M_1 = \gamma_a, M_2 = \gamma_{bcd}$	555
6.15	5次元理論	556
6.15.1	Conventions	556
6.15.2	極小モデル	557
6.15.2.1	定式化	557
6.15.2.2	Killing スピノール	558
6.15.2.3	V が時間的な場合の一般解	560
6.15.2.4	Static solution	565
6.15.2.5	X_4 が平坦な例	565
6.15.2.6	光的一般解	571
6.15.2.7	pp-wave	573
6.15.2.8	極大超対称解	574
6.15.3	ベクトル超組との結合	574
6.16	4次元理論	577
6.16.1	$N = 2$ 極小超重力理論	578
6.16.1.1	解の分類	578
6.17	Tadpole 条件	579
6.17.1	II 型理論	579
6.18	高次補正	580
7	極大超重力理論	581
7.1	トーラスコンパクト化で得られる極大超重力理論	581
7.2	$D = 4, N = 8$ 理論	582
7.2.1	$E_{7(7)}$ の 56 次元表現と対称空間 $E_{7(7)}/SU(8)$	582
7.2.1.1	Sp 表示	582
7.2.1.2	Usp(CJ) 表示	582
7.2.1.3	Usp(DN) 表示	584
7.2.2	Cremmer-Julia 理論 (ungauged)	586
7.2.2.1	基本場	586
7.2.2.2	対称性	586
7.2.2.3	スカラ場のコセット表現	586
7.2.2.4	スピノール場	587
7.2.2.5	局所 $SU(8)$ 対称性	587
7.2.2.6	スカラ場の運動項	588
7.2.2.7	スピノール場の運動項	588
7.2.2.8	ベクトル場の運動項	589

	7.2.2.9	Lagrangian	590
	7.2.2.10	超対称変換	591
7.2.3		deWit-Nicolai 理論 (SO(8)gauging)	592
	7.2.3.1	基本変数	592
	7.2.3.2	共変微分	593
	7.2.3.3	Lagrangian	593
	7.2.3.4	局所超対称変換	595
7.2.4		一般の gauging	596
	7.2.4.1	スカラ場	597
	7.2.4.2	スピノール場	598
	7.2.4.3	ベクトル場と gauging	598
	7.2.4.4	共変微分	600
	7.2.4.5	Lagrangian	601
	7.2.4.6	可能な Gauging	603
	7.2.4.7	T テンソル	604
	7.2.4.8	ゲージ対称性の自発的破れ	605
	7.2.4.9	局所超対称変換	606
7.2.5		Vacuum 探査	607
7.2.6		Electric SL_8 type	610
	7.2.6.1	Embedding tensor に対する条件	610
	7.2.6.2	ゲージ群	611
	7.2.6.3	極点条件	612
	7.2.6.4	極点の分類	612
	7.2.6.5	接続	612
	7.2.6.6	モジュライ場の質量	614
	7.2.6.7	ゲージ運動項	618
	7.2.6.8	超対称性	620
7.2.7		SO(4, 4) -gauging	622
	7.2.7.1	Axion 型有効理論	622
7.2.8		SL_8 Mixuture type	626
	7.2.8.1	非退化型	626
	7.2.8.2	退化型	630
	7.2.8.3	モジュライ質量	634
	7.2.8.4	dS 真空	635
	7.2.8.5	Minkowski 真空	637

7.2.8.6	adS 真空	641
7.2.8.7	モジュライ質量：まとめ	646
7.2.9	Dyonic gauging: Off-center behavior	647
7.2.9.1	Potential	647
7.2.9.2	Mapping convention	648
7.2.9.3	モジュライ行列	648
7.2.9.4	Moduli への $E_{7(7)}$ 作用	650
7.2.9.5	Kinetic terms	652
7.2.9.6	ゲージ結合関数	652
7.2.10	Electric frame	653
7.2.10.1	変換行列	653
7.2.10.2	Lagrangian in the electric frame	655
7.2.10.3	ゲージ粒子の質量	656
7.2.11	フェルミ粒子の質量	656
7.2.11.1	T 行列	656
7.2.11.2	運動方程式	657
7.2.12	SO(8)-gauging	657
7.2.12.1	SO(8) 不変真空 (原点)	658
7.2.13	SO(4, 4)-gauging	660
7.2.13.1	Hull-Warner dS 臨界点	660
7.2.13.2	SO(4) \times SO(4) 不変方向	666
7.2.13.3	SO(3) \times SO(3) 不変かつ \mathbb{Z}_2 不変な方向	667
7.2.13.4	SO(3) \times SO(3) 不変方向：一般	674
7.2.13.5	Electric frame	690
7.2.13.6	SO(3) ² 不変セクターへの裁断	691
7.2.13.7	軸上で正則な座標系表示	697
7.2.14	SO(5, 3)-gauging	698
7.2.14.1	SO(3) \times SO(3)-invariant directions	698
7.2.14.2	ポテンシャル	703
7.2.14.3	\mathbb{Z}_2 不変部分空間	705
7.2.15	SO(2) \times SO(2) \times \mathbb{R}^{20} -gauging	706
7.2.15.1	Generators	706
7.2.15.2	ϕ の行列表示	708
7.2.15.3	対角化	709
7.2.15.4	\mathcal{M} 行列	710

7.2.15.5	ポテンシャル	711
8	弦理論	714
8.1	Framework	714
8.2	S 行列: Non-SUSY	715
8.3	CFT	716
8.3.1	Ward Identity	717
8.3.2	共形変換	718
8.3.2.1	共形ウエイト	718
8.3.2.2	共形変換	719
8.3.2.3	Virasoro 代数	719
8.3.3	状態-作用素対応	720
8.3.4	CFT の例	721
8.3.4.1	X CFT (commuting)	721
8.3.4.2	bc CFT (anticommuting)	723
8.3.4.3	ψ CFT (anticommuting)	725
8.3.4.4	$\beta\gamma$ CFT (commuting)	726
8.4	SCFT	727
8.4.1	Superconformal 代数	727
8.4.2	SCFT の例	727
8.4.2.1	$X\psi$ SCFT $((N, \tilde{N}) = (1, 1)$ 型)	727
8.4.2.2	$bc\beta\gamma$ SCFT $((N, \tilde{N}) = (1, 0)$ 型)	729
8.5	自由弦の量子化	731
8.5.1	Old Covariant Quantization	731
8.5.2	BRST 量子化	732
8.6	自由粒子のスペクトルと場	733
8.6.1	Bosonic string	733
8.6.1.1	$E^{25,1}$	733
8.6.2	Superstring	733
8.6.2.1	$E^{9,1}$	733
8.7	背景場中の弦理論	741
8.7.1	基礎方程式	741
8.7.2	Weyl アノーマリー	741
8.7.3	作用積分	742
8.8	S 行列	743
8.8.1	ボーズ弦理論	743

	8.8.1.1	Tree レベル	743
8.9		Brane	746
	8.9.1	分類	746
	8.9.2	電荷の量子化	747
	8.9.3	D ブレーンの作用積分	747
	8.9.3.1	Abelian case	748
	8.9.3.2	Non-abelian case	749
	8.9.4	D ブレーン間の力*	750
	8.9.5	D ブレーンスタックによる $U(n)$ ゲージ場*	750
	8.9.5.1	$U(1)$ ゲージアノマリー*	750
	8.9.5.2	一般化された Green-Schwarz 機構*	750
	8.9.6	D インスタントン*	750
	8.9.7	交差 D ブレーン	750
	8.9.7.1	2次元での交差	750
8.10		双対性	755
	8.10.1	Hetero \leftrightarrow IIA	755
9		M 理論	757
	9.1	Notation	757
	9.2	Formulation	757
	9.3	Torsion and connection	760
	9.4	Cremmer-Julia Torus Compactification	762
	9.4.1	Bosonic part	762
	9.4.2	Fermionic part	766
	9.4.3	$(E_{7(+7)}, SU(8))$ 形式	767
	9.5	$SU(8)$ -invariant form of the $D = 11$ supergravity	771
	9.5.1	場の再定義	772
	9.5.2	局所超対称変換	773
	9.6	S^7 de Wit-Nicolai compactification	776
	9.6.1	Killing spinor and Killing vector	776
	9.6.2	4次元 de Wit-Nicolai 理論の 11 次元への埋め込み	776
	9.7	General perturbation equations	777
	9.7.1	Bosonic part	777
	9.8	Killing スピノール	779
	9.8.1	Freund-Rubin 型コンパクト化	779
	9.8.2	スピノール接続に対する Gauss-Weingarten 公式	783

9.8.3	S^{2n-1} 上の Killing スピノール場	785
9.8.4	丸い S^7 上の Killing スピノール	785
9.9	4次元的に一様等方なコンパクト化	787
9.9.1	Λ 4D 真空 \times Einstein 空間	788
9.9.2	$CCST_4 \times S^p \times S^q \times \mathbb{R}$	789
9.9.3	$dS^4 \times S^3 \times S^3 \times \mathbb{R}$	791
9.10	非コンパクト多様体 $\Sigma_{4,4}^E$ によるコンパクト化	793
9.10.1	$\Sigma_{4,4}^E$ 多様体	793
9.10.2	作用素 $\mathcal{L}_{4,4}^{HW}$ のスペクトル	794
9.11	Perturbations around a Warped Compactification	796
9.11.1	Background	796
9.11.2	Metric perturbations	798
9.11.3	Source perturbation	803
9.11.4	Coordinate-Gauge transformation	805
9.11.5	\mathcal{E}_N^M のテンソル分解	810
9.11.6	Tensor Perturbations	813
9.11.7	Vector Perturbations	814
10	高次元統一理論	816
10.1	Reviews and Books	816
10.1.1	Review articles	816
10.1.2	Books	816
10.2	Kaluza-Klein コンパクト化	816
10.2.1	歴史	816
10.2.2	時空計量	816
10.2.3	ゲージ場	819
10.2.3.1	S^1 コンパクト化	819
10.2.4	高次元場の4次元分解	821
10.2.4.1	11次元場のトーラスコンパクト化による 4次元分解	821
10.3	高次元超重力理論	823
10.3.1	11次元超重力理論	823
10.3.1.1	定式化	823
10.3.1.2	問題点	825
10.3.1.3	Kaluza-Klein SUGRA GUT	826
10.3.1.4	直積型解	828

10.3.2	10次元超重力理論	830
10.3.2.1	IIA型理論	830
10.3.2.2	IIB型理論	831
10.3.2.3	I型理論	832
10.3.2.4	問題点	834
10.3.2.5	アノーマリー	835
10.4	No-fluxコンパクト化(一般論)	838
10.5	10次元理論の直積型コンパクト化(RR/ゲージフラックスなし)	839
10.5.1	共通セクター	839
10.5.2	Calabi-Yauコンパクト化	843
10.6	10次元I型理論のCalabi-Yauコンパクト化	849
10.6.1	アノーマリー相殺条件(ゲージバンドルの標準SU(3)埋め込みの場合)	849
10.6.2	モジュライ	850
10.7	10次元超重力理論の4次元有効理論:直積型Calabi-Yauコンパクト化	852
10.7.1	モジュライ自由度	852
10.7.2	複素モジュライ	853
10.7.3	Kählerモジュライ	855
10.7.4	IIA理論	858
10.7.5	IIB型理論	858
10.8	*10次元IIA理論のオービフォールドコンパクト化	860
10.9	10次元IIB理論のフラックスコンパクト化	861
10.9.1	IIB理論での解	861
10.9.2	ワープ	867
10.9.3	Conifold型解	870
10.9.4	超ポテンシャル	881
10.9.5	基底状態の性質	883
10.9.6	量子効果	884
10.9.7	FluxCompの問題点	884
10.9.7.1	ブレーンモデルの問題	884
10.9.7.2	4次元有効理論	885
10.10	SU(3)構造	887
10.10.1	SU(3)構造の基本的性質	887

10.10.2	固有トーシオン	888
10.10.3	Killing スピノール	889
10.11	II 型理論での 4 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称コンパクト化解の分類	891
10.11.1	IIA 型	891
10.11.2	IIB 型	895
10.12	ヘテロ型理論の Torsion コンパクト化	902
10.12.1	SU(3) 構造	902
10.12.2	ヘテロ型理論	903
10.12.2.1	基本場	903
10.12.2.2	作用積分	904
10.12.2.3	超対称変換	904
10.12.2.4	場の方程式	905
10.12.2.5	整合性条件	906
10.12.3	Smoot Model with Flux	909
10.12.3.1	BBFTY 解	909
10.12.4	文献ノート	912
10.13	ヘテロ型理論の滑らかな CY コンパクト化による素粒子モデル構成	913
10.13.1	強結合問題	913
10.13.1.1	弱結合 HetSST	913
10.13.1.2	弱結合タイプ I SO(32) SST	914
10.13.1.3	Heterotic M	914
10.13.2	超対称コンパクト化	915
10.13.3	構成法	918
10.13.4	安定化されたモデルの例	920
10.13.4.1	基本アイデア	920
10.14	宇宙の加速膨張に対する No-Go 定理	922
10.14.1	Strong Energy Condition	922
10.14.2	Gibbons の定理	922
10.14.3	$D = 10/11$ 超重力理論における SEC	923
10.14.4	ブレーン	925
10.14.5	tadpole 条件	925
10.14.6	Maldacena-Nunez の No-Go 定理	926
10.14.7	ブレーンを含む IIB 理論における No-Go 定理	928
10.14.8	ブレーンを含む IIA 理論における No-Go 定理	931

10.14.9	α' 補正を含む 10D ヘテロ型超重力理論	933
10.14.10	α' を考慮した 10D 超重力理論における No-Go 定理	934
10.14.1	如何にして No-Go 定理を回避するか?	938
10.14.1	文献ノート	939
10.15	KKLT	940
10.15.1	KKLT モデル	940
10.15.2	Flux コンパクト化により得られる 4次元超重力理論	941
10.15.3	No-scale structure	943
10.15.4	複素モジュライの固定	945
10.15.5	非摂動論的量子効果	946
10.15.6	Vacuum uplift	948
10.15.7	インフレーションモデル	949
10.15.7.1	1. モジュライインフレーション	949
10.15.7.2	2. ブレーンインフレーション	951
10.15.8	KKLT シナリオの問題点	954
10.16	LVS	954
10.16.1	Large volume scenario	955
10.16.2	Kähler ポテンシャルに対する α'^3 補正	955
10.16.2.1	KKLT との比較	956
10.16.2.2	例: $\mathbb{C}P^4[1, 1, 1, 6, 9]$ の複素超曲面	957
10.16.3	質量スペクトル	959
10.16.4	Kähler モジュライインフレーション	962
10.16.5	LVS の問題点	964
10.17	Kähler uplifting	966
10.17.1	例: $\mathbb{C}P^4[1, 1, 1, 1, 1]$ の divisor	966
10.17.1.1	1. 複素構造モジュライとディラトンを固定した場合	967
10.17.1.2	2. Kähler モジュライとディラトンを動かした場合	968
10.17.2	dS 極小点が存在する条件	969
10.18	Monodromy Inflation	970
10.18.1	IIA 理論におけるモジュライ安定化	970
10.18.1.1	1. DGKT モデル	971
10.18.1.2	2. VZ model	973
10.18.2	IIA 理論での dS 真空	976

10.18.3	Monodromy inflation in IIA	980
10.18.3.1	1. D4 ブレーンの作用積分	981
10.18.3.2	2. ポテンシャルの振る舞い	982
10.18.3.3	3. 整合性	983
10.18.3.4	4. 観測情報からの制限	985
10.18.4	Axion monodromy inflation in IIB model	987
10.18.5	様々な axion monodromy influms	989
10.19	Non-geometrical flux	991
10.19.1	T 双対変換	991
10.19.1.1	1. NS sector	991
10.19.1.2	2. RR セクター	992
10.19.2	Geometrical flux	993
10.19.2.1	1. 簡単な例	993
10.19.2.2	2. $T^2 \times T^2 \times T^2/\mathbb{Z}_2$ orientifold	994
10.19.3	Non-geometric flux	998
10.19.3.1	1. Simple example	998
10.19.3.2	2. $T^2 \times T^2 \times T^2/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ モデル	999
10.19.3.3	3. 一般的な定義	1002
10.19.4	Flux-scaling scenario	1004
10.19.4.1	1. Model	1005
10.19.4.2	2. Non-geometrical flux	1006
10.19.4.3	3. 4D sugra	1006
10.19.4.4	4. $\overline{D3}$ uplifting	1007
10.19.4.5	5. D -term uplifting	1009
10.19.4.6	6. P -flux	1010
10.19.4.7	7. Axion monodromy inflation	1010
10.20*	OMC	1012
11	統一理論：文献ノート	1013
11.1	標準モデルを超えて	1013
11.1.1	Axion	1013
11.1.1.1	Overview	1013
11.2	Anomalies	1013
11.2.1	レビュー	1013
11.2.2	Overview	1013
11.3	大統一理論	1014

11.3.1	レビュー	.1014
11.3.2	Overview	.1015
11.3.3	No-scale model	.1016
11.3.3.1	History	.1016
11.4	超対称性	.1017
11.4.1	Reviews	.1017
11.4.2	History	.1017
11.5	スピンの上限	.1019
11.5.1	Reviews	.1019
11.5.2	Overview	.1019
11.6	超重力理論	.1020
11.6.1	Reviews	.1020
11.6.2	Model construction	.1023
11.6.3	4DSugra のモジュライポテンシャル	.1026
11.6.4	4D 理論と 11D/10D 理論の対応	.1026
11.6.5	Exact solutions	.1027
11.6.6	弦理論との関係	.1032
11.6.6.1	Overview	.1032
11.6.7	高次補正	.1032
11.6.7.1	Overview	.1032
11.7	弦理論	.1036
11.7.1	定式化	.1036
11.7.1.1	Overview	.1036
11.7.2	現象論	.1038
11.7.2.1	Reviews	.1038
11.7.2.2	Hetero 型理論	.1039
11.7.2.3	II 型理論	.1041
11.7.2.4	F 理論	.1041
11.8	双対性と対称性	.1043
11.8.1	双対性	.1043
11.8.2	AdS/CFT 対応	.1043
11.8.3	Hopf Duality	.1043
11.8.4	隠れた対称性	.1044
11.8.5	Generalised Geometry	.1044
11.9	コンパクト化	.1045

11.9.1	レビュー	.1045
11.9.2	No-Go 定理	.1045
11.9.3	SUGRA の KK コンパクト化	.1046
11.9.4	SUSY を保つコンパクト化	.1048
11.9.5	F 理論	.1049
11.9.6	M 理論	.1049
11.9.6.1	G_2 -holonomy	.1049
11.9.7	高次補正	.1049
11.9.8	フラックスコンパクト化	.1050
11.9.9	Non-geometrical flux	.1051
11.9.10	モジュライ安定化	.1053
11.9.11	ランドスケープ問題	.1053
11.9.12	有効理論	.1054
11.9.13	Kaluza-Klein モード	.1055
11.9.14	トポロジー変化	.1055
11.9.15	観測的検証	.1055
11.9.15.1	Overview	.1055
11.9.16	宇宙モデル	.1056
11.9.16.1	Inflating compactification	.1057
11.10	ブレーンワールドモデル	.1057
11.11	宇宙項とインフレーション	.1058
11.11.1	de Sitter 真空	.1058
11.11.2	インフレーションモデル	.1059
11.12	インスタントン	.1061
11.12.1	5D ブレーンワールドモデル	.1061
11.13	特異点	.1062
11.13.1	歴史的概観	.1062

1 統一理論 : notations

Last update: 2011/7/18

1.1 時空関連

1.1.1 計量

- 計量の符号 $(g_{ab}) = [- + \dots +]$ ($a, b = 0, 1, \dots, D-1$)

1.2 スピノール関連

1.2.1 Γ 行列

- 交換関係 : $\Gamma^a \Gamma^b + \Gamma^b \Gamma^a = 2\eta^{ab}$
- 基底 : $\Gamma^{a_1 \dots a_p} = \Gamma^{[a_1 \dots a_p]} \Rightarrow \Gamma_{[p]}$
- (準) 中心元 : 空間 (時空) の次元を D , 標準平坦計量を η とするとき,

$$\Gamma_{\sharp} = (-i)^k \Gamma^0 \dots \Gamma^{D-1} \Rightarrow \Gamma_{\sharp}^2 = 1, \quad \Gamma_{\sharp} \Gamma^M = (-1)^{D-1} \Gamma^M \Gamma_{\sharp} \quad (1.2.1)$$

ここで,

$$D = 2k + 1 - |\eta|, \quad 2k + 2 - |\eta| \quad (1.2.2)$$

1.2.2 荷電共役

B 行列

- 定義 : $B \Gamma_{ab} B^{-1} = (\Gamma_{ab})^*$
- Γ^a に対する作用 :

偶数次元 : $D = 2k + 1 - |\eta|$

$$B_{\pm} \Gamma_a B_{\pm}^{-1} = \pm (\Gamma_a)^*, \quad B \Gamma_{\sharp} B^{-1} = (-1)^k \Gamma_{\sharp}^*, \quad (1.2.3)$$

$$B_{+}^* B_{+} = (-1)^{k(k-1)/2}, \quad B_{-}^* B_{-} = (-1)^{k(k+1)/2} \quad (1.2.4)$$

奇数次元: $D = 2k + 2 - |\eta|$

$$B\Gamma_a B^{-1} = (-1)^k (\Gamma_a)^*, \quad B\Gamma_{\sharp} B^{-1} = \Gamma_{\sharp}^*, \quad (1.2.5)$$

$$B^* B = (-1)^{k(k+1)/2} \quad (1.2.6)$$

$D(\text{mod}8)$	2	3	4	5	6	7	8	9
$ \eta = 1$	B_+	\times	\times	\times	B_-	B_-	B_{\pm}	B_+
$ \eta = -1$	B_{\pm}	B_+	B_+	\times	\times	\times	B_-	B_-

表 1: 各次元において, $B^* B = 1$ となる B 行列

1.2.3 スピノール場

2 時空と対称性

Last update: 2019/11/23

2.1 Minkowski 時空

Minkowski 時空 $E^{D-1,1}$ の計量の符号は

$$\eta = [-, +, +, \dots, +] \quad (2.1.1)$$

とする。また, Levi-Civita テンソルは

$$\epsilon_{01\dots D-1} = 1. \quad (2.1.2)$$

2.1.1 Poincare 代数

$E^{D-1,1}$ での等長変換

$$x' = \Lambda x + a \quad (2.1.3)$$

は, 次のように行列表示される:

$$\begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.4)$$

対応する無限小変換

$$\delta x = \delta \Lambda x + \delta a \quad (2.1.5)$$

を

$$\begin{pmatrix} \delta \Lambda & \delta a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \epsilon^{ab} \Omega_{ab} + \epsilon^a T_a \quad (2.1.6)$$

とおくと,

$$\Omega_{ab} = E_{ab} - E_{ba} \quad (a, b = 0, \dots, n-1), \quad (2.1.7a)$$

$$T_a = E_{a*} \quad (a = 0, \dots, n-1). \quad (2.1.7b)$$

ここで,

$$E_{ab} = E_a{}^c \eta_{cb}, \quad (E_a{}^b)^p{}_q = \delta_a^p \delta_q^b. \quad (2.1.8)$$

このとき,

$$E_{ab} E_{cd} = \eta_{bc} E_{ad} \quad (2.1.9)$$

D	\mathbb{C} -spinor rep.	real	Weyl	real-Weyl	min \mathbb{R} -rep.
1	1	○	–	–	1
2	$1 + \bar{1}$	○	complex	–	2
3	2	pseudo	–	–	4
4	$2 + 2'$	pseudo	self	–	4
5	4	pseudo	–	–	8
6	$4 + \bar{4}$	○	complex	–	8
7	8	○	–	–	8
8	$8 + 8'$	○	self	○	8

表 2: Spinor representation of $\text{SO}(D)$

より,

$$[T_a, T_b] = 0, \quad (2.1.10a)$$

$$[\Omega_{ab}, T_c] = \eta_{bc}T_a - \eta_{ac}T_b, \quad (2.1.10b)$$

$$[\Omega_{ab}, \Omega_{cd}] = \eta_{bc}\Omega_{ad} + \eta_{ad}\Omega_{bc} - \eta_{ac}\Omega_{bd} - \eta_{bd}\Omega_{ac}. \quad (2.1.10c)$$

また,

$$P_a = -iT_a, \quad M_{ab} = i\Omega_{ab} \quad (2.1.11)$$

とおくと,

$$[P_a, P_b] = 0, \quad (2.1.12a)$$

$$[M_{ab}, P_c] = i(\eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b), \quad (2.1.12b)$$

$$[M_{ab}, M_{cd}] = i(\eta_{bc}M_{ad} + \eta_{ad}M_{bc} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac}) \quad (2.1.12c)$$

2.1.2 Gamma 行列

Γ 行列を

$$\Gamma^M \Gamma^N + \Gamma^N \Gamma^M = 2\eta^{MN} \quad (2.1.13)$$

により定義する. また, 一般に

$$\Gamma^{M_1 \dots M_p} := \Gamma^{[M_1} \dots \Gamma^{M_p]} \quad (2.1.14)$$

とおく.

D	\mathbb{C} -spinor rep.	Majorana	Weyl	Majorana-Weyl	min \mathbb{R} -rep.
2	$1 + 1'$	○	self	○	1
3	2	○	–	–	2
4	$2 + \bar{2}$	○	complex	–	4
5	4	–	–	–	8
6	$4 + 4'$	–	self	–	8
7	8	–	–	–	16
8	$8 + \bar{8}$	○	complex	–	16
9	16	○	–	–	16
10	$16 + 16'$	○	self	○	16
11	32	○	–	–	32
12	$32 + \bar{32}$	○	complex	–	64

表 3: Spinor representation of $\text{SO}(D - 1, 1)$

2.1.2.1 Lorentz 変換

交換関係

$$[\Gamma^{MN}, \Gamma^{PQ}] = -2 (\eta^{MP}\Gamma^{NQ} + \eta^{NQ}\Gamma^{MP} - \eta^{MQ}\Gamma^{NP} - \eta^{NP}\Gamma^{MQ}) \quad (2.1.15)$$

より, Lorentz 変換の Lie 代数との対応は,

$$\Omega_{MN} \rightarrow -\frac{1}{2}\Gamma_{MN}, \quad M_{MN} \rightarrow -\frac{i}{2}\Gamma_{MN}. \quad (2.1.16)$$

特に, 無限小 Lorentz 変換は

$$\delta\Lambda = (\epsilon_{MN}) \rightarrow \frac{i}{2}\epsilon_{MN}\Sigma^{MN}, \quad (2.1.17)$$

$$\Sigma^{MN} = -\frac{i}{2}\Gamma^{MN}. \quad (2.1.18)$$

したがって, Lorentz 群のスピンール表現を

$$\Lambda \rightarrow S(\Lambda) \quad (2.1.19)$$

とおくと,

$$\frac{1}{4}\epsilon_{MN}[\Gamma^{MN}, \Gamma^P] = -\epsilon^P{}_Q\Gamma^Q \quad (2.1.20)$$

より

$$S^{-1}\Gamma^M S = \Lambda^M{}_N\Gamma^N. \quad (2.1.21)$$

スピノールの成分ベクトル ψ は、擬直交基底の変換に対して

$$\theta'^M = \Lambda^M_N \theta^N \Rightarrow \psi' = S(\Lambda)\psi \quad (2.1.22)$$

と変換.

γ 行列に関する諸公式は公式集参照.

2.1.2.2 荷電共役変換

B 行列: $D = 2k + 2$ のとき,

$$B_1 = \Gamma^3 \Gamma^5 \cdots \Gamma^{D-1}, \quad B_2 = \Gamma^D B_1 \quad (2.1.23)$$

とおくと,

$$B_1 \Gamma^M B_1^{-1} = (-1)^k \Gamma^{M*}, \quad B_2 \Gamma^M B_2^{-1} = (-1)^{k+1} \Gamma^{M*} \quad (2.1.24a)$$

$$B_1 \Gamma_{(2k+2)} B_1^{-1} = B_2 \Gamma_{(2k+2)} B_2^{-1} = (-1)^k \Gamma_{(2k+2)}^* \quad (2.1.24b)$$

$$B \Sigma^{MN} B^{-1} = -\Sigma^{MN*}, \quad (2.1.24c)$$

$$B_1^* B_1 = (-1)^{k(k+1)/2}, \quad B_2^* B_2 = (-1)^{k(k-1)/2}. \quad (2.1.24d)$$

Majorana 条件: Majorana 条件は B 行列を用いて

$$\psi^* = B\psi. \quad (2.1.25)$$

荷電共役変換: $D = 2k + 2$ のとき,

$$C \Gamma^M C^{-1} = -\mathbb{T}^M, \quad (2.1.26a)$$

$$C = \begin{cases} B_1 \Gamma^0 & D = 2 \pmod{4} \\ B_2 \Gamma^0 & D = 0 \pmod{4} \end{cases}. \quad (2.1.26b)$$

$D = 2k + 3$ のとき,

$$C \Gamma^M C^{-1} = (-1)^{k+1} \mathbb{T}^M, \quad (2.1.27a)$$

$$C = B_1 (D - 1) \Gamma^0. \quad (2.1.27b)$$

任意の次元で

$$C \Sigma^{MN} C^{-1} = -\mathbb{T} \Sigma^{MN}. \quad (2.1.28)$$

C を用いて荷電共役変換は次のように定義される:

$$\psi \rightarrow \psi^c := e^{i\phi} C \overline{\mathbb{T}} \psi. \quad (2.1.29)$$

2.2 高次元スピノール

2.2.1 γ 行列

【定義 2.1 (γ 行列)】 定数計量 η_{AB} をもつ D 次元 (擬) Euclidean 空間における Γ 行列を

$$\Gamma^A \Gamma^B + \Gamma^B \Gamma^A = 2\eta^{AB} \quad (2.2.1)$$

により定義する. また, 一般に

$$\Gamma^{M_1 \dots M_p} := \Gamma^{[M_1} \dots \Gamma^{M_p]} \quad (2.2.2)$$

とおく. □

【定義 2.2 (中心)】 Γ を

$$\Gamma := (-i)^k \Gamma^0 \dots \Gamma^{D-1} = (-i)^k (*\Gamma_{[D]}) \quad (2.2.3)$$

により定義する. ここで,

$$D = 2k + 1 - |\eta|, \quad 2k + 2 - |\eta|. \quad (2.2.4)$$

このとき,

$$\Gamma^2 = 1, \quad (2.2.5a)$$

$$\Gamma \Gamma^a = (-1)^{D-1} \Gamma^a \Gamma. \quad (2.2.5b)$$

【公式 2.3 (展開公式)】

$$\Gamma^a \Gamma^{b_1 \dots b_k} = \Gamma^{ab_1 \dots b_k} + \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \eta^{ab_j} \Gamma^{b_1 \dots b_{j-1} b_{j+1} \dots b_k}, \quad (2.2.6)$$

$$\Gamma^{b_1 \dots b_k} \Gamma^a = \Gamma^{b_1 \dots b_k a} + \sum_{j=1}^k (-1)^{j-k} \eta^{ab_j} \Gamma^{b_1 \dots b_{j-1} b_{j+1} \dots b_k}, \quad (2.2.7)$$

$$\Gamma^{ab} \Gamma^{cd} = \Gamma^{abcd} + 2\eta^{a[d} \eta^{c]b} + 2\eta^{a[c} \Gamma^{d]b} - 2\eta^{b[c} \Gamma^{d]a} \quad (2.2.8)$$

□

【定義 2.4 (B 行列)] B 行列は条件

$$B\Gamma^{MN}B^{-1} = (\Gamma^{MN})^* \quad (2.2.9)$$

を満たす行列として定義され, 常に存在する. この B 行列に対して, ψ と $B^{-1}\psi^*$ は同じ変換則に従う. □

【定義 2.5 (C 行列)] C 行列は条件

$$C\Gamma^{MN}C^{-1} = -\mathcal{T}^{MN} \quad (2.2.10)$$

を満たす行列として定義され, 常に存在する. この C 行列に対して, $\bar{\psi} = \psi^\dagger\Gamma^0$ と $\mathcal{T}\psi C$ は同じ変換則に従う. また, $\Gamma^{M\dagger} = \Gamma_M$ となる表示では,

$$C = kB\Gamma^0 \quad (2.2.11)$$

が成り立つ. ここで, k は定数. □

【定義 2.6] $\Gamma_{a_1\dots a_k}$ を k 階のテンソルと見なして, 次の記法を用いる:

$$\Gamma_{[k]} := (\Gamma_{a_1\dots a_k}), \quad (2.2.12a)$$

$$*\Gamma_{[k]} = \left(\frac{1}{k!} \epsilon_{a_1\dots a_{n-k}b_1\dots b_k} \Gamma^{b_1\dots b_k} \right). \quad (2.2.12b)$$

このとき, 次の式が成り立つ:

$$**\Gamma_{[k]} = |\eta|(-1)^{k(n+1)}\Gamma_{[k]}. \quad (2.2.13)$$

□

【公式 2.7 (双対公式)]

$$*\Gamma_{[n-k]} = (-1)^{kn+k(k+1)/2}(*\Gamma_{[n]})\Gamma_{[k]}. \quad (2.2.14)$$

すなわち,

$$\frac{1}{(n-k)!} \Gamma^{b_1\dots b_{n-k}} \epsilon_{b_1\dots b_{n-k}a_k\dots a_1} = (*\Gamma_{[n]})\Gamma_{a_1\dots a_k}. \quad (2.2.15)$$

□

【公式 2.8 (Fierz 恒等式 [2005.2.6])] 次元 D 上の Clifford 代数の既約表現を考え, その次元を N とする :

$$N = 2^{\lfloor D/2 \rfloor}. \quad (2.2.16)$$

1. n が偶数ないし n が奇数で $n < D$ のとき,

$$\mathrm{Tr} \Gamma^{a_1 \cdots a_n} = 0. \quad (2.2.17)$$

また, D が偶数ないし, D が奇数で $n + m < D$ のとき,

$$\mathrm{Tr} \Gamma^{a_1 \cdots a_n} \Gamma_{b_1 \cdots b_m} = \begin{cases} (-1)^{n(n-1)/2} N \delta_{b_1 \cdots b_n}^{a_1 \cdots a_n} & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}. \quad (2.2.18)$$

よって, Tr により $\mathbb{C}(N)$ に内積を定義すると, D が偶数のとき $n = D$, D が奇数のとき $n = (D - 1)/2$ として,

$$1, \Gamma^a, \dots, \Gamma^{[a_1 \cdots a_n]} \quad (2.2.19)$$

が直交基底となる.

2. 任意の $a, b, c, d \in \mathbb{C}^N$ および $M_1, M_2 \in \mathbb{C}(N)$ に対して, 次の恒等式が成り立つ :

$$(c^* M_1 a)(b^* M_2 d) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^n (-1)^{j(j-1)/2} \frac{1}{j!} (c^* \Gamma^{a_1 \cdots a_j} d) (b^* M_2 \Gamma_{a_1 \cdots a_j} M_1 a). \quad (2.2.20)$$

□

2.2.2 スピノール表現

2.2.2.1 Clifford 代数

【定義 2.9 ($\mathcal{C}_{p,q}, \mathcal{C}_n$)】 計量 η_{AB} (符号 (p, q)) をもつ D 次元空間における Γ 行列から生成される実代数

$$\mathcal{C}_{q,p} := \left\{ \sum_I c_I \Gamma^I \mid c_I \in \mathbb{R}, I = \emptyset, [A], [AB], \dots \right\} \quad (2.2.21)$$

を (\mathbb{R}^D, η) に付随する実 Clifford 代数という。また、その複素化

$$\mathcal{C}_D = \mathcal{C}_{q,p} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \quad (2.2.22)$$

を D 次元複素 Clifford 代数という。 □

【定理 2.10 (分類定理)】 \mathcal{C}_D は D が偶数の時、 \mathcal{C}_D は既約でただ一つの既約線形表現をもち、

$$\mathcal{C}_{2n} \cong \mathbb{C}(2^n). \quad (2.2.23)$$

また、 D が奇数の時、 \mathcal{C}_D は可約で 2 つの同型な代数の直和となり、それぞれはやはりただ一つの既約線形表現をもつ。

$$\mathcal{C}_{2n+1} \cong \mathbb{C}(2^n) \oplus \mathbb{C}(2^n) \quad (2.2.24)$$

□

【命題 2.11】 $\mathcal{C}_{q,p}$ の中で Γ 行列の偶数個の積で生成される部分集合 $\mathcal{C}_{q,p}^0$ は部分代数となり、次の関係が成り立つ：

$$\mathcal{C}_{q,p}^0 \cong \mathcal{C}_{q-1,p} \quad (2.2.25)$$

特に、Minkowski 時空に対して

$$\mathcal{C}_{1,D-1}^0 \cong \mathcal{C}_{0,D-1} \equiv \mathcal{C}_{D-1}^*. \quad (2.2.26)$$

この Clifford 代数は次の周期性をもつ：

$$\mathcal{C}_{n+8}^* \cong \mathcal{C}_n^* \otimes \mathcal{C}_8^* \cong \mathcal{C}_n^* \otimes \mathbb{R}(16). \quad (2.2.27)$$

□

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{C}\ell_n$	\mathbb{C}	\mathbb{H}	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
$\mathcal{C}\ell_n^*$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
$\mathcal{C}\ell_n$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(16)$

表 4: $n = 1, \dots, 8$ に対する Clifford 代数の分類

2.2.2.2 スピノール

【定義 2.12 (スピノール群)】 一般に, $\mathcal{C}\ell_{q,p}$ の単位可逆偶元の全体

$$\text{Spin}(p, q) = \{v_1 \cdots v_{2r} \mid r = 0, 1, 2, \dots, v_i \cdot v_i = \pm 1\} \subset \mathcal{C}\ell_{q,p}^0 \quad (2.2.28)$$

は乗法群を作る. この群をスピノール群とよぶ. □

【定義 2.13 (スピノール表現)】 スピノール群 $\text{Spin}(n-1, 1)$ の Clifford 代数 $\mathcal{C}\ell_D$ への埋め込み、および $\mathcal{C}\ell_D$ の既約表現 $\mathbb{C}(2^{\lfloor D/2 \rfloor})$ により定義される、次の表現をスピノール群のスピノール表現と呼ぶ:

$$\text{Spin}(n-1, 1) \subset \mathcal{C}\ell_{1,n-1}^0 \subset \mathcal{C}\ell_n \rightarrow \mathbb{C}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}). \quad (2.2.29)$$

さらに, Lorentz 群のスピノール表現

$$\text{SO}_0(n-1, 1) \ni \Lambda \mapsto S(\Lambda) \in \text{Spin}(n-1, 1) \quad (2.2.30)$$

は

$$S(v^a \Gamma_a) S^{-1} = (\Lambda v)^a \Gamma_a \Leftrightarrow S \Gamma^a S^{-1} = (\Lambda^{-1})^a_b \Gamma^b \quad (2.2.31)$$

により定義される. 対応して, スピノール $\psi \in \mathbb{C}(2^{\lfloor n/2 \rfloor})$ は, 擬直交基底の変換に対して

$$\theta'^a = \Lambda^a_b \theta^b \rightarrow \psi' = S(\Lambda) \psi \quad (2.2.32)$$

と変換する量の組として定義される. □

【命題 2.14】 無限小 Lorentz 変換 $\delta\Lambda$ に対して

$$\delta\Lambda_{ab} = \omega_{ab} \Rightarrow \delta S(\Lambda) = \frac{1}{4} \omega_{ab} \Gamma^{ab}. \quad (2.2.33)$$

特に, 次の交換関係が成り立つ:

$$[\Gamma^{ab}, \Gamma^c] = 4\delta_d^{[a} \eta^{b]c} \Gamma^d = 2(\Gamma^a \eta^{bc} - \Gamma^b \eta^{ac}), \quad (2.2.34a)$$

$$[\Gamma^{ab}, \Gamma^{cd}] = 2(\eta^{ad} \Gamma^{bc} + \eta^{bc} \Gamma^{ad} - \eta^{ac} \Gamma^{bd} - \eta^{bd} \Gamma^{ac}). \quad (2.2.34b)$$

□

D	\mathbb{C} -spinor rep.	real	Weyl	real-Weyl	by \mathbb{R} -rep.
2	$1 + \bar{1}$	\bigcirc	complex	—	$(2_{\mathbb{R}} = 1_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C}$
3	2	pseudo	—	—	$4_{\mathbb{R}}$
4	$2 + 2'$	pseudo	self	—	$4_{\mathbb{R}} + 4'_{\mathbb{R}}$
5	4	pseudo	—	—	$8_{\mathbb{R}}$
6	$4 + \bar{4}$	\bigcirc	complex	—	$(8_{\mathbb{R}} = 4_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C}$
7	8	\bigcirc	—	—	$8_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$
8	$8 + 8'$	\bigcirc	self	\bigcirc	$(8_{\mathbb{R}} + 8'_{\mathbb{R}}) \otimes \mathbb{C}$
9	16	\bigcirc	—	—	$16_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$

表 5: Spinor representation of $SO(D)$

【定義 2.15 (Majorana スピノール)】 B 行列に対して

$$\zeta^* = B\zeta \quad (2.2.35)$$

を満たすスピノール ζ を Majorana スピノールという。この条件より、 $B^*B = 1$ が要求されるので、Majorana スピノールは次元が条件

$$D \neq 5, 6, 7 \pmod{8} \quad (2.2.36)$$

を満たす時空でのみ存在。 □

D	\mathbb{C} -spinor rep.	Majorana	Weyl	Majorana-Weyl	by \mathbb{R} -rep.
2	$1 + 1'$	○	self	○	$(1_{\mathbb{R}} + 1'_{\mathbb{R}}) \otimes \mathbb{C}$
3	2	○	–	–	$(2_{\mathbb{R}}) \otimes \mathbb{C}$
4	$2 + \bar{2}$	○	complex	–	$(4_{\mathbb{R}} = 2_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C}$
5	4	–	–	–	$8_{\mathbb{R}} = 4_{\mathbb{C}}$
6	$4 + 4'$	–	self	–	$8_{\mathbb{R}} + 8'_{\mathbb{R}}$
7	8	–	–	–	$16_{\mathbb{R}} = 8_{\mathbb{C}}$
8	$8 + \bar{8}$	○	complex	–	$(16_{\mathbb{R}} = 8_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C}$
9	16	○	–	–	$16_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$
10	$16 + 16'$	○	self	○	$(16_{\mathbb{R}} + 16'_{\mathbb{R}}) \otimes \mathbb{C}$
11	32	○	–	–	$32_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$
12	$32 + \bar{32}$	○	complex	–	$64_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$

表 6: Spinor representation of $\text{SO}(D - 1, 1)$

2.2.3 スピノールの接続

一般に、 G を構造群として持つ主ファイバー束 P の \mathfrak{g} に値を取る接続形式が局所座標系で ω_α ，対応する曲率形式が \mathcal{R}_α と表されとすると，線形表現 $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ により定まる P の随伴ベクトル束 $E = P \times_\rho V$ における接続形式および曲率形式は

$$\rho_*(\omega_\alpha), \quad \rho_*(\mathcal{R}_\alpha)$$

と表される。

特に、Lorentz 群（ないし回転群）のベクトル表現 ρ^v とスピノール表現 ρ^s に対して，

$$\delta\Lambda = (\delta\Lambda_{ab}) \mapsto \rho^v(\delta\Lambda) = (\delta\Lambda^a_b), \quad \rho^s(\delta\Lambda) = \frac{1}{4}\delta\Lambda_{ab}\Gamma^{ab}$$

となるので，Riemann 接続に対して，

$$\begin{aligned} \rho^v(\omega) &= \omega^a_b, \quad \rho^v(\mathcal{R}) = \mathcal{R}^a_b \\ \Rightarrow \rho^s(\omega) &= \frac{1}{4}\omega_{ab}\Gamma^{ab}, \quad \rho^s(\mathcal{R}) = \frac{1}{4}\mathcal{R}_{ab}\Gamma^{ab} \end{aligned}$$

が成り立つ。すなわち，スピノール ψ に対して，

$$[\nabla_M, \nabla_N]\psi = \frac{1}{4}\mathcal{R}_{MNAB}\Gamma^{AB}\psi \quad (2.2.37)$$

[目次へ](#)

また, $\Gamma_M = \Gamma_A \theta_M^A$ に対して,

$$\nabla_M \Gamma_N = \Gamma_A \nabla_M \theta_N^A + \frac{1}{4} \omega_{BCM} [\Gamma^{BC}, \Gamma_A] \theta_N^A = 0, \quad (2.2.38a)$$

$$\nabla_M \Gamma_{[D]} = 0. \quad (2.2.38b)$$

[目次へ](#)

2.2.4 SO(6) スピノール

2.2.4.1 諸定義

カイラル分解 $\mathbf{8} = \mathbf{4} + \mathbf{4}^* = \eta_+ + \chi_-$ に対し, 次の条件を満たす表示を取る:

$$(\gamma^a)^\dagger = \gamma^a, \quad (2.2.39)$$

$$\eta_+ \in \mathbf{4} \Rightarrow \eta_+^* \in \mathbf{4}^*. \quad (2.2.40)$$

また,

$$\gamma_7 = i\gamma^{123456}. \quad (2.2.41)$$

より,

$$\gamma_{a_1 \dots a_k} = \frac{1}{(6-k)!} i\gamma_7 \gamma^{b_1 \dots b_{6-k}} \epsilon_{b_1 \dots b_{6-k} a_k \dots a_1}. \quad (2.2.42)$$

すなわち,

$$\gamma_{[k]} = (-1)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} i\gamma_7 * (\gamma_{[6-k]}). \quad (2.2.43)$$

例えば,

$$\begin{aligned} \Gamma^1 &= \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, & \Gamma^2 &= \sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\ \Gamma^3 &= -1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3, & \Gamma^4 &= -1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3, \\ \Gamma^5 &= 1 \otimes 1 \otimes \sigma_1, & \Gamma^6 &= 1 \otimes 1 \otimes \sigma_2, \\ \Gamma_7 &= -\sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\ C &= \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2. \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

C は次の性質をもつ:

$$C^\dagger = \mathcal{T}C = C^{-1} = C, \quad (2.2.45a)$$

$$C\gamma^a C = -\mathcal{T}(\gamma^a) \quad (2.2.45b)$$

したがって,

$$\begin{aligned} \eta_+^* = C\eta_- \Rightarrow & \eta_+^\dagger \eta_+ = \eta_-^\dagger \eta_-, \quad \eta_+^\dagger \gamma^{ab} \eta_+ = -\eta_-^\dagger \gamma^{ab} \eta_-, \\ & \left(\eta_+^\dagger \gamma^{ab} \eta_+ \right)^* = -\eta_+^\dagger \gamma^{ab} \eta_+, \\ & \eta_\pm^\dagger \gamma^a \eta_\pm = \eta_\pm^\dagger \gamma^{abc} \eta_\pm = 0, \\ & \left(\eta_+^\dagger \gamma^{abc} \eta_- \right)^* = -\eta_-^\dagger \gamma^{abc} \eta_+, \\ & \eta_\pm^\dagger \eta_\mp = \eta_\pm^\dagger \gamma^a \eta_\mp = \eta_\pm^\dagger \gamma^{ab} \eta_\mp = 0. \end{aligned} \quad (2.2.46)$$

2.2.4.2 Fierz 恒等式

任意のスピノール a, b, c, d と Clifford 代数の元 M_1, M_2 に対し

$$\begin{aligned}
(c^\dagger M_1 a)(b^\dagger M_2 d) &= \frac{1}{8} \{ (c^\dagger d)(b^\dagger M_2 M_1 a) + (c^\dagger \gamma_7 d)(b^\dagger M_2 \gamma_7 M_1 a) \} \\
&\quad + \frac{1}{8} \{ (c^\dagger \gamma^p d)(b^\dagger M_2 \gamma_p M_1 a) - (c^\dagger \gamma_7 \gamma^p d)(b^\dagger M_2 \gamma_7 \gamma_p M_1 a) \} \\
&\quad - \frac{1}{16} \{ (c^\dagger \gamma^{pq} d)(b^\dagger M_2 \gamma_{pq} M_1 a) + (c^\dagger \gamma_7 \gamma^{pq} d)(b^\dagger M_2 \gamma_7 \gamma_{pq} M_1 a) \} \\
&\quad - \frac{1}{48} (c^\dagger \gamma^{pqr} d)(b^\dagger M_2 \gamma_{pqr} M_1 a). \tag{2.2.47}
\end{aligned}$$

ただし,

$$(c^\dagger A \gamma^{pqr} B d)(b^\dagger C \gamma_{pqr} D d) = -(c^\dagger A \gamma_7 \gamma^{pqr} B d)(b^\dagger C \gamma_7 \gamma_{pqr} D d). \tag{2.2.48}$$

2.2.4.3 形式系

$$\gamma_7 \eta_\pm = \pm \eta_\pm, \quad \gamma_+^* = C \gamma_-, \quad \eta_\pm^\dagger \eta_\pm = 1 \tag{2.2.49}$$

となるスピノールに対し,

$$J^{pq} = i \eta_+^\dagger \gamma^{pq} \eta_+, \quad \Omega^{pqr} = \eta_-^\dagger \gamma^{pqr} \eta_+ \tag{2.2.50}$$

とおく.

- $M_1 = M_2 = 1$:

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} J^{pq} J_{pq} \tag{2.2.51}$$

より,

$$J^{pq} J_{pq} = 6. \tag{2.2.52}$$

- $M_1 = 1, M_2 = \gamma^{pq}$:

$$J^{pq} = \frac{1}{4} J^{pq} - \frac{1}{8} J^{st} \langle \gamma^{pq} \gamma_{st} \rangle \tag{2.2.53}$$

より

$$\begin{aligned}
-6 J^{pq} &= J^{st} \langle \gamma^{pq} \gamma_{st} \rangle \\
&= -2 J^{pq} + \frac{1}{2} J^{st} J^{uv} \epsilon_{uvpqrst}. \tag{2.2.54}
\end{aligned}$$

よって,

$$J = -\frac{1}{2}*(J \wedge J). \quad (2.2.55)$$

これは

$$J \wedge J \wedge J = 6\Omega(Y_6) \quad (2.2.56)$$

と同等.

- $M_1 = \gamma^{pr}, M_2 = \gamma^q_r$:

$$J^{pr} J^q_r = -\frac{1}{4}\langle \gamma^{pr} \gamma^q_r \rangle - \frac{i}{8}J^{xy} \langle \gamma^{pr} \gamma_{xy} \gamma^q_r \rangle \quad (2.2.57)$$

ここで,

$$\gamma^{pr} \gamma^q_r = -5\delta^{pq} - 4\gamma^{pq}. \quad (2.2.58)$$

また,

$$\gamma^{pr} \gamma_{xy} \gamma^q_r = -8\delta_{[x}^p \delta_{y]}^q + 8\delta_{[x}^{(p} \gamma^q)_{y]} - \delta^{pq} \gamma_{xy} \quad (2.2.59)$$

よって,

$$J^{pr} J^q_r = \frac{5}{4}\delta^{pq} - J^{pr} J^q_r + \frac{1}{8}\delta^{pq} J^{xy} J_{xy}. \quad (2.2.60)$$

故に,

$$J^{pr} J^q_r = \delta^{pq}. \quad (2.2.61)$$

- $M_1 = \gamma^a, M_2 = \gamma^b$:

$$0 = 0 - \frac{1}{48}\Omega^{pqr} \eta_-^\dagger \gamma^a \gamma_{pqr} \gamma^b \eta_+ \quad (2.2.62)$$

において,

$$\gamma^a \gamma_{pqr} \gamma^b = -6\delta_{[p}^a \delta_{q}^b \gamma_{r]} + 6\delta_{[p}^{(a} \gamma_{qr]}^{b)} - \delta^{ab} \gamma_{pqr} - \gamma^{ab}_{pqr} \quad (2.2.63)$$

および

$$\gamma^{ab}_{pqr} = i\gamma_\tau \gamma^s \epsilon_s^{ab}_{pqr} \quad (2.2.64)$$

および

$$\Omega = i * \Omega \quad (2.2.65)$$

より,

$$\Omega^{aqr} \Omega^b_{qr} = \frac{1}{6}\delta^{ab} \Omega^{pqr} \Omega_{pqr}. \quad (2.2.66)$$

- $M_1 = \gamma^{abc}, M_2 = \gamma^{def}$

$$\Omega \wedge \bar{\Omega} = -6i\Omega(Y_6) \quad (2.2.67)$$

2.2.5 SO(7) スピノール

2.2.5.1 諸定義

$\gamma^a (a = 1, \dots, 7)$ は次の関係式を満たす:

$$\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\delta^{ab}, \quad (2.2.68)$$

$$i\gamma^1 \dots \gamma^7 = 1. \quad (2.2.69)$$

成分がすべて純虚で行列として hermitian となる表示は

$$\gamma^{1,2,3} = \begin{pmatrix} i\alpha^{1,2,3} & 0 \\ 0 & -i\alpha^{1,2,3} \end{pmatrix}, \quad (2.2.70a)$$

$$\gamma^{4,5,6} = \begin{pmatrix} 0 & i\beta^{1,2,3} \\ i\beta^{1,2,3} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.70b)$$

$$\gamma^7 = \begin{pmatrix} 0 & -iI_4 \\ iI_4 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.70c)$$

ここで,

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^3 = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & i\sigma^2 \end{pmatrix}, \quad (2.2.71a)$$

$$\beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & 0 \\ 0 & i\sigma^2 \end{pmatrix}. \quad (2.2.71b)$$

2.2.5.2 部分代数

$\mathfrak{so}(8)$ と $\mathfrak{sl}(8, \mathbb{R})$ は \mathcal{O}_7^* の部分代数となる:

$$\mathfrak{so}(8) = \{i\gamma^a, \gamma^{ab}\}, \quad (2.2.72a)$$

$$(8, \mathbb{R}) = \{i\gamma^a, \gamma^{ab}, i\gamma^{abc}\}. \quad (2.2.72b)$$

また, $\mathfrak{su}(8)$ は \mathcal{O}_7 の部分代数となる:

$$\mathfrak{su}(8) = \{i\gamma^a, \gamma^{ab}, ij\gamma^{abc}\} \quad (2.2.73)$$

ここで, j は \mathbb{C} に対して外的で $j^2 = -1$ となる要素である.

2.2.5.3 SO(8) 型表示

Γ^{ab} ($a, b = 1, \dots, 8$) を

$$\Gamma^{ab} = \gamma^{ab} \quad (a, b = 1, \dots, 7), \quad (2.2.74a)$$

$$\Gamma^{a8} = -\Gamma^{8a} = -i\gamma^a \quad (a = 1, \dots, 7) \quad (2.2.74b)$$

により定義する. このとき,

$$[\Gamma^{ab}, \Gamma^{cd}] = 4(\delta^{d[a}\Gamma^{b]c} - \delta^{c[a}\Gamma^{b]d}), \quad (2.2.75a)$$

$$\Gamma^{12\dots 8} = -1, \quad (2.2.75b)$$

$$\frac{1}{2}(\Gamma^{ab})_A{}^B(\Gamma_{ab})_C{}^D = 4(\delta_{AC}\delta^{BD} - \delta_A{}^D\delta_C{}^B), \quad (2.2.75c)$$

$$\frac{1}{4!}(\Gamma^{abcd})_A{}^B(\Gamma_{abcd})_C{}^D = 4\delta_{AC}\delta^{BD} + 4\delta_A{}^D\delta_C{}^B - \delta_A{}^B\delta_C{}^D \quad (2.2.75d)$$

ベクトル-スピノール双対関係 $(\Gamma^{ab})_{AB} = (\Gamma_{AB})^{ab}$ とおくと,

$$(\Gamma^{ab})_{AB}(\Gamma_{ab})_{CD} = -8(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}), \quad (2.2.76a)$$

$$(\Gamma_{AB})_{ab}(\Gamma^{AB})_{cd} = -8(\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}). \quad (2.2.76b)$$

また,

$$[\Gamma^{ab}, \Gamma^{cd}]_{AB} = 8\delta_{[b}^{[c}(\Gamma_{a]}^d]_{AB}, \quad (2.2.77a)$$

$$[\Gamma^{AB}, \Gamma^{CD}]_{ab} = 8\delta_{[B}^{[C}(\Gamma_{A]}^D]_{ab}. \quad (2.2.77b)$$

2.3 SUSY

2.3.1 一般論

Lie 超代数 (超対称代数) : \mathbb{Z}_2 次数付線形空間 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$ において,

$$[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j]_{\pm} \subseteq \mathcal{L}_{i+j}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_2 \quad (2.3.1)$$

となる双線形演算 $[\ast, \ast]_{\pm}$ が定義され,

$$[X, Y]_{\pm} \equiv [X, Y] = -[Y, X], \quad X, Y \in \mathcal{L}_0, \quad (2.3.2a)$$

$$[X, Q]_{\pm} \equiv [X, Q] = -[Q, X], \quad X \in \mathcal{L}_0, Q \in \mathcal{L}_1, \quad (2.3.2b)$$

$$[Q, Q']_{\pm} \equiv \{Q, Q'\} = \{Q', Q\}, \quad Q, Q' \in \mathcal{L}_1, \quad (2.3.2c)$$

および拡張 Jacobi 恒等式

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \quad X, Y, Z \in \mathcal{L}_0, \quad (2.3.3a)$$

$$[X, [Y, Q]] - [Y, [X, Q]] = [[X, Y], Q], \quad X, Y \in \mathcal{L}_0, Q \in \mathcal{L}_1 \quad (2.3.3b)$$

$$[X, \{Q, Q'\}] = \{[X, Q], Q'\} + \{Q, [X, Q']\}, \quad X \in \mathcal{L}_0, Q, Q' \in \mathcal{L}_1 \quad (2.3.3c)$$

$$[Q, \{Q', Q''\}] + [Q', \{Q'', Q\}] + [Q'', \{Q, Q'\}] = 0, \quad Q, Q', Q'' \in \mathcal{L}_1 \quad (2.3.3d)$$

が成り立つとき, $\{\mathcal{L}, [\ast, \ast]_{\pm}\}$ を Lie 超代数 (超対称代数) という。

2.3.2 Super-Poincare algebra

Coleman-Mandula の定理 (1967)

仮定

- 1) S 行列は 4 次元 Minkowski 時空上の局所的相対論的量子論に基づく.
- 2) 同じ質量の 1 粒子状態をもつ粒子の種類は有限個.
- 3) 真空と 1 粒子状態の間にはエネルギーギャップがある.

のもとで, S 行列の対称性を表す Lie 代数は, Poincare Lie 代数とコンパクト Lie 代数の直和となる.

Boson \Leftrightarrow Fermion :

$$\delta_\epsilon \phi = i[\epsilon \cdot Q, \phi] \Rightarrow Q : \text{spinor}$$

超対称代数

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \\ [\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_0] &\subset \mathcal{L}_0, \quad [\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1] \subset \mathcal{L}_1, \quad \{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_1\} \subset \mathcal{L}_0. \end{aligned}$$

Haag-Lopuszanski-Sohnius の定理 (1975)

Coleman-Mandula の定理の仮定が満たされるとき，4次元理論のS-行列の持ちうる超対称性は，超対称代数が正定値内積をもつ Hilbert 空間への表現をもち，かつ，任意の奇元 Q のエルミート共役作用素が再び代数に属するならば，奇元は必ずスピン $1/2$ の表現に属し，次の交換関係で特徴付けられる **Poincare SUSY** 代数で与えられる：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \mathcal{P} \oplus \mathcal{S} \oplus \mathcal{C}, \quad \mathcal{L}_1 = \langle Q_\alpha^L, Q_{\dot{\alpha}M}^* \rangle; \\ [P_m, Q_\alpha] &= 0, \quad [B, Q_\alpha] = S(B)Q_\alpha \quad (B \in \mathcal{S}), \\ \{Q_\alpha^L, Q_{\dot{\alpha}M}^*\} &= 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m P_m \delta_M^L, \quad \{Q_\alpha^L, Q_\beta^M\} = \epsilon_{\alpha\beta} X^{LM} \in \mathcal{C}, \\ S(B)^L{}_M X^{MN} &= S(B)^N{}_M X^{ML} \quad (B \in \mathcal{S}) \end{aligned}$$

$N = 1$ case :

$$\{Q_\alpha, Q_\beta^\dagger\} = 2P_a(\Gamma^a \Gamma^0)_{\alpha\beta}, \quad [P^a, Q_\alpha] = 0$$

Positivity of energy

$$\sum_\alpha \langle \{Q_\alpha, Q_\alpha^\dagger\} \rangle = 8E$$

Boson-fermion cancellation :

$$\text{Vacuum energy} = +\frac{1}{2} \sum_p \omega_p \text{ (boson)}, \quad -\frac{1}{2} \sum_p \omega_p \text{ (fermion)}$$

(Massless) Supermultiplet

$$\begin{aligned} N = 1 & : (0, 1/2) \quad (1/2, 1) \quad (1, 3/2) \quad (3/2, 2) \\ N = 2 & : \left(-\frac{1}{2}, 0^2, \frac{1}{2}\right) \quad \left(0, \frac{1}{2}^2, 1\right) \quad \left(1, \frac{3}{2}^2, 2\right) \\ N = 8 & : \left(-2, -\frac{3}{2}^8, -1^{28}, -\frac{1}{2}^{56}, 0^{70}, \frac{1}{2}^{56}, 1^{28}, \frac{3}{2}^8, 2\right) \end{aligned}$$

2.3.3 超代数

【定義 2.16 (超環)】 環 $(R, +, \cdot)$ は, その \mathbb{Z}_2 次数付け, すなわち加法群としての直和分解 $R = R_0 \oplus R_1$ が与えられ, $R_\alpha \cdot R_\beta \subset R_{\alpha+\beta}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$) が成り立つとき, 超環 (super-ring) という.

超環 R において, $a \in R_0$ ないし $a \in R_1$ となる元を斉次元 (homogeneous element) といい, その全体を $h(R)$ で表す. また, $a \in h(R)$ の次数 $|a|$ を,

$$| \cdot | : h(R) \rightarrow \mathbb{Z}_2; \quad a \mapsto \alpha \Leftrightarrow a \in R_\alpha$$

により定義する.

さらに, 超環 R において, 常に

$$ab = (-1)^{|a||b|}ba$$

が成り立つとき, R は可換 (commutative) であるという. □

【定義 2.17 (結合的超代数)】 \mathbb{Z}_2 次数付き代数 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$ は, その積演算が結合的であるとき結合的超代数という. □

【定義 2.18 (可換超代数)】 結合的超代数 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$ において,

$$ab = (-1)^{\deg a \deg b}ba$$

が成り立つとき, \mathcal{A} を可換超代数という. □

【例 2.19 (外積代数)】 \mathbb{F} 係数 L 次元線形空間 V ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) から作られる外積代数 $\wedge V$ を $\mathbb{F}B_L$ と表し, その偶元の次数を 0, 奇元の次数を 1 とおくと, 可換超代数が得られる. これは, Grassmann 代数に単位元を付加したものと一致する. □

【例 2.20 (行列超代数)】

1. \mathbb{F} を係数とする $p+q$ 次の正方行列の全体 $M(p+q, \mathbb{F})$ の作る代数に,

$$\text{次数 } 0: \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad A \in M(p, \mathbb{F}), D \in M(q, \mathbb{F})$$

$$\text{次数 } 1: \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \quad B \in M(p, q, \mathbb{F}), C \in M(q, p, \mathbb{F})$$

により \mathbb{Z}_2 次数を定義すると, 結合的超代数が得られる. この超代数を $M(p|q, \mathbb{F})$ と表す.

2. (超転置) 行列超代数における M の転置を

$${}^{\text{st}}M := \begin{pmatrix} {}^T A & {}^T C \\ -{}^T B & {}^T D \end{pmatrix}$$

により定義する. このとき, 次の性質がなりたつ:

$${}^{\text{st}}(MN) = {}^{\text{st}}N {}^{\text{st}}M,$$

3. (超トレース) 超代数としての行列のトレースを

$$\text{str}M := \text{Tr}A - \text{Tr}D$$

で定義する. このとき, 次の性質が成り立つ.

$$\text{str}(MN) = \text{str}(NM),$$

$$\text{str}({}^{\text{st}}M) = \text{str}M,$$

$$\text{str}(SMS^{-1}) = \text{str}M.$$

□

2.3.4 Lie 超代数

【定義 2.21 (Lie 超代数)】 \mathbb{Z}_2 次数付き線形空間 $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ に次の性質をもつ積 $[a, b]$ が定義されているとき, \mathcal{L}_s を Lie 超代数という:

i) a, b がそれぞれ同次元のとき,

$$\deg([a, b]) = \deg a + \deg b.$$

ii) $a, b, c \in \mathcal{L}_s$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ のとき,

$$[\alpha a + \beta b, c] = \alpha[a, c] + \beta[b, c].$$

iii) a, b が同次元のとき,

$$[b, a] = -(-1)^{\deg a \deg b} [a, b].$$

iv) a, b, c が同次元のとき

$$[a, [b, c]](-1)^{\deg a \deg c} + [b, [c, a]](-1)^{\deg b \deg a} + [c, [a, b]](-1)^{\deg c \deg b} = 0.$$

□

【例 2.22 (行列の Lie 超代数)】 行列の超代数 $M(p|q, \mathbb{F})$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) において

$$[M, N] := MN - (-1)^{\deg M \deg N} NM$$

とおくと, この超交換子に対して $M(p|q, \mathbb{F})$ は Lie 超代数となる.

さらに,

$$\mathfrak{sl}(p|q; \mathbb{F}) := \{M \in M(p|q, \mathbb{F}) \mid \text{str} M = 0\}$$

は, $M(p|q; \mathbb{F})$ の部分 Lie 超代数となる. また,

$$K := \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & J_q \end{pmatrix}; \quad J_q := \begin{pmatrix} 0 & 1_{q/2} \\ -1_{q/2} & 0 \end{pmatrix}$$

で定義される $K \in M(p|q; \mathbb{F})$ を用いて,

$$\text{osp}(p|q; \mathbb{F}) := \{M \in M(p|q, \mathbb{F}) \mid {}^{\text{st}}MK + (-1)^{\deg M} KM = 0\}$$

とおくと, 次数ゼロの部分が

$$\mathcal{L}_0 = \mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{sp}(q/2, \mathbb{F})$$

となる直交シンプレクティック Lie 超代数が得られる. □

2.3.4.1 分類

【定義 2.23 (可解および半単純 Lie 超代数)】 Lie 超代数 \mathcal{L} に対して,

1. Lie 代数と同様に, $\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^{(k)} = [\mathcal{L}^{(k-1)}, \mathcal{L}^{(k-1)}]$ ($k = 1, 2, \dots$) と置くとき, $\mathcal{L}^{(k)} = 0$ となる k が存在するとき, \mathcal{L} は可解 (solvable) であるという.
2. \mathcal{L} の極大可解イデアルがゼロイデアルとなるとき, \mathcal{L} は半単純 (semi-simple) であるという.

□

【定理 2.24 (基本構造定理)】 \mathcal{L} を有限次元 Lie 超代数, \mathcal{R} を \mathcal{L} の極大可解イデアルとすると, \mathcal{L}/\mathcal{R} は半単純となる. □

2.3.4.2 表現

【定義 2.25 (Lie 超代数の次数付き表現)】

1. Lie 超代数 \mathcal{L}_s から, 行列の作る Lie 超代数 $M(p|q, \mathbb{F})$ への Lie 超代数としての準同型 Γ を, \mathcal{L}_s の次数付き表現という.
2. $V = V_0 \oplus V_1$ を次数付きベクトル空間とすると, $\text{End}(V)$ に行列 Lie 超代数 $M(p|q)$ ($p = \dim(V_0), q = \dim(V_1)$) と同型な Lie 超代数の構造が入る. この Lie 超代数を $\mathfrak{gl}(V)$ と記すとき, \mathcal{L} の次数付き表現は, Lie 超代数としての準同型 $\rho: \mathcal{L} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ と同一視できる. また, このとき, V は次数付き \mathcal{L} -加群となる.

□

【定理 2.26 (Lie 超代数における Ado の定理)】 すべての有限次元 Lie 超代数は, 忠実な (次数付き) 表現をもつ. [Kac VG 1977[270]] □

【定義 2.27 (誘導表現)】 \mathcal{L} を Lie 超代数, \mathcal{H} をその部分超代数, V を \mathcal{H} -加群とする. このとき,

$$\text{Ind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}}(V) = U(\mathcal{L}) \otimes_{U(\mathcal{H})} V \quad (2.3.4)$$

により定義される \mathcal{L} -加群を, \mathcal{H} -加群から誘導された \mathcal{L} -加群と呼ぶ. ここで, $U(\mathcal{L})$ は \mathcal{L} の普遍包絡環である.

□

【命題 2.28 (誘導表現の性質)】

- a) \mathcal{L} を Lie 超代数, \mathcal{H} をその部分超代数, V を単純 \mathcal{L} -加群, W をその \mathcal{H} -部分加群とする. このとき, V は誘導 \mathcal{L} -加群の因子加群である. すなわち, \mathcal{L} の任意の既約表現は, その部分超代数の表現から誘導される表現の既約分解により得られる.
- b) $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_1$ を \mathcal{L} の部分超代数, W を \mathcal{H}_2 -加群とすると,

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_1}^{\mathcal{L}}(\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_2}^{\mathcal{H}_1} W) \cong \mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_2}^{\mathcal{L}}(W). \quad (2.3.5)$$

- c) \mathcal{H} を $\mathcal{H}_0 \supset \mathcal{L}_0$ となる Lie 超代数 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$ の部分超代数, $g_1, \dots, g_t \in \mathcal{L}_1$ を \mathcal{L}/\mathcal{H} の基底 $[g_1], \dots, [g_t]$ の代表元とする. このとき, \mathcal{H} -部分加群 W に対して,

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}}(W) = \bigoplus_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_t} g_{i_1} \cdots g_{i_t} W \quad (2.3.6)$$

が成り立つ. 特に, $\dim \mathrm{Ind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{L}}(W) = 2^t \dim W$.

[Kac VG 1977[270]] _____ □

2.4 単純 Lie 超代数

2.4.1 単純複素 Lie 超代数

【定義 2.29 (古典 Lie 超代数と Cartan 型 Lie 超代数)】 Lie 超代数 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ において, 代数演算により誘導される表現 $\mathcal{L}_0 \triangleright \mathcal{L}_1$ が完全可約のとき, \mathcal{L} は古典 Lie 超代数 (classical Lie superalgebra), 完全可約でないとき Cartan 型 Lie 超代数 (Cartan type Lie superalgebra) という. □

【定義 2.30 (簡約可能な Lie 代数)】 Lie 代数 \mathfrak{g} は, 半単純 Lie 代数と中心の直和となるとき簡約可能という. □

【命題 2.31】 Lie 超代数が古典的であることと, Lie 代数 \mathcal{L}_0 が簡約可能であることは同等である. □

【定理 2.32 (古典複素 Lie 超代数の分類定理)】 単純複素 Lie 超代数は次のように分類される :

(1) 基本 (basic) 古典単純複素 Lie 超代数

(a) Killing 形式が非退化となるもの.

(i) 単純複素 Lie 代数

(ii) 次の 6 つの系列 :

$$A(m|n) = \mathfrak{sl}(m+1|n+1; \mathbb{C}), \quad m > n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$B(m|n) = \mathfrak{osp}(2m+1|2n; \mathbb{C}), \quad m = 0, 1, \dots, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$C(n) = \mathfrak{osp}(2|2n-2; \mathbb{C}), \quad n = 2, 3, \dots,$$

$$D(m|n) = \mathfrak{osp}(2m|2n; \mathbb{C}), \quad m = 2, 3, \dots, \quad n = 1, 2, \dots, \quad m \neq n+1,$$

$$F(4),$$

$$G(3).$$

(b) Killing 形式が恒等的にゼロとなるもの.

$$A(n|n) = \mathfrak{sl}(n+1|n+1; \mathbb{C}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$D(n+1|n) = \mathfrak{osp}(2n+2|2n; \mathbb{C}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$D(2|1; \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{C} - \{0, -1, \infty\}.$$

(2) 特異 (strange) 古典単純複素 Lie 超代数

$$P(n), n = 2, 3, \dots,$$

$$Q(n), n = 2, 3, \dots$$

[Cornwell JF 1989[86]; Kac VG 1977[270]] _____□

【定理 2.33 (Cartan 型 Lie 超代数の分類定理)】 Cartan 型 Lie 超代
数は次の 4 つの離散系列で尽くされる :

1) $W(n)$ ($n = 3, 4, \dots$)

2) $S(n)$ ($n = 3, 4, \dots$)

3) $\tilde{S}(n)$ ($n = 4, 5, \dots$,)

4) $H(n)$ ($n = 4, 5, \dots$,)

[Cornwell JF 1989[86]; Kac VG 1977[270]] _____□

2.4.2 古典 Lie 超代数

2.4.2.1 $\mathfrak{gl}(m|N)$:

$Q \in M(m+N)$ を $A \in M(m), B \in M(m, N), C \in M(N, m), D \in M(N)$ を用いて

$$Q = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (2.4.1)$$

と表し,

$$\mathcal{L} = M(m+N), \quad (2.4.2a)$$

$$\mathcal{L}_0 = \{Q \in \mathcal{L} \mid B = C = 0\}, \quad (2.4.2b)$$

$$\mathcal{L}_1 = \{Q \in \mathcal{L} \mid A = D = 0\} \quad (2.4.2c)$$

とおく. このとき, $[\ast, \ast]_{\pm}$ を

$$[Q_1, Q_2]_{\pm} = [Q_1, Q_2] \quad \text{for } Q_1, Q_2 \in \mathcal{L}_0, \quad (2.4.3a)$$

$$[Q_1, Q_2]_{\pm} = [Q_1, Q_2] \quad \text{for } Q_1 \in \mathcal{L}_0, Q_2 \in \mathcal{L}_1, \quad (2.4.3b)$$

$$[Q_1, Q_2]_{\pm} = \{Q_1, Q_2\} \quad \text{for } Q_1, Q_2 \in \mathcal{L}_1 \quad (2.4.3c)$$

と定義すると, $\{\mathcal{L}, [\ast, \ast]_{\pm}\}$ は超代数 $\mathfrak{gl}(m|N)$ となる. 以下, $Q \in \mathcal{L}$ を $Q[A, D; B, C]$ と表記する.

2.4.2.2 $\mathfrak{osp}(N|2p)$:

$\Omega_{(2p)}$ を条件

$$\Omega_{(2p)}^2 = -1, \quad {}^T\Omega_{(2p)} = -\Omega_{(2p)} \quad (2.4.4)$$

を満たす $2p$ 次の正方行列, $G_{(N)}$ を N 次の対称正則行列とする.

$\mathfrak{osp}(N|2p)$ を次の条件を満たす $\mathfrak{gl}(N|2p)$ の部分代数として定義する:

$${}^T A G_{(N)} + G_{(N)} A = 0, \quad (2.4.5a)$$

$${}^T D \Omega_{(2p)} + \Omega_{(2p)} D = 0, \quad (2.4.5b)$$

$$C = \Omega_{(2p)} {}^T B G_{(N)} \quad (2.4.5c)$$

このとき, $[\mathfrak{osp}(N|2p)]_0$ の生成する群 G は

$$G = O(N) \otimes \text{Sp}(2p) \quad (2.4.6)$$

が成り立つ.

特に,

$$\mathrm{Sp}(4, \mathbb{C}) \cong \mathrm{SO}(5, \mathbb{C}) \quad (2.4.7)$$

より, $\mathrm{osp}(N|4)$ の適当な実型は $\mathrm{SO}(2, 3) \times \mathrm{SO}(N)$ に対応する実超代数, すなわち AdS^4 上の N -拡張超代数となる. また, "宇宙項" ゼロの極限をとると, Minkowski 時空 $E^{3,1}$ 上の N -拡張超代数が得られる.

2.4.2.3 $\mathrm{sl}(m|N)$:

$\mathrm{sl}(m|N)$ を次の条件を満たす $\mathrm{gl}(m|N)$ の部分代数として定義する:

$$\mathrm{Tr}A = \mathrm{Tr}D. \quad (2.4.8)$$

このとき,

$$G = \mathrm{SL}(m, \mathbb{C}) \otimes \mathrm{SL}(N, \mathbb{C}) \otimes \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) \quad (2.4.9)$$

が成り立つ.

さらに, $H_{(m)}$ を符号 (p, q) ($p + q = m$) の m 次エルミート行列, $H_{(N)}$ を正の N 次エルミート行列として, 条件

$$H_{(m)}AH_{(m)}^{-1} = -A^\dagger, \quad (2.4.10a)$$

$$H_{(N)}DH_{(N)}^{-1} = -D^\dagger, \quad (2.4.10b)$$

$$H_{(m)}BH_{(N)}^{-1} = -C^\dagger \quad (2.4.10c)$$

を満たす $\mathrm{sl}(m|N)$ の実部分代数を $\mathrm{su}(p, q|N)$ とおくと,

$$G = \mathrm{SU}(p, q) \otimes \mathrm{SU}(N) \otimes \mathrm{U}(1) \quad (2.4.11)$$

が成り立つ.

特に,

$$\mathrm{SU}(2, 2) \cong \mathrm{SO}(2, 4) \quad (2.4.12)$$

より, $\mathrm{su}(2, 2|N)$ は AdS^5 上の拡張超対称代数を与える.

2.4.2.4 $P(n)$ と $Q(n)$:

$P(n)$ は次の条件を満たす $\mathrm{gl}(n|n)$ の部分代数として定義される:

$${}^T A + D = 0, \quad \mathrm{Tr}A = 0, \quad (2.4.13a)$$

$${}^T B = B, \quad {}^T C = -C. \quad (2.4.13b)$$

すなわち,

$$G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}), \quad (2.4.14a)$$

$$G \triangleright \mathcal{L}_1 : (2)_n + [2]_n. \quad (2.4.14b)$$

また, $Q'(n)$ を次の条件を満たす $\mathrm{sl}(n|n)$ の部分代数として定義する :

$$A = D, \quad B = C, \quad \mathrm{Tr} B = 0. \quad (2.4.15)$$

ただし, $Q'(n)$ は中心 $\{aI_{2n} \mid a \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}$ をもつので,

$$Q(n) = Q'(n)/\mathbb{C} \quad (2.4.16)$$

により単純な超代数 $Q(n)$ を定義する. このとき,

$$G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}), \quad (2.4.17a)$$

$$G \triangleright \mathcal{L}_1 : \text{Adjoint 表現} \quad (2.4.17b)$$

となる.

2.4.2.5 $D(2, 1, \alpha), G(3), F(4)$:

1. $D(2, 1, \alpha)$

$$G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \otimes \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \otimes \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}), \quad (2.4.18a)$$

$$G \triangleright \mathcal{L}_1 : (2, 2, 2). \quad (2.4.18b)$$

2. $G(3)$

$$G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \otimes G_2, \quad (2.4.19a)$$

$$G \triangleright \mathcal{L}_1 : (2, 7) \quad (2.4.19b)$$

3. $F(4)$

$$G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \otimes \mathrm{SO}(7, \mathbb{C}), \quad (2.4.20a)$$

$$G \triangleright \mathcal{L}_1 : (2, 8) \quad (2.4.20b)$$

2.4.3 Cartan 型超代数

$a_i, a_i^\dagger (i = 1, \dots, n)$ をフェルミ型生成消滅演算子とする :

$$\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}, \quad \{a_i, a_j\} = \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0.$$

2.4.3.1 $W(n) (n \geq 3)$:

$$W(n) = G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_1 \oplus \dots \oplus G_{n-1}, \quad (2.4.21a)$$

$$[G_i, G_j] \subset G_{i+j}, \quad (2.4.21b)$$

$$\mathcal{L}_0 = G_0 \oplus G_2 \oplus \dots, \quad \mathcal{L}_1 = G_{-1} \oplus G_1 \oplus \dots. \quad (2.4.21c)$$

ここで,

$$G_{-1} = \langle a_i (i = 1, \dots, n) \rangle, \quad (2.4.22a)$$

$$G_0 = \langle a_i^\dagger a_j (i, j = 1, \dots, n) \rangle, \quad (2.4.22b)$$

$$G_1 = \langle a_i^\dagger a_j^\dagger a_k (i \neq j, k = 1, \dots, n) \rangle, \quad (2.4.22c)$$

$\dots \quad \dots,$

$$G_{n-1} = \langle a_1^\dagger \dots a_n^\dagger a_i (i = 1, \dots, n) \rangle. \quad (2.4.22d)$$

$G_0 \cong \mathfrak{gl}(n)$ で $W(n)$ の次元は $n \cdot 2^n$. また, $W(2) = sl(2|1)$.

2.4.3.2 $S(n) (n \geq 3)$:

$$S(n) = G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_1 \oplus \dots \oplus G_{n-2}, \quad (2.4.23a)$$

$$[G_i, G_j] \subset G_{i+j}, \quad (2.4.23b)$$

$$\mathcal{L}_0 = G_0 \oplus G_2 \oplus \dots, \quad \mathcal{L}_1 = G_{-1} \oplus G_1 \oplus \dots. \quad (2.4.23c)$$

ここで,

$$G_{-1} = \langle a_i (i = 1, \dots, n) \rangle, \quad (2.4.24a)$$

$$G_0 = \langle a_1^\dagger a_1 - a_j^\dagger a_j (j = 2, \dots, n), \\ a_i^\dagger a_j (i \neq j = 1, \dots, n) \rangle, \quad (2.4.24b)$$

$$G_1 = \langle a_i^\dagger (a_1^\dagger a_1 - a_j^\dagger a_j) (i \neq j = 1, \dots, n), \\ a_1^\dagger (a_2^\dagger a_2 - a_j^\dagger a_j) (j = 3, \dots, n), \\ a_i^\dagger a_j^\dagger a_k (i \neq j \neq k = 1, \dots, n) \rangle, \quad (2.4.24c)$$

$$G_2 = \langle a_i^\dagger a_j^\dagger (a_1^\dagger a_1 - a_k^\dagger a_k) (i \neq j \neq k = 1, \dots, n), \\ a_k^\dagger a_1^\dagger (a_2^\dagger a_2 - a_j^\dagger a_j) (k \neq j = 3, \dots, n), \\ a_1^\dagger a_2^\dagger (a_3^\dagger a_3 - a_j^\dagger a_j) (j = 4, \dots, n), \\ a_i^\dagger a_j^\dagger a_k^\dagger a_l (i \neq j \neq k \neq l = 1, \dots, n) \rangle, \quad (2.4.24d)$$

...

$$G_0 \cong \mathfrak{sl}(n) \quad \mathcal{C} \quad \dim(S(n)) = (n-1)2^n + 1.$$

2.4.3.3 $\tilde{S}(n)$ ($n \geq 4$):

$S(n)$ において, G_{-1} を次の集合で置き換えたのも :

$$G_{-1} = \langle (1 + a_1^\dagger a_2^\dagger \cdots a_n^\dagger) a_i (i = 1, \dots, n) \rangle. \quad (2.4.25)$$

2.4.3.4 $H(n)$ ($n \geq 4$):

$$H(n) = G_{-1} \oplus G_0 \oplus G_1 \oplus \cdots \oplus G_{n-3}, \quad (2.4.26a)$$

$$[G_i, G_j] \subset G_{i+j}, \quad (2.4.26b)$$

$$\mathcal{L}_0 = G_0 \oplus G_2 \oplus \cdots, \quad \mathcal{L}_1 = G_{-1} \oplus G_1 \oplus \cdots. \quad (2.4.26c)$$

ここで,

$$G_{-1} = \langle a_i (i = 1, \dots, n) \rangle, \quad (2.4.27a)$$

$$G_0 = \langle a_i^\dagger a_j - a_j^\dagger a_i (i, j = 1, \dots, n) \rangle, \quad (2.4.27b)$$

$$G_1 = \langle a_i^\dagger a_j^\dagger a_k (i, j, k = 1, \dots, n) \rangle, \quad (2.4.27c)$$

...

$$G_0 \cong \mathfrak{so}(n) \quad \mathcal{C} \quad \dim(H(n)) = 2^n - 2.$$

2.4.4 単純実 Lie 超代数

2.4.4.1 分類

Ref: Parker M: JMP21, 689(1980)

【定理 2.34 (実古典単純 Lie 超代数と複素古典単純 Lie 超代数の関係)】

実古典単純 Lie 超代数 \mathcal{L} の複素化 $\mathcal{L} \otimes \mathbb{C}$ は, 複素古典単純 Lie 超代数 \mathcal{L}' と同型であるか, またはそらの 2 個の直和である. 後者の場合, 対応する複素古典単純 Lie 超代数は実 Lie 超代数として単純である. また, この対応において, \mathcal{L} を複素 Lie 超代数 \mathcal{L}' の実型という. [Parker M 1980[322]] □

【定理 2.35 (実古典単純 Lie 超代数の分類)】 古典複素単純 Lie 超代数 \mathcal{L} の実型は, 複素 Lie 代数 \mathcal{L}_0 の実型により同型を除いて一意に定まり, 次のいずれかで与えられる:

1. $A(m|n)$ ($m > n \geq 0$) の実型

$$\mathfrak{sl}(m+1|n+1; \mathbb{R}) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R},$$

$$\mathfrak{sl}\left(\frac{m+1}{2} \middle| \frac{n+1}{2}; \mathbb{H}\right) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{su}^*(m+1) \oplus \mathfrak{su}^*(n+1) \oplus \mathbb{R}, \quad m, n : \text{奇数},$$

$$\mathfrak{su}(m+1-p, p|n+1-q, q) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{su}(m+1-p, p) \oplus \mathfrak{su}(n+1-q, q) \oplus i\mathbb{R}$$

2. $A(n|n)$ ($n \geq 1$) の実型

$$\mathfrak{sl}(n+1|n+1; \mathbb{R}) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R}),$$

$$\mathfrak{sl}\left(\frac{n+1}{2} \middle| \frac{n+1}{2}; \mathbb{H}\right) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{su}^*(n+1) \oplus \mathfrak{su}^*(n+1), \quad n : \text{奇数},$$

$$\mathfrak{su}(n+1-p, p|n+1-p, p) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{su}(n+1-p, p) \oplus \mathfrak{su}(n+1-p, p),$$

$$H(4; n; \mathbb{R}) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C}).$$

3. $B(m|n)$ ($m \geq 0, n \geq 1$) の実型

$$\mathfrak{osp}(2m+1-p, p|2n; \mathbb{R}) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{so}(2m+1-p, p) \oplus \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}).$$

4. $C(n)$ ($n \geq 2$) の実型

$$\mathfrak{osp}(2|2n-2; \mathbb{R}) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{sp}(n-1; \mathbb{R}),$$

$$\mathfrak{osp}(1|n-1-p, p; \mathbb{H}) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{so}^*(2) \oplus \mathfrak{sp}(n-1-p, p).$$

5. $D(m|n)$ ($m \geq 2, n \geq 1$) の実型

$$\text{osp}(2m-p, p|2n; \mathbb{R}) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{so}(2m-p, p) \oplus \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}),$$

$$\text{osp}(m|n-p, p; \mathbb{H}) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{so}^*(2m) \oplus \mathfrak{sp}(n-p, p).$$

6. $P(n)$ ($n \geq 2$) の実型

$$P_I(n) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{su}(n+1), \quad n : \text{odd},$$

$$P_{II}(n) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R}).$$

7. $Q(n)$ ($n \geq 2$) の実型

$$Q_I(n) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{su}(p, n+1-p),$$

$$Q_{II}(n) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{su}^*(n+1), \quad n : \text{odd},$$

$$Q_{III}(n) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R}).$$

8. $D(2|1; \alpha)$ の実型

$$D_I(2|1; \alpha) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}); \quad \alpha : \text{real},$$

$$D_{II}(2|1; \alpha) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}); \quad \alpha : \text{real},$$

$$D_{III}(2|1; \alpha) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}); \quad \alpha + \bar{\alpha} = -1.$$

9. $G(3)$ の実型

$$G_I(3) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{g}_{2,0},$$

$$G_{II}(3) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{g}_{2,2}.$$

ここで, $\mathfrak{g}_{2,0}$ は G_2 の Lie 代数のコンパクト実型 (= $\text{Aut}\mathbb{C}$), $\mathfrak{g}_{2,2}$ は非コンパクト実型.

10. $F(4)$ の実型

$$F_I(4) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}(7),$$

$$F_{II}(4) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}(3, 4),$$

$$F_{III}(4) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{so}(2, 5),$$

$$F_{IV}(4) : \mathcal{L}_0 = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{so}(1, 6).$$

[Parker M 1980[322]] _____ □

2.4.4.2 単純超対称代数

【定理 2.36 (単純超対称代数の分類)】 古典単純実 Lie 超代数 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ で, \mathcal{L}_0 が時空対称性を表す Lie 代数 $\mathfrak{so}(D, 1), \mathfrak{so}(D-1, 2), \mathfrak{so}(D, 2)$ を直和因子として含むものは次のものに限られる:

D	\mathcal{L}	\mathcal{L}_0	\mathcal{L}_1	複素型
2	$\mathfrak{su}(1, 1 p, N-p)$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{u}(p, N-p); N \neq 2$	$(2, N) + (2, \bar{N})$	$A(1 N-1)$
	$\mathfrak{sl}(2 N; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{sl}(N, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}; N \neq 2$	$(2, N) + (2, N)$	
	$\mathfrak{su}(1, 1 2)$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{su}(2)$	$(2, 2) + (2, 2)$	$A(1 1)$
	$\mathfrak{su}(1, 1 1, 1)$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{su}(1, 1)$	$(2, 2) + (2, 2)$	
	$\mathfrak{sl}(2 2; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	$(2, 2) + (2, 2)$	
	$\mathfrak{osp}(p, N-p 2; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{so}(p, N-p)$	$(2, N)$	$B/D([N/2] 1)$
	$\mathfrak{osp}(2, 1 2N; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{sp}(N; \mathbb{R})$	$(3, 2N)$	$B(1 N)$
	$\mathfrak{osp}(2 p, N-p; \mathbb{H})$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{sp}(p, N-p)$	$(2, 2, 2N)$	$D(2 N)$
	$D_I(2 1; \alpha)$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$		$D(2 1; \alpha)$
	$D_{II}(2 1; \alpha)$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{so}(4)$	$(2, 4)$	
	$D_{III}(2 1; \alpha)$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$		
	$G_I(3)$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{g}_{2,0}$	$(2, 7)$	$G(3)$
	$G_{II}(3)$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{g}_{2,2}$		
	$F_I(4)$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{so}(7)$	$(2, 8)$	$F(4)$
$F_{II}(4)$	$\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{so}(3, 4)$			
3	$H(4; 1; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(3, 1)$	$(2, 1) + (1, 2)$	$A(1 1)$
	$\mathfrak{osp}(3, 1 2N; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(3, 1) \oplus \mathfrak{sp}(N, \mathbb{R})$		$D(2 N)$
	$\mathfrak{osp}(3 p, N-p; \mathbb{H})$	$\mathfrak{so}(3, 1) \oplus \mathfrak{sp}(p, N-p)$		$D(3 N)$
	$D_{III}(2 1; \alpha)$	$\mathfrak{so}(3, 1) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	$\alpha + \bar{\alpha} = -1$	$D(2 1; \alpha)$
	$\mathfrak{osp}(2, 2 2N; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2, 2) \oplus \mathfrak{sp}(2, \mathbb{R})$		$D(2 N)$
4	$\mathfrak{osp}(4, 1 2N; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(4, 1) \oplus \mathfrak{sp}(N, \mathbb{R})$		$B(2 N)$
	$\mathfrak{osp}(1 1, 1; \mathbb{H})$	$\mathfrak{so}(4, 1) \oplus \mathfrak{so}(1, 1)$	$4 + \bar{4}$	$C(3)$
	$\mathfrak{osp}(N 1, 1; \mathbb{H})$	$\mathfrak{so}(4, 1) \oplus \mathfrak{so}^*(2N); N \geq 2$		$D(N 2)$
	$\mathfrak{osp}(p, N-p 4; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(3, 2) \oplus \mathfrak{so}(p, N-p); N \geq 1$	$(4, N)$	$B/D([N/2] 2)$
	$\mathfrak{osp}(3, 2 2N; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(3, 2) \oplus \mathfrak{sp}(N, \mathbb{R})$		$B(2 N)$
	$\mathfrak{osp}(2 4; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(3, 2) \oplus \mathfrak{so}(2)$		$C(5)$

D	\mathcal{L}	\mathcal{L}_0	\mathcal{L}_1	複素型
5	$\mathfrak{sl}(2 N; \mathbb{H})$ $\mathfrak{sl}(2 2; \mathbb{H})$ $\mathfrak{osp}(5, 1 2N; \mathbb{R})$ $Q_{II}(3)$ $\mathfrak{su}(2, 2 p, N-p)$ $\mathfrak{su}(2, 2 p, 4-p)$ $\mathfrak{sp}(4, 2 2N; \mathbb{R})$ $Q_I(3)$	$\mathfrak{so}(5, 1) \oplus \mathfrak{su}^*(2N) \oplus \mathfrak{u}(1)$ $\mathfrak{so}(5, 1) \oplus \mathfrak{so}(5, 1)$ $\mathfrak{so}(5, 1) \oplus \mathfrak{sp}(N, \mathbb{R})$ $\mathfrak{so}(5, 1)$ $\mathfrak{so}(4, 2) \oplus \mathfrak{u}(p, N-p); N \neq 4$ $\mathfrak{so}(4, 2) \oplus \mathfrak{su}(p, 4-p)$ $\mathfrak{so}(4, 2) \oplus \mathfrak{sp}(N, \mathbb{R})$ $\mathfrak{so}(4, 2)$	$N \neq 2$ 15_{adj} $(4, N) + (\bar{4}, \bar{N})$ $(4, 4) + (\bar{4}, \bar{4})$ 15_{ad}	$A(3 2N-1)$ $A(3 3)$ $D(3 N)$ $Q(3)$ $A(3 N-1)$ $A(3 3)$ $D(3, N)$ $Q(3)$
6	$\mathfrak{osp}(6, 1 2N; \mathbb{R})$ $F_{IV}(4)$ $\mathfrak{osp}(5, 2 2N; \mathbb{R})$ $F_{III}(4)$	$\mathfrak{so}(6, 1) \oplus \mathfrak{sp}(N, \mathbb{R})$ $\mathfrak{so}(6, 1) \oplus \mathfrak{su}(2)$ $\mathfrak{so}(5, 2) \oplus \mathfrak{sp}(N, \mathbb{R})$ $\mathfrak{so}(5, 2) \oplus \mathfrak{su}(2)$	 $(8, 2)$ $(8, 2)$	$B(3 N)$ $F(4)$ $B(3 N)$ $F(4)$
7	$\mathfrak{osp}(7, 1 2N; \mathbb{R})$ $\mathfrak{osp}(4 p, N-p; \mathbb{H})$ $\mathfrak{osp}(6, 2 2N; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(7, 1) \oplus \mathfrak{sp}(N, \mathbb{R})$ $\mathfrak{so}(6, 2) \oplus \mathfrak{sp}(p, N-p)$ $\mathfrak{so}(6, 2) \oplus \mathfrak{sp}(N, \mathbb{R})$	 $(8, 2N)$	$D(4 N)$ $D(4 N)$
$2m$	$\mathfrak{osp}(2m, 1 2n; \mathbb{R})$ $\mathfrak{osp}(2m-1, 2 2n; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2m, 1) \oplus \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ $\mathfrak{so}(2m-1, 2) \oplus \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$		$B(m n)$ $B(m n)$
$2m-1$	$\mathfrak{osp}(2m-1, 1 2n; \mathbb{R})$ $\mathfrak{osp}(2m-2, 2 2n; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2m-1, 1) \oplus \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ $\mathfrak{so}(2m-2, 2) \oplus \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$		$D(m n)$ $D(m n)$

□

2.5 超空間

Books

- Galperin AS, Ivanov EA, Ogievetsky VI, Sokatchev ES: *Harmonic Superspace* (Cambridge Univ. Press, 2001)
- Buchbinder IL, Kuzenko SM: *Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity* (IOP Pub., 1995)
- West PC: *Introduction to Supersymmetry and Supergravity* (World Scientific, 1990)
- Gates SJ, Grisaru MT, Roček M, Siegel W: *Superspace* (Benjamin/Cummings, 1983)
- Wess J, Bagger J: *Supersymmetry and Supergravity* (Princeton Univ. Press, 1983)

Reviews

- Fayet P: Supersymmetric theories of particles and interactions, *Phys. Scr.* **T 15**, 46–60 (1987).
- Sohnius MF: Introducing supersymmetry, *Phys. Rep.* **128**, 39-204 (1985).
- Nilles H-P: Supersymmetry, supergravity and particle physics, *Phys. Rep.* **110**, 1-162 (1984).
- Ferrara S: Supersymmetry and fundamental particle interactions, *Phys. Rep.* **105**, 5–19 (1984).
- Fayet P: Supersymmetric theories of particles and interactions, *Phys. Rep.* **105**, 21–51 (1984).
- van Nieuwenhuizen P: Supergravity, *Phys. Rep.* **68**, 189–398 (1981).
- Fayet P, Ferrara S: Supersymmetry, *Phys. Rep.* **32**, 249–334 (1977).
- Ogievetsky VI, Mezincescu L: Symmetries between bosons and fermions and superfields, *Usp. Fiz. Nauk* **117**, 637–683 (1975).

2.5.1 平坦な超空間

2.5.1.1 超空間

L 次元複素線形空間 \mathbb{V} の外積代数 $\bigwedge \mathbb{V} = \mathbb{C}B$ を偶元と奇元に直和分解する：

$$\mathbb{C}B = \mathbb{C}B_0 + \mathbb{C}B_1. \quad (2.5.1)$$

次に、 \mathbb{V} の複素共役 $v \rightarrow v^*$ を定義し、それから誘導され、性質

$$(AB)^* = (-1)^{\hat{A}\hat{B}} B^* A^* \quad (2.5.2)$$

をもつ自然な $\mathbb{C}B$ の $*$ 反線形作用素を用いて、 $\mathbb{C}B$ の実部分 $\mathbb{C}B_r$ を

$$\mathbb{C}B_r = \{z \in \mathbb{C}B \mid z^* = z\} \quad (2.5.3)$$

により定義する。このとき、 $\mathbb{C}B_r$ も偶元と奇元の線形直和となる：

$$\mathbb{C}B_r = \mathbb{C}B_{r0} + \mathbb{C}B_{r1}. \quad (2.5.4)$$

ただし、 $\mathbb{C}B_{r0}$ は $\mathbb{C}B$ の実部分代数となるが、 $\mathbb{C}B_r$ は部分代数とならない。

$\mathbb{C}B_r$ を用いて、平坦な D 次元時空上の超空間 (superspace) $\mathcal{S} = \mathbb{C}B_r^{D,N}$ を

$$\mathbb{C}B_r^{D,N} = \overbrace{\mathbb{C}B_{r0} \times \cdots \times \mathbb{C}B_{r0}}^D \times \overbrace{\mathbb{C}B_{r1} \times \cdots \times \mathbb{C}B_{r1}}^N \quad (2.5.5)$$

により定義し、その点を

$$(Z^M) = (X^\mu, \Theta^\alpha) \quad (2.5.6)$$

で表す。定義より、

$$Z^{M*} = Z^M; \quad X^{\mu*} = X^\mu, \quad \Theta^{\alpha*} = \Theta^\alpha \quad (2.5.7)$$

が成り立つ。

ここで、 D 次元時空に対して

$$\mu = 0, 1, \dots, D-1, \quad (2.5.8a)$$

$$\alpha = 1, \dots, N. \quad (2.5.8b)$$

また, $N = N(D)$ は D 次元時空におけるスピノール表現の最小実次元で

$$N(D) = \begin{cases} 1 & D = 2, \\ 2 & D = 3, \\ 4 & D = 4, \\ 8 & D = 5, 6, \\ 16 & D = 7, 8, 9, 10, \\ 32 & D = 11, \\ 64 & D = 12. \end{cases} \quad (2.5.9)$$

これは, $D \neq 5, 6, 7$ については Majorana 表示 ($D = 2, 10$ では Majorana-Weyl 表示に), $D = 5, 6, 7$ では複素表現を実表現とみなしたもの ($D = 6$ の時にはさらに Weyl 射影が必要) に対応する. これらを以下単に実表現, 対応する超空間の座標系を実座標系と呼ぶ. Γ 行列は実表現では

$$\Gamma^\mu : \begin{cases} \text{実} & D \neq 8, 9 \\ \text{純虚} & D = 8, 9 \end{cases} \quad (2.5.10)$$

である. ただし, $D = 2, 10$ については Γ^μ を純虚に取ることも可能だが, Γ は常に実行列となる. もちろん, $\Gamma^{\mu\nu}$ は常に実行列.

さらに, $X \in \mathbb{C}B_{r_0}$ に対して, そのスカラー成分を $(X)_0$ と表すと, 超空間から D 次元時空への自然な射影が定義される:

$$\pi : \mathbb{C}B_r^{D,N} \ni (X^\mu, \Theta^\alpha) \mapsto (x^\mu = (X^\mu)_0) \in E^{D-1,1}. \quad (2.5.11)$$

2.5.1.2 超場

超空間 \mathcal{S} 上の $\mathbb{C}B$ に値をとる関数 $\mathcal{F}(Z) = \mathcal{F}(X, \Theta)$ を超場 (superfield) という. 超場は

$$\mathcal{F} = F_0(X) + F_\alpha(X)\Theta^\alpha + F_{\alpha_1\alpha_2}(X)\Theta^{\alpha_1}\Theta^{\alpha_2} + \cdots + F_{\alpha_1\cdots\alpha_N}(X)\Theta^{\alpha_1}\cdots\Theta^{\alpha_N} \quad (2.5.12)$$

と展開され, $\mathbb{E}^{D-1,1}$ 上の反対称なスピノール添え字をもつ関数列

$$F_0(x), F_\alpha(x), \cdots, F_{\alpha_1\cdots\alpha_N}(x) \quad (2.5.13)$$

を定める. 逆に,

$$X = \sum_M X_M \mathcal{E}_M \Rightarrow F(X) = \sum_J \frac{1}{J!} D_J F(x) (X - x)^J \quad (J = (j_0, \cdots, j_{D-1})) \quad (2.5.14)$$

より, この関数列により \mathcal{F} は完全に定まる:

$$\mathcal{F}(Z) \Leftrightarrow F_0(x), F_\alpha(x), \dots, F_{\alpha_1 \dots \alpha_N}(x). \quad (2.5.15)$$

2.5.1.3 Lorentz 変換

時空の Poincare 変換

$$x' = \Lambda x + a \quad (2.5.16)$$

に対応して, 超空間 \mathcal{S} における変換を

$$X' = \Lambda X + a, \quad \Theta'^\alpha = S(\Lambda^{-1})^\alpha_\beta \Theta^\beta \quad (2.5.17)$$

により定義する. このとき,

$$\mathcal{F}'(Z') = \mathcal{F}(Z) \quad (2.5.18)$$

により定義されるスカラ型超場の変換 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ は, 各成分場 $F_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ を用いて

$$F'_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(\Lambda x + a) = F_{\beta_1 \dots \beta_p}(x) S(\Lambda^{-1})^{\beta_1}_{\alpha_1} \dots S(\Lambda^{-1})^{\beta_p}_{\alpha_p} \quad (2.5.19)$$

と表される.

2.5.1.4 Majorana 型 Grassmann 座標系

スピノールの Majorana 表示から一般の表示への変換行列を $T(T^\dagger T = 1)$ とする ($D \neq 5, 6, 7$). このとき,

$$\Theta^\alpha = T^\alpha_\beta (\Theta^\beta)_{\text{real}}, \quad S(\Lambda) = T S(\Lambda)_{\text{real}} T^{-1} \quad (2.5.20)$$

と定義すると,

$$\mathbb{C}B^{D,N} = \overbrace{\mathbb{C}B_0 \times \dots \times \mathbb{C}B_0}^D \times \overbrace{\mathbb{C}B_1 \times \dots \times \mathbb{C}B_1}^N \quad (2.5.21)$$

として, Θ^α が実座標から一般の Majorana スピノール型座標

$$(Z^M) = (X^\mu, \Theta^\alpha) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}B^{D,N} \quad (2.5.22)$$

に一般化される. このとき,

$$B = T^* T^{-1}; B^* B = 1 \quad (2.5.23)$$

として, Majorana 条件は

$$\Theta^{\alpha*} = B^\alpha_\beta \Theta^\beta \quad (2.5.24)$$

と表される. B 行列は次の一般的性質をもつ:

$$B\Gamma^\mu B^{-1} = \begin{cases} \Gamma^{\mu*} & (D = 2, 3, 4, 10, 11), \\ -\Gamma^{\mu*} & (D = 8, 9) \end{cases}, \quad (2.5.25a)$$

$${}^T B = B \quad \text{if } \Gamma^\dagger_\mu = \Gamma^\mu. \quad (2.5.25b)$$

例えば, 4次元時空の場合, この座標系でスカラ型超場は

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & a(X) + \bar{\Theta}\chi(X) + \bar{\Theta} (b(X) + c(X)\gamma_{(4)} + v_\mu(X)\gamma^\mu\gamma_{(4)}) \Theta \\ & + (\bar{\Theta}\Theta)\bar{\Theta}\psi(X) + (\bar{\Theta}\Theta)^2 d(X) \end{aligned} \quad (2.5.26)$$

と表される. 特に, これは, Weyl 表示

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta \\ \sigma_2\theta^* \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \sigma_2\chi_2^* \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \sigma_2\psi_2^* \end{pmatrix} \quad (2.5.27)$$

では

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & a + \theta\epsilon\chi_1 + \theta^*\epsilon\chi_2^* \\ & + \theta\epsilon\theta(b+c) + \theta^*\epsilon\theta^*(b-c) - 2\theta^*\sigma^\mu\theta v_\mu \\ & + (\theta^*\epsilon\theta^*)\theta\epsilon\psi_1 + (\theta\epsilon\theta)\theta^*\epsilon\psi_2^* + 2(\theta^*\epsilon\theta^*)(\theta\epsilon\theta)d \end{aligned} \quad (2.5.28)$$

となる.

2.5.1.5 超対称変換

超空間上のベクトル場

$$Q_\alpha = \partial_\alpha + G^\mu_{\alpha\beta} \Theta^\beta \partial_\mu \quad (2.5.29)$$

を考え, これが Lorentz 変換に対して (共変) スピノールとして振る舞うことを要請すると,

$$G^\mu_{\alpha\beta} = -ia(C\Gamma^\mu)_{\alpha\beta} \quad (2.5.30)$$

となる. ここで C は荷電共役変換行列である. また, このとき,

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = -2ia(C\Gamma^\mu)_{\alpha\beta} \partial_\mu \quad (2.5.31)$$

が成り立つ。これは

$$P_\mu = -i\partial_\mu \quad (2.5.32)$$

を用いて,

$$Q_\alpha = \partial_\alpha + a(C\Gamma^\mu\Theta)_\alpha P_\mu, \quad (2.5.33)$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2a(C\Gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu \quad (2.5.34)$$

と表される.

ここで, この変換が $\mathbb{C}B_r$ に接する条件, すなわち座標の変換

$$\delta Z^M : \quad \delta X^\mu = -ia(\Xi C\Gamma^\mu\Theta), \quad \delta\Theta^\alpha = \Xi^\alpha \quad (2.5.35)$$

が Majorana 条件

$$\delta X^{\mu*} = \delta X^\mu, \quad \delta\Theta^{\alpha*} = B^\alpha{}_\beta\Theta^\beta \quad (2.5.36)$$

を満たすことを要求すると,

$$\Xi^{\alpha*} = B^\alpha{}_\beta\Xi^\beta, \quad (2.5.37a)$$

$$(\delta X^\mu)^* = ia^*(\Theta^*(C\Gamma^\mu)^*\Xi^*) = -ia^*(\Xi C\Gamma^\mu\Theta) \quad (2.5.37b)$$

より,

$$a^* = a \quad (2.5.38)$$

となる.

このとき, $(\partial_\alpha)^\dagger = \partial_{\alpha^*}$ (後述) より,

$$\begin{aligned} Q_\alpha^\dagger &= \partial_{\alpha^*} + a^*(C\Gamma^\mu\Theta)^* P_\mu \\ &= (B^\dagger)_\alpha{}^\beta (\partial_\beta + a(C\Gamma^\mu\Theta)_\beta P_\mu) \\ &= (B^\dagger)_\alpha{}^\beta Q_\beta \end{aligned} \quad (2.5.39)$$

が成り立つ. 特に, 実表現では, $B = 1$ で $C\Gamma^\mu$ は実対称行列, $C\Gamma^0 = -1$ となるので, a は正の実数でなければならないことが導かれる.

4次元の Weyl 表示では,

$$\gamma^0 = -i\sigma_1 \otimes 1, \quad \gamma^j = -\sigma_2 \otimes \sigma^j, \quad (2.5.40a)$$

$$B = i\sigma_2 \otimes \sigma_2, \quad C = B\gamma^0 = -i\sigma_3 \otimes \sigma_2, \quad (2.5.40b)$$

$$C\gamma^0 = -B, \quad C\gamma^j = \sigma_1 \otimes \sigma_2\sigma^j \quad (2.5.40c)$$

より, 2成分複素 Grassmann 座標 θ^α および超対称変換の生成作用素 q_α を

$$(\Theta^\alpha) = (\theta^\alpha, (\sigma_2 \bar{\theta})_{\dot{\alpha}}), \quad (2.5.41a)$$

$$(Q_\alpha) = (q_\alpha, (\sigma_2 \bar{q})^{\dot{\alpha}}) \quad (2.5.41b)$$

により, 4成分 Majorana 型表示に埋め込むと,

$$q_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + ia(\sigma^\mu \bar{\theta})_\alpha \partial_\mu, \quad (2.5.42a)$$

$$\bar{q}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial \theta^{\dot{\alpha}}} - ia(\sigma^\mu \theta)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu. \quad (2.5.42b)$$

を得る. ただし,

$$(q_\alpha)^\dagger = -\bar{q}_{\dot{\alpha}} \quad (2.5.43)$$

に注意.

2.5.1.6 $(\partial_\alpha)^\dagger$ について

一般に, Ξ^α を $\mathbb{C}B_1^N$ の元, \mathcal{F} を作用素と見なしたスカラ型超場として,

$$[\Xi^\alpha \partial_\alpha, \mathcal{F}]^\dagger = -[(\Xi^\alpha \partial_\alpha)^\dagger, \mathcal{F}^*] = [((\Xi^\alpha)^*(\partial_\alpha)^\dagger), \mathcal{F}^*] \quad (2.5.44)$$

を要求すると,

$$(\partial_\alpha)^\dagger \mathcal{F}^* = -(\partial_\alpha \mathcal{F})^* \quad (2.5.45)$$

を得る. 特に, $\mathcal{F} = A\Theta^\alpha B$ ($(-1)^{\hat{A}} = -(-1)^{\hat{B}}$) の形の超場に対して,

$$(\partial_\alpha)^\dagger \Theta^{\beta*} = \delta_\alpha^\beta. \quad (2.5.46)$$

よって,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \Theta^\alpha}\right)^\dagger = \frac{\partial}{\partial \Theta^{\alpha*}} \quad (2.5.47)$$

を得る.

2.5.2 超多様体

2.5.2.1 定義

位相空間 \mathcal{M} が開被覆 $\{U_I\}$ と各開集合 U_I から超空間 $\mathcal{S} = \mathbb{C}B_r^{D,N}$ の中への同相写像 $\phi_I = (Z_I^M) = (X_I^\mu, \Theta_I^\alpha) : U_I \rightarrow \mathcal{S}$ をもち, $\mathcal{U}_{IJ} =$

$\phi_I(U_I \cap U_J) (\neq \emptyset)$ における写像

$$\phi_{J \circ \phi_I^{-1}} = (Z_J^M(Z_I)) : \mathcal{U}_{IJ} \rightarrow \mathbb{C}B_r^{D,N}, \quad (2.5.48)$$

の成分 $Z_J^M(Z_I)$ が滑らかな超場となるとき, \mathcal{M} を超多様体 (supermanifold), ϕ_I を実局所座標系という. また, 超多様体 \mathcal{M} 上の局所座標系 $(\phi, U) : \phi = (Z^M)$ は, $\phi \circ \phi_I^{-1}$ が $\phi(U)$ の滑らかな (局所) Majorana 型座標系となるとき, Majorana 型局所座標系という.

2.5.2.2 超テンソル

超ベクトル場 超多様体 \mathcal{M} 上の点 $Z = (Z^M)$ において, その近傍で定義された超場に対する微分作用素 \mathcal{D} が, 任意の超場 \mathcal{F}, \mathcal{G} に対して

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}\mathcal{G}) = (\mathcal{D}\mathcal{F})\mathcal{G}(Z) + \mathcal{F}(Z)(\mathcal{D}\mathcal{G}) \quad (2.5.49)$$

を満たすとき, Z における偶超接ベクトル,

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}\mathcal{G}) = (\mathcal{D}\mathcal{F})\mathcal{G}(Z) + (-1)^{\hat{\mathcal{F}}} \mathcal{F}(Z)(\mathcal{D}\mathcal{G}) \quad (2.5.50)$$

を満たすとき, Z における奇超接ベクトルという. Z における偶超接ベクトル全体および奇超接ベクトル全体のなす線形空間の直和 $\mathcal{T}_Z\mathcal{M}$ は, \mathbb{Z}_2 次数付き $\mathbb{C}B$ 加群となる. この加群を超接空間, その元を一般に超接ベクトルという.

各座標近傍 $(\phi = (Z^M), U)$ において, U 上の超場に対する微分作用素 ∂_M が

$$\partial_M Z^N = \delta_M^N + (-1)^{\hat{M}\hat{N}} Z^N \partial_M \quad (2.5.51)$$

により定義され, 各点で超接空間 $\mathcal{T}_Z\mathcal{M}$ の基底となる. すなわち, U 上の超ベクトル場 \mathcal{V} は

$$\mathcal{V} = V^M \partial_M = V^\mu \partial_\mu + V^\alpha \partial_\alpha \quad (2.5.52)$$

と表され, V が偶 (奇) 超ベクトルのとき, V^μ は偶 (奇) 超場, V^α は奇 (偶) 超場となる.

微分作用素 \mathcal{D} に対して, その形式共役作用素 \mathcal{D}^\dagger を, 任意の超場 \mathcal{F} に対して

$$(\mathcal{D}\mathcal{F})^\dagger = -\mathcal{D}^\dagger \mathcal{F}^\dagger \quad (2.5.53)$$

が成り立つという要請により定める．例えば，Majorana 型局所座標系 $(Z^M) = (X^\mu, \Theta^\alpha)$ に対して，

$$(\partial_\mu)^\dagger = -\partial_\mu, \quad (\partial_\alpha)^\dagger = (B^\dagger)_\alpha{}^\beta \partial_\beta \quad (2.5.54)$$

となる．特に，超ベクトル（場） ψ は，微分作用素と見なしたとき

$$\psi^\dagger = -(-1)^{\hat{Y}} \psi \quad (2.5.55)$$

が成り立つなら，**実超ベクトル（場）** という．

超微分形式 p 次超微分形式 $\omega \in \mathcal{A}^p(\mathcal{M})$ およびその外微分を次のように定義する：

$$\omega = \frac{(-1)^{p(p-1)/2}}{p!} dZ^{M_p} \wedge \cdots \wedge dZ^{M_1} \omega_{M_1 \cdots M_p}, \quad (2.5.56)$$

$$Z^M dZ^N = (-1)^{\hat{M}\hat{N}} dZ^N Z^M, \quad (2.5.57)$$

$$dZ^M \wedge dZ^N = -(-1)^{\hat{M}\hat{N}} dZ^N dZ^M, \quad (2.5.58)$$

$$d\omega := dZ^M \wedge \partial_M \omega;$$

$$(d\omega)_{M_1 \cdots M_{p+1}} = (p+1) \partial_{[M_1} \omega_{M_2 \cdots M_{p+1}]}, \quad (2.5.59)$$

$$d(\omega_p \wedge \chi_q) = d\omega_p \wedge \chi_q + (-1)^p \omega_p \wedge d\chi_q. \quad (2.5.60)$$

$\mathcal{A}^p(\mathcal{M})$ は \mathbb{Z}_2 次数付き CB 加群となる．特に， $\mathcal{A}^1(\mathcal{M})$ は各点 Z で $\mathcal{T}_Z \mathcal{M}$ の双対 CB 加群 $\mathcal{T}_Z^* \mathcal{M}$ となる．

超微分形式に対する内積作用素 $I_V : \mathcal{A}^p \rightarrow \mathcal{A}^{p-1}$ ($V \in \mathcal{T} \mathcal{M}$) を

$$I_V(\omega_p \wedge \chi_q) = (I_V \omega_p) \wedge \chi_q + (-1)^p (-1)^{\hat{V}\hat{\omega}} \omega_p \wedge I_V \chi_q \quad (2.5.61a)$$

$$I_V d\mathcal{F} = V \mathcal{F}, \quad (2.5.61b)$$

により定義する．このとき，

$$I_{\partial_{M_1}} \cdots I_{\partial_{M_p}} \omega = (-1)^{p(p-1)/2} \omega_{M_p \cdots M_1} \quad (2.5.62)$$

となる．

超微分形式に対する共役作用素 \dagger を

$$(\alpha_p \wedge \beta_q)^\dagger = (-1)^{pq} \beta_q^\dagger \wedge \alpha_p^\dagger, \quad (2.5.63a)$$

$$(d\mathcal{F})^\dagger = d(\mathcal{F}^\dagger) \quad (2.5.63b)$$

により定義する．このとき，

$$\omega^\dagger = \omega \quad (2.5.64)$$

となる超微分形式は**超実微分形式**という．

2.5.2.3 超接続

超フレーム場 超接空間 $\mathcal{T}\mathcal{M}$ および超余接空間 $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ の基底場を

$$E^A = dZ^M E_M^A(Z), \quad E_A = E_A^M(Z) \partial_M, \quad (2.5.65)$$

$$E_M^A E_A^N = \delta_M^N, \quad E_A^M E_M^B = \delta_A^B. \quad (2.5.66)$$

により導入する.

超接続形式 各超フレーム場 E^A に対して、超接続形式 Ω_A^B を対応させる:

$$E^A \rightarrow \Omega_A^B = dZ^M \Omega_{MA}^B; \quad \Omega_{AB} = -(-1)^{\hat{A}\hat{B}} \Omega_{BA}. \quad (2.5.67)$$

超フレーム場の局所回転

$$\delta_L E^A = E^B L_B^A(Z) \quad (2.5.68)$$

に対して、超接続形式は

$$\delta_L \Omega_M = [\Omega_M, L] + dL \quad (2.5.69)$$

と変換する. ただし, L_A^B は次の 2 種類の成分

$$L_m^n, \quad L_a^b \quad (2.5.70)$$

以外はゼロで, 両者は $\text{Spin}(D-1, 1)$ の Lie 代数のベクトルおよびスピノール表現に属する. したがって,

$$L_{mn} = -L_{nm}. \quad (2.5.71)$$

また, スピノールの変換行列 $S = (S^a_b)$ と荷電共役変換行列 $C = (C_{ab})$ の間に

$${}^T S C S = C \quad (2.5.72)$$

の関係があることに注意すると, $D \neq 5, 6, 7$ で

$$L_a^c C_{cb} + C_{ac} L_b^c = 0 \quad (2.5.73)$$

が成り立つ.

さらに, $L = (L_a^b)$ として,

$$[\Gamma^m, {}^T L] = \Gamma^n L_n^m. \quad (2.5.74)$$

対応して, Ω_A^B も

$$\Omega_a^b, \quad \Omega_\alpha^\beta \quad (2.5.75)$$

以外の成分はゼロとなり, $\Omega_M = (\Omega_{Ma}^b)$ として次の関係式が成り立つ:

$$[\Gamma^m, {}^T(\Omega_M)] = \Gamma^n \Omega_{Mn}^m. \quad (2.5.76)$$

超共変微分 超1形式 ω に対して

$$\mathcal{D}_M \omega = (-1)^{\hat{M}\hat{A}} E^A \mathcal{D}_M \omega_A; \quad (2.5.77)$$

$$\mathcal{D}_M \omega_A = \partial_M \omega_A + \Omega_{MA}{}^B \omega_B \quad (2.5.78)$$

と定義すると，超コフレーム場の共変微分は

$$\mathcal{D}_M E^A = (-1)^{\hat{M}\hat{B}} E^B \Omega_{MB}{}^A \quad (2.5.79)$$

となり，コフレームの無限小変換 δ_L に対して

$$\delta_L(\mathcal{D}_M E^A) = (\mathcal{D}_M E^B) L_B{}^A. \quad (2.5.80)$$

また，超ベクトル場 $V = V^A E_A$ に対して

$$\mathcal{D}_M V = (\mathcal{D}_M V^A) E_A; \quad (2.5.81)$$

$$\mathcal{D}_M V^A = \partial_M V^A - (-1)^{\hat{M}\hat{B}} V^B \Omega_{MB}{}^A. \quad (2.5.82)$$

超フレーム場の共変微分は

$$\mathcal{D}_M E_A = -\Omega_{MA}{}^B E_B \quad (2.5.83)$$

超共変外微分 超テンソルに値を取る p -形式 $\mathcal{X}^{A\dots}$ の共変外微分 $\mathcal{D}\mathcal{X}^{A\dots}$ (超テンソルに値を取る $(p+1)$ -形式が $\mathcal{Y}^{A\dots}$)，任意の超テンソル $\omega_{A\dots}$ に対して

$$\mathcal{D}\omega_{A\dots} = dZ^M \mathcal{D}_M \omega_{A\dots}, \quad (2.5.84a)$$

$$d(\omega_{A\dots} \mathcal{X}^{A\dots}) = (\mathcal{D}\omega_{A\dots}) \wedge \mathcal{X}^{A\dots} + \omega_{A\dots} \mathcal{D}\mathcal{X}^{A\dots} \quad (2.5.84b)$$

が成り立つという要請に一意的に定まり，

$$\mathcal{D}\mathcal{X}^A = d\mathcal{X}^A + (-1)^{p+1} \mathcal{X}^B \wedge \Omega_B{}^A, \quad (2.5.85a)$$

$$\mathcal{D}\mathcal{Y}^{AB} = d\mathcal{Y}^{AB} + (-1)^{p+1} \left((-1)^{\hat{B}(\hat{C}+\hat{A})} \mathcal{Y}^{CB} \wedge \Omega_C{}^A + \mathcal{Y}^{AC} \wedge \Omega_C{}^B \right). \quad (2.5.85b)$$

超捻れ形式と超曲率形式 超捻れ形式 \mathcal{T}^A と超曲率形式 $\mathcal{R}_A{}^B$ を

$$\mathcal{T}^A = \mathcal{D}E^A \equiv dE^A + E^B \wedge \Omega_B{}^A, \quad (2.5.86a)$$

$$\mathcal{R}_A{}^B = d\Omega_A{}^B + \Omega_A{}^C \wedge \Omega_C{}^B \quad (2.5.86b)$$

により定義する．成分で書くと，

$$\mathcal{T}_{MN}{}^A = 2\hat{\partial}_{[M}E_{N]}{}^A - 2\Omega_{[MN]}{}^A, \quad (2.5.87a)$$

$$\mathcal{R}_{MNA}{}^B = 2\hat{\partial}_{[M}\Omega_{N]}{}^B - 2(-1)^{\hat{M}(\hat{N}+\hat{A}+\hat{C})}\Omega_{[N|A]}{}^C\Omega_{M]}{}^B. \quad (2.5.87b)$$

これらに対して次の Bianchi 恒等式が成り立つ：

$$\mathcal{D}\mathcal{T}^A \equiv d\mathcal{T}^A - \mathcal{T}^B \wedge \Omega_B{}^A = -E^B \wedge \mathcal{R}_B{}^A, \quad (2.5.88a)$$

$$\mathcal{D}\mathcal{R}_A{}^B = 0. \quad (2.5.88b)$$

また， $\mathcal{R}_{MNA}{}^B$ の成分は関係式

$$\mathcal{R}_{NMmn} = -\mathcal{R}_{NMnm}, \quad (2.5.89a)$$

$$\mathcal{R}_{NMa}{}^c C_{cb} = -\mathcal{R}_{NMb}{}^c C_{ac}, \quad (2.5.89b)$$

$$(\Gamma^m)_{c}^a \mathcal{R}_{MNb}{}^c - \mathcal{R}_{MNC}{}^a (\Gamma^m)^c_b = (\Gamma^n)^a_b \mathcal{R}_{MNn}{}^m \quad (2.5.89c)$$

を満たし，これ以外の成分はゼロとなる．

平坦な場合 平坦な超空間に対しては，超ベクトル場と超フレーム場の基底

$$E_m = \hat{\partial}_m, \quad E_a = \hat{\partial}_a - ia(C\Gamma^\mu\Theta)_a \hat{\partial}_\mu, \quad (2.5.90a)$$

$$E^m = dX^m + ia(d\Theta C\Gamma^\mu\Theta), \quad E^a = d\Theta^a \quad (2.5.90b)$$

が平行，すわなち対応する超接続がゼロとおく．このとき， $\Omega_A{}^B = 0$ より

$$\mathcal{T}^m = dE^m = -ia(C\Gamma^m)_{\alpha\beta} d\Theta^\alpha \wedge d\Theta^\beta, \quad \mathcal{T}^a = 0, \quad (2.5.91a)$$

$$\mathcal{R}_A{}^B = 0 \quad (2.5.91b)$$

となる．

超 Riemann 接続 超捻れテンソルに対して，次の成分以外はゼロであることを要求する：

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^m = -2ia(C\Gamma^m)_{\alpha\beta}, \quad (2.5.92a)$$

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}{}^a, \quad \mathcal{T}_{\mu\alpha}{}^a \quad (2.5.92b)$$

2.5.2.4 超重力場

超ゲージ変換 超ゲージ変換を超並進 $\xi^A = \xi^M E_M^A$ とそれから決まる無限小局所超 Lorentz 変換 L_A^B の組

$$\delta_\xi = (\xi^A = \xi^M E_M^A, L_A^B = \xi^M \Omega_{MA}^B) \quad (2.5.93)$$

により定める. 例えば, 超スカラ場 Φ , 超ベクトル場 V^A に対する超ゲージ変換は

$$\delta_\xi \Phi = -\xi^M \partial_M \Phi = -\xi^A \mathcal{D}_A \Phi, \quad (2.5.94a)$$

$$\delta_\xi V^A = -\xi^M \mathcal{D}_M V^A. \quad (2.5.94b)$$

このゲージ変換の交換関係は

$$[\delta_\xi, \delta_\eta]V^A = V^D \xi^C \eta^B \mathcal{R}_{BCD}^A - \xi^C \eta^B \mathcal{T}_{BC}^D \mathcal{D}_D V^A \quad (2.5.95)$$

超重力変換 超ゲージ変換で双対フレーム場 E^A および接続形式 Ω_A^B は次のように変換する:

$$\delta_\xi E_M^A = -\mathcal{D}_M \xi^A - \xi^N \mathcal{T}_{NM}^A, \quad (2.5.96a)$$

$$\delta_\xi \Omega_{MA}^B = -\xi^N \mathcal{R}_{NMA}^B. \quad (2.5.96b)$$

この変換を用いると, 超(双対)フレーム場の最低次成分は次の形に変換できる:

$$E_M^A|_0 = \begin{pmatrix} e_\mu^m(x) & \frac{1}{2}\psi_\mu^a(x) \\ 0 & \delta_\alpha^a \end{pmatrix}. \quad (2.5.97a)$$

$$E_A^M|_0 = \begin{pmatrix} e_m^\mu(x) & -\frac{1}{2}\psi_m^\alpha(x) \\ 0 & \delta_a^\alpha \end{pmatrix}. \quad (2.5.97b)$$

また, 局所超 Lorentz 変換を用いると, 接続形式の最低次成分は次の形に変換できる:

$$\Omega_{\mu A}^B|_0 = \omega_{\mu A}^B(x), \quad \Omega_{\alpha A}^B|_0 = |_0 = 0. \quad (2.5.98)$$

この部分ゲージ条件を保つ超ゲージ変換と局所超 Lorentz 変換の組み合わせは, 要請

$$\Xi^m|_0 = 0, \quad \Xi^a|_0 = \zeta^a(x), \quad L_{AB}|_0 = 0 \quad (2.5.99)$$

のもとで, ζ^a のみで一意的に定まり,

超重力超組

超密度場 超重力変換に対して

$$\delta\Delta = -\partial_M \left[(-1)^{\hat{M}} \eta^M \Delta \right] \quad (2.5.100)$$

と変換する超場 Δ を超密度場とよぶ. Δ を超密度場, Φ をスカラ超場とすると

$$\delta(\Delta\Phi) = -\partial_M \left[(-1)^{\hat{M}} \eta^M \Delta\Phi \right] \quad (2.5.101)$$

が成り立つ. 例えば,

$$\mathcal{E}|_0 = \frac{1}{2} \det e_\mu^m \quad (2.5.102)$$

となるカイラル密度 \mathcal{E} は

$$2\mathcal{E} = e \{1 + \dots\} \quad (2.5.103)$$

3 場の量子論

Last update: 2023 年 10 月 17 日

3.1 1 粒子状態

3.1.1 正質量粒子

ポアンカレ群 \mathcal{P} の既約ユニタリ表現は、質量 m と $\text{SO}(D-1)$ の既約表現の指標 s (以下、簡単のためスピンと呼ぶ) で分類される。対応して、ポアンカレ群の状態空間 \mathcal{H} へのユニタリ表現 $\rho: \mathcal{P} \triangleright \mathcal{H}$ を既約分解して得られる各既約表現を $\rho_{m,s,n}: \mathcal{P} \triangleright \mathcal{V}_{m,s,n}$ と表す。 n は同じ (m, s) をもつ既約成分 (粒子種) を区別するラベルである。

$\mathcal{V}_{m,s,n}$ は、 $p = (E, \mathbf{p}) (E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})$ として、

$$\mathcal{V}_{m,s,n} \ni \phi = \int d^{D-1} \mathbf{p} \sum_{\sigma} \phi(p, \sigma) \Phi_{p,\sigma} \quad (3.1.1)$$

で与えられる。ここで、 $\mathcal{V}_{m,s,n}$ における内積は

$$\begin{aligned} (\phi_1, \phi_2) &= \int d^{D-1} \mathbf{p} C_p \sum_{\sigma} \bar{\phi}_1(p, \sigma) \phi_2(p, \sigma) \\ \Leftrightarrow (\Phi_{p,\sigma}, \Phi_{p',\sigma'}) &= C_p \delta_{\sigma,\sigma'} \delta^{D-1}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

により定義される。

ポアンカレ変換 $(\Lambda, a) \in \mathcal{P}$ のユニタリ表現 $U(\Lambda, a)$ は、次のように構成される。まず、並進に対しては、

$$U(1, a) \Phi_{p,\sigma} = e^{-ia \cdot p} \Phi_{p,\sigma} \quad (3.1.3)$$

となる。次に、 D 次元運動量空間における質量殻 $\Sigma_m = \{p \in \mathbb{R}^D \mid p^2 = -m^2, p^0 > 0\}$ の基点を $p_0 = (m, \mathbf{0})$ として、 Σ_m からローレンツ変換群への連続写像 $L: \Sigma_m \rightarrow \mathcal{L} \subset \mathcal{P}$ を、 $L(p)p_0 = p$ となるように選ぶ。すると、 $\mathcal{V}_{m,s,n}$ の基底ベクトル $\Phi_{p,\sigma}$ を、 $\Phi_{p_0,\sigma}$ から $L(p)$ を用いて、

$$\Phi_{p,\sigma} = N(p) U(L(p)) \Phi_{p_0,\sigma} \quad (3.1.4)$$

と定義することができる。このとき、 G_p を \mathcal{L} の $p \in \Sigma_m$ における等方群として、任意の $\Lambda \in \mathcal{L}$ に対して

$$\Lambda L(p) = L(\Lambda p) W \Leftrightarrow W = L(\Lambda p)^{-1} \Lambda L(p) \in G_{p_0} \cong \text{SO}(D-1) \quad (3.1.5)$$

により $W(\Lambda, p)$ を定義する. ここで, $N(p)$ は後ほど決める Σ_m 上の関数 ($N(p_0) = 1$) である. すると, W の $\{\Phi_{p_0, \sigma}\}$ への表現

$$U(W)\Phi_{p_0, \sigma} = \sum_{\sigma'} D_{\sigma', \sigma}^{(s)}(W)\Phi_{p_0, \sigma'} \quad (3.1.6)$$

により, $U(\Lambda)$ の $\Psi_{p, \sigma}$ への作用が

$$U(\Lambda)\Phi_{p, \sigma} = N(p)U(\Lambda)U(L(p))\Phi_{p_0, \sigma} = N(p)U(L(\Lambda p))W\Phi_{p_0, \sigma} \quad (3.1.7)$$

より, 次のように定まる:

$$U(\Lambda)\Phi_{p, \sigma} = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \sum_{\sigma'} D_{\sigma', \sigma}^{(s)}(W)\Phi_{\Lambda p, \sigma'} \quad (3.1.8)$$

この変換で $\Phi_{p, \sigma}$ の規格化条件が保たれることより, $N(p)$ が

$$N(p) = \sqrt{\frac{m}{E}C_p} \quad (3.1.9)$$

と定まる.

3.1.2 ゼロ質量粒子

質量がゼロのとき, 運動量空間 $k \in \mathbb{R}^D$ における質量殻は, 未来の光円錐 Σ_0 となる. その基準点 k_0 としては, $k_0^0 = k_0^{D-1} = \omega$, $k_0^j = 0$ ($j = 1, \dots, D-2$) を取る. このとき, little group G_{k_0} は $D-2$ 次元ユークリッド群 $\text{ISO}(D-2)$ と同型となり, $\Lambda \in G_{k_0}$ は, 光的基底 $\{l_0, k_0, e_1, \dots, e_{D-2}\}$ ($l_0 \cdot l_0 = 0, l_0 \cdot k_0 = -2, l_0 \cdot e_i = k_0 \cdot e_i = 0, e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$) に関する成分表示で,

$$\Lambda = \Lambda(R, \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2/4 & 1 & ({}^T a R)_j \\ a^i/2 & 0 & R^i_j \end{pmatrix} \quad (3.1.10)$$

$$\Lambda(R_1, \mathbf{a}_1)\Lambda(R_2, \mathbf{a}_2) = \Lambda(R_1 R_2, \mathbf{a}_1 + R_1 \mathbf{a}_2) \quad (3.1.11)$$

と表される. ここで, $\mathbf{a} = \{a^1, \dots, a^{D-2}\}$ は定数ベクトル, $R \in \text{SO}(D-2)$ である.

したがって, 既約表現は $G_{k_0} \cong \text{ISO}(D-2)$ の既約表現により分類されるが, この既約表現は, さらに, E^{D-2} の $\text{SO}(D-2)$ 軌道である球面 S^{D-3} の半径 ν と, この球面上での等方群の既約表現により表される. したがって, G_{k_0} の既約表現は

- A. $D = 2$: 自明で, 内部自由度なし.
- B. $D = 3$: 1次元表現で, ν で分類される.
- C. $\nu > 0, D \geq 4$: 無限次元. \Rightarrow 粒子の内部状態が無限次元
- D. $\nu = 0, D \geq 4$: $\text{SO}(D-2)$ の既約表現 ρ_{D-2}^s で分類される.
 - a. $D = 4$: s は任意の実数. $\rho_2^s \subset \rho_3^s$ とすると, s は整数ないし半整数.
 - b. $D \geq 5$: スピンパラメータ s は離散的な最高ウェイトベクトル.

ポアンカレ変換のユニタリ表現の構成法は $m > 0$ の場合と本質的に同じで, $k = (\omega, \mathbf{k}) (\omega = |\mathbf{k}|)$ として,

$$\mathcal{V}_{0,s,n} = \int d^{D-1} \mathbf{k} \sum_{\sigma} \phi(k, \sigma) \Phi_{k,\sigma}, \quad (3.1.12)$$

$$(\Phi_{k,\sigma}, \Phi_{k',\sigma'}) = C_k \delta_{\sigma,\sigma'} \delta^{D-1}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (3.1.13)$$

$U(\Lambda, a)$ の $\Phi_{k,\sigma}$ への作用も $m > 0$ の場合と同じ. ただし, 変換則

$$U(\Lambda) \Phi_{k,\sigma} = \frac{N(k)}{N(\Lambda k)} \sum_{\sigma'} D_{\sigma',\sigma}^{(s)}(W) \Phi_{\Lambda k, \sigma'} \quad (3.1.14)$$

において,

$$N(k) = \sqrt{\frac{k_0^0}{k^0}} C_k. \quad (3.1.15)$$

また, $D = 4$ のときは, σ の取り得る値は $\sigma = s$ のみ.

3.2 離散変換

3.2.1 P 変換

P 変換の行列 $\mathcal{P} \in \text{O}(1, D-1)$ は,

$$(\mathcal{P}x)^a = \epsilon_a x^a : \quad \epsilon_a = \begin{cases} 1 & (a = 0, \dots, n_1 - 1) \\ -1 & (a = n_1, \dots, D-1) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

により定義する. ここで, n_1 は $D - n_1$ が奇数となるように選ぶ.

\mathcal{P} に対応する状態空間のユニタリ変換 $U_P = U(\mathcal{P}, 0)$, はローレンツ変換の生成元に対して次のように作用する：

$$U_P P^a U_P^{-1} = \epsilon_a P^a, \quad (3.2.2a)$$

$$U_P J^{ab} U_P^{-1} = \epsilon^a \epsilon^b J^{ab}. \quad (3.2.2b)$$

以下, $D = 4$ の場合に限定する. このとき,

$$J_j = \epsilon_{jkl} J^{kl}, \quad K_j = J^{j0} \quad (3.2.3)$$

として,

$$U_P \mathbf{P} U_P^{-1} = -\mathbf{P}, \quad U_P H U_P^{-1} = H, \quad (3.2.4a)$$

$$U_P \mathbf{J} U_P^{-1} = \mathbf{J}, \quad U_P \mathbf{K} U_P^{-1} = -\mathbf{K} \quad (3.2.4b)$$

3.2.1.1 正質量粒子

まず, 基準運動量 $p_0 = (m, 0, 0, 0)$ に対し, $U_P J_3 = J_3 U_P$ より

$$J_3 U_P \Phi_{p_0, \sigma} = U_P J_3 \Phi_{p_0, \sigma} = \sigma U_P \Phi_{p_0, \sigma} \Rightarrow U_P \Phi_{p_0, \sigma} = \eta_\sigma \Phi_{p_0, \sigma} \quad (3.2.5)$$

つぎに, $U_P J_\pm = J_\pm U_P$ より,

$$U_P J_\pm \Phi_{p_0, \sigma} = \eta_\sigma J_\pm \Phi_{p_0, \sigma} \Rightarrow \eta_{\sigma \pm 1} = \eta_\sigma \quad (3.2.6)$$

ととなるので, η_σ は σ によらない定数 η_P となる。

ここで,

$$\hat{\mathbf{p}} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (3.2.7)$$

として,

$U(L(p))$ を

$$U(L(p)) = U(R(\hat{\mathbf{p}})) U(B(p^0/m)) U(R(\hat{\mathbf{p}}))^{-1}, \quad (3.2.8)$$

$$U(R(\hat{\mathbf{p}})) = e^{-i\phi J_3} e^{-i\theta J_2}, \quad (3.2.9)$$

$$B(\gamma) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}. \quad (3.2.10)$$

と取ると、

$$\mathcal{P}L(p)\mathcal{P}^{-1} = L(\mathcal{P}p) \quad (3.2.11)$$

および $N(\mathcal{P}p) = N(p)$ より、任意の基底ベクトル $\Phi_{p,\sigma}$ に対し、

$$U_P\Phi_{p,\sigma} = \eta_P\Phi_{\mathcal{P}p,\sigma}. \quad (3.2.12)$$

(注) 一般に、 U_P^2 は内部対称性となる。この離散的な対称性が、連続的な対称性に含まれるときには、 U_P の再定義により $\eta_P^2 = 1 \Leftrightarrow \eta_P = \pm 1$ とできる。

3.2.1.2 ゼロ質量粒子

基準運動量ベクトルを $k_0 = (\kappa, 0, 0, \kappa)$ と取ると、 $R_2(-\pi)k_0 = \mathcal{P}k_0$ なので、

$$U(R_2(-\pi))^{-1}U_P\Phi_{k_0,\sigma} = \eta_\sigma\Phi_{k_0,\sigma'}. \quad (3.2.13)$$

ここで、 $J_3U_P = U_PJ_3$ および

$$R_2(\pi) = D[1, -1, 1, -1] \Rightarrow U(R_2(-\pi))J^{12}U(R_2(-\pi))^{-1} = -J^{12} \quad (3.2.14)$$

より、

$$J_3\Phi_{k_0,\sigma'} = -\sigma\Phi_{k_0,\sigma'} \Rightarrow \sigma' = -\sigma. \quad (3.2.15)$$

一般的な運動量状態に対する U_P の作用は、

$$\begin{aligned} U_P\Phi_{k,\sigma} &= N(k)U_PU(L(k))\Phi_{k_0,\sigma} \\ &= N(k)U_PU(L(k))U_P^{-1}\eta_\sigma U(R_2(-\pi))\Phi_{k_0,-\sigma} \\ &= \eta_\sigma N(k)U(L(\mathcal{P}k))U(W)\Phi_{k_0,-\sigma}. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

ここで、

$$W \equiv U(L(\mathcal{P}k))^{-1}U_PU(L(k))U_P^{-1}U(R_2(-\pi)) \in G_{k_0}. \quad (3.2.17)$$

いま、 $U(L(k))$ を

$$U(L(k)) = U(R(\hat{\mathbf{k}}))U(B(k^0/\kappa)), \quad U(R(\hat{\mathbf{k}})) = e^{-i\phi J_3}e^{-i\theta J_2} \quad (3.2.18)$$

と取ると, $\mathcal{P}R = R\mathcal{P}$ および

$$U(R(-\hat{\mathbf{k}})) = e^{-i(\phi \pm \pi)J_3} e^{-i(\pi - \theta)J_2}, \quad (3.2.19a)$$

$$\mathcal{P}B(u)\mathcal{P}^{-1} = B(u)^{-1} \quad (3.2.19b)$$

より,

$$\begin{aligned} U(W) &= U(B(u))^{-1} e^{-i(\theta - \pi)J_2} e^{-i(-\phi \mp \pi)J_3} e^{-i\phi J_3} e^{-i\theta J_2} U(B(u))^{-1} e^{i\pi J_2} \\ &= U(B(u))^{-1} e^{-i(\theta - \pi)J_2} e^{\pm i\pi J_3} e^{-i(\theta - \pi)J_2} U(B(u)) \\ &= e^{\pm i\pi J_3}. \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

よって,

$$U(W)\Phi_{k_0, -\sigma} = e^{\mp i\sigma\pi}\Phi_{k_0, -\sigma} \quad (3.2.21)$$

以上より,

$$U_P\Phi_{k, \sigma} = \eta_\sigma e^{\mp i\pi\sigma}\Phi_{\mathcal{P}k, -\sigma}. \quad (3.2.22)$$

ただし, \mp は, $k^2 > 0$ のとき $-$, $k^2 < 0$ のとき $+$.

3.2.2 T 変換

T 変換は座標変換としては, 行列

$$\mathcal{T} \equiv D[-1, 1, \dots, 1] \quad (3.2.23)$$

で表される. 対応するユニタリ変換を U_T で表すと, ポアンカレ変換の生成演算子に対する作用は,

$$U_T i P^a U_T^{-1} = i P^b \mathcal{T}_b^a, \quad (3.2.24a)$$

$$U_T i J^{ab} U_T^{-1} = i J^{cd} \mathcal{T}_c^a \mathcal{T}_d^b \quad (3.2.24b)$$

特に, $U_T i H U_T^{-1} = -i H$ となる. これより, U_T が正エネルギー状態を正エネルギー状態に移すことを要請すると, U_T が反ユニタリ作用素となることが導かれる.

以下, $D = 4$ とする. このとき,

$$U_T \mathbf{P} U_T^{-1} = -\mathbf{P}, \quad U_T H U_T^{-1} = H, \quad U_T \mathbf{J} U_T^{-1} = -\mathbf{J}, \quad U_T \mathbf{K} U_T^{-1} = \mathbf{K}. \quad (3.2.25)$$

3.2.2.1 正質量粒子

$J_3 U_T = -U_T J_3$ より,

$$J_3 U_T \Phi_{p_0, \sigma} = -U_T J_3 \Phi_{p_0, \sigma} = -\sigma U_T \Phi_{p_0, \sigma} \quad (3.2.26)$$

よって,

$$U_T \Phi_{p_0, \sigma} = \zeta_\sigma \Phi_{p_0, -\sigma}. \quad (3.2.27)$$

さらに,

$$J_\pm U_T \Phi_{p_0, \sigma} = -U_T J_\mp \Phi_{p_0, \sigma} = -c_\mp(\sigma) U_T \Phi_{p_0, \sigma \mp 1} = -c_\mp(\sigma) \zeta_{\sigma \mp 1} \Phi_{p_0, -\sigma \pm 1} \quad (3.2.28)$$

より,

$$c_\pm(-\sigma) \zeta_\sigma = -c_\mp(\sigma) \zeta_{\sigma \mp 1} \quad (3.2.29)$$

ここで,

$$c_\pm(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{s^2 + s - \sigma^2 \mp \sigma} \quad (3.2.30)$$

より,

$$\zeta_{\sigma \pm 1} = -\zeta_\sigma \Rightarrow \zeta_\sigma = \zeta(-1)^{s-\sigma}, \quad |\zeta| = 1. \quad (3.2.31)$$

次に,

$$\begin{aligned} U_T \Phi_{p, \sigma} &= U_T U(L(p)) U_T^{-1} \zeta(-1)^{s-\sigma} \Phi_{p_0, -\sigma} \\ &= \zeta(-1)^{s-\sigma} U(L(\mathcal{P}p)) U(W) \Phi_{p_0, -\sigma}. \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

ここで,

$$W \equiv U(L(\mathcal{P}p))^{-1} U_T U(L(p)) U_T^{-1} \in G_{p_0} \quad (3.2.33)$$

この変換は,

$$U(L(p)) = e^{-i\phi J_3} e^{-i\theta J_2} U(B(\gamma)) e^{i\theta J_2} e^{i\phi J_3}, \quad (3.2.34)$$

$$e^{i\phi J_3} J_2 e^{-i\phi J_3} = -J_2, \quad (3.2.35)$$

$$e^{i\pi J_2} U_T U(B(\gamma)) e^{-i\pi J_2} = U(B(\gamma)) \quad (3.2.36)$$

を用いると, 恒等変換 $W = 1$ となることが確かめられる.

以上より,

$$U_T \Phi_{p, \sigma} = \zeta(-1)^{s-\sigma} \Phi_{\mathcal{P}p, -\sigma}. \quad (3.2.37)$$

位相因子 ζ は, $\Phi_{p,\sigma}$ の再定義 $\sqrt{\zeta}\Phi_{p,\sigma} \rightarrow \Phi_{p,\sigma}$ により常に 1 にできる.

3.2.2.2 ゼロ質量粒子

変換 $R_2(-\pi)\mathcal{S}$ は k_0 を不変に保ち,

$$J_3 U(R_2(-\pi))^{-1} U_T = U(R_2(-\pi))^{-1} U_T J_3 \quad (3.2.38)$$

より,

$$U_T \Phi_{k_0,\sigma} = \zeta_\sigma U(R_2(-\pi)) \Phi_{k_0,\sigma}. \quad (3.2.39)$$

つぎに,

$$U_T \Phi_{k,\sigma} = U(L(\mathcal{S}k)) \zeta_\sigma W \Phi_{k_0,\sigma}, \quad (3.2.40)$$

$$W \equiv U(L(\mathcal{S}k))^{-1} U_T U(L(k)) U_T^{-1} U(R_2(-\pi)) = e^{\pm i\pi J_3} \quad (3.2.41)$$

よって,

$$U_T \Phi_{p,\sigma} = \zeta_\sigma e^{\pm i\pi\sigma} \Phi_{\mathcal{S}p,\sigma}. \quad (3.2.42)$$

ここで, \pm は, P 変換の場合の \mp と対応.

3.3 散乱理論

3.3.1 Fock 空間

1 粒子状態 $\Phi_{p,\sigma,n}$ (n は粒子の種類) 全体の張るヒルベルト空間

$$\mathcal{H}_1 \ni \int d^{D-1}\mathbf{p} \sum_n \sum_\sigma \phi_{\sigma,n}(p) \Phi_{p,\sigma,n} \quad (3.3.1)$$

の N 個のテンソル積の「対称化」により, N 粒子状態を表す状態空間

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_N &= \text{Sym}_\pm \otimes^N \mathcal{H}_1 \ni \Phi = \int d\alpha \phi_\alpha \Phi_\alpha, \\ (\Phi_2, \Phi_1) &= \int d\alpha \sum_{\text{permutation: } S} \pm \bar{\phi}_{1\alpha} \phi_{2S(\alpha)} \end{aligned} \quad (3.3.2a)$$

が得られる. ここで,

$$\alpha = \{p_1, \sigma_1, n_1; p_2, \sigma_2, n_2; \cdots; p_N, \sigma_N, n_N\}, \quad (3.3.3a)$$

$$\int d\alpha = \int d^{D-1}\mathbf{p}_1 \cdots \int d^{D-1}\mathbf{p}_N \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_N} \sum_{n_1, \dots, n_N} . \quad (3.3.3b)$$

内積の定義は, 形式的には

$$(\Phi_{\alpha'}, \Phi_\alpha) = \delta^{D-1}(\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1) \delta_{\sigma'_1, \sigma_1} \delta_{n'_1, n_1} \cdots \pm \text{permutations} \quad (3.3.4)$$

と表される. ここで, \pm はフェルミ粒子の入れ替えに起因する因子である.

以上の定義のもと, 全系の状態空間 \mathcal{H} が

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N \quad (3.3.5)$$

により定義され, ポアンカレ群の生成元 P^a, J^{ab} の表現が 1 粒子状態への作用から一意的に決定される. 特に, 各 N 粒子状態は, ハミルトン作用素 $H_0 = P^0$ の固有状態となる:

$$H_0 \Phi_\alpha = E_\alpha \Phi_\alpha; \quad E_\alpha = \sum_{l=1}^N p_l^0. \quad (3.3.6)$$

3.3.2 始状態・終状態と Lippmann-Schwinger 方程式

\mathcal{H} において, 相互作用する粒子系のハミルトンが $H = H_0 + V$ と表されれるとする. このとき, E_α を自由粒子系に対する H_0 の固有値として, H に関して同じ固有値を持つ状態 Ψ_α^\pm が存在して, 有限なノルムをもつ任意の状態 $\phi(\alpha)$ に対し,

$$t \rightarrow \mp\infty : e^{-itH} \int d\alpha \phi(\alpha) \Psi_\alpha \rightarrow e^{-itH_0} \int d\alpha \phi(\alpha) \Phi_\alpha \quad (3.3.7)$$

という漸近条件を満たす時, Ψ_α^+ を始状態, Ψ_α^- を終状態と呼ぶ.

この定義は, 形式的に,

$$\Psi_\alpha^\pm = \Omega(\mp\infty) \Phi_\alpha, \quad (3.3.8)$$

$$\Omega(t) \equiv e^{+itH} e^{-itH_0}. \quad (3.3.9)$$

Ψ_α^\pm は H の固有状態なので,

$$(E_\alpha - H_0) \Psi_\alpha^\pm = V \Psi_\alpha^\pm \quad (3.3.10)$$

を満たす. これより, 次の形式的な摂動方程式が得られる:

$$\Psi_\alpha^\pm = \Phi_\alpha + \int d\beta \Phi_\beta \frac{T_{\beta\alpha}^\pm}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon}, \quad (3.3.11)$$

$$T_{\beta\alpha}^\pm = (\Phi_\beta, V \Psi_\alpha^\pm). \quad (3.3.12)$$

$\phi(\alpha)$ 適当な平滑化関数として,

$$\Psi_\phi = \int d\beta \phi(\beta) \Psi_\beta, \quad \Phi_\phi = \int d\beta \phi(\beta) \Phi_\beta \quad (3.3.13)$$

と表すと, Lippmann-Schwinger 方程式より

$$\begin{aligned} e^{-iHt} \Psi_\phi^\pm &= e^{-iH_0 t} \Phi_\phi + \int d\beta e^{-iH_0 t} \Phi_\beta \int d\alpha \phi(\alpha) \frac{e^{-i(E_\alpha - E_\beta)t} T_{\beta\alpha}^\pm}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon} \\ &\stackrel{|t| \rightarrow \infty}{\rightarrow} e^{-iH_0 t} \Phi_\phi + \int d\beta e^{-iH_0 t} \Phi_\beta \int d\alpha |_{E_\alpha} \phi(\alpha) T_{\beta\alpha}^\pm |_{E_\alpha = E_\beta} \int du \frac{e^{-iut}}{u \pm i\epsilon} \\ &\stackrel{t \rightarrow \mp\infty}{\rightarrow} e^{-iH_0 t} \Phi_\phi \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

より, Ψ_α^\pm は要求される漸近条件を満たす.

3.3.3 S 行列

漸近自由粒子状態 Ψ_α^\pm に対して, 始状態 Ψ_α^+ が終状態 Ψ_β^- に遷移する遷移振幅

$$S_{\beta\alpha} \equiv (\Psi_\beta^-, \Psi_\alpha^+) \quad (3.3.15)$$

に対応する行列は, **S** 行列と呼ばれる. Fock 空間における作用素 S を

$$(\Phi_\beta, S\Phi_\alpha) = S_{\beta\alpha} \quad (3.3.16)$$

により定義すると, この作用素は,

$$S = \Omega(+\infty)^\dagger \Omega(-\infty) = U(+\infty, -\infty), \quad (3.3.17)$$

$$U(t, t_0) \equiv e^{+iH_0 t} e^{-iH(t-t_0)} e^{-iH_0 t_0} \quad (3.3.18)$$

と表される.

Lippmann-Schwinger 方程式より, $t \rightarrow +\infty$ の極限で,

$$e^{-iHt} \Psi_\phi^+ \rightarrow e^{-iHt} \int d\alpha \phi(\alpha) \left[\Psi_\alpha^- - 2\pi i \int d\beta \Psi_\beta^- \delta(E_\beta - E_\alpha) T_{\beta\alpha}^+ \right] \quad (3.3.19)$$

より,

$$S_{\beta\alpha} = \delta(\beta - \alpha) - 2\pi i \delta(E_\beta - E_\alpha) T_{\beta\alpha}^+ \quad (3.3.20)$$

を得る. この式の右辺を V について摂動展開し, V について 1 次の項を残すと, **Born** 近似

$$S_{\beta\alpha} \simeq \delta(\beta, \alpha) - 2\pi i \delta(E_\beta - E_\alpha) (\Phi_\beta, V\Phi_\alpha) \quad (3.3.21)$$

を得る.

3.3.4 ポアンカレ不変性

S 行列がポアンカレ変換で不変となるための必要十分条件は, 自由粒子系の Fock 空間におけるポアンカレ変換の生成演算子を P_0^a, J_0^{ab} として,

$$[P_0^a, S] = [J_0^{ab}, S] = 0 \quad (3.3.22)$$

で与えられる.

$S = U(+\infty, -\infty)$ より,

$$[P_0^j, V] = [J_0^{jk}, V] = 0 \quad (j, k = 1, \dots, D-1) \quad (3.3.23)$$

が満たされれば, $[P_0^j, S] = [J_0^{jk}, S] = 0$ が満たされる. 多くの理論で, 相互作用をする粒子系に対するポアンカレ変換の生成演算子のうち, P^j , J^{jk} に対しては

$$P^j = P_0^j, \quad J^{jk} = J_0^{jk} \quad (3.3.24)$$

が成り立つので, ポアンカレ代数の交換関係

$$[J^{jk}, H] = [P^j, H] = 0 \quad (3.3.25)$$

より, 条件 (3.3.23) は自然な条件となる.

一方, 交換関係

$$[K^j, P^k] = -iH\delta_{jk}, \quad [K^j, H] = -iP^j \quad (3.3.26)$$

より, $K^j \neq K_0^j$ なので,

$$K^j = K_0^j + W^j \quad (3.3.27)$$

とおくと, $[K_0^j, V] = 0$ は, さらに $[W^j, H] = 0$ という条件を要求するので, 要請としては強すぎる. 実際には, 交換関係 $[K^j, H] = -iP^j$ に対応する条件

$$[K_0^j, V] = -[W^j, H] \quad (3.3.28)$$

が満たされ, かつ W^j の Φ_α に関する行列要素 $W_{\beta\alpha}^j$ が E_α , E_β の滑らかな関数となるならば, $[K_0^j, S] = 0$ となることが示される.

3.3.5 摂動論

$U(t, t_0)$ は, 時間に関する微分方程式

$$\frac{d}{dt}U(t, t_0) = -iV(t)U(t, t_0); \quad V(t) \equiv e^{+iH_0t}V e^{-iH_0t} \quad (3.3.29)$$

を満たすので, 形式的に

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= T \exp \left(-i \int_{t_0}^t d\tau V(\tau) \right) \\ &\equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n V(t_1) \cdots V(t_n) \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

と表される. よって, S 行列は

$$\begin{aligned} S &= T \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt V(t) \right) \\ &\equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \cdots dt_n T \{ V(t_1) \cdots V(t_n) \} \end{aligned} \quad (3.331)$$

と摂動展開される.

この摂動展開公式より, S 行列のポアンカレ不変性は, 作用素 $V(t)$ が

$$V(t) = \int d^{D-1}x \mathcal{H}(\mathbf{x}, t) \quad (3.332)$$

と表され, かつ, $\mathcal{H}(x)$ が 2 条件

$$\text{スカラ性} : U_0(\Lambda, a) \mathcal{H}(x) U_0(\Lambda, a)^{-1} = \mathcal{H}(\Lambda x + a), \quad (3.333a)$$

$$\text{因果律} : [\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')] = 0 \text{ for } (x - x')^2 \geq 0 \quad (3.333b)$$

を満たすなら, 保証される. ただし, これらは, ポアンカレ不変性が成り立つための十分条件で, 必要条件ではない.

3.3.6 生成消滅演算子

Fock 空間において, 各 1 粒子状態 $q = (p, \sigma, n)$ に次式で定義される生成作用素 $a^\dagger(q)$ を対応させる:

$$a^\dagger(q) \Phi_{q_1 \cdots q_N} \equiv \Phi_{q q_1 \cdots q_N} \quad (3.334)$$

このとき, その共役作用素である消滅作用素 $a(q)$ は, 次の作用をもつ:

$$a(q) \Phi_{q_1 \cdots q_N} = \sum_{j=1}^N \pm \delta(q - q_j) \Phi_{q_1 \cdots q_{j-1} q_{j+1} \cdots q_N} \quad (3.335)$$

これより, 生成消滅演算子に対する次の交換関係が得られる:

$$[a(q), a^\dagger(q')]_{\mp} = \delta(q - q'), \quad [a(q), a(q')]_{\mp} = [a^\dagger(q), a^\dagger(q')]_{\mp} = 0. \quad (3.336)$$

生成消滅演算子のポアンカレ変換は

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda, \alpha) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n) U_0^{-1}(\Lambda, \alpha) &= e^{-i\Lambda p \cdot \alpha} \sqrt{(\Lambda p)^0 / p^0} \\ &\times \sum_{\sigma'} D_{\sigma' \sigma}^{(j)}(W(\Lambda, p)) a^\dagger(\mathbf{p}_\Lambda, \sigma', n). \end{aligned} \quad (3.337)$$

また、正質量粒子に対する C, P, T 変換は起因

$$U_C a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n) U_C^{-1} = \xi_n a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n^c), \quad (3.3.38a)$$

$$U_P a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n) U_P^{-1} = \eta_n a^\dagger(-\mathbf{p}, \sigma, n), \quad (3.3.38b)$$

$$U_T a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n) U_T^{-1} = \zeta_n (-1)^{s-\sigma} a^\dagger(-\mathbf{p}, -\sigma, n) \quad (3.3.38c)$$

3.3.7 クラスタ分解条件

始状態 α と終状態 β を、部分状態 $(\alpha_1, \beta_1) \cdots (\alpha_j, \beta_j)$ に分けるとき、それらの空間的位置が互いに無限大となる極限で、S 行列が常に

$$S_{\beta\alpha} \rightarrow \pm S_{\beta_1\alpha_1} \cdots S_{\beta_j\alpha_j} \quad (3.3.39)$$

と分解するとき、この理論はクラスタ分解性を持つという。

いま、S 行列 $S_{\beta\alpha}$ の連結部分 $S_{\beta\alpha}^C$ を逐次的に

$$S_{\beta\alpha} = S_{\beta\alpha}^C + \sum_{n \geq 1} \pm S_{\beta_1\alpha_1}^C \cdots S_{\beta_n\alpha_n}^C, \quad (3.3.40a)$$

$$S_{q'q} = S_{q'q}^C \quad (3.3.40b)$$

により定義する。ここで、 q, q' は 1 粒子状態である。このとき、理論のクラスタ分解性が成り立つための十分条件は、任意の連結部分 $S_{\beta\alpha}^C$ に対して、 β ないし α に属する粒子のいずれかが無限遠に遠ざかった極限で、 $S_{\beta\alpha}^C$ がゼロとなることである。時間および空間並進不変性を持つ理論では、フーリエ変換の一般論より、この性質が成り立つための十分条件は、

$$\begin{aligned} S_{q'_1 \cdots q'_M; q_1 \cdots q_N}^C &= \delta^{D-1}(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 + \cdots - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \cdots) \\ &\times \delta(E'_1 + E'_2 + \cdots - E_1 - E_2 - \cdots) C_{q'_1 \cdots q'_M; q_1 \cdots q_N} \end{aligned} \quad (3.3.41)$$

において、 $C_{q'_1 \cdots q'_M; q_1 \cdots q_N}$ が空間運動量 $\mathbf{p}'_1, \cdots, \mathbf{p}_1, \cdots$ の関数として、 δ 関数型の特異性を持たないことである。

ハミルトン作用素を、生成消滅演算子を用いて、

$$\begin{aligned} H &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \int dq'_1 \cdots dq'_N dq_1 \cdots dq_M \\ &\times h_{MN}(q'_1, \cdots; q_1, \cdots) a^\dagger(q'_1) \cdots a^\dagger(q'_N) a(q_1) \cdots a(q_M) \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

目次へ

と表すとき，クラスター分解性が成り立つための十分条件は， h_{MN} が空間運動量の関数として， δ 関数を 1 個のみ含むことである：

$$\begin{aligned} & h_{MN}(q'_1, \dots, q'_N; q_1, \dots, q_M) \\ &= \delta^{D-1} \left(\sum_j \mathbf{p}'_j - \sum_k \mathbf{p}_k \right) \tilde{h}_{MN}(q'_1, \dots, q'_N; q_1, \dots, q_M). \end{aligned} \quad (3.3.43)$$

3.4 自由場

以下, 時空は $\text{Mink}^{n+1} = E^{n,1}$ とする.

3.4.1 場による表現: 正質量粒子

この項では, 1 粒子状態および対応する生成消滅演算子を $C(\mathbf{p}) = 1$ となるよう規格化するものとする.

消滅演算子 $a(\mathbf{p}, \sigma, \iota)$, 生成演算子 $a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, \iota)$ から, 適当なモード関数 $u_l(x : \mathbf{p}, \sigma, \iota)$, $v_l(x : \mathbf{p}, \sigma, \iota)$ を用いて, 時空座標に依存した作用素 $\psi_l^+(x)$, $\psi_l^-(x)$ を

$$\psi_l^+(x) \equiv \sum_{\sigma, \iota} \int d^n p u_l(x : \mathbf{p}, \sigma, \iota) a(\mathbf{p}, \sigma, \iota), \quad (3.4.1a)$$

$$\psi_l^-(x) \equiv \sum_{\sigma, \iota} \int d^n p v_l(x : \mathbf{p}, \sigma, \iota) a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, \iota) \quad (3.4.1b)$$

により導入する. このとき, $\psi_l^\pm(x)$ がポアンカレ変換に対して, その線形表現

$$U_0(\Lambda, a) \psi_l^\pm(x) U_0(\Lambda, a)^{-1} = \sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}l}(\Lambda^{-1}) \psi_{\bar{l}}^\pm(\Lambda x + a) \quad (3.4.2)$$

に従って変換することを要求すると, モード関数は次の形に決まる:

$$u_l(x : \mathbf{p}, \sigma, \iota) = (2\pi)^{-n/2} e^{ip \cdot x} u_l(\mathbf{p}, \sigma, \iota); \quad (3.4.3a)$$

$$u_l(\mathbf{p}, \sigma, \iota) = (m/p^0)^{1/2} \sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}l}(L(p)) u_{\bar{l}}(0, \sigma, \iota), \quad (3.4.3b)$$

$$v_l(x : \mathbf{p}, \sigma, \iota) = (2\pi)^{-n/2} e^{-ip \cdot x} v_l(\mathbf{p}, \sigma, \iota); \quad (3.4.3c)$$

$$v_l(\mathbf{p}, \sigma, \iota) = (m/p^0)^{1/2} \sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}l}(L(p)) v_{\bar{l}}(0, \sigma, \iota). \quad (3.4.3d)$$

ここで, $D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_\iota)}(R)$ を little group の既約表現を表す行列として, $u_l(0, \sigma, \iota)$, $v_l(0, \sigma, \iota)$ は次の条件を満たすゼロ運動量モード関数である:

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_l(0, \bar{\sigma}, \iota) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_\iota)}(R) = \sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}l}(R) u_{\bar{l}}(0, \sigma, \iota), \quad (3.4.4a)$$

$$\sum_{\bar{\sigma}} v_l(0, \bar{\sigma}, \iota) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j_\iota)*}(R) = \sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}l}(R) v_{\bar{l}}(0, \sigma, \iota). \quad (3.4.4b)$$

今、時空が4次元として、粒子種 l とその反粒子 l^c の組を一つ取り出し固定する。このとき、対応する $\psi_l^\pm(x), \psi_l^{c\pm}(x)$ をローレンツ変換の表現として既約分解し、その既約表現 $(A, B) (A, B = 0, 1/2, 1, \dots)$ に対応する成分を、 $\psi_{ab}^\pm(x), \psi_{ab}^{c\pm}(x)$ ($a = -A, -A + 1, \dots, A, b = -B, -B + 1, \dots, B$) と表すことにして、因果的場を

$$\begin{aligned} \psi_{ab}(x) &= \kappa \psi_{ab}^+(x) + \lambda \psi_{ab}^{c-}(x) \\ &= \sum_{\sigma=-j}^{+j} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} [\kappa a(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} u_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) + \lambda a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} v_{ab}(\mathbf{p}, \sigma)] \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

により定義する ($|A - B| \leq j \leq A + B, 2j \in \mathbb{Z}$)。ただし、反粒子が自分自身と一致する場合には、 $a^c(\mathbf{p}, \sigma) = a(\mathbf{p}, \sigma)$ とおく。

上記の $u_{ab}(0, \sigma), v_{ab}(0, \sigma)$ を決める条件は、無限小変換に対して、

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{\sigma}} u_{ab}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)} &= \sum_{\bar{a}} \mathcal{J}_{a\bar{a}}^{(A)} u_{\bar{a}b}(0, \sigma) + \sum_{\bar{b}} \mathcal{J}_{b\bar{b}}^{(B)} u_{a\bar{b}}(0, \sigma), \\ - \sum_{\bar{\sigma}} v_{ab}(0, \bar{\sigma}) \mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)*} &= \sum_{\bar{a}} \mathcal{J}_{a\bar{a}}^{(A)} v_{\bar{a}b}(0, \sigma) + \sum_{\bar{b}} \mathcal{J}_{b\bar{b}}^{(B)} v_{a\bar{b}}(0, \sigma), \end{aligned}$$

と表される。これらの条件は、 $u_{ab}(0, \sigma), v_{ab}(0, \sigma)$ を定数倍の自由度を除いて一意的に決定し、

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{J}_1^{(A)} \pm i \mathbf{J}_2^{(A)} \right)_{a'a} &= \delta_{a', a \pm 1} \sqrt{(A \mp a)(A \pm a + 1)}, \quad \left(\mathbf{J}_3^{(A)} \right)_{a'a} = a, \\ - \mathbf{J}_{\sigma\sigma'}^{(j)*} &= (-1)^{\sigma - \sigma'} \mathbf{J}_{-\sigma - \sigma'}^{(j)} \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

より、Clebsch-Gordan 係数を用いて

$$u_{ab}(0, \sigma) = (2m)^{-1/2} C_{AB}(j\sigma; ab), \quad (3.4.8a)$$

$$v_{ab}(0, \sigma) = (-1)^{j+\sigma} u_{ab}(0, -\sigma) \quad (3.4.8b)$$

と表される。これより、一般の運動量に対するモード関数は

$$\begin{aligned} u_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2p^0}} \sum_{a', b'} \left(\exp(-\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(A)} \theta) \right)_{aa'} \left(\exp(+\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{J}^{(B)} \theta) \right)_{bb'} \\ &\quad \times C_{AB}(j\sigma; a'b'), \end{aligned} \quad (3.4.9a)$$

$$v_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) = (-1)^{j+\sigma} u_{ab}(\mathbf{p}, -\sigma) \quad (3.4.9b)$$

で与えられる。ここで、 θ は $\tanh \theta = |\mathbf{p}|/p^0$ より決まるブーストパラメータである。

以上の準備のもとで、同じ粒子に対する (A, B) 表現の場 $\psi_{ab}(x)$ と (\tilde{A}, \tilde{B}) 表現の場 $\tilde{\psi}_{\tilde{a}\tilde{b}}(y)$ の交換子は

$$[\psi_{ab}(x), \tilde{\psi}_{\tilde{a}\tilde{b}}(y)^\dagger]_{\mp} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0} \pi_{ab;\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) \left(\kappa \tilde{\kappa}^* e^{ip \cdot (x-y)} \mp \lambda \tilde{\lambda}^* e^{-ip \cdot (x-y)} \right) \quad (3.4.10)$$

で与えられる。ここで、

$$\begin{aligned} \pi_{ab;\tilde{a}\tilde{b}} &\equiv 2p^0 \sum_{\sigma} u_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) \tilde{u}_{\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}, \sigma)^* \\ &= P_{ab;\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) + 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} Q_{ab;\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

$P(\mathbf{p}), Q(\mathbf{p})$ は \mathbf{p} の多項式で次の性質をもつ：

$$P(-\mathbf{p}) = (-1)^{2A+2\tilde{B}} P(\mathbf{p}), \quad Q(-\mathbf{p}) = -(-1)^{2A+2\tilde{B}} Q(\mathbf{p}). \quad (3.4.12)$$

よって、 $x^0 = y^0$ のとき、

$$\begin{aligned} [\psi_{ab}(x), \tilde{\psi}_{\tilde{a}\tilde{b}}(y)^\dagger]_{\mp} &= \left(\kappa \tilde{\kappa}^* \mp \lambda \tilde{\lambda}^* (-1)^{2A+2\tilde{B}} \right) P(-i\nabla) \Delta_+(\mathbf{x} - \mathbf{y}, 0) \\ &\quad + \left(\kappa \tilde{\kappa}^* \pm \lambda \tilde{\lambda}^* (-1)^{2A+2\tilde{B}} \right) Q(-i\nabla) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

ここで、

$$\Delta_+(x) \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{ip \cdot x}}{2p^0}, \quad p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (3.4.14)$$

これより、特に、 $\psi = \tilde{\psi}$ とおいて、空間的な2点間で $[\psi_{ab}(x), \psi_{ab}(y)^\dagger]_{\mp} = 0$ となるための必要十分条件は、

$$|\kappa|^2 = \pm |\lambda|^2 (-1)^{2A+2B} \Leftrightarrow |\kappa| = |\lambda|, \quad (-1)^{2A+2B} = \pm 1 \quad (3.4.15)$$

これより、場で表された相互作用がローレンツ不変となるためには、 $2j$ が偶数の時には交換子は $[\]_-$ 、すなわちボゾン、 $2j$ が奇数のときには交換子は $[\]_+$ 、すなわちフェルミオンとしないといけないことが結論される。また、 ψ と $\tilde{\psi}$ に対する因果関係を要請すると、

$$\kappa \tilde{\kappa}^* = \pm \lambda \tilde{\lambda}^* (-1)^{2A+2\tilde{B}} \Leftrightarrow \frac{\kappa}{\lambda} (-1)^{2B} = \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\lambda}} (-1)^{2\tilde{B}} \quad (3.4.16)$$

以上より, $\psi_{ab}(x)/\kappa \rightarrow \psi_{ab}(x)$ と再定義すると,

$$\psi_{ab}(x) = \sum_{\sigma} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} [u_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} a(\mathbf{p}, \sigma) + (-1)^{2B} v_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} a^{\dagger}(\mathbf{p}, \sigma)] \quad (3.4.17)$$

を得る.

この場をもちいると, 離散変換は次のように表される. スピン j の粒子に対応するローレンツ群の既約表現 (A, B) に従う場を $\psi_{ab}^{AB}(x)$ と表すとき,

$$U_P \psi_{ab}^{AB}(x) U_P^{-1} = \eta^* (-1)^{A+B-j} \psi_{ba}^{BA}(-\mathbf{x}, x^0); \quad \eta^c = (-1)^{2j} \eta^*, \quad (3.4.18a)$$

$$U_C \psi_{ab}^{AB}(x) U_C^{-1} = \xi^* (-1)^{-2A-a-b-j} \psi_{-b-a}^{BA\dagger}(x); \quad \xi^c = \xi^*, \quad (3.4.18b)$$

$$U_T \psi_{ab}^{AB}(x) U_T^{-1} = \zeta^* (-1)^{a+b+A+B-2j} \psi_{-a-b}^{AB}(\mathbf{x}, -x^0); \quad \zeta^c = \zeta^*. \quad (3.4.18c)$$

3.4.2 場による表現：ゼロ質量粒子

ゼロ質量粒子に対しても, 正質量粒子と同様に, 生成消滅演算子とモード関数から, 場 $\psi_l(x)$ を

$$\psi_l(x) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{2p^0}} \sum_{\sigma} [\kappa a(\mathbf{p}, \sigma) e_l(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip \cdot x} + \lambda a^{\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) f_l(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x}] \quad (3.4.19)$$

($p^0 = |\mathbf{p}|$) により定義する (以下、1 種類の粒子のみに着目). このとき, 要請

$$U(\Lambda) \psi_l(x) U(\Lambda)^{-1} = \sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}}^{AB}(\Lambda^{-1}) \psi_{\bar{l}}(\Lambda x) \quad (3.4.20)$$

より, 偏光ベクトル $e_l(\mathbf{p}, \sigma), f_l(\mathbf{p}, \sigma)$ の \mathbf{p} 依存性は, 次のように定まる:

$$e_l(\mathbf{p}, \sigma) = \sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}}^{(AB)}(\mathcal{L}(p)) e_{\bar{l}}(\mathbf{k}, \sigma), \quad (3.4.21a)$$

$$f_l(\mathbf{p}, \sigma) = \sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}}^{(AB)}(\mathcal{L}(p)) f_{\bar{l}}(\mathbf{k}, \sigma) \quad (3.4.21b)$$

ここで, $\mathbf{k} = (0, \dots, 0, k)$ は little group を定義する際に基準となる運動量, $\mathcal{L}(p) : k = (k, 0, \dots, 0, k) \rightarrow p$ は特殊ローレンツ変換である. ただ

し, $e_l(\mathbf{k}, \sigma)$, $f_l(\mathbf{k}, \sigma)$ は次の拘束条件を満たさないといけない:

$$\sum_{\bar{\sigma}} e_l(\mathbf{k}, \bar{\sigma}) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)}(W) = \sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}l}(W) e_{\bar{l}}(\mathbf{k}, \sigma), \quad (3.4.22a)$$

$$\sum_{\bar{\sigma}} f_l(\mathbf{k}, \bar{\sigma}) D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)*}(W) = \sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}l}(W) f_{\bar{l}}(\mathbf{k}, \sigma) \quad (3.4.22b)$$

ここで, $D_{\bar{\sigma}\sigma}^{(j)}$ は、右辺の little group の表現 $D_{\bar{l}l}$ を既約分解して得られる既約表現の一つ、 W は $Wk = k$ を満たす little group の任意の元である。これらのうち f_l に対する条件は、適当な κ, λ の再定義のもとで、

$$f_l(\mathbf{p}, \sigma) = e_l(\mathbf{p}, -\sigma) \quad (3.4.23)$$

を与えるので, e_l に対する条件のみを考えれば良い。

一般に, little group G に対して, 次の分裂する短完全系列が存在する:

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \xrightarrow{j} G \xrightarrow{\pi} \text{SO}(n-1) \longrightarrow 0 \quad (3.4.24)$$

G の表現 $D^{(j)}(W)$ としては, G の $\text{SO}(n-1)$ への射影のみに依存するものとする。このとき, 射影 π の切断 i を一つ指定すると, $W = i(R)$ ($R \in \text{SO}(n-1)$) に対して (3.4.22a) が成り立つ $e_l(\mathbf{k}, \sigma)$ が存在する。ただし, 正質量の場合と異なり, 解は, 一般には, $W \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対する条件を満たさない。

例えば, $D = 4$ のとき, $\text{SO}(2) \cong \text{U}(1)$ に対する変換則は, 無限小変換に対し,

$$\sigma e_{ab}(\mathbf{k}, \sigma) = (a + b) e_{ab}(\mathbf{k}, \sigma) \quad (3.4.25)$$

となるので, $e_{ab}(\mathbf{k}, \sigma)$ のゼロでない成分は $a + b = \sigma$, $f_{ab}(\mathbf{k}, \sigma)$ のゼロでない成分は $a + b = -\sigma$ となる。ところが, $W = S \in \mathbb{R}^2$ に対する条件は,

$$S(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 1 - \gamma & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma & 1 + \gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma \equiv (\alpha^2 + \beta^2)/2. \quad (3.4.26)$$

より,

$$\sum_{a'} (J_-^{(A)})_{aa'} e_{a'b}(\mathbf{k}, \sigma) = 0, \quad \sum_{b'} (J_+^{(B)})_{bb'} e_{ab'}(\mathbf{k}, \sigma) = 0 \quad (3.4.27)$$

これより, $e_{ab}(\mathbf{k}, \sigma) \neq 0$ となるのは,

$$a = -A, \quad b = +B \Rightarrow \sigma = B - A. \quad (3.4.28)$$

3.4.3 高次元におけるゼロ質量 1 粒子状態に対応するゲージ場

Creation: 2021/1/16

3.4.3.1 ゼロ質量粒子を表す場の一般型

D 次元時空での 1 粒子状態の既約系は, $\text{SO}_0(D-1, 1)$ の little group $G_0 \cong \text{ISO}_0(D-1)$ の極大コンパクト部分群 $\text{SO}_0(D-1)$ の既約表現 $(\rho[a_1 \cdots a_r], \mathcal{H})(r = [(D-3)/2])$ により分類される.

いま, 1 粒子状態を $\Phi_{k,\sigma}$ (k は, $k \cdot k = 0, k^0 > 0$ を満たすベクトル, σ は運動量 k の 1 粒子状態の基底のラベル) として, 対応する消滅演算子を $a(k, \sigma)$, 偏極ベクトルを $u_l(k, \sigma), v_l(k, \sigma)$ とする. l は, D 次元 Lorentz 変換の有限次元表現 ρ の基底のラベルである. このとき, D 次元の場 $\psi_l^{(\pm)}(x)$ を

$$\psi_l^{(+)}(x) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{2k^0}} \sum_{\sigma} u_l(k, \sigma) a(k, \sigma) e^{ik \cdot x}, \quad (3.4.29a)$$

$$\psi_l^{(-)}(x) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{2k^0}} \sum_{\sigma} v_l(k, \sigma) a(k, \sigma)^{\dagger} e^{ik \cdot x} \quad (3.4.29b)$$

により定義する.

ここで, $k_* \in \text{LC}^+ \equiv \{k \in \mathbb{R}^D \mid k \cdot k = 0, k^0 > 0\}$ を運動量ベクトル空間における基準点として, 各 $k \in \text{LC}^+$ に対して

$$L(k)k_* = k \quad (3.4.30)$$

となる Lorentz 変換 $L(k) \in \text{SO}_0(D-1, 1)$ を一つ選んでおく. このとき, $G_0(k_*)$ を LC^+ に作用する Lorentz 変換の $k = k_*$ における等方群として, 任意の Lorentz 変換 Λ は

$$\Lambda = L(\Lambda k)W(\Lambda, k)L(k)^{-1}, \quad W(\Lambda, k) \in G_0(k_*) \quad (3.4.31)$$

と一意的に分解される.

以上の記法のもとで, $u_l(k, \sigma)$ と $v_l(k, \sigma)$ を $k = k_*$ での値を用いて

$$u_l(k, \sigma) = \sum_{\nu} D_{l\nu}(L(k))u_{\nu}(k_*, \sigma), \quad (3.4.32a)$$

$$v_l(k, \sigma) = \sum_{\nu} D_{l\nu}(L(k))v_{\nu}(k_*, \sigma) \quad (3.4.32b)$$

と定義する. ここで, $D_W(\Lambda)$ は表現 ρ の行列表示である.

3.4.3.2 偏極ベクトルに対する整合条件

場 $\psi_l^{(\pm)}(x)$ に対する理論がゲージ自由度を持たないとすると, 任意の Lorentz 変換 $\Lambda \in \text{SO}_0(D-1, 1)$ に対して,

$$U(\Lambda)\psi_l^{(\pm)}(x)U(\Lambda)^{-1} = \sum_{\nu'} D_{l\nu'}(\Lambda^{-1})\psi_{\nu'}^{(\pm)}(\Lambda x) \quad (3.4.33)$$

が要求される. $W \in G_0(k_*)$ に対して,

$$\Delta_{l,\sigma}^{u[a]}(W) \equiv \sum_{\sigma'} u_l(k_*, \sigma') \hat{D}_{\sigma'\sigma}^{[a]}(W) - \sum_{\nu'} D_{l\nu'}(W) u_{\nu'}(k_*, \sigma), \quad (3.4.34a)$$

$$\Delta_{l,\sigma}^{v[a]}(W) \equiv \sum_{\sigma'} v_l(k_*, \sigma') (\hat{D}_{\sigma'\sigma}^{[a]}(W))^* - \sum_{\nu'} D_{l\nu'}(W) v_{\nu'}(k_*, \sigma), \quad (3.4.34b)$$

とおくとき,

$$\delta_{\Lambda}\psi_l^{(\pm)}(x) \equiv U(\Lambda)\psi_l^{(\pm)}(x)U(\Lambda)^{-1} - \sum_{\nu'} D_{l\nu'}(\Lambda^{-1})\psi_{\nu'}^{(\pm)}(\Lambda x) \quad (3.4.35)$$

が

$$\begin{aligned} \delta_{\Lambda}\psi_l^{(+)} &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{2k^0}} \sqrt{\frac{(\Lambda k)^0}{k^0}} \sum_{\sigma} e^{ik \cdot x} a(\Lambda k, \sigma) \\ &\quad \times \sum_{\nu'} D_{l\nu'}(L(k)) \Delta_{\nu',\sigma}^{u[a]}(W(\Lambda, k)^{-1}), \end{aligned} \quad (3.4.36a)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\Lambda}\psi_l^{(-)} &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{2k^0}} \sqrt{\frac{(\Lambda k)^0}{k^0}} \sum_{\sigma} e^{-ik \cdot x} a(\Lambda k, \sigma)^{\dagger} \\ &\quad \times \sum_{\nu'} D_{l\nu'}(L(k)) \Delta_{\nu',\sigma}^{v[a]}(W(\Lambda, k)^{-1}), \end{aligned} \quad (3.4.36b)$$

$$(3.4.36c)$$

と表される. よって, 上記の変換則は, u_l, v_l に対して

$$\Delta_{l,\sigma}^{u[a]}(W) = 0, \quad \Delta_{l,\sigma}^{v[a]}(W) = 0, \quad \forall W \in G_0(k_*) \quad (3.4.37)$$

という拘束条件を与える.

埋め込み

$$j : \text{SO}(D-2) \subset \text{SO}(D-1, 1) \quad (3.4.38)$$

による Lorentz 群の既約表現 (ρ, V) およびその複素共役表現 (ρ^*, \bar{V}) の既約分解

$$P^{[a]} : V_{[a]} \rightarrow V = V_{[a]} \oplus \cdots, \quad (3.4.39a)$$

$$\bar{P}^{[a]} : V_{[a]} \rightarrow \bar{V} = V_{[a]} \oplus \cdots \quad (3.4.39b)$$

に対して, $W = R \in \text{SO}_0(D-2)$ に対する条件は,

$$\sum_l u_l(k_*, \sigma) f_l = u_0 P^{[a]}(e_\sigma), \quad (3.4.40a)$$

$$\sum_l (v_l(k_*, \sigma))^* \bar{f}_l = v_0^* \bar{P}^{[a]}(e_\sigma) \quad (3.4.40b)$$

となる. ここで, f_l と \bar{f}_l はそれぞれ V と \bar{V} の基底, e_σ は $V^{[a]}$ の基底である. この条件は, 全体としてのスケールを除いて, $u_l(k_*, \sigma), v_l(k_*, \sigma)$, したがって, (3.4.32) より, 全偏極ベクトル $u_l(k, \sigma), v_l(k, \sigma)$ を完全に決定する.

(注) $D \not\equiv 0 \pmod{4}$ のとき, ρ^* は ρ と同値となるので, その $\text{SO}(D-2)$ に関する既約分解は一致し, 同じ 1 粒子状態 $\hat{\rho}^{[a]}$ を含む ($\hat{\rho}^{[a]}$ が複素表現なら, 必ずその共役表現が含まれる). 一方, $D \equiv 0 \pmod{4}$ のとき, ρ^* と ρ は異なる表現となるが, $\text{SO}(D-2)$ は自己共役表現しか持たないので, それらの $\text{SO}(D-2)$ に関する既約分解はやはり一致し, 同じ 1 粒子状態 $\hat{\rho}^{[a]}$ を含む.

残るは, $W = S \in G_0(k_*)$ に対する不変性のみとなる. その表式は, δS を無限小変換

$$\delta S = \sum_{i=1}^{D-2} a_i (E_0^i + E_i^0 + E_{D-1}^i - E_i^{D-1}) \quad (3.4.41)$$

として,

$$\Delta_{l,\sigma}^{u[a]}(1 + \delta S) \equiv - \sum_{l'} D_{l'}(\delta S) u_{l'}(k_*, \sigma) = 0 \quad (3.4.42)$$

および, この式で $u_l \rightarrow v_l$ と置き換えた式で与えられる. 以下, テンソル表現に対して, この条件が満たされるのはどのような場合か, 満たされないとき何が起きるかを見る. 以下, n 階テンソル場の全体をつくる線形空間を \mathcal{S}^n で表す.

(1) ベクトル表現 $V^M(x)$ まず, $\text{div}V \equiv \partial_M V^M = 0$ となるベクトル場全体を \mathcal{T}_H^1 と表記すると, 次の短完全系列が成立する:

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_H^1 \xrightarrow{j} \mathcal{T}^1 \xrightarrow{\text{div}} \mathcal{T}^0 \longrightarrow 0 \quad (3.4.43)$$

これより,

$$\mathcal{T}^1 \cong \mathcal{T}_H^1 \oplus (\mathcal{T}^1/\mathcal{T}_H^1) \cong \mathcal{T}_H^1 \oplus \mathcal{T}^0 \quad (3.4.44)$$

この分解において, \mathcal{T}_H^1 は \mathcal{T}^1 の Lorentz 不変な部分空間で, 1 粒子状態に関する分解

$$\begin{array}{ccc} \text{SO}(D-1, 1) & & \text{SO}(D-2) \\ \mathbf{D}[10^{r-1}] & = & (\mathbf{D}-\mathbf{2})[10^{r-2}] + \mathbf{1} + \mathbf{1} \end{array} \quad (3.4.45)$$

において, $(\mathbf{D}-\mathbf{2}) + \mathbf{1}$ の部分と対応する. この成分に関しては,

$$\Delta_\sigma^{u^j}(1 + \delta S) = -a_j(u^0 - u^{D-1})\alpha a_j k_* \cdot u = 0, \quad (3.4.46a)$$

$$\Delta_\sigma^{u^0}(1 + \delta S) = \Delta_\sigma^{u^{D-1}}(1 + \delta S) = -\sum_i a_i u^i \quad (3.4.46b)$$

となるので, 整合性条件をすべて満たすとすると,

$$u^i(k_*, \sigma) = 0 \Leftrightarrow u_M(k, \sigma) = u_* k_M \Leftrightarrow \psi_M^{(+)}(x) = \partial_M \phi^{(+)}(x) \quad (3.4.47)$$

となる. これは, helicity=0 成分 (1) に対応. $\psi^{(-)}$ についても同様である. これらは, スカラー場の理論に帰着する.

一方, 埋め込み $P: (\mathbf{D}-\mathbf{2})[10^{(r-2)}] \rightarrow \mathbf{D}[10^{(r-1)}]$ は, mod k_M でしか決まらないが, これは, $S \in G_0(k_*)$ に対する変換則

$$\Delta_{M,\sigma}^u \alpha k_{*M} \Rightarrow \delta V_M^{(\pm)}(x) = \partial_M \xi^{(\pm)}(x) \quad (3.4.48)$$

と整合的. したがって, ゲージ変換 $V_M \rightarrow V_M + \partial_M \xi$ で不変となるように理論を作れば, Lorentz 不変性と整合的となる. 以上より, 次の短完全系列が成り立つ:

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{T}_H^1 \xrightarrow{\pi} \mathcal{T}_{H,G}^1 \longrightarrow 0 \quad (3.4.49)$$

最後に, \mathcal{T}^0 に対応するセクターは, スカラー場 $\phi = \text{div}V$ に対する理論となる. まとめると,

$$\begin{array}{ccc} \text{SO}(D-1, 1) & & \text{SO}(D-2) \\ \mathcal{T}^1 : \mathbf{D}[10^{(r-1)}] \longrightarrow \mathcal{T}_H^1 \xrightarrow{/\partial \mathcal{T}^0} \mathcal{T}_{H,G}^1 & & (\mathbf{D}-\mathbf{2})[10^{(r-2)}] \\ & \searrow \text{div} & \searrow \mathcal{T}^0 \\ & & \mathcal{T}^0 \\ & & \mathbf{1} \\ & & \mathbf{1} \end{array} \quad (3.4.50)$$

(2) 2階テンソル場 2階テンソル場 $T^{M_1 M_2} \in \mathcal{T}^2$ に対して,

$$\mathcal{T}_H^2 \equiv \{T^{M_1 M_2} \mid \partial_N T^{NM_2} = \partial_N T^{M_1 N} = 0\}, \quad (3.4.51)$$

$$\text{div} : T^{M_1 M_2} \mapsto (\partial_N T^{NM_2}, \partial_N T^{M_1 N}) \quad (3.4.52)$$

とおくと, 次の短完全系列が成り立つ:

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_H^2 \xrightarrow{j} \mathcal{T}^2 \xrightarrow{\text{div}} \oplus^2 \mathcal{T}^1 \longrightarrow 0 \quad (3.4.53)$$

したがって,

$$\mathcal{T}^2 \cong \mathcal{T}_H^2 \oplus (\mathcal{T}^1 \oplus \mathcal{T}^1) \quad (3.4.54)$$

1階テンソル場と1粒子状態の対応は分かっているので, 2階のテンソル場と1粒子状態の対応を決定するには, \mathcal{T}_H^2 のみを処理すれば良い.

$T_{MN}^{(+)}$ が \mathcal{T}_H^2 に属するとき, 偏極テンソル u_{MN} は

$$k^L u_{LM}(k, \sigma) = k^L u_{ML}(k, \sigma) = 0 \quad (3.4.55)$$

を満たす. このとき, Lorentz 変換 $S \in G_0(k_*)$ に対する Δ^u_{MN} は

$$\Delta^{uM_1 M_2}(1 + \delta S) = k_*^{M_1} w_1^{M_2} + k_*^{M_2} w_2^{M_1}; \quad (3.4.56)$$

$$w_1^{M_2} = - \sum_j a_j / \omega_0 u^{jM_2}, \quad w_2^{M_1} = - \sum_j a_j / \omega_0 u^{M_1 j}. \quad (3.4.57)$$

これより, すべての整合性条件を満たすのは

$$u^{MN} = k^M \alpha^N - k^N \alpha^M + ck^M k^N \quad (3.4.58)$$

となる. これは, 場で表すと,

$$T_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M + \partial_M \partial_N \phi \quad (3.4.59)$$

また, 残りの \mathcal{T}_H^2 の場は, 次のゲージ変換に従うゲージ場 ($\in \mathcal{T}_G^2$) と見なされる:

$$\delta T_{MN}^{(\pm)} = \partial_M \xi_N^{(1)} + \partial_N \xi_M^{(2)}. \quad (3.4.60)$$

したがって, 次の完全系列が成り立つ:

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_G^1 \oplus \mathcal{T}^0 \xrightarrow{j} \mathcal{T}_H^2 \xrightarrow{\pi} \mathcal{T}_G^2 \longrightarrow 0 \quad (3.4.61)$$

\mathcal{F}^2 の Lorentz 変換に対する既約分解と一粒子状態との対応は次のようになる：

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}^2 & \text{SO}(D-1, 1) & \text{SO}(D-2) \\
\mathcal{F}^2 \rightarrow \mathcal{F}_{\text{tf}}^2 & \begin{array}{c} [20^{(r-1)}] \\ \frac{(D-1)(D+2)}{2} \end{array} & \xrightarrow{\text{H}} \mathcal{F}_{\text{tf,H}}^2 : \begin{array}{c} \frac{(D-2)(D+1)}{2} \\ \xrightarrow{\pi} \mathcal{F}_{\text{tf,H,G}}^2 : \begin{array}{c} [20^{(r-2)}] \\ \frac{D(D-3)}{2} \end{array} \\ \downarrow \\ \mathcal{F}_{\text{H}}^1 & \xrightarrow{\pi} \mathcal{F}_{\text{H,G}}^1 : \begin{array}{c} [10^{(r-2)}] \\ (D-2) \end{array} \\ & \searrow & \mathcal{F}^0 : \mathbf{1} \partial_M \partial_N \phi \\ & \text{div} & \\ & \mathcal{F}^1 : S^M = \partial_N S^{MN} & \\ & \text{tr} & \\ & S^{MN} = \sigma \eta^{MN} : \mathbf{1} & \\ \\
\mathcal{A}^2 : & \begin{array}{c} [010^{(r-2)}] \\ \frac{D(D-1)}{2} \end{array} & \xrightarrow{\text{H}} \mathcal{A}_{\text{H}}^2 : \begin{array}{c} \frac{(D-1)(D-2)}{2} \\ \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}_{\text{H,G}}^2 : \begin{array}{c} [010^{(r-3)}] \\ \frac{(D-2)(D-3)}{2} \end{array} \\ \searrow & & \downarrow \\ & \text{div} & d\mathcal{F}_{\text{H,G}}^1 : \begin{array}{c} [10^{(r-2)}] \\ (D-2) \end{array} \\ & \mathcal{F}^1 : B^M = \partial_N A^{MN} & \\ & & \end{array}
\end{array} \tag{3.4.62}$$

(3) 3階テンソル場

(3-1) 完全対称テンソル 一般に, r 階完全対称テンソル場 ($\in \mathcal{F}^3$) でトレースがゼロとなる部分空間を $\mathcal{F}_{\text{tf}}^r$, さらに調和ゲージ条件を満たすその部分空間を $\mathcal{F}_{\text{tf,H}}^r$, さらに, ゲージ変換 $\delta S_{a_1 \dots a_r} = \partial_{a_1} S_{a_2 \dots a_r} + \dots + \partial_{a_r} S_{a_1 \dots a_{r-1}}$ ($S_{a_1 \dots a_{r-1}} \in \mathcal{F}_{\text{tf,H}}^{r-1}$) による $\mathcal{F}_{\text{tf,H}}^3$ の剰余空間を $\mathcal{F}_{\text{tf,H,G}}^3$ とする. このとき, D 次元において, \mathcal{F}^3 は次のように, Lorentz 変換に関して

既約分解される：

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{T}^3 & \text{SO}(D-1,1) & \text{SO}(D-2) \\
 \mathcal{T}^3 \xrightarrow{\text{tr}} \mathcal{T}^1 : D & \longrightarrow & \dots \\
 \mathcal{T}^3 \searrow & & \\
 \mathcal{S}_{\text{tf}}^3 : \frac{[30^{(r-1)}]}{\frac{D(D-1)(D+4)}{6}} & \xrightarrow{\text{div}} \mathcal{S}_{\text{tf}}^2 : \frac{(D-1)(D+2)}{2} & \longrightarrow \dots \\
 & \searrow \text{H} & \\
 & \mathcal{S}_{\text{tf,H}}^3 & \xrightarrow{\quad} \partial \mathcal{S}_{\text{tf,H}}^2 \\
 & & \searrow \pi \\
 & & \mathcal{S}_{\text{tf,H,G}}^3 : \frac{[30^{(r-2)}]}{\frac{(D-2)(D-3)(D+2)}{6}}
 \end{array}
 \tag{3.4.63}$$

1 粒子状態に対応する $\text{SO}(D-2)$ の既約表現との対応は次の通り：

$\text{SO}(D-1,1)$	\Rightarrow	$\text{SO}(D-2)$	mul
$\mathcal{S}_{\text{tf}}^3 : [30^{(r-1)}] : \frac{D(D-1)(D+4)}{6}$		$[30^{(r-2)}] : \frac{(D-3)(D^2-4)}{6}$	$\times 1$
		$[20^{(r-2)}] : \frac{D(D-3)}{2}$	$\times 2$
		$[10^{(r-2)}] : D-2$	$\times 3$
		$[0 \cdots 0] : 1$	$\times 4,$
$\mathcal{T}^1 : [10^{(r-1)}] : D$		$[10^{(r-2)}] : D-2$	$\times 1$
		$[0 \cdots 0] : 1$	$\times 2$

(3.4.64)

(3-2) 完全反対称テンソル

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{T}^3 & \text{SO}(D-1,1) & \text{SO}(D-2) \\
 \mathcal{A}^3 : \frac{[0010^{(r-3)}]}{\frac{D(D-1)(D-2)}{6}} & \xrightarrow{\text{div}} \mathcal{A}_{\text{H}}^2 : \frac{(D-1)(D-2)}{2} & \longrightarrow \dots \\
 & \searrow \text{H} & \\
 & \mathcal{A}_{\text{H}}^3 : \frac{(D-1)(D-2)(D-3)}{6} & \xrightarrow{\quad} d\mathcal{A}_{\text{H}}^2 \cong \mathcal{A}_{\text{H,G}}^2 : \frac{(D-2)(D-3)}{2} \\
 & & \searrow \pi \\
 & & \mathcal{A}_{\text{H,G}}^3 : \frac{[0010^{(r-4)}]}{\frac{(D-2)(D-3)(D-4)}{6}}
 \end{array}
 \tag{3.4.65}$$

$D \geq 9$ のとき，1 粒子状態に対応する $\text{SO}(D-2)$ の既約表現との対応は

次の通り :

$$\begin{array}{ll}
 \text{SO}(D-1, 1) & \text{SO}(D-2) \quad \text{mul} \\
 \mathcal{A}^3 :: [0010^{(r-3)}] : \frac{D(D-1)(D-2)}{6} & \Rightarrow [0010^{(r-4)}] : \frac{(D-2)(D-3)(D-4)}{6} \quad \times 1 \\
 & [010^{(r-3)}] : \frac{(D-2)(D-3)}{2} \quad \times 2 \\
 & [10^{(r-2)}] : D-2 \quad \times 1
 \end{array} \quad (3.4.66)$$

$D = 3, \dots, 8$ については, 以下の通り :

D	$\text{SO}(D-1, 1)$	\Rightarrow	$\text{SO}(D-2)$
4	$A1 + A1 : \mathbf{4}[1, 1]$	\Rightarrow	$U(1) : \mathbf{1} \times 4$
5	$B2 : \mathbf{10}[02]$	\Rightarrow	$A1 : \mathbf{1} + \mathbf{3}[2] \times 2 + \mathbf{3}[2]$
6	$D3 : \mathbf{10}[002] + \mathbf{10}^*[020]$	\Rightarrow	$A1 + A1 : \mathbf{4}[1, 1] + (\mathbf{3}[0, 2] + \mathbf{3}^*[2, 0]) \times 2 + \mathbf{4}[1, 1]$
7	$B3 : \mathbf{35}[002]$	\Rightarrow	$B2 : \mathbf{10}[02] + \mathbf{10}[02] \times 2 + \mathbf{5}[10]$
8	$D4 : \mathbf{56}[0011]$	\Rightarrow	$D3 : (\mathbf{10}[002] + \mathbf{10}^*[020]) + \mathbf{15}[011] + \mathbf{6}[100]$

(3.4.67)

(3-3) YT(2,1) 型テンソル場 符号数 (2, 1) のヤング標準盤は,

$$B_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \quad B_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \quad (3.4.68)$$

今 3 次の対称群の要素を

$$e = \text{id}, \quad \alpha_1 = (23), \quad \alpha_2 = (31), \quad \alpha_3 = (12), \quad \beta_1 = (123), \quad \beta_2 = (132) \quad (3.4.69)$$

と名づけると, 各ヤング盤に対応する水平置換群と垂直置換群は

$$\mathfrak{H}(B_1) = \{e, \alpha_3\}, \quad \mathfrak{K}(B_1) = \{e, \alpha_2\}, \quad (3.4.70a)$$

$$\mathfrak{H}(B_2) = \{e, \alpha_2\}, \quad \mathfrak{K}(B_2) = \{e, \alpha_3\}. \quad (3.4.70b)$$

これより, ヤングの対称子と対応する射影演算子は

$$c_1 = c(B_1) = (e + \alpha_3)(e - \alpha_2) = e - \alpha_2 + \alpha_3 - \beta_1 \Rightarrow \hat{c}_1 = e - \alpha_2 + \alpha_3 - \beta_2, \quad (3.4.71a)$$

$$c_2 = c(B_2) = (e + \alpha_2)(e - \alpha_3) = e + \alpha_2 - \alpha_3 - \beta_2 \Rightarrow \hat{c}_2 = e + \alpha_2 - \alpha_3 - \beta_1 \quad (3.4.71b)$$

したがって, 3階テンソル場の $SL(D)$ に関する $YT(2, 1)$ 型の既約成分は

$$\mathcal{F}^{(2,1)}(B_1) = \{T_{abc} = t_{abc} - t_{cba} + t_{bac} - t_{bca} \mid t_{abc} \in \mathcal{F}^3\} \quad (3.4.72a)$$

$$\mathcal{F}^{(2,1)}(B_2) = \{T_{abc} = t_{abc} + t_{cba} - t_{bac} - t_{cab} \mid t_{abc} \in \mathcal{F}^3\} \quad (3.4.72b)$$

各既約成分の次元は

$$\dim(\mathcal{F}^{(2,1)}) = \frac{\Delta(D+1, D-1, D-3, \dots, 0)}{\Delta(D-1, D-2, \dots, 0)} = \frac{1}{3}D(D^2-1). \quad (3.4.73)$$

(3-3-a) 例 \mathcal{F}^3 のベクトル空間としての基底を, $\mathcal{F}^1 = V \cong \mathbb{R}^D$ の基底を e_a ($a = 0, 1, \dots, D-1$) を用いて, $e_{abc} = e_a \otimes e_b \otimes e_c$ と表すことにする. このとき, 例えば, $D = 2$ に対し,

$$\mathcal{F}^{(2,1)}(B_1) = \langle e_{112} - e_{211}, e_{122} - e_{221} \rangle, \quad (3.4.74a)$$

$$\mathcal{F}^{(2,1)}(B_2) = \langle e_{121} - e_{211}, e_{122} - e_{212} \rangle. \quad (3.4.74b)$$

また, GL_3 -同型対応 $\theta: \mathcal{F}^{(2,1)}(B_1) \rightarrow \mathcal{F}^{(2,1)}(B_2)$ を

$$\theta: e_{112} - e_{211} \mapsto e_{121} - e_{211}, \quad e_{122} - e_{221} \mapsto e_{122} - e_{212} \quad (3.4.75)$$

により定義すると,

$$\hat{c}_1 \mathcal{F}^3 = (-2 + \theta) \hat{c}(B_1) \mathcal{F}^3. \quad (3.4.76)$$

$D = 3$ のとき, $YT(2, 1)$ 型の既約成分は

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(2,1)}(B_1) = \langle & e_{112} - e_{211}, e_{113} - e_{311}, e_{122} - e_{221}, e_{312} - e_{231} + e_{132} - e_{231}, \\ & e_{223} - e_{322}, e_{213} - e_{312} + e_{123} - e_{321}, e_{133} - e_{313}, e_{233} \end{aligned} \quad (3.4.77a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(2,1)}(B_2) = \langle & e_{121} - e_{211}, e_{131} - e_{311}, e_{122} - e_{212}, -e_{231} + e_{321} + e_{123} - e_{213}, \\ & e_{132} - e_{312} + e_{123} - e_{213}, e_{133} - e_{313}, e_{232} - e_{322}, e_{233} \end{aligned} \quad (3.4.77b)$$

(3-3-b) Tracefree part: $SO(D-1, 1)$ 分解: $\mathcal{F}_{\text{tf}}^{(2,1)}$ $YT(2, 1)$ 型テンソルのトレースは次のようになる:

$$\begin{aligned} B_1 : (T^{(2,1)})_{ap}{}^p &= \tau_a, \quad (T^{(2,1)})_{pa}{}^p = 0, \quad (T^{(2,1)})_p{}^p{}_a = -\tau_a; \\ \tau_a &\equiv \overset{(1)}{t}_a + \overset{(2)}{t}_a - 2\overset{(3)}{t}_a, \end{aligned} \quad (3.4.78a)$$

$$\begin{aligned} B_2 : (T^{(2,1)})_{ap}{}^p &= \tau_a, \quad (T^{(2,1)})_{pa}{}^p = -\tau_a, \quad (T^{(2,1)})_p{}^p{}_a = 0; \\ \tau_a &\equiv \overset{(1)}{t}_a - 2\overset{(2)}{t}_a + \overset{(3)}{t}_a. \end{aligned} \quad (3.4.78b)$$

ここで,

$$t_a^{(1)} = t_{ap}{}^p, \quad t_a^{(2)} = t_{pa}{}^p, \quad t_a^{(3)} = t_p{}^p{}_a. \quad (3.4.79)$$

これより, $\mathcal{F}^{(2,1)}$ のトレースとトレースフリー部分への分解は

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{\text{tf}}^{(2,1)} \xrightarrow{j} \mathcal{F}^{(2,1)} \xrightarrow{\text{tr}} \mathcal{F}^1 \longrightarrow 0 \quad (3.4.80)$$

となり, トレースフリー部分の次元は

$$\dim \mathcal{F}_{\text{tf}}^{(2,1)} = \frac{D(D^2 - 1)}{3} - D = \frac{D(D^2 - 4)}{3}. \quad (3.4.81)$$

(3-3-c) 調和分解: $\mathcal{F}_{\text{tf,H}}^{(2,1)}$ YT(2, 1)[B_1] 型テンソルに対して, $k = (1, 0, \dots, 0, 1)$ を基準光的ベクトルとして,

$$k^c T_{cab} = t_{kab} + t_{akb} - 2t_{(ab)k}, \quad (3.4.82a)$$

$$t^c T_{acb} = 2t_{k[ab]} + t_{akb} - t_{bka}, \quad (3.4.82b)$$

$$k^c T_{abc} = t_{kba} + t_{bka} - 2t_{k(ab)} \quad (3.4.82c)$$

より,

$$\begin{aligned} \text{div} T &\equiv k^c T_{cab} \oplus t^c T_{acb} \oplus k^c T_{abc} \\ &\cong \langle v_{ab} \equiv t_{kab} + t_{akb} - 2t_{(ab)k}; a, b = 0, \dots, D-1 \rangle \end{aligned} \quad (3.4.83)$$

とおくと, 次の短完全系列が成り立つ:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{\text{tf,H}}^{(2,1)} \xrightarrow{j} \mathcal{F}_{\text{tf}}^{(2,1)} \xrightarrow{\text{div}} \mathcal{F}_{\text{tf,H}}^2 \oplus \mathcal{F}_{\text{H}}^1 \longrightarrow 0. \quad (3.4.84)$$

$T_{abc} \in \mathcal{F}_{\text{tf}}^{(2,1)}$ のとき,

$$v^a{}_a = 0, \quad v_{ab} k^b = 0 \quad (3.4.85)$$

となるので, $D \geq 4$ のとき,

$$\dim \text{div} \mathcal{F}_{\text{tf}}^{(2,1)} = D^2 - 1 - D \Rightarrow \dim \mathcal{F}_{\text{tf,H}}^{(2,1)} = \frac{D(D^2 - 4)}{4} - D^2 + D + 1 = \frac{(D-3)(D^2 - 1)}{3}. \quad (3.4.86)$$

(3-3-d) ゲージ不変自由度： $\mathcal{F}_{\text{tf,H,G}}^{(2,1)}$ テンソル場 t_{abc} のゲージ変換

$$\delta t_{abc} = k_a \overset{(1)}{\xi}_{bc} + k_b \overset{(2)}{\xi}_{bc} + k_c \overset{(3)}{\xi}_{ab} \quad (3.4.87)$$

に対して、その YT(2,1) 既約成分は

$$B_1 : \delta T_{abc} = k_a \chi_{bc} + 2k_b (\chi_{[ac]} - k_c \chi_{ba}); \quad (3.4.88a)$$

$$\chi_{ab} \equiv \overset{(1)}{\xi}_{ab} + \overset{(2)}{\xi}_{ab} - 2 \overset{(3)}{\xi}_{(ab)}, \quad (3.4.88b)$$

$$B_2 : \delta T_{abc} = k_a \chi'_{bc} - k_b \chi'_{ac} - 2k_c (\chi'_{[ab]}); \quad (3.4.88c)$$

$$\chi'_{ab} \equiv \overset{(1)}{\xi}_{ab} + \overset{(3)}{\xi}_{ba} - 2 \overset{(2)}{\xi}_{(ab)}, \quad (3.4.88d)$$

$$(3.4.88e)$$

と変換する．ここで、 δT_{abc} が再び $\mathcal{F}_{\text{tf,H}}^{(2,1)}$ に属するための必要十分条件は、 $\chi_{ab}(\chi'_{ab})$ が $\mathcal{F}_{\text{tf,H}}^2$ に属すること．これは、 χ_{ab} に対する $2D - 1 + 1 = 2D$ 個の拘束条件を与える．さらに、 χ_{ab} のゲージ変換

$$\delta \chi_{ab} = k_a \overset{(1)}{\lambda}_b + k_b \overset{(2)}{\lambda}_a \quad (3.4.89)$$

に対し、 $\mathcal{F}_{\text{tf,H}}^{(2,1)}$ のゲージ自由度 $\delta_\chi T_{abc}^{(2,1)}$ は、 B_1 タイプの場合、

$$\delta_\lambda (\delta_\chi T_{abc}) = k_a k_b \lambda_c - k_b k_c \lambda_a; \quad \lambda_a = 2 \overset{(1)}{\lambda}_a - \overset{(2)}{\lambda}_a \quad (3.4.90)$$

と変換する．これがゼロとなるのは、

$$\overset{(2)}{\lambda}_a = 2 \overset{(1)}{\lambda}_a + \sigma k_a \quad (3.4.91)$$

となるときなので、 χ_{ab} の無効なゲージ変換は、1 個のベクトル型自由度 λ'_a を用いて、

$$\delta \chi_{ab} = k_a \lambda'_a + 2k_b \lambda'_a; \quad \lambda'_a = \overset{(1)}{\lambda}_a + \frac{1}{3} \sigma k_a \quad (3.4.92)$$

と表される．この自由度は、 $D - 1$ ．

したがって、分解

$$0 \longrightarrow \delta \mathcal{F}_{\text{tf,H}}^{(2,1)} \cong \partial \mathcal{F}_{\text{tf,H,G}}^2 \xrightarrow{j} \mathcal{F}_{\text{tf,H}}^{(2,1)} \xrightarrow{\pi} \mathcal{F}_{\text{tf,H,G}}^{(2,1)} \longrightarrow 0 \quad (3.4.93)$$

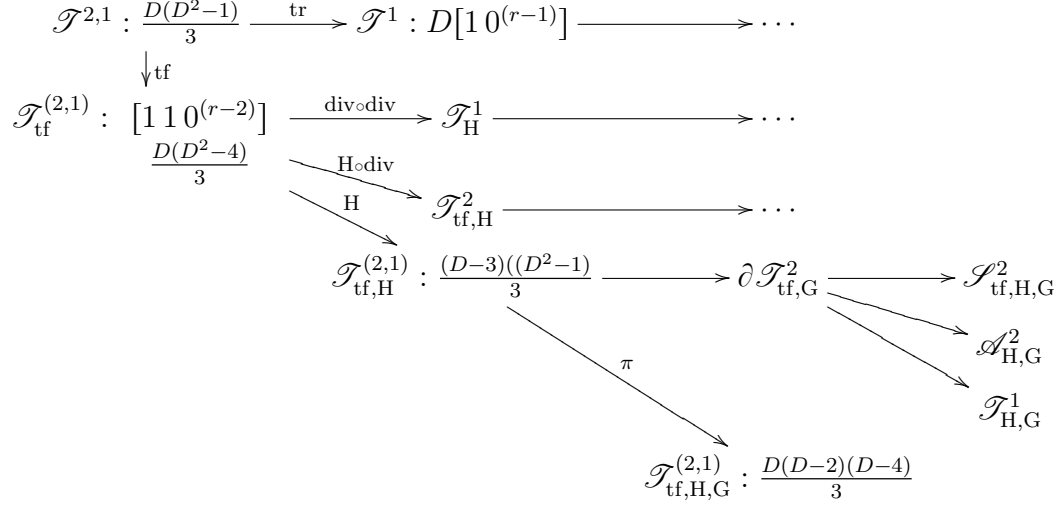


図 1: ゼロ質量 YT(2, 1) 型テンソル場の既約分解の流れ図

において

$$\dim \partial \mathcal{T}_{\text{tf,H,G}}^2 = D^2 - 2D - (D - 1) = D^2 - 3D + 1, \quad (3.4.94a)$$

$$\dim \partial \mathcal{T}_{\text{tf,H,G}}^{(2,1)} = \frac{1}{3}(D - 3)(D^2 - 1) - (D^2 - 3D + 1) = \frac{1}{3}D(D - 2)(D - 4). \quad (3.4.94b)$$

(4) 4 階以上のテンソル場 一般に n 階テンソル場 $T^{M_1 \dots M_n} \in \mathcal{T}^n$ に対して,

$$\mathcal{T}_H^n \equiv \{T^{M_1 \dots M_n} \mid \partial_N T^{N \dots M_n} = \dots = \partial_N T^{M_1 \dots N} = 0\}, \quad (3.4.95)$$

$$\text{div} : T^{M_1 \dots M_n} \mapsto (\partial_N T^{N \dots M_n}, \dots, \partial_N T^{M_1 \dots N}) \quad (3.4.96)$$

とおくと, 次の短完全系列が成り立つ:

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_H^n \xrightarrow{j} \mathcal{T}^n \xrightarrow{\text{div}} \bigoplus^n \mathcal{T}^{n-1} \longrightarrow 0 \quad (3.4.97)$$

したがって,

$$\mathcal{T}^n \cong \mathcal{T}_H^n \oplus \left(\bigoplus^n \mathcal{T}^{n-1} \right) \quad (3.4.98)$$

したがって, 帰納的に $(n - 1)$ 階以下のテンソル場と 1 粒子状態の対応が分かっているとすると, n 階のテンソル場と 1 粒子状態の対応を決定するには, \mathcal{T}_H^n のみを処理すれば良い. 以下, $D \geq 3$ を仮定する.

SO($D-1, 1$)	m	dim	[110 ^($r-2$)]	[1100]	[110]	[111]	[12]	[3, 1]
			$D \geq 9$	$D = 8$	$D = 7$	$D = 6$	$D = 5$	$D = 4$
$\mathcal{F}_{\text{tf,H,G}}^{(2,1)}$	1	$\frac{D(D-2)(D-4)}{3}$	[110 ^($r-3$)]	[111]	[12]	[3, 1]	[4]	+
						[1, 3]		-
$\mathcal{S}_{\text{tf,H,G}}^2$	2	$\frac{D(D-3)}{2}$	[20 ^($r-2$)]	[200]	[20]	[2, 2]	[4]	2
$\mathcal{A}_{\text{H,G}}^2$	2	$\frac{(D-2)(D-3)}{2}$	[010 ^($r-3$)]	[01]	[02]	[0, 2]	[2]	1
						[2, 0]		
$\mathcal{T}_{\text{H,G}}^1$	4 + 1	$D - 2$	[10 ^($r-2$)]	[100]	[10]	[1, 1]	[2]	2
\mathcal{T}^0	2 + 2	1	[0 ^($r-1$)]	[000]	[00]	[0, 0]	[0]	1

表 7: YT(2, 1) 型のテンソル場の SO($D-1, 1$) に関する既約分解と, 1 粒子状態を表す SO($D-2$) に関する既約表現の対応

D	SO($D-2$) - rep	\rightarrow	$D = 4$ helicity contents		
			± 2	± 1	0
11	231 [1100]	\rightarrow	7	49	119
10	160 [110]	\rightarrow	6	36	76
9	105 [110]	\rightarrow	5	25	45
8	65 [111]	\rightarrow	4	16	24
7	36 [12]	\rightarrow	3	9	11

表 8: D 次元における YT(2, 1) 型テンソル場の 4 次元への次元低下で得られる 1 粒子状態のヘリシティ

\mathcal{T}_H^n の分解 \mathcal{T}_H^n の元に属する場の偏極テンソル $u^{M_1 \cdots M_n}(k_*, \sigma)$ に対し,

$$\Delta u_{\sigma}^{u \cdots j \cdots p \cdots} (1 + \delta S) = -a_j(k_{*N}/\omega_0) u^{\cdots N \cdots p \cdots} + \cdots - \sum_i a_i u^{\cdots j \cdots i \cdots} \quad (3.4.99)$$

より,

$$\Delta u^{M_1 \cdots M_n} = k_*^{M_1} \lambda_1^{M_2 \cdots M_n} + \cdots + k_*^{M_i} \lambda_i^{(M_1 \cdots M_n)/M_i} + \cdots + k_*^{M_n} \lambda_n^{M_1 \cdots M_{n-1}}. \quad (3.4.100)$$

すなわち,

$$\delta T^{M_1 \cdots M_n} = \partial^{M_1} \Lambda_1^{M_2 \cdots M_n} + \cdots + \partial^{M_i} \Lambda_i^{(M_1 \cdots M_n)/M_i} + \cdots + \partial^{M_n} \Lambda_n^{M_1 \cdots M_{n-1}}. \quad (3.4.101)$$

これより, 次の図式が得られる:

$$\begin{array}{ccccccc} \oplus^n \mathcal{T}_H^{n-1} & \oplus^n (\oplus^{n-1} \mathcal{T}_H^{n-2}) & \cdots & \oplus^{nC_k} (\oplus^k \mathcal{T}_H^{k-1}) & \cdots & \oplus^n \mathcal{T}_H^0 & \\ \downarrow \partial_n & \swarrow \cong \downarrow \partial_{n-1} & & \swarrow j_k \downarrow \partial_k & & \swarrow j_1 \downarrow \partial_1 & \swarrow j_0 \\ \mathcal{T}_H^n & \leftarrow \partial_n \oplus^n \mathcal{T}_H^{n-1} & \leftarrow \partial'_{n-1} \cdots & \leftarrow \partial'_{k+1} \oplus^{nC_k} \mathcal{T}_H^k & \leftarrow \partial'_k \cdots & \leftarrow \partial'_2 \oplus^n \mathcal{T}_H^1 & \leftarrow \partial'_1 \mathcal{T}_H^0 \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots & \downarrow & \\ \mathcal{T}_G^{n,n} & \mathcal{T}_G^{n,n-1} & \cdots & \mathcal{T}_G^{n,k} & \cdots & \mathcal{T}_G^{n,1} & \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots & \downarrow & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \end{array} \quad (3.4.102)$$

ここで, $\alpha = [\alpha_1, \cdots, \alpha_m]$ に対し,

$$\{\alpha\} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}, \quad (3.4.103)$$

$$\partial^{M_\alpha} = \partial^{M_{\alpha_1}} \cdots \partial^{M_{\alpha_m}}, \quad (3.4.104)$$

$$M_\alpha = M_{\alpha_1} \cdots M_{\alpha_m}. \quad (3.4.105)$$

$$*\alpha = (1, 2, \cdots, n)/(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \quad (3.4.106)$$

として

$$\partial_k : \oplus^k \mathcal{T}_H^{k-1} \ni \oplus_{i=1}^k \Lambda_{\{*\alpha\}, \alpha_i}^{M_{\alpha/\alpha_i}} \mapsto \sum_{i=1}^k \partial^{M_{\alpha_i}} \Lambda_{\{*\alpha\}, \alpha_i}^{M_{\alpha/\alpha_i}} \in \mathcal{T}_H^k \{\alpha\} \quad (3.4.107a)$$

$$\partial'_k : \oplus^{nC_{k-1}} \mathcal{T}_H^{k-1} \ni \oplus_{\beta} T_{*\beta}^{M_\beta} \mapsto \oplus_{\alpha} \sum_{i=1}^k \partial^{M_{\alpha_i}} T_{\{*\alpha, \alpha_i\}}^{M_{\alpha/\alpha_i}} \in \oplus^{nC_k} \mathcal{B}_H^k \{\alpha\} \quad (3.4.107b)$$

$$j_k : \oplus^{nC_k} \mathcal{T}_H^k \ni \oplus_{\beta} T_{*\beta}^{M_\beta} \mapsto \oplus_{\alpha} \oplus_{i=1}^{k+1} T_{\{*\alpha, \alpha_i\}}^{M_{\alpha/\alpha_i}} \in \oplus^{nC_{k+1}} (\oplus^{k+1} \mathcal{B}_H^k) \{\alpha\} \quad (3.4.107c)$$

ただし, $\partial_{k+1}j_k = \partial'_{k+1}$ で,

$$\text{Im } \partial_n \partial'_{n-1} \cdots \partial'_{k+1} \partial_k = \text{Im } \partial_n \partial'_{n-1} \cdots \partial'_{k+1} \partial_{k'} \quad (3.4.108)$$

となる. また, 上の図式において,

$$\mathcal{T}_G^{n,k} \equiv \mathcal{T}_H^{n,k} / \mathcal{T}_H^{n,k-1} : \quad \mathcal{T}_H^{n,k} \equiv \text{Im } \partial_n \partial'_{n-1} \cdots \partial'_{k+1} \quad (3.4.109)$$

で, 縦の系列は完全である. なお,

$$\text{Im } \partial_n \partial'_{n-1} \cdots \partial'_k = \text{Im } \partial_n \partial'_{n-1} \cdots \partial'_{k+1} \partial_k \quad (3.4.110)$$

なので,

$$\mathcal{T}_G^{n,k} \cong \partial_n \partial'_n \cdots \partial'_{k+1} \left(\oplus^{nC_k} \left(\mathcal{T}_H^k / \oplus^k \mathcal{T}_H^{k-1} \right) \right) \quad (3.4.111)$$

である.

これらより,

$$\mathcal{T}_H^n \cong \mathcal{T}_G^{n,n} \oplus \mathcal{T}_G^{n,n-1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{T}_G^{n,k} \oplus \cdots \oplus \mathcal{T}_G^{n,1} \oplus \mathcal{T}^0 \quad (3.4.112)$$

が成り立つ. ここで,

$$\dim \mathcal{T}_H^k = D^k - kD^{k-1} + {}_k C_2 D^{k-2} - \cdots + (-1)^k {}_k C_k = (D-1)^k \quad (3.4.113a)$$

$$\dim \mathcal{T}_H^{n,k} = {}_n C_k \times \dim \mathcal{T}_H^k - ({}_n C_k - 1), \quad (3.4.113b)$$

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{T}_G^{n,k} &= \dim \mathcal{T}_H^{n,k} - \dim \mathcal{T}_H^{n,k-1} \quad (k = 1, \dots, n) \\ &= \frac{n!}{k!(n-k+1)!} \{ (n-k+1)(D-1)^k - k(D-1)^{k-1} - n + 2k - 1 \} \end{aligned} \quad (3.4.113c)$$

が成り立つ.

以上の分解を, 完全対称テンソルに限定すると, 次の図式が得られる:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{T}_H^{n-1} & \mathcal{T}_H^{n-2} & \cdots & \mathcal{T}_H^{k-1} & \cdots & \mathcal{T}_H^0 & \\ \downarrow \partial_n & \swarrow \cong \downarrow \partial_{n-1} & & \swarrow \cong \downarrow \partial_k & & \swarrow \cong \downarrow \partial_1 & \swarrow \cong \\ \mathcal{T}_H^n & \mathcal{T}_H^{n-1} & \cdots & \mathcal{T}_H^k & \cdots & \mathcal{T}_H^1 & \mathcal{T}^0 \\ \leftarrow \partial_n & \leftarrow \partial_{n-1} & \cdots & \leftarrow \partial_{k+1} & \cdots & \leftarrow \partial_2 & \leftarrow \partial_1 \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots & \downarrow & \\ \mathcal{T}_G^n & \mathcal{T}_G^{n-1} & \cdots & \mathcal{T}_G^k & \cdots & \mathcal{T}_G^1 & \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots & \downarrow & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \end{array} \quad (3.4.114)$$

これより,

$$\mathcal{S}_H^n \cong \mathcal{S}_G^n \oplus \mathcal{S}_G^{n-1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{S}_G^k \oplus \cdots \oplus \mathcal{S}_G^1 \oplus \mathcal{T}^0 \quad (3.4.115)$$

および,

$$\dim \mathcal{S}_H^k = {}_{D+k-1}C_k - {}_{D+k-2}C_{k-1} = {}_{D+k-2}C_k, \quad (3.4.116a)$$

$$\dim \mathcal{S}_H^{n,k} = \dim \mathcal{S}_H^k, \quad (3.4.116b)$$

$$\dim \mathcal{S}_G^k = \dim \mathcal{S}^{n,k} = \dim \mathcal{S}_H^k - \dim \mathcal{S}_H^{k-1} = {}_{D+k-3}C_k. \quad (3.4.116c)$$

が成り立つ.

また, 完全反対称テンソルに限定すると, 次の図式を得る:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{A}_H^{n-1} & & \mathcal{A}_H^{n-2} & \\ & \downarrow d & \swarrow \cong & \downarrow d & \swarrow \cong \\ & \mathcal{A}_H^n & \xleftarrow{d} & \mathcal{A}_H^{n-1} & \xleftarrow{d} & \mathcal{A}_H^{n-2} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \\ & \mathcal{A}_G^n & & \mathcal{A}_G^{n-1} & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \\ & 0 & & 0 & & \end{array} \quad (3.4.117)$$

ここで, 水平方向の系列は完全. これより,

$$\mathcal{A}_H^n \cong \mathcal{A}_G^n \oplus \mathcal{A}_G^{n-1} \quad (3.4.118)$$

および

$$\dim \mathcal{A}_H^k = {}_D C_k - {}_D C_{k-1} + \cdots + (-1)^i {}_D C_0 = {}_{D-1} C_k \quad (k = 1, \dots, D) \quad (3.4.119a)$$

$$\dim \mathcal{A}_G^n = {}_{D-2} C_n. \quad (3.4.119b)$$

が成り立つ.

最後に, 整合性条件が満たされるのは

$$\Delta^{uM_1 \cdots M_n} \equiv k_*^{M_1} \lambda_1^{M_2 \cdots M_n} + \cdots + k_*^{M_n} \lambda_n^{M_1 \cdots M_{n-1}} = 0, \quad (3.4.120)$$

$$\lambda_\alpha = -a_i u^{M_{*(\alpha)}} \quad (3.4.121)$$

この式において, 添え字 M_1, \dots, M_n の一個を $p = 0, D-1$, 残りを $j_1, \dots, j_{n-1} = 1, \dots, D-2$ とおくと,

$$u^{j_1 \cdots j_n} = 0, \quad i_1, \dots, i_n = 1, \dots, D-2 \quad (3.4.122)$$

これより, $\mathcal{T}_G^{n,n}$ は, \mathcal{T}_H^n においてゲージ不変なテンソルで表される成分を持たない.

一方, $1 \leq M_\alpha \leq D-2$ となる α が 1 個の成分については,

$$u^{M_1 \dots M_{\alpha-1} i M_\alpha \dots M_{n-1}}(k_*) = u_{(\alpha)}^i k_*^{M_1} \dots k_*^{M_{n-1}}; \quad u_{(1)}^i + u_{(2)}^i + \dots + u_{(n)}^i = 0. \quad (3.4.123)$$

より, $\mathcal{T}_G^{n,1}$ は, \mathcal{T}_H^n においてゲージ不変なテンソル表現をもつ成分を $(n-1)$ 個持つ:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_H^{n,1} \ni T_{M_1 \dots M_n} &= \partial_{M_2} \dots \partial_{M_n} V_{(1)M_1} + \dots + \partial_{M_1} \dots \partial_{M_{n-1}} V_{(n)M_n}, \\ \partial_M V_{(\alpha)}^M &= 0, \quad V_{(1)}^M + \dots + V_{(n)}^M = 0, \\ \delta_G V_{(\alpha)M} &= \partial_M \Lambda_{(\alpha)}; \quad \sum_{\alpha=1}^n \Lambda_{(\alpha)} = 0 \end{aligned} \quad (3.4.124a)$$

また, すべての添え字が $0, D-1$ のとき,

$$u^{p_1 \dots p_n} = c k_*^{p_1} \dots k_*^{p_n} \quad (3.4.125)$$

より,

$$\mathcal{T}_H^{n,0} \cong \mathcal{T}^0: \quad T_{M_1 \dots M_n} = \partial_{M_1} \dots \partial_{M_n} \phi \quad (3.4.126)$$

もゲージ不変.

$\mathcal{T}_{H,\text{tf}}^n$ の分解 l_* を

$$k_* \cdot l_* = -1, \quad l_* \cdot l_* = 0 \quad (3.4.127)$$

を満たす光的ベクトルとして, 任意の $T^{M_1 \dots M_n} \in \mathcal{T}_H^n$ に対して,

3.4.4 スカラ場

3.4.4.1 古典論

作用

$$S = \int d^{n+1}x \left(-\frac{1}{2}(\partial\Phi)^2 - \frac{m^2}{2}\Phi^2 \right). \quad (3.4.128)$$

場の方程式

$$\square\Phi - m^2\Phi = 0. \quad (3.4.129)$$

Klein-Gordon 内積

$$N(\Phi_1, \Phi_2) = i \int_{\Sigma} d\Sigma^{\mu} \Phi_1^{\dagger} \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \Phi_2. \quad (3.4.130)$$

解の基本系

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{k}}(x) &= e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad \Phi_{\mathbf{k}}(x)^*; \\ N(\Phi_{\mathbf{k}}, \Phi_{\mathbf{k}'}) &= 2\omega(\mathbf{k})V\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = 2\omega(\mathbf{k})(2\pi)^n\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (3.4.131)$$

正準形式共役運動量を $\Pi = \dot{\Phi}$ として,

$$\mathcal{L} = \dot{\Phi}\Pi - \mathcal{H}; \quad (3.4.132)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{m^2}{2}\Phi^2. \quad (3.4.133)$$

3.4.4.2 量子論

体積 V の直方体内の実自由場 Φ を考える (多成分でもよい). (周期境界条件の下で) Φ が従う方程式の解の完全系を $\Phi_{\mathbf{k},\iota}(x) = u_{\iota}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$ とし、次のように規格化する:

$$\begin{aligned} N(\Phi_{\mathbf{k},\iota}, \Phi_{\mathbf{k}',\iota'}) &= C_{\iota}(\mathbf{k})V\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \\ \Leftrightarrow 2\omega(\mathbf{k})u_{\iota}(\mathbf{k})u_{\iota'}(\mathbf{k})^{\dagger} &= \delta_{\iota\iota'}C_{\iota}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (3.4.134a)$$

このとき, $k^0 = \omega = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}$ とし,

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k},\iota} (u_{\iota}(\mathbf{k})\alpha_{\iota}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + u_{\iota}(\mathbf{k})^*\alpha_{\iota}(\mathbf{k})^{\dagger}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) \\ &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} (u_{\iota}(\mathbf{k})\alpha_{\iota}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + u_{\iota}(\mathbf{k})^*\alpha_{\iota}(\mathbf{k})^{\dagger}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (3.4.135)$$

と展開すると,

$$N(\Phi_{\mathbf{k},\iota}, \Phi) = C_{\iota}(\mathbf{k})\alpha_{\iota}(\mathbf{k}), \quad N(\Phi_{\mathbf{k},\iota}^*, \Phi) = -C_{\iota}(\mathbf{k})^*\alpha_{\iota}(\mathbf{k})^{\dagger} \quad (3.4.136)$$

より, CCR

$$[\Phi(x), \dot{\Phi}^{\dagger}(x')] = i\delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3.4.137)$$

は

$$[\alpha_l(\mathbf{k}), \alpha_{l'}(\mathbf{k}')^\dagger] = \frac{V}{C_l(\mathbf{k})} \delta_{l,l'} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \frac{(2\pi)^n}{C_l(\mathbf{k})} \delta_{l,l'} \delta^n(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (3.4.138)$$

これより,

$$\langle 0 | \Phi(x) \alpha_l(\mathbf{k})^\dagger | 0 \rangle = \frac{u_l(\mathbf{k})}{C_l(\mathbf{k})} e^{ik \cdot x}. \quad (3.4.139)$$

さらに,

$$H = \int_V d^n x \frac{1}{2} \left(|\dot{\Phi}|^2 + |\nabla \Phi|^2 + m^2 |\Phi|^2 \right) \quad (3.4.140)$$

に対して,

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\mathbf{k}, l} \omega(\mathbf{k}) \left(\frac{C_l(\mathbf{k})}{V} \alpha_l(\mathbf{k})^\dagger \alpha_l(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right) \\ &= \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \omega(\mathbf{k}) \sum_l \left(C_l(\mathbf{k}) \alpha_l(\mathbf{k})^\dagger \alpha_l(\mathbf{k}) + \frac{V}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.4.141)$$

以上より, $C_l(\mathbf{k}) = V$ と取れば, $\alpha_{\mathbf{k}, l}$ は標準的な消滅演算子 $a_{\mathbf{k}, l}$ となる.

Feynman 伝搬関数は

$$\langle T(\Phi^a(x) \Phi^b(y)) \rangle = \delta^{ab} \int \frac{d^{n+1}k}{(2\pi)^{n+1}} \frac{-i}{k^2 + m^2 - i\epsilon} e^{ik \cdot (x-y)}. \quad (3.4.142)$$

3.4.5 電磁場

3.4.5.1 古典論

作用 (Landau ゲージ)

$$S = \int d^{n+1}x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - B \partial_\mu A^\mu \right). \quad (3.4.143)$$

場の方程式

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} + \partial_\mu B = 0, \quad (3.4.144a)$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (3.4.144b)$$

これより,

$$\square A_\mu + \partial_\mu B = 0, \quad (3.4.145a)$$

$$\square B = 0. \quad (3.4.145b)$$

正準理論

$$E_i = F_{i0} = \partial_i A_0 - \dot{A}_i \quad (3.4.146)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -E^j \dot{A}_j + B \dot{A}_0 - \mathcal{H}; \\ \mathcal{H} &= \frac{1}{2} E_j E^j + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - E^j \partial_j A_0 + B \partial_i A^i. \end{aligned} \quad (3.4.147)$$

運動方程式は

$$\dot{A}_j = -E_j + \partial_j A_0, \quad (3.4.148a)$$

$$\dot{E}_j = \partial^k E_{jk} - \partial_j B, \quad (3.4.148b)$$

$$\dot{A}_0 = \partial_j A^j, \quad (3.4.148c)$$

$$\dot{B} = -\partial_i E^i. \quad (3.4.148d)$$

一般解 \square に対する遅延 Green 関数が³

$$\begin{aligned} \Delta_R(x) &= \theta(x^0) \Delta(x); \\ \Delta(x) &= +i \int \frac{d^{n+1}p}{(2\pi)^n} \epsilon(p^0) \delta(p^2) e^{ip \cdot x} \end{aligned} \quad (3.4.149)$$

で与えられる :

$$\square \Delta_R(x) = \delta^{n+1}(x). \quad (3.4.150)$$

これより, 一般解は $\omega = |\mathbf{p}|, p = (\omega, \mathbf{p})$ として,

$$B(x) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} (b(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} + b(\mathbf{p})^* e^{-ip \cdot x}), \quad (3.4.151)$$

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= - \int_{t=0} d^n y \Delta_R(x-y) \overleftrightarrow{\partial}_t A_\mu(y) + \int_{t \geq 0} d^{n+1} y \Delta_R(x-y) (-\partial_\mu B(y)) \\ &= \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{1}{2\omega} (\alpha_\mu(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} + \alpha_\mu(\mathbf{p})^* e^{-ip \cdot x}) \\ &\quad + \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{p_\mu}{4\omega^2} [b(\mathbf{p}) \{2\omega t - i(1 - e^{2i\omega t})\} e^{ip \cdot x} + \text{cc}]. \end{aligned} \quad (3.4.152)$$

ただし, b と α_μ には次の関係がある :

$$a_L(\mathbf{p}) := \alpha_0(\mathbf{p}) + \frac{p^j}{\omega} \alpha_j(\mathbf{p}) = i(b(\mathbf{p}) - b(-\mathbf{p})^*). \quad (3.4.153)$$

3.4.5.2 量子論

一般解より, 基本場は作用素 $\alpha(\mathbf{p}), b(\mathbf{p})$ を用いて

$$B(x) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} (b(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} + b(\mathbf{p})^\dagger e^{-ip \cdot x}), \quad (3.4.154)$$

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{1}{2\omega} (\alpha_\mu(\mathbf{p})e^{ip \cdot x} + \alpha_\mu(\mathbf{p})^\dagger e^{-ip \cdot x}) \\ &\quad + \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{p_\mu}{4\omega^2} [b(\mathbf{p}) \{2\omega t - i(1 - e^{2i\omega t})\}] e^{ip \cdot x} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (3.4.155)$$

ただし,

$$a_L(\mathbf{p}) := \alpha_0(\mathbf{p}) + \frac{p^j}{\omega} \alpha_j(\mathbf{p}) = i(b(\mathbf{p}) - b(-\mathbf{p})^\dagger). \quad (3.4.156)$$

これより, $t = 0$ で

$$B(0, \mathbf{r}) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} (b(\mathbf{p}) + b(-\mathbf{p})^\dagger) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.4.157a)$$

$$A_\mu(0, \mathbf{r}) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{1}{2\omega} (\alpha_\mu(\mathbf{p}) + \alpha_\mu(-\mathbf{p})^\dagger) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.4.157b)$$

$$\dot{A}_\mu(0, \mathbf{r}) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{-i}{2} (\alpha_\mu(\mathbf{p}) - \alpha_\mu(-\mathbf{p})^\dagger) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.4.157c)$$

$$E_j(0, \mathbf{r}) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{i}{2\omega} \{p_j(\alpha_0(\mathbf{p}) + \alpha_0(-\mathbf{p})^\dagger) + \omega(\alpha_j(\mathbf{p}) - \alpha_j(-\mathbf{p})^\dagger)\} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.4.157d)$$

これらを b, α_μ について解くと,

$$b(\mathbf{p}) = \int d^n \mathbf{r} \{\omega B(0, \mathbf{r}) - p^j E_j(0, \mathbf{r})\} e^{-\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.4.158a)$$

$$a_0(\mathbf{p}) = \int d^n \mathbf{r} \{\omega A_0(0, \mathbf{r}) - p^j A_j(0, \mathbf{r})\} e^{-\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.4.158b)$$

$$a_j(\mathbf{p}) = \int d^n \mathbf{r} \{\omega A_j(0, \mathbf{r}) - p^j A_0(0, \mathbf{r}) - iE_j(0, \mathbf{r})\} e^{-\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.4.158c)$$

よって, 正準交換関係は

$$a_\iota(\mathbf{p}) = \epsilon_\iota^\mu(\mathbf{p}) \alpha_\mu(\mathbf{p}); \quad (3.4.159)$$

$$\epsilon_\iota \cdot \epsilon_{\iota'} = \delta_{\iota\iota'}, \quad \mathbf{p} \cdot \epsilon_\iota = 0, \quad (3.4.160)$$

とおくと

$$[a_\ell(\mathbf{p}), a_{\ell'}(\mathbf{p}')] = 0, \quad (3.4.161a)$$

$$[a_\ell(\mathbf{p}), a_{\ell'}(\mathbf{p}')^\dagger] = 2\omega\delta_{\ell\ell'}(2\pi)^n\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (3.4.161b)$$

$$[\alpha_0(\mathbf{p}), a_{\ell'}(\mathbf{p}')] = [\alpha_0(\mathbf{p}), a_{\ell'}(\mathbf{p}')^\dagger] = 0, \quad (3.4.161c)$$

$$[b(\mathbf{p}), a_{\ell'}(\mathbf{p}')] = [b(\mathbf{p}), a_{\ell'}(\mathbf{p}')^\dagger] = 0, \quad (3.4.161d)$$

$$[\alpha_0(\mathbf{p}), \alpha_0(\mathbf{p}')] = [\alpha_0(\mathbf{p}), \alpha_0(\mathbf{p}')^\dagger] = 0, \quad (3.4.161e)$$

$$[b(\mathbf{p}), b(\mathbf{p}')] = [b(\mathbf{p}), b(\mathbf{p}')^\dagger] = 0, \quad (3.4.161f)$$

$$[\alpha_0(\mathbf{p}), b(\mathbf{p}')^\dagger] = 0, \quad (3.4.161g)$$

$$[\alpha_0(\mathbf{p}), b(\mathbf{p})] = i\omega(2\pi)^n\delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}'). \quad (3.4.161h)$$

\hat{p}_μ を

$$(\hat{p}^\mu) = (1, \mathbf{p}^j/\omega) \quad (3.4.162)$$

により導入すると,

$$\eta_{\mu\nu} = \sum_\ell \epsilon_{\ell\mu}\epsilon_{\ell\nu} + \hat{k}_\mu\hat{k}_\nu + \hat{k}_\mu\delta_\nu^0 + \hat{k}_\nu\delta_\mu^0 \quad (3.4.163)$$

より,

$$\alpha_\mu(\mathbf{p}) = \epsilon_{\ell\mu}a_\ell(\mathbf{p}) + \hat{k}_\mu(a_L(\mathbf{p}) + \alpha_0(\mathbf{p})) + \delta_\mu^0 a_L(\mathbf{p}). \quad (3.4.164)$$

真空 $|0\rangle$ を

$$a_\ell(\mathbf{p})|0\rangle = b(\mathbf{p})|0\rangle = \alpha_0(\mathbf{p})^\dagger|0\rangle = 0 \quad (3.4.165)$$

により定義し, これから Fock 空間 \mathcal{H} を構成する. さらに, 物理状態の空間 $\tilde{\mathcal{H}}_{\text{Phys}} \subset \mathcal{H}$ と物理的作用素 $\mathcal{O}_{\text{Phys}}$ を

$$\Phi \in \tilde{\mathcal{H}}_{\text{Phys}} \Leftrightarrow b(\mathbf{p})\Phi = 0, \quad \forall \mathbf{p}, \quad (3.4.166a)$$

$$O \in \mathcal{O}_{\text{Phys}} \Leftrightarrow O\tilde{\mathcal{H}}_{\text{Phys}}, O^\dagger\tilde{\mathcal{H}}_{\text{Phys}} \subset \tilde{\mathcal{H}}_{\text{Phys}} \quad (3.4.166b)$$

により定義すると,

$$\mathcal{O}_{\text{Phys}} = \langle a_\ell, a_\ell^\dagger, b, b^\dagger \rangle, \quad (3.4.167a)$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\text{Phys}} = \{O|0\rangle \mid O \in \langle a_\ell^\dagger, b^\dagger \rangle\} \quad (3.4.167b)$$

となる. ただし, $\Phi, \Psi \in \tilde{\mathcal{H}}_{\text{Phys}}$ に対し,

$$\langle \Psi | b(\mathbf{p})^\dagger | \Phi \rangle = 0 \quad (3.4.168)$$

より,

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\text{null}} = \left\{ \Phi \in \tilde{\mathcal{H}}_{\text{Phys}} \mid \langle \Phi | \Phi \rangle = 0 \right\}, \quad (3.4.169)$$

$$\mathcal{H}_{\text{Phys}} = \tilde{\mathcal{H}}_{\text{Phys}} / \tilde{\mathcal{H}}_{\text{null}} \quad (3.4.170)$$

とおくと, $\mathcal{H}_{\text{Phys}}$ は正計量 Hilbert 空間となり,

$$\mathcal{H}_{\text{Phys}} \simeq \{ O | 0 \rangle \mid O \in \langle a_l^\dagger \rangle \}, \quad (3.4.171)$$

$$b(\mathbf{p}) \mathcal{H}_{\text{Phys}} = 0, \quad b(\mathbf{p}^\dagger) \mathcal{H}_{\text{Phys}} = 0. \quad (3.4.172)$$

a_L の作用は (3.4.156) より

$$a_L \mathcal{H}_{\text{Phys}} = 0. \quad (3.4.173)$$

また, Lorentz 変換に対して,

$$\epsilon_l'^{\mu}(\mathbf{p}') = \epsilon_l^{\mu}(\mathbf{p}) + c p^{\mu} \quad (3.4.174)$$

となるので,

$$a_l' = a_l + c \omega a_L \quad (3.4.175)$$

より,

$$a_l' \Phi = a_l \Phi, \quad \forall \Phi \in \mathcal{H}_{\text{Phys}}. \quad (3.4.176)$$

a_l^\dagger についても同様. さらに, $j^\mu(\mathbf{p})$ が $p_\mu j^\mu = 0$ を満たすとき,

$$j^\mu \alpha_\mu \Phi = \sum_l j^\mu \epsilon_{l\mu} a_l \Phi, \quad \forall \Phi \in \mathcal{H}_{\text{Phys}}. \quad (3.4.177)$$

3.4.6 4次元スピノール場

γ 行列は次の関係式を満たすとする:

$$\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\eta^{ab}. \quad (\gamma^a)^\dagger = \gamma_a. \quad (3.4.178)$$

ただし, $\eta = [-+++]$.

3.4.6.1 古典論：一成分 Dirac スピノール

作用積分の構造 一般に，ローレンツ不変性のみの観点からは，スピノール場に対する運動項のラグランジュ密度関数としては，1階微分を含む項 $\bar{\psi}\gamma^a\partial_a\psi$ と2階微分を含む項 $\bar{\psi}\square\psi$ が考えられる。

後者は， ϕ を質量次元1のスピノール場として，ラグランジュ密度関数が

$$\mathcal{L} = i\nabla\bar{\phi}\cdot\nabla\phi - \frac{i}{2}m\left(\bar{\phi}\not{\partial}\phi + \overline{\not{\partial}\phi\phi}\right) \quad (3.4.179)$$

となる。したがって，運動方程式と一般解は

$$\begin{aligned} \not{\partial}(\not{\partial} + m)\phi &= 0 \\ \Rightarrow \phi &= \phi_1 + \phi_2; \quad (\not{\partial} + m)\phi_1 = 0, \quad \not{\partial}\phi_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.4.180)$$

で与えられる。これは，この理論が質量 m と質量ゼロの2つの系からなり，ローレンツ群の表現として既約でないことを意味する。

以上のことより，ラグランジュ密度関数におけるスピノール場の運動項は，1階微分のみを含み，それについて線形となる。この結果は，次元によらず成り立つ。

作用 Dirac スピノール ψ で書くと，

$$S = \int d^4x \left(-i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + im\bar{\psi}\psi\right) = \int d^4x \frac{i}{2} \left(-\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + 2m\bar{\psi}\psi\right). \quad (3.4.181)$$

場の方程式

$$(\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (3.4.182)$$

一般解 カイラル表示では，この方程式は次のように分解される：

$$(\partial_t - \boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\psi_R = -im\psi_L, \quad (3.4.183a)$$

$$(\partial_t + \boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\psi_L = -im\psi_R. \quad (3.4.183b)$$

Fourier 変換

$$\psi(x) = u(p)e^{ip\cdot x} \quad (3.4.184)$$

により，

$$\begin{pmatrix} p^0 + \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma} & -m \\ -m & p^0 - \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ u_L \end{pmatrix} = 0. \quad (3.4.185)$$

この解は, $E = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$ として,

$$p^0 = E : \quad u_{\text{R}} = (E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\chi_{\text{L}}, \quad u_{\text{L}} = m\chi_{\text{L}} \\ \text{or } u_{\text{R}} = m\eta_{\text{R}}, \quad u_{\text{L}} = (E + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\eta_{\text{R}}, \quad (3.4.186\text{a})$$

$$p^0 = -E : \quad u_{\text{R}} = (E + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\chi_{\text{L}}, \quad u_{\text{L}} = -m\chi_{\text{L}} \\ \text{or } u_{\text{R}} = -m\eta_{\text{R}}, \quad u_{\text{L}} = (E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\eta_{\text{R}}. \quad (3.4.186\text{b})$$

解の基底 $u_{(\iota)}(\mathbf{p}), v_{(\iota)}(\mathbf{p}) (\iota = 1, 2)$ を

$$u_{(\iota)\text{R}}(\mathbf{p}) = \frac{E + m - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{2E(E + m)}}\chi_{(\iota)\text{L}}, \quad u_{(\iota)\text{L}}(\mathbf{p}) = \frac{E + m + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{2E(E + m)}}\chi_{(\iota)\text{L}}; \\ \sum_{\iota} \chi_{(\iota)}\chi_{(\iota)}^\dagger = I_2, \quad (3.4.187)$$

$$v_{(\iota)\text{R}}(\mathbf{p}) = \frac{E + m - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{2E(E + m)}}\eta_{(\iota)\text{L}}, \quad v_{(\iota)\text{L}}(\mathbf{p}) = -\frac{E + m + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{2E(E + m)}}\eta_{(\iota)\text{L}}; \\ \sum_{\iota} \eta_{(\iota)}\eta_{(\iota)}^\dagger = I_2 \quad (3.4.188)$$

とおくと, 基本解は

$$U_{(\iota)\mathbf{p}}(x) = u_{(\iota)}(\mathbf{p})e^{-iEt + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \quad (\iota = 1, 2), \quad (3.4.189\text{a})$$

$$V_{(\iota)\mathbf{p}}(x) = v_{(\iota)}(\mathbf{p})e^{iEt - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \quad (\iota = 1, 2) \quad (3.4.189\text{b})$$

このとき, 内積を

$$N(\psi, \chi) = - \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi} \gamma^0 \chi \quad (3.4.190)$$

と定義すると,

$$N(U_{(\iota)\mathbf{p}}, U_{(\iota')\mathbf{q}}) = (2\pi)^3 \delta_{\iota, \iota'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (3.4.191\text{a})$$

$$N(U_{(\iota)\mathbf{p}}, V_{(\iota')\mathbf{q}}) = 0, \quad (3.4.191\text{b})$$

$$N(V_{(\iota)\mathbf{p}}, V_{(\iota')\mathbf{q}}) = (2\pi)^3 \delta_{\iota, \iota'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (3.4.191\text{c})$$

3.4.6.2 古典論：多成分カイラルスピノール系

Creation: 2020/7/7

Update: 2020/7/7

Source: RM20200707_QFT-FM

必要なら荷電共役変換を施すことにより，すべてのスピノール場を chirality が左ないし右のみのスピノール場 $\psi_a (a = 1, \dots, N)$ を用いて記述することができる．この記述では，自由フェルミ粒子系の Lagrangian は

$$\mathcal{L} = -i \sum_a \bar{\psi}_a \not{\partial} \psi_a + \frac{1}{2} \sum_{ab} (M_{ab} \not{T} \psi_a C \psi_b - M_{ab}^* \bar{\psi}_a (\psi_b)^c) \quad (3.4.192)$$

と表される．ここで， C は荷電共役行列 $C = B\gamma^0$ ， $(\psi_a)^c = B^{-1}\psi_a^*$ ， M_{ab} は対称行列である．

場の方程式は，

$$-i\not{\partial} \psi_a - \sum_b M_{ab}^* (\psi_b)^c = 0, \quad (3.4.193a)$$

$$-i\not{\partial} (\psi_a)^c + \sum_b M_{ab} \psi_b = 0 \quad (3.4.193b)$$

で与えられる．これより，フェルミ粒子系の質量固有値の 2 乗が，非負エルミート行列

$$\mathcal{M}_f^2 = \begin{pmatrix} M^\dagger M & 0 \\ 0 & M M^\dagger \end{pmatrix} \quad (3.4.194)$$

の固有値で与えられる．

3.4.6.3 量子論：複素スピノール

正準交換関係は

$$[\psi^\alpha(t, \mathbf{x}), \psi^\beta(t, \mathbf{x}')]_+ = 0, \quad [\psi^\alpha(t, \mathbf{x}), \psi_\beta^*(t, \mathbf{x}')]_+ = \delta_\beta^\alpha \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (3.4.195)$$

ψ を

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\iota} \left(a_{(\iota)\mathbf{p}} U_{(\iota)\mathbf{p}}(x) + b_{(\iota)\mathbf{p}}^\dagger V_{(\iota)\mathbf{p}}(x) \right), \quad (3.4.196a)$$

$$\psi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\iota} \left(b_{(\iota)\mathbf{p}} V_{(\iota)\mathbf{p}}^\dagger(x) + a_{(\iota)\mathbf{p}}^\dagger U_{(\iota)\mathbf{p}}^\dagger(x) \right), \quad (3.4.196b)$$

と基本解で展開すると，

$$N(U_{(\iota)\mathbf{p}}, \psi) = (2\pi)^{3/2} a_{(\iota)\mathbf{p}}, \quad N(\psi, U_{(\iota)\mathbf{p}}) = (2\pi)^{3/2} a_{(\iota)\mathbf{p}}^\dagger, \quad (3.4.197a)$$

$$N(V_{(\iota)\mathbf{p}}, \psi) = (2\pi)^{3/2} b_{(\iota)\mathbf{p}}^\dagger, \quad N(\psi, V_{(\iota)\mathbf{p}}) = (2\pi)^{3/2} b_{(\iota)\mathbf{p}}, \quad (3.4.197b)$$

より，正準交換関係は生成消滅演算子に対する次の交換関係を与える：

$$[a_{(\iota)\mathbf{p}}, a_{(\iota')\mathbf{q}}]_+ = 0, \quad [a_{(\iota)\mathbf{p}}, a_{(\iota')\mathbf{q}}^\dagger]_+ = \delta_{\iota,\iota'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (3.4.198a)$$

$$[a_{(\iota)\mathbf{p}}, b_{(\iota')\mathbf{q}}]_+ = [a_{(\iota)\mathbf{p}}, b_{(\iota')\mathbf{q}}^\dagger]_+ = 0, \quad (3.4.198b)$$

$$[b_{(\iota)\mathbf{p}}, b_{(\iota')\mathbf{q}}]_+ = 0, \quad [b_{(\iota)\mathbf{p}}, b_{(\iota')\mathbf{q}}^\dagger]_+ = \delta_{\iota,\iota'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (3.4.198c)$$

空間運動量 \mathbf{p} の解空間の中で，正エネルギー解の空間への射影を \mathcal{P}_+ ，
負エネルギー解の空間への射影を \mathcal{P}_- とおくと，

$$\mathcal{P}_+(\mathbf{p}) = \sum_{\iota} u_{(\iota)}(\mathbf{p}) u_{(\iota)}(\mathbf{p})^\dagger = \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} & m \\ m & E + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \quad (3.4.199a)$$

$$\mathcal{P}_-(\mathbf{p}) = \sum_{\iota} v_{(\iota)}(-\mathbf{p}) v_{(\iota)}(-\mathbf{p})^\dagger = \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} E + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} & -m \\ -m & E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \quad (3.4.199b)$$

これより，特に

$$\mathcal{P}_+ + \mathcal{P}_- = I_4, \quad (3.4.200a)$$

$$\mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_- = \frac{\gamma^j p_j - im}{E} \gamma^0. \quad (3.4.200b)$$

この結果を用いると，Feynman 伝搬関数は

$$\langle T(\psi(x) \bar{\psi}(y)) \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{p} + im + \epsilon} e^{ip \cdot (x-y)}. \quad (3.4.201)$$

3.4.6.4 量子論：Majorana スピノール

Majorana 質量をもつスピノールは，4次元スピノール表現では形式的に Dirac 質量をもつ Majorana スピノール

$$\psi^* = B\psi \Leftrightarrow \bar{\psi} = \psi^T C \quad (3.4.202)$$

として実現される．この Majorana 条件は，モード展開では

$$b\bar{V} + a^\dagger \bar{U} = aU^T C + b^\dagger V^T C \quad (3.4.203)$$

と表される．モード関数の時間依存性を考慮すると，これは

$$\bar{V} = U^T C, \quad (3.4.204a)$$

$$b_{(\iota)\mathbf{p}} = a_{(\iota)\mathbf{p}} \quad (3.4.204b)$$

と同等になる．これらのうち最初のモード関数に対する条件は，パラメータスピノールに対する次の関係と同等：

$$\eta_{(\iota)R} = -\sigma_2 \chi_{(\iota)L}^*. \quad (3.4.205)$$

3.4.6.5 混合

質量対角化の一般論 一般に、左巻き Weyl スピノールのみによる表示のもとで、一般的な質量項は

$$\mathcal{L}_m = \sum_{j,k=1}^N M_{jk} \chi_j^T \sigma_2 \chi_k + \text{h.c.} \quad (3.4.206)$$

ここで、 $\mathcal{M} = (M_{jk})_{j,k=1,\dots,N}$ は対称行列。この対称行列を

$$\mathcal{M} = R[m_1, \dots, m_N] R^{-1} \quad (3.4.207)$$

と実直交行列 R で対角化すると、

$$\mathcal{L}_m = \sum_j m_j u_j^T \sigma_2 u_j + \text{h.c.} \quad (3.4.208)$$

ここで、

$$\chi_j = \sum_k R_{jk} u_k. \quad (3.4.209)$$

例えば、Dirac スピノール ψ を 2 つの左巻き Weyl スピノール χ_1, χ_2 を用いて

$$\psi = \begin{pmatrix} -\sigma_2 \chi_2^* \\ \chi_1 \end{pmatrix} \quad (3.4.210)$$

と表すと、Dirac 質量項は

$$im\bar{\psi}\psi = m\psi_R^\dagger \psi_L + \text{h.c.} = \frac{m}{2} (\chi_2^T \sigma_2 \chi_1 + \chi_1^T \sigma_2 \chi_2) + \text{h.c.} \quad (3.4.211)$$

対応する対角化は

$$im\bar{\psi}\psi = \frac{m}{4} \{(\chi_1 + \chi_2)^T \sigma_2 (\chi_1 + \chi_2) - (\chi_1 - \chi_2)^T \sigma_2 (\chi_1 - \chi_2)\} + \text{h.c.} \quad (3.4.212)$$

これより、絶対値の等しい固有値が存在すると、それらを Dirac 質量をもつ Dirac スピノールに組むことができる。逆に、固有値の絶対値がすべて異なると、そのようなことはできず、質量固有状態は Majorana 質量項を用いてのみ表現可能で、保存する粒子数は定義できない。

SeeSaw 左巻きスピノール ν_L と右巻きスピノール ν_R に対して, 質量項が

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m &= im_D \bar{\nu}_R \nu_L + iM \bar{\nu}_R C \bar{\nu}_R^T + \text{h.c.} \\ &= \frac{m_D}{2} (\nu_L^T \nu_R^* - \nu_R^\dagger \nu_L) + M \nu_R^\dagger \sigma_2 \nu_R^* + \text{h.c.}\end{aligned}\quad (3.4.213)$$

で与えられるとする. この質量項は

$$\chi_1 = \nu_L, \quad \chi_2 = \sigma_2 \nu_R^* \quad (3.4.214)$$

とおくと, 質量行列

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & m_D/2 \\ m_D/2 & M \end{pmatrix} \quad (3.4.215)$$

に相当. これは

$$\mathcal{M} = R(\theta)[m_1, m_2]R(-\theta); \quad (3.4.216)$$

$$m_1 = -\frac{m_D^2}{2M(1+r)}, \quad m_2 = \frac{1+r}{2}M, \quad (3.4.217)$$

$$\cos \theta = \left(\frac{1+r}{2r}\right)^{1/2}, \quad \sin \theta = \frac{m_D}{2M} \left(\frac{2}{r(1+r)}\right)^{1/2}, \quad (3.4.218)$$

$$r := \sqrt{1 + \left(\frac{m_D}{M}\right)^2} \quad (3.4.219)$$

と対角化される.

Majorana スピノール

$$\psi = \begin{pmatrix} -\sigma_2 \chi^* \\ \chi \end{pmatrix} \quad (3.4.220)$$

は, 次の方程式に従う:

$$i(\partial_t + \sigma^j \partial_j) \chi = m \sigma_2 \chi^* \quad (3.4.221)$$

この方程式の一般解は

$$\chi(x) = \int d^3 \mathbf{p} [(E + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) v(\mathbf{p}) e^{-iEt} + m \sigma_2 v^*(\mathbf{p}) e^{iEt}] e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.4.222)$$

$\chi(x)$ の $t = 0$ での値を

$$\chi(0, \mathbf{x}) = \int d^3 \mathbf{p} \hat{\chi}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \quad (3.4.223)$$

とおくと, $v(\mathbf{p})$ は $\hat{\chi}(\mathbf{p})$ を用いて

$$v(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m^2}(E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\hat{\chi}(\mathbf{p}) - \frac{1}{2m}\sigma_2\hat{\chi}(\mathbf{p})^* \quad (3.4.224)$$

と表される.

3.4.7 離散変換 C, P, T

	P	T	C
\mathbf{P}	−	−	+
H	+	+	+
\mathbf{J}	+	−	+
\mathbf{K}	−	+	+
$\phi(x)$	$\eta^*\phi(\mathcal{P}x)$	$\zeta^*\phi(-\mathcal{P}x)$	$\xi^*\phi^*(x)$
$v^\mu(x)$	$-\eta^*\mathcal{P}^\mu{}_\nu v^\nu(\mathcal{P}x)$	$\zeta^*\mathcal{P}^\mu{}_\nu(-\mathcal{P}x)$	$\xi^*v^{\mu*}(x)$
$\psi(x)$	$\eta^*\beta\psi(\mathcal{P}x)$	$-\zeta^*\gamma_5\mathcal{C}\psi(-\mathcal{P}x)$	$-\xi^*\beta\mathcal{C}\psi^*(x)$

ここで, $\beta = i\gamma^0$. 4次元の場合, chiral 表示で

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix}. \quad (3.4.225)$$

3.4.8 Green 関数

Whiteman 関数:

$$W(x, y) := \langle 0|\Phi(x)\Phi(y)|0\rangle \quad (3.4.226)$$

とおくと,

$$W(x, y) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n 2\omega} e^{ik \cdot (x-y)} P_{\mathbf{k}}. \quad (3.4.227)$$

ここで, 行列

$$P_{\mathbf{k}} := \sum_{\iota} \frac{2\omega}{C_{\mathbf{k},\iota}} u_{\mathbf{k},\iota} u_{\mathbf{k},\iota}^* \quad (3.4.228)$$

は, 規格化条件

$$2\omega u_{\mathbf{k},\iota}^* u_{\mathbf{k},\iota'} = C_{\mathbf{k},\iota} \delta_{\iota,\iota'} \quad (3.4.229)$$

より, 性質

$$P_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k},\iota} = u_{\mathbf{k},\iota} \quad (3.4.230)$$

をもつ polarisation 空間での射影作用素.

Feymann 伝播関数 :

$$\langle 0|T(\Phi(x)\Phi(y))|0\rangle = \Delta_F(x-y), \quad (3.4.231)$$

$$\Delta_F(x) = \theta(x^0)W(x,0) + \theta(-x^0)W(0,x) \quad (3.4.232)$$

および

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \frac{e^{-ik^0 x^0}}{k^2 + m^2 - i\epsilon} = \frac{1}{2\omega} \left(\theta(x^0)e^{-i\omega x^0} + \theta(-x^0)e^{i\omega x^0} \right) \quad (3.4.233)$$

より,

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^{n+1}k}{(2\pi)^{n+1}} \frac{-iP_k}{k^2 + m^2 - i\epsilon} e^{ik \cdot x}. \quad (3.4.234)$$

3.5 S 行列と反応率

3.5.1 一般公式

一粒子状態を

$$\text{boson} : \langle 0 | \alpha_\iota(\mathbf{k}) \alpha_{\iota'}(\mathbf{k}')^\dagger | 0 \rangle = C_\iota(\mathbf{k}) V \delta_{\iota, \iota'} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad (3.5.1a)$$

$$\begin{aligned} \text{fermion} : \langle 0 | a_\sigma(\mathbf{p}) a_{\sigma'}(\mathbf{p}')^\dagger | 0 \rangle &= V \delta_{\sigma, \sigma'} \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}, \\ \langle 0 | b_\sigma(\mathbf{p}) b_{\sigma'}(\mathbf{p}')^\dagger | 0 \rangle &= V \delta_{\sigma, \sigma'} \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \end{aligned} \quad (3.5.1b)$$

と規格化し, モード関数を

$$\text{boson} : \langle 0 | \Phi(x) \alpha_\iota(\mathbf{k})^\dagger | 0 \rangle = \Phi_{\mathbf{k}, \iota}(x), \quad (3.5.2a)$$

$$\begin{aligned} \text{fermion} : \langle 0 | \Psi(x) a_\sigma(\mathbf{p})^\dagger | 0 \rangle &= U_{\mathbf{p}, \sigma}(x), \\ \langle 0 | \Psi(x)^\dagger b_\sigma(\mathbf{p})^\dagger | 0 \rangle &= V_{\mathbf{p}, \sigma}(x)^\dagger \end{aligned} \quad (3.5.2b)$$

により定義すると,

$$\text{boson} : \Phi(x) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \iota} \frac{1}{C_\iota(\mathbf{k})} (\Phi_{\mathbf{k}, \iota}(x) \alpha_\iota(\mathbf{k}) + \Phi_{\mathbf{k}, \iota}(x)^* \alpha_\iota(\mathbf{k})^\dagger), \quad (3.5.3a)$$

$$\text{fermion} : \Psi(x) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, \sigma} (U_{\mathbf{p}, \sigma}(x) a_\sigma(\mathbf{p}) + V_{\mathbf{p}, \sigma}(x) b_\sigma(\mathbf{p})^\dagger). \quad (3.5.3b)$$

正準交換関係より

$$\text{boson} : \alpha_\iota(\mathbf{k}) = N(\Phi_{\mathbf{k}, \iota}, \Phi) \equiv i \int d^n x (\Phi_{\mathbf{k}, \iota}(x), \overleftrightarrow{\partial} \Phi(x)), \quad (3.5.4a)$$

$$\text{fermion} : a_\sigma(\mathbf{p}) = N(U_{\mathbf{p}, \sigma}, \Psi) \equiv \int d^n x U_{\mathbf{p}, \sigma}(x)^\dagger \Psi(x), \quad (3.5.4b)$$

$$: b_\sigma(\mathbf{p}) = N(\Psi, V_{\mathbf{p}, \sigma}) \equiv \int d^n x \Psi(x)^\dagger V_{\mathbf{p}, \sigma}(x). \quad (3.5.4c)$$

これより, モード関数の規格化条件は

$$\text{boson} : N(\Phi_{\mathbf{k}, \iota}, \Phi_{\mathbf{k}', \iota'}) = V C_\iota(\mathbf{k}) \delta_{\iota, \iota'} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad (3.5.5a)$$

$$\begin{aligned} \text{fermion} : N(U_{\mathbf{p}, \sigma}, U_{\mathbf{p}', \sigma'}) &= V \delta_{\sigma, \sigma'} \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \\ N(U_{\mathbf{p}, \sigma}, V_{\mathbf{p}', \sigma'}) &= 0, \\ N(V_{\mathbf{p}, \sigma}, V_{\mathbf{p}', \sigma'}) &= V \delta_{\sigma, \sigma'} \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}. \end{aligned} \quad (3.5.5b)$$

この規格化条件は

$$\Phi_{\mathbf{k},\iota}(x) = \phi_{\iota}(\mathbf{k})e^{ip \cdot x}, \quad (3.5.6a)$$

$$U_{\mathbf{p},\sigma}(x) = u_{\sigma}(\mathbf{p})e^{ip \cdot x}, \quad (3.5.6b)$$

$$V_{\mathbf{p},\sigma}(x) = v_{\sigma}(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} \quad (3.5.6c)$$

とおくとき，次の条件と同等：

$$\phi_{\iota}(\mathbf{k})^{\dagger}\phi_{\iota'}(\mathbf{k}) = \frac{C_{\iota}(\mathbf{k})}{2\omega}\delta_{\iota,\iota'}, \quad (3.5.7a)$$

$$u_{\sigma}(\mathbf{p})^{\dagger}u_{\sigma'}(\mathbf{p}) = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad u_{\sigma}(\mathbf{p})^{\dagger}v_{\sigma'}(-\mathbf{p}) = 0, \quad v_{\sigma}(\mathbf{p})^{\dagger}v_{\sigma'}(\mathbf{p}) = \delta_{\sigma\sigma'}. \quad (3.5.7b)$$

以上の規格化のもとで，S 行列

$$S((k, \iota), \dots; (p, \sigma), \dots) := \langle 0 | \alpha_{\iota}(\mathbf{k}) \dots S \beta_{\sigma}(\mathbf{p})^{\dagger} \dots | 0 \rangle \quad (3.5.8)$$

は

$$\begin{aligned} S((q, i), \dots; (p, j), \dots) &= \Pi_{\mathbf{q},i}^{\text{out}}(y) \dots G(y, \dots, x, \dots) \overset{\leftarrow}{\Pi}_{\mathbf{p},j}^{\text{in}}(x) \dots; \\ G(x_1, \dots, x_l) &= \langle 0 | T \left(\Phi(x_1) \dots \Phi(x_l) e^{i \int d^{n+1}x \mathcal{L}_{\text{int}}} \right) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

ここで，boson に対して，

$$\Pi_{\mathbf{q},i}^{\text{out}}(y) = i \int d^{n+1}y \Phi_{\mathbf{q},i}^*(y) (-\partial_y^2 + m^2), \quad (3.5.10a)$$

$$\overset{\leftarrow}{\Pi}_{\mathbf{p},j}^{\text{in}}(x) = i \int d^{n+1}x * (-\overset{\leftarrow}{\partial}_x^2 + m^2) \Phi_{\mathbf{p},j}(x) \quad (3.5.10b)$$

また，fermion に対して

$$\Pi_{\mathbf{q},\sigma}^{\text{out}}(y) = - \int d^{n+1}y \overline{U_{\mathbf{q},\sigma}(y)} (\not{\partial}_y - m), \quad (3.5.11a)$$

$$\overset{\leftarrow}{\Pi}_{\mathbf{p},\sigma}^{\text{in}}(x) = \int d^{n+1}x \overset{\leftarrow}{\not{\partial}}_x + m U_{\mathbf{p},\sigma}(x). \quad (3.5.11b)$$

S 行列は摂動論で

$$\begin{aligned} &S((\mathbf{k}_1, j_1), (\mathbf{p}_1, \sigma_1), (\mathbf{p}_2, \sigma_2), \dots; (\mathbf{k}_2, j_2), (\mathbf{p}_3, \sigma_3), (\mathbf{p}_4, \sigma_4), \dots) \\ &= \sum_{D:\text{Feynman digram}} (2\pi)^{n+1} \delta^{n+1}(k_1 + p_1 + p_2 + \dots - k_2 - p_3 - p_4 - \dots) N_D \\ &\quad \times \phi_{j_1}(\mathbf{k}_1)^{\dagger} \overline{u_{\sigma_1}(\mathbf{p}_1)} \overline{v_{\sigma_4}(\mathbf{p}_4)} \dots (-i) \Gamma_D(\mathbf{k}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_4, \dots; \mathbf{k}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2, \dots) \\ &\quad \times \phi_{j_2}(\mathbf{k}_2) u_{\sigma_3}(\mathbf{p}_3) v_{\sigma_2}(\mathbf{p}_2) \dots \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

ここで、 D は可能な Feynman 図式全体を動き、 N_D は各図式の対称性因子。また、 $(-i)\Gamma_D(p_1, \dots, p_l)$ は外線を取り除いた Feynman 図式において、

$$\text{内線} \Rightarrow \frac{-iP_k}{k^2 + m^2 - i\epsilon} \quad (3.5.13a)$$

$$\text{頂点} \Rightarrow -iV(q, \dots), \quad (3.5.13b)$$

$$\text{ループ} \Rightarrow \int \frac{d^{n+1}k}{(2\pi)^{n+1}} \quad (3.5.13c)$$

と置き換えて得られる。ただし、ループ積分の変数はいずれかの内線運動量と一致するか、またはそれらと積分測度として同等な線形結合の系を取るものとする。

3.5.2 反応率

一粒子状態のノルムは

$$\text{boson} : \langle (\mathbf{k}, \iota) | (\mathbf{k}', \iota') \rangle = VC_\iota(\mathbf{k})\delta_{\iota, \iota'}\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad (3.5.14a)$$

$$\text{fermion} : \langle (\mathbf{p}, \sigma) | (\mathbf{p}', \sigma') \rangle = V\delta_{\sigma, \sigma'}\delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \quad (3.5.14b)$$

より、単位体積、単位時間当たりの反応率 P は

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{VT} \sum_f |S_{fi}|^2 \prod_{\text{boson}} \frac{1}{CV} \prod_{\text{fermion}} \frac{1}{V} \prod_i dN \\ &= \int \frac{d^n \mathbf{k}_1}{(2\pi)^n 2\omega} \int \frac{d^n \mathbf{p}_1}{(2\pi)^n} \int \frac{d^n \mathbf{p}_2}{(2\pi)^n} \dots \\ &\quad \times (2\pi)^{n+1} \delta^{n+1}(k_1 + p_1 + p_2 + \dots - k_2 - p_3 - p_4 - \dots) \\ &\quad \times \frac{f_2(\mathbf{k}_2) d^n \mathbf{k}_2}{(2\pi)^n 2\omega} \frac{f_3(\mathbf{p}_3) d^n \mathbf{p}_3}{(2\pi)^n} \frac{f_4(\mathbf{p}_4) d^n \mathbf{p}_4}{(2\pi)^n} \\ &\quad \times \left| e_{\iota_1}(\mathbf{k}_1)^\dagger \overline{u_{\sigma_1}(\mathbf{p}_1)} \overline{v_{\sigma_4}(\mathbf{p}_4)} \dots \right. \\ &\quad \sum_{D:\text{Feynman digram}} N_D \Gamma_D((\mathbf{k}, \iota)_1, (\mathbf{p}, \sigma)_1, (\mathbf{p}, \sigma)_4, \dots; (\mathbf{k}, \iota)_2, (\mathbf{p}, \sigma)_3, (\mathbf{p}, \sigma)_2, \dots) \\ &\quad \left. \times e_{\iota_2}(\mathbf{k}_2) u_{\sigma_3}(\mathbf{p}_3) v_{\sigma_2}(\mathbf{p}_2) \dots \right|^2 \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

ここで、 $f(\mathbf{k})d^n \mathbf{k}/(2\pi)^n$ 、 $f(\mathbf{p})d^n \mathbf{p}/(2\pi)^n$ は入射粒子の数密度。

3.6 発散

3.6.1 繰り込み

3.6.1.1 摂動論

発散次数 d 次元時空で、次のような1粒子既約 Feynman 図式を考える：

- 外線：fermion E_f , boson E_b
- 内線：fermion I_f , boson I_b
- ループ： L
- 頂点：タイプ i の頂点数 V_i ; fermion の足の数 N_i^f , boson の足の数 N_i^b , 微分作用素の数 N_i^d

これらの量の間には次の関係式が成り立つ.

$$\sum_i N_i^f V_i = 2I^f + E^f, \quad (3.6.1a)$$

$$\sum_i N_i^b V_i = 2I^b + E^b, \quad (3.6.1b)$$

$$L = I - V + 1. \quad (3.6.1c)$$

これより、ダイアグラムの形式発散次数は

$$D = dL - I_f - 2I_b + \sum_i N_i^d V_i = d - \sum_i d_i V_i - \frac{d-1}{2} E^f - \frac{d-2}{2} E^b. \quad (3.6.2)$$

ここで,

$$d_i := d - \frac{d-1}{2} N_i^f - \frac{d-2}{2} N_i^b - N_i^d \quad (3.6.3)$$

は頂点 i の結合係数の次元数.

これより、 $d_i \geq 0$ なら $D \geq 0$ となる図式の (E^f, E^b) の組は有限個. したがって、発散する1粒子既約図式の外線型は有限個.

【例 3.1 (ϕ^n 理論)】

結合係数の次元は

$$d_n = d - \frac{d-2}{2} n \quad (3.6.4)$$

よって,

$$n \leq \frac{2d}{d-2} > 2 \quad (3.6.5)$$

の時、形式繰り込み可能. よって、 n が3以上の整数とすると,

- $n = 3$: $d = 6, 5, 4, 3$
- $n = 4$: $d = 4, 3$
- $n = 5, 6$: $d = 3$.

発散次数は

$$D = d - d_n V - \frac{d-2}{2} E. \quad (3.6.6)$$

3D $d = 3$ のとき, $n \leq 6$ で,

$$D = 3 - \left(3 - \frac{n}{2}\right) V - \frac{E}{2}. \quad (3.6.7)$$

4D $d = 4$ のとき, $n \leq 4$ で,

$$D = 4 - (4 - n)V - E. \quad (3.6.8)$$

$n = 4$ のとき繰り込み可能, $n = 3$ のとき超繰り込み可能.

□

3.7 ゲージ理論

3.7.1 定式化

局所ゲージ変換 ゲージ群 G の場に対する局所作用を, $\lambda^a(x)$ をゲージパラメータ, g を結合定数として,

$$\Phi \mapsto U(x)\Phi: \quad U(x) = e^{igT_a\lambda^a(x)} \quad (3.7.1)$$

により定義する. ここで, T_a はエルミート行列で,

$$[T_a, T_b] = -iT_c f_{ab}^c \quad (3.7.2)$$

を満たす. iT_a に対応するリー代数の元 t_a は交換関係

$$[t_a, t_b] = t_c f_{ab}^c \quad (3.7.3)$$

を満たし, その adjoint 表現は

$$iT_a \mapsto (t_a)^b_c = f_{ac}^b \quad (3.7.4)$$

となる.

共変微分 場 Φ の共変微分を

$$D_\mu \Phi = (\partial_\mu + igA_\mu^a T_a) \Phi \quad (3.7.5)$$

により定義するとき, ゲージ場 $A = gA_\mu^a t_a$ が, 無限小ゲージ変換 $\lambda = \lambda^a(x)t_a$ に対して

$$\begin{aligned} \delta A &= -D\lambda \equiv -(d\lambda + [A, \lambda]), \\ \Leftrightarrow \delta A_\mu^a &= -D_\mu \lambda^a \equiv -(\partial_\mu \lambda^a + gf^a_{bc} A_\mu^b \lambda^c). \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

と変換すれば, 共変微分は G テンソルとなる:

$$D_\mu \Phi \mapsto U D_\mu \Phi. \quad (3.7.7)$$

フラックス ゲージ接続に対する曲率は

$$F\Phi = D^2\Phi = (d + A \wedge)(d + A)\Phi = (dA + A \wedge A)\Phi \quad (3.7.8)$$

より,

$$F = dA + A \wedge A \Rightarrow F^a = dA^a + \frac{g}{2} f^a_{bc} A^b \wedge A^c. \quad (3.7.9)$$

場の方程式とカレント Φ をスカラー場 (系), Ψ をスピノール場 (系) として, Lagrangian は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2g^2} \text{tr}(F \cdot F) - (D\Phi)^\dagger D\Phi - i\bar{\Psi} \gamma \cdot D\Psi. \quad (3.7.10)$$

ここで, t_a は $\text{Tr}(t_a t_b) = \delta_{ab}$ となるように規格化するものとする. このとき, 場の方程式は

$$D_\nu F^{a\mu\nu} = J_a^\mu, \quad (3.7.11a)$$

$$D^\mu D_\mu \Phi = 0, \quad (3.7.11b)$$

$$\gamma \cdot D\Psi = 0. \quad (3.7.11c)$$

ここで, カレント J_a^μ は

$$J_a^\mu = -ig (\Phi^\dagger T_a D^\mu \Phi - (D^\mu \Phi)^\dagger T_a \Phi) + g\bar{\Psi} \gamma^\mu T_a \Psi. \quad (3.7.12)$$

3.8 対称性の自発的破れ

大域的変換群 G の線形作用に対して作用積分が不変であるとする。このとき、特に、スカラ場 $\phi = (\phi_n)$ への作用

$$\phi \mapsto U\phi, \quad U \in G \quad (3.8.1)$$

に対して、その運動項とポテンシャル $V(\phi)$ が不変となる： $V(U\phi) = V(\phi)$ 。このポテンシャルの極点 $\phi = \phi_0$ が G の作用に対して不変でないとする：

$$(DV)_{\phi_0} = 0, \quad t_a \phi_0 \neq 0, \quad t_a \in \mathcal{L}(G). \quad (3.8.2)$$

3.8.1 Goldstone ボゾン

対称性 G に対するカレントを $J_\mu^a(x)$ とすると、理論の Poincare 不変性より

$$\langle [J_\lambda^a(y), \phi_n(x)] \rangle_{\text{Vac}} = (2\pi)^{-3} \int d^4 p p_\lambda \theta(p^0) [\rho_n^a(-p^2) e^{ip \cdot (y-x)} - \tilde{\rho}_n^a(-p^2) e^{ip \cdot (x-y)}]. \quad (3.8.3)$$

ここで、

$$\frac{ip_\lambda}{(2\pi)^3} \rho_n^a(-p^2) \theta(p^0) = \sum_N \langle \text{Vac} | J_\lambda^a(0) | N \rangle \langle N | \phi_n(0) | \text{Vac} \rangle \delta^4(p - p_N), \quad (3.8.4a)$$

$$\frac{ip_\lambda}{(2\pi)^3} \tilde{\rho}_n^a(-p^2) \theta(p^0) = \sum_N \langle \text{Vac} | \phi_n(0) | N \rangle \langle N | J_\lambda^a(0) | \text{Vac} \rangle \delta^4(p - p_N). \quad (3.8.4b)$$

この式は、Green 関数

$$\Delta_+(z; \mu^2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p \theta(p^0) \delta(p^2 + \mu^2) e^{ip \cdot z} \quad (3.8.5)$$

を用いて、

$$\langle [J_\lambda^a(y), \phi_n(x)] \rangle_{\text{Vac}} = \frac{\partial}{\partial y^\lambda} \int d\mu^2 [\rho_n^a(\mu^2) \Delta_+(y-x; \mu^2) + \tilde{\rho}_n^a(\mu^2) \Delta_+(x-y; \mu^2)]. \quad (3.8.6)$$

と書き換えられる。

まず, $x - y$ が空間的なとき, $[J_\lambda^a(y), \phi_n(x)] = 0$ より

$$\int d\mu^2 \frac{\rho_n^a(\mu^2) + \tilde{\rho}_n^a(\mu^2)}{\sqrt{p^2 + \mu^2}} = 0, \quad \forall p \Rightarrow \rho_n^a(\mu^2) = -\tilde{\rho}_n^a(\mu^2). \quad (3.8.7)$$

次に, $\partial^\lambda J_\lambda^a = 0$ より,

$$\int d\mu^2 \mu^2 \rho_n^a(\mu^2) \frac{\cos(t\sqrt{p^2 + \mu^2})}{\sqrt{p^2 + \mu^2}}, \quad \text{for all } t \Rightarrow \mu^2 \rho_n^a(\mu^2) = 0. \quad (3.8.8)$$

さらに,

$$Q^a = \int d^3x J_0^a(x, 0), \quad [Q^a, \phi_n(x)] = \sum_m t_{nm}^a \phi_m(x) \quad (3.8.9)$$

より

$$\rho_n^a(\mu^2) = i\delta(\mu^2) \sum_m t_{nm}^a \langle \phi_m(0) \rangle_{\text{Vac}}. \quad (3.8.10)$$

これは, 各成分ごとにゼロ質量のボゾン B^a が存在することを意味し, Poincare 不変性より

$$\langle \text{Vac} | J_\lambda^a(x) | B^b \rangle = -iF^{ab} p_{\lambda B} \frac{e^{ip_B \cdot x}}{2p_B^0}, \quad (3.8.11a)$$

$$\langle B^a | \phi_n(y) | \text{Vac} \rangle = Z_n^a \frac{e^{-ip_B \cdot y}}{2p_B^0} \quad (3.8.11b)$$

と置くと, $\rho_n^a(\mu^2)$ の定義より,

$$\rho_n^a(\mu^2) = \sum_b F^{ab} Z_n^b \delta(\mu^2) \quad (3.8.12)$$

これを (3.8.10) に代入して,

$$i \sum_b F^{ab} Z_n^b = - \sum_m (t^a)_{nm} \langle \phi_m(0) \rangle_{\text{Vac}}. \quad (3.8.13)$$

すなわち,

$$\phi_n(x) = \sum_a Z_n^a B^a(x) + \dots, \quad (3.8.14a)$$

$$Z_n^a = \sum_b (F^{-1})^{ab} (it^b \phi_0)_n \quad (3.8.14b)$$

を得る.

3.8.2 近似的対称性の自発的破れ

対称性 G をもつスカラ場のポテンシャル V_0 に小さな摂動 V_1 を加える:

$$V = V_0(\phi) + V_1(\phi); \quad DV_0(t_\alpha\phi) = 0. \quad (3.8.15)$$

V の極小点を, 適当な V_0 の極小点 ϕ_0 を用いて, $\bar{\phi} = \phi_0 + \phi_1$ とおく. ϕ_1 が小さいとして, 極小条件を 1 次までとると

$$DV(\phi_0 + \phi_1) = 0 \Rightarrow (D^2V_0)_{\phi_0}(\phi_1) + (DV_1)_{\phi_0} = 0. \quad (3.8.16)$$

V_0 の極小多様体が G の作用で不変なので,

$$(D^2V_0)_{\phi_0}(t_\alpha\phi_0) = 0, \quad \forall\alpha. \quad (3.8.17)$$

よって, 上の方程式が ϕ_1 について解ける条件として, V_0 の極点の選び方を決める次の真空整列条件 (vacuum alignment condition) が得られる:

$$(DV_1)_{\phi_0}(t_\alpha\phi_0) = 0, \quad \forall\alpha. \quad (3.8.18)$$

G がコンパクトのとき, この条件を満たす ϕ_0 が常に存在する.

擬 Goldstone ボゾンの質量は, 一般に

$$\begin{aligned} M_{ab}^2 &= \sum_{mn} Z_n^a Z_m^b \left. \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial\phi_m \partial\phi_n} \right|_{\phi=\phi_0+\phi_1} \\ &\simeq (D^3V_0)_{\phi_0}(\phi_1, Z^a, Z^b) + (D^2V_1)_{\phi_0}(Z^a, Z^b). \end{aligned} \quad (3.8.19)$$

V_0 の対称性より, この式は次のように書き換えられる:

$$M_{ab}^2 = -(D^2V_1)_{\phi_0}((F^{-1})^{ac}t^c\phi_0, (F^{-1})^{bd}t^d\phi_0) - (DV_1)_{\phi_0}(t_a t_b \phi_0). \quad (3.8.20)$$

G のある表現

$$[T_\alpha, \Phi_n] = -(t_\alpha)_{nm} \Phi_m \quad (3.8.21)$$

に従う作用素の系 $\{\Phi_n\}$ を用いて, Hamiltonian に対する対称性を破る摂動が

$$H_1 = \sum_n u_n \Phi_n \quad (3.8.22)$$

と表されたとする. さらに,

$$\langle \Phi_n \rangle = \phi_n \quad (3.8.23)$$

が成り立つときには，真空整列条件は

$$\langle [T_\alpha, H_1] \rangle_0 = 0 \quad (3.8.24)$$

と表される．また，擬 Goldstone ボゾンの質量行列は

$$M_{ab}^2 = - \sum_{cd} (F^{-1})^{ac} (F^{-1})^{bd} \langle [T_c, [T_d, H_1]] \rangle_0 \quad (3.8.25)$$

となる．ここで， a, b, c, d は Goldstone 方向成分を指す．

3.9 σ モデル

3.9.1 一般的定義

(M^D, g) と (X^n, h) を Riemann 多様体， V を X 上の実関数とするととき，

$$\phi : M \rightarrow X \quad (3.9.1)$$

を力学変数として，その作用積分を

$$S = \int_M -\frac{1}{2} \langle *d\phi \wedge d\phi \rangle - \phi^* V *1 \quad (3.9.2)$$

により定義する．ここで， $d\phi \in \mathcal{A}^1(\phi^*T(X))$ と見なして，

$$\langle *d\phi \wedge d\phi \rangle = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^a \partial_\nu \phi^b (\phi^* h_{ab}) \quad (3.9.3)$$

場の方程式は，

$$\square_\sigma \phi - \phi^* \text{grad} V = 0. \quad (3.9.4)$$

ここで，

$$(\square_\sigma \phi)^a = \square_M \phi^a + \phi^* \Gamma_{bc}^a(X) \nabla^\mu \phi^b \nabla_\mu \phi^c. \quad (3.9.5)$$

3.9.2 ゲージ場との相互作用

基本データ

- G : Lie 群
- γ_{pq} : Lie 代数 \mathfrak{g} の $\text{ad}G$ 不変な内積
- (X, h) : G が等長変換群として作用する Riemann 空間
- $V : X \rightarrow \mathbb{R}$: G 不変なポテンシャル

場

- A : 主 G -束 $P \rightarrow M$ の接続
- $\phi: P \rightarrow X$: 随伴束 $P \times_G X \rightarrow M$ の断面.

$d_A\phi$ を

$$d_A\phi = (d + A)\phi \quad (3.9.6)$$

により定義すると, $d_A\phi$ は horizontal となるので, $\mathcal{A}^1(T(X)^P)$ の元と見なされ, $h(*d_A\phi \wedge d_A\phi)$ が M 上の D 形式として曖昧さなく定義される. 同様に, $A \in \mathcal{A}_P^1(\mathfrak{g})$ に対するフラックス

$$F_A = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A] \in \mathcal{A}_P^2(\mathfrak{g}) \quad (3.9.7)$$

は horizontal なので, $\mathcal{A}_M^2(\text{ad}P)$ ($\text{ad}P = P \times_{\text{ad}G} \mathfrak{g}$) の元と見なすことができる. 特に, $\gamma(*F_A \wedge F_A)$ は曖昧さなく M 上の D 形式を定義する.

作用積分

$$S = \int_M -\frac{1}{2}\gamma(*F_A \wedge F_A) - \frac{1}{2}\langle *d_A\phi \wedge d_A\phi \rangle - \phi^*V \quad (3.9.8)$$

3.10 膨張宇宙

3.10.1 自由スカラ場

理論の定義

作用積分

$$S = \int d^{n+1}x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \cdot \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2}m^2 \Phi \cdot \Phi \right). \quad (3.10.1)$$

場の方程式

$$\square \Phi - m^2 \Phi = 0. \quad (3.10.2)$$

3.10.1.1 空間的に平坦な RW 時空

空間計量

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\mathbf{x}^2. \quad (3.10.3)$$

作用積分

$$S = \int dt d^n x a^n \left(\frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2a^2} (D\Phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 \right). \quad (3.10.4)$$

場の方程式

$$\ddot{\Phi} + nH\dot{\Phi} - \frac{1}{a^2} \Delta_n \Phi + m^2 \Phi = 0. \quad (3.10.5)$$

空間座標に関して Fourier 変換すると

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \int d^n k \Phi_{\mathbf{k}}(t) \quad (3.10.6)$$

に対して,

$$\ddot{\Phi}_{\mathbf{k}} + nH\dot{\Phi}_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}}^2 \Phi_{\mathbf{k}} = 0; \quad \omega_{\mathbf{k}}^2 = \frac{k^2}{a^2} + m^2. \quad (3.10.7)$$

モード展開 場の方程式の解の基本系 $X_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x})$ を

$$X_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) = \frac{u_{\mathbf{k}}(t)}{\sqrt{(2\pi)^n a^n}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.10.8a)$$

$$u_{\mathbf{k}}^* \overleftrightarrow{\partial}_t u_{\mathbf{k}} = -i \quad (3.10.8b)$$

により定義する. このとき,

$$\Phi = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{a^{n/2}} \left(u_{\mathbf{k}}(t) a_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + u_{\mathbf{k}}^*(t) a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right), \quad (3.10.9)$$

$$[a_{\mathbf{k}_1}, a_{\mathbf{k}_2}^\dagger] = \delta^n(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \quad (3.10.10)$$

3.10.1.2 Flat de Sitter

時空は 4次元とする ($n = 3$).

計量

$$ds^2 = -dt^2 + e^{-Ht} d\mathbf{x}^2. \quad (3.10.11)$$

Mode function

$$u_{\mathbf{k}}(t) = \frac{\tilde{k} + i}{\sqrt{H\tilde{k}^3}} e^{i\tilde{k}t}; \quad \tilde{k} := \frac{k}{aH}. \quad (3.10.12)$$

Propagator

$$\begin{aligned} \langle T(\phi(t_1, \mathbf{x}_1)\phi(t_2, \mathbf{x}_2)) \rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{H^2}{2k^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)} \\ &\times \left\{ (\tilde{q} + i)(\tilde{k}_2 - i)e^{i(\tilde{q}-\tilde{k}_2)}\theta(t_1 - t_2) + (\tilde{q} - i)(\tilde{k}_2 + i)e^{-i(\tilde{q}-\tilde{k}_2)}\theta(t_2 - t_1) \right\}. \end{aligned} \quad (3.10.13)$$

3.10.2 重力波

3.10.2.1 空間的に平坦な FLRW 宇宙

空間計量

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\mathbf{x}^2. \quad (3.10.14)$$

摂動変数

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j. \quad (3.10.15)$$

以下, 空間添え字 i, j の上げ下げは δ_{ij} による.

作用積分

$$S = \frac{1}{4\kappa^2} \int dt d^n x a^n \left(\frac{1}{2} \dot{h}_j^i \dot{h}_i^j - \frac{1}{2a^2} D_i h_k^j D^i h_j^k \right) \quad (3.10.16)$$

場の方程式

$$\ddot{h}_j^i + nH\dot{h}_j^i - \Delta_n h_j^i = 0, \quad (3.10.17)$$

$$h_i^i = 0, \quad D_j h_i^j = 0. \quad (3.10.18)$$

量子化 重力場の摂動 $h_j^i(t, \mathbf{x})$ を

$$h_j^i = 2\kappa \int \frac{d^n k}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{2k}} \sum_s (e_{(s)j}^i(\mathbf{k}) u_k(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_s(\mathbf{k}) + \text{h.c.}) \quad (3.10.19)$$

とモード展開する. ただし, η は共形時間 $d\eta = dt/a(t)$ で, $' = d/d\eta$ として, モード関数 $u_k(\eta)$ が発展方程式

$$u_k'' + (n-1)\mathcal{H}u_k' + k^2 u_k = 0; \quad \mathcal{H} = aH = a'/a \quad (3.10.20)$$

に従い, 規格化条件

$$u_k^* \overleftrightarrow{\partial}_\eta u_k = -2ik/a^{n-1} \quad (3.10.21)$$

を満たすものとする. また, 偏光テンソル $e_{(s)j}^i(\mathbf{k})$ は

$$e_{(s)i}^i(\mathbf{k}) = 0, \quad k^j e_{(s)j}^i(\mathbf{k}) = 0, \quad (3.10.22a)$$

$$e_{(s)j}^{i*}(\mathbf{k}) e_{(s')i}^j(\mathbf{k}) = \delta_{ss'} \quad (3.10.22b)$$

を満たす. このとき, 生成消滅演算子 $a_s(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k})^\dagger$ は交換関係

$$[a_s(\mathbf{k}), a_{s'}(\mathbf{k}')^\dagger] = \delta_{ss'} \delta^n(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad [a_s(\mathbf{k}), a_{s'}(\mathbf{k}')] = 0. \quad (3.10.23)$$

Wightman 関数

$$\langle h_j^i(\eta_1, \mathbf{x}_1) h_m^l(\eta_2, \mathbf{x}_2) \rangle = 4\kappa^2 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} P_{jm}^{il}(\mathbf{k}) \Delta_k(\eta_1, \eta_2) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}. \quad (3.10.24)$$

ここで,

$$\begin{aligned} P_{jm}^{il}(\mathbf{k}) &:= \sum_s e_{(s)j}^i(\mathbf{k}) e_{(s)m}^l(\mathbf{k})^* \\ &= \frac{1}{2} P_m^i(\mathbf{k}) P_j^l(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} P^{il}(\mathbf{k}) P_{jm}(\mathbf{k}) - \frac{1}{n-1} P_j^i(\mathbf{k}) P_m^l(\mathbf{k}), \\ P_j^i(\mathbf{k}) &:= \delta_j^i - \frac{1}{k^2} k^i k_j, \end{aligned} \quad (3.10.26)$$

および

$$\Delta_k(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2k} u_k(\eta_1) u_k(\eta_2)^*. \quad (3.10.27)$$

3.10.2.2 W^3 型相互作用

作用 曲率に関して 3 次の相互作用

$$\mathcal{L} = r \mathcal{L}_{WWW} + s \mathcal{L}_{\tilde{W}WW}; \quad (3.10.28a)$$

$$\mathcal{L}_{WWW} = W^{ab}_{cd} W^{cd}_{ef} W^{ef}_{ab}, \quad (3.10.28b)$$

$$\mathcal{L}_{\tilde{W}WW} = \tilde{W}^{ab}_{cd} W^{cd}_{ef} W^{ef}_{ab}. \quad (3.10.28c)$$

を考える. ここで,

$$\tilde{W}^{ab}_{cd} := \frac{1}{2} \epsilon^{ab}_{pq} W^{pq}_{cd} = \frac{1}{2} \epsilon_{cd}{}^{pq} W^{ab}_{pq}. \quad (3.10.29)$$

平坦な時空での摂動の chiral 分解 平坦な時空での摂動

$$ds^2 = -d\eta^2 + (\delta_{ij} + \gamma_{ij})dx^i dx^j, \quad (3.10.30)$$

$$(-\partial_\eta^2 + \hat{\Delta})\gamma_{ij} = 0 \quad (3.10.31)$$

に対して

$$\tilde{\gamma}_i{}^j := \hat{\epsilon}^{jpa} \gamma_{ip,a} \quad (3.10.32)$$

と定義すると,

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^{ij} \hat{\epsilon}_{ijk} &= \hat{\epsilon}^{jpa} \gamma_{p,q}^i \epsilon_{ijk} = -\delta_i^{pq} \gamma_{p,q}^i \\ &= -\gamma_i^i, k + \gamma_k^i, i = 0 \end{aligned} \quad (3.10.33)$$

より,

$$\tilde{\gamma}_{ij} = \tilde{\gamma}_{ji}, \quad \tilde{\gamma}_j{}^j = 0, \quad \tilde{\gamma}_{i,j}^j = 0. \quad (3.10.34)$$

さらに,

$$\tilde{\tilde{\gamma}}_{ij} = -\Delta \gamma_{ij} \quad (3.10.35)$$

よって, $\gamma_{ij} \mapsto \tilde{\gamma}_{ij}$ は, 3次元 trace-free transverse symmetric tensor の自己同型を与える. とくに,

$$\gamma_{ij}^\pm := \frac{1}{2} (\partial_\eta \gamma_{ij} \mp i \tilde{\gamma}_{ij}) \quad (3.10.36)$$

とおくと, γ_{ij}^+ と γ_{ij}^- は Minkowski 時空では γ_{ij} の右円偏光および左円偏光への射影を与える.

W の chiral 分解 Wyle テンソル型テンソルの Hodge dual の作用を

$$*W_{abcd} := \frac{1}{2} \epsilon_{cd}{}^{pq} W_{abpq}, \quad (3.10.37a)$$

$$\star W_{abcd} := \frac{1}{2} \epsilon_{ab}{}^{pq} W_{pqcd} \quad (3.10.37b)$$

として, W^\pm を

$$W^\pm := W \pm i *W = W \pm i \star W = W \pm i \tilde{W} \quad (3.10.38)$$

により定義すると,

$$*W^\pm = \star W^\pm = \mp i W^\pm. \quad (3.10.39)$$

より

$$\tilde{W}_{ab}{}^{cd}\tilde{W}{}^{cd}{}_{ef} = -W_{ab}{}^{cd}W_{cd}{}^{ef}. \quad (3.10.40)$$

よって,

$$(W^\pm)^3 = 4(W^3 \pm iW^2\tilde{W}). \quad (3.10.41)$$

また,

$$W_{klab}^\pm = \mp i\epsilon_{klj}W_{0jab}^\pm, \quad (3.10.42a)$$

$$W_{klab}^\pm W_{klcd}^\pm = 2W^{\pm 0j}{}_{ab}W_{0jcd}^\pm, \quad (3.10.42b)$$

$$W^{\pm pq}{}_{ab}W_{pqcd}^\mp = 0. \quad (3.10.42c)$$

Minkowski 時空での摂動に対して, on-shell で

$$W_{0j0k} = -\frac{1}{2}\ddot{\gamma}_{jk}, \quad (3.10.43a)$$

$$W_{0jkl} = \dot{\gamma}_{j[k,l]} = \frac{1}{2}\epsilon_{klm}\dot{\gamma}_{jm}, \quad (3.10.43b)$$

$$W_{jklm} = -\delta_{l[j}\ddot{\gamma}_{k]m} + \delta_{m[j}\ddot{\gamma}_{k]l}, \quad (3.10.43c)$$

$$\tilde{W}_{0j0k} = \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{jk}, \quad (3.10.43d)$$

$$\tilde{W}_{0jkl} = \frac{1}{2}\epsilon_{klm}\ddot{\gamma}_{jm}, \quad (3.10.43e)$$

$$\tilde{W}_{jklm} = \delta_{l[j}\dot{\gamma}_{k]m} - \delta_{m[j}\dot{\gamma}_{k]l}. \quad (3.10.43f)$$

よって,

$$W^{\pm 0j}{}_{0k} = \dot{\gamma}_{jk}^\pm. \quad (3.10.44)$$

また,

$$(W^\pm)^3 = 64(\dot{\gamma}^\pm)^3. \quad (3.10.45)$$

これと (3.10.41) を比較して,

$$W^3 = 2(\ddot{\gamma}^3 - 3\ddot{\gamma}\dot{\gamma}^2), \quad (3.10.46a)$$

$$\tilde{W}W^2 = 2(\dot{\gamma}^3 - 3\dot{\gamma}\ddot{\gamma}^2) \quad (3.10.46b)$$

を得る.

FLRW 宇宙での作用 FLRW 宇宙でのテンソル摂動

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j, \quad (3.10.47)$$

$$\ddot{h}_j^i + 3H\dot{h}_j^i - \hat{\Delta}h_j^i = 0 \quad (3.10.48)$$

に対して, Weyl テンソルは

$$W^{0i}{}_{0j} \approx \frac{1}{2a^3}(a(h_j^i)')', \quad (3.10.49a)$$

$$W^{0i}{}_{jk} = \frac{1}{a}\partial_{[j}h_{k]}^i', \quad (3.10.49b)$$

$$W^{jk}{}_{0i} = -\frac{1}{a^3}\partial^{[j}h_i^{k]}', \quad (3.10.49c)$$

$$W^{ij}{}_{kl} \approx -\frac{2}{a^2}\left(\partial_{[k}\partial^{[i}h_{l]}^j] - \mathcal{H}\delta_{[k}^{[i}h_{l]}^{j]}\right) \approx -\frac{2}{a^2}\delta_{[k}^{[i}(ah_{l]}^{j]})' \quad (3.10.49d)$$

ここで, \approx は on-shell でなりたつことを意味する. したがって,

$$\gamma'_{ij} := a(h_j^i)' \quad (3.10.50)$$

により, γ_{ij} を定義すると,

$$W^a{}_{bcd}(h) = \frac{1}{a}W^{(F)a}{}_{bcd}(\gamma) \quad (3.10.51a)$$

となる. ここで, $W^{(F)}(\gamma)$ は平坦な時空での W に対する表式. よって,

$$\gamma_{ij}^\pm := \frac{1}{2}(\gamma'_{ij} \mp i\tilde{\gamma}_{ij}), \quad (3.10.52)$$

$$\tilde{\gamma}_{ij} = \hat{\epsilon}_{jkl}\gamma_{ik,l} \quad (3.10.53)$$

とおくと,

$$W^3(h) = a^{-9}(W^3)^{(F)}(\gamma), \quad (3.10.54a)$$

$$\tilde{W}W^2(h) = a^{-9}(\tilde{W}W^2)^{(F)}(\gamma), \quad (3.10.54b)$$

より,

$$\begin{aligned} (W^\pm)^3(h) &= 4(W^3(h) \pm iW^2\tilde{W}(h)) = 4a^{-9}((W^3)^{(F)} \pm i(W^2\tilde{W})^{(F)}) \\ &= a^{-9}(W^{\pm(F)})^3(\gamma) = 64a^{-9}((\gamma^\pm)')^3. \end{aligned} \quad (3.10.55)$$

よって,

$$\begin{aligned} rW^3(h) + s\tilde{W}W^2(h) &= \frac{z}{8}(W^+)^3(h) + \frac{\bar{z}}{8}(W^-)^3(h) \\ &= \frac{8}{a^9}\{z((\gamma^+)')^3 + \bar{z}((\gamma^-)')^3\}. \end{aligned} \quad (3.10.56)$$

ここで,

$$z = r - is. \quad (3.10.57)$$

対応して, 作用積分は

$$S_{rWWW+s\tilde{W}WW} = \int d^3x \int d\eta a^{-5} 8 \{z((\gamma^+)')^3 + \text{hc}\}. \quad (3.10.58)$$

ここで, 円偏光基底

$$\hat{\epsilon}_{ijl} \partial_l (e_{mj}^{(s)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) = s k e_{im}^{(s)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (3.10.59)$$

を用いると, $e^{(s)}(\mathbf{k})$ と $e^{(s)}(-\mathbf{k})^*$ は同じ helicity を持つので,

$$\begin{aligned} (\gamma_{ij}^{\pm})' &= \kappa \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k}} \sum_{s=\pm} (e_{ij}^{(s)}(\mathbf{k}) (\partial_\eta \mp isk) (au'_k) a_s(\mathbf{k}) \\ &\quad + e_{ij}^{(s)}(-\mathbf{k})^* (\partial_\eta \mp isk) (au'_k)^* a_s(-\mathbf{k})^\dagger) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (3.10.60)$$

de Sitter 宇宙 de Sitter 宇宙の場合,

$$u_k(\eta) = \frac{H}{k} (1 + ik\eta) e^{-ik\eta}, \quad (3.10.61a)$$

$$u'_k(\eta) = \frac{H}{k} k^2 \eta e^{-ik\eta}, \quad (3.10.61b)$$

$$u''_k(\eta) = \frac{H}{k} k^2 (1 - ik\eta) e^{-ik\eta} \quad (3.10.61c)$$

より,

$$au'_k = -k e^{-ik\eta}, \quad (3.10.62)$$

$$(\partial_\eta - isk)(au'_k) = -i(1+s)k(au'_k). \quad (3.10.63)$$

よって,

$$\begin{aligned} (\gamma_{ij}^{\pm})' &= 2\kappa \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k}} (e_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}) (ik^2) e^{-ik\eta} a_{(+)}(\mathbf{k}) \\ &\quad + e_{ij}^{(-)}(-\mathbf{k})^* (-ik^2) e^{ik\eta} a_{(-)}(-\mathbf{k})^\dagger) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (3.10.64)$$

積分すると

$$\gamma_{ij}^{\pm} = -2\kappa \int \frac{k d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k}} \left(e_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}) e^{-ik\eta} a_{(+)}(\mathbf{k}) + e_{ij}^{(-)}(-\mathbf{k})^* e^{ik\eta} a_{(-)}(-\mathbf{k})^\dagger \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.10.65)$$

ここで,

$$h_{ij}(\eta, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \hat{h}_{ij}(\eta, \mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.10.66)$$

$$\gamma_{ij}^{\pm}(\eta, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \hat{\gamma}_{ij}^{\pm}(\eta, \mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.10.67)$$

とおくと,

$$\hat{h}_{ij}(0, \mathbf{p}) = \frac{2\kappa(2\pi)^{3/2}H}{\sqrt{2p^3}} \sum_s \left(e_{ij}^{(s)}(\mathbf{p}) a_s(\mathbf{p}) + e_{ij}^{(s)}(-\mathbf{p})^* a_s(-\mathbf{p}) \right), \quad (3.10.68)$$

$$\hat{\gamma}_{ij}^{\pm}(0, \mathbf{p}) = -\frac{2\kappa(2\pi)^{3/2}p}{\sqrt{2p}} \left(e_{ij}^{(+)}(\mathbf{p}) a_{(+)}(\mathbf{p}) + e_{ij}^{(-)}(-\mathbf{p})^* a_{(-)}(-\mathbf{p}) \right), \quad (3.10.69)$$

よって,

$$\hat{h}_{ij}(0, \mathbf{p}) = -\frac{H}{p^2} (\hat{\gamma}_{ij}^+(0, \mathbf{p}) + \hat{\gamma}_{ij}^-(0, \mathbf{p})). \quad (3.10.70)$$

ただし,

$$\hat{\gamma}_{ij}^-(\eta, \mathbf{p}) = (\hat{\gamma}_{ij}^+(\eta, -\mathbf{p}))^\dagger. \quad (3.10.71)$$

これらの積の期待値を計算すると

$$\langle \hat{\gamma}_{ij}^+(0, \mathbf{p}) \gamma_{kl}^-(\eta, \mathbf{x})' \rangle = 2\kappa^2 (ip^2) e^{ip\eta} P_{ij;kl}^{(+)}(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.10.72a)$$

$$\langle \gamma_{kl}^-(\eta, \mathbf{x})' \hat{\gamma}_{ij}^+(0, \mathbf{p}) \rangle = 2\kappa^2 (-ip^2) e^{-ip\eta} P_{ij;kl}^{(-)}(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.10.72b)$$

$$\langle \hat{\gamma}_{ij}^-(0, \mathbf{p}) \gamma_{kl}^+(\eta, \mathbf{x})' \rangle = 2\kappa^2 (ip^2) e^{ip\eta} P_{ij;kl}^{(-)}(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.10.72c)$$

$$\langle \gamma_{kl}^+(\eta, \mathbf{x})' \hat{\gamma}_{ij}^-(0, \mathbf{p}) \rangle = 2\kappa^2 (-ip^2) e^{-ip\eta} P_{ij;kl}^{(+)}(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.10.72d)$$

$$\langle \hat{\gamma}_{ij}^{\pm}(0, \mathbf{p}) \gamma_{kl}^{\pm}(\eta, \mathbf{x})' \rangle = \langle \gamma_{kl}^{\pm}(\eta, \mathbf{x})' \hat{\gamma}_{ij}^{\pm}(0, \mathbf{p}) \rangle = 0. \quad (3.10.72e)$$

ここで,

$$P_{ij;kl}^s(p) = e_{ij}^{(s)}(p) e_{kl}^{(s)}(p)^* = e_{ij}^{(s)}(p) e_{kl}^{(s)}(-p) = e_{ij}^{(s)}(p) e_{kl}^{(-s)}(p). \quad (3.10.73)$$

したがって, 相関関数は

$$\begin{aligned} & \left\langle \hat{h}_{i_1j_1}(0, \mathbf{p}_1) \hat{h}_{i_2j_2}(0, \mathbf{p}_2) \hat{h}_{i_3j_3}(0, \mathbf{p}_3) \right\rangle \\ &= \frac{H^3}{(p_1 p_2 p_3)^2} \left\langle \hat{\gamma}_{i_1j_1}^+(0, \mathbf{p}_1) \hat{\gamma}_{i_2j_2}^+(0, \mathbf{p}_2) \hat{\gamma}_{i_3j_3}^+(0, \mathbf{p}_3) + \hat{\gamma}_{i_1j_1}^-(0, \mathbf{p}_1) \hat{\gamma}_{i_2j_2}^-(0, \mathbf{p}_2) \hat{\gamma}_{i_3j_3}^-(0, \mathbf{p}_3) \right\rangle \end{aligned} \quad (3.10.74)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
& \langle \hat{\gamma}_{i_1 j_1}^+(0, \mathbf{p}_1) \hat{\gamma}_{i_2 j_2}^+(0, \mathbf{p}_2) \hat{\gamma}_{i_3 j_3}^+(0, \mathbf{p}_3) \rangle \\
&= -8iH^5 \left\langle [(\hat{\gamma}^+)^3, \int d^3x \int_{-\infty}^0 d\eta \eta^5 (z((\gamma^+)')^3 + \text{h.c.})] \right\rangle \\
&= -8iH^5 \int d^3x \int_{-\infty}^0 d\eta \eta^5 3! \bar{z} \{ (\langle \hat{\gamma}^+(\gamma^-)' \rangle)^3 - (\langle (\gamma^-)' \hat{\gamma}^+ \rangle)^3 \} \\
&= -6(2\kappa)^6 H^5 (2\pi)^3 \delta^3(\sum \mathbf{p}) (p_1 p_2 p_3)^2 \bar{z} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^0 d\eta \eta^5 \{ M^{+++}(1, 2, 3) e^{i(p_1+p_2+p_3)\eta} + M^{---}(1, 2, 3) e^{-i(p_1+p_2+p_3)\eta} \} \\
&= -6 \cdot 5! (2\kappa)^6 \bar{z} H^5 (2\pi)^3 \delta^3(\sum \mathbf{p}) \frac{(p_1 p_2 p_3)^2}{(p_1 + p_2 + p_3)^6} \\
&\quad \times [(M^{+++}(1, 2, 3) + M^{---}(1, 2, 3))] \tag{3.10.75}
\end{aligned}$$

ここで

$$M^{s_1 s_2 s_3}(1, 2, 3) = P_{i_1 j_1; kl}^{(s_1)}(\mathbf{p}_1) P_{i_2 j_2; lm}^{(s_2)}(\mathbf{p}_2) P_{i_3 j_3; mk}^{(s_3)}(\mathbf{p}_3). \tag{3.10.76}$$

同様にして

$$\begin{aligned}
& \langle \hat{\gamma}_{i_1 j_1}^-(0, \mathbf{p}_1) \hat{\gamma}_{i_2 j_2}^-(0, \mathbf{p}_2) \hat{\gamma}_{i_3 j_3}^-(0, \mathbf{p}_3) \rangle \\
&= -8iH^5 \left\langle [(\hat{\gamma}^-)^3, \int d^3x \int_{-\infty}^0 d\eta \eta^5 (z((\gamma^-)')^3 + \text{h.c.})] \right\rangle \\
&= -6 \cdot 5! (2\kappa)^6 z H^5 (2\pi)^3 \delta^3(\sum \mathbf{p}) \frac{(p_1 p_2 p_3)^2}{(p_1 + p_2 + p_3)^6} \\
&\quad \times [(M^{+++}(1, 2, 3) + M^{---}(1, 2, 3))] \tag{3.10.77}
\end{aligned}$$

以上より,

$$\begin{aligned}
& \langle \hat{h}_{i_1 j_1}(0, \mathbf{p}_1) \hat{h}_{i_2 j_2}(0, \mathbf{p}_2) \hat{h}_{i_3 j_3}(0, \mathbf{p}_3) \rangle \\
&= -6 \cdot 5! (2\kappa)^6 (z + \bar{z}) H^8 \frac{1}{(p_1 + p_2 + p_3)^6} (2\pi)^3 \delta^3(\sum \mathbf{p}) \\
&\quad \times [(M^{+++}(1, 2, 3) + M^{---}(1, 2, 3))] \\
&= -r \frac{12 \cdot 5! (2\kappa)^6 H^8}{(p_1 + p_2 + p_3)^6} (2\pi)^3 \delta^3(\sum \mathbf{p}) \\
&\quad \times [(M^{+++}(1, 2, 3) + M^{---}(1, 2, 3))] \tag{3.10.78}
\end{aligned}$$

したがって, parity odd の相互作用 $\tilde{W}W^2$ は h の 3 体相関に寄与しない.

Slow roll インフレーションモデル $\hat{h}_{ij}(0, \mathbf{p})$ は

$$\begin{aligned} \hat{h}_{ij}(0, \mathbf{p}) = & 2\kappa \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2p}} \left\{ e_{ij}^{(+)}(\mathbf{p}) (u_p(0)a_+(\mathbf{p}) + u_p(0)^* a_+(-\mathbf{p})^\dagger) \right. \\ & \left. + e_{ij}^{(-)}(\mathbf{p}) (u_p(0)a_-(\mathbf{p}) + u_p(0)^* a_-(-\mathbf{p})^\dagger) \right\} \end{aligned} \quad (3.10.79)$$

また, $\gamma_{ij}^{\pm'}$ は

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{ij}^{\pm'}(\eta, -\mathbf{p}) = & \frac{\kappa(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2p}} \left[e_{ij}^{(+)}(-\mathbf{p}) \left\{ \begin{pmatrix} v_p \\ w_p \end{pmatrix} a_+(-\mathbf{p}) + \begin{pmatrix} w_p^* \\ v_p^* \end{pmatrix} a_+(\mathbf{p})^\dagger \right\} \right. \\ & \left. + e_{ij}^{(-)}(-\mathbf{p}) \left\{ \begin{pmatrix} w_p \\ v_p \end{pmatrix} a_-(-\mathbf{p}) + \begin{pmatrix} v_p^* \\ w_p^* \end{pmatrix} a_-(\mathbf{p})^\dagger \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.10.80)$$

ここで,

$$u_p(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^\nu \Gamma(1 + \nu) \left[(1 - \epsilon) \frac{H_*}{k} \right]^{\frac{1}{1-\epsilon}}, \quad (3.10.81)$$

$$\begin{aligned} v_p(\eta) & := (\partial_\eta - ip)(au'_p) \\ & = 2ip^2 e^{-ip\eta} \left[1 + \frac{i}{2} \left(\nu - \frac{1}{2} \right) - \frac{\nu - 1/2}{\sqrt{-2\pi k\eta}} (2C_i(-2k\eta) e^{2ik\eta}) \right], \end{aligned} \quad (3.10.82)$$

$$w_p(\eta) := (\partial_\eta + ip)(au'_p) = O(\epsilon), \quad (3.10.83)$$

$$\nu = \frac{1 + \epsilon}{2(1 - \epsilon)}. \quad (3.10.84)$$

これより,

$$\left\langle \hat{h}_{ij}(0, \mathbf{p}) (\gamma_{kl}^{\pm'})'(\eta, x) \right\rangle = \Delta_{ij;kl}^{\pm}(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.10.85a)$$

$$\left\langle (\gamma_{kl}^{\pm'})'(\eta, x) \hat{h}_{ij}(0, \mathbf{p}) \right\rangle = \Delta_{ij;kl}^{\mp}(-\mathbf{p})^* e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.10.85b)$$

ここで,

$$\Delta_{ij;kl}^+(\mathbf{p}) = \frac{\kappa^2}{p} \left(P_{ij;kl}^{(+)} u_p w_p^*(\eta) + P_{ij;kl}^{(-)} u_p v_p^*(\eta) \right) \quad (3.10.86a)$$

$$\Delta_{ij;kl}^-(\mathbf{p}) = \frac{\kappa^2}{p} \left(P_{ij;kl}^{(+)} u_p v_p^*(\eta) + P_{ij;kl}^{(-)} u_p w_p^*(\eta) \right). \quad (3.10.86b)$$

よって,

$$\begin{aligned}
G(1, 2, 3) & := \left\langle \hat{h}_{i_1 j_1}(0, \mathbf{p}_1) \hat{h}_{i_2 j_2}(0, \mathbf{p}_2) \hat{h}_{i_3 j_3}(0, \mathbf{p}_3) \right\rangle \\
& = -8i \times 3! (2\pi)^3 \delta^3(\sum \mathbf{p}) \int d\eta a^{-5} \\
& \quad \left\{ z(\Delta_{1;*}^+(\mathbf{p}_1) \Delta_{2;*}^+(\mathbf{p}_2) \Delta_{3;*}^+(\mathbf{p}_3) \right. \\
& \quad \quad - \Delta_{1;*}^-(-\mathbf{p}_1)^* \Delta_{2;*}^-(-\mathbf{p}_2)^* \Delta_{3;*}^-(-\mathbf{p}_3)^*) \\
& \quad \quad + \bar{z}(\Delta_{1;*}^-(\mathbf{p}_1) \Delta_{2;*}^-(\mathbf{p}_2) \Delta_{3;*}^-(\mathbf{p}_3) \\
& \quad \quad \quad \left. - \Delta_{1;*}^+(-\mathbf{p}_1)^* \Delta_{2;*}^+(-\mathbf{p}_2)^* \Delta_{3;*}^+(-\mathbf{p}_3)^*) \right\} \\
& \simeq -\frac{8i \times 3! \kappa^6}{p_1 p_2 p_3} (2\pi)^3 \delta^3(\sum \mathbf{p}) \int d\eta a^{-5} \\
& \quad \times \left[M^{---}(1, 2, 3) (z \tilde{v}_{p_1}^* \tilde{v}_{p_2}^* \tilde{v}_{p_3}^* - \text{cc}) \right. \\
& \quad \quad - M^{+++}(1, 2, 3) (z \tilde{v}_{p_1} \tilde{v}_{p_2} \tilde{v}_{p_3} - \text{cc}) \\
& \quad \quad + M^{+--}(1, 2, 3) (z \tilde{w}_{p_1}^* \tilde{v}_{p_2}^* \tilde{v}_{p_3}^* - \text{cc}) + \text{cyclic perm} \\
& \quad \quad \left. - M^{-++}(1, 2, 3) (z \tilde{w}_{p_1} \tilde{v}_{p_2} \tilde{v}_{p_3} - \text{cc}) - \text{cyclic perm} \right] \tag{A.10}
\end{aligned}$$

3.10.3 相互作用

3.10.3.1 de Sitter 時空

自由場 自由場の Green 関数は

$$\Delta(x_1, x_2) := \langle \phi(t_1, \mathbf{x}_1) \phi(t_2, \mathbf{x}_2) \rangle_{\text{vac}} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Delta_{\mathbf{k}}(t_1, t_2) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}. \quad (3.10.88)$$

ここで

$$\Delta_{\mathbf{k}}(t_1, t_2) = u_{\mathbf{k}}(t_1) u_{\mathbf{k}}^*(t_2), \quad (3.10.89)$$

$$u_{\mathbf{k}} = H \frac{1 + ik\eta}{2^{1/2} k^{3/2}} e^{-ik\eta} : \quad \eta = \int \frac{dt}{a} \approx -\frac{1}{aH} \quad (3.10.90)$$

特に, 同時刻相関関数は

$$\langle \phi(t, \mathbf{x}_1) \phi(t, \mathbf{x}_2) \rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 k^3} \mathcal{P}(k; t) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}; \quad \mathcal{P}(k; t) = k^3 |u_{\mathbf{k}}(t)|^2. \quad (3.10.91)$$

2次相関 一般に, 相互作用表示で

$$\langle e^{-iS_I} \phi(x_1) \phi(x_2) e^{iS_I} \rangle = \Delta(x_1, x_2) - i \int d^4 y \sqrt{-g} \langle [\mathcal{L}_I(y), \phi(x_1) \phi(x_2)] \rangle + \dots \quad (3.10.92)$$

したがって, 最低次の補正は,

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= -i \int dt d^3 y a^3 [\mathcal{L}_I(y), \phi(x_1) \phi(x_2)] \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 k^3} \mathcal{P}_{\text{loop}} \mathcal{P}_{\text{tree}}; \end{aligned} \quad (3.10.93)$$

$$\mathcal{P}_{\text{loop}} = \int_{qL > 1} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 q^3} \mathcal{P}(q), \quad (3.10.94)$$

$$\mathcal{P}_{\text{tree}} = \int^{t_*} dt \frac{a^3 H^4}{2k^3} (1 - ik\eta_*)^2 (1 + ik\eta)^2 e^{-2ik\eta} \quad (3.10.95)$$

$\mathcal{P}_{\text{tree}}$ は次のように評価される.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\text{tree}} &= \int_0^\infty du \left\{ 2 \frac{(b^2 + 1 + b^2 u)^2 - b^2 u^2}{b^3 (1 + u)^4} \sin(2bu) - \frac{4u(1 + b^2 + b^2 u)}{b^2 (1 + u)^4} \cos(2bu) \right\} \\
&= -\frac{4}{3} \left\{ (1 - b^2) \cos(2b) - 2b \sin(2b) \right\} \text{Ci}(-2b) \\
&\quad + \frac{4}{3} \left\{ 2b \cos(2b) - (1 - b^2) \sin(2b) \right\} \text{Si}(2b) \\
&\quad + \frac{8}{3} - \frac{2\pi}{3} (1 - b^2) \sin(2b) + \frac{4\pi}{3} b \cos(2b). \tag{3.10.96}
\end{aligned}$$

ここで,

$$b = k\eta_* = -\frac{k}{(aH)_*}. \tag{3.10.97}$$

よって, $|b| \ll 1$ のとき,

$$\mathcal{P}_{\text{tree}} \simeq -\frac{4}{3} \ln(-k\eta_*). \tag{3.10.98}$$

また, $\mathcal{P}_{\text{loop}}$ は

$$\mathcal{P}_{\text{loop}} = \frac{H^2}{4\pi^2} \left\{ \ln(ML) + \frac{M^2 \eta^2}{2} \right\}. \tag{3.10.99}$$

ここで, M および $1/L$ は q に対する UV および IR cut-off.

4 量子アノマリー

Last update: 2014/11/26

4.1 歴史

4.2 特性類と指数定理

4.2.1 特性類

一般に, $GL(k, \mathbb{C})$ の多項式関数 $P(\alpha)$ が, $GL(k, \mathbb{C})$ の部分群 G の作用

$$\text{ad}(g) : \alpha \mapsto g\alpha g^{-1} \quad (4.2.1)$$

に対して不変であるとき, P を G -特性多項式と呼ぶ.

一般に, $P(\alpha)$ を G -特性多項式とすると, G を構造群とする多様体 M 上の k 次元ベクトルバンドル (係数体は \mathbb{R} ないし \mathbb{C}) V の線形 G 接続 (Ω, ω) に対して, $P(\Omega)$ は次の性質をもつ:

- i) ゲージ不変な閉微分形式.
- ii) 対応するコホモロジー類は, 接続 Ω に依存せず, バンドル構造のみで決まる.

4.2.2 Euler 類

E を多様体 M 上の向き付けられた $2p$ 次元実ベクトルバンドル, Ω^{ij} をその計量に関する線形接続の曲率形式とすると, E の Euler 類は

$$e(E) = \frac{1}{2^{2p} \pi^p p!} \sum \epsilon_{i_1 \dots i_{2p}} \Omega^{i_1 i_2} \wedge \dots \wedge \Omega^{i_{2p-1} i_{2p}} \quad (4.2.2)$$

により与えられる.

【例 4.1 ($T(S^2)$)】 2次元球面

$$ds^2 = A^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.2.3)$$

に対して, 直交基底

$$\theta^1 = A d\theta, \quad \theta^2 = A \sin \theta d\phi \quad (4.2.4)$$

に対する接続形式は,

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \chi, \quad \chi = -\cos \theta d\phi. \quad (4.2.5)$$

曲率形式は

$$\mathcal{R} = d\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} d\chi, \quad (4.2.6)$$

$$d\chi = \theta^1 \wedge \theta^2. \quad (4.2.7)$$

よって, Euler 類は

$$e(T(S^2)) = \frac{1}{2\pi} \theta^1 \wedge \theta^2. \quad (4.2.8)$$

これより,

$$\chi(S^2) = \int_{S^2} e(T(S^2)) = 2. \quad (4.2.9)$$

□

4.2.3 Chern 類

E を多様体 M 上の p 次元複素ベクトルバンドル, Ω をその計量に関する線形接続の反 Hermitian な曲率形式とすると, E の全 Chern 類は

$$c(E) = \det \left(1 + \frac{i\Omega}{2\pi} \right) = 1 + c_1(E) + \cdots + c_p(E) \quad (4.2.10)$$

で与えられる. ただし,

$$c_j(E) \in H^{2j}(M, \mathbb{Z}). \quad (4.2.11)$$

特に,

$$c_1(E) = \frac{i}{2\pi} \text{Tr} \Omega, \quad (4.2.12a)$$

$$c_2(E) = \frac{1}{8\pi^2} (\text{Tr} \Omega^2 - (\text{Tr} \Omega)^2), \quad (4.2.12b)$$

$$c_p(E) = e(E_{\mathbb{R}}). \quad (4.2.12c)$$

また,

$$\text{ch}(\Omega) = \text{Tr} e^{i\Omega/2\pi} = p + c_1(\Omega) + \cdots \quad (4.2.13)$$

を Chern 特性形式という.

【例 4.2 ($T(\mathbb{C}P^1)$)】 $\mathbb{C}P^1$ の標準計量 ($[x : 1] \in \mathbb{C}P^1$)

$$ds^2 = \phi \bar{\phi}; \quad \phi = 2A \frac{dz}{|z|_1^2} \quad (4.2.14)$$

(本来の Fubini-Study 計量では $A = 1$) に対して,

$$d\phi = -\chi \wedge \phi, \quad \bar{\chi} = -\chi \quad (4.2.15)$$

より $U(1)$ 接続形式は

$$\chi = \frac{zd\bar{z} - \bar{z}dz}{|z|^2 + 1}. \quad (4.2.16)$$

よって, 曲率形式は

$$F = d\chi = \frac{2}{(|z|^2 + 1)^2} dz \wedge d\bar{z}. \quad (4.2.17)$$

Chern 類は

$$c_1 = i \frac{F}{2\pi} \Rightarrow \int_{\mathbb{C}P^1} c_1 = 2. \quad (4.2.18)$$

□

4.2.4 Pontrjagin 類

E を多様体 M 上の向き付けられた k 次元実ベクトルバンドル, Ω^{ij} をその計量に関する線形接続の曲率形式とすると, E の Pontrjagin 類は

$$P(E) = \det \left(1 - \frac{\Omega}{2\pi} \right) = 1 + p_1(E) + \cdots + p_{[k/2]}(E) \quad (4.2.19)$$

ただし,

$$p_j(E) = (-1)^j c_{2j}(E \otimes \mathbb{C}) \in H^{4j}(M, \mathbb{Z}). \quad (4.2.20)$$

また, $k = 2m$ のとき,

$$p_m(E) = e(E)^2. \quad (4.2.21)$$

接続形式 Ω を

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \left[\begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ -x_1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & x_{2r} \\ -x_{2r} & 0 \end{pmatrix} \right] \quad (4.2.22)$$

と標準化すると,

$$p_1(E) = \sum_a x_a^2, \quad (4.2.23a)$$

$$p_2(E) = \sum_{ab} x_a^2 x_b^2 \quad (4.2.23b)$$

接続 Ω の A-roof 種数を

$$\hat{A}(\Omega) = \prod_a \frac{x_a/2}{\sinh(x_a/2)} = 1 - \frac{p_1}{24} + \frac{1}{16} \left(\frac{7p_1^2}{360} - \frac{p_2}{90} \right) \cdots \quad (4.2.24)$$

で定義する. また, Hirzebruch L-多項式を

$$L(\Omega) = \prod_a \frac{x_a/2}{\tanh(x_a/2)} = 1 + \frac{p_1}{3} + \frac{1}{45} (7p_2 - p_1^2) \cdots \quad (4.2.25)$$

により定義する.

4.2.5 指数定理

4.2.5.1 一般 Atiyah-Singer 指数定理

$2n$ 次元のスピノール多様体のスピノールバンドルを \mathcal{S} , ゲージ群 G に関するベクトルバンドルを E とする. このとき, \mathcal{S} のスピノール接続 (R, ω) と E のゲージ場 (F, A) により, バンドル $\mathcal{S} \otimes E$ の接続が定義され, 対応して, Dirac 作用素

$$\mathcal{D} = \gamma^\mu D_\mu : \mathcal{S} \otimes E \rightarrow \mathcal{S} \otimes E \quad (4.2.26)$$

が定義される. このゼロモードの右巻き成分の数を n_+ , 左巻き成分の数を n_- とするとき,

$$n_+ - n_- = \int_M \left[\text{ch}(F) \hat{A}(R) \right]_{2n}. \quad (4.2.27)$$

4.3 カイラルアノーマリー (4次元)

4.3.1 概要

要約: カイラルカレントは, それを構成しているフェルミ粒子がゲージ相互作用すると, 一般的に量子効果によりアノーマリーが生じ, カレントの保存則に位相的なゲージ補正項が加わる [Bell JS, Jackiw R (1969); Adler SL (1969)].

参考文献

- Harvey JA: "TASI 2003 Lecturenotes on Anomalies" [arXiv:hep-th/0509097]
- Adler SL: "Anomalies" [arXiv:hep-th/0411038]

可換ゲージ場の Triangle Anomaly

- Lagrangian

$$\mathcal{L} = -i\bar{\psi}(\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (4.3.1)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (4.3.2)$$

- 古典的対称性: 一般に,

$$\psi \mapsto e^{i\alpha}\psi \quad (4.3.3)$$

質量 $m = 0$ のとき, さらに

$$\psi \mapsto e^{i\beta\gamma_5}\psi \quad (4.3.4)$$

- 保存則 (量子論)

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad : \quad \partial_\mu J^\mu = 0, \quad (4.3.5a)$$

$$J_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \quad : \quad \partial_\mu J_5^\mu = -2m\bar{\psi}\gamma_5\psi + \frac{e^2}{8\pi^2}F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}. \quad (4.3.5b)$$

ここで,

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = *F_{\mu\nu} := \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}F^{\lambda\sigma}. \quad (4.3.6)$$

Adler-Bardeen-Jackiw(ABJ) anomaly

- 不可避性: 正則化においてベクトルカレントの保存を要請すると, 軸性ベクトルカレントの保存則には anomaly が発生し, その値は正則化の方法に依存しない.
- 非くり込み定理: くり込みにより形を変えない. [Adler-Bardeen の定理]

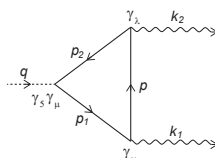


図 2: Triangle Diagram

- 普遍性: 非可換ゲージ場, 重力場との結合もカイラルアノマリーを生む.

$$\begin{aligned}
 D_\mu &= \nabla_\mu - igt_a A_\mu^a, & J_5^\mu &= \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 t \psi \\
 \Rightarrow \partial_\mu J_5^\mu &= \dots + \frac{g^2}{8\pi^2} \text{Tr}(t t_a t_b) F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{b\mu\nu} + \frac{1}{384\pi^2} \text{Tr}(t) R_{\mu\nu\lambda\sigma} \tilde{R}^{\mu\nu\lambda\sigma}
 \end{aligned}
 \tag{4.3.7}$$

- 物理的には, アノマリーはインスタントンとスピノール場の相互作用により引き起こされる.
- 様々な証明法
 - Cut off による正則化.
 - Pauli-Villars 正則化.
 - Point-splitting 正則化.
 - 藤川による経路積分法: PI measure の正則化と Atiyah-Singer 指数定理.

4.3.2 経路積分法による証明 (藤川和夫 1979)

ゲージ場 A 中でのスピノール場 ψ に対する分配関数 Z は経路積分で

$$Z[A] = \int [d\psi][d\bar{\psi}] e^{iS(\psi, \bar{\psi}; A)} \tag{4.3.8}$$

と表される。この経路積分において、変換

$$\psi \rightarrow U\psi, \quad (4.3.9a)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}(\gamma_4 U^\dagger \gamma_4), \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4, \quad \gamma_4 = i\gamma^0, \quad (4.3.9b)$$

に対して、スピノール場の経路積分測度は次のように変換する：

$$[d\psi][d\bar{\psi}] \rightarrow [\det \mathcal{U} \det \bar{\mathcal{U}}]^{-1} [d\psi][d\bar{\psi}], \quad (4.3.10)$$

$$\mathcal{U}_{xn,ym} = U(x)_{nm} \delta^4(x-y), \quad (4.3.11)$$

$$\bar{\mathcal{U}}_{xn,ym} = (\gamma_4 U(x)^\dagger \gamma_4)_{nm} \delta^4(x-y). \quad (4.3.12)$$

特に、 $U(x) = e^{i\alpha(x)t}$ に対しては、 $\bar{\mathcal{U}}\mathcal{U} = 1$ より、 $[d\psi][d\bar{\psi}]$ は不変となる。一方、 $U(x) = e^{i\alpha(x)t\gamma_5}$ に対しては、 $\bar{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$ となるので、測度は不変とならない：

$$\begin{aligned} [d\psi][d\bar{\psi}] &\rightarrow (\det \mathcal{U})^{-2} [d\psi][d\bar{\psi}] \\ &= \exp \left\{ i \int d^4x \alpha(x) \mathcal{P}(x) \right\} [d\psi][d\bar{\psi}]. \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

したがって、 Z 全体は

$$Z \rightarrow \int [d\psi][d\bar{\psi}] \exp \left[i \int d^4x (\alpha(x) \mathcal{P}(x) + J_5^\mu(x) \partial_\mu \alpha(x)) \right]. \quad (4.3.14)$$

Z は積分変数の変換では変化しないので、これより、

$$\langle \partial_\mu J_5^\mu(x) \rangle_A = \mathcal{P}(x). \quad (4.3.15)$$

Anomaly $\mathcal{P}(x)$ は形式的には不定となる：

$$\mathcal{P}(x) = -2\text{Tr}(\gamma_5 t) \delta^4(x-x). \quad (4.3.16)$$

そこで、次のように正則化する：

$$\mathcal{P}(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[-2\text{Tr} \{ \gamma_5 t f(-\not{D}_x^2/M^2) \} \delta^4(x-y) \right]_{y \rightarrow x}. \quad (4.3.17)$$

ここで、 $f(u)$ は $f(0) = 1$ となるなめらかなコンパクト台の関数。また、

$$D_\mu = \partial_\mu - it_a A_\mu^a(x). \quad (4.3.18)$$

Fourier 変換により

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(x) &= \lim -2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [\text{Tr} \{ \gamma_5 t f(-\mathcal{D}_x^2/M^2) e^{ik(x-y)} \}]_{y=x} \\
&= \lim -2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [\text{Tr} \{ \gamma_5 t f(-(i\mathbf{k} + \mathcal{D})^2/M^2) \}] \\
&= \lim -2M^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [\text{Tr} \{ \gamma_5 t f(-(i\mathbf{k} + \mathcal{D}/M)^2) \}] \\
&= - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f''(k^2) [\text{Tr} \{ \gamma_5 t \mathcal{D}^4 \}] \tag{4.3.19}
\end{aligned}$$

ここで, Wick 回転により

$$\int d^4 k f''(k^2) = i\pi^2 \int_0^\infty ds s f''(s) = i\pi^2. \tag{4.3.20}$$

また,

$$\mathcal{D}^2 = D^2 - \frac{i}{2} t_a F_{\mu\nu}^a \gamma^{\mu\nu}, \tag{4.3.21}$$

$$\text{Tr} \{ t \gamma_5 \mathcal{D}^4 \} = 2i \text{Tr}(t_a t_b t) F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{b\mu\nu}. \tag{4.3.22}$$

以上より,

$$\langle \partial_\mu J_5^\mu(x) \rangle_A = \mathcal{P}(x), \tag{4.3.23}$$

$$\mathcal{P}(x) = \frac{1}{8\pi^2} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{b\mu\nu} \text{Tr}(t_a t_b t). \tag{4.3.24}$$

この式は,

$$\text{Tr}(t_a t_b t) = N \delta_{ab} \tag{4.3.25}$$

となる場合には, 次のような保存系に書き直すことができる:

$$\partial_\mu K^\mu = 0; \quad K^\mu = \langle J_5^\mu \rangle_A + 2NG^\mu, \tag{4.3.26}$$

$$G^\mu := -\frac{1}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} [A_\nu^a \partial_\lambda A_\rho^a + \frac{1}{3} f_{abc} A_\nu^a A_\lambda^b A_\rho^c]. \tag{4.3.27}$$

4.3.3 クォークモデルにおけるカイラルアノマリー

4.3.3.1 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 崩壊

要点: π^0 はカイラルな U(1) 変換に対する擬 Goldstone ボゾンであるが, その 2 光子崩壊は, このカイラル対称性のアノマリーにより引き起こされる.

軸性カイラルカレントのアノマリーによる Goldstone ボゾンの Chern-Simons 相互作用 一般に，大域的なカイラル変換

$$e^{i\alpha\gamma_5 t} \quad (4.3.28)$$

に対して，アノマリーのため，分配関数は経路積分測度の変換より

$$Z \rightarrow \int [d\psi][d\bar{\psi}] \exp \left[iS + i \int d^4x \alpha \mathcal{P}(x) \right] \quad (4.3.29)$$

と変換．ここで

$$\mathcal{P}(x) = \frac{g^2}{8\pi^2} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_{\mu\nu}^b \text{Tr}(t_a t_b). \quad (4.3.30)$$

この変換に対する (擬) Goldstone ボゾンを B とすると，

$$\langle \text{Vac} | J_5^0(x) | B \rangle = -\frac{i}{2} F e^{ip_B \cdot x} \quad (4.3.31)$$

より，

$$-i \langle \text{Vac} | [Q_5, B(x)] | \text{Vac} \rangle = -2\text{Im} \int \frac{d^3p_B}{(2\pi)^3} \int d^3y \langle \text{Vac} | J_5^0(y) | B \rangle e^{-ip_B \cdot x} = F. \quad (4.3.32)$$

よって，

$$\delta \langle B \rangle = -i\alpha \langle [Q_5, B] \rangle = \alpha F. \quad (4.3.33)$$

したがって，アノマリーは，次のような有効相互作用 (Chern-Simons 相互作用) を生み出す：

$$S_{\text{eff}} = S + \int d^4x \frac{1}{F} B \mathcal{P}(x). \quad (4.3.34)$$

π^0 への応用 π^0 をカイラル変換 $\exp(i\alpha\gamma_5\tau_3)$ ($\tau_3 = \sigma_3 = 2t_3$) に対する擬 Goldstone ボゾンと見なして，以上の議論を適用すると，カイラルアノマリーは次のような π^0 と電磁場の有効相互作用を生み出す：

$$\delta \mathcal{L} = \frac{1}{F_\pi} \pi^0 \frac{e^2}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \times N_c \left(\left(\frac{2}{3} \right)^2 - \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right) = \frac{e^2 N_c}{24\pi^2 F_\pi} \pi^0 F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (4.3.35)$$

この有効相互作用による π^0 崩壊率は

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = \frac{N_c^2 \alpha^2 m_\pi^3}{144\pi^3 F_\pi^2} = \left(\frac{N_c}{3} \right)^2 \times 1.11 \cdot 10^{16} \text{s}^{-1}. \quad (4.3.36)$$

これは $N_c = 3$ に対して，実験値を良く再現する：

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)_{\text{exp}} = (1.19 \pm 0.08) \cdot 10^{16} \text{s}^{-1}. \quad (4.3.37)$$

4.3.3.2 インスタントンと $U(1)_A$ 問題の解決

ゲージ場の Pontrjagin 数 クォークのカイラル変換はアノマリーにより見かけ上破れている：

$$e^{i\alpha\gamma_5 t} \mapsto \delta\mathcal{L} = \alpha\mathcal{P}(x); \quad \mathcal{P}d^4x = -\sum_j \frac{1}{4\pi^2} \text{Tr}(t\mathcal{F}^{(j)} \wedge \mathcal{F}^{(j)}). \quad (4.3.38)$$

($\mathcal{A} = -igA_\mu^a t_a dx^\mu$, $\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$). しかし, カイラル変換がゲージ変換と可換のとき, $\mathcal{P}(x)$ は

$$\mathcal{P}(x)d^4x = d\mathcal{K}; \quad \mathcal{K} = -\sum_j q_j \frac{1}{4\pi^2} \text{Tr} \left(d\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} + \frac{2}{3} \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \right)^{(j)} \quad (4.3.39)$$

と書けるので, この項の作用積分への影響は無いように見える.

しかし, 実はそうではない. 一般に,

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\mathcal{K} = \int_{S_\infty^3} \mathcal{K} \quad (4.3.40)$$

となるが, 無限遠でゲージ場の強度 F がゼロに近づくとしても, 右辺がゼロとは限らない. 実際, G をゲージ群として

$$A \rightarrow U^{-1}dU, \quad U : S^3 \rightarrow G \quad (4.3.41)$$

とすると,

$$\int_{S_\infty^3} \mathcal{K} = \sum_j \frac{q_j}{12\pi^2} \int_{S^3} \text{Tr}(U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU)^{(j)} \quad (4.3.42)$$

この右辺の被積分関数は, G の不変体積要素から誘導される 3次元体積要素と一致するので, その積分は, G 内での S^3 の像のこの測度に関する体積 V を表す. この体積は, U の連続変形では代わらない. 実際,

$$\delta(U^{-1}dU) = d(U^{-1}\delta U) + [U^{-1}dU, U^{-1}\delta U] \quad (4.3.43)$$

より,

$$\begin{aligned} \delta V &= 3 \int_{S^3} \text{Tr} \{ d(U^{-1}\delta U) \wedge U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU \} \\ &= -3 \int_{S^3} \text{Tr} \{ U^{-1}\delta U \wedge d(U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU) \} = 0. \end{aligned} \quad (4.3.44)$$

したがって、この積分値は離散的な値を取る位相不変量となる (*winding number*) .

値を計算するために、まず、

$$\pi_3(\mathrm{SU}(n)) = \mathbb{Z}, \quad n \geq 2 \quad (4.3.45)$$

となることに注意する. これより, $\mathrm{SU}(2) \subset \mathrm{SU}(n)$ ($n \geq 2$) を考慮すると, $G = \mathrm{SU}(2)$ の場合に計算すれば良いことがわかる. そこで, 写像 U を

$$U : S^3 \rightarrow \mathrm{SU}(2), \quad (4.3.46)$$

$$U(x) = \frac{1}{r} (x^4 \sigma_0 + ix^j \sigma_j) \quad (4.3.47)$$

とおくと,

$$U^{-1}dU = i\omega^j \sigma_j, \quad (4.3.48)$$

$$\omega^j = \frac{1}{r^2} (\epsilon_{jkl} x^k dx^l + x^4 dx^j - x^j dx^4) \quad (4.3.49)$$

より,

$$\begin{aligned} V &= i^3 \int_{S^3} \omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^l \mathrm{Tr}(\sigma_j \sigma_k \sigma_l) \\ &= 12 \int_{S^3} \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \end{aligned} \quad (4.3.50)$$

を得る. ここで, $\mathrm{SU}(2)$ の $U(x)$ への左作用は, S^3 の推移的な等長変換を与え, $U^{-1}dU$ はこの作用で不変となるので, ω^j は S^3 上の不変 1 形式となる. ところが, S^3 の北極 $(0, 0, 0, 1)$ で

$$\omega^j = dx^j \quad (4.3.51)$$

となるので, $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$ は S^3 の標準体積要素と一致する. よって,

$$V = 24\pi^2. \quad (4.3.52)$$

すなわち, \mathcal{K} の積分は整数 (の 2 倍) となる. 元のゲージ場で表すと, $F_{\mu\nu}$ が無限遠でゼロに近づくとき,

$$p_1 = -\frac{1}{8\pi^2} \int d^4x \mathrm{Tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \in \mathbb{Z} \quad (4.3.53)$$

となる. ただし, Tr はベクトル表現に関するものである.

インスタントン解 Pontrjagin 数がゼロでないゲージ配位は次のようにして構成することができる。時間を虚時間に変え，時空をユークリッド化して考える。このとき，任意の 2 形式 $\mathcal{F} \in A^2$ に対し，

$$**\mathcal{F} = \mathcal{F} \quad (4.3.54)$$

が成り立つので，2 形式の空間は $*$ の固有空間に直和分解される：

$$A^2 = A_+^2 + A_-^2 : \quad *\mathcal{F} = \pm\mathcal{F} \text{ for } \mathcal{F} \in A_{\pm}^2. \quad (4.3.55)$$

このとき， $\mathcal{F} \in A_{\pm}^2$ に対して，ゲージ場の方程式は，

$$D\mathcal{F} := d\mathcal{F} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} - \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow D*\mathcal{F} = 0 \quad (4.3.56)$$

に帰着する。さらに，

$$d^4x \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} = *\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} = \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \quad (4.3.57)$$

より， $\mathcal{F} \neq 0$ ならば，

$$\int d^4x \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \neq 0 \quad (4.3.58)$$

となる。このような解は，インスタントン解と呼ばれる。

SU(2) ゲージ理論での $p_1 = 1$ のインスタントン解は次のように構成することができる [Belavin AA, Polyakov AM, Schwarz AS, Tyupkin YuS (1975)]. ゲージ配位が，上記の $U(x) \in \text{SU}(2)$ を用いて

$$\mathcal{A} = f(r)U^{-1}dU \quad (4.3.59)$$

と書けるとする。ただし，

$$f(r) = O(r^2) \text{ at } r = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 0. \quad (4.3.60)$$

このとき，

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= f'dr \wedge U^{-1}dU + f(f-1)U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU \\ &= i \{ f'r \wedge \omega^j + f(1-f)\epsilon_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l \} \sigma_j \end{aligned} \quad (4.3.61)$$

構成法より自動的に $D\mathcal{F} = 0$ なので， $*\mathcal{F} = \mathcal{F}$ が満たされればよい。 $dr, r\omega^j (j = 1, 2, 3)$ が正規直交系となるので，

$$*dr \wedge \omega^j = \frac{r}{2} \epsilon_{jkl} \omega^k \wedge \omega^l \quad (4.3.62)$$

これより,

$$*\mathcal{F} = i \left\{ \frac{f'}{2} \epsilon_{jkl} \omega^k \wedge \omega^l + 2f(1-f) \frac{1}{r} dr \wedge \omega^j \right\} \sigma_j. \quad (4.3.63)$$

よって, 自己双対性条件は

$$rf' = 2f(1-f). \quad (4.3.64)$$

この一般解は, R を積分定数として

$$f = \frac{r^2}{r^2 + R^2}. \quad (4.3.65)$$

で与えられる.

$SU(2)_A$ のアノマリー $t \in SU(2)_A$ とすると, $\text{Tr}(tt_{(a)t_b})$ は t_a, t_b が $U(1)_Y$, $SU(2)$, $SU(3)$ のいずれに属する場合もゼロとなる. 唯一, $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ のところで見たように, $t_a, t_b \in U(1)_{\text{EM}}$ のみが $SU(2)_A$ に対してアノマリーを生む (mixed anomaly). しかし, $\pi_3(U(1)) = 0$ なので, $U(1)$ はインスタントン解を持たず, アノマリーは対称性を破らない.

$U(1)_A$ のアノマリー 一方, $U(1)_A$ の変換に対しては, $\text{Tr}(tt_{(a)t_b}) \propto \text{Tr}(t_a t_b)$ なので, $U(1), SU(2), SU(3)$ のすべてのゲージ場がアノマリーを生む. したがって, カイラル対称性 $U(1)_A$ はインスタントン効果で破れる. これにより, $U(1)_A$ 問題は解決される.

4.3.3.3 QCD 真空と QCD CP 問題

4.3.3.4 θ 真空

QCD において, 真空基底状態での $SU(3)$ ゲージ場は,

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = U^{-1}dU, \quad U(x) \in SU(3) \quad (4.3.66)$$

と表される. いま, 空間的無限遠で $U \rightarrow 1$ を要請すると, 各時刻 t でのゲージ場配位は,

$$U : S^3 \rightarrow SU(3) \quad (4.3.67)$$

と見なすことができる。これらのうち、互いに連続変形で移れるものは同一視すると、配位は U のホモトピー類で分類され、その全体は $\pi_3(\text{SU}(3)) \cong \mathbb{Z}$ と対応する。具体的には、この対応は、巻き付き数

$$\begin{aligned} n &:= -\frac{1}{8\pi^2} \int d^3x \text{Tr} \left\{ d\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} + \frac{2}{3} \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \right\} \\ &= \frac{1}{24\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \text{Tr}(U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU) \in \mathbb{Z} \quad (4.3.68) \end{aligned}$$

で与えられる。

巻き付き数の時間変化は、

$$\Delta n = n(t = \infty) - n(t = -\infty) = \int_{\mathbb{R}^4} d\mathcal{K} = \int_{\mathbb{R}^4} -\frac{1}{8\pi^2} \text{Tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}). \quad (4.3.69)$$

これより、インスタントンは巻き付き数の変化を引き起こす。いま、巻き付き数 n の真空を $|n\rangle$ と表すと、

$${}_+\langle n+q|n, t\rangle_- = C \int [dA]_q \cdots e^{-S_E} = A_q. \quad (4.3.70)$$

よって、新たな真空の基底 $|\theta\rangle$ を

$$|\theta\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\theta} |n\rangle, \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (4.3.71)$$

により定義すると、

$${}_+\langle \theta'|\theta\rangle_- = 2\pi\delta(\theta - \theta') \sum_{q \in \mathbb{Z}} A_q e^{i\theta q}. \quad (4.3.72)$$

したがって、この θ 真空がエネルギー固有状態を与える。

4.3.3.5 強い相互作用における CP の破れ

各 θ 真空での Lagrangian は

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L} + \theta \mathcal{P}^{(3)}; \quad (4.3.73)$$

$$\mathcal{P}^{(3)} = -\frac{1}{8\pi^2} \text{Tr}(\mathcal{F}^{(3)} \wedge \mathcal{F}^{(3)}) = \frac{g_3^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma}) \quad (4.3.74)$$

と表される。この θ に依存する補正項は $\theta \neq 0$ のとき、CP を破る。

Chiral anomaly のため, この θ に依存した CP の破れとクォーク質量項の複素位相による CP の破れは密接に関連する. 以下, $q = (u, d, s)$ の 3 クォークモデルで考える. このとき, $U(3)_R \times U(3)_L$ 対称性のうち, $U(1)_b$ は厳密な対称性, $SU(3)_R \times SU(3)_L = SU(3)_V \times SU(3)_A$ 対称性はクォーク質量項により弱く破れた近似的対称性となる. ただし, $SU(3)_A$ はクォーク凝縮により自発的に破れる. また, 残る $U(1)_A$ は chiral anomaly で破れる. $it\gamma_5$ を対応する無限小カイラル変換とすると, アノマリー関数は, 一般に

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = & \frac{g_1^2}{4 \cdot 8\pi^2} \text{Tr}(tY^2) F^{(1)} \cdot \tilde{F}^{(1)} + \frac{g_1 g_2}{2 \cdot 4\pi^2} \text{Tr}(tY t_a^{(2)}) F^{(1)} \cdot \tilde{F}^{(2)a} \\ & + \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr}(t) \left(g_2^2 F^{(2)} \cdot \tilde{F}^{(2)} + g_3^2 F^{(3)} \cdot \tilde{F}^{(3)} \right). \end{aligned} \quad (4.3.75)$$

ここで, 2 形式の内積において, $F \cdot G = F_{\mu\nu} G^{\mu\nu} / 2$. また, 次の規格化を採用:

$$\text{Tr}(t_a^{(2)} t_b^{(2)}) = \delta_{ab}, \quad \text{Tr}(t_\alpha^{(3)} t_\beta^{(3)}) = \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.3.76)$$

これより, $\text{Tr}(t) \neq 0$ となるカイラル変換 $U = \exp(i\alpha t\gamma_5)$ に対して, θ パラメーターは

$$\theta \frac{g_3^2}{8\pi^2} F^{(3)} \cdot \tilde{F}^{(3)} \rightarrow (\theta + \alpha \text{Tr}(t)) \frac{g_3^2}{8\pi^2} F^{(3)} \cdot \tilde{F}^{(3)} \quad (4.3.77)$$

と変化する. 一方, クォークの質量行列は

$$\bar{q}_L \mathcal{M} q_R + \text{h.c.} \rightarrow \bar{q}_L e^{i\alpha t} \mathcal{M} e^{i\alpha t} q_R + \text{h.c.} \quad (4.3.78)$$

と変換する. これより, \mathcal{M} の全位相は

$$\det \mathcal{M} \rightarrow e^{i\alpha \text{Tr}(t)} \det \mathcal{M} \quad (4.3.79)$$

と変化する. よって, 最初, この変換で $\det \mathcal{M} \in \mathbb{R}$ としておき, そのときの θ を θ_0 とおく. このとき, $SU(3)_R \times SU(3)_L$ 変換で \mathcal{M} を非負固有値 $[m_u, m_d, m_s]$ をもつ実対角行列に対角化できる. この表示から出発して, カイラル変換 $U = \exp(i\alpha t\gamma_5)$ を施して, $\theta \rightarrow 0$ とすると,

$$0 = \theta_0 + \alpha \text{Tr}(t) = 0. \quad (4.3.80)$$

このとき, クォークの質量行列は

$$\mathcal{M} = e^{i\alpha t} [m_u, m_d, m_s] e^{i\alpha t}. \quad (4.3.81)$$

$|\theta_0| \ll 1$ とすると,

$$\mathcal{M} \simeq [m_u, m_d, m_s] + i\alpha\{t, [m_u, m_d, m_s]\}. \quad (4.3.82)$$

この第2項がCPの破れを生む:

$$\mathcal{L}_{\text{CPV}} = i\alpha\bar{q}(t\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_0t)\gamma_5q. \quad (4.3.83)$$

このCPの破れの量子効果を考える際に, \mathcal{L}_{CPV} がカイラルSU(3)の擬Goldstone bosons B_a に対応する成分をもつと, 量子効果は真空の再定義 ($\langle\bar{q}\lambda_aq\rangle, \langle\bar{q}\lambda_a\gamma_5q\rangle$ の値の変化) を生み出す. これを避けるには, \mathcal{L}_{CPB} がカイラルSU(3)に関する真空整列条件

$$\delta_\alpha\mathcal{L}_{\text{CPV}} = \alpha\bar{q}[\frac{1}{2}\lambda_\alpha, t\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_0t]q = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, 8) \quad (4.3.84)$$

を満たせば良い. 解は,

$$t\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_0t = cI_3 \Leftrightarrow t = \frac{c}{2}\mathcal{M}_0^{-1}. \quad (4.3.85)$$

よって, 条件(4.3.80)を考慮して,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{CPV}} &= -i\frac{\theta_0}{\text{Tr}\mathcal{M}_0^{-1}}\bar{q}\gamma_5q \\ &= -i\theta_0\frac{m_um_dm_s}{m_um_d + m_dm_s + m_um_s}(\bar{u}\gamma_5u + \bar{d}\gamma_5d + \bar{s}\gamma_5s) \end{aligned} \quad (4.3.86)$$

4.3.3.6 中性子電気双極子モーメント

References

- Baluni V: "CP-nonconservation effects in quantum chromodynamics", PRD19 (1979)19.
- Crewther RJ, Di Vecchia P, Veneziano G, Witten E: "Chiral estimate of the electric dipole moment of the neutron in quantum chromodynamics", PLB88 (1979) 123.

双極子モーメントの計算法 一般に、フェルミ粒子に対して、

$$u(p) = \begin{pmatrix} (E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\chi \\ m\chi \end{pmatrix}, \quad (4.3.87a)$$

$$u(p')^\dagger \gamma^j u(p) = m \{ i(E' - E)\delta_l^j - \epsilon_{jkl}(p' + p)^k \} \chi^\dagger \sigma^l \chi - imq_j \chi^\dagger \chi, \quad (4.3.87b)$$

$$\bar{u}(p') \gamma^{jk} u(p) = m\epsilon^{jkl} \{ (E' + E)\delta_l^n + i\epsilon_{lkn}q^k \} \chi^\dagger \sigma_n \chi + m\epsilon^{jkl}(p' + p)_l \chi^\dagger \chi \quad (4.3.87c)$$

より ($q = p' - p$)、

$$-i\bar{u}(p') \gamma_{\mu\nu} q^\nu u(p) A^\mu(q) = \frac{1}{2} \bar{u}(p') \gamma_{\mu\nu} u(p) F^{\mu\nu}(q) \rightarrow \sigma_j B^j.$$

よって、このフェルミ粒子の磁気モーメントを

$$\mu^j = \mu \sigma^j \quad (4.3.88)$$

と置くと、

$$\langle p' | T(j_\mu(0) e^{iS_{\text{int}}}) | p \rangle \rightarrow i\mu \bar{u}(p') \gamma_{\mu\nu} q^\nu u(p) + \dots \quad (4.3.89)$$

例えば、

$$e\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) = i \frac{e}{2m} \bar{u}(p') [(p + p')_\mu + \gamma_{\mu\nu} q^\nu] u(p) \quad (4.3.90)$$

より、自由荷電粒子の磁気モーメントは

$$\mu^j = \frac{e}{2m} \sigma^j. \quad (4.3.91)$$

同様にして、

$$\gamma_{\mu\nu} \gamma_5 = i \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \gamma^{\lambda\sigma} \quad (4.3.92)$$

より、

$$-\bar{u}(p') \gamma_{\mu\nu} \gamma_5 q^\nu u(p) A^\mu(q) = \frac{1}{2} \bar{u}(p') \gamma_{\mu\nu} u(p) \tilde{F}^{\mu\nu}(q) \rightarrow \sigma_j E^j$$

よって、フェルミ粒子が電気双極子モーメント

$$D^j = D \sigma^j \quad (4.3.93)$$

をもつとすると、

$$\langle p' | T(j_\mu(0) e^{iS_{\text{int}}}) | p \rangle \rightarrow D \bar{u}(p') \gamma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 u(p) + \dots \quad (4.3.94)$$

中性子の電気双極子モーメント 一般論より, 中性子の電気双極子モーメント D_n は

$$-\langle n(p')|T(J_\mu(0) \int d^4x i\mathcal{L}_{\text{CPV}})|n(p)\rangle \rightarrow D_n \bar{u}(p') \gamma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 u(p) + \dots \quad (4.3.95)$$

により決定される. Crewther らの結果は,

$$D_n \simeq g_{\pi NN} \bar{g}_{\pi NN} \frac{1}{4\pi^2 m_N} \ln \left(\frac{m_N}{m_\pi} \right). \quad (4.3.96)$$

ここで,

$$\mathcal{L}_{\pi NN} = \boldsymbol{\pi} \cdot \bar{N} \boldsymbol{\tau} (i\gamma_5 g_{\pi NN} + \bar{\gamma}_{\pi NN}) N, \quad (4.3.97a)$$

$$g_{\pi NN} \simeq 13.4, \quad (4.3.97b)$$

$$\bar{g}_{\pi NN} \simeq -\theta_0 \frac{(m_\Xi - m_N) m_u m_d}{F_\pi (m_u + m_d) (2m_s - m_u - m_d)}, \quad (4.3.97c)$$

$$\simeq -0.038\theta_0. \quad (4.3.97d)$$

よって,

$$D_n \simeq 5.2 \times 10^{-16} \theta_0 \text{ ecm}. \quad (4.3.98)$$

Bag モデルによる Baluni の結果も近い値となる:

$$D_n \simeq 2.7 \times 10^{-16} \theta_0 \text{ ecm}. \quad (4.3.99)$$

実験により得られた上限値は

$$|D_n| < 3 \times 10^{-26} \text{ ecm} \Rightarrow |\theta_0| \lesssim 10^{-9}. \quad (4.3.100)$$

4.3.4 Triangle anomaly の直接計算

4.3.4.1 Counter terms

図3の発散相殺項 $C^\mu{}_{\nu\lambda}(k_1, k_2)(q = k_1 + k_2)$ として, 要請

- 対称性: 入れ替え $(k_1, \nu) \leftrightarrow (k_2, \lambda)$ に対して不変.
- Lorentz 不変性
- $k_1^2 = k_2^2 = 0$

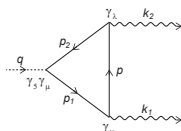


図 3: Triangle Digram

を満たすものの一般形は

$$\begin{aligned}
C^\mu{}_{\nu\lambda} = & a_1 (k_1^\mu k_{1\nu} k_{1\lambda} + k_2^\mu k_{2\nu} k_{2\lambda}) + a_2 q^\mu k_{1\nu} k_{2\lambda} \\
& + a_3 q^\mu k_{2\nu} k_{1\lambda} + a_4 (k_2^\mu k_{1\nu} k_{1\lambda} + k_1^\mu k_{2\nu} k_{2\lambda}) \\
& + a_5 (\delta_\nu^\mu k_{1\lambda} + \delta_\lambda^\mu k_{2\nu}) + a_6 (\delta_\nu^\mu k_{1\lambda} + \delta_\lambda^\mu k_{1\nu}) \\
& + a_7 q^\mu \eta_{\nu\lambda} \\
& + b_1 \epsilon^\mu{}_{\nu\lambda k_1 - k_2} + b_2 q^\mu \epsilon_{\nu\lambda k_1 k_2} \\
& + b_3 (k_{1\nu} \epsilon^\mu{}_{\lambda k_1 k_2} - k_{2\lambda} \epsilon^\mu{}_{\nu k_1 k_2}) \\
& + b_4 (k_{2\nu} \epsilon^\mu{}_{\lambda k_1 k_2} - k_{1\lambda} \epsilon^\mu{}_{\nu k_1 k_2})
\end{aligned} \tag{4.3.101}$$

ここで, a_i, b_j は $k_1 \cdot k_2$ の関数.

さらに,

$$C^\mu{}_{\nu\lambda} k_1^\nu = 0 \tag{4.3.102}$$

を要請すると,

$$\begin{aligned}
C^\mu{}_{\nu\lambda} = & a_2 q^\mu k_{1\nu} k_{2\lambda} + a_3 q^\mu (k_{2\nu} k_{1\lambda} - (k_1 \cdot k_2) \eta_{\nu\lambda}) \\
& + b_2 q^\mu \epsilon_{\nu\lambda k_1 k_2} \\
& + b_4 (-(k_1 \cdot k_2) \epsilon^\mu{}_{\nu\lambda k_1 - k_2} + k_{2\nu} \epsilon^\mu{}_{\lambda k_1 k_2} - k_{1\lambda} \epsilon^\mu{}_{\nu k_1 k_2}) \\
& + b_3 (k_{1\nu} \epsilon^\mu{}_{\lambda k_1 k_2} - k_{2\lambda} \epsilon^\mu{}_{\nu k_1 k_2})
\end{aligned} \tag{4.3.103}$$

これより,

$$\begin{aligned}
q_\mu C^\mu{}_{\nu\lambda} = & q^2 \{ a_2 k_{1\nu} k_{2\lambda} + a_3 (k_{2\nu} k_{1\lambda} - (k_1 \cdot k_2) \eta_{\nu\lambda}) \} \\
& + (b_2 + b_4) q^2 \epsilon_{\nu\lambda k_1 k_2}.
\end{aligned} \tag{4.3.104}$$

4.3.4.2 Vector current

ベクトル型カレントによる相互作用の場合，三角関式に対応する有効頂点テンソルは

$$T^\mu{}_{\nu\lambda} = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} [V^\mu{}_{\nu\lambda}(p+k_1, p-k_2, p) + V^\mu{}_{\lambda\nu}(p+k_2, p-k_1, p)]. \quad (4.3.105)$$

ここで，

$$V^\mu{}_{\nu\lambda}(p_1, p_2, p_3) := \text{Tr} \left(\gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_2 + im + \epsilon} \gamma_\lambda \frac{1}{\not{p}_3 + im + \epsilon} \gamma_\nu \frac{1}{\not{p}_1 + im + \epsilon} \right) \quad (4.3.106)$$

Pauli-Villars 正則化を

$$T^{(R)\mu}{}_{\nu\lambda} = \lim_{M \rightarrow \infty} T^\mu{}_{\nu\lambda}(V \rightarrow V^{(R)}), \quad (4.3.107)$$

$$V^{(R)\mu}{}_{\nu\lambda} = V^\mu{}_{\nu\lambda}(p_1, p_2, p_3; m^2) - V^\mu{}_{\nu\lambda}(p_1, p_2, p_3; M^2) \quad (4.3.108)$$

により定義すると， $V^{(R)}$ の p 積分は収束するので， $p \rightarrow -p$ の変換を行うと，

$$T^{(R)\mu}{}_{\nu\lambda} = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (W^\mu{}_{\nu\lambda}(p_1, p_2, p_3; m^2) - W^\mu{}_{\lambda\nu}(p_2, p_1, p_3; m^2)) \quad (4.3.109)$$

$$W^\mu{}_{\nu\lambda}(p_1, p_2, p_3; m^2) = \frac{\mathcal{V}^\mu{}_{\nu\lambda}(p_1, p_2, p_3) - \mathcal{V}^\mu{}_{\lambda\nu}(p_2, p_1, p_3)}{(p_1^2 + m^2 - i\epsilon)(p_2^2 + m^2 - i\epsilon)(p_3^2 + m^2 - i\epsilon)} \quad (4.3.110)$$

ここで，

$$p_1 = p + k_1, \quad p_2 = p - k_2, \quad p_3 = p. \quad (4.3.111)$$

$\mathcal{V}^\mu{}_{\nu\lambda}$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^\mu{}_{\nu\lambda}(p_1, p_2, p_3) &= \text{Tr}(\not{p}_1 - im)\gamma^\mu(\not{p}_2 - im)\gamma_\lambda(\not{p}_3 - im)\gamma_\nu \\ &= \text{Tr}\not{p}_1\gamma^\mu\not{p}_2\gamma_\lambda\not{p}_3\gamma_\nu - m^2\text{Tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\gamma_\lambda\gamma_\nu + \not{p}_2\gamma_\lambda\gamma_\nu\gamma^\mu + \not{p}_3\gamma_\nu\gamma^\mu\gamma_\lambda) \end{aligned} \quad (4.3.112)$$

と表されるので，

$$C\gamma^\mu C^{-1} = -\mathcal{T}\gamma^\mu \quad (4.3.113)$$

より，

$$\mathcal{V}^\mu{}_{\nu\lambda}(p_1, p_2, p_3) - \mathcal{V}^\mu{}_{\lambda\nu}(p_2, p_1, p_3) = 0. \quad (4.3.114)$$

よって，Pauli-Villars 正則化で

$$T^\mu{}_{\nu\lambda} = 0. \quad (4.3.115)$$

4.3.4.3 Axial current

軸性カレントの場合の

$$T^\mu{}_{\nu\lambda} = e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} [A^\mu{}_{\nu\lambda}(p+k_1, p-k_2, p) + A^\mu{}_{\lambda\nu}(p+k_2, p-k_1, p)]. \quad (4.3.116)$$

ここで,

$$\begin{aligned} A^\mu{}_{\nu\lambda}(p_1, p_2, p_3) &:= \text{Tr} \left(\gamma_5 \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_2 + im + \epsilon} \gamma^\lambda \frac{1}{\not{p}_3 + im + \epsilon} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p}_1 + im + \epsilon} \right) \\ &= \frac{\mathcal{A}^\mu{}_{\nu\lambda}(p_1, p_2, p_3)}{(p_1^2 + m^2 - i\epsilon)(p_2^2 + m^2 - i\epsilon)(p_3^2 + m^2 - i\epsilon)} \end{aligned} \quad (4.3.117)$$

ここで,

$$p_1 = p + k_1, \quad p_2 = p - k_2, \quad p_3 = p. \quad (4.3.118)$$

また,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\mu{}_{\nu\lambda}(p_1, p_2, p_3) &= \text{Tr}(\not{p}_1 - im)\gamma_5\gamma^\mu(\not{p}_2 - im)\gamma^\lambda(\not{p}_3 - im)\gamma^\nu \\ &= \text{Tr}\not{p}_1\gamma^\mu\not{p}_2\gamma^\lambda\not{p}_3\gamma^\nu \\ &\quad - m^2\text{Tr}(\not{p}_1\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu + \not{p}_2\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\mu + \not{p}_3\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\lambda) \end{aligned} \quad (4.3.119)$$

$q_\mu \mathcal{A}^\mu{}_{\nu\lambda}$ は次のように変形できる :

$$q_\mu \mathcal{A}^\mu{}_{\nu\lambda}(p_1, p_2, p_3) = \mathcal{B}_{\nu\lambda}(p_1, p_2, p_3) + \mathcal{A}_{\nu\lambda}(p_1, p_2, p_3); \quad (4.3.120)$$

$$\mathcal{B}_{\nu\lambda}(p_1, p_2, p_3) = 2mi\text{Tr}(\not{p}_1 - im)\gamma_5(\not{p}_2 - im)\gamma^\lambda(\not{p}_3 - im)\gamma^\nu \quad (4.3.121)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\nu\lambda}(p_1, p_2, p_3) &= \text{Tr}(\not{p}_1 - im)\gamma_5(\not{p}_1 - im)(\not{p}_2 - im)\gamma^\lambda(\not{p}_3 - im)\gamma^\nu \\ &\quad - \text{Tr}(\not{p}_1 - im)\gamma_5(\not{p}_2 + im)(\not{p}_2 - im)\gamma^\lambda(\not{p}_3 - im)\gamma^\nu \end{aligned} \quad (4.3.122)$$

対応して,

$$q_\mu T^\mu{}_{\nu\lambda}(k_1, k_2) = B_{\nu\lambda} + A_{\nu\lambda}. \quad (4.3.123)$$

まず, Tr を計算すると, \mathcal{B} は次のように表される :

$$\mathcal{B}_{\nu\lambda}(p+k_1, p-k_2, p) = -8im^2\epsilon_{\nu\lambda k_1 k_2} \quad (4.3.124)$$

これより,

$$\begin{aligned}
B_{\nu\lambda} &= 8m^2 e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int_{0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq 1} d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{-i\epsilon_{\nu\lambda k_1 k_2}}{(\alpha_1 p_1^2 + \alpha_2 p_2^2 + \alpha_3 p_3^2 + m^2 - i\epsilon)^3} \\
&\quad + (\nu \leftrightarrow, k_1 \leftrightarrow k_2) \\
&= \frac{e^2}{\pi^2} \epsilon_{\nu\lambda k_1 k_2} \int_{0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq 1} d\alpha_1 d\alpha_2 \\
&\quad \times \frac{m^2}{m^2 + \alpha_1(1 - \alpha_1)k_1^2 + 2k_1 \cdot k_2 \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2(1 - \alpha_2)k_2^2}. \quad (4.3.125)
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
A_{\nu\lambda} &= -ie^2 \{ I_{\nu\lambda}(k_2; m^2) - I_{\nu\lambda}(-k_2; m^2) + I_{\nu\lambda}(k_1; m^2) - I_{\nu\lambda}(-k_1; m^2) \} \\
I_{\nu\lambda}(k; m^2) &:= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\epsilon_{\nu\lambda p k}}{((p - k)^2 + m^2 - i\epsilon)(p^2 + m^2 - i\epsilon)} \quad (4.3.127)
\end{aligned}$$

以上より, $T^\mu{}_{\nu\lambda}$ の正則化を Paulli-Villars 法により

$$T^{(R)\mu}{}_{\nu\lambda} = \lim_{M \rightarrow \infty} (T^\mu{}_{\nu\lambda}(m) - T^\mu{}_{\nu\lambda}(M)) \quad (4.3.128)$$

により定義すると,

$$\frac{\partial}{\partial m^2} I_{\nu\lambda}(k, m^2) = 0 : \text{convergent integral} \quad (4.3.129)$$

より,

$$A_{\nu\lambda}(m) - A_{\nu\lambda}(M) = 0 \quad (4.3.130)$$

および

$$q_\mu T^{(R)\mu}{}_{\nu\lambda} = B_{\nu\lambda}(m) - B_{\nu\lambda}(\infty) \quad (4.3.131)$$

ここで,

$$B_{\nu\lambda}(\infty) = \frac{e^2}{2\pi^2} \epsilon_{\nu\lambda k_1 k_2} \quad (4.3.132)$$

よって,

$$q_\mu T^{(R)\mu}{}_{\nu\lambda} = B_{\nu\lambda}(m) - \frac{e^2}{2\pi^2} \epsilon_{\nu\lambda k_1 k_2} \quad (4.3.133)$$

を得る. これは,

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2mj_5 - \frac{e^2}{4\pi^2} F \cdot *F \quad (4.3.134)$$

4.3.5 *ゲージアノマリーの直接計算

References

- Weinber S: The Quantum Theory of Fields II (CUP, 1995)

4.3.5.1 積分表式

カイラルなゲージ場と結合するスピノール

$$\mathcal{L}_\psi = -i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - iT_a A_\mu^a)\psi \quad (4.3.135)$$

に対するカレント

4.4 Gauge and gravitational anomaly

References

- Harvey JA: hep-th/0509097, “TASI Lecture on Anomalies”
- Adler SL: ”Anomalies” [arXiv:hep-th/0411038]
- Alvarez-Gaume L, Ginsparg P: Ann. Phys. 161:423-490 (1985), “The Structure of Gauge and Gravitational Anomalies”
- Alvarez-Gaume L, Witten E: NPB234:269-330 (1983), “Gravitational anomalies”
- Witten E: plb117(1982)324, “SU(2) anomaly”
Anomalous U(1) and GCS/GGS
- Anastasopoulos P, Bianchi M, Dudas E, Kiritsis E.: JHEP0611:057 (2006) “Anomalies, anomalous U(1) ’s and generalized Chern-Simons terms”

4.4.1 一般的構造

アノーマリーはカイラルな場の量子効果によってのみ生成され、 d 次元時空では、一般に次の構造をもつ：

$$\delta \ln Z = \frac{-i}{(2\pi)^5} \int \hat{I}^d(F_2, R_2), \quad (4.4.1)$$

$$\hat{I}^{d+2} \Rightarrow \hat{I}^d : \quad \hat{I}^{d+2} = d\hat{I}^{d+1}, \quad \delta\hat{I}^{d+1} = d\hat{I}^d. \quad (4.4.2)$$

ゲージアノーマリー

- 4次元の Gauge anomaly は次の形にかける：

$$I^d = C\alpha^a \text{Tr}(t_a t_{(b} t_{c)}) \mathcal{F}^b \wedge \mathcal{F}^c. \quad (4.4.3)$$

- 自己共役表現（実表現，ないし擬実表現）はゲージアノーマリーを生まない。これは，このような表現に対しては，ゲージ不変性をもつ Pauli-Villars 型 counter term が作れるためである。
4次元の場合，これは直接示すことができる。まず，

$$\delta\psi_r = i\alpha^a t_a \psi_r, \quad \delta\psi_r^* = -i\alpha^a t_a^* \psi_r^* \quad (4.4.4)$$

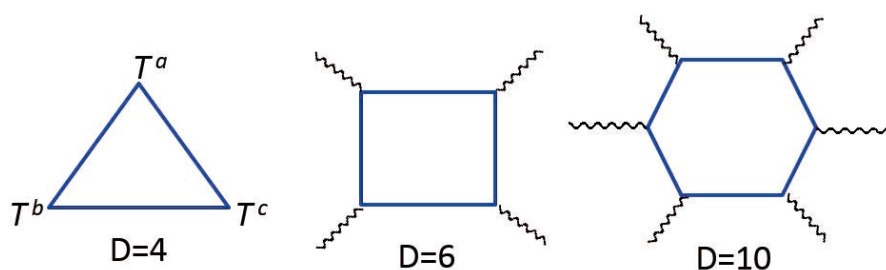
で， t_a はエルミートなので，自己共役表現に対しては，

$$t_a = S(-\mathcal{T}_a)S^{-1}. \quad (4.4.5)$$

よって，

$$\text{Tr}(t_a t_{(b} t_{c)}) = -\text{Tr}(\mathcal{T}_a \mathcal{T}_{(b} \mathcal{T}_{c)}) = -\text{Tr}(t_a t_{(b} t_{c)}). \quad (4.4.6)$$

- 4次元では， $G = \text{SU}(2), \text{SO}(2n+1)(n \geq 2), \text{Sp}(2n)(n \geq 3), G_2, F_4, E_7, E_8$ のときゲージアノーマリーは生じない。一方， $G = \text{U}(1), \text{SU}(n)(n \geq 3), \text{SO}(4n+2), E_6$ はアノーマリーを生じる可能性がある。これらは， $\text{U}(1)$ を除くとすべて $\pi_5(G) \neq 0$ 。



重力アノーマリー

- 理論の CPT 不変性と重力相互作用の P 不変性より、カイラルスピノール（およびカイラルテンソル）がローレンツ群の複素表現となっている場合には、必ずカイラリティが反対の項が作用積分に対して現れ、アノーマリーはキャンセルする。このため、重力アノーマリーは $D = 4k + 2$ 次元でのみ発生。
- 重力アノーマリーは、 $D/2 + 1$ 個の外線をもつカイラルフェルミ粒子と自己共役テンソルにより生じる。

4.4.2 10次元超重力理論

10次元超重力理論に登場するカイラル場と対応する I^{12} は

- dilatino: $\mathbf{8}, \mathbf{8}'$

$$\begin{aligned} \hat{I}_{\mathbf{8}}(F_2, R_2) = & -\frac{\text{Tr}(F_2^6)}{1440} \\ & + \frac{\text{Tr}(F_2^4)\text{tr}(R_2^2)}{2304} - \frac{\text{Tr}(F_2^2)\text{tr}(R_2^4)}{23040} - \frac{\text{Tr}(F_2^2)[\text{tr}(R_2^2)]^2}{18432} \\ & + \dim(G) \left(\frac{\text{tr}(R_2^6)}{725760} + \frac{\text{tr}(R_2^4)\text{tr}(R_2^2)}{552960} + \frac{[\text{tr}(R_2^2)]^3}{1327104} \right) \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

ここで、 tr は $R_2 = (\mathcal{R}^a{}_b)$ の接空間添え字 a, b に関するトレース、 Tr はフェルミ粒子のゲージ群 G の表現に関するトレース。

- gravitino: $\mathbf{56}, \mathbf{56}'$

$$\hat{I}_{\mathbf{56}}(R_2) = -495 \frac{\text{tr}(R_2^6)}{725760} + 225 \frac{\text{tr}(R_2^4)\text{tr}(R_2^2)}{552960} - 63 \frac{[\text{tr}(R_2^2)]^3}{1327104}. \quad (4.4.8)$$

- 5-form flux (IIB): $[5]_+, [5]_-$

$$\hat{I}_{\text{SD}}(R_2) = +992 \frac{\text{tr}(R_2^6)}{725760} - 448 \frac{\text{tr}(R_2^4)\text{tr}(R_2^2)}{552960} + 128 \frac{[\text{tr}(R_2^2)]^3}{1327104}. \quad (4.4.9)$$

II型理論 IIA型理論はカイラルでないので、アノマリーは自明にキャンセルする。また、IIB型理論でも、アノマリーはキャンセルする：

$$\hat{I}_{\text{IIB}}(R_2) = -2\hat{I}_{\mathbf{8}}(R_2) + 2\hat{I}_{\mathbf{56}}(R_2) + \hat{I}_{\text{SD}}(R_2) = 0. \quad (4.4.10)$$

I型理論 I型理論のアノマリーは

$$\begin{aligned} \hat{I}_1 &= \hat{I}_{\mathbf{56}}(R_2) - \hat{I}_{\mathbf{8}}(R_2) + \hat{I}_{\mathbf{8}}(F_2, R_2) \\ &= \frac{Y_4 X_8}{768} + \frac{1}{1440} \left\{ -\text{Tr}_a(F_2^6) + \frac{1}{48} \text{Tr}_a(F_2^2)\text{Tr}_a(F_2^4) - \frac{1}{14400} [\text{Tr}_a(F_2^2)]^3 \right\} \\ &\quad + (\dim(G) - 496) \left\{ \frac{\text{tr}(R_2^6)}{725760} + \frac{\text{tr}(R_2^4)\text{tr}(R_2^2)}{552960} + \frac{[\text{tr}(R_2^2)]^3}{1327104} \right\} \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

ここで、

$$Y_4 = \text{tr}(R_2^2) - \frac{1}{30} \text{Tr}_a(F_2^2), \quad (4.4.12a)$$

$$X_8 = \text{tr}(R_2^4) + \frac{[\text{tr}(R_2^2)]^2}{4} - \frac{\text{Tr}_a(F_2^2)\text{tr}(R_2^2)}{30} + \frac{\text{Tr}_a(F_2^4)}{3} - \frac{[\text{Tr}_a(F_2^2)]^2}{900}. \quad (4.4.12b)$$

まず、 $G = \text{SO}(n)$ のとき、任意の生成元 $t \in \mathfrak{so}(n)$ に対し、

$$\text{Tr}_a(t^2) = (n-2)\text{Tr}_v(t^2), \quad (4.4.13a)$$

$$\text{Tr}_a(t^4) = (n-8)\text{Tr}_v(t^4) + 3[\text{Tr}_v(t^2)]^2, \quad (4.4.13b)$$

$$\text{Tr}_a(t^6) = (n-32)\text{Tr}_v(t^6) + 15\text{Tr}_v(t^2)\text{Tr}_v(t^4), \quad (4.4.13c)$$

より、第2項は

$$\frac{32-n}{1440} \left\{ \text{Tr}_v(F_2^6) - \frac{n+22}{48} \text{Tr}_v(F_2^2)\text{Tr}_v(F_2^4) + \frac{(n-2)(n+28)}{14400} [\text{Tr}_v(F_2^2)]^3 \right\} \quad (4.4.14)$$

より、 $n = 32$ のときのみゼロとなる。同様に、 $G = E_8$ に対して、

$$\text{Tr}_a(t^4) = \frac{1}{100} [\text{Tr}_a(t^2)]^2, \quad \text{Tr}_a(t^6) = \frac{1}{7200} [\text{Tr}_a(t^2)]^3 \quad (4.4.15)$$

より、第2項は $G = E_8 \times E_8, E_8 \times \text{U}(1)^m$ のときゼロ。第3項は、 $G = \text{SO}(32), E_8 \times E_8, E_8 \times \text{U}(1)^{248} \cdot \text{U}(1)^{496}$ に対してゼロ。

4.4.3 Green-Schwarz 機構

次に、(ヘテロ表示での) 作用積分において、 \tilde{H}_3 の定義を

$$\tilde{H}_3 = dB_2 - c\omega_{3Y} - c'\omega_{3L}; \quad (4.4.16)$$

$$\omega_{3Y} = \text{Tr} \left(A_1 \wedge dA_1 - \frac{2i}{3} A_1 \wedge A_1 \wedge A_1 \right), \quad (4.4.17)$$

$$\omega_{3L} = \text{tr} \left(\omega_1 \wedge d\omega_1 + \frac{2}{3} \omega_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_1 \right) \quad (4.4.18)$$

に置き換え、ゲージ変換を

$$\delta A_1 = d\lambda - i[A_1, \lambda], \quad (4.4.19a)$$

$$\delta \omega_1 = d\Theta + [\omega_1, \Theta], \quad (4.4.19b)$$

$$\delta B_2 = c\text{Tr}(\lambda dA_1) + c'\text{tr}(\Theta d\omega_1) \quad (4.4.19c)$$

と定義すると、Chern-Simons 型繰り込み項

$$\mathbf{S}' = \int B_2 X_8(F_2, R_2) \quad (4.4.20)$$

は、ゲージ変換に補正

$$\delta \mathbf{S}' = \int \delta B_2 X_8 \quad (4.4.21)$$

を与える。これは、アノーマリー換算で

$$\begin{aligned} \hat{I}'_{10} &= [c\text{Tr}_a(\lambda dA_1) + c'\text{tr}(\Theta d\omega_1)] X_8 \\ \Rightarrow \hat{I}'_{12} &= [c\text{Tr}_a(F_2^2) + c'\text{tr}(R_2^2)] X_2 \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

となる。よって、

$$c' = -\frac{c}{30} \quad (4.4.23)$$

ととれば、第1項と相殺する (**Green-Schwarz 機構**)。このとき、

$$d\tilde{H}_3 = \frac{\alpha'}{4} \left[\text{tr}(R_2^2) - \frac{1}{30} \text{Tr}_a(F_2^2) \right]; \quad 4\kappa_{10}^2 = \alpha' g_{10}^2. \quad (4.4.24)$$

以上より、I型理論では、 $G = \text{SO}(32), E_8 \times E_8, E_8 \times \text{U}(1)^{248}, \text{U}(1)^{496}$ に対して、アノーマリーは相殺する。ただし、理論の超対称性より、 $\text{U}(1)$ 因子に対しても、 \tilde{H} の定義で ω_{CS} を加える必要がある [Bergshoeff E, de Roo M, de Wit B, van Nieuwenhuizen P: NPB195:97(1982)]. ゲージ不

変性より, これは B のゲージ変換も対応する修正を受けることを意味する. ところが, この修正のため, ゲージ変換の際に BX_8 から $U(1)$ 因子に対応する付加項が生じ, ゲージ不変性を破る. すなわち, $U(1)$ があると, 超対称性の要請と Green-Schwarz 機構が整合的でなくなる. よって, 整合的な理論は, $G = SO(32), E_8 \times E_8$ のみ.

4.5 参考文献

Reviews

- Anastasopoulos P, Bianchi M, Dudasde E, Kiritsis E.: JHEP0611:057 (2006)
 “Anomalies, anomalous $U(1)$ ’s and generalized Chern-Simons terms”
- Harvey JA: hep-th/0509097
 “TASI Lecture on Anomalies”
- Adler SL: *50 Years of Yang-Mills Theory*, ed. G. ’t Hooft, 187-228 (2005)
 “Anomalies to All Orders” (Non0remormalisation theorem)
- Bertlmann RA: Int. Series of Monographs on Physics 91, p.566 (Clarendon, 1996)
 “Anomalies in Quantum Field Theory”
- Alvarez-Gaume L, Ginsparg P: Ann. Phys. 161:423-490 (1985),
 “The Structure of Gauge and Gravitational Anomalies”
- Alvarez-Gaume L, Witten E: NPB234:269-330 (1983)
 “Gravitational anomalies”
- Witten E: plb117(1982)324
 “SU(2) anomaly”

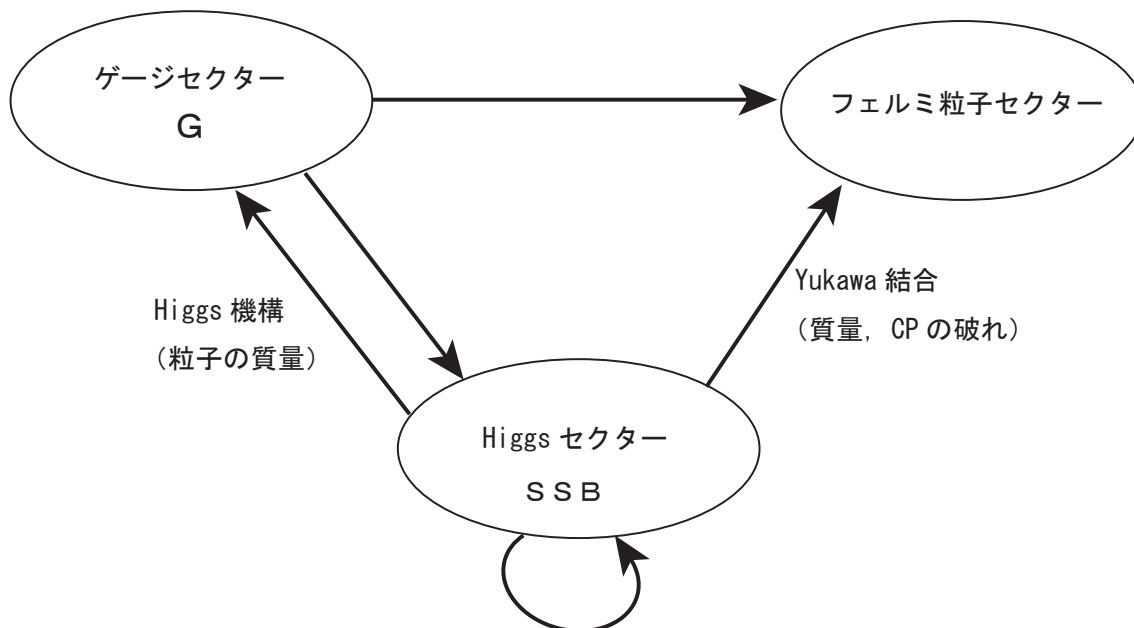
Original papers

- Bell JS, Jackiw R: Nuovo Cim. A60, 47 (1969)
- Adler SL: PR177, 2426 (1969)

5 大統一理論

Last update: 2023 年 10 月 17 日

5.1 標準モデル



5.1.1 基本構造

ゲージセクター

- ゲージ群 : $U_Y(1) \times SU(2) \times SU(3)$
- Gauge coupling:

$$D_\mu = \partial_\mu - i\mathcal{A}_\mu : \\ \mathcal{A} = g_1 \frac{Y}{2} B + g_2 T_i^{(2)} A^i + g_3 T_a^{(3)} G^a. \quad (5.1.1)$$

ここで,

$$[T_i^{(2)}, T_j^{(2)}] = i\epsilon_{ijk} T_k^{(2)} : \quad \tau_j/2 \mapsto T_j^{(2)} \quad (5.1.2)$$

$$[T_a^{(3)}, T_b^{(3)}] = i f_{abc} T_c^{(3)}; \quad (5.1.3)$$

$$f_{abc} = f_{[abc]} : f_{147} = f_{516} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{637} = \frac{1}{2}, \\ f_{123} = 1, \quad f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (5.1.4)$$

- Symmetry Breaking: $U_Y(1) \times SU(2) \Rightarrow U_{em}(1)$

$$g_1 \frac{Y}{2} B + g_2 T_3^{(2)} A^3 = eQ A + \frac{g_2}{\cos \theta_W} R Z \Rightarrow eQ A, \quad (5.1.5)$$

$$Q = T_3^{(2)} + \frac{Y}{2}, \quad R = T_3^{(2)} \cos^2 \theta_W + \frac{Y}{2} \sin^2 \theta_W. \quad (5.1.6)$$

ここで,

$$\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} = R(-\theta_W) \begin{pmatrix} B \\ A^3 \end{pmatrix}, \quad (5.1.7)$$

$$g_1 = \frac{e}{\cos \theta_W}, \quad g_2 = \frac{e}{\sin \theta_W}. \quad (5.1.8)$$

フェルミオンセクター

- 量子数と表現

$(2, 1)_{-1}$	$(1, 1)_{-2}$	$(2, 3)_{1/3}$	$(1, 3)_{4/3}$	$(1, 3)_{-2/3}$
$(\nu_e, e)_L$	e_R	$(u, d)_L$	u_R	d_R
$(\nu_\mu, \mu)_L$	μ_R	$(c, s)_L$	c_R	s_R
$(\nu_\tau, \tau)_L$	τ_R	$(t, b)_L$	t_R	b_R
L^i	R^i	Q^i	U^i	D^i

表現は $U_Y(1)$, $SU(2)$ に関してカイラル ($U_{em}(1) \times SU(3)$ に関してはアキラル)。

スカラ (Higgs) セクター

- 量子数と表現: $(2, 1)_1$
- ポテンシャル \Rightarrow 対称性の自発的破れ \Rightarrow Higgs 機構
- Yukawa 結合 \Rightarrow フェルミ粒子の質量, 弱い相互作用での CP の破れ, Cabibo 混合

$$h_{ij}^{(l)} \bar{l}_R^i H^\dagger L^j \Rightarrow \sum_i m_i^{(l)} \bar{l}_R^i l_L^i \quad (5.1.9a)$$

$$h_{ij}^{(u)} \bar{U}_R^i H^T \sigma_2 Q^j \Rightarrow \sum_i m_i^{(u)} \bar{U}_R^i U_L^i \quad (5.1.9b)$$

$$h_{ij}^{(d)} \bar{D}_R^i H^\dagger Q^j \Rightarrow \sum_{i,j} m_i^{(d)} \bar{D}_R^i C_j^i D_L^j \quad (5.1.9c)$$

CKM 行列 自発的対称性の破れの後の湯川結合の部分を上記の様に標準化すると，残るユニタリ変換の自由度は， D_R^i および D_L^i の各場の $U(1)$ 変換．この自由度 $2N_g$ 個のうち，一般的なユニタリ行列 C_j^i を変化させない変換は，すべての場に対する共通の $U(1)$ 変換．したがって， C_j^i の物理的な実数自由度は

$$N_g^2 - 2N_g + 1 = (N_g - 1)^2. \quad (5.1.10)$$

これらのうち， N_g 次の直交変換の自由度は $N_g(N_g - 1)/2$ なので，

$$(N_g - 1)^2 - \frac{1}{2}N_g(N_g - 1) = \frac{1}{2}(N_g - 1)(N_g - 2) \quad (5.1.11)$$

個の複素位相の自由度が残る． $N_g = 3$ のときは，これは 1 となる．

$N_g = 3$ の時の KM 行列の標準形は

$$C_{\text{KM}} = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ -s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (5.1.12)$$

ここで， $c_j = \cos \theta_j$, $s_j = \sin \theta_j$.

5.1.2 ゲージアノマリー

標準モデルはカイラルな理論なので，一般にカイラルアノマリーが発生する可能性があるが，うまくあのマリーが消えるな構造となっている．実際，アノマリー係数

$$\tau_{abc} = \text{Tr}(t_a \{t_b, t_c\}) \quad (5.1.13)$$

のうち自明でないのは，この係数の G_{SM} に対する不変性より，

$$\tau_{111} = \text{Tr}(Y^3) = 2Y_L^3 + (-Y_{E_R})^3 + 6Y_Q^3 + 3(-Y_{U_R})^3 + 3(-Y_{D_R})^3 = 0, \quad (5.1.14a)$$

$$\tau_{122} = \text{Tr}(Y \{T_i^{(2)}, T_j^{(2)}\}) = \frac{1}{2}(Y_L + 3Y_Q) \delta_{ij} = 0, \quad (5.1.14b)$$

$$\tau_{133} = \text{Tr}(Y \{T_a^{(3)}, T_b^{(3)}\}) = 6(2Y_Q - Y_{U_R} - Y_{D_R}) \delta_{ab} = 0 \quad (5.1.14c)$$

となるが，レプトン電荷を $Q_\nu = (Y_L + 1)/2 = 0$, $Q_{E_R} = Y_R/2 = -1$ とこれらの anomaly free 条件を要請すると， Y が一意的に定まり，SM の値と一致する．

5.1.3 実験的制限

1. The precision electroweak scale data.
2. the 7-year WMAP constraint on dark matter relic density.
3. the experimental limits on the flavor changing neutral current (FCNC) process $b \rightarrow s\gamma$.
4. the anomalous magnetic moment of the muon.
5. the process $B_s^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$.
6. the LEP limit on the lightest CP-even Higgs boson mass.
7. proton lifetime.

5.1.4 問題点

素粒子物理

- ゲージセクターの不完全な統一
- クォーク電荷の分数性とそのパターン
- 強い相互作用での CP 保存
- ニュートリノの質量と mixing
- 湯川相互作用の構造
- 質量項の構造
- Cabibo mixing
- 弱い相互作用での CP の破れ
- 世代多重性

宇宙物理

- バリオン非対称性の起源
- Dark matter の実体と起源
- Dark energy の実体と起源/宇宙項問題
- インフレーションの起源
- 重力が含まれない

5.2 ゲージセクターの統一

5.2.1 標準モデル \Rightarrow 大統一理論

- gauge-coupling unification

$$\frac{1}{\alpha_3} = \frac{1}{6\pi} (4N_g - 33) \ln \frac{M}{E} + \text{const}, \quad (5.2.1a)$$

$$\frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{6\pi} \left(4N_g - \frac{43}{2} \right) \ln \frac{M}{E} + \text{const}, \quad (5.2.1b)$$

$$\frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{6\pi} \left(4N_g + \frac{3}{10} \right) \ln \frac{M}{E} + \text{const}. \quad (5.2.1c)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \approx \alpha_2 \approx \alpha_3 \text{ at } E \approx 10^{16} \text{GeV}$$

- Hypercharge structure

$$SU(5) \supset U(1) \times SU(2) \times SU(3)$$

$$\begin{aligned} 5^* &= (1, 3^*)_{2/3} + (2^*, 1)_{-1} : (d^c, e^-, -\nu)_L \\ 10 &= (1, 3^*)_{-4/3} + (2, 3)_{1/3} + (1, 1)_2 : \begin{pmatrix} [u^c] & -u & -d \\ u & 0 & -e^+ \\ d & e^+ & 0 \end{pmatrix}_L \end{aligned}$$

[Wilczek F:in Physics in the 21st Century, eds. K.Kikkawa et al.(1997, World Scientific)]

- Neutrino mass

$$SO(10) \supset SU(5)$$

$$16 = 5^* + 10 + 1 \Rightarrow \text{neutrino mass}$$

- Baryon asymmetry
- Strong CP problem: $|\theta| < 10^{-11}$

Peccei-Quinn symmetry \Rightarrow SSB at $E \gtrsim 10^{12} \text{GeV} \Rightarrow$ invisible axion $m_a \gtrsim 10^{-6} \text{eV}$

5.2.2 可能な大統一群 G

- 基本的な要請

- 1) $G \supset G_{\text{SM}} = \text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1)$. 特に, $\text{rank}(G) \geq 4$.
- 2) G は複素表現を許す.

(理由) 標準モデルでの左巻きおよび右巻きフェルミオンの G_{SM} に関する表現をそれぞれ $\mathbf{f}_L^{\text{SM}}, \mathbf{f}_R^{\text{SM}}$ とすると,

$$\mathbf{f}_L^{\text{SM}} \not\cong \mathbf{f}_R^{\text{SM}}, \quad (5.2.2a)$$

$$(\mathbf{f}_L^{\text{SM}})^* \cap \mathbf{f}_L^{\text{SM}} = \emptyset, \quad (\mathbf{f}_R^{\text{SM}})^* \cap \mathbf{f}_R^{\text{SM}} = \emptyset \quad (5.2.2b)$$

ここで, 前者は $\text{U}(1)_Y$ と $\text{SU}(2)$ に原因があるが, 後者は $\text{U}(1)_Y$ と $\text{SU}(3)$ に原因がある. Left chiral 場だけの表示に移って,

$$\mathbf{F}^{\text{SM}} = \mathbf{f}_L^{\text{SM}} + (\mathbf{f}_R^{\text{SM}})^* \quad (5.2.3)$$

とおくと,

$$\mathbf{F}^{\text{SM}} \cap (\mathbf{F}^{\text{SM}})^* = \emptyset. \quad (5.2.4)$$

つぎに, $G(\supset G_{\text{SM}})$ による GUT でのフェルミオン表現を $(\mathbf{f}_L, \mathbf{f}_R)$ として,

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}_L + \mathbf{f}_R^* \quad (5.2.5)$$

とおくと,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\text{SM}} + \mathbf{F}' \quad (5.2.6)$$

なので, $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}$ とすると,

$$\mathbf{F}^{\text{SM}} + \mathbf{F}' = (\mathbf{F}')^* + (\mathbf{F}^{\text{SM}})^* \Rightarrow \mathbf{F}^{\text{SM}} \in (\mathbf{F}')^* \quad (5.2.7)$$

よって,

$$\mathbf{F}' = (\mathbf{F}^{\text{SM}})^* + \mathbf{F}_0; \quad \mathbf{F}_0^* = \mathbf{F}_0. \quad (5.2.8)$$

すなわち

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\text{SM}} + (\mathbf{F}^{\text{SM}})^* + \mathbf{F}_0. \quad (5.2.9)$$

このとき, \mathbf{F} の G に関する既約分解が複素表現を持たないとすると, \mathbf{F}^{SM} のフェルミオンと $(\mathbf{F}^{\text{SM}})^*$ のフェルミオンに異なる質量を与えることが困難.

(一般に, $\mathbf{f}_L \not\cong \mathbf{f}_R$ かつ $\mathbf{F}^* \cong \mathbf{F}$ なら, 実表現 $\mathbf{f}'_{L/R} = \mathbf{f}'_{L/R}$ を用いて, $\mathbf{f}_L = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}'_L, \mathbf{f}_R = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}'_R$. 実際, $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1$ を複素表現として, $\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1^* = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_0^*$ なら $\mathbf{f}_0 \subset \mathbf{f}_1$ かつ $\mathbf{f}_1^* \subset \mathbf{f}_0^*$ より $\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}_1$.)

- 要請 1), 2) より, 可能な群は

$$\begin{aligned} \mathrm{SU}(5) &\subset \mathrm{SO}(10) \subset E_6, \\ \mathrm{SU}(5) &\subset \mathrm{SU}(6) \subset \mathrm{SU}(7) \cdots, \\ \mathrm{SO}(10) &\subset \mathrm{SO}(14) \cdots \subset \mathrm{SO}(4n+2) \subset \cdots. \end{aligned}$$

注: 要請 1) を満たす他のランク 4 のコンパクト群は

$$\begin{aligned} F_4 &\supset \mathrm{SO}(9) \supset G_{\mathrm{SM}}, \\ \mathrm{Sp}(4) &\supset \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{Sp}(3) \supset G_{\mathrm{SM}}. \end{aligned}$$

- E_n 系列の表現

$$\begin{aligned} E_4 = \mathrm{SU}(5) &: 5^* + 10, \\ E_5 = \mathrm{SO}(10) \supset \mathrm{SU}(5) \times \mathrm{U}(1) &: 16 = 1_{-5} + 5_3^* + 10_{-1}, \\ &: 10 = 5_2 + 5_{-2}^*, \\ &: 45 = 1_0 + 10_4 + 10_{-4}^* + 24_0, \\ E_6 \supset \mathrm{SO}(10) \times \mathrm{U}(1) &: 27 = 1_4 + 10_{-2} + 16_1, \\ &: 78 = 1_0 + 45_0 + 16_{-3} + 16_3^*, \\ E_8 \supset \mathrm{SU}(3) \times E_6 &: 248 = (8, 1) + (1, 78) + (3, 27) + (3^*, 27^*). \end{aligned}$$

G	rank	dim	fund. rep	complex irreps
$\mathrm{SU}(n+1)$	n	$n(n+2)$	$n+1$	$(a_1 \cdots a_l) \neq (a_l \cdots a_1)$
$\mathrm{SO}(2n+1)$	n	$n(2n+1)$	2^n	none
$\mathrm{Sp}(n)$	n	$n(2n+1)$	$2n$	none
$\mathrm{SO}(2n)$	n	$n(2n-1)$	2^{n-1}	n :odd
G_2	2	14	7	none
F_4	4	52	26	none
E_6	6	78	27	$(a_1 \cdots a_6) \neq (a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_6)$
E_7	7	133	56	none
E_8	8	248	248	none

5.2.3 対称性の自発的破れ

【定義 5.1 (Isotropy group, stratum)】 群 G が多様体 M に作用しているとする. このとき, G の各点 p での等方群 G_p の共役類の中で極大となる G の部分群 (の共役類) を極大等方群という. すなわち, H が極大等方群であるとは, H が適当な点の等方群となり, かつどの等方群 G_q に対しても $H \subset gG_qg^{-1}$ となる $g \in G$ が存在しないことを意味する.

次に, G の部分群の各共役類 $[H]$ に対して, 等方群の共役類が $[H]$ と一致する G 軌道の和集合の各連結成分を層 (stratum) という. 特に, 開集合となる層は一般的層と呼ばれる. □

【定理 5.2 (Michel L.-Radicati L.A. の定理 (1971))】 コンパクト Lie 群 G が有限次元空間 M に連続に作用しているとする.

1. G の M への作用において, 各層の境界における等方群の共役類はその層の等方群の共役類と等しいかより大きい. 特に, 極大等方群に対応する層は閉集合となる.
2. G の有限次元線形表現 $\mathcal{R} = (\rho, \mathcal{V})$ で, \mathcal{R} 実既約表現ないし互いに共役な既約複素表現の直和となっているものを考える. このとき, \mathcal{V} 上の 2 次の G 不変量 $N(\phi)$ が一定となる超曲面 \mathcal{M} において, 閉 G 層の点 ϕ_0 に対しては, その点が極点となるような G 不変な \mathcal{M} 上の関数が存在する. より具体的には,
 - i) 一般的 G 層の点は, いかなる高次の不変量に対しても, その臨界点となることはない.
 - ii) 閉 G 層が 1 個の G 軌道のみを含むとき, その点はすべての G 不変関数の臨界点となる.
 - iii) 閉 G 層が 2 個以上の G 軌道を含むとき, 少なくとも 2 つの軌道においてすべての G 不変関数が臨界値をとる. また, 閉層の任意の点に対して, それを臨界点とする G 不変関数が存在する.
3. 1,2 より, 特に, 各極大等方群 H に対しては, Higgs 機構による自発的対称性の破れ $G \rightarrow H$ が可能である.

[Slansky R: PLC79, 1 (1981); Michel L, Radicati LA: Ann. Phys. (NY) 66, 758 (1971)] □

【定理 5.3 (随伴表現の極大等方群 (Gell-Mann))】 コンパクト Lie 群の随伴表現に対する極大等方群は、非拡張 Dynkin 図式からノードを 1 個取り除いて得られる正則準半単純極大部分群に限られる。また、そのような正則準半単純極大部分群は、すべて、随伴表現の極大等方群となる。

[<Slansky R: PLC79, 1(1981)] _____ □

【証明へ】

【予想 5.4 (Michel の予想)】 ゲージ群 G のゲージ理論において、ヒグス場 ϕ が G の実既約表現ないし互いに共役な複素既約表現の直和に従って変換するとする。このとき、裸のヒグスポテンシャルが高々 4 次式とすると、 ϕ の 2 次の不変量が一定値をとる超曲面 S 上において、量子補正を含めた有効ポテンシャルの臨界点における G の等方群は、 S 上での極大等方群となる。 _____ □

【例 5.5 (極大等方群)】

- $\mathbf{n} + \mathbf{n}^*$: $SU_n \rightarrow SU_{n-1}$
- \mathbf{n} : $SO_n \rightarrow SO_{n-1}$
- $\mathbf{16}_s + \mathbf{16}_s^*$: $SO_{10} \rightarrow SU_5, SO_7$
- $\mathbf{78}_{\text{adj}}$ (+ 輻射補正): $E_6 \rightarrow SO_{10} \times U_1, SU_6 \times U_1, SU_5 \times SU_2 \times U_1, SU_3 \times SU_3 \times SU_2 \times U_1$
- $\mathbf{27} + \mathbf{27}^*$: $E_6 \rightarrow SO_{10}, F_4$
- $\mathbf{351}' [000020] + \mathbf{351}'^*$: $E_6 \rightarrow SO_{10}, F_4, Sp_4, SU_3, SU_4 \times SU_2, G_2$

_____ □

【注 5.6 (随伴表現に従う Higgs 場に対する繰り込み可能なポテンシャル)】 単純 Lie 代数の随伴表現 Φ に対する不変多項式は、次のランク

l 個の元で生成される：

$$\begin{aligned}
\text{SU}(l+1) &: I_2, I_3, \dots, I_{l+1}, \\
\text{SO}(2l+1) &: I_2, I_4, \dots, I_{2l}, \\
\text{Sp}(l) &: I_2, I_4, \dots, I_{2l}, \\
\text{SO}(2l) &: I_2, \dots, I_{2l-2}, I'_l, \\
G_2 &: I_2, I_6, \\
F_4 &: I_2, I_6, I_8, I_{12}, \\
E_6 &: I_2, I_5, I_6, I_8, I_9, I_{12}, \\
E_7 &: I_2, I_6, I_8, I_{10}, I_{12}, I_{14}, I_{18}, \\
E_8 &: I_2, I_8, I_{12}, I_{14}, I_{18}, I_{20}, I_{24}, I_{30}
\end{aligned}$$

ここで、 I_n は次式で定義される Φ の n 次不変同次多項式である：

$$I_p = \sum_{a_1, \dots, a_p \in \{1, \dots, 2l\}} \sum_{b_1, \dots, b_p \in \{1, \dots, 2l\}} (C^{b_1}_{a_1 b_2} C^{b_2}_{a_2 b_3} \dots C^{b_p}_{a_p b_1}) \Phi^{a_1} \dots \Phi^{a_p} \quad (5.2.10)$$

また、 I'_l は

$$I'_l \equiv \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_l \leq 2l} \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_l \leq 2l} \epsilon_{i_1 j_1 \dots i_l j_l} \Phi^{i_1 j_1} \dots \Phi^{i_l j_l} \quad (5.2.11)$$

特に、例外 Lie 群に対しては、

$$I_3 \equiv 0, \quad I_4 \equiv 0 \quad (5.2.12)$$

となるので、繰り込み可能な随伴 Higgs のポテンシャルは 2 次式のみとなる。 □

5.2.4 SSB 前後のゲージ結合係数の関係

SSB の後に残される残留対称性 H に伴うゲージ場の結合係数を、SSB が起きる前のゲージ群 G に対応するゲージ場の結合係数を用いて表す公式を求める。議論は tree-level で、量子補正は考えない。

一般に、 G が単純群ないし $U(1)$ の積 $G_1 \times \dots \times G_n$ で表されるとする。一般に残留ゲージ群 H も単純群ないし $U(1)$ の積 $H_1 \times \dots \times H_m$ で表されるが、その埋め込み

$$\phi: H \rightarrow G = G_1 \times \dots \times G_n \quad (5.2.13)$$

は H の各因子 H_p への制限により決まり、ゲージ結合係数の関係は、各因子ごとに独立に決まるので、以下、 H は単純群か $U(1)$ に等しいとする。

ゲージ群 G に対するゲージ接続 \mathcal{A} は、各因子 G_j に対する接続の直和となる：

$$\mathcal{A} = \bigoplus_j \mathcal{A}_{(j)}; \quad \mathcal{A}_{(j)} = -ig_j \sum_a A_{(j)}^a T_a^{(j)}, \quad (5.2.14a)$$

$$\mathcal{F} = \bigoplus_j \mathcal{F}_{(j)}; \quad \mathcal{F}_{(j)} = -ig_j \sum_a F_{(j)}^a T_a^{(j)} = d\mathcal{A}_{(j)} + \frac{1}{2}[\mathcal{A}_{(j)}, \mathcal{A}_{(j)}], \quad (5.2.14b)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = -\frac{1}{2} \sum_{j,a} F_{(j)}^a \cdot F_{(j)}^a, \quad (5.2.14c)$$

$$N_j(T_a^{(j)}, T_b^{(j)}) = C_j \delta_{ab} \quad (5.2.14d)$$

ここで、 $F \cdot F = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} / 2$ 。また、 $N_j(X, Y)$ は Lie 代数 $\mathcal{L}(G_j)$ の $\text{Ad}(G_j)$ 不変な内積であり、 $SU(n)$ に対しては、ベクトル表現を用いた内積 $N(X, Y) = \text{Tr}(\rho_v(X)\rho_v(Y))$ を用いることが多い。この内積や C_j の値の選択は原理的には任意で、ゲージ結合係数の定義におけるスケール倍の自由度を固定する役割を果たす。また、 $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ の表式は $A_{(j)}^a$ の定義におけるスケール倍の自由度を取り除く。

同様に、 H に対応するゲージ接続 \mathcal{B} は次のように表される：

$$\mathcal{B} = -ig' \sum_{\alpha} B^{\alpha} T'_{\alpha}, \quad (5.2.15a)$$

$$\mathcal{G} = -ig' G = -ig' \sum_{\alpha} G^{\alpha} T'_{\alpha} = d\mathcal{B} + \frac{1}{2}[\mathcal{B}, \mathcal{B}], \quad (5.2.15b)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{B}} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha} G^{\alpha} \cdot G^{\alpha}, \quad (5.2.15c)$$

$$N_H(T'_{\alpha}, T'_{\beta}) = C_H \delta_{\alpha\beta} \quad (5.2.15d)$$

ここで、 N_H は $\mathcal{L}(H)$ の不変内積。

5.2.4.1 $H = U(1)$ の場合

埋め込み $H = U(1) \rightarrow G$ は

$$\phi_* : \mathfrak{u}(1) \ni -i \mapsto \bigoplus_j (-i) \hat{Q}_{(j)}; \quad \hat{Q}_{(j)} = \sum_a Q_{(j)}^a T_a^{(j)} \quad (5.2.16)$$

で定義される電荷作用素 $\hat{Q}_{(j)}$ により指定される．このとき，U(1) ゲージ場 B の G ゲージ場への埋め込みは

$$B_\mu \mapsto A_{(j)}^a : g_j A_{(j)}^a = g' Q_{(j)}^a B \quad (5.2.17)$$

で与えられる．この対応が Lagrangian 密度 $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}, \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ の形を保つことより，

$$\frac{1}{(g')^2} = \sum_{j,a} \frac{(Q_{(j)}^a)^2}{g_j^2} = \sum_j \frac{N_j(\hat{Q}_{(j)}, \hat{Q}_{(j)})}{g_j^2 C_j} \quad (5.2.18)$$

が得られる．

例：SU(2) \times U(1)_Y \Rightarrow U(1)_{em}： 対応する電荷作用素は

$$\hat{Q} = \frac{Y}{2} + T_3 \quad (5.2.19)$$

で，SU(2) と U(1) のゲージ場を C^j, B で表すと，共変微分は

$$\text{U(1)}_Y \times \text{SU(2)} : D = d - i\frac{g_1}{2}BY - ig_2\frac{\tau_j}{2}C^j, \quad (5.2.20)$$

$$\text{U(1)}_{\text{em}} : D = d - ie\hat{Q} \quad (5.2.21)$$

となるので，

$$T^{(1)} = Y/2, \quad T^{(2)j} = \frac{\tau_j}{2} \Rightarrow Q_{(1)} = 1, \quad Q_{(2)}^j = \delta_3^j \quad (5.2.22)$$

より，

$$\frac{1}{e^2} = \frac{1}{g_1^2} + \frac{1}{g_2^2}. \quad (5.2.23)$$

5.2.4.2 H が非可換単純群の場合

H の G への埋め込みは，一般に，

$$\phi_{j*} : \mathcal{L}(H) \ni T'_\alpha \mapsto \sum_a X_{(j)\alpha}^a T_a^{(j)} \in \mathcal{L}(G) \quad (5.2.24)$$

と表されるので，ゲージ場の対応は

$$g_j A_{(j)}^a = g' \sum_\alpha B^\alpha X_{(j)\alpha}^a \quad (5.2.25)$$

となる。この対応が Lagrangian の形を保つことより

$$\sum_{j,a} \left(\frac{g'}{g_j} \right)^2 X_{(j)\alpha}^a X_{(j)\beta}^a = \delta_{\alpha\beta} \quad (5.2.26)$$

を得る。

ここで、Lie 代数についての一般論より、 H が単純群のとき、 ϕ_{j*} は Lie 代数の同型対応で、 N_j は $\mathcal{L}(G_j)$ の不変計量なので、

$$C_j \sum_a X_{(j)\alpha}^a X_{(j)\beta}^a = N_j(\phi_{j*}(T'_\alpha), \phi_{j*}(T'_\beta)) = k_j N_H(T'_\alpha, T'_\beta) = k_j C_H \delta_{\alpha\beta} \quad (5.2.27)$$

となる定数 k_j が存在する。よって、上記の条件は

$$\frac{1}{(g')^2} = \sum_j \frac{k_j C_H}{g_j^2 C_j} \quad (5.2.28)$$

と表される。ここで、

$$k_j \equiv \phi_j^* N_j / N_H = \frac{N_j(\phi_j(x), \phi_j(y))}{N_H(x, y)} \quad (5.2.29)$$

である。

例：SU(5) \Rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y：各 Lie 代数の基底を次のように取る：

$$\text{SU}(5) : T_a (a = 0, \dots, 23), \quad N_5(T_a, T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}, \quad (5.2.30a)$$

$$\text{SU}(3) : T_\alpha^{(3)} (\alpha = 1, \dots, 8), \quad N_3(T_\alpha^{(3)}, T_\beta^{(3)}) = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta}, \quad (5.2.30b)$$

$$\text{SU}(2) : T_j^{(2)} (j = 1, \dots, 3), \quad N_2(T_j^{(2)}, T_k^{(2)}) = \frac{1}{2} \delta_{jk}. \quad (5.2.30c)$$

このとき、

$$C_5 = C_3 = C_2 = \frac{1}{2}, \quad (5.2.31)$$

となる。SU(2) および SU(3) の SU(5) への埋め込みは、

$$\text{SU}(3) \ni a_{jk} \mapsto c_{jk} = \{a_{jk} (j, k = 1, 2, 3), 1 (j = k = 4, 5), 0 (j, k = \text{その他})\}$$

$$\text{SU}(2) \ni b_{jk} \mapsto c_{jk} = \{b_{jk} (j, k = 4, 5), 1 (j = k = 1, 2, 3), 0 (j, k = \text{その他})\}$$

により行う。このとき，内積 $N(X, Y)$ がいずれもベクトル表現のトレースに一致するので，

$$k_2 = k_3 = 1 \quad (5.2.33)$$

を得る。よって，一般公式より

$$g_2 = g_3 = g_5 \quad (5.2.34)$$

を得る。

次に， $U(1)_Y$ の $SU(5)$ への埋め込みに対応する電荷作用素 \hat{Q} は， $U(1)_Y$ の接続が，習慣的に

$$D = d - ig_1 B \frac{Y}{2} \quad (5.2.35)$$

と表されるので，

$$\hat{Q} = \frac{Y}{2} = -\frac{1}{3}(H_1 + H_2 + H_3) + \frac{1}{2}H_4 \Rightarrow N_5(\hat{Q}, \hat{Q}) = \frac{5}{6} \quad (5.2.36)$$

よって，

$$\frac{1}{g_1^2} = \frac{5/6}{g_5^2/2} = \frac{5}{3g_5^2} \Leftrightarrow g_1^2 = \frac{3}{5}g_5^2. \quad (5.2.37)$$

5.2.5 量子補正

5.2.5.1 Higgs ポテンシャル

Higgs 場 Φ を背景場とするスカラー場，ゲージ場，スピノール場 ($s = 1/2$) の質量行列を M_s, M_v, M_f とするとき， Φ のポテンシャルに対する 1-ループ補正は

$$V^{(1)}(\Phi) = \frac{1}{64\pi^2} \left[3\text{Tr}M_v^4 \ln \left(\frac{M_v^2}{\mu^2} \right) - 4\text{Tr}M_f^4 \ln \left(\frac{M_f^2}{\mu^2} \right) + \text{Tr}M_s^4 \ln \left(\frac{M_s^2}{\mu^2} \right) \right]. \quad (5.2.38)$$

M_s, M_v, M_f の具体的な形は

$$V(\Phi) \Rightarrow (M_s^2)_{ij} = \partial^2 V(\Phi) / \partial \Phi^i \partial \Phi^j, \quad (5.2.39a)$$

$$D\Phi = (d + gA^a T_a)\Phi \Rightarrow (M_v^2)_{ab} = g^2 (T_a \Phi)^\dagger (T_b \Phi), \quad (5.2.39b)$$

$$C_{(pq)i} \Phi^i T_{\psi^p} C \psi^q \Rightarrow M_f^2 = \quad (5.2.39c)$$

5.2.6 SU(5) GUT

5.2.6.1 対称性の自発的破れ

極大等方群 SU_5 の 200 次元以下の既約表現のうち, $SU_3^c \times U_1^{\text{em}} (\subset SU_4)$ を等方群としてもつ表現の極大等方群は以下の通り :

5_v [1000]	: SU_4	(5.2.40a)
15 [2000]	: SU_4	(5.2.40b)
24_{adj} [1001]	: $SU_4 \times U_1, \quad SU_3 \times SU_2 \times U_1,$	(5.2.40c)
35 [0003]	: $SU_4, \quad SU_3^c \times U_1^{\text{em}}$	(5.2.40d)
45 [0101]	: $SU_3^c \times U_1^{\text{em}}$	(5.2.40e)
70 [2001]	: SU_4	(5.2.40f)
$70'$ [0004]	: $SU_4, \quad SO_5$	(5.2.40g)
75 [0110]	: $SU_3 \times SU_2 \times U_1,$	(5.2.40h)
126 [2010]	: $SU_3^c \times U_1^{\text{em}}$	(5.2.40i)
$126'$ [5000]	: SU_4	(5.2.40j)
160 [3001]	: SU_4	(5.2.40k)
175 [1101]	: $SU_3 \times SU_2, \quad SU_3^c \times U_1^{\text{em}}$	(5.2.40l)
200 [2002]	: $SU_3 \times SU_2 \times U_1, \quad SU_4 \times U_1, \quad SO_5.$	(5.2.40m)

対称性の破れのパターン 標準モデルと整合的な対称性の破れのパターンは一意的で,

$$\begin{array}{ccc}
 SU_5 & \longrightarrow & SU_3^c \times SU_2^w \times U_1^Y & \longrightarrow & SU_3^c \times U_1^{\text{em}} \\
 & & \mathbf{24}_{\text{adj}} & & \mathbf{5} \\
 & & \mathbf{75} & & \mathbf{15} \\
 & & \mathbf{200} & & \mathbf{35} \\
 & & & & \mathbf{45} \\
 & & & & \vdots
 \end{array} \tag{5.2.41}$$

5.2.6.2 24次元 Higgs 系の4次のポテンシャルの臨界点

24次元 Higgs $\Phi = \Phi_{24} (= \Phi^\dagger)$ に対する一般的な4次のポテンシャルは

$$V_{24}^{(0)} = -\frac{1}{2}m^2\text{Tr}(\Phi^2) + b\text{Tr}(\Phi^3) + \lambda\text{Tr}(\Phi^4) + \sigma(\text{Tr}(\Phi^2))^2.. \quad (5.2.42)$$

Φ は常に適当なユニタリ行列 $U \in U_5$ を用いて

$$\Phi = U\Delta(\phi_1, \dots, \phi_5)U^\dagger, \quad \phi_1 + \dots + \phi_5 = 0, \quad \phi_i \in \mathbb{R} \quad (5.2.43)$$

と表される. この座標系では, C を Lagrange 未定係数として, ポテンシャルは

$$V_{24}^{(0)} = -\frac{1}{2}m^2 \sum_a \phi_a^2 + b \sum_a \phi_a^3 + \lambda \sum_a \phi_a^4 + \sigma \left(\sum_a \phi_a^2 \right)^2 + C \sum_i \phi_i \quad (5.2.44)$$

で与えられる. したがって, ポテンシャルの臨界点を決定する条件は,

$$\partial_{\phi_a} V_{24}^{(0)} \equiv (-m^2 + 4\sigma\phi^2)\phi_i + 3b\phi_i^2 + 4\lambda\phi_i^3 + C \quad (5.2.45)$$

より, $\phi_i (i = 1, \dots, 5)$ がすべて同一の3次方程式

$$-\tilde{m}^2\phi + 3b\phi^2 + 4\lambda\phi^3 + C = 0; \quad \tilde{m}^2 = m^2 - 4\sigma\phi^2 \quad (5.2.46)$$

の解となること.

これより, 臨界点は次の5種類に限られることが示される:

(A) SU_5 臨界点: $\Phi = 0, V = 0$

(B) $SU_3 \times SU_2 \times U_1$ 臨界点: $\Phi = \Delta[v, v, v, -3v/2, -3v/2]$ (およびその置換)

v とポテンシャル臨界値は

$$v = \frac{3b + \Delta}{2(14\lambda + 15\sigma)}; \quad \Delta^2 = 9b^2 + 8(14\lambda + 15\sigma)m^2, \quad (5.2.47a)$$

$$V = -\frac{15 \cdot 27b^4 + 36(14\lambda + 15\sigma)m^2b^2 + 8(14\lambda + 15\sigma)^2m^4 + \Delta^3}{32(14\lambda + 15\sigma)^3} \quad (5.2.47b)$$

質量固有値は

$$\begin{array}{ll}
\text{SU}_3 \times \text{SU}_2 \times \text{U}_1 & \text{mass}^2 \\
(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(0)} & : 2m^2 + \frac{b(9b+3\Delta)}{4(14\lambda+15\sigma)}, \\
(\mathbf{1}, \mathbf{3})_{(0)} & : \frac{40\lambda m^2}{14\lambda+15\sigma} - \frac{45b(2\lambda+5\sigma)(3b+\Delta)}{4(14\lambda+15\sigma)^2}, \\
(\mathbf{8}, \mathbf{1})_{(0)} & : \frac{10\lambda m^2}{14\lambda+15\sigma} + \frac{15b(16\lambda+15\sigma)(3b+\Delta)}{4(14\lambda+15\sigma)^2}, \\
(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{(5/3)} + (\mathbf{3}^*, \mathbf{2})_{(-5/3)} & : 0 \quad (\text{NG bosons})
\end{array}$$

(C) $\text{SU}_4 \times \text{U}_1$ 臨界点： $\Phi = \Delta[v, v, v, v, -4v]$ (およびその置換)

v とポテンシャル臨界値は

$$v = \frac{9b + \Delta}{8(5\sigma + 13\lambda)}; \quad \Delta = 81b^2 + 16(5\lambda + 13\sigma)m^2, \quad (5.2.48a)$$

$$V = -\frac{5}{128} \frac{2187b^4 + 648(5\sigma + 13\lambda)m^2b^2 + 32(5\sigma + 13\lambda)^2m^4 + 3\Delta^3}{(5\sigma + 13\lambda)^3} \quad (5.2.48b)$$

質量固有値は

$$\begin{array}{ll}
\text{SU}_4 \times \text{U}_1 & \text{mass}^2 \\
\mathbf{1}_{(0)} & : 2m^2 - \frac{9b(-9b+\Delta)}{8(13\lambda+5\sigma)}, \\
\mathbf{15}_{(0)} & : -\frac{10\lambda m^2}{13\lambda+5\sigma} + \frac{b(7\lambda+5\sigma)(9b-\Delta)}{8(13\lambda+5\sigma)^2}, \\
\mathbf{4}_{(5)} + \mathbf{4}^*_{(-5)} & : 0 \quad (\text{NG bosons})
\end{array}$$

(D) $\text{SU}_3 \times \text{U}_1 \times \text{U}_1$ 臨界点： $\Phi = \Delta[v, v, v, w, -3v - w]$ (およびその置換)

臨界点での v, w とポテンシャルの値は

$$v = \frac{3b}{8\lambda}, \quad w = -\frac{9b + \Delta}{16\lambda}; \quad \Delta^2 = \frac{128m^2\lambda^2 - 27b^2(5\sigma + 2\lambda)}{\sigma + 2\lambda} \quad (5.2.49a)$$

$$V = -\frac{256n^4\lambda^3 + 864\lambda^2m^2b^2 - 81(5\sigma + \lambda)b^4}{1024\lambda^3(2\lambda + \sigma)} \quad (5.2.49b)$$

ただし、次の特殊値では、等方群が大きくなる：

$$b^2 = \frac{16\lambda^2m^2}{9(5\sigma + 7\lambda)} \Rightarrow \text{SU}_4 \times \text{U}_1, \quad (5.2.50a)$$

$$b^2 = \frac{128\lambda^2m^2}{27(5\sigma + 2\lambda)} \Rightarrow \text{SU}_3 \times \text{SU}_2 \times \text{U}_1. \quad (5.2.50b)$$

質量固有値は

$$\begin{aligned}
& \text{SU}_3 \times \text{U}_1^2 && \text{mass}^2 \\
\mathbf{1}_{(0,0)} \times 2 & : && \frac{(5\sigma 14\lambda)m^2}{5(2\lambda+\sigma)} + \frac{9\lambda(-5\sigma+2\lambda)b^2 \pm \Sigma}{80\lambda^2(2\lambda+\sigma)}, \\
\mathbf{8}_{(0,0)} & : && -\frac{2\lambda m^2}{2\lambda+\sigma} + \frac{9b^2(5\sigma+7\lambda)}{8\lambda(2\lambda+\sigma)}, \\
\mathbf{1}_{(1,5)} + \text{cc} & : && 0 \quad (\text{NG bosons}), \\
\mathbf{3}_{(-4/3,0)} + \text{cc} & : && 0 \quad (\text{NG bosons}), \\
\mathbf{3}_{(-1/3,5)} + \text{cc} & : && 0 \quad (\text{NG bosons})
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\Sigma^2 = & 256\lambda^4(5\sigma + 6\lambda)^2 m^4 + 576\lambda^3(125\sigma^2 + 400\sigma\lambda + 324\lambda^2)b^2 m^2 \\
& - 81\lambda(750\sigma^3 + 2825\sigma^2\lambda + 3140\sigma\lambda^2 + 836\lambda^3)b^4. \quad (5.2.51)
\end{aligned}$$

(E) $\text{SU}_2 \times \text{SU}_2 \times \text{U}_1 \times \text{U}_1$ 臨界点: $\Phi = \Delta[v, v, w, w, -2v - 2w]$ (およびその置換)

臨界点での v, w とポテンシャルの値は

$$v = \frac{3b + \Delta}{8\lambda}, w = \frac{3b - \Delta}{8\lambda}; \quad (5.2.52a)$$

$$\Delta^2 = \frac{16m^2\lambda^2 - 9b^2(5\sigma + 7\lambda)}{\sigma + \lambda}, \quad (5.2.52b)$$

$$V = -\frac{81(5\sigma + 6b)b^4 - 144\lambda^2 m^2 b^2 + 64\lambda^3 m^4}{256\lambda^3(\lambda + \sigma)} - \frac{m_5^2}{4\lambda_5} \quad (5.2.52c)$$

ただし、次の特殊値では、等方群が大きくなる：

$$b^2 = \frac{8\lambda m^2 \lambda^2}{9(15\sigma + 16\lambda)} \Rightarrow \text{SU}_3 \times \text{SU}_2 \times \text{U}_1, \quad (5.2.53a)$$

$$b^2 = \frac{16m^2 \lambda^2}{9(5\sigma + 7\lambda)} \Rightarrow \text{SU}_4 \times \text{U}_1. \quad (5.2.53b)$$

質量固有値は

$$\begin{aligned}
& \text{SU}_2 \times \text{SU}_2 \times \text{U}_1^2 && \text{mass}^2 \\
(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(0,0)} \times 2 & : && \frac{8(4\lambda+5\sigma)\lambda m^2 + 9(11\lambda+10\sigma)b^2 \pm \Sigma}{40\lambda(\lambda+\sigma)}, \\
(\mathbf{3}, \mathbf{1})_{(0,0)} + (\mathbf{3}, \mathbf{1})_{(0,0)} & : && \frac{16\lambda^2 m^2 - 9(5\sigma+7\lambda)b^2}{8\lambda(\lambda+\sigma)} \pm \frac{15\Delta}{8\lambda}, \\
(\mathbf{2}, \mathbf{2})_{(1,5/3)} + \text{cc} & : && 0 \quad (\text{NG bosons}), \\
(\mathbf{2}, \mathbf{1})_{(3,0)} + \text{cc} & : && 0 \quad (\text{NG bosons}), \\
(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{(2,-5/3)} + \text{cc} & : && 0 \quad (\text{NG bosons})
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \Sigma^2 = & 64\lambda^2(6\lambda + 5\sigma)^2m^4 - 144\lambda(151\lambda^2 + 275\lambda\sigma + 125\sigma^2)b^2m^2 \\ & + \frac{81}{\lambda}(1241\lambda^3 + 3190\lambda^2\sigma + 2700\lambda\sigma^2 + 750\sigma^3)b^4. \end{aligned} \quad (5.2.54)$$

まとめ $\sigma = 0$ のとき, $\beta = b/(m\sqrt{\lambda})$ の臨界値を

$$\beta_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \quad \beta_2 = \frac{4}{3\sqrt{7}}, \quad \beta_3 = \frac{8}{3\sqrt{3}} \quad (5.2.55)$$

と表すとき, 各タイプの臨界点の個数と安定性は以下の通り :

$b/(m\sqrt{\lambda})$	安定性	$[0, \beta_1)$	β_1	(β_1, β_2)	β_2	(β_2, β_3)	β_3	$(\beta_3, +\infty)$
$SU_3SU_2U_1$	○	2×10	1×10	1×10	1×10	1×10	-	-
	×	-	1×10	1×10	1×10	1×10	2×10	2×10
$SU_2SU_2U_1U_1$	×	2×10	-	2×10	-	-	-	-
$SU_3U_1U_1$	×	2×20	2×20	2×20	-	2×20	-	-
SU_4U_1	○	-	-	-	-	1×5	1×5	1×5
	×	2×5	2×5	2×5	2×5	1×5	1×5	1×5

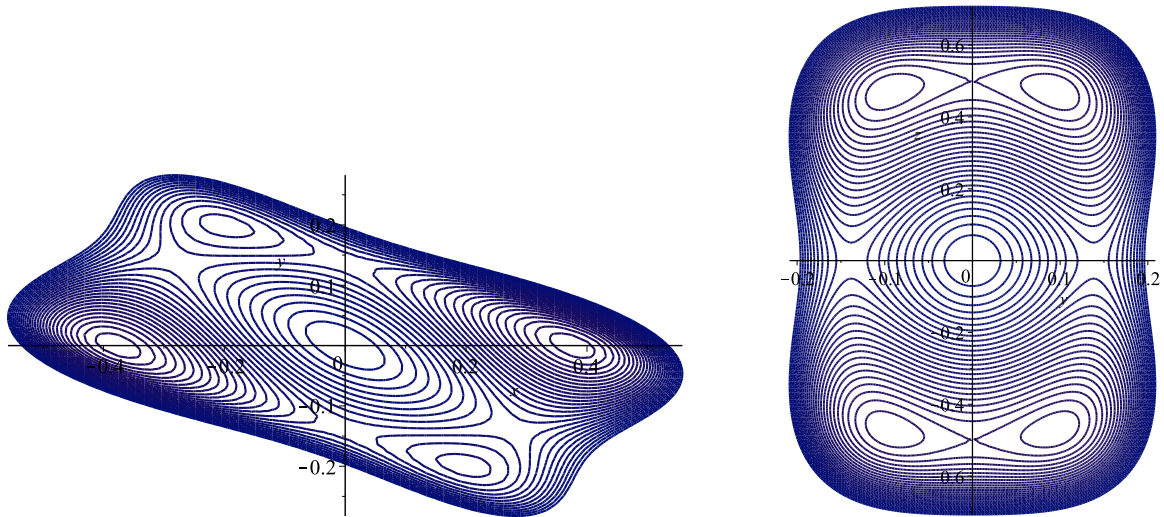


図 4: $m = 1, b = 0, \lambda = 1$ に対する $V_{24}^{(0)}$. 左は, $\Phi = [x + y, x + y, x + y, -3x/2 + y, -3x/2 - 4y]$ により定義される $x - y$ 平面でのポテンシャルの等高線. 右は, $\Phi = [y + z, y + z, y - z, y - z, -4y]$ により定義される $y - z$ 平面でのポテンシャルの等高線.

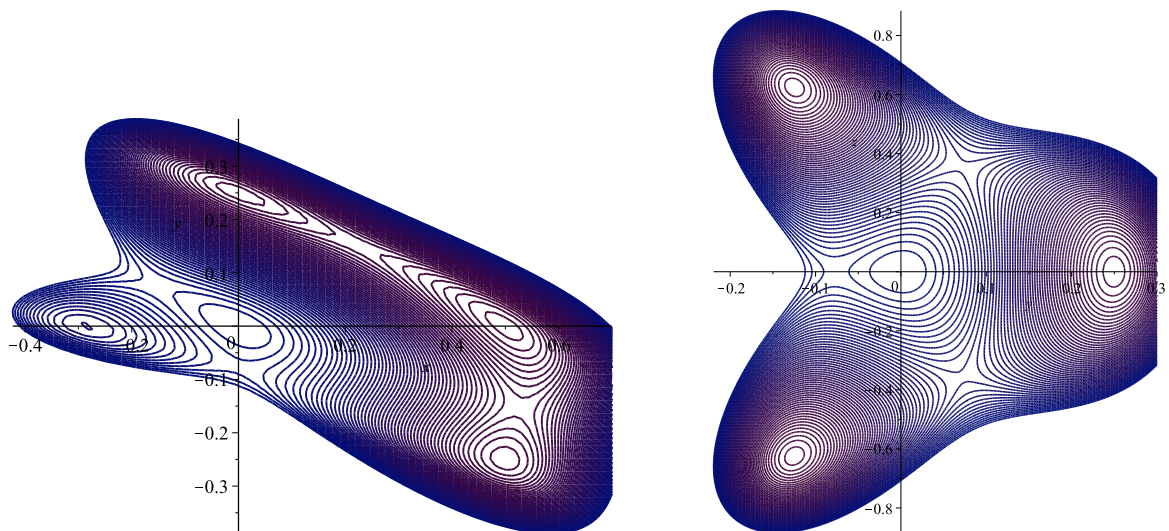


図 5: $m = 1, b = 1, \lambda = 1$ に対する $V_{24}^{(0)}$. 左は $x - y$ 平面, 右は $y - z$ 平面でのポテンシャルの等高線.

5.2.6.3 24次元 Higgs に対する 1-loop ポテンシャル

Creation: 2020/7/6

Update: 2020/7/7

Source: RM20200701_SU5GUT

24次元随伴表現の Higgs Φ を (5.2.43) のように対角化する.

(1) 24次元スカラーループ

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{24}(s)}^{(1)} &= \frac{1}{64\pi^2} \text{Tr} M_s^4 \ln \frac{M_s^2}{\mu^2} \\ &= \frac{1}{32\pi^2} \sum_{a,b=1}^5 m_{ab}^4 \ln \frac{m_{ab}^2}{\mu^2} + \frac{1}{64\pi^2} \sum_{i=1}^4 \sigma_i^4 \ln \frac{\sigma_i^2}{\mu^2}. \end{aligned} \quad (5.2.56)$$

ここで, m_{ab} は

$$m_{ab}^2 \equiv -m^2 + 3b(\phi_a + \phi_b) + 3\lambda(\phi_a^2 + \phi_b^2 + \phi_a\phi_b). \quad (5.2.57)$$

また, σ_i は次の 4 次方程式の 4 個の根:

$$\begin{aligned} &5\tilde{\sigma}^4 + 96P_2\tilde{\sigma}^3 + 108\{-4(P_2^2 + P_4) + 6\beta P_3 - \beta^2 P_2\}\tilde{\sigma}^2 \\ &+ 432\{8(-2P_2P_4 + P_3^2) + 4\beta(P_2P_3 + 5P_5) - 8\beta^2 P_4 + \beta^3 P_3\}\tilde{\sigma} \\ &+ 1296\{-16(-2P_3P_5 + P_4^2) - 8\beta(-3P_2P_5 + P_3P_4) - 4\beta^2 P_2P_4 + 10\beta^3 P_5 - \beta^4 P_4\} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.2.58)$$

ここで, P_n は $\{\phi_a/m\}$ に対する n 次の基本対称式で,

$$\tilde{\sigma} = (\sigma + m^2)/(m^2\lambda), \quad \beta = b/(\lambda m). \quad (5.2.59)$$

(b) ベクトルループ (SU₅ ゲージボゾン)

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{24}(v)}^{(1)} &= \frac{3}{64\pi^2} \text{Tr} M_s^4 \ln \frac{M_s^2}{\mu^2} \\ &= \frac{3g^2}{32\pi^2} \sum_{\alpha>0} (\alpha(\phi))^4 \ln \frac{(\alpha(\phi))^2}{\mu^2} \\ &= \frac{3g^2}{32\pi^2} \sum_{1 \leq a < b \leq 5} (\phi_a - \phi_b)^4 \ln \frac{(\phi_a - \phi_b)^2}{\mu^2}. \end{aligned} \quad (5.2.60)$$

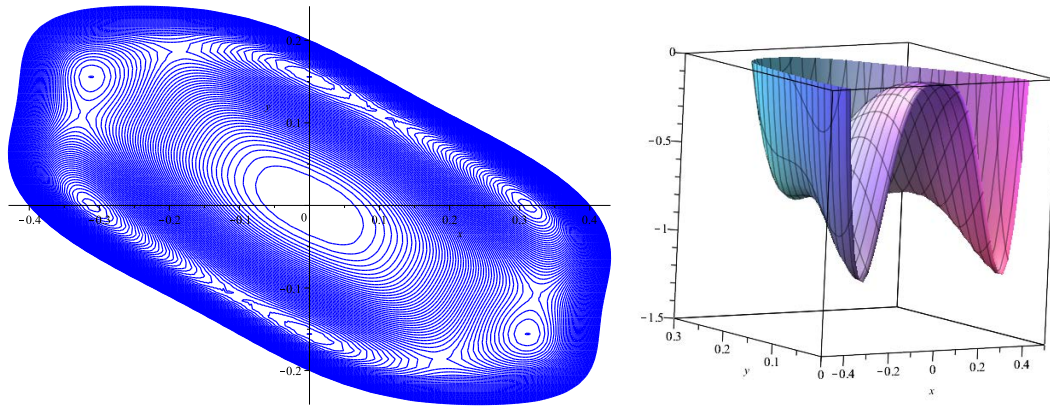


図 6: ベクターループ補正 $V_{24v}^{(1)}$ の $x-y$ 平面での等高線図 (左) と 3次元プロット (右)

(c) フェルミオンループ ($f = 5^*, 10, 1$) $5^* \times 5^*, 10 \times 10, 5^* \times 10$ は、既約成分として 24_{adj} を含まないので、 Φ_{24} はフェルミオンループと結合しない：

$$V_{24(f)}^{(1)} = 0. \quad (5.2.61)$$

5.2.6.4 24次元 + 5次元 Higgs 系の4次ポテンシャルの臨界点

Creation: 2020/7/21

Last update: 2020/7/25

Source: RM20200711_SU5GUT

Source: SU5GUT.mpl

4次ポテンシャル SU_5 の5次元複素表現のテンソル積は次のように既約分解される：

$$\mathbf{5} \times \mathbf{5}^* = \mathbf{24}_{\text{adj}} + \mathbf{1}, \quad (5.2.62a)$$

$$(\mathbf{5} \times \mathbf{5})_s = \mathbf{15} [2000], \quad (5.2.62b)$$

$$(\mathbf{5} \times \mathbf{5})_a = \mathbf{10} [0100], \quad (5.2.62c)$$

$$\mathbf{5} \times \mathbf{5} \times \mathbf{5})_s = \mathbf{35} [3000], \quad (5.2.62d)$$

$$(\mathbf{5} \times \mathbf{5})_s \times \mathbf{5} = \mathbf{35} + \mathbf{40} [1100], \quad (5.2.62e)$$

$$(\mathbf{5} \times \mathbf{5})_a \times \mathbf{5} = \mathbf{40} [1100] + \mathbf{10}^* [0010], \quad (5.2.62f)$$

$$(\mathbf{5} \times \mathbf{5})_s \times \mathbf{5}^* = \mathbf{70} [2001] + \mathbf{5}, \quad (5.2.62g)$$

$$(\mathbf{5} \times \mathbf{5})_a \times \mathbf{5}^* = \mathbf{45} [0101] + \mathbf{5}, \quad (5.2.62h)$$

$$(\mathbf{5} \times \mathbf{5})_s \times (\mathbf{5}^* \times \mathbf{5}^*)_s = \mathbf{200} [2000] + \mathbf{24} [1001] + \mathbf{1}, \quad (5.2.62i)$$

$$(\mathbf{5} \times \mathbf{5})_a \times (\mathbf{5}^* \times \mathbf{5}^*)_a = \mathbf{75} [0110] + \mathbf{20} [1001] + \mathbf{1}. \quad (5.2.62j)$$

これより、5次元複素表現に属する Higgs Φ_5 に対する4次以下の SU_5 不変なポテンシャルは、

$$V_5^{(0)} = -m_5^2 \Phi_5^\dagger \Phi_5 + \lambda_5 \left(\Phi_5^\dagger \Phi_5 \right)^2 \quad (5.2.63)$$

また、 Φ_{24} と Φ_5 の SU_5 不変な相互作用ポテンシャルは、

$$\mathbf{24} \times [\mathbf{5} \times \mathbf{5}^*]_{24} \rightarrow \Phi_5^\dagger \Phi_{24} \Phi_5, \quad (5.2.64a)$$

$$[\mathbf{24} \times \mathbf{24}]_1 \times [\mathbf{5} \times \mathbf{5}^*]_1 \rightarrow \text{Tr}[\Phi_{24}^2] \Phi_5^\dagger \Phi_5, \quad (5.2.64b)$$

$$[\mathbf{24} \times \mathbf{24}]_{24} \times [\mathbf{5} \times \mathbf{5}^*]_{24} \rightarrow \Phi_5^\dagger \Phi_{24}^2 \Phi_5 - \frac{1}{5} \text{Tr}[\Phi_{24}^2] \Phi_5^\dagger \Phi_5 \quad (5.2.64c)$$

より、

$$V_{5 \times 24}^{(0)} = \xi_1 \Phi_5^\dagger \Phi_{24} \Phi_5 + \xi_2 \Phi_5^\dagger \Phi_5 \text{Tr}[\Phi_{24}^2] + \xi_3 \Phi_5^\dagger \Phi_{24}^2 \Phi_5. \quad (5.2.65)$$

よって、24次元随伴表現に属する Higgs Φ_{24} とからなる系に対する繰り込み可能な Lagrangian は、

$$\mathcal{L}_{24+5} = -\frac{1}{2}\text{Tr}[(D\Phi_{24})^2] - (D\Phi_5)^\dagger D\Phi_5 - V_{24+5}^{(0)}; \quad (5.2.66)$$

$$V_{24+5}^{(0)} = V_{24}^{(0)} + V_5^{(0)} + V_{5 \times 24}^{(0)}, \quad (5.2.67)$$

$$V_{24}^{(0)} = -\frac{1}{2}m_{24}^2 \text{Tr}[\Phi_{24}^2] + b_{24} \text{Tr}[\Phi_{24}^3] + \lambda_{24} \text{Tr}[\Phi_{24}^4] + \frac{\sigma_{24}}{4} (\text{Tr}[\Phi_{24}^2])^2. \quad (5.2.68)$$

臨界点を定める方程式 Higgs 場は、常に、適当な $U \in \text{SU}_5$ を用いて

$$\Phi_{24} = U[\phi_1, \dots, \phi_5]U^\dagger; \quad \sum_{a=1}^5 \phi_a = 0, \quad (5.2.69a)$$

$$\Phi_5 = U(\chi_1, \dots, \chi_5); \quad \chi_a \in \mathbb{R}, \quad (5.2.69b)$$

と表される。この変数系を用いると、ポテンシャルは

$$\begin{aligned} V_{5+24}^{(0)} = & \sum_a \left[\frac{1}{4}(-2m_{24}^2 + \sigma_{24} \sum_b \phi_b^2) \phi_a^2 + b_{24} \phi_a^3 + \lambda_{24} \phi_a^4 \right] \\ & - m_5^2 \sum_a \chi_a^2 + \lambda_5 (\sum_a \chi_a^2)^2 \\ & + \sum_a \chi_a^2 (\xi_1 \phi_a + \xi_3 \phi_a^2) + \xi_2 (\sum_a \phi_a^2) (\sum_b \chi_b^2) \\ & + C \sum_a \phi_a \end{aligned} \quad (5.2.70)$$

これより、臨界点を定める条件 $dV_{5+24}^{(0)} = 0$ は

$$\begin{aligned} (\#1) \quad & \left\{ -m_{24}^2 + \sum_b (\sigma_{24} \phi_b^2 + \xi_2 \chi_b^2) + 2\xi_3 \chi_a^2 \right\} \phi_a \\ & + 3b_{24} \phi_a^2 + 4\lambda_{24} \phi_a^3 + \xi_1 \chi_a^2 + C = 0, \end{aligned} \quad (5.2.71a)$$

$$(\#2) \quad \chi_a \left\{ -m_5^2 + \sum_b (2\lambda_5 \chi_b^2 + \xi_2 \phi_b^2) + \xi_1 \phi_a + \xi_3 \phi_a^2 \right\} = 0 \quad (5.2.71b)$$

と表される。ここで、最後の項の C は Lagrange 未定係数である。以下、

$$\lambda_{24}, \sigma_{24}, \lambda_5, \xi_2, \xi_3 \geq 0 \quad (5.2.72)$$

を仮定する。

Case I. $\xi_1 = \xi_3 = 0$ このとき, ϕ_a の方程式は, Φ_{24} 単独の場合と定性的に同じ. 例えば, $G_\phi = \text{SU}_3 \times \text{SU}_2 \times \text{U}_1$ を Φ_{24} 空間における等方群としてもつ場合, 解は

$$\phi = (v_{24}, v_{24}, v_{24}, -3v_{24}/2, -3v_{24}/2); \quad (5.2.73a)$$

$$\left(1 + \frac{\sigma_{24}}{14\lambda_{24}} - \frac{15\xi_2^2}{28\lambda_5\lambda_{24}}\right)v_{24}^2 - \frac{3b_{24}}{14\lambda_{24}}v_{24} + \frac{1}{7\lambda_{24}}\left(-m_{24}^2 + \frac{\xi_2}{2\lambda_5}m_5^2\right) = 0, \quad (5.2.73b)$$

$$\chi \cdot \chi = \frac{1}{2\lambda_5}\left(m_5^2 - \frac{15}{2}\xi_2 v_{24}^2\right) \quad (5.2.73c)$$

で与えられる. ϕ と異なり, χ の方向は定まらない. すなわち, Φ_{24} と Φ_5 の整列は起こらない.

Case II. $\xi_1 \neq 0$ または $\xi_3 \neq 0$ (#2) より,

$$\chi_a, \chi_b \neq 0 (a \neq b) \Rightarrow \phi_a = \phi_b \quad \text{or} \quad \xi_3(\phi_a + \phi_b) + \xi_1 = 0. \quad (5.2.74)$$

よって, (#1) より, ベクトル ϕ と χ は次の構造をもつとしてよい:

$$\begin{aligned} \phi_a &= \left(\phi_1, \dots, \phi_p, \overbrace{w_{24}, \dots, w_{24}}^q, \overbrace{-v_{24}, \dots, -v_{24}}^r \right) \\ \chi_a &= \left(0, \dots, 0, \frac{w_5}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{w_5}{\sqrt{2}}, \frac{v_5}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{v_5}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned} \quad (5.2.75)$$

ここで, $p + q + r = 5$,

$$w_{24} = v_{24} - \frac{\xi_1}{\xi_3}. \quad (5.2.76)$$

さらに, 適当な SU_5 変換を施すと, 常に $(p, q, r) = (3, 1, 1), (4, 0, 1)$ のいずれかの場合に帰着することができる. よって, 条件 $\sum_a \phi_a = 0$ は

$$(\#3) \quad \sum_{i=1}^p \phi_i + (q - r)v_{24} = q \frac{\xi_1}{\xi_3}. \quad (5.2.77)$$

また, 条件 (#2) は

$$\begin{aligned} (\#2') \quad & -m_5^2 + \lambda_5 \{qw_5^2 + rv_5^2\} + \xi_2 \phi \cdot \phi \\ & + \xi_2 \{qw_{24}^2 + rv_{24}^2\} + \xi_3 v_{24} w_{24} = 0 \end{aligned} \quad (5.2.78)$$

となる. ここで, $\phi \cdot \phi = \sum_{i=1}^p \phi_i^2$.

また, (#1) の $a = 1, \dots, p$ 成分より, $x = \phi_i (i = 1, \dots, p)$ は同じ方程式

$$4\lambda_{24}x^3 + 3b_{24}x^2 + [-m_{24}^2 + \sigma_{24} \{(\phi \cdot \phi) + qw_{24}^2 + rv_{24}^2\} + \frac{1}{2}\xi_2 \{qw_5^2 + rv_5^2\}]x + C = 0 \quad (5.2.79)$$

を満たす.

適当な SU_5 変換を施すと, 常に $(p, q, r) = (3, 1, 1), (4, 0, 1)$ のいずれかの場合に帰着することができるので, (#1) の残りの方程式は

$$C = v_{24} \{-m_{24}^2 + \sigma_{24}(\phi \cdot \phi + qw_{24}^2 + rv_{24}^2) + \frac{1}{2}\xi_2(qw_5^2 + rv_5^2) + \xi_3v_5^2\} + 4\lambda_{24}v_{24}^3 - 3b_{24}v_{24}^2 - \frac{1}{2}\xi_1v_5^2 \quad (5.2.80)$$

および $(p, q, r) = (3, 1, 1)$ の場合に対する方程式

$$w_{24} \{-m_{24}^2 + \sigma_{24}(\phi \cdot \phi + w_{24}^2 + v_{24}^2) + \frac{1}{2}\xi_2(qw_5^2 + rv_5^2) + \xi_3w_5^2\} + 4\lambda_{24}w_{24}^3 + 3b_{24}w_{24}^2 + \frac{1}{2}\xi_1w_5^2 + C = 0 \quad (5.2.81)$$

となる.

臨界点の分類 これらの方程式系を満たす臨界点は, そこでの等方群 G により次のように分類される.

(1) $G = SU_4 (\supset SU_3^c \times U_1^{\text{em}})$ ($(p, q, r) = (4, 0, 1)$)

$$(\phi_a) = (v_{24}, v_{24}, v_{24}, v_{24}, -4v_{24}), \quad (5.2.82a)$$

$$(\chi_a) = (0, 0, 0, 0, v_5/\sqrt{2}) \quad (5.2.82b)$$

v_{24} の方程式は

$$8 \{65\lambda_5\lambda_{24} + 25\lambda_5\sigma_{24} - (5\xi_2 + 4\xi_3)^2\} v_{24}^3 + \{-90b_{24}\lambda_5 + 12\xi_1(5\xi_2 + 4\xi_3)\} v_{24}^2 + \{-10\lambda_5 + 2(5\xi_2 + 4\xi_3)m_5^2 - 4\xi_1^2\} v_{24} - \xi_1m_5^2 = 0. \quad (5.2.83)$$

(#2') より, v_5 は, この解を用いて,

$$v_5^2 = \frac{m_5^2}{\lambda_4} - \frac{4(5\xi_2 + 4\xi_3)}{\lambda_5} v_{24}^2 + \frac{4\xi_1 v_{24}}{\lambda_5}. \quad (5.2.84)$$

ポテンシャルの値は

$$\begin{aligned}
V_0 &= \frac{1}{\lambda_5} \{-15\lambda_5 b_{24} + 2\xi_1(5\xi_2 + 4\xi_3)\} v_{24}^3 \\
&\quad + \frac{1}{\lambda_5} \{-5\lambda_5 m_{24}^2 + (5\xi_2 + 4\xi_3)m_5^2 - 2\xi_1^2\} v_{24}^2 \\
&\quad - \frac{3\xi_1}{2\lambda_5} m_5^2 v_{24} - \frac{m_5^4}{4\lambda_5}. \tag{5.2.85}
\end{aligned}$$

(2) $G = \text{SU}_3^c \times \text{U}_1^{\text{em}}$ ($(p, q, r) = (4, 0, 1)$)

$$(\phi_a) = (x, x, x, (3/2)v_{24} - 3x, -(3/2)v_{24}), \tag{5.2.86a}$$

$$(\chi_a) = (0, 0, 0, 0, v_5/\sqrt{2}) \tag{5.2.86b}$$

ただし, $x = (3/8)v_{24}$ のときには, $G = \text{SU}_4$ に帰着されるので, $x \neq (3/8)v_{24}$.

v_5 は x と v_{24} を用いて

$$v_5^2 = \frac{m_5^2}{\lambda_5} - \frac{9(2\xi_2 + \xi_3)}{4\lambda_5} v_{24}^2 + \frac{3(\xi_1 + 6x\xi_2)}{2\lambda_5} v_{24} - \frac{12\xi_2}{\lambda_5} x^2 \tag{5.2.87}$$

と表される. また, x は, 次の構造をもつ v_{24} の有理式となる:

$$x = P_5(v_{24})/P_4(v_{24}) \tag{5.2.88}$$

最後に, v_{24} は 6 次方程式の解で与えられる:

$$P_6(v_{24}) = 0. \tag{5.2.89}$$

Decoupling limit P_6 は一般のパラメータに対しては複雑な 6 次式であるが, $\xi_i = 0$ となる decoupling 極限では, 次の 3 つの解に分解される:

(i) $G_\phi = \text{SU}_3 \times \text{SU}_2 \times \text{U}_1$

$$(14\lambda_{24} + 15\sigma_{24})v_{24}^2 - 3b_{24}v_{24} - 2m_{24}^2 = 0, \tag{5.2.90a}$$

$$v_{24} = \frac{3b_{24} + \Delta}{28\lambda_{24} + 30\sigma_{24}}; \tag{5.2.90b}$$

$$\Delta^2 = 9b_{24}^2 + (112\lambda_{24} + 120\sigma_{24})m_{24}^2, \tag{5.2.90c}$$

$$x = v_{24}. \tag{5.2.90d}$$

(ii) $G_\phi = \text{SU}_4 \times \text{U}_1$

$$(234\lambda_{24} + 90\sigma_{24})v_{24}^2 + 27b_{24}v_{24} - 2m_{24}^2 = 0, \quad (5.2.91a)$$

$$v_{24} = \frac{-9b_{24} + \Delta}{60\sigma_{24} + 156\lambda_{24}}; \quad (5.2.91b)$$

$$\Delta^2 = 81b_{24}^2 + (208\lambda_{24} + 80\sigma_{24})m_{24}^2, \quad (5.2.91c)$$

$$x = -\frac{3}{2}v_{24}. \quad (5.2.91d)$$

(iii) $G_\phi = \text{SU}_3 \times \text{U}_1 \times \text{U}_1$

$$(144\lambda_{24} + 90\sigma_{24})\lambda_{24}^2 v_{24}^2 - 54(\sigma_{24} + 2\lambda_{24})\lambda_{24}b_{24}v_{24} - 16\lambda_{24}^2 m_{24}^2 + 27(\sigma_{24} + \lambda_{24})b_{24}^2 = 0, \quad (5.2.92a)$$

$$v_{24} = \frac{9(2\lambda_{24} + \sigma_{24})b_{24} + \Delta}{24\lambda_{24}(2\lambda_{24} + \sigma_{24})};$$

$$\Delta^2 = 128(\sigma_{24} + 2\lambda_{24})\lambda_{24}^2 m_{24}^2 - (135\sigma_{24}^2 + 324\sigma_{24}\lambda_{24} + 108\lambda_{24}^2)b_{24}^2, \quad (5.2.92b)$$

$$x = \frac{3b_{24}}{8\lambda_{24}}. \quad (5.2.92c)$$

(3) $G = \text{SU}_2 \times \text{SU}_2 \times \text{U}_1$ ($(p, q, r) = (4, 0, 1)$)

$$(\phi_a) = (x, x, (1/2)v_{24} - x, (1/2)v_{24} - x, -v_{24}) \quad (5.2.93a)$$

$$(\chi_a) = (0, 0, 0, 0, v_5/\sqrt{2}) \quad (5.2.93b)$$

ただし、 $x \neq v_{24}/4$.

(3-A) 一般解

$$v_5^2 = \frac{P_2(v_{24})}{2\{\lambda_5(\lambda_{24} + \sigma_{24}) - \xi_2^2\}}, \quad (5.2.94a)$$

$$P_2(v_{24}) \equiv -\{(\xi_2 + 2\xi_3)\lambda_{24} + 2\xi_3\sigma_{24}\}v_{24}^2 + \{3\xi_2b_{24} + 2\xi_1(\lambda_{24} + \sigma_{24})\}v_{24} + 2\{(\lambda_{24} + \sigma_{24})m_5^2 - \xi_2m_{24}^2\}, \quad (5.2.94b)$$

$$4\{\lambda_5(\lambda_{24} + \sigma_{24}) - \xi_2^2\}(2x^2 - v_{24}x) + \{\lambda_5(2\lambda_{24} + 3\sigma_{24}) - \xi_2(3\xi_2 + \xi_3)\}v_{24}^2 + (3\lambda_5b_{24} + 2\xi_1\xi_2)v_{24} - 2\lambda_5m_{24}^2 + 2\xi_2m_5^2 = 0, \quad (5.2.94c)$$

$$P_3(v_{24}) \equiv \{-\lambda_5\lambda_{24}(30\sigma_{24} + 28\lambda_{24}) + 8\xi_3^2(\lambda_{24} + \sigma_{24}) + (30\xi_2^2 + 8\xi_2\xi_3)\lambda_{24}\}v_{24}^3 + \dots = 0. \quad (5.2.94d)$$

Decoupling 極限 $\xi_i = 0$ の極限では、この解は次の 2 つの解に分解される：

$$(i) G_\phi = \text{SU}_2 \times \text{SU}_2 \times \text{U}_1 \times \text{U}_1$$

$$v_{24} = \frac{3b_{24}}{2\lambda_{24}}, \quad (5.2.95a)$$

$$x = \frac{3b_{24}(\lambda_{24} + \sigma_{24}) + \Delta}{8\lambda_{24}(\lambda_{24} + \sigma_{24})}; \quad (5.2.95b)$$

$$\Delta^2 = 16\lambda_{24}^2(\lambda_{24} + \sigma_{24})m_{24}^2 - (5\sigma_{24} + 7\lambda_{24})(\sigma_{24} + \lambda_{24})b_{24}^2, \quad (5.2.95c)$$

$$v_5^2 = \frac{m_5^2}{\lambda_5}. \quad (5.2.95d)$$

$$(ii) G_\phi = \text{SU}_3 \times \text{SU}_2 \times \text{U}_1$$

$$v_{24} = \frac{-3b_{24} + \Delta}{2(14\lambda_{24} + 15\sigma_{24})}; \quad (5.2.96a)$$

$$\Delta^2 = (120\sigma_{24} + 112\lambda_{24})m_{24}^2 + 9b_{24}^2, \quad (5.2.96b)$$

$$x = \frac{3}{2}v_{24}, \quad -v_{24} \quad (5.2.96c)$$

$$v_5^2 = \frac{m_5^2}{\lambda_5}. \quad (5.2.96d)$$

(3-B) 特殊解 パラメータが条件

$$\lambda_5(\lambda_{24} + \sigma_{24}) = \xi_2^2 \quad (5.2.97)$$

を満たすとき解は

$$v_5^2 = 2\frac{\lambda_{24} + \sigma_{24}}{\xi_2}(v_{24} - 2x)x + \frac{(\lambda_{24} + \sigma_{24})\{- (3\xi_2 + 2\xi_3)v_{24}^2 + 2\xi_1 v_{24} + 2m_5^2\}}{2\xi_2^2}, \quad (5.2.98a)$$

$$x : a(v_{24})x^2 + b(v_{24})x + c(v_{24}) = 0, \quad (5.2.98b)$$

$$v_{24} : \{2\xi_3\sigma_{24} + (\xi_2 + 2\xi_3)\lambda_{24}\}v_{24}^2 - \{3\xi_2 b_{24} + 2\xi_1(\lambda_{24} + \sigma_{24})\}v_{24} + 2\xi_2 m_{24}^2 - 2(\lambda_{24} + \sigma_{24})m_5^2 = 0. \quad (5.2.98c)$$

(4) $G = \text{SU}_2 \times \text{U}_1^2$ $((p, q, r) = (4, 0, 1))$

$$(\phi_a) = (x, x, y, v_{24} - 2x - y, -v_{24}), \quad (5.2.99a)$$

$$(\chi_a) = (0, 0, 0, 0, v_5/\sqrt{2}). \quad (5.2.99b)$$

ただし、

$$3x + y \neq v_{24}, \quad 2(x + y) \neq v_{24}, \quad x \neq y. \quad (5.2.100)$$

(4-A) 一般解

$$x = v_{24} + \frac{3b_{24}}{4\lambda_{24}}, \quad (5.2.101a)$$

$$y : a(v_{24}) \{(\sigma_{24} + 2\lambda_{24})\lambda_5 - \xi_2^2\} (2y + 2\lambda_{24}v_{24} + 3b_{24})y + P_2(v_{24}) = 0, \quad (5.2.101b)$$

$$v_{24} : av_{24}^3 + bv_{24}^2 + cv_{24} + d = 0, \quad (5.2.101c)$$

$$v_5^2 = \frac{\tilde{P}_2(v_{24})}{\{\lambda_5(\sigma_{24} + 2\lambda_{24}) - \xi_2^2\}}. \quad (5.2.101d)$$

Decoupling 極限

(i) $G_\phi = \text{SU}_3 \times \text{U}_1^2$

$$x = v_{24} + \frac{3b_{24}}{4\lambda_{24}} = -v_{24}, \quad (5.2.102a)$$

$$y : (\sigma_{24} + 2\lambda_{24}) \left(y + \frac{9b_{24}}{8\lambda_{24}} \right) y + \frac{-16\lambda_{24}^2 m_{24}^2 + 27(\sigma_{24} + \lambda_{24})b_{24}^2}{32\lambda_{24}^2} = 0, \quad (5.2.102b)$$

$$v_{24} = -\frac{3b_{24}}{8\lambda_{24}}, \quad (5.2.102c)$$

$$v_5^2 = \frac{m_5^2}{\lambda_5}. \quad (5.2.102d)$$

(ii) $G_\phi = \text{SU}_2 \times \text{SU}_2 \times \text{U}_1$

$$x = v_{24} + \frac{3b_{24}}{4\lambda_{24}}, \quad (5.2.103a)$$

$$y = -v_{24}, \quad -\frac{3b_{24}}{2\lambda_{24}}, \quad (5.2.103b)$$

$$v_{24} : 8\lambda_{24}(\lambda_{24} + \sigma_{24})(4\lambda_{24}v_{24} + 3b_{24})v_{24} - 8\lambda_{24}^2 m_{24}^2 + 9(3\sigma_{24} + 4\lambda_{24})b_{24}^2 = 0 \quad (5.2.103c)$$

$$v_5^2 = \frac{m_5^2}{\lambda_5}. \quad (5.2.103d)$$

(4-B) 特殊解 パラメータが

$$\lambda_5(2\lambda_{24} + \sigma_{24}) = \xi_2^2 \quad (5.2.104)$$

を満たす時の解は、

$$x = v_{24} + \frac{3b_{24}}{4\lambda_{24}}, \quad (5.2.105a)$$

$$y : P_1(v_{24})y^2 + P_2(v_{24})y + P_3(v_{24}) = 0, \quad (5.2.105b)$$

$$v_{24} : \{\xi_3\sigma_{24} + (4\xi_2 + 2\xi_3)\lambda_{24}\}v_{24}^2 + \{2\xi_2 b_{24} - \xi_1(\sigma_{24} + 2\lambda_{24})\}v_{24} + \xi_2 m_{24}^2 - (\sigma_{24} + 2\lambda_{24})m_5^2 + \frac{9\xi_2}{4\lambda_{24}}b_{24}^2 = 0, \quad (5.2.105c)$$

$$v_5^2 = Q(y, v_{24}). \quad (5.2.105d)$$

(5) $G = \text{SU}_3$ ($(p, q, r) = (3, 1, 1)$)

$$(\phi_a) = (x, x, x, v_{24} - 3x, -v_{24}); \quad x = \frac{\xi_1}{3\xi_3}, \quad (5.2.106a)$$

$$(\chi_a) = (0, 0, 0, w_5/\sqrt{2}, v_5/\sqrt{2}). \quad (5.2.106b)$$

(5-A) 一般解 $G_\phi = \text{SU}_3 \times \text{U}_1 \times \text{U}_1$

$$v_5^2 = \frac{P_{v3}(v_{24})}{2\xi_3 v_{24} - \xi_1}, \quad (5.2.107a)$$

$$w_5^2 = \frac{P_{w3}(v_{24})}{2\xi_3 v_{24} - \xi_1}, \quad (5.2.107b)$$

$$v_{24} : \{4\lambda_5(\sigma_{24} + \lambda_{24}) - (2\xi_2 + \xi_3)^2\}(v_{24} - \xi_1/\xi_3) v_{24} + \text{const} = 0. \quad (5.2.107c)$$

ただし、 $w_5 v_5 \neq 0, w_5 \neq v_5$.

(5-B) 特殊解 $G_\phi = \text{SU}_3 \times \text{SU}_2 \times \text{U}_1$ パラメータが関係式

$$18\xi_3^2\lambda_5m_{24}^2 - 9\xi_3^2(2\xi_2 + \xi_3)m_5^2 + 54\xi_1\xi_3\lambda_5m_{24}^2 - 8\lambda_5\xi_1^2(2\sigma_{24} + 7\lambda_{24}) + \xi_1^2(16\xi_2^2 + 4\xi_2\xi_3 - 2\xi_3^2) = 0 \quad (5.2.108)$$

を満たすとき、

$$v_{24} = \frac{\xi_1}{3\xi_3}, \quad (5.2.109a)$$

$$v_5^2 = -\frac{4m_{24}^2}{\xi_3} + \frac{4\xi_2m_5^2}{\xi_3\lambda_5} + \frac{32\xi_1^2\sigma_{24}}{9\xi_3^3} + \frac{16\xi_1^2\lambda_{24}}{9\xi_3^3} - \frac{32\xi_1^2\xi_2^2}{9\xi_3^3\lambda_5} + \frac{8\xi_1^2\xi_2}{9\xi_3^2\lambda_5}, \quad (5.2.109b)$$

$$w_5^2 = -v_5^2 + \frac{2m_5^2}{2\lambda_5} - \frac{8\xi_1^2\xi_2}{9\xi_3^2\lambda_5} + \frac{2\xi_1^2}{9\xi_3\lambda_5}. \quad (5.2.109c)$$

(6) $G = \text{SU}_2 \times \text{U}_1$ $((p, q, r) = (3, 1, 1))$

$$(\phi_a) = (x, x, \xi_1/\xi_3 - 2x, v_{24} - \xi_1/\xi_3, -v_{24}), \quad (5.2.110a)$$

$$(\chi_a) = (0, 0, 0, w_5, v_5). \quad (5.2.110b)$$

(6-A) 一般解 $G_\phi = \text{SU}_2 \times \text{U}_1^3$

$$v_{24} : P_4(v_{24}) = 0, \quad (5.2.111a)$$

$$x = \frac{P_2(v_{24})}{\xi_3(2\lambda_5\sigma_{24} - 2\xi_2^2 - \xi_2\xi_3)(3b_{24}\xi_3 + 4\xi_1\lambda_{24})}, \quad (5.2.111b)$$

$$v_5^2 = \frac{P_{v3}(v_{24})}{\lambda_5\xi_3^2(2\xi_3v_{24} - \xi_1)}, \quad (5.2.111c)$$

$$w_5^2 = \frac{P_{w3}(v_{24})}{\lambda_5\xi_3^2(2\xi_3v_{24} - \xi_1)} \quad (5.2.111d)$$

(6-B) 特殊解 $G_\phi = \text{SU}_2 \times \text{U}_1^3$

$$(i) 4\lambda_5(\sigma_{24} + 2\lambda_{24}) = (2\xi_2 + \xi_3)^2$$

$$x : (\xi_3\sigma_{24} - 4\xi_2\lambda_{24})(\xi_3x - \xi_1/3)^2 + \text{const} = 0 \quad (5.2.112a)$$

$$v_5^2 : \frac{P_v(v_{24}, x)}{\xi_3^2(2\xi_2 + \xi_3)(\xi_3\sigma_{24} - 4\xi_2\lambda_{24})(2\xi_3v_{24} - \xi_1)}, \quad (5.2.112b)$$

$$w_5^2 : \frac{P_w(v_{24}, x)}{\xi_3^2(2\xi_2 + \xi_3)(\xi_3\sigma_{24} - 4\xi_2\lambda_{24})(2\xi_3v_{24} - \xi_1)}. \quad (5.2.112c)$$

(v_5, w_5, v_{24}) の取りうる値は 3次元空間内の閉曲線となる。

$$(ii) \quad 16\lambda_5\lambda_{24}(\sigma_{24} + \lambda_{24}) = \sigma_{24}\xi_3^2 + \lambda_{24}(16\xi_2^2 + 8\xi_2\xi_3 + 2\xi_3^2)$$

$$x = \frac{C_x}{\xi_3 \{3\xi_3(\xi_3\sigma_{24} - 4\xi_2\lambda_{24})b_{24} + 4\xi_1(\xi_3\sigma_{24} - 4\xi_2\lambda_{24})\}}; \quad (5.2.113a)$$

$$C_x = 2\xi_3^2(4\xi_2 + \xi_3)\lambda_{24}m_{24}^2 - 8\lambda_{24}\xi_3^2(\sigma_{24} + \lambda_{24})m_5^2 + (6b_{24}\xi_1\xi_3^2 - 4\xi_1^2\xi_3\lambda_{24})\sigma_{24} - 8\xi_1^2(2\xi_2 + \xi_3)\lambda_{24}^2 + 6b_{24}\xi_1\xi_3^2\lambda_{24}, \quad (5.2.113b)$$

$$v_{24} : (\xi_3\sigma_{24} - 4\xi_2\lambda_{24})^2(3\xi_3b_{24} + 4\xi_1\lambda_{24})^2 \{4\lambda_5(\sigma_{24} + 2\lambda_{24}) - (2\xi_2 + \xi_3)^2\} \\ \times (\xi_3v_{24} - \xi_1)v_{24} + C_{v24} = 0, \quad (5.2.113c)$$

$$v_5^2 = \frac{P_{v1}(v_{24})}{Q_{v1}(v_{24})}, \quad w_5^2 = \frac{P_{w1}(v_{24})}{Q_{w1}(v_{24})}. \quad (5.2.113d)$$

$$(iii) \quad 3b_{24}\xi_3 + 4\xi_1\lambda_{24} = 0$$

$$v_{24} : \xi_3v_{24}^2 - \xi_1v_{24} + C_{v24} = 0, \quad (5.2.114a)$$

$$x : (2\lambda_5\sigma_{24} - 2\xi_2^2 - \xi_2\xi_3)(3\xi_3x - 2\xi_1)x + C_x = 0, \quad (5.2.114b)$$

$$v_5^2 = \frac{P_{v1}(x, v_{24})}{Q_{v1}(v_{24})}, \quad w_5^2 = \frac{P_{w1}(x, v_{24})}{Q_{w1}(v_{24})}. \quad (5.2.114c)$$

(6-C) 特殊解 $v_{24} = \xi_1/(2\xi_3)$

$$(i) \quad x = -\xi_1/(2\xi_3) \Rightarrow G_\phi = \text{SU}_4 \times \text{U}_1: \text{パラメータが}$$

$$20\xi_3^2(-\lambda_5m_{24}^2 + \xi_2m_5^2) + \lambda_5\xi_1^2(100\sigma_{24} + 260\lambda_{24}) \\ + 90\xi_1\xi_3\lambda_5b_{24} + 5\xi_1^2\xi_2(-20\xi_2 + \xi_3) = 0 \quad (5.2.115)$$

を満たすとき、

$$v_5^2 + w_5^2 = \frac{4\xi_3^2m_5^2 - 20\xi_1^2\xi_2 + \xi_1^2\xi_3}{4\lambda_5\xi_3^2}. \quad (5.2.116)$$

$$(ii) \quad x = \xi_1/(3\xi_2) \Rightarrow G_\phi = \text{SU}_3 \times \text{SU}_2 \times \text{U}_1: \text{パラメータが}$$

$$36\xi_3^2(\lambda_5m_{24}^2 - \xi_2m_5^2) - \lambda_5\xi_1^2(30\sigma_{24} + 28\lambda_{24}) \\ + 18\xi_1\xi_3\lambda_5b_{24} + 3\xi_1^2\xi_2(10\xi_2 - 3\xi_3) = 0 \quad (5.2.117)$$

を満たすとき、

$$v_5^2 + w_5^2 = \frac{12\xi_3^2m_5^2 - 10\xi_1^2\xi_2 + 3\xi_1^2\xi_3}{12\lambda_5\xi_3^2}. \quad (5.2.118)$$

(iii) $G_\phi = \text{SU}_2 \times \text{SU}_2 \times \text{U}_1^2$: パラメータが

$$\{\lambda_5(3\sigma_{24} + 2\lambda_{24}) - 3\xi_2^2\} (\xi_2 m_5^2 - \lambda_{24} m_{24}^2 - C_1)(\xi_2 m_5^2 - \lambda_{24} m_{24}^2 - C_2) = 0 \quad (5.2.119)$$

を満たすとき、

$$x = \frac{C_x}{4\xi_3 D}, \quad (5.2.120a)$$

$$D = b_{24}\lambda_5\xi_3(9\sigma_{24} + 12\lambda_{24}) - 9b_{24}\xi_2^2\xi_3 + \lambda_5\xi_2\lambda_{24}(7\sigma_{24} + 6\lambda_{24}) - 7\xi_1\xi_2^2\lambda_{24}, \quad (5.2.120b)$$

$$v_5^2 + w_5^2 = \frac{C_{vw}}{8\xi_3^2\lambda_5 D^2} \quad (5.2.120c)$$

(7) $\mathbf{G} = \mathbf{U}_1^2$ ($(p, q, r) = (3, 1, 1)$)

$$(\phi_a) = (x, y, \xi_1/\xi_3 - x - y, v_{24} - \xi_1/\xi_3, -v_{24}), \quad (5.2.121a)$$

$$(\chi_a) = (0, 0, 0, w_5/\sqrt{2}, v_5/\sqrt{2}). \quad (5.2.121b)$$

ただし、

$$2x + y \neq \xi_1/\xi_3, \quad x + 2y \neq \xi_1/\xi_3, \quad x \neq y \quad (5.2.122)$$

この解はパラメータが関係式

$$b_{24} = -\frac{4\xi_1}{3\xi_3}\lambda_{24} \quad (5.2.123)$$

を満たすときのみ存在。

$$v_{24} : \frac{A}{\xi_3\sigma_{24} + 2(2\xi_2 + \xi_3)\lambda_{24}} \left(v_{24} - \frac{\xi_1}{2\xi_3} \right)^2 = C_{v24}; \quad (5.2.124a)$$

$$A \equiv 16\lambda_5\lambda_{24}(\sigma_{24} + \lambda_{24}) - \xi_3^2(\sigma_{24} + 2\lambda_{24}) - 8\xi_2(2\xi_2 + \xi_3)\lambda_{24}, \quad (5.2.124b)$$

$$x, y : x^2 + xy + y^2 - \frac{\xi_1}{\xi_3}(x + y) + C_{xy} = 0, \quad (5.2.124c)$$

$$v_5^2 = \frac{v_{24} + x}{\xi_3^2(2\xi_2 + \xi_3)(2\xi_3 v_{24} - \xi_1)} P_{v2}(v_{24}, x, y), \quad (5.2.124d)$$

$$w_5^2 = \frac{\xi_3 v_{24} - \xi_3 x - \xi_1}{\xi_3^2(2\xi_2 + \xi_3)(2\xi_3 v_{24} - \xi_1)} P_{v2}(v_{24}, x, y), \quad (5.2.124e)$$

$$(5.2.124f)$$

5.2.6.5 臨界点解析のまとめ

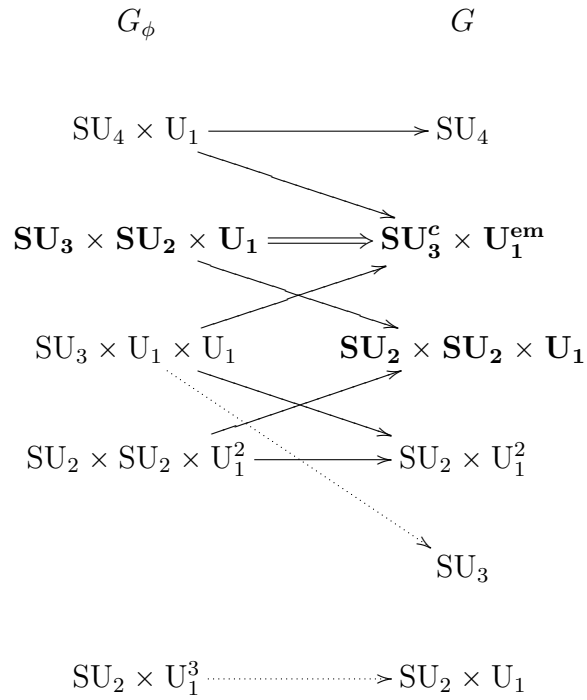


図 7: Φ_{24} 単独系と $\Phi_{24} + \Phi_5$ 系の臨界点における等方群の対応。一般解に限定。点線は、decoupling 極限が存在しない場合に対応

5.2.6.6 $SU_3 \times U_1^{\text{em}}$ 臨界点における Higgs 場の質量

(24 + 5) Higgs 系における $SU_3 \times U_1^{\text{em}}$ 臨界点

$$(\phi_a) = (x, x, x, (3/2)v_{24} - 3x, -(3/2)v_{24}), \quad (5.2.125a)$$

$$(\chi_a) = (0, 0, 0, 0, v_5/\sqrt{2}), \quad (5.2.125b)$$

$$v_5^2 = \frac{m_5^2}{\lambda_5} - \frac{9(2\xi_2 + \xi_3)}{4\lambda_5} v_{24}^2 + \frac{3(\xi_1 + 6x\xi_2)}{2\lambda_5} v_{24} - \frac{12\xi_2}{\lambda_5} x^2 \quad (5.2.125c)$$

のなかで, decoupling limit $\xi \rightarrow 0$ で, **24**Higgs 単独系の $SU_3 \times SU_2 \times U_1$ 臨界点

$$(14\lambda_{24} + 15\sigma_{24})v_{24}^2 - 3b_{24}v_{24} - 2m_{24}^2 = 0, \quad (5.2.126a)$$

$$v_{24} = \frac{3b_{24} + \Delta}{28\lambda_{24} + 30\sigma_{24}}; \quad (5.2.126b)$$

$$\Delta^2 = 9b_{24}^2 + (112\lambda_{24} + 120\sigma_{24})m_{24}^2, \quad (5.2.126c)$$

$$x = v_{24}. \quad (5.2.126d)$$

に一致するものを考える. 以下, この (24 + 5) Higgs 系の臨界点を SM 臨界点と呼ぶ.

簡単のため以下, $b_{24} = 0$ とする. このとき, $\xi_1/m_{24}, \xi_2, \xi_3 \ll 1$ として, SM 臨界点の座標値を ξ について展開し 1 次までとると, v_{24} の値は

$$v_{24} = v_{24}^{(0)} + \delta v_{24}; \quad (5.2.127a)$$

$$v_{24}^{(0)} = \frac{2m_{24}}{\sqrt{28\lambda_{24} + 30\sigma_{24}}}, \quad (5.2.127b)$$

$$\delta v_{24} = \frac{(-6\xi_3 + \xi_1/v_{24}^{(0)})(15\sigma_{24} + 26\lambda_{24}) - 240\xi_2\lambda_{24}}{240\lambda_{24}(14\lambda_{24} + 15\sigma_{24})} \cdot \frac{(v_5^{(0)})^2}{v_{24}^{(0)}}, \quad (5.2.127c)$$

$x = \phi_1$ の値は

$$x = x^{(0)} + \delta x; \quad (5.2.128a)$$

$$x^{(0)} = v_{24}^{(0)}, \quad (5.2.128b)$$

$$\delta x = \frac{\xi_1/v_{24}^{(0)} - 20\xi_2 - 6\xi_3}{20(14\lambda_{24} + 15\sigma_{24})} \cdot \frac{(v_5^{(0)})^2}{v_{24}^{(0)}}. \quad (5.2.128c)$$

これを質量行列に代入し，質量 2 乗固有値を ξ について 1 次まで求めると， Φ_{24} 方向の固有値は

$$\begin{array}{ll}
\text{SU}_3^c \times \text{U}_1^{\text{em}} & \text{mul} \\
\mathbf{1}_{(0)} & [1] \quad 2m_{24}^2 - \frac{(v_5^{(0)})^2}{20} \left(40\xi_2 + 12\xi_3 - 3\xi_1/v_{24}^{(0)} \right), \\
\mathbf{1}_{(0,\pm 1)} & [3] \quad \frac{40\lambda_{24}}{14\lambda_{24}+15\sigma_{24}} m_{24}^2 + (v_5^{(0)})^2 \frac{3(18\lambda_{24}+5\sigma_{24})\xi_1/v_{24}^{(0)} + 4(15\sigma_{24}-46\lambda_{24})\xi_3 - 800\xi_2\lambda_{24}}{5(14\lambda_{24}+15\sigma_{24})}, \\
\mathbf{8}_{(0)} & [1] \quad \frac{10\lambda_{24}}{14\lambda_{24}+15\sigma_{24}} m_{24}^2 + (v_5^{(0)})^2 \frac{3(8\lambda_{24}+5\sigma_{24})(\xi_1/v_{24}^{(0)} - 6\xi_3) - 200\xi_2\lambda_{24}}{20(14\lambda_{24}+15\sigma_{24})}, \\
\mathbf{3}_{(1/3,4/3)} + \text{cc} & [4] \quad 0 \quad (\text{NG bosons})
\end{array} \tag{5.2.129}$$

Φ_5 方向の固有値は，

$$\begin{array}{ll}
\text{SU}_3^c \text{Irrep} & \text{mul} \\
\mathbf{3}_{(0)} + \mathbf{3}^*_{(0)} & [1] \quad -\frac{5}{4}\xi_3(v_{24}^{(0)})^2 + \frac{5}{2}\xi_1 v_{24}^{(0)}, \\
\mathbf{1}_{(0)} & [1] \quad 2m_5^2 - 3(10\xi_2 + 3\xi_3)(v_{24}^{(0)})^2 + 3\xi_1 v_{24}^{(0)}, \\
\mathbf{1}_{(0,\pm 1)} & [3] \quad 0 \quad (\text{NG bosons})
\end{array} \tag{5.2.130}$$

EW セクターでの質量

$$v_5 = v_{\text{ew}} = 206\text{GeV}, \tag{5.2.131a}$$

$$m_5 \simeq \sqrt{\lambda_5} v_5 < v_5, \tag{5.2.131b}$$

$$m_h \simeq 135\text{GeV} \tag{5.2.131c}$$

を再現し，かつ Φ_5 の 3 + 2 分離，すなわち， Φ_3 の質量が EW スケールに比べて十分重いことを要請すると， ξ は余り小さくできず， m_h を再現するには， ξ パラメータの微調整が必要となる：

$$\frac{\xi_1}{v_{24}} - (10\xi_2 + 3\xi_3) \sim \left(\frac{v_5}{v_{24}} \right)^2. \tag{5.2.132}$$

5.2.6.7 フェルミ粒子の質量

ゲージ変換に対し，フェルミ粒子が左カイラル表示で，

$$\begin{aligned}
 \text{SU}_5 & & \text{SU}_3^c \times \text{SU}_2^w \times \text{U}_1^Y \\
 \mathbf{1} & \rightarrow ((N_R)^c) & = & (\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(0)} \\
 \mathbf{5}^* & \rightarrow ((d_R)^c, \sigma_2 l_L) & = & (\mathbf{3}^*, \mathbf{1})_{(2/3)} + (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{(-1)} \\
 \mathbf{10} & \rightarrow (q_L, (u_R)^c, (e_R)^c) & = & (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{(1/3)} + (\mathbf{3}^*, \mathbf{1})_{(-1/3)} + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(2)}.
 \end{aligned} \tag{5.2.133}$$

と変換するとする．このとき，電荷 Q^{em} は

$$\begin{aligned}
 Q^{\text{em}} &= T_3^w + \frac{1}{2}Y = [0, 0, 0, 1/2, -1/2] + \frac{1}{2}[-2/3, -2/3, -2/3, 1, 1] \\
 &= [-1/3, -1/3, -1/3, 1, 0]
 \end{aligned} \tag{5.2.134}$$

また， SU_5 不変な Yukawa 結合は

$$\begin{array}{rcll}
 \text{fermion}^2 & & & \text{Higgs} \\
 \mathbf{1} \times \mathbf{1} & = & \mathbf{1} & \cdots \quad \mathbf{1} \\
 \mathbf{1} \times \mathbf{5}^* & = & \mathbf{5}^* & \cdots \quad \mathbf{5} \\
 \mathbf{1} \times \mathbf{10} & = & \mathbf{10} & - \\
 (\mathbf{5}^* \times \mathbf{5}^*)_s & = & \mathbf{15}^* & \cdots \quad \mathbf{15} \\
 \mathbf{5}^* \times \mathbf{10} & = & \mathbf{45} + \mathbf{5} & \cdots \quad \mathbf{5}^*, \mathbf{45}^* \\
 (\mathbf{10} \times \mathbf{10})_s & = & \mathbf{50}^* + \mathbf{5}^* & \cdots \quad \mathbf{5}.
 \end{array} \tag{5.2.135}$$

(注) $\mathbf{10}$ -Higgs および $\mathbf{50}$ -Higgs は， $\text{SU}_3 \times \text{U}_1^{\text{em}}$ を等方群とする期待値を持たないので，標準モデルを再現する SU_5 GUT では許されない。

(A) $\psi_1 \psi_{5^*} \Phi_5 + \psi_1 \psi_1$ Lagrangian は

$$\mathcal{L}_{\mathbf{1}-\mathbf{5}^*-\mathbf{5}+\mathbf{1}-\mathbf{1}-\mathbf{1}} = h_{1,5^*} \Phi_5^a \bar{\psi}_1 C \psi_{5^*a} + iM_N \bar{\psi}_1 C \psi_1 + \text{h.c.} \tag{5.2.136}$$

5次元 Higgs の期待値は， U_1^{em} を保つという要請より

$$\hat{Q}^{\text{em}} \langle \Phi_5 \rangle = 0 \Rightarrow \langle \Phi_5 \rangle = (0, 0, 0, 0, v_5) \tag{5.2.137}$$

よって，質量項は

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\mathbf{1}-\mathbf{5}^*-\mathbf{5}+\mathbf{1}-\mathbf{1}-\mathbf{1}} &= ih_{1,5^*} v_5 \bar{\nu}_R^c C \nu_L + iM_N \bar{\nu}_R^c C \nu_R^c + \text{h.c.} \\
 \Rightarrow M_\nu &= ih_{1,5^*} \begin{pmatrix} 0 & v_5 \\ v_5 & M_N \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.2.138}$$

質量固有値は

$$m_\nu = \pm \frac{1}{2} M_N + \sqrt{|h_{1,5^*}|^2 v_5^2 + \frac{1}{4} M_N^2}. \quad (5.2.139)$$

(B) $\psi_{5^*} \psi_{10} \Phi_5^*$ ゲージ不変な Yukawa 結合は

$$[(5^* \times 10) \times 5^*]_1 = [(5^* \times 5^*)_a \times 10]_1 = [10^* \times 10]_1 \quad (5.2.140)$$

より,

$$\mathcal{L}_{5^*-10-5^*} = h_{5^*,10} (\Phi_5^*)_a {}^T \psi_{5^*b} C(\psi_{10})^{[ab]} + \text{h.c.} \quad (5.2.141)$$

ここで,

$$\begin{array}{ccc} \text{SU}_5 & & \text{SU}_3 \times \text{SU}_2 \\ \mathbf{10} = (\mathbf{5} \times \mathbf{5})_a & \rightarrow & ((\mathbf{3} \times \mathbf{3})_a, \mathbf{1}) + (\mathbf{3}, \mathbf{2}) + (\mathbf{1}, (\mathbf{2} \times \mathbf{2})_a) \\ & & \mathbf{3}^* = u_R^c \qquad q_L \qquad e_R^c \end{array} \quad (5.2.142)$$

より, SSB 後に残るのは

$$(\psi_{10})^{5a} = (d_L, -e_R^c, 0) \quad (5.2.143a)$$

$$(\psi_{5^*})_a = (d_R^c, -ie_L, 0). \quad (5.2.143b)$$

よって, 質量項は

$$\mathcal{L}_{5^*-10-5^*} = h_{5^*,10} v_5 ({}^T d_R^c C d_L + i {}^T e_R^c C e_L) + \text{h.c.} \quad (5.2.144)$$

となり, d クォークと e に質量を与える:

$$M_d = h_{5^*,10} v_5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_e = i h_{5^*,10} v_5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2.145)$$

質量固有値は一致する:

$$m_d = m_e = |h_{5^*,10}| v_5. \quad (5.2.146)$$

(C) $\psi_{10} \psi_{10} \Phi_5$ Yukawa 結合は

$$[(\mathbf{10} \times \mathbf{10})_s \times \mathbf{5}]_1 = [\mathbf{5} \times \mathbf{5} \times \mathbf{5} \times \mathbf{5}]_a \quad (5.2.147)$$

より,

$$\mathcal{L}_{10-10-5} = h_{10,10} \epsilon_{abcde} \Phi_5^a \psi_{10}^{bc} \psi_{10}^{de} + \text{h.c.} \quad (5.2.148)$$

SSBによりこの結合は,

$$\mathcal{L}_{10-10-5} = 8h_{10,10}v_5 \bar{u}_R^c C u_L + \text{h.c.} \quad (5.2.149)$$

となるので, uクォークの質量を生み出す:

$$M_u = 8h_{10,10}v_5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m_u = 8|h_{10,10}|v_5. \quad (5.2.150)$$

(D) $\psi_{5^*}\psi_{5^*}\Phi_{15}$ $\mathbf{15} = (\mathbf{5} \times \mathbf{5})_s$ より, Φ_{15} は5次の対称行列に値を持つ場で表され, SU_5 変換に対して次のように変換する:

$$\Phi_{15} : \Phi_{15}^{ab} = \Phi_{15}^{ba}; a, b = 1, \dots, 5 \rightarrow \Phi'_{15} : U^a_c U^b_d \Psi_{15}^{cd}, \quad U \in SU_5. \quad (5.2.151)$$

したがって, 許される湯川結合は

$$\mathcal{L}_{5^*-5^*-15} = h_{5,5^*} \Phi_{15}^{ab} \bar{\psi}_{5^*a} C \psi_{5^*b} + \text{h.c.} \quad (5.2.152)$$

ここで, SU_5 の15次元表現は, SSBにより

$$SU_5 : \mathbf{15} [0200] \rightarrow SU_3 \times SU_2 \times U_1 : (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{(1/3)} + (\mathbf{6}, \mathbf{1})_{(-4/3)} + (\mathbf{1}, \mathbf{3})_{(2)} \quad (5.2.153)$$

と分解し, 各既約成分は, 行列表示で

$$\Phi_{15} = \begin{array}{c} \mathbf{3} \quad \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \left| \begin{array}{c|c} (\mathbf{6}, \mathbf{1}) & (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \\ \hline & (\mathbf{1}, \mathbf{3}) \end{array} \right. \end{array}, \quad (\mathbf{1}, \mathbf{3}) = A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & a \end{pmatrix}. \quad (5.2.154)$$

よって, SSBにより $SU_3 \times U_1^{\text{em}}$ が残留対称性となる条件

$$\mathbf{su}_3 \langle \Phi_{15} \rangle = 0, \quad \hat{Q}^{\text{em}} \langle \Phi_{15} \rangle = \{Q^{\text{em}}, \langle \Phi_{15} \rangle\} = 0 \quad (5.2.155)$$

より,

$$\langle \Phi_{15} \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_{15} \end{pmatrix} \quad (5.2.156)$$

これより, 上記の湯川結合は,

$$\mathcal{L}_{5^*-5^*-15} = -h_{5^*,5^*} v_{15} \bar{\nu}_L C \nu_L \quad (5.2.157)$$

となり, ν_L に Majorana 質量を与える.

(E) $\psi_{5^*}\psi_{10}\Phi_{45^*}$ 50次元表現のテンソル

$$\Phi_{bc}^a = -\Phi_{cb}^a \in \mathbf{5} \times \mathbf{10}^* = \mathbf{45}^* + \mathbf{5}^* \quad (5.2.158)$$

において, $\Phi_{ba}^b \in \mathbf{5}^*$ より,

$$\Phi_{bc}^a \in \mathbf{45}^* \Leftrightarrow \Phi_{ab}^b = 0. \quad (5.2.159)$$

ここで, SU_5 の既約表現の $SU_3 \times SU_2 \times U_1$ に関する分解

$$\mathbf{10}^* = (\mathbf{3}^*, \mathbf{2})_{(-1/3)} + (\mathbf{3}, \mathbf{1})_{(1/3)} + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(-2)}, \quad (5.2.160a)$$

$$\mathbf{5} = (\mathbf{3}, \mathbf{1})_{(-2/3)} + (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{(1)}, \quad (5.2.160b)$$

$$\mathbf{5}^* = (\mathbf{3}^*, \mathbf{1})_{(2/3)} + (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{(-1)}, \quad (5.2.160c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{45}^* &= (\mathbf{8}, \mathbf{2})_{(-1)} + (\mathbf{6}^*, \mathbf{1})_{(2/3)} + (\mathbf{3}^*, \mathbf{3})_{(-2/3)} \\ &\quad + (\mathbf{3}, \mathbf{1})_{(-8/3)} + (\mathbf{3}^*, \mathbf{1})_{(2/3)} + (\mathbf{3}^*, \mathbf{2})_{(7/3)} \\ &\quad + (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{(-1)} \end{aligned} \quad (5.2.160d)$$

を比較して,

$$\mathfrak{su}_3 \triangleright \langle \Phi_{45^*} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \Phi_{45^*} \rangle \in (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{(-1)} \in (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{(1)} \times (\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(-2)} + ([\mathbf{3}^* \times \mathbf{3}^*]_{\mathbf{1}}, \mathbf{2})_{(-1)} \quad (5.2.161)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{45^*} \rangle &\in (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{(1)} \times (\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(2)} = (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{(1)} \times [(\mathbf{1}, \mathbf{2}) \times (\mathbf{1}, \mathbf{2})]_a \\ &\Rightarrow \Phi_{bc}^a = 0 \text{ except for } \Phi_{JK}^I \ (I, J, K = 4, 5) \Rightarrow \langle \Phi_{45^*} \rangle \in \mathbf{5}^* \end{aligned} \quad (5.2.162)$$

より, $\mathfrak{su}_3 \triangleright \langle \Phi_{45^*} \rangle = 0$ なら

$$\Phi_{bc}^a = 0 \text{ except for } \Phi_{i4}^i = -\frac{1}{3}\Phi_{54}^5 \text{ or } \Phi_{i5}^i = -\frac{1}{3}\Phi_{45}^4 \ (i = 1, 2, 3) \quad (5.2.163)$$

さらに,

$$\hat{Q}^{\text{em}} \langle \Phi_{45^*} \rangle: \Phi_{c4}^c (\text{no sum}) \rightarrow -\Phi_{c4}^c \quad (5.2.164)$$

より, $SU_3 \times U_1^{\text{em}}$ が残留対称性となるのは

$$\Phi_{bc}^a = 0 \text{ except for } \Phi_{[j5]}^j = -\frac{1}{3}v_{45} \ (j = 1, 2, 3), \Phi_{[45]}^4 = v. \quad (5.2.165)$$

Φ_{45^*} とフェルミオンとの Yukawa 結合は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{5}^*-\mathbf{10}-\mathbf{45}^*} &= h'_{5^*,10} \Phi_{bc}^a \bar{\psi}_{5^*a} C \psi_{10}^{bc} + \text{h.c.} \\ &= -\frac{2}{3} h'_{5^*,10} v_{45} \bar{d}_R^c C d_L + 2i h'_{5^*,10} v_{45} \bar{e}_L C e_R^c + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (5.2.166)$$

で与えられ得る。したがって、 Φ_{45^*} は d クォークと電子に質量を与え、

$$M_d = -\frac{2}{3}h'_{5^*,10}v_{45} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_e = 2ih'_{5^*,10}v_{45} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2.167)$$

より、質量固有値は

$$m_d = \frac{2}{3}|h'_{5^*,10}|v_{45}, \quad m_e = 2|h'_{5^*,10}|v_{45} \quad (5.2.168)$$

となる。これらは

$$m_d = \frac{1}{3}m_e \quad (5.2.169)$$

という関係で結ばれているが、 Φ_5 と Φ_{45^*} の両者が存在するときには、湯川結合係数の値や真空期待値のかんけいにより、 m_d と m_e の比は様々な値を取り得る。

5.2.7 SO(10) GUT

Creation: 2020/7/31

Last update: 2020/8/23

Source: RM20200731SO10GUT

Source:RM20200820SO10-Rep

Source: SimpleLieGroup.mpl

5.2.7.1 Higgs セクターの構造

(A) $SO_{10} \rightarrow SU_5$ による表現の既約分解

$SO_{10} - \text{irrep}$	$SU_5 \times U_1 - \text{rep}$	
$\mathbf{10}_v$	$= \mathbf{5}_{(2)} + \mathbf{5}^*_{(-2)}$	\times
$\mathbf{16}_s$	$= \mathbf{10}_{(-1)} + \mathbf{5}^*_{(3)} + \mathbf{1}_{(-5)}$	SU_5
$\mathbf{45}_{\text{adj}}$	$= \mathbf{24}_{\text{adj}(0)} + \mathbf{10}_{(4)} + \mathbf{10}^*_{(-4)} + \mathbf{1}_{(0)}$	$SU_5 \times U_1$
$\mathbf{54} [20000]$	$= \mathbf{24}_{(0)} + \mathbf{15}_{(4)} + \mathbf{15}^*_{(-4)}$	\times
$\mathbf{120} [00100]$	$= \mathbf{45}_{(2)} + \mathbf{45}^*_{(-2)} + \mathbf{10}_{(-6)} + \mathbf{10}^*_{(6)}$ $+ \mathbf{5}_{(2)} + \mathbf{5}^*_{(-2)}$	\times
$\mathbf{126} [00002]$	$= \mathbf{50}^*_{(-2)} + \mathbf{45}_{(2)} + \mathbf{15}^*_{(6)}$ $+ \mathbf{10}_{(-6)} + \mathbf{5}^*_{(-2)} + \mathbf{1}_{(-10)}$	SU_5
$\mathbf{144} [10010]$	$= \mathbf{45}^*_{(3)} + \mathbf{40}_{(-1)} + \mathbf{24}_{(-5)} + \mathbf{15}_{(-1)}$ $+ \mathbf{10}_{(-1)} + \mathbf{5}_{(7)} + \mathbf{5}^*_{(3)}$	\times
$\mathbf{210} [00011]$	$= \mathbf{75} [0110]_{(0)} + \mathbf{40}_{(4)} + \mathbf{40}^*_{(-4)} + \mathbf{24}_{(0)}$ $+ \mathbf{10}_{(4)} + \mathbf{10}^*_{(-4)} + \mathbf{5}_{(-8)} + \mathbf{5}^*_{(8)} + \mathbf{1}_{(0)}$	$SU_5 \times U_1$
$\mathbf{210}' [20000]$	$= \mathbf{70}_{(2)} + \mathbf{70}^*_{(-2)} + \mathbf{35}_{(-6)} + \mathbf{35}^*_{(6)}$	\times
$\mathbf{320} [11000]$	$= \mathbf{70}_{(2)} + \mathbf{70}^*_{(-2)} + \mathbf{45}_{(2)} + \mathbf{45}^*_{(-2)}$ $+ \mathbf{40}_{(-6)} + \mathbf{40}^*_{(6)} + \mathbf{5}_{(2)} + \mathbf{5}^*_{(-2)}$	\times
$\mathbf{560} [01001]$	$= \mathbf{175}'' [1101]_{(-1)} + \mathbf{75}_{(-5)} + \mathbf{70}_{(3)} + \mathbf{50}^*_{(3)}$ $+ \mathbf{45}^*_{(3)} + \mathbf{45}_{(7)} + \mathbf{40}_{(-1)} + \mathbf{24}_{(-5)}$ $+ \mathbf{10}^*_{(-9)} + \mathbf{10}_{(-1)} + \mathbf{5}^*_{(3)} + \mathbf{1}_{(-5)}$	SU_5

(B) SU_5 ヒッグスの SO_{10} ヒッグスへのアップリフト SU_5 ないし $SU_5 \times U_1$ を等方群として持つことを要請すると,

$$\begin{array}{rcc}
& \text{SU}_5 & \text{SO}_{10} \\
\text{Heavy} & \mathbf{24}_{\text{adj}} \leftarrow & \mathbf{45}_{\text{adj}}, \mathbf{210}, \mathbf{560}, \dots \\
\text{Light} & \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{5}_v + \mathbf{5}_v^* \leftarrow \mathbf{10}_v, \mathbf{16}_s + \mathbf{16}_s^*, \mathbf{120}, \\ \mathbf{126} + \mathbf{126}^*, \mathbf{144}/\mathbf{144}^* \\ \mathbf{15} \leftarrow \mathbf{126}^*, \mathbf{144}, \dots \\ \mathbf{45}^* \leftarrow \mathbf{126}^*, \mathbf{144}, \mathbf{320}, \mathbf{560}, \dots \end{array} \right. &
\end{array}$$

(C) Yukawa 結合 標準モデルの各世代のフェルミ粒子が SO_{10} の $\mathbf{16}_s$ 表現に対応するとすると,

$$(\mathbf{16}_s \times \mathbf{16}_s)_s = \mathbf{126} + \mathbf{10}, \quad (5.2.170a)$$

$$(\mathbf{16}_s \times \mathbf{16}_s)_a = \mathbf{120} \quad (5.2.170b)$$

より, フェルミ粒子に質量を与える軽い Higgs 場は, $\mathbf{126}$ となる.

(D) SO_{10} Higgs (B), (C) より, SO_{10} GUT における自然な Higgs は, 次のようになる.

- 重い Higgs : $\mathbf{45}_{\text{adj}}$

$$\mathbf{45}_{\text{adj}} \rightarrow \mathbf{24}_{\text{adj}(0)} + \mathbf{10}_{(4)} + \mathbf{10}^*_{(-4)} + \mathbf{1}_{(0)}$$

- 軽い Higgs : $\mathbf{126}^*$

$$\begin{aligned}
\mathbf{126}^* \rightarrow & \mathbf{50}_{(2)} + \mathbf{45}^*_{(-2)} + \mathbf{15}_{(-6)} + \mathbf{10}^*_{(6)} \\
& + \mathbf{5}_{(2)} + \mathbf{1}_{(10)}
\end{aligned}$$

これらの Higgs による対称性の自発的破れの流れは次のようになる :

$$\langle (\Phi_{\mathbf{45}})_1 \rangle \neq 0 \Rightarrow \text{SO}_{10} \rightarrow \text{SU}_5 \times \text{U}_1, \quad (5.2.171a)$$

$$\langle (\Phi_{\mathbf{126}})_1 \rangle \neq 0 \Rightarrow \text{SU}_5 \times \text{U}_1 \rightarrow \text{SU}_5, \quad (5.2.171b)$$

$$\langle (\Phi_{\mathbf{45}})_{\mathbf{24}} \rangle \neq 0 \Rightarrow \text{SU}_5 \rightarrow \text{SU}_3 \times \text{SU}_2 \times \text{U}_1, \quad (5.2.171c)$$

$$\langle (\Phi_{\mathbf{126}})_5 \rangle \neq 0 \Rightarrow \text{SU}_3 \times \text{SU}_2 \times \text{U}_1 \rightarrow \text{SU}_3 \times \text{U}_1^{\text{em}} \quad (5.2.171d)$$

ここで, $\mathbf{10}, \mathbf{10}^*, \mathbf{50}$ が期待値を持つと U_1^{em} が得られないので, これらの期待値はゼロとなることが要求される :

$$\langle (\Phi_{\mathbf{45}})_{\mathbf{10}+\mathbf{10}^*} \rangle = \langle (\Phi_{\mathbf{126}})_{\mathbf{10}} \rangle = \langle (\Phi_{\mathbf{126}})_{\mathbf{50}^*} \rangle = 0. \quad (5.2.172)$$

5.2.7.2 フェルミ場の湯川結合と質量項

(A) $16_s \times 16_s$ の既約分解 $\hat{\Phi}^{AB}$ を SO_{10} の $16_s \times 16_s$ 表現に属する bi-spinor, $\hat{\Gamma}_a$ を E^{10} における γ 行列, \hat{C} を荷電共役行列とすると,

$$\Phi^{[k]} = \sum_{A,B} \hat{\Phi}^{AB} \left({}^T P_+ \hat{C} \hat{\Gamma}^{[k]} P_+ \right)^{AB}, \quad P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \hat{\Gamma}_{(10)}) \quad (5.2.173)$$

により定義される $\Phi^{[k]}$ は SO_{10} 変換に対して, k 階反対称テンソルとして変換する. ここで, γ 行列に対する双対公式

$$\hat{\Gamma}_{[10-k]} = (-1)^{k(k+1)} i * \hat{\Gamma}_{[k]} \Gamma_{(10)} \quad (5.2.174)$$

および $\Gamma_{(10)} P_{\pm} = \pm P_{\pm}$ より, 関係式

$$\Phi^{[10-k]} = (-1)^{k(k+1)/2} i * \Phi^{[k]} \quad (5.2.175)$$

が成り立つ. 特に, $\Phi^{[k]} (k < 5)$ は任意であるが, $\Phi^{[5]}$ には次の反 ISD 条件が課される:

$$* \Phi^{[5]} = -i \Phi^{[5]}. \quad (5.2.176)$$

また, 10次元 Euclid 空間では

$$\hat{C} \hat{\Gamma}_a \hat{C}^{-1} = \mathbb{F}_a, \quad \hat{C} \hat{\Gamma}_{(10)} \hat{C}^{-1} = -\hat{\Gamma}_{(10)}, \quad (5.2.177a)$$

$$\hat{C}^* = \mathcal{T} \hat{C} = \hat{C}^{-1} = \hat{C} \quad (5.2.177b)$$

となることを用いると,

$$\mathbb{F}_{(10)} \hat{C} \hat{\Gamma}_{[k]} = (-1)^{k+1} \hat{C} \hat{\Gamma}_{[k]} \hat{\Gamma}_{(10)}, \quad (5.2.178)$$

$$\mathcal{T} \hat{C} \hat{\Gamma}_{[k]} = (-1)^{k(k-1)/2} \hat{C} \Gamma_{[k]} \quad (5.2.179)$$

が成り立つので,

$$\Phi^{[0]} = \Phi^{[2]} = \Phi^{[4]} \equiv 0 \quad (5.2.180)$$

となる. また, Fierz 恒等式

$$\frac{1}{16} \sum_{k=1,3,5} \frac{(-1)^{k(k-1)/2}}{k!} \left(\hat{C} P_- \hat{\Gamma}_{[k]} P_+ \right)_{AB} \left(P_+ \hat{\Gamma}^{[k]} P_- \mathcal{T} C \right)^{CD} = \left({}^T P_+ \right)_A{}^D \left(P_+ \right)^C{}_B \quad (5.2.181)$$

より, $\hat{\Phi}^{AB}$ は $\Phi^{[k]}$ を用いて

$$\Phi^{AB} = \frac{1}{16} \sum_{k=1,3,5} (-1)^{k(k-1)/2} \Phi^{[k]} \left(P_+ \hat{\Gamma}_{[k]} P_- \mathcal{T} C \right)^{AB} \quad (5.2.182)$$

と表される。

以上より， $\hat{C}\hat{\Gamma}^{[k]}$ の転置に対する対称性および $\hat{\Gamma}_{(10)}$ との交換に対するパリティを考慮して， $\mathbf{16}_s \times \mathbf{16}_s$ は，

k	symmetry	chirality	SO_{10} irrep
0	s	—	\times
1	s	+	${}_{10}C_1 = \mathbf{10} [10000]$
2	a	—	\times
3	a	+	${}_{10}C_3 = \mathbf{120} [00100]$
4	s	—	\times
5	s	+	$\frac{1}{2} {}_{10}C_5 = \mathbf{126} [00002]$

と既約分解される。特に，

$$\Phi^{[1]} \Rightarrow \mathbf{10} [10000], \quad \Phi^{[5]} \Rightarrow \mathbf{126} [00002], \quad \Phi^{[3]} \Rightarrow \mathbf{120} [00100] \quad (5.2.183)$$

となる。

以上より， $\mathbf{16}_s$ フェルミ場と湯川結合する Higgs 場は， $\mathbf{126}^*$ 表現に従うので，上記の Φ^{AB} の複素共役として振る舞い，ISD 条件

$$*\Phi^{[5]} = +i\Phi^{[5]} \quad (5.2.184)$$

を満たす 5 形式場 $\Phi^{[5]}$ を用いて表される。湯川結合の具体的表式は

$$\mathcal{L}_{\psi_{16s}\psi_{16s}\Phi_{126}^*} = \frac{h}{16} \Phi^{[5]} (\hat{C}P_-\hat{\Gamma}_{[5]}P_+)^{AB} (\bar{\psi}_A C \psi_B) + \text{hc} \quad (5.2.185)$$

で与えられる。

(B) $\mathbf{126}^*$ 表現の SU_5 に関する既約分解 SO_{10} の $\mathbf{126}^*$ 表現の SU_5 に関する既約分解を， $\Phi^{[5]}$ を用いて具体的に表す。

まず， SO_{10} の Cartan 部分代数の生成元を $H_j = -iA_{j11-j}$ ($j = 1, \dots, 5$) に取り，さらにテンソルの座標系を実 10 次元座標 x^a ($a = 1, \dots, 10$) から，5 次元の複素座標系

$$z^j = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^j + ix^{11-j}), \quad j = 1, \dots, 5 \quad (5.2.186)$$

に変更する。これに伴って， \mathbb{C}^5 上の (p, q) テンソル $\tilde{\Phi}_{[p]}^{[q]}$ を

$$\Phi^{[r]} = \sum_{a_1, \dots, a_r=1}^{10} \frac{1}{r!} \Phi_{[a_1, \dots, a_r]} dx^{[a_1, \dots, a_r]} = \sum_{p+q=r} \frac{1}{p!q!} \tilde{\Phi}_{[p]}^{[q]} dz^{[p]} \wedge d\bar{z}^{[q]} \quad (5.2.187)$$

により定義する．上記の Cartan 部分代数の取り方のもとで，Slansky 型の SU_5 の SO_{10} への埋込は

$$SU_5 \ni U \mapsto \begin{pmatrix} U^* & 0 \\ 0 & J_5 U J_5 \end{pmatrix} \in SO_{10} \subset SU_{10} \quad (5.2.188)$$

となり，複素テンソルの変換は， $dz'^j = U^{*j}_k dz^k$ より

$$\tilde{\Phi}'_{i_1 \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_q} = (U^*)^{k_1}_{i_1} \dots U_{l_1}{}^{j_1} \dots \Phi_{k_1 \dots k_p}{}^{l_1 \dots l_q} \quad (5.2.189)$$

となる．

この複素座標系では， (p, q) 形式の Hodge 双対は

$$*(dz^{[j_1 \dots j_p]} \wedge d\bar{z}^{[k_1 \dots k_q]}) = (-1)^{q+1} i dz^{*[k_1 \dots k_q]} \wedge d\bar{z}^{*[j_1 \dots j_p]} \quad (5.2.190)$$

ここで，

$$*[j_1 \dots j_p] = [j_{p+1} \dots j_5], \quad \text{st.} \quad \epsilon_{j_{p+1} \dots j_5 j_1 \dots j_p} = 1, \quad (5.2.191a)$$

$$**[p] = (-1)^p [p] \quad (5.2.191b)$$

である．テンソル表示では， $*(p, q) = (5 - q, 5 - p)$ で，

$$(*\tilde{\Phi})_{[5-q]}^{[5-p]} = i \sum_{[p],[q]} \frac{(-1)^{q+1}}{p!q!} \epsilon^{[5-p][p]} \epsilon_{[5-q][q]} \tilde{\Phi}_{[p]}^{[q]} \quad (5.2.192)$$

と表される．テンソル表示 $\tilde{\Phi}_{[p][q]}$, $\tilde{\Phi}^{[p][q]}$ を

$$\tilde{\Phi}_{[p][q]} \equiv \frac{1}{(5-q)!} \sum_{[5-q]} \epsilon_{[q][5-q]} \tilde{\Phi}_{[p]}^{[5-q]}, \quad (5.2.193a)$$

$$\tilde{\Phi}^{[p][q]} \equiv \frac{1}{(5-p)!} \sum_{[5-p]} \epsilon^{[p][5-p]} \tilde{\Phi}_{[5-p]}^{[q]} \quad (5.2.193b)$$

により導入すると，Hodge 双対は簡単に

$$(*\tilde{\Phi})_{[p][q]} = i(-1)^p \tilde{\Phi}_{[q][p]}, \quad (5.2.194a)$$

$$(*\tilde{\Phi})^{[p][q]} = i(-1)^{p+1} \tilde{\Phi}^{[q][p]} \quad (5.2.194b)$$

と表される．

特に, $\tilde{\Phi}_{[p]}^{[q]}(p+q=5)$ に対しては, $*\tilde{\Phi}_{[p]}^{[q]} \propto \tilde{\Phi}_{[p]}^{[q]}$ で, $\tilde{\Phi}_{[p]}^{[q]} \mapsto \tilde{\Phi}_{[p][p]}'$, $\tilde{\Phi}_{[q]}'^{[q]}$ となるで, **126** 表現に属する $\Phi^{[5]}$ に対する ISD 条件 (5.2.184) は,

$$(-1)^p \tilde{\Phi}_{([p][p]')} = +\tilde{\Phi}_{([p][p]')} \Leftrightarrow p: \text{even}, \quad (5.2.195a)$$

$$(-1)^p \tilde{\Phi}_{[[p][p]']} = -\tilde{\Phi}_{[[p][p]']} \Leftrightarrow p: \text{odd}, \quad (5.2.195b)$$

$$-(-1)^q \tilde{\Phi}^{([q]}'[q])} = +\tilde{\Phi}^{([q]}'[q])} \Leftrightarrow q: \text{odd}, \quad (5.2.195c)$$

$$-(-1)^q \tilde{\Phi}^{[[q]}'[q]]} = -\tilde{\Phi}^{[[q]}'[q]]} \Leftrightarrow q: \text{even} \quad (5.2.195d)$$

となる.

(i) (5, 0) + (0, 5)

$$\tilde{\Phi}_{[5]}^{[0]} \mapsto \tilde{\Phi}^{[0][0]}, \quad q=0, \quad (5.2.196a)$$

$$\tilde{\Phi}_{[0]}^{[5]} \mapsto \tilde{\Phi}_{[0][0]}, \quad p=0, \quad (5.2.196b)$$

$$(5.2.196c)$$

より, $\tilde{\Phi}_{[0]}^{[5]}$ は ISD 条件を満たし, $\tilde{\Phi}_{[5]}^{[0]}$ は満たさない. したがって,

$$\tilde{\Phi}_{[0]}^{[5]} = \epsilon^{[5]} \tilde{\Phi}_{[0][0]} \mapsto \mathbf{1}_{(+10)} \quad (5.2.197)$$

(ii) (4, 1) + (1, 4)

$$\tilde{\Phi}_{[4]}^{[1]} \mapsto \tilde{\Phi}^{[1]}'[1]}, \quad q=1, \quad (5.2.198a)$$

$$\tilde{\Phi}_{[1]}^{[4]} \mapsto \tilde{\Phi}_{[1][1]}'}, \quad p=1 \quad (5.2.198b)$$

より, ISD 条件を満たすのは,

$$\tilde{\Phi}_{[4]}^{[1]} \Rightarrow \tilde{\Phi}^{([1]}'[1]')} \mapsto (\mathbf{5} \times \mathbf{5})_s = \mathbf{15}_{(-6)}, \quad (5.2.199a)$$

$$\tilde{\Phi}_{[1]}^{[4]} \Rightarrow \tilde{\Phi}_{[[1]}'[1]]} \mapsto (\mathbf{5}^* \times \mathbf{5}^*)_a = \mathbf{10}^*_{(+6)} \quad (5.2.199b)$$

(iii) (3, 2) + (2, 3)

$$\tilde{\Phi}_{[3]}^{[2]} \mapsto \tilde{\Phi}^{[2]}'[2]}, \quad q=2, \quad (5.2.200a)$$

$$\tilde{\Phi}_{[2]}^{[3]} \mapsto \tilde{\Phi}_{[2][2]}'}, \quad p=2 \quad (5.2.200b)$$

これより, (3, 2) 成分の ISD 部分は, 既約で,

$$\tilde{\Phi}_{[3]}^{[2]} \Rightarrow \tilde{\Phi}_{[[2]}'[2]']} \mapsto (\mathbf{10} \times \mathbf{10})_a = \mathbf{45}^* [1010]_{(-2)} \quad (5.2.201)$$

一方, (2, 3) 成分の ISD 部分は, $\tilde{\Phi}_{([2]^{[2]})}$ となるが, このテンソルは可約で, 完全反対称テンソルと曲率テンソルに対する Bianchi I 恒等式と同じ条件を満たす成分の 2 つに既約分解される:

$$\tilde{\Phi}_{[2]^{[3]}} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\Phi}^{[j]} \equiv \frac{1}{4} \epsilon^{jk_1 k_2 k_3 k_4} \tilde{\Phi}_{[k_1 k_2][k_3 k_4]} \mapsto \mathbf{5}_{(+2)} \\ \tilde{\Phi}_{([2]^{[2]})}; \tilde{\Phi}_{([j[k_1][k_2 k_3]])} = 0 \mapsto 10^2 - 5 \times {}_5 C_3 = \mathbf{50} [0020]_{(+2)} \end{cases} \quad (5.2.202)$$

(C) 16_s の SU_5 に関する既約分解

(1) \mathcal{O}_{10} のテンソル積表現 10次元 Euclid 空間の γ 行列 $\hat{\Gamma}^a$ より, $\hat{\gamma}_{\pm}^j (j = 1, \dots, 5)$ を

$$\hat{\gamma}_{\pm}^j \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{\Gamma}_j - i \hat{\Gamma}_{11-j} \right) \quad (5.2.203)$$

を定義すると, 交換関係は

$$[\hat{\gamma}_{\pm}^j, \hat{\gamma}_{\pm}^k]_{\pm} = 0, \quad [\hat{\gamma}_{-}^j, \hat{\gamma}_{+}^k]_{+} = 2\delta_j^k. \quad (5.2.204)$$

これより, $\mathcal{O}_{10} = \langle \hat{\gamma}_{+}^j, \hat{\gamma}_{-}^k \rangle$ の有限次元表現は $2^5 = 32$ 次元となり,

$$N_j \equiv \frac{1}{2} [\hat{\gamma}_{+}^j, \hat{\gamma}_{-}^j]_{-} \quad (5.2.205)$$

とおくと,

$$[N_j, \hat{\gamma}_{\pm}^k]_{-} = \pm 2\delta_j^k \quad (5.2.206)$$

より, 表現空間は基底

$$|a_1 \cdots a_5\rangle (a_1, \dots, a_5 = \pm 1): \quad N_j |a_1 \cdots a_5\rangle = a_j |a_1 \cdots a_5\rangle \quad (5.2.207)$$

で張られる.

さらに,

$$N_1 \cdots N_5 = \prod_{j=1}^5 (-i \hat{\Gamma}_j \hat{\Gamma}_{11-j}) = i \hat{\Gamma}_1 \cdots \hat{\Gamma}_{10} \equiv \hat{\Gamma}_{(10)} \quad (5.2.208)$$

および

$$H_j = -i A_{j11-j} \mapsto -\frac{i}{2} \hat{\Gamma}^{j11-j} = \frac{1}{2} N_j \quad (5.2.209)$$

より, SO_{10} に関する既約分解 $\mathbf{32} = \mathbf{16}_s + \mathbf{16}_s^*$ は,

$$\mathbf{16}_s = \{|a_1 \cdots a_5\rangle \mid a_1 \cdots a_5 = +1\}, \quad \mathbf{16}_s^* = \{|a_1 \cdots a_5\rangle \mid a_1 \cdots a_5 = -1\} \quad (5.2.210)$$

で与えられる.

$SU_5 \times U_1$ に関する既約分解 SU_5 に関する $\mathbf{16}_s$ 表現の既約分解を得るために、互いに複素共役な2つの U_5 の SO_{10} への埋込のうち、次の Slansky 型の埋込 ${}_5(\mathbb{C}) \subset \mathfrak{so}_{10}(\mathbb{C}) \subset_{10}(\mathbb{C})$ を用いる：

$$\begin{aligned} E_{jk} &\mapsto E_{jk-} = \frac{1}{2} \{A_{jk} + A_{11-j, 11-k} + i(A_{11-j, k} + A_{11-k, j})\} \\ &\mapsto \frac{1}{4} [\hat{\gamma}_-^j, \hat{\gamma}_+^k]_- \quad (j, k = 1, \dots, 5), \end{aligned} \quad (5.2.211a)$$

$$H_j \mapsto E_{jj} - E_{55} = -\frac{1}{2} (N_j - N_5) \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (5.2.211b)$$

このとき、

$$v_0^+ = | +1 + 1 + 1 + 1 + 1 \rangle, \quad (5.2.212a)$$

$$v_0^- = | -1 - 1 - 1 - 1 - 1 \rangle, \quad (5.2.212b)$$

$$v_{jk} = \frac{1}{2} \hat{\gamma}_{jk} v_0^+ = \frac{1}{2} \hat{\gamma}_-^j \hat{\gamma}_-^k v_0^+, \quad (5.2.212c)$$

$$v^{\bar{j}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\gamma}^j v_0^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\gamma}_+^j v_0^- \quad (5.2.212d)$$

を用いて、 $\mathbf{16}_s$ 表現のスピンール場 $\psi_{\mathbf{16}_s}$ は、 SU_5 に関して次のように既約分解される：

$$\mathbf{16}_s = \mathbf{1}_{(-5)} + \mathbf{10}_{(-1)} + \mathbf{5}^*(+3), \quad (5.2.213)$$

$$\psi_{\mathbf{16}_s} = \psi_{\mathbf{1}} v_0^+ + \sum_{j,k=1}^5 \psi_{\mathbf{10}}^{[jk]} v_{jk} + \sum_{j=1}^5 \psi_{\mathbf{5}^* \bar{j}} v^{\bar{j}} \quad (5.2.214)$$

ここで、 $\psi_{\mathbf{1}}$ 、 $\psi_{\mathbf{10}}^{jk}$ 、 $\psi_{\mathbf{5}^* \bar{j}}$ は、 $SU_5 \times U_1$ に関して、それぞれ $\mathbf{1}_{(-5)}$ 、 $\mathbf{10}_{(-1)}$ 、 $\mathbf{5}^*(+3)$ に従ってテンソルとして変換するスピノールとなる。

(D) $\mathbf{126}^*$ Higgs と $\mathbf{16}_s$ スピノールの湯川結合の SU_5 分解 $\mathbf{126}^*$ Higgs $\Phi^{[5]}$ の既約分解

$$\tilde{\Phi}_{[0]}^{[5]} = \phi_{\mathbf{1}} \epsilon^{[5]} \mapsto \mathbf{1}_{(+10)}, \quad (5.2.215a)$$

$$\tilde{\Phi}_{[4]}^{[k]} = \epsilon_{[4]j} \phi_{\mathbf{15}}^{(jk)} \mapsto \mathbf{15}_{(-6)}, \quad (5.2.215b)$$

$$\tilde{\Phi}_{[j]}^{[4]} = \epsilon^{[4]k} \phi_{\mathbf{10}^*}^{[jk]} \mapsto \mathbf{10}^*_{(+6)}, \quad (5.2.215c)$$

$$\tilde{\Phi}_{[3]}^{[lm]} = \epsilon_{[3][jk]} \phi_{\mathbf{45}^*}^{[[jk][lm]]} \mapsto \mathbf{45}^*_{(-2)}, \quad (5.2.215d)$$

$$\tilde{\Phi}_{[2]}^{j[2]} = \delta_{[2]}^j \phi_{\mathbf{5}}^j \mapsto \mathbf{5}_{(+2)}, \quad (5.2.215e)$$

$$\tilde{\Phi}_{[jk]}^{[3]} = \epsilon^{[3][lm]} \phi_{\mathbf{50}}^{([jk][lm])} \mapsto \mathbf{50}_{(+2)}. \quad (5.2.215f)$$

を Lagrange 密度

$$\mathcal{L}_Y = \frac{h}{16} \frac{1}{5!} \Phi^{[5]} \left(\hat{C} P_- \hat{\Gamma}_{[5]} P_+ \right)^{AB} \left({}^T \Psi A C \Psi_B \right) + \text{hc} \quad (5.2.216)$$

に代入すると,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & -\frac{\sqrt{2}}{4} h \phi_{\mathbf{1}} \left({}^T \psi_{\mathbf{1}} C \psi_{\mathbf{1}} \right) \\ & -\frac{\sqrt{2}}{4} h \phi_{\mathbf{15}}^{(jk)} \left({}^T \psi_{\mathbf{5}^* \bar{j}} \psi_{\mathbf{5}^* \bar{k}} \right) \\ & +\frac{\sqrt{2}}{2} h \phi_{\mathbf{10}^* [jk]} \left({}^T \psi_{\mathbf{1}} C \psi_{\mathbf{10}}^{jk} \right) \\ & +\sqrt{2} h \phi_{\mathbf{45}^* [[jk][lm]]} \epsilon_{jkpl} \left({}^T \psi_{\mathbf{10}}^{pq} C \psi_{\mathbf{5}^* \bar{m}} \right) \\ & +h \phi_{\mathbf{5}}^j \left\{ \frac{5}{4} \left({}^T \psi_{\mathbf{1}} C \psi_{\mathbf{5}^* \bar{j}} \right) + \frac{\sqrt{2}}{32} \epsilon_{jpqrs} \left({}^T \psi_{\mathbf{10}}^{rs} C \psi_{\mathbf{10}}^{pq} \right) \right\} \\ & +\sqrt{2} h \phi_{\mathbf{50}([jk][lm])} \left({}^T \psi_{\mathbf{10}}^{jk} C \psi_{\mathbf{10}}^{lm} \right) \\ & +\text{hc}. \end{aligned} \quad (5.2.217)$$

5.2.8 E_6 GUT

No.	SB chain	U_1^Y container	SM
$E_6 \Rightarrow SO_{10} \times U_1$			
(1)	$SO_{10} \Rightarrow SU_5 \times U_1, SU_5 \Rightarrow SU_3^c \times SU_2^w \times U_1$	U_1^3	3 \odot
(2)	$SO_{10} \Rightarrow SU_4 \times SU_2^w \times SU_2, SU_4 \Rightarrow SU_3^c \times U_1$	$U_1^2 \times SU_2$	\times
(3)	$SO_{10} \Rightarrow SO_9, SO_9 \Rightarrow SU_4 \times SU_2^w, SU_4 \Rightarrow SU_3^c \times U_1$	U_1^2	\times
(4)	$SO_{10} \Rightarrow SO_7 \times SU_2^w, SO_7 \Rightarrow SU_4, SU_4 \Rightarrow SU_3^c \times U_1$	U_1^2	\times
(5)	$SO_{10} \Rightarrow SO_7 \times SU_2^w, SO_7 \Rightarrow G_2, G_2 \Rightarrow SU_3^c$	U_1	\times
$E_6 \Rightarrow SU_6 \times SU_2$			
(6)	$SU_6 \Rightarrow SU_5 \times U_1, SU_5 \Rightarrow SU_3^c \times SU_2^w \times U_1$	$U_1^2 \times SU_2$	3 \circ
(7)	$SU_6 \Rightarrow SU_4 \times SU_2^w \times U_1, SU_4 \Rightarrow SU_3^c \times U_1$	$U_1^2 \times SU_2$	3 \circ
(8)	$SU_6 \Rightarrow SU_3^c \times SU_3 \times U_1, SU_3 \Rightarrow SU_2^w \times U_1$	$U_1^2 \times SU_2$	3
(9)	$SU_6 \Rightarrow SU_3^c \times SU_2,$	SU_2	\times
$E_6 \Rightarrow SU_6 \times SU_2^w$			
(10)	$SU_6 \Rightarrow SU_5 \times U_1, SU_5 \Rightarrow SU_4 \times U_1, SU_4 \Rightarrow SU_3^c \times U_1$	U_1^3	3
(11)	$SU_6 \Rightarrow SU_5 \times U_1, SU_5 \Rightarrow SU_3^c \times SU_2 \times U_1$	$U_1^2 \times SU_2$	3
(7')	$SU_6 \Rightarrow SU_4 \times SU_2 \times U_1, SU_4 \Rightarrow SU_3^c \times U_1$	$U_1^2 \times SU_2$	3 \circ
(14)	$SU_6 \Rightarrow SU_4, SU_4 \Rightarrow SU_3^c \times U_1$	U_1	\times
(12)	$SU_6 \Rightarrow SU_3^c \times SU_3 \times U_1$	$U_1 \times SU_3$	3
(9')	$SU_6 \Rightarrow SU_3^c \times SU_2,$	SU_2	\times
$E_6 \Rightarrow SU_3^c \times SU_3 \times SU_3$			
(15)	$SU_3 \Rightarrow SU_2^w \times U_1$	$U_1 \times SU_3$	3
$E_6 \Rightarrow F_4$			
(17)	$F_4 \Rightarrow SO_9, SO_9 \Rightarrow SU_4 \times SU_2^w, SU_4 \Rightarrow SU_3^c \times U_1$	U_1	\times
(18)	$F_4 \Rightarrow SU_3^c \times SU_3, SU_3 \Rightarrow SU_2^w \times U_1$	U_1	\times
(19)	$F_4 \Rightarrow Sp_3^c \times SU_2^w, Sp_3 \Rightarrow SU_3^c \times U_1$	U_1	\times

$E_6 \Rightarrow SU_3^c \times SU_2^w \times U_1^Y$ のSBパターン. E_6 の27次元表現がSMのクォークとレプトンの正しい量子数を与えるものに限る.

5.2.8.1 Symmetry Breaking Pattern (1)

SB パターン

$$\begin{aligned}
 E_6 &\Rightarrow \text{SO}_{10} \times \text{U}_1^{(3)} \Rightarrow \text{SU}_5 \times \text{U}_1^{(2)} \times \text{U}_1^{(3)} \\
 &\Rightarrow \text{SU}_3^c \times \text{SU}_2^w \times \text{U}_1^{(1)} \times \text{U}_1^{(2)} \times \text{U}_1^{(3)} \quad (5.2.218)
 \end{aligned}$$

において, SM 粒子の値と整合的なハイパー電荷 Y の埋め込みは次の 3 種類:

1. **Georgi-Glashow SU₅-GUT:** $Y = Q^{(1)}$.
2. **Flipped SU₅ SO₁₀-GUT:** $Y = -\frac{1}{5}Q^{(1)} - \frac{2}{5}Q^{(2)}$.
3. **E_6 -GUT:** $Y = -\frac{1}{5}Q^{(1)} + \frac{1}{10}Q^{(2)} + \frac{1}{2}Q^{(3)}$.

(1) **Georgi-Glashow SU₅ GUT** SM 粒子の $27|E_6$ への埋め込みは,

$\text{SO}_{10} \times \text{U}_1$	$\text{SU}_5 \times \text{U}_1$	$\text{SU}_3^c \times \text{SU}_2^w \times \text{U}_1$	\odot	\circ					\circ	\circ	
$16_s(+1)$	$10(-1)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})(+1/3)$	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	
		$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(-4/3)$	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(+2)$	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	
		$5^*(+3)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(+2/3)$	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c				
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(-1)$	l_L	l_L			l_L	l_L			
	$1(-5)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(0)$	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c		
$10(-2)$	$5(2)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})(-2/3)$									
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(+1)$									
		$5^*(-2)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(+2/3)$					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(-1)$			l_L	l_L			l_L	l_L	
$1(+4)$	$1(0)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(0)$		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	

(2) Flipped-SU₅ SO₁₀ GUT SM 粒子の $27|E_6$ への埋め込みは,

SO ₁₀ × U ₁	SU ₅ × U ₁	SU ₃ ^c × SU ₂ ^w × U ₁	⊙								
16_s (+1)	10 (-1)	(3, 2)(+1/3)	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L
		(3* , 1)(-4/3)	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c					
		(1, 1)(+2)	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c		
	5* (+3)	(3* , 1)(+2/3)	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c
		(1, 2)(-1)	l_L	l_L			l_L	l_L			
10 (-2)	5 (2)	(3, 1)(-2/3)									
		(1, 2)(+1)			l_L	l_L			l_L	l_L	
	5* (-2)	(3* , 1)(+2/3)					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c	
		(1, 2)(-1)									
1 (+4)	1 (0)	(1, 1)(0)		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	

(3) E₆ GUT SM 粒子の $27|E_6$ への埋め込みは,

SO ₁₀ × U ₁	SU ₅ × U ₁	SU ₃ ^c × SU ₂ ^w × U ₁							○	
16_s (+1)	10 (-1)	(3, 2)(+1/3)	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L
		(3* , 1)(-4/3)					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c
		(1, 1)(+2)	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	
	5* (+3)	(3* , 1)(+2/3)	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c				
		(1, 2)(-1)								
10 (-2)	5 (2)	(3, 1)(-2/3)								
		(1, 2)(+1)	l_L	l_L			l_L	l_L		
	5* (-2)	(3* , 1)(+2/3)	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c
		(1, 2)(-1)			l_L	l_L			l_L	l_L
1 (+4)	1 (0)	(1, 1)(0)	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	

5.2.8.2 Symmetry Breaking Pattern (15)

SB パターン

$$\begin{aligned}
 E_6 &\Rightarrow \text{SU}_3^c \times \text{SU}_3 \times \text{SU}_3 \Rightarrow \text{SU}_3^c \times \text{SU}_2^w \times \text{U}_1^{(1)} \times \text{SU}_3 \\
 &\Rightarrow \text{SU}_3^c \times \text{SU}_2^w \times \text{U}_1^{(1)} \times \text{U}_1^{(2)} \times \text{U}_1^{(3)}. \quad (5.2.219)
 \end{aligned}$$

において, SM 粒子の値と整合的なハイパー電荷 Y の埋め込みは次の 3 種類:

1. $Y = Y_1 \equiv \frac{1}{3}Q^{(1)} - \frac{2}{3}Q^{(2)} - \frac{2}{3}Q^{(3)}.$
2. $Y = Y_2 \equiv \frac{1}{3}Q^{(1)} - \frac{2}{3}Q^{(2)} + \frac{4}{3}Q^{(3)}.$
3. $Y = Y_3 \equiv \frac{1}{3}Q^{(1)} + \frac{4}{3}Q^{(2)} - \frac{2}{3}Q^{(3)}.$

(1) Y_1 での SM 粒子の $\mathbf{27}|E_6$ への埋め込みは,

SU_3^3	$\text{SU}_3^c \times \text{SU}_2^w \times \text{U}_1 \times \text{SU}_3$	$\text{SU}_3^c \times \text{SU}_2^w \times \text{U}_1^2$									
$(\mathbf{3}, \mathbf{3}^*, \mathbf{1})$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{1})(+1)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})(0, 0)$	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L
	$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1})(-2)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})(0, 0)$									
$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1}, \mathbf{3}^*)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1}, \mathbf{3}^*)(0)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(1, 1)$	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c
		$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(0, -1)$	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c					
		$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(-1, 0)$					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c
$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{3})$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})(-1)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(1, 0)$	l_L	l_L			l_L	l_L			
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(0, 1)$			l_L	l_L			l_L	l_L	
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(-1, -1)$									
	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3})(+2)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(1, 0)$	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(0, 1)$		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	N_R^c
	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(-1, -1)$	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	

(2) Y_2 での SM 粒子の $27|E_6$ への埋め込みは,

SU_3^3	$SU_3^c \times SU_2^w$ $\times U_1 \times SU_3$	$SU_3^c \times SU_2^w \times U_1^2$									
$(\mathbf{3}, \mathbf{3}^*, \mathbf{1})$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{1})(+1)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})(0, 0)$	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L
	$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1})(-2)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})(0, 0)$									
$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1}, \mathbf{3}^*)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1}, \mathbf{3}^*)(0)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(1, 1)$	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c					
		$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(0, -1)$	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c
		$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(-1, 0)$					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c
$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{3})$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})(-1)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(1, 0)$	l_L	l_L			l_L	l_L			
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(0, 1)$									
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(-1, -1)$			l_L	l_L			l_L	l_L	
	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3})(+2)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(1, 0)$	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c		
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(0, 1)$	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(-1, -1)$		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	N_R^c

(3) Y_3 での SM 粒子の $27|E_6$ への埋め込みは,

SU_3^3	$SU_3^c \times SU_2^w$ $\times U_1 \times SU_3$	$SU_3^c \times SU_2^w \times U_1^2$									
$(\mathbf{3}, \mathbf{3}^*, \mathbf{1})$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{1})(+1)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})(0, 0)$	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L
	$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1})(-2)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})(0, 0)$									
$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1}, \mathbf{3}^*)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1}, \mathbf{3}^*)(0)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(1, 1)$	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c					
		$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(0, -1)$					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c
		$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(-1, 0)$	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c
$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{3})$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})(-1)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(1, 0)$									
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(0, 1)$	l_L	l_L			l_L	l_L			
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(-1, -1)$			l_L	l_L			l_L	l_L	
	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3})(+2)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(1, 0)$	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(0, 1)$	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(-1, -1)$		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	N_R^c

5.2.8.3 Symmetry Breaking Pattern (6)

SB パターン

$$\begin{aligned}
 E_6 &\Rightarrow \text{SU}_6^{c,w} \times \text{SU}_2 \Rightarrow \text{SU}_5^{c,w} \times \text{U}_1^{(2)} \times \text{U}_1^{(3)} \\
 &\Rightarrow \text{SU}_3^c \times \text{SU}_2^w \times \text{U}_1^{(1)} \times \text{U}_1^{(2)} \times \text{U}_1^{(3)} \quad (5.2.220)
 \end{aligned}$$

において, SM 粒子の値と整合的なハイパー電荷 Y の埋め込みは次の 3 種類:

1. $Y = Y_1 \equiv Q^{(1)}$.
2. $Y = Y_2 \equiv -\frac{1}{5}Q^{(1)} - \frac{1}{5}Q^{(2)} + Q^{(3)}$.
3. $Y = Y_3 \equiv -\frac{1}{5}Q^{(1)} - \frac{1}{5}Q^{(2)} - Q^{(3)}$.

(1) Y_1 での SM 粒子の $\mathbf{27}|E_6$ への埋め込みは,

$\text{SU}_6^{c,w} \times \text{SU}_2$	$\text{SU}_5^{c,w} \times \text{U}_1^2$	$\text{SU}_3^c \times \text{SU}_2^w \times \text{U}_1$	○	○					○	○
$(\mathbf{15}, \mathbf{1})$	$\mathbf{10}(-2, 0)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})(+1/3)$	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L
		$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(-4/3)$	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(+2)$	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c
	$\mathbf{5}(+4, 0)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})(-2/3)$								
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(+1)$								
$(\mathbf{6}^*, \mathbf{2})$	$\mathbf{5}^*(+1, +1)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(+2/3)$	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c				
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(-1)$	l_L	l_L			l_L	l_L		
	$\mathbf{5}^*(+1, -1)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(+2/3)$					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(-1)$			l_L	l_L			l_L	l_L
	$\mathbf{1}(-5, +1)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(0)$	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	
	$\mathbf{1}(-5, -1)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(0)$		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c

(2) Y_2 での SM 粒子の $27|E_6$ への埋め込みは,

$SU_6^{c,w} \times SU_2$	$SU_5^{c,w} \times U_1^2$	$SU_3^c \times SU_2^w \times U_1$								○	
(15, 1)	$10(-2, 0)$	$(3, 2)(+1/3)$	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L
		$(3^*, 1)(-4/3)$					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c	
		$(1, 1)(+2)$	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c		
		$5(+4, 0)$	$(3, 1)(-2/3)$								
(6*, 2)	$5^*(+1, +1)$	$(3^*, 1)(+2/3)$	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c					
		$(1, 2)(-1)$									
	$5^*(+1, -1)$	$(3^*, 1)(+2/3)$	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c
		$(1, 2)(-1)$			l_L	l_L			l_L	l_L	
	$1(-5, +1)$	$(1, 1)(0)$	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c
	$1(-5, -1)$	$(1, 1)(0)$		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	

(3) Y_3 での SM 粒子の $27|E_6$ への埋め込みは,

$SU_6^{c,w} \times SU_2$	$SU_5^{c,w} \times U_1^2$	$SU_3^c \times SU_2^w \times U_1$								○	
(15, 1)	$10(-2, 0)$	$(3, 2)(+1/3)$	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L
		$(3^*, 1)(-4/3)$					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c	
		$(1, 1)(+2)$	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c		
		$5(+4, 0)$	$(3, 1)(-2/3)$								
(6*, 2)	$5^*(+1, +1)$	$(3^*, 1)(+2/3)$	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c
		$(1, 2)(-1)$			l_L	l_L			l_L	l_L	
	$5^*(+1, -1)$	$(3^*, 1)(+2/3)$	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c					
		$(1, 2)(-1)$									
	$1(-5, +1)$	$(1, 1)(0)$		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	
	$1(-5, -1)$	$(1, 1)(0)$	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c

5.2.8.4 Symmetry Breaking Pattern (7)

SB パターン

$$\begin{aligned}
 E_6 &\Rightarrow SU_6^{c,w} \times SU_2 \Rightarrow SU_4^c \times SU_2^w \times U_1^{(2)} \times U_1^{(3)} \\
 &\Rightarrow SU_3^c \times U_1^{(1)} \times SU_2^w \times U_1^{(2)} \times U_1^{(3)} \quad (5.2.221)
 \end{aligned}$$

において, SM 粒子の値と整合的なハイパー電荷 Y の埋め込みは次の 3 種類:

1. $Y = Y_1 \equiv \frac{1}{2}Q^{(1)} - \frac{1}{2}Q^{(2)}$.
2. $Y = Y_2 \equiv -Q^{(1)} + Q^{(3)}$.
3. $Y = Y_3 \equiv -Q^{(1)} - Q^{(3)}$.

(1) Y_1 での SM 粒子の $\mathbf{27}|E_6$ への埋め込みは,

$SU_6 \times SU_2$	$SU_4^c \times SU_2^w \times U_1^2$	$SU_3^c \times SU_2^w \times U_1$									
$(\mathbf{15}, \mathbf{1})$	$(\mathbf{4}, \mathbf{2})(-1, 0)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})(-1/3)$	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(+1)$									
	$(\mathbf{6}, \mathbf{1})(+2, 0)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})(2/3)$									
		$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(-2/3)$	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c
	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(-4, 0)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(0)$	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c
$(\mathbf{6}^*, \mathbf{2})$	$(\mathbf{4}^*, \mathbf{1})(-1, +1)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(+1/3)$	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c					
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(-1)$	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c
	$(\mathbf{4}^*, \mathbf{1})(-1, -1)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(+1/3)$					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(-1)$		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	N_R^c
	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(+2, +1)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(0)$	l_L	l_L			l_L	l_L			
	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(+2, -1)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(0)$			l_L	l_L				l_L	l_L

(2) Y_2 での SM 粒子の $27|E_6$ への埋め込みは,

$SU_6 \times SU_2$	$SU_4^c \times SU_2^w \times U_1^2$	$SU_3^c \times SU_2^w \times U_1$	○								
(15, 1)	(4, 2)(-1, 0)	(3, 2)(-1/3)	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L
		(1, 2)(+1)	l_L	l_L			l_L	l_L			
	(6, 1)(+2, 0)	(3, 1)(2/3)									
(6*, 2)	(4*, 1)(-1, +1)	(3*, 1)(-2/3)					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c	
		(1, 1)(-4, 0)	(1, 1)(0)	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	
	(4*, 1)(-1, -1)	(3*, 1)(+1/3)	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c					
		(1, 1)(-1)	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c
	(1, 2)(+2, +1)	(3*, 1)(+1/3)	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c
		(1, 1)(-1)		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	
	(1, 2)(+2, -1)	(1, 2)(0)			l_L	l_L				l_L	l_L

(3) Y_3 での SM 粒子の $27|E_6$ への埋め込みは,

$SU_6 \times SU_2$	$SU_4^c \times SU_2^w \times U_1^2$	$SU_3^c \times SU_2^w \times U_1$		○							
(15, 1)	(4, 2)(-1, 0)	(3, 2)(-1/3)	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L
		(1, 2)(+1)	l_L	l_L			l_L	l_L			
	(6, 1)(+2, 0)	(3, 1)(2/3)									
(6*, 2)	(4*, 1)(-1, +1)	(3*, 1)(-2/3)					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c	
		(1, 1)(-4, 0)	(1, 1)(0)	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	
	(4*, 1)(-1, -1)	(3*, 1)(+1/3)	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c
		(1, 1)(-1)		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	
	(1, 2)(+2, +1)	(3*, 1)(+1/3)	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c					
		(1, 1)(-1)	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c
	(1, 2)(+2, -1)	(1, 2)(0)			l_L	l_L				l_L	l_L

5.2.8.5 Symmetry Breaking Pattern (8)

SB パターン

$$\begin{aligned}
E_6 &\Rightarrow \text{SU}_6^{c,w} \times \text{SU}_2 \Rightarrow \text{SU}_3^c \times \text{SU}_3^w \times \text{U}_1^{(2)} \times \text{U}_1^{(3)} \\
&\Rightarrow \text{SU}_3^c \times \text{SU}_2^w \times \text{U}_1^{(1)} \times \text{U}_1^{(2)} \times \text{U}_1^{(3)} \quad (5.2.222)
\end{aligned}$$

において, SM 粒子の値と整合的なハイパー電荷 Y の埋め込みは次の 3 種類:

1. $Y = Y_1 \equiv -\frac{1}{3}Q^{(1)} - \frac{2}{3}Q^{(2)}$.
2. $Y = Y_2 \equiv -\frac{1}{3}Q^{(1)} + \frac{1}{3}Q^{(2)} + Q^{(3)}$.
3. $Y = Y_3 \equiv -\frac{1}{3}Q^{(1)} + \frac{1}{3}Q^{(2)} - Q^{(3)}$.

(1) Y_1 での SM 粒子の $\mathbf{27}|E_6$ への埋め込みは,

$\text{SU}_6 \times \text{SU}_2$	$\text{SU}_3^c \times \text{SU}_3^w \times \text{U}_1^2$	$\text{SU}_3^c \times \text{SU}_2^w \times \text{U}_1$									
$(\mathbf{15}, \mathbf{1})$	$(\mathbf{3}, \mathbf{3})(0, 0)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})(-1)$	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L
		$(\mathbf{3}, \mathbf{1})(+2)$									
	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(+2, 0)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(0)$	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c
	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}^*)(-2, 0)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(+1)$									
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(-2)$	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c
$(\mathbf{6}^*, \mathbf{2})$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(-1, +1)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(0)$	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c					
	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(-1, -1)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(0)$					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c	
	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}^*)(+1, +1)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(+1)$	l_L	l_L			l_L	l_L			
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(-2)$	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c		
	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}^*)(+1, -1)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(+1)$			l_L	l_L				l_L	l_L
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(-2)$		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	N_R^c

(2) Y_2 での SM 粒子の $27|E_6$ への埋め込みは,

$SU_6 \times SU_2$	$SU_3^c \times SU_3^w \times U_1^2$	$SU_3^c \times SU_2^w \times U_1$										
$(15, 1)$	$(3, 3)(0, 0)$	$(3, 2)(-1)$	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	
		$(3, 1)(+2)$										
	$(1, 3^*)(-2, 0)$	$(3^*, 1)(+2, 0)$	$(3^*, 1)(0)$	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c					
		$(1, 2)(+1)$	$(1, 1)(-2)$			l_L	l_L			l_L	l_L	
$(6^*, 2)$	$(3^*, 1)(-1, +1)$	$(3^*, 1)(0)$						d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c	
		$(3^*, 1)(-1, -1)$	$(3^*, 1)(0)$	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	
	$(1, 3^*)(+1, +1)$	$(1, 2)(+1)$	$(1, 1)(-2)$									
		$(1, 1)(-2)$	$(1, 2)(+1)$	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c
	$(1, 3^*)(+1, -1)$	$(1, 2)(+1)$	$(1, 1)(-2)$	l_L	l_L			l_L	l_L			
		$(1, 1)(-2)$		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c

(3) Y_3 での SM 粒子の $27|E_6$ への埋め込みは,

$SU_6 \times SU_2$	$SU_3^c \times SU_3^w \times U_1^2$	$SU_3^c \times SU_2^w \times U_1$										
$(15, 1)$	$(3, 3)(0, 0)$	$(3, 2)(-1)$	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	
		$(3, 1)(+2)$										
	$(1, 3^*)(-2, 0)$	$(3^*, 1)(+2, 0)$	$(3^*, 1)(0)$	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c					
		$(1, 2)(+1)$	$(1, 1)(-2)$			l_L	l_L			l_L	l_L	
$(6^*, 2)$	$(3^*, 1)(-1, +1)$	$(3^*, 1)(0)$	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	
		$(3^*, 1)(-1, -1)$	$(3^*, 1)(0)$					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c	
	$(1, 3^*)(+1, +1)$	$(1, 2)(+1)$	$(1, 1)(-2)$	l_L	l_L			l_L	l_L			
		$(1, 1)(-2)$	$(1, 2)(+1)$	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c		
	$(1, 3^*)(+1, -1)$	$(1, 2)(+1)$	$(1, 1)(-2)$									
		$(1, 1)(-2)$		e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c

5.2.8.6 Symmetry Breaking Pattern (10)

SB パターンは,

$$\begin{aligned} E_6 &\Rightarrow \text{SU}_6^c \times \text{SU}_2^w \Rightarrow \text{SU}_5^c \times \text{U}_1^{(3)} \times \text{SU}_2^w \Rightarrow \text{SU}_4^c \times \text{U}_1^{(2)} \times \text{U}_1^{(3)} \times \text{SU}_2^w \\ &\Rightarrow \text{SU}_3^c \times \text{U}_1^{(1)} \times \text{U}_1^{(2)} \times \text{U}_1^{(3)} \times \text{SU}_2^w \end{aligned} \quad (5.2.223)$$

ここで, $E_6 \Rightarrow \text{SU}_6 \times \text{SU}_2$ の射影には P_{16^*} を用いる. SM 粒子の値と整合的なハイパー電荷 Y の埋め込みは次の 3 種類:

1. $Y = Y_1 \equiv \frac{1}{2}Q^{(1)} + \frac{3}{10}Q^{(2)} - \frac{1}{5}Q^{(3)}$.
2. $Y = Y_2 \equiv -Q^{(1)} + \frac{1}{5}Q^{(2)} + \frac{1}{5}Q^{(3)}$.
3. $Y = Y_3 \equiv -Q^{(1)} - \frac{1}{5}Q^{(2)} - \frac{1}{5}Q^{(3)}$.

(1) Y_1 での SM 粒子の $27|E_6$ への埋め込みは,

$\text{SU}_6 \times \text{SU}_2^w$	$\text{SU}_5^c \times \text{U}_1 \times \text{SU}_2^w$	$\text{SU}_3^c \times \text{SU}_2^w \times \text{U}_1^2$									
$(\mathbf{6}, \mathbf{2})$	$(\mathbf{5}, \mathbf{2})(-1)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})(-1/3, +1)$	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(+1, -4)$									
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(0, -4)$			l_L	l_L				l_L	l_L
	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(+5)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(0, 0)$	l_L	l_L			l_L	l_L			
$(\mathbf{15}^*, \mathbf{1})$	$(\mathbf{10}^*, \mathbf{1})(+2)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(-2/3, -2)$	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c
		$(\mathbf{3}, \mathbf{1})(+2/3, +3)$									
		$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(+1/3, +3)$	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c					
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(-1, +3)$	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c		
	$(\mathbf{5}^*, \mathbf{1})(-4)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(+1/3, -1)$					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(-1, -1)$		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	N_R^c
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(0, +4)$	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c

(2) Y_2 での SM 粒子の $27|E_6$ への埋め込みは,

$SU_6 \times SU_2^w$	$SU_5^c \times U_1 \times SU_2^w$	$SU_3^c \times SU_2^w \times U_1^2$									
(6, 2)	(5, 2)(-1)	(3, 2)(-1/3, +1)	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L
		(1, 2)(+1, +1)	l_L	l_L			l_L	l_L			
		(1, 2)(0, -4)			l_L	l_L				l_L	l_L
	(1, 2)(+5)	(1, 2)(0, 0)									
(15*, 1)	(10*, 1)(+2)	(3*, 1)(-2/3, -2)					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c
		(3, 1)(+2/3, +3)									
		(3*, 1)(+1/3, +3)	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c					
		(1, 1)(-1, +3)	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c
	(5*, 1)(-4)	(3*, 1)(+1/3, -1)	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c
		(1, 1)(-1, -1)		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	
		(1, 1)(0, +4)	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c

(3) Y_3 での SM 粒子の $27|E_6$ への埋め込みは,

$SU_6 \times SU_2^w$	$SU_5^c \times U_1 \times SU_2^w$	$SU_3^c \times SU_2^w \times U_1^2$									
(6, 2)	(5, 2)(-1)	(3, 2)(-1/3, +1)	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L
		(1, 2)(+1, +1)	l_L	l_L			l_L	l_L			
		(1, 2)(0, -4)									
	(1, 2)(+5)	(1, 2)(0, 0)			l_L	l_L				l_L	l_L
(15*, 1)	(10*, 1)(+2)	(3*, 1)(-2/3, -2)					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c
		(3, 1)(+2/3, +3)									
		(3*, 1)(+1/3, +3)	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c
		(1, 1)(-1, +3)		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	
	(5*, 1)(-4)	(3*, 1)(+1/3, -1)	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c					
		(1, 1)(-1, -1)	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c
		(1, 1)(0, +4)	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c

5.2.8.7 Symmetry Breaking Pattern (11)

SB パターンは,

$$\begin{aligned}
 E_6 &\Rightarrow \text{SU}_6^c \times \text{SU}_2^w \Rightarrow \text{SU}_5^c \times \text{U}_1^{(3)} \times \text{SU}_2^w \\
 &\Rightarrow \text{SU}_3^c \times \text{SU}_2 \times \text{U}_1^{(2)} \times \text{U}_1^{(3)} \times \text{SU}_2^w \\
 &\Rightarrow \text{SU}_3^c \times \text{U}_1^{(1)} \times \text{U}_1^{(2)} \times \text{U}_1^{(3)} \times \text{SU}_2^w \quad (5.2.224)
 \end{aligned}$$

ここで, $E_6 \Rightarrow \text{SU}_6 \times \text{SU}_2$ の射影には P_{16^*} を用いる. SM 粒子の値と整合的なハイパー電荷 Y の埋め込みは次の3種類:

1. $Y = Y_1 \equiv Q^{(1)} - \frac{1}{5}Q^{(2)} - \frac{1}{5}Q^{(3)}$.
2. $Y = Y_2 \equiv -\frac{4}{5}Q^{(2)} + \frac{1}{5}Q^{(3)}$.
3. $Y = Y_3 \equiv -Q^{(1)} - \frac{1}{5}Q^{(2)} - \frac{1}{5}Q^{(3)}$.

ここで, SBP (11) での U_1 電荷 $Q_{11}^{(i)}$ と SBP(10) に対する U_1 電荷 $Q_{10}^{(i)}$ の間には

$$\begin{pmatrix} Q_{11}^{(1)} \\ Q_{11}^{(2)} \\ Q_{11}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 5/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{10}^{(1)} \\ Q_{10}^{(2)} \\ Q_{10}^{(3)} \end{pmatrix} \quad (5.2.225)$$

の関係があることを用いると, SBP(10) でのハイパー電荷 Y_1, Y_2, Y_3 と SBP(11) での Y_1, Y_2, Y_3 の E_6 への埋め込みはこの順で一致することが確かめられる. 具体的な成分は, Cartan 部分代数に対する双対 Dynkin 基底での成分表示で

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5/3 & 7/3 & 7/3 & 1 & 2 \\ -1 & -7/3 & -11/3 & -5/3 & -1 & -2 \\ -1 & -1/3 & 1/3 & 1/3 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2.226)$$

(1) Y_1 での SM 粒子の $27|E_6$ への埋め込みは,

$SU_6 \times SU_2^w$	$SU_5^c \times U_1 \times SU_2^w$	$SU_3^c \times SU_2^w \times U_1^2$									
$(\mathbf{6}, \mathbf{2})$	$(\mathbf{5}, \mathbf{2})(-1)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})(0, -2/3)$	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(-1, +1)$			l_L	l_L			l_L	l_L	
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(+1, +1)$	l_L	l_L			l_L	l_L			
	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(+5)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(0, 0)$									
$(\mathbf{15}^*, \mathbf{1})$	$(\mathbf{10}^*, \mathbf{1})(+2)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(-1, -1/3)$	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c
		$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(+1, -1/3)$	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c					
		$(\mathbf{3}, \mathbf{1})(0, 4/3)$									
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(0, -2)$	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c
	$(\mathbf{5}^*, \mathbf{1})(-4)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(0, +2/3)$					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(-1, -1)$		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	N_R^c
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(+1, -1)$	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c		

(2) Y_2 での SM 粒子の $27|E_6$ への埋め込みは,

$SU_6 \times SU_2^w$	$SU_5^c \times U_1 \times SU_2^w$	$SU_3^c \times SU_2^w \times U_1^2$									
$(\mathbf{6}, \mathbf{2})$	$(\mathbf{5}, \mathbf{2})(-1)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})(0, -2/3)$	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(-1, +1)$			l_L	l_L			l_L	l_L	
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(+1, +1)$									
	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(+5)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(0, 0)$	l_L	l_L			l_L	l_L			
$(\mathbf{15}^*, \mathbf{1})$	$(\mathbf{10}^*, \mathbf{1})(+2)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(-1, -1/3)$					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c
		$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(+1, -1/3)$	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c					
		$(\mathbf{3}, \mathbf{1})(0, 4/3)$									
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(0, -2)$	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c
	$(\mathbf{5}^*, \mathbf{1})(-4)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(0, +2/3)$	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(-1, -1)$		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	N_R^c
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(+1, -1)$	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	

(3) Y_3 での SM 粒子の $27|E_6$ への埋め込みは,

$SU_6 \times SU_2^w$	$SU_5^c \times U_1 \times SU_2^w$	$SU_3^c \times SU_2^w \times U_1^2$									
$(\mathbf{6}, \mathbf{2})$	$(\mathbf{5}, \mathbf{2})(-1)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})(0, -2/3)$	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(-1, +1)$									
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(+1, +1)$	l_L	l_L			l_L	l_L			
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(+5)$			l_L	l_L			l_L	l_L	
$(\mathbf{15}^*, \mathbf{1})$	$(\mathbf{10}^*, \mathbf{1})(+2)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(-1, -1/3)$					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c	
		$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(+1, -1/3)$	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c
		$(\mathbf{3}, \mathbf{1})(0, 4/3)$									
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(0, -2)$		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	
	$(\mathbf{5}^*, \mathbf{1})(-4)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(0, +2/3)$	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c					
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(-1, -1)$	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c
		$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(+1, -1)$	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c		

5.2.8.8 Symmetry Breaking Pattern (7')

SB パターンは,

$$\begin{aligned} E_6 &\Rightarrow SU_6^c \times SU_2^w \Rightarrow SU_4^c \times SU_2 \times U_1^{(3)} \times SU_2^w \\ &\Rightarrow SU_3^c \times U_1^{(1)} \times U_1^{(2)} \times U_1^{(3)} \times SU_2^w \end{aligned} \quad (5.2.227)$$

ここで, $E_6 \Rightarrow SU_6 \times SU_2$ の射影には P_{16}^* を用いる. SM 粒子の値と整合的なハイパー電荷 Y の埋め込みは次の 3 種類:

1. $Y = Y_1 \equiv -Q^{(1)} - Q^{(2)}$
2. $Y = Y_2 \equiv -Q^{(1)} + Q^{(2)}$.
3. $Y = Y_3 \equiv \frac{1}{2}Q^{(1)} + \frac{1}{2}Q^{(3)}$.

(1) Y_1 での SM 粒子の $27|E_6$ への埋め込みは,

$SU_6 \times SU_2^w$	$SU_4^c \times SU_2 \times U_1 \times SU_2^w$	$SU_3^c \times SU_2^w \times U_1^2$		○						
(6, 2)	(4, 1, 2)(+1)	(3, 2)(-1/3, 0)	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L
		(1, 2)(+1, 0)	l_L	l_L			l_L	l_L		
	(1, 2, 2)(-2)	(1, 2)(0, +1)			l_L	l_L			l_L	l_L
		(1, 2)(0, -1)								
(15*, 1)	(4*, 2, 1)(+1)	(3*, 1)(+1/3, +1)	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c
		(3*, 1)(+1/3, -1)	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c				
		(1, 1)(-1, +1)		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c
	(6*, 1, 1)(-2)	(1, 1)(-1, -1)	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c
		(3*, 1)(-2/3, 0)					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c
		(3, 1)(+2/3, 0)								
(1, 1, 1)(+4)	(1, 1)(0, 0)	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c		

(2) Y_2 での SM 粒子の $27|E_6$ への埋め込みは,

$SU_6 \times SU_2^w$	$SU_4^c \times SU_2 \times U_1 \times SU_2^w$	$SU_3^c \times SU_2^w \times U_1^2$		○							
(6, 2)	(4, 1, 2)(+1)	(3, 2)(-1/3, 0)	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L
		(1, 2)(+1, 0)	l_L	l_L			l_L	l_L			
	(1, 2, 2)(-2)	(1, 2)(0, +1)									
(15*, 1)	(4*, 2, 1)(+1)	(3*, 1)(+1/3, +1)	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c					
		(3*, 1)(+1/3, -1)	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c
		(1, 1)(-1, +1)	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c
		(1, 1)(-1, -1)		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	
	(6*, 1, 1)(-2)	(3*, 1)(-2/3, 0)					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c
		(3, 1)(+2/3, 0)									
	(1, 1, 1)(+4)	(1, 1)(0, 0)		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	

(3) Y_3 での SM 粒子の $27|E_6$ への埋め込みは,

$SU_6 \times SU_2^w$	$SU_4^c \times SU_2 \times U_1 \times SU_2^w$	$SU_3^c \times SU_2^w \times U_1^2$									
(6, 2)	(4, 1, 2)(+1)	(3, 2)(-1/3, 0)	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L
		(1, 2)(+1, 0)									
	(1, 2, 2)(-2)	(1, 2)(0, +1)	l_L	l_L			l_L	l_L			
(15*, 1)	(4*, 2, 1)(+1)	(3*, 1)(+1/3, +1)	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c					
		(3*, 1)(+1/3, -1)					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c
		(1, 1)(-1, +1)	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c
		(1, 1)(-1, -1)		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	
	(6*, 1, 1)(-2)	(3*, 1)(-2/3, 0)	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c
		(3, 1)(+2/3, 0)									
	(1, 1, 1)(+4)	(1, 1)(0, 0)		e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c

5.2.8.9 Symmetry Breaking Pattern (12)

SB パターンは,

$$\begin{aligned} E_6 &\Rightarrow SU_6^c \times SU_2^w \Rightarrow SU_3^c \times SU_3 \times U_1^{(3)} \times SU_2^w \\ &\Rightarrow SU_3^c \times U_1^{(1)} \times U_1^{(2)} \times U_1^{(3)} \times SU_2^w \end{aligned} \quad (5.2.228)$$

ここで, $E_6 \Rightarrow SU_6 \times SU_2$ の射影には P_{16}^* を用いる. SM 粒子の値と整合的なハイパー電荷 Y の埋め込みは次の 3 種類:

1. $Y = Y_1 \equiv -\frac{2}{3}Q^{(1)} - \frac{2}{3}Q^{(2)} + \frac{1}{3}Q^{(3)}$
2. $Y = Y_2 \equiv -\frac{2}{3}Q^{(1)} + \frac{4}{3}Q^{(2)} + \frac{1}{3}Q^{(3)}$
3. $Y = Y_3 \equiv \frac{4}{3}Q^{(1)} - \frac{2}{3}Q^{(2)} + \frac{1}{3}Q^{(3)}$

(1) Y_1 での SM 粒子の $27|E_6$ への埋め込みは,

$SU_6 \times SU_2^w$	$SU_3^c \times SU_3$ $\times U_1 \times SU_2^w$	$SU_3^c \times SU_2^w \times U_1^2$								
$(\mathbf{6}, \mathbf{2})$	$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{2})(+1)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})(0, 0)$	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L
	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{2})(-1)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(+1, 0)$	l_L	l_L			l_L	l_L		
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(0, +1)$			l_L	l_L			l_L	l_L
		$(\mathbf{1}, \mathbf{2})(-1, -1)$								
$(\mathbf{15}^*, \mathbf{1})$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{3}^*, \mathbf{1})(0)$	$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(-1, 0)$					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c
		$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(0, -1)$	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c				
		$(\mathbf{3}^*, \mathbf{1})(+1, +1)$	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c
		$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1})(-2)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})(0, 0)$							
		$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1})(+2)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(+1, 0)$	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c
			$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(0, +1)$		N_R^c		N_R^c		N_R^c	N_R^c
			$(\mathbf{1}, \mathbf{1})(-1, -1)$	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c

(2) Y_2 での SM 粒子の $27|E_6$ への埋め込みは,

$SU_6 \times SU_2^w$	$SU_3^c \times SU_3 \times U_1 \times SU_2^w$	$SU_3^c \times SU_2^w \times U_1^2$									
(6, 2)	(3, 1, 2)(+1)	(3, 2)(0, 0)	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	
	(1, 3, 2)(-1)	(1, 2)(+1, 0)	l_L	l_L			l_L	l_L			
		(1, 2)(0, +1)									
		(1, 2)(-1, -1)			l_L	l_L			l_L	l_L	
(15*, 1)	(3*, 3*, 1)(0)	(3*, 1)(-1, 0)					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c	
		(3*, 1)(0, -1)	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	
		(3*, 1)(+1, +1)	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c					
		(3, 1, 1)(-2)	(3, 1)(0, 0)								
		(1, 3, 1)(+2)	(1, 1)(+1, 0)	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	
			(1, 1)(0, +1)	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c
			(1, 1)(-1, -1)		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c

(3) Y_3 での SM 粒子の $27|E_6$ への埋め込みは,

$SU_6 \times SU_2^w$	$SU_3^c \times SU_3 \times U_1 \times SU_2^w$	$SU_3^c \times SU_2^w \times U_1^2$									
(6, 2)	(3, 1, 2)(+1)	(3, 2)(0, 0)	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	q_L	
	(1, 3, 2)(-1)	(1, 2)(+1, 0)									
		(1, 2)(0, +1)	l_L	l_L			l_L	l_L			
		(1, 2)(-1, -1)			l_L	l_L			l_L	l_L	
(15*, 1)	(3*, 3*, 1)(0)	(3*, 1)(-1, 0)	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	u_R^c	
		(3*, 1)(0, -1)					d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c	
		(3*, 1)(+1, +1)	d_R^c	d_R^c	d_R^c	d_R^c					
		(3, 1, 1)(-2)	(3, 1)(0, 0)								
		(1, 3, 1)(+2)	(1, 1)(+1, 0)	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c	e_R^c
			(1, 1)(0, +1)	N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c	
			(1, 1)(-1, -1)		N_R^c		N_R^c		N_R^c		N_R^c

5.2.9 諸命題・諸定理の証明

定理 5.3 の証明. コンパクト Lie 群の Lie 代数を \mathfrak{k} , その複素化を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ とする. 随伴表現は実表現で, その実表現空間は Lie 代数 \mathfrak{k} そのもの, 複素表現の表現空間は \mathfrak{g} となる. また, \mathfrak{k} の元 X における等方群の Lie 代数 \mathfrak{k}_X は $\mathfrak{k}_X = \{Y \in \mathfrak{k} \mid [X, Y] = 0\}$ となる.

ここで, コンパクト Lie 代数の任意の元を含む極大可換 Lie 代数は互いに共役である. したがって, X を含む極大可換 Lie 代数を \mathfrak{t} とすると, $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ が \mathfrak{g} の Cartan 部分代数となり, \mathfrak{g} のルート系 (Δ, \mathfrak{h}^*) を定義する. このとき, $H \in \mathfrak{h}$, Weyl 基底を E_{β} , $\alpha_X \in \mathfrak{h}^*$ を $(\alpha_X, \gamma) = \gamma(iX)$ ($\forall \gamma \in \mathfrak{h}^*$) となる \mathfrak{h}^* のベクトルとして,

$$Y = H + \sum_{\beta \in \Delta} C_{\beta} E_{\beta} \Rightarrow [X, Y] = \sum_{\beta} C_{\beta} \beta(X) E_{\beta} = 0 \Rightarrow C_{\beta} \neq 0 \text{ iff } (\alpha_X, \beta) = 0$$

したがって, X における等方群の Lie 代数は

$$\mathfrak{g}_X = \langle \mathfrak{t}, E_{\beta}; (\alpha_X, \beta) = 0, \beta \in \Delta \rangle = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{u}_1$$

となる.

以上の準備の元で, まず, 基本ルート系を $\{\alpha_i, i = 1, \dots, r\}$ として, X を $\alpha_X = f_i$ と取ると, \mathfrak{g}_X は Dynkin 図式から i 番目のノードを取り除いて得られる正則極大準半単純部分代数と一致する. この部分代数は, 部分代数として極大なので, 当然, 極大等方部分代数となる.

つぎに, \mathfrak{g}' のルート系 Δ' は, \mathfrak{h}^* においてベクトル α_X に垂直な平面 Π とルート系 Δ の共通部分なので, \mathfrak{g}' の階数が $r - 2$ 以下のときには, Δ' は Π の $r - 2$ 次元以下の部分空間に含まれる. そこで, \mathfrak{g}' に含まれない \mathfrak{g} の独立なルートを, それらと \mathfrak{g}' が超曲面 Π' を張るよう選べば, X' を Π' の法ベクトルが $\alpha_{X'}$ となる \mathfrak{t} の元として, X' での等方部分群の Lie 代数は, \mathfrak{g}'' をランク $r - 1$ の Lie 代数として, $\mathfrak{g}'' \oplus \mathfrak{u}_1$ となる. これは, 極大等方群の Lie 代数が \mathfrak{g} のランク r の正則部分代数であることを示している. ところが, このような部分代数は, Dynkin 図式ないし拡張 Dynkin 図式からノードを一つ取り除いて得られるものに限られる. これらのうち, 通常の Dynkin 図式から得られる正則部分代数は, すでに極大等方部分代数となり得ることを示した. 一方, 拡張 Dynkin 図式から得られる極大準単純部分代数 \mathfrak{s} は, \mathfrak{u}_1 因子を持たないので, \mathfrak{u}_1 因子をもつ極大等方部分代数 $\mathfrak{g}'' \oplus \mathfrak{u}_1$ はその部分代数となる. これは, \mathfrak{s} が $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{g}'' \oplus \mathfrak{su}_2$ となる場合に限られるが, このとき, \mathfrak{g}'' の Dynkin 図式は, \mathfrak{g} の拡張 Dynkin

目次へ

図式から2つのノードを取り除いたものとなる。ところが、この Lie 代数は \mathfrak{g} の Dynkin 図式から \mathfrak{su}_2 に対応するノードを1個取り除いて得られる半単純 Lie 代数の部分代数となるので、等方部分代数として極大でなく、通常 Dynkin 図式から1つのノードを取り除いて得られる極大等方代数の部分代数となる。よって、極大等方部分代数はこのタイプのものに限られる。 Q.E.D.

[【定理 5.3 に戻る】](#)

表 9: adS/dS 実単純超代数

D	dS		adS	
	\mathcal{L}	G	\mathcal{L}	G
4	$\text{osp}(n 1, 1; \mathbb{H})$	$\mathfrak{so}^*(2n)$	$\text{osp}(n-p, p 4; \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(n-p, p)$
	$\text{osp}(4, 1 2n; \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$	$\text{osp}(3, 2 2n; \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$
5	$\mathfrak{sl}(2 n; H)$	$\mathfrak{su}^*(2n)$	$\mathfrak{su}(2, 2 n-p, p)$	$\mathfrak{u}(n-p, p)$
	$\mathfrak{sl}(2 2; H)$	$\mathfrak{so}(5, 1)$	$\mathfrak{su}(2, 2 4-p, p)$	$\mathfrak{su}(4-p, p)$
	$\text{osp}(5, 1 2n; \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$	$\text{osp}(4, 2 2n, \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$
	$Q_{\text{II}}(3)$	1	$Q_{\text{I}}(3)$	1
6	$\text{osp}(6, 1 2n; \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$	$\text{osp}(5, 2 2n; \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$
	$F_{\text{IV}}(4)$	$\mathfrak{su}(2)$	$F_{\text{III}}(4)$	$\mathfrak{su}(2)$
7	$\text{osp}(7, 1 2n; \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(n; \mathbb{R})$	$\text{osp}(6, 2 2n; \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$
			$\text{osp}(4 n-p, p; \mathbb{H})$	$\mathfrak{sp}(n-p, p)$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1; \quad \mathcal{L}_0 = \mathfrak{so}(D, 1) \oplus G \quad \text{or} \quad \mathfrak{so}(D-1, 2) \oplus G$$

References: Parker M: JMP21, 689(1980); Fre P, Trigiante M, Van Proeyen A: CQG19, 4167 (2002); Lukierski J, Nowicki A: PLB151, 382(1985); Pilch K, van Nieuwenhuizen P, Sohnius F: CMP98,, 105(1985)

5.3 超対称理論

5.3.1 大統一理論 \Rightarrow SGUT

- **Dark matter**

有力な候補: neutralinos($\tilde{\gamma}, \tilde{Z}, \tilde{\phi}_0, \tilde{g}$), axion

- **hierarchy problem**

Non-renormalisation Th. \Rightarrow small corrections on masses and Λ

- **C f. Λ problem**

AdS 超対称性代数が存在するので、超対称性が $\Lambda = 0$ を意味するわけではない。また、dS 超対称代数は存在しないので、インフレーションや $\Lambda > 0$ は超対称性の破れを要求する。

5.3.2 SGUT \Rightarrow 超重力統一理論

局所的な超対称性と一般共変性を同時に要求すれば，必然的に超重力理論となる．

超対称理論 4次元 Minkowski 時空における $N = 1$ 超対称性をもつ理論の物質セクターは，カイラル超組に対応するカイラル超場 Φ とベクトル超組に対応するベクトル超場 V により記述される．ここで，(スカラ型)超場は，超空間 $(x^m, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ 上の関数 $F(x, \theta, \bar{\theta})$ で，その超変換は超空間の無限小ベクトル場

$$Q_\alpha = \delta_\alpha - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m, \quad (5.3.1a)$$

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\delta}_{\dot{\alpha}} + i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m, \quad (5.3.1b)$$

により，

$$\delta F = (\xi^\alpha Q_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}) F \quad (5.3.2)$$

と表される．

超空間上では，超対称変換に対する不変ベクトル場が

$$D_\alpha = \delta_\alpha + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m, \quad (5.3.3a)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\delta}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \quad (5.3.3b)$$

で与えられる．特に，カイラル超場は，条件

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi = 0 \quad (5.3.4)$$

を満たす超場で，複素スカラ場 $A(x)$, $F(x)$ と複素スピノール場 $\psi(x)$ を用いて

$$\Phi = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y); \quad (5.3.5)$$

$$y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta} \quad (5.3.6)$$

と表される．このとき，

$$\delta F(x) = i\sqrt{2}\bar{\xi}^m \partial_m \psi. \quad (5.3.7)$$

また，ベクトル超場は，条件

$$V = V^\dagger \quad (5.3.8)$$

を満たす超場で, V が実場 $C(x), M(x), N(x), D(x), v_m(x), \chi(x), \lambda(x)$ を用いて

$$\begin{aligned}
V &= C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x) \\
&\quad + \frac{i}{2}\theta\theta(M(x) + iN(x)) - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}(M(x) - iN(x)) - \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) \\
&\quad + i(\theta\theta)\bar{\theta}\left(\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi(x)\right) - i(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\left(\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar{\chi}(x)\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\theta)\left(D(x) + \frac{1}{2}\square C(x)\right) \tag{5.3.9}
\end{aligned}$$

と表される. このとき,

$$\delta D(x) = \bar{\xi}\bar{\sigma}^m\partial_m\lambda - \xi\sigma^m\partial_m\bar{\lambda}. \tag{5.3.10}$$

一般に, V がゲージ場に対応するとき, ゲージ変換により

$$C = M = N = \chi = 0 \tag{5.3.11}$$

とおくことができる.

4次元 Minkowski 時空における最も一般的な $N = 1$ 超対称理論は

- 超場

- Kahler 多様体 \mathcal{K}^d に値を取るカイラル超場: $\Phi = (\Phi^i)(i = 1, \dots, d)$
- \mathcal{K}^d の等長変換群 G に対応する Lie 代数 \mathfrak{g} に値を取るベクトル超場: $V = V^{(a)}T_{(a)}$

- ポテンシャル

- G 不変な Kahler ポテンシャル: $K(z^i, \bar{z}^i)$
- G 不変な超ポテンシャル: $W(z)$
- G 共変的なゲージ結合ポテンシャル: $H_{(ab)}(z)$

を用いて,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \int d^2\theta d^2\bar{\theta} [K(\Phi, \Phi^\dagger) + \Gamma(\Phi, \Phi^\dagger, V)] \\
&\quad + \left[\int d^2\theta \left(\frac{1}{16g^2} H_{(ab)}(\Phi) (\mathcal{W}^{(a)}\mathcal{W}^{(b)}) + W(\Phi) \right) + \text{h.c.} \right] \tag{5.3.12}
\end{aligned}$$

ここで, \mathcal{W}_α は Lie 代数 \mathfrak{g} に値をもつスピノール型カイラル超場

$$\mathcal{W}_\alpha = \mathcal{W}_\alpha^{(a)} T_{(a)} := -\frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})e^{-V}D_\alpha e^V, \quad (5.3.13)$$

ゲージ変換は, \mathfrak{g} に値を取るカイラル超場 $\Lambda = \Lambda^{(a)}T_{(a)}$ を用いて,

$$\delta\Phi^i = \Lambda^{(a)}X_{(a)}^i(\Phi), \quad \delta e^V = -i\Lambda^\dagger e^V + ie^V\Lambda, \quad \delta W_\alpha = -i\Lambda^\dagger W_\alpha + iW_\alpha\Lambda \quad (5.3.14)$$

と表される. ここで, $X_{(a)} = (X_{(a)}^i)$ は G に対応する \mathcal{M}^d 上の Killing ベクトルの基底.

超重重力理論 超重重力理論では, 平坦な時空での物質超場に加えて, 重力超場

$$2\mathcal{E} = e \{1 + i\Theta\sigma^a\bar{\psi}_a - \Theta\Theta(M^* + \bar{\psi}_a\bar{\sigma}^{ab}\psi_b)\}, \quad (5.3.15a)$$

$$\begin{aligned} -6\mathcal{R} = & M + \Theta[\sigma^a\bar{\sigma}^b\psi_{ab} - i\sigma^a\bar{\psi}_a M + i\psi_a b^a] \\ & + \Theta\Theta \left[\frac{1}{2}\hat{R} + i\bar{\psi}^a\bar{\sigma}^b\psi_{ab} + \frac{2}{3}MM^* \right. \\ & + \frac{1}{3}b^a b_a - ie_a{}^m \mathcal{D}_m b^a + \frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\psi}M - \frac{1}{2}\psi_a\sigma^a\bar{\psi}_c b^c \\ & \left. + \frac{1}{8}\epsilon^{abcd}(\bar{\psi}_a\bar{\sigma}_b\psi_{cd} + \psi_a\sigma_b\bar{\psi}_{cd}) \right] \end{aligned} \quad (5.3.15b)$$

が必要となる. これらの場は, 超重重力場

$$e_m^a, \quad \psi_m^\alpha, \quad M, \quad b_a = b_{\alpha\dot{\alpha}} \quad (5.3.16)$$

により決まる.

$N = 1$ 局所超対称変換で不変な最も一般的な理論は次の作用積分で与えられる:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \int d^2\Theta 2\mathcal{E} \left[\frac{3}{8\kappa^2}(\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{D}} - 8\mathcal{R}) \exp \left\{ -\frac{\kappa^2}{3} [K(\Phi, \Phi^\dagger) + \Gamma(\Phi, \Phi^\dagger, V)] \right\} \right. \\ & \left. + \frac{1}{16g^2} H_{(ab)}(\Phi)(\mathcal{W}^{(a)}\mathcal{W}^{(b)}) + W(\Phi) \right] + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

この作用積分から F 項, D 項, M 項, b_a 項などの非力学的自由度を消去して得られる作用積分のボゾン部分は

$$\begin{aligned} e^{-1}\mathcal{L} = & \frac{1}{2}R - g_{ij^*}\tilde{D}_m A^i \tilde{D}^m A^{*j} - \mathcal{V}(A) \\ & - \frac{1}{4}h_{(ab)}^R(A)F_{mn}^{(a)}F^{mn(b)} + \frac{1}{8}h_{(ab)}^I\epsilon^{mnlk}F_{mn}^{(a)}F_{kl}^{(b)}. \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

ここで,

$$\tilde{D}_m A^j = \partial_m A^j - g v_m^{(a)} X_{(a)}^i, \quad (5.3.19)$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} g^2 D_{(a)} D^{(a)} + e^K \left[g^{ij*} (D_i W)(D_j W)^* - 3W^* W \right] \quad (5.3.20)$$

$$D_i W = \partial_i W + K_i W \quad (5.3.21)$$

また, $D^{(a)}(z, \bar{z})$ は \mathcal{H}^d の Killing ベクトル $X^{(a)}$ に対応する Killing ポテンシャル

$$g_{ij*} X^{*j(a)} = i \frac{\partial D^{(a)}}{\partial z^i}, \quad g_{ij*} X^{i(a)} = -i \frac{\partial D^{(a)}}{\partial \bar{z}^j} \quad (5.3.22)$$

である.

超対称性 基底状態で $\langle \psi_m \rangle = \langle \chi^i \rangle = \langle \lambda^{(a)} \rangle = 0$ (かつフェルミ場の凝縮がない) とすると, これらの条件が超対称変換で保たれる条件は

$$0 - \delta_\zeta \chi^i = i\sqrt{2} \sigma^m \bar{\zeta} \tilde{D}_m A^i - \sqrt{2} e^{K/2} g^{ij*} D_{j*} W^* \zeta, \quad (5.3.23a)$$

$$0 = \delta_\zeta \lambda^{(a)} = F_{ab}^{(a)} \sigma^{ab} \zeta - ig D^{(a)} \zeta, \quad (5.3.23b)$$

$$0 = \delta_\zeta \psi_m = 2 \left[\nabla_m + \frac{1}{4} \left(K_j \tilde{D}_m A^j - K_{j*} \tilde{D}_m A^{*j} \right) \right] \zeta + ie^{K/2} W \sigma_m \bar{\zeta} \quad (5.3.23c)$$

で与えられる. これらは一般に

$$F_{ab}^{(a)} = D^{(a)} = \tilde{D}_m A^i = D_j W = 0 \quad (5.3.24)$$

を要求する. しかし, 必ずしも $W = 0$ を要求しない. したがって,

$$\mathcal{V} = -3|W|^2 e^K \leq 0 \quad (5.3.25)$$

となり, $W \neq 0$ なら負の宇宙項が生じる.

5.3.3 SUGRA インフレーションモデル

F 項モデルの困難 SUGRA モデルでの F 項起源のスカラポテンシャルは

$$\mathcal{V} = e^K \left(K^{i\bar{j}} D_i W D_{\bar{j}} \bar{W} - 3|W|^2 \right) \quad (5.3.26)$$

で与えられる。このため、標準的な Kahler ポテンシャル

$$K = \sum_i z_i \bar{z}_i \quad (5.3.27)$$

では、 e^K の因子のため $|z_i| \gg 1$ ではポテンシャルが急速に増大し、Chaotic インフレーションは実現されない。また、 W がインフラトン場 ϕ によらないとしても、質量項 $|W|^2 \phi^2$ が生じる：

$$m_\phi^2 \geq 3H^2 \quad (5.3.28)$$

実際、 $z_i = 0$ で $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 = 3H^2$ を考慮すると ($\kappa = 1$),

$$m_\phi^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \bar{\phi}} \right|_{\phi=0} = \mathcal{V}_0 + |W|^2 \geq \mathcal{V}_0 = 3H^2. \quad (5.3.29)$$

よって、

$$\eta = \frac{V''}{V} = \frac{m_\phi^2}{\mathcal{V}_0} = 1. \quad (5.3.30)$$

Shift 対称性 Kahler ポテンシャルと超ポテンシャルが

$$K = \frac{1}{2}(\Phi + \bar{\Phi})^2 + X\bar{X}, \quad (5.3.31a)$$

$$W = m\Phi X \quad (5.3.31b)$$

で与えられるとすると、

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + i\phi) \quad (5.3.32)$$

として、ポテンシャルは $\eta, |X| \ll 1$ のとき

$$V = \frac{m^2}{2}\phi^2(1 + \eta^2) + m^2|X|^2. \quad (5.3.33)$$

と振る舞い、 $\eta, |X| \gg 1$ では e^K 因子のため急速に増大する。このため、 $\eta, |X| \approx 1$ となり、 ϕ をインフラトンする chaotic インフレーションが実現される。[Kawasaki M, Yamaguchi M, Yanagida T 2000[278]; Yamaguchi M, Yokoyama J 2001, 2003[396, 397, 395]]

5.4 高次元理論へ

Sugra GUT \Rightarrow 高次元 Sugra GUT

- フェルミセクターの構造
 - 世代数 (family repetition)
- 湯川結合
 - 結合定数の大きさ (質量の起源)
 - Cabibo/neutrino mixing, CP violation
- ヒッグスセクターの構造
 - $3 + 2$ 分解問題
- 超対称性の破れ
 - 4次元理論では超対称性の破れの大きさを決める自然な方法がない.
- 重力の量子論
 - 超弦理論の臨界次元は10.
- 宇宙項問題
 - 4次元理論は宇宙定数の絶対値を決めることができない.
 - 11次元超重力理論は2階微分までのオーダーで作用積分が一意的で宇宙定数の自由度がない.

5.4.1 Family repetition problem

$$\begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \quad e_R \\ \hline \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad u_R \quad d_R \\ \hline \end{array}
 \quad
 \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L \quad \mu_R \\ \hline \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L \quad c_R \quad s_R \\ \hline \end{array}
 \quad
 \begin{array}{|c|} \hline \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L \quad \tau_R \\ \hline \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \quad t_R \quad b_R \\ \hline \end{array}$$

時空が $M = X_4 \times Y_6$ と表され、その上のゲージ場が

$$A_\mu = A_\mu(x) \in H, \quad A_p = A_p(y) \in K; \quad H \times K \subset G \quad (5.4.1)$$

という構造をもつなら、 Y_6 上の Dirac 作用素の固有スピノール

$$\hat{\gamma}_{[6]} \hat{\gamma}^p D_p \chi_a = m_a \chi_a; \quad D_p = \nabla_p + A_p, \quad (5.4.2)$$

$$\int_Y d\mu(y) \chi_a^\dagger \chi_b = \delta_{ab} \quad (5.4.3)$$

を用いて M 上のスピノール Ψ を

$$\Psi = \sum_a \psi_a(x) \chi_a(y) \quad (5.4.4)$$

と展開すると、

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes \hat{\gamma}_{[6]}, \quad \Gamma^p = 1 \otimes \hat{\gamma}^p \quad (5.4.5)$$

より

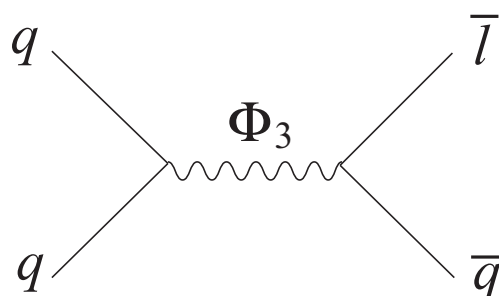
$$\int_Y d\mu(y) i \bar{\Psi} \Gamma^M D_M \Psi = \sum_a \bar{\psi}_a i (\gamma^\mu D_\mu + m_a) \psi_a$$

よって、 χ のゼロモードの数が 4 次元での family の数を与える。

5.4.2 (3 + 2) 分解

SU(5)-GUT では, 5次元 Higgs 場 $\Phi_5 = (\Phi_2, \Phi_3)$ がバリオン数を破る反応を媒介する:

$$5^* \times 10 = 5 + 45 \Rightarrow \bar{\Phi}_5 \psi_{5^*} \psi_{10} \quad (5.4.6)$$



Orbifold GUT (川村モデル) 時空が $M = X_4 \times S^1/\mathbb{Z}_2 \ni (x, y)$ というオービフォールド構造を持つとする. このとき, Φ_5 が \mathbb{Z}_2 の変換に対して

$$\Phi_5(x, -y) = P\Phi_5(x, y); \quad P = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (5.4.7)$$

というパリティをもつことを要求すれば,

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \phi_2(x) + \phi_2^1(x) \cos(\pi y/L) + \dots \\ \Phi_3 &= 0 + \phi_3^1(x) \sin(\pi y/L) + \dots \end{aligned}$$

より, 4次元ブレーン上では Φ_2 のみが軽くなる.

Reference

Nilles, H.P.: hep-th/0410160

Kawamura, Yoshiharu: Prog.Theor.Phys.105:691-696,2001; ibid. 999-1006.

5.5 位相欠陥

Creation: 2023/3/6

5.5.1 Sphaleron

Creation: 2023/3/10

5.5.1.1 歴史

Creation: 2023/3/10

1991 Sphaleron の非球対称性 [Kleihaus B, Kunz J, Brihaye Y(1991)[?]; Dashen RF, Hasslacher B, Neveu A(1974); Yaffe LG(1989)]

1984 電弱理論における Sphaleron 解. [Klinkhamer FR, Manton NS[283]]

5.5.2 モノポール

Creation: 2023.3.6

Reviews

- Konishi K: The magnetic monopoles seventy-five years later,
Lect. Notes Phys. 737, 471-521 (2008). arXiv: hep-th/0702102
- Milton KA: Theoretical and experimental status of magnetic monopoles
Rep. Prog. Phys. 69, 1637-1712 (2006),
- Shnir YM: *Magnetic Monopoles*,
Text and Monographs in Physics (Springer, 2005)
- Manton NS, Sutcliffe P: *Topological Solitons*,
Cambridge Monographs on Mathematical Physics (CUP, 2004)
- Goldhaber AS, Trower WP: Resource Letter MM1: magnetic monopoles

Am. J. Phys. 58, 429 (1990).

- Coleman SR: The magnetic monopole fifty years later

Les Houches Summer School of Theoretical Physics: Lower-Plasma Interactions (1982) p. 461 -552.

- Goddard P, Olive DI: New developments in the theory of magnetic monopoles

Rep. Prog. Phys. 41, 1357 (1978)

5.5.2.1 歴史

Creation: 2023/3/10

LastUpdate: 2023/4/5

2022 電弱理論における球対称モノポール解の完全分類と安定性の解析 : Dirac タイプの Abelian 解は ($\hbar c/(2e)$ 単位で) 任意の非ゼロ整数値磁荷 n を持つものが存在するが, 原点で特異でエネルギーが無限大. Non-abelian で正則定常で球対称なものは CM 解 ($n = \pm 2$) に限られる. ただし, 有限なエネルギーをもつ振動的解も存在.[Gervalle R, Volkov MS[188]]

2014 CM モノポール解の厳密な存在証明. [Yang Y (2014)[398]]

1997 Cho-Maison モノポール解: Weinberg-Salam 理論での解. 原点で発散し, エネルギー無限大. [Cho YM, Maison D[?]]

1976 Dirac モノポール解およびその周りでの波動関数のベクトルバンドルによる記述と, ベクトルバンドルの断面の作る Hilbert 空間の基底としてのモノポール調和関数の導入. [Wu TT, Yang CN (1976)[394]]

1975 SU(2) ゲージ場+ベクトル Higgs 場からなる系における dyon 解 (t' Hooft-Polyakov 解に電荷を持たせた正則解) [Julia B, Zee A[268]]

1974 t' Hooft-Polyakov モノポール解 : SU(2) ゲージ場と随伴表現のヒッグス場に基づく統一理論における正則なモノポール解. [t' Hooft G[363]; Polyakov AM[329]]

- 1969 Wu-Yang 解 : U(1) ゲージ理論における Dirac monopole 解を純粋 non-Abelian ゲージ理論に埋め込み. ただし, 依然として原点に特異性をもつ. [Wu TT, Yang CN (1969)[393]]
- 1931 Dirac monopole の周りでの荷電粒子の波動関数の調和関数展開 [Tamm I (1931)[366]]
- 1931 Abelian monopole に対する Dirac 量子化条件 [Dirac PAM[119]; Wu TT, Yang CN (1976)[394]]

5.5.2.2 U(1) ゲージ理論 –Dirac の量子化条件–

Creation: 2023/3/8

LastUpdate: 2023/4/12

U(1) ゲージ理論において, 磁気単極子が存在すると, その磁場は Heaviside-Lorentz 単位系 (HL 単位系) で

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \Rightarrow B = \frac{1}{4\pi} \frac{Q_m}{r^2} \quad (5.5.1)$$

となる. このとき, 対応する電磁テンソルの空間成分は

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} F_{ij} dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B^k dx^i \wedge dx^j = \frac{Q_m}{8\pi} \epsilon_{ijk} n^k dn^i \wedge dn^j \quad (5.5.2)$$

に対して, 原点 $r = 0$ 以外では

$$d\mathcal{F} = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.5.3)$$

が成り立つので, \mathbf{B} は局所的にベクトルポテンシャル \mathbf{A} により表される. 具体的には, 極座標表示を用いると, 原点以外で

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} = \frac{Q_m}{4\pi} \sin(\theta) d\theta \wedge d\phi = -\frac{Q_m}{4\pi} d(\cos \theta d\phi) \quad (5.5.4)$$

となるので, z 軸の $z \leq 0$ の部分を除く領域 \mathcal{U}_+ で正則なベクトルポテンシャルとして,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ = \frac{Q_m}{4\pi} (1 - \cos \theta) d\phi = \frac{Q_m}{4\pi r^2} \frac{xdy - ydx}{1 + \cos \theta}, \quad (5.5.5)$$

を, z 軸の $z \leq 0$ の部分を除く領域 \mathcal{U}_- で正則なベクトルポテンシャルとして

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_- = \frac{Q_m}{4\pi}(-1 - \cos\theta)d\phi = \frac{Q_m}{4\pi} \frac{xdy - ydx}{-1 + \cos\theta}, \quad (5.5.6)$$

得る.

ここで, 共通領域 $\mathcal{U}_+ \cap \mathcal{U}_-$ において, 2つのゲージでの物質場の記述が正則なゲージ変換により結ばれるためには,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_- - \mathcal{A}_+ &= -\frac{Q_m}{2\pi}d\phi = -\sqrt{\hbar c}d\lambda = -\frac{Q_m}{2\pi}d\phi \\ \Rightarrow U &= \exp(-iQ_e\lambda/\sqrt{\hbar c}) = \exp(-iQ_eQ_m/(2\pi\hbar c)\phi) \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

により決まる物質場のゲージ変換 U が $\mathcal{U}_+ \cap \mathcal{U}_-$ において一価正則関数とならなければならないことより, Dirac の量子化条件

$$\frac{Q_eQ_m}{\hbar c} = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.5.8)$$

が要求される.

モノポールの作る磁場に対して, (原点を除いて) 大域的に正則なベクトルポテンシャルが存在しないのは, ゲージバンドルが非自明となるためである. 実際, 原点を内部に含む球面 S^2 にゲージ場を制限すると, 対応する $U(1)$ ベクトルバンドルの第1 Chern 類は

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -i\frac{Q_e}{\sqrt{\hbar c}}\mathcal{F} = -i\frac{Q_eQ_m}{4\pi\hbar c} \sin\theta d\theta \wedge d\phi \\ \Rightarrow c_1(E) &= \frac{-i}{2\pi} \text{Tr}(\mathcal{F}) = \frac{Q_eQ_m}{8\pi^2\hbar c} \sin\theta d\theta \wedge d\phi \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

となるが, $c_1(E)$ は $H^2(S^2, \mathbb{Z})$ の元なので, 理論が整合であるためには

$$\int_{S^2} c_1(E) = \frac{Q_eQ_m}{2\pi\hbar c} \in \mathbb{Z} \quad (5.5.10)$$

が要求される. これは, Dirac の量子化条件と一致する.

5.5.2.3 球対称 Monopole 解を記述する場の配位の分類

通常, 球対称な配位は回転で不変な配位として定義される. これに対して, ゲージ自由度を含む系では, 必ずしも回転で不変でなくとも, そ

の変化がゲージ変換となっている場合には、やはり球対称と呼ぶのが自然である。したがって、ゲージ群 G に対するゲージ場 \mathcal{A} と Higgs 場 Φ の配位が球対称であるということを次のように定義する：

$$\begin{aligned} & \forall O \in \text{SO}(3), \exists g(O, x) \in G \\ \text{s.t.} \quad & \Phi(Ox) = T(g(O, x))\Phi(x), \\ & D\Phi(Ox) = T(g(O, x))D\Phi(x), \\ & \mathcal{F}(Ox) = g(O, x)\mathcal{F}(x)g(O, x)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

ここで、 $\mathcal{F} = (1/2)\mathcal{F}_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ 。また、 T は群 G の Higgs 場への表現 $T: G \rightarrow \text{SO}(H)$

定義より、 $g(O, x)$ は次の整合性条件満たす：

$$g(O_1O_2, x) = g(O_1, O_2x)g(O_2, x) \quad (5.5.12)$$

特に、等方群

$$H_x = \{O \in \text{SO}(3) \mid Ox = x\} \cong \text{SO}(2) \quad (5.5.13)$$

の元に対しては、

$$O_1, O_2 \in H_x \Rightarrow g(O_1O_2, x) = g(O_1, x)T(O_2, x) \quad (5.5.14)$$

および

$$O \in H_x \Rightarrow T(g(O, x))\Phi(x) = \Phi(x) \quad (5.5.15)$$

が成り立つ。したがって、 $T(g(*, x))$ は準同型

$$T(g(*, x)): H_x \rightarrow G_{\Phi(x)} \quad (5.5.16)$$

を与える。また、

$$Ox = x, Vx = x' \Rightarrow VOV^{-1}x' = VOx = Vx = x' \Rightarrow VOV^{-1} \in H_{x'} \quad (5.5.17)$$

より、異なる x での等方群は同型となる。さらに、

$$\begin{aligned} & Ox = x, Vx = x' \\ \Rightarrow & g(VOV^{-1}, x') = g(VO, V^{-1}x')g(V^{-1}, x') \\ & = g(V, x)g(O, x)g(V^{-1}, x'), \end{aligned} \quad (5.5.18)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= g(e, x') = g(V, V^{-1}x')g(V^{-1}, x') \\ \Leftrightarrow & g(V^{-1}, x') = g(V, x)^{-1} \end{aligned} \quad (5.5.19)$$

より,

$$g(VOV^{-1}, x') = g(V, x)g(O, x)g(V, x)^{-1} \quad (5.5.20)$$

が成り立つので, 2つの表現 $T(g(*, x))$ と $T(g(*, x'))$ は同型となる.

一般の $O \in \text{SO}(3)$ に対して, $g(O, x)$ を決定するために, Higgs 場とゲージ場に次のゲージ変換を行う:

$$\tilde{\Phi}(x) = T(g(L(x), x_0)^{-1})\Phi(x), \quad (5.5.21a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}_j(x) &= g(L(x), x_0)^{-1}\mathcal{A}_j(x)g(L(x), x_0) + g(L(x), x_0)^{-1}dg(L(x), x_0), \\ \tilde{\mathcal{F}}_{jk}(x) &= g(L(x), x_0)^{-1}\mathcal{F}_{jk}(x)g(L(x), x_0), \end{aligned} \quad (5.5.21c)$$

ここで, x_0 は基準点, $L(x) \in \text{SO}(3)$ は

$$L(x)x_0 = x, \quad L(x_0) = e, \quad x \neq -x_0 \quad (5.5.22)$$

を満たす滑らかな関数である. 例えば, $x_0 = x_{\pm} = (0, 0, \pm r)$ を基準点とするとき, U_{\pm} 上で

$$L(x) = \frac{1}{1+n_3}m \circ Tm + n_3 I_3 + (n \times e_3) \cdot T, \quad (5.5.23)$$

$$n = x/r, \quad m = e_3 \times n \quad (5.5.24)$$

が該当する. このとき,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(Ox) &= T(g(L(Ox), x_0)^{-1})T(g(O, x))\Phi(x) \\ &= T(g(L(Ox), x_0)^{-1})T(g(O, x))T(g(L(x), x_0))\Phi(x) \\ &= T(g(L(Ox), x_0)^{-1})g(OL(x), x_0)\tilde{\Phi}(x) \end{aligned} \quad (5.5.25)$$

ここで,

$$\begin{aligned} L(Ox)x_0 = Ox = OL(x)x_0 &\Rightarrow O'(O, x) \equiv L(Ox)^{-1}OL(x) \in H_{x_0} \\ &\Rightarrow g(L(Ox), x_0)^{-1}g(OL(x), x_0) = g(O'(O, x), x_0). \end{aligned} \quad (5.5.26)$$

よって,

$$\tilde{\Phi}(Ox) = T(g'(O, x))\tilde{\Phi}(x); \quad g'(O, x) = g(O'(O, x), x_0) \in G_{\Phi(x_0)}. \quad (5.5.27)$$

同様に,

$$\widetilde{D}_j\tilde{\Phi}(Ox) = T(g'(O, x))O_j^k\widetilde{D}_k\tilde{\Phi}(x), \quad (5.5.28)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_j(Ox) = O_j^k g'(O, x)\tilde{\mathcal{A}}_k(x)g'(O, x)^{-1} - O_j^k \partial_k g'(O, x)g'(O, x)^{-1}, \quad (5.5.29)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_{jk}(Ox) = g'(O, x)O_j^l O_k^m \tilde{\mathcal{F}}_{lm}(x)g'(O, x)^{-1}. \quad (5.5.30)$$

これより, $x = x_0, O = L(x)$ に対して,

$$\tilde{\Phi}(x) = \tilde{\Phi}(x_0), \quad (5.5.31a)$$

$$\widetilde{D}_j \tilde{\Phi}(x) = L(x)_j^k \widetilde{D}_k \tilde{\Phi}(x_0), \quad (5.5.31b)$$

$$\tilde{A}_j(x) = L(x)_j^k \left(\tilde{A}_k(x_0) - \partial_k g(O'(O, x), x_0)|_{x=x_0, O=L(x)} \right), \quad (5.5.31c)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_{jk}(x) = L(x)_j^l L(x)_k^m \tilde{\mathcal{F}}_{lm}(x_0) \quad (5.5.31d)$$

これを上記の式に代入すると, 整合性条件

$$T(g') \tilde{\Phi}(x_0) = \tilde{\Phi}(x_0), \quad (5.5.32a)$$

$$O'_j{}^k T(g') \widetilde{D}_k \tilde{\Phi}(x_0) = \widetilde{D}_j \tilde{\Phi}(x_0), \quad (5.5.32b)$$

$$O'_j{}^l O'_k{}^m g' \tilde{\mathcal{F}}_{lm}(x_0) g'^{-1} = \tilde{\mathcal{F}}_{jk}(x_0) \quad (5.5.32c)$$

を得る. ここで, O' は H_{x_0} の任意の回転行列, $g' = g(O', x_0) \in G_{\Phi(x_0)}$ である.

5.5.2.4 SO(3) ゲージ理論における monopole/dyon

Creation: 2023/3/6

LastUpdate: 2023/10/17

基本文献

- Wu TT, Yang CN: Nucl. Phys. B107, 365 (1976)
”Dirac monopole without strings: monopole harmonics”
- Julia B, Zee A: Phys. Rev. D11, 2227-2232 (1975)
”Poles with both magnetic and electric charges in non-Abelian gauge theory”
- 't Hooft G: Nucl. Phys. B79, 276-284 (1974)
”Magnetic monopoles in unified gauge theories”
- Polyakov AM: Sov. Phys. JETP Lett. 20, 194 (1974)
”Particle spectrum in quantum field theory”

A. Model

- Gauge 場 : SO(3) YM 場 $C_\mu(x) = C_\mu^a T_a \in \mathfrak{so}(3)$

$$(T_a)_{bc} = \epsilon_{abc}, \quad [T_a, T_b] = -\epsilon_{ab}^c T_c, \quad \text{Tr}(T_a T_b) = -2\delta_{ab}$$

- Higgs 場 : SO(3) のベクトル表現に従う実スカラー場 $\Phi(x) \in \mathbb{R}^3$
- ゲージ変換 : $O(x) \in \text{SO}(3)$ に対して,

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow O\Phi, \\ C_\mu &\rightarrow OC_\mu O^{-1} - \partial_\mu O O^{-1}. \end{aligned}$$

- 作用積分：

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} (D_\mu \Phi) \cdot (D^\mu \Phi) - V(\Phi) + \frac{1}{8g^2} \text{Tr} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \right]; \quad (5.5.33)$$

$$D_\mu \Phi = (\partial_\mu + C_\mu) \Phi, \quad (5.5.34)$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu + [C_\mu, C_\nu], \quad (5.5.35)$$

$$V(\Phi) = \frac{1}{4} \lambda (v^2 - \Phi \cdot \Phi)^2. \quad (5.5.36)$$

- 場の方程式：

$$D^\mu D_\mu \Phi = -\lambda (v^2 - \Phi \cdot \Phi) \Phi, \quad (5.5.37a)$$

$$(D_\nu G^{\nu\mu})_a + g^2 \Phi \cdot T_a D^\mu \Phi = 0. \quad (5.5.37b)$$

- エネルギー：

$$H = - \int d^3x C_0^a \left(-D_0 \Phi \cdot T_a \Phi + \frac{1}{g^2} D^j G_{0j}^a \right) + E, \quad (5.5.38)$$

$$E = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \{ (D_0 \Phi)^2 + (D_j \Phi) \cdot (D^j \Phi) \} + V \right. \\ \left. + \frac{1}{4g^2} (2G_{0j} \cdot G_0^j + G_{jk} \cdot G^{jk}) \right]. \quad (5.5.39)$$

B. Higgs バンドルの同型類

Creation: 2023/9/11

モノポール解が球対称で、原点で特異性を持つことを許容すると、モノポールが存在する系は、 $\mathbb{R}_*^3 \equiv \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ 上で定義されることになる。したがって、この系の状態は、ゲージ場が住む \mathbb{R}_*^3 上の $\text{SO}(3)$ 主束および Higgs 場が住む \mathbb{R}^3 ベクトル束の同型類により分類され、異なる同型類の間の遷移は原則禁止される。

具体的には、 \mathbb{R}_*^3 は S^2 とホモトピー同値で、 \mathbb{R}^3 の原点を囲む 2 次元球面 S^2 が \mathbb{R}_*^3 の変位レトラクトとなるので、バンドルの同型類は、 S^2 上の主束 $\mathcal{P} = (P, S^2, \text{SO}(3))$ ない Higgs 束 $\eta = \mathcal{P} \times_{\text{SO}(3)} \mathbb{R}^3$ の同型類と 1 対 1 に対応する。

まず、主 G 束の分類空間の一般論を用いて、この同型類を決定しよう。
 $SO(3)$ の分類空間 $BSO(3)$ と普遍束 $EOS(3)$ は

$$\begin{aligned} SO(3) &\xrightarrow{j} ESO(3) \xrightarrow{p} BSO(3) & (5.5.40) \\ BSO(3) &\cong \tilde{G}_3 = \tilde{G}_{\infty,3} \\ EOS(3) &\cong E(\tilde{\gamma}_3) = \left\{ (\pi, v) \mid \pi \in \tilde{G}_3, v \in \pi \subset \mathbb{R}^\infty \right\} \subset \tilde{G}_3 \times \mathbb{R}^\infty, \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、 $\tilde{G}_{n,k}$ は \mathbb{R}^n の向きづけられた k 次元線形部分空間の全体が作る多様体 (有向 Grassmann 多様体) である。ファイバー束のホモトピーに対して、完全系列

$$0 = \pi_2(E(\tilde{\gamma}_3)) \longrightarrow \pi_2(\tilde{G}_3) \xrightarrow{\cong} \pi_1(SO(3)) \longrightarrow \pi_1(E(\tilde{\gamma}_3)) = 0 \quad (5.5.41)$$

が成り立つので、

$$[S^2, \tilde{G}_3] \cong \pi_2(\tilde{G}_3) \cong \pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2 \quad (5.5.42)$$

を得る。これより、 S^2 上の主 $SO(3)$ 束の同型類は 2 個であることが分かる。

これらの同型類は、具体的に次のようにして構成することができる。まず、半径 r の球面を、

$$S^2(r) = D_+ \cup D_- : D_\pm = \{(x, y, z) \in S^2(r) \mid \pm z \geq 0\} \quad (5.5.43)$$

と上半球 D_+ と下半球 D_- に分割する。これらはいずれも可縮なので、 S^2 上のベクトル束 η を D_\pm に制限して得られるベクトル束 η_\pm は自明となる：

$$\eta = \eta_+ \cup_{g_{-+}} \eta_- \quad (5.5.44)$$

したがって、 η の構造は、 $S^1 = D_+ \cap D_-$ における推移関数 $g_{-+} : S^1 \rightarrow SO(3)$ のホモトピー類、

$$[g_{-+}] \in \pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2 \quad (5.5.45)$$

により決定される。具体的には、 $SU(2)$ の I_2 と $-I_2$ を結ぶ経路の $SO(3)$ への射影

$$U(\lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda} \end{pmatrix} \in SU(2) \quad (0 \leq \lambda \leq \pi) \mapsto O(\lambda) = R_3(-2\lambda) \in SO(3) \quad (5.5.46)$$

が $\pi(\text{SO}(3))$ の生成元となるので, 非自明なベクトル束 η_1 は, 推移関数を

$$\eta_1 \Leftrightarrow [g_{-+}]: \quad g_{-+}(\varphi) = R_3(-\varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \quad (5.5.47)$$

と取ることにより得られる. より一般には,

$$g_{-+}(\phi) = R_3(-n\phi) \Leftrightarrow \begin{cases} \eta_0 & : n \equiv 0 \pmod{2}, \\ \eta_1 & : n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \quad (5.5.48)$$

となる.

なお, η_1 に対しては, D_+ においてゲージ場 $C = 0$ でも, D_- では g_{-+} により $S^1 = D_+ \cap D_-$ 近傍においてゲージ場が生じる. このゲージ場が D_- での大域的なゲージ変換 $g(\theta, \phi)$ により消去できるとすると, $g(\pi, \phi) = g_0 = \text{const}$ なので, $g(\theta, \phi)^{-1}(\pi/2 \leq \theta \leq \pi)$ は, $g_{-+}(\phi)$ の一点 g_0 へのホモトピーを与えることになる. これは $[g_{-+}] \neq 0$ に反する. したがって, 非自明な Higgs 束が生じる場合には必ず $G = dC + C \wedge C \neq 0$ となるゲージ場が存在する.

C. 球対称配位 $G = \text{SO}(3)$ のとき, $T(g) = g$ (ベクトル表現) となるので, 一般性を失うことなく, 大域的な定数ゲージ変換により

$$x_0 = \pm r e_3, \quad \tilde{\Phi}(x_0) = \phi(r) e_3 \quad (5.5.49)$$

と置くことができる. このとき, $T(g(*, x_0))$ は, e_3 を軸とする回転からなる群 $H_{x_0} \cong \text{SO}(2)$ の自己準同形写像となるので, N を適当な整数として

$$O \in H_{x_0} \Rightarrow T(g(O, x_0)) = O^N \quad (5.5.50)$$

と表される.

まず, $N = 0$ のとき, 球対称条件は, \sim を省略して

$$\Phi(Ox) = \Phi(x), \quad D\Phi(Ox) = D\Phi(x), \quad G(Ox) = G(x) \quad (5.5.51)$$

となる. 次に, $N = 1$ の場合は,

$$L(x)\tilde{\Phi}(x) \rightarrow \Phi(x), \quad L(x)\tilde{G}(x)L(x)^{-1} \rightarrow G(x)$$

とゲージ変換すると,

$$\Phi(Ox) = O\Phi(x), \quad D\Phi(Ox) = OD\Phi(x), \quad G(Ox) = OG(x)O^{-1} \quad (5.5.52)$$

となる.

一方, $N \neq 0, 1$ に対しては, まず, $V_j = D_j \tilde{\Phi}(x_0)$ とおくと, $D_j \tilde{\Phi}(x_0)$ に対する整合性条件は,

$$\begin{aligned} O'^k O' V_k &= V_j, \quad \forall O' \in H_{x_0} \Rightarrow V_1 = V_2 = 0, \quad V_3 = v_3(r) e_3 \\ \Rightarrow D_j \tilde{\Phi}(x) &= L(x)_j^k V_k = v_3(r) n_j e_3 \end{aligned} \quad (5.5.53)$$

となる. 一方, $\tilde{\Phi}(x) = \pm \phi(r) e_3$ より

$$D_j \tilde{\Phi}(x) = \pm (\phi'(r) \delta_j^3 e_3 + \phi(r) C_j e_3) \quad (5.5.54)$$

これらの整合性より,

$$v_3 = \pm \phi', \quad (5.5.55)$$

$$C = c_\alpha(x) dx^\alpha T_3 \Rightarrow G = dc T_3 \quad (5.5.56)$$

を得る. 一方, $\tilde{G}(x_0)$ に対する整合性条件より,

$$G(x_0) = \frac{1}{2} F(r) dx^1 \wedge dx^2 T_3 \Rightarrow G(x) = F(r) \Omega_2 \quad (5.5.57)$$

を得る. これらの整合性より $F(r) = F_0$ が得られる.

以上より, $N \neq 0, 1$ に対応する球対称配位は

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \pm \phi(r) e_3, \quad D\Phi = \pm \phi'(r) dr, \\ C &= (F_0 \cos \theta d\varphi + d\lambda) T_3, \quad G = F_0 \Omega_2 T_3 \end{aligned} \quad (5.5.58)$$

となる. これは, 後ほど見るように, $N = 0$ の場合の配位と一致している.

以下, $N = 0$ の場合を I 型, $N = 1$ の場合を II 型と呼ぶこととし, 球対称条件を

$$\Phi(Ox) = O^N \Phi(x), \quad G(Ox) = O^N G(x) O^{-N} \quad (5.5.59)$$

と表す.

D. I 型の球対称配位 このとき, 球対称条件は, $T(O, x) = I_3$ より,

$$\Phi(Ox) = \Phi(x), \quad D\Phi(Ox) = D\Phi(x), \quad G(Ox) = G(x), \quad \forall O \in \text{SO}(3) \quad (5.5.60)$$

となる。これより、まず、 $e \in \mathbb{R}^3$ を定数ベクトルとして、

$$\Phi(x) = \phi(r)e \quad (5.5.61)$$

以下、大域的なゲージ変換により、 $e = e_3$ とする。

次に、

$$D\Phi = d\phi(r)e_3 + \phi(r)(C^1e_2 - C^2e_1) \quad (5.5.62)$$

が回転で不変より、

$$C^1 = C^2 = 0 \Rightarrow G = dC^3T_3 \quad (5.5.63)$$

となる。

最後に、 G は、 G^a が回転で不変な 2 形式となるので、

$$G = F(r)T_3d\Omega; \quad d\Omega = d\theta \wedge \sin(\theta)d\varphi \quad (5.5.64)$$

と形が制限される。これは、 $F(r) = F_0 = \text{const}$ を意味する。対応して、ゲージポテンシャルは

$$C = C^3T_3; \quad C^3 = -F_0 \cos \theta d\varphi + d\lambda \quad (5.5.65)$$

となる。

(D.1) 場の方程式と球対称解 この配位に対して、

$$D \cdot D\Phi = \partial^2 \phi e_3, \quad (5.5.66a)$$

$$(D \cdot G)^\mu = 0, \quad \Phi \cdot T_a D^\mu \Phi = 0 \quad (5.5.66b)$$

となるので、場の方程式は

$$\frac{1}{r^2}(r^2\phi(r)')' + \lambda(v^2 - \phi^2)\phi = 0 \quad (5.5.67)$$

となり、モノポールと Higgs 場は decouple する。この方程式の一般解の漸近挙動は

$$r \rightarrow 0 : \phi \rightarrow A + \frac{B}{r}, \quad (5.5.68a)$$

$$r \rightarrow \infty : \phi - v \rightarrow \frac{1}{r}(Ce^{mr} + De^{-mr}); \quad m = (2\lambda)^{1/2}v \quad (5.5.68b)$$

となる. これらのうち無限遠で $\phi \rightarrow v$ となり, 原点で有界な解は,

$$\phi(r) = v = \text{const} \quad (5.5.69)$$

に限られる. 実際. $\phi(r)$ の方程式より得られる方程式

$$\frac{1}{2} [(r^2 \phi')^2]' = \frac{1}{4} r^4 [\lambda(v^2 - \phi^2)^2]' \quad (5.5.70)$$

を r について $[0, \infty]$ で積分すると,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty dr r^4 [\lambda(v^2 - \phi^2)^2]' \\ &= [r^4 \lambda(v^2 - \phi^2)^2]_0^\infty - 4 \int_0^\infty dr r^3 \lambda(v^2 - \phi^2)^2 \\ &= -4 \int_0^\infty dr r^3 \lambda(v^2 - \phi^2)^2 \end{aligned} \quad (5.5.71)$$

より, $\phi(r) = v$ となる.

(D. 2) 解の貼り合わせ 2つのチャート U_\pm において, 基準点をそれぞれ $x_0 = x_\pm = \pm r e_3$ と取ると, 以上の議論はそれぞれのチャートにのみ適用されるので, 各チャートでの配位は, 適当なゲージの元で

$$\Phi_\pm(x) = \phi_\pm(r) e_3, \quad C_\pm = F_{0,\pm} (\pm 1 - \cos \theta) d\varphi T_3 \quad (5.5.72)$$

となる. Φ_\pm の形を保つ局所ゲージ変換は $R_3(\lambda)$ のみなので, 2つのチャートの貼り合わせを決定する推移関数は, 適当な許される追加のゲージ変換をしたとき

$$g_{-+} = R_3(-n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (5.5.73)$$

の形を取らなければならない. C_\pm がこの変換で張り合わされるとすると,,

$$C_- = C_+ - nd\varphi \Rightarrow -F_{0,-}(1 + \cos \theta) = F_{0,+}(1 - \cos \theta) - n \quad (5.5.74)$$

より,

$$F_{0,\pm} = F_0 = \frac{n}{2} \quad (5.5.75)$$

を得る.

以上より, 貼り合わせ条件は

$$\Phi_\pm(x) = \phi(r) e_3, \quad (5.5.76a)$$

$$C_\pm(x) = \frac{n}{2} (\pm 1 - \cos \theta) d\varphi T_3 \quad (5.5.76b)$$

となる.

(D. 3) モノポール磁荷 モノポール磁荷は次のようにして定まる。まず,

$$D\Phi^\alpha = d\Phi^\alpha + C^3 \epsilon_{\alpha\beta} \Phi^\beta \quad (5.5.77)$$

は, $\Phi^+ = \Phi^1 + i\Phi^2$ を用いて,

$$D\Phi^+ = (d - iC^3)\Phi^+ = (d - iQ_e A)\Phi^+ \Rightarrow Q_e A = C^3 \quad (5.5.78)$$

と表される。よって,

$$F = dA = \frac{F_0}{Q_e} d\Omega, \quad (5.5.79)$$

$$Q_m = \int_{S^2} \mathbf{B} \cdot d\Omega = \int_{S^2} F = 4\pi \frac{F_0}{Q_e} \quad (5.5.80)$$

あるいは,

$$\frac{Q_m Q_e}{4\pi} = F_0 = \frac{n}{2} \quad (5.5.81)$$

を得る。これは, n が電磁バンドルの第 1 Chern 数と一致することを表している。

(D. 4) 電磁バンドルの大域的記述 電磁バンドルに対する第 1 Chern 数 n が偶数のとき, Higgs バンドルは自明となるので, U_\pm における適当なゲージ変換により, Higgs バンドルが $\mathbb{R}_*^3 \times \mathbb{R}^3$ となる大域的なチャートを構成することができる。このチャートでは, Higgs 場の期待値 Φ およびその法平面により定まる電磁バンドルは, 一般に非球対称な非自明な配位をとる。その例を構成しよう。

まず, 必要なゲージ変換を構成するために, $SO(3)$ における経路 $R(-\lambda)$ と一点 $e = I_3$ を結ぶホモトピーを構成する。そのために, $SU(2) \cong S^3 \subset E^4$ での円の系列 $C(\xi)$ を

$$C(\xi) = S^2 \cap \Pi(\xi) \subset S^3 \subset E^4; \quad (5.5.82)$$

$$S^2 : x_0^2 + x_1^2 + x_3^2 = 1, x_2 = 0, \quad (5.5.83)$$

$$\Pi(\xi) : (x_0 - 1) \sin \xi + x_1 \cos \xi, \quad x_2 = 0 \quad (5.5.84)$$

により定義する。パラメータ表示では

$$x_0 = \sin^2 \xi + \cos(\lambda/2) \cos^2 \xi, \quad (5.5.85a)$$

$$x_1 = (1 - \cos(\lambda/2)) \sin \xi \cos \xi, \quad (5.5.85b)$$

$$x_2 = 0, \quad (5.5.85c)$$

$$x_3 = \sin(\lambda/2) \cos \xi \quad (5.5.85d)$$

これから，同相對應

$$\begin{aligned} j : S^3 \ni (x_0, x_1, x_2, x_3) &\mapsto x_0 I_2 + \sqrt{-1}(x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3) \\ &= \begin{pmatrix} x_0 + \sqrt{-1}x_3 & \sqrt{-1}x_1 + x_2 \\ \sqrt{-1}x_1 - x_2 & x_0 - \sqrt{-1}x_3 \end{pmatrix} \in \text{SU}(2) \end{aligned} \quad (5.5.86)$$

により， $\text{SU}(2)$ でのホモトピー

$$\Gamma(\lambda, \xi) \in \text{SU}(2), \quad 0 \leq \lambda \leq 4\pi, \quad 0 \leq \xi \leq \pi/2, \quad (5.5.87)$$

$$\Gamma(\lambda, 0) = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{-1}\lambda/2} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}\lambda/2} \end{pmatrix} \cong S^1, \quad (5.5.88)$$

$$\Gamma(\lambda, \pi/2) = I_2 \quad (5.5.89)$$

が得られる．最後に，射影

$$\pi : \text{SU}(2) \ni U \mapsto O \in \text{SO}(3); \quad U \sigma_j U^{-1} = \sigma_k O^k_j \quad (5.5.90)$$

により $\text{SO}(3)$ に写すと，ホモトピー $O(\lambda, \xi) : 2[S^1] \sim [e]$ が得られる．具体的な表式は

$$O^1_1 = \sin^2 \xi + \cos(\lambda) \cos^2 \xi, \quad (5.5.91a)$$

$$O^1_2 = 2 \sin(\lambda/2) \cos \xi (\sin^2 \xi + \cos(\lambda/2) \cos^2 \xi), \quad (5.5.91b)$$

$$O^1_3 = 2(1 - \cos(\lambda/2)) \sin(\lambda/2) \sin \xi \cos^2 \xi, \quad (5.5.91c)$$

$$O^2_1 = -O^1_2, \quad (5.5.91d)$$

$$O^2_2 = (1 + \cos(\lambda/2)) \cos^2(2\xi) - 2 \sin^2(\lambda/2) \cos^4 \xi, \quad (5.5.91e)$$

$$O^2_3 = 2 \cos^2 \xi (-\sin^2(\lambda/2) \cos^2 \xi + 2 \cos(\lambda/2) \sin^2 \xi) + \cos^2(2\xi), \quad (5.5.91f)$$

$$O^3_1 = O^1_3, \quad (5.5.91g)$$

$$O^3_2 = -\sin(2\xi) (\sin^2(\lambda/2) \cos^2 \xi + (\cos(\lambda/2) - 1) \cos(2\xi)) \quad (5.5.91h)$$

$$O^3_3 = \cos^2(2\xi) + (2 \sin^2(\lambda/2) + 4 \cos(\lambda/2)) \sin^2 \xi \cos^2 \xi. \quad (5.5.91i)$$

これを用いて, U_- での場を, $O' = O(n\varphi, h(\theta))$ により

$$\Phi'_- = O'\Phi_- = \phi(r)O'e_3 = \phi(r)v(\theta, \varphi), \quad (5.5.92a)$$

$$G'_- = O'G_-O'^{-1} = F_0d\Omega e_3 \cdot O'T_3O'^{-1} = F_0d\Omega v \cdot T, \quad (5.5.92b)$$

$$v = \begin{pmatrix} -2(1 - \cos(n\varphi/2)) \sin(n\varphi/2) \sin(h) \cos^2(h) \\ +2 \sin^2(n\varphi/2) \sin(h) \cos^3(h) + (\cos(n\varphi/2) - 1) \sin(2h) \cos(2h) \\ \sin^2(2h) + (\frac{1}{2} \sin^2(n\varphi/2) + \cos(n\varphi/2)) \sin^2(2h) \end{pmatrix} \quad (5.5.92c)$$

とゲージ変換する. 対応する C の表式は次のようになる:

$$\begin{aligned} C'_- = dh(\theta) & \left[-2 (\sin^2(n\varphi/2) \cos^2 h + \cos(n\varphi/2) - 1) T_1 \right. \\ & \quad + 2 \sin(n\varphi/2) (\cos(n\varphi/2) - 1) \cos^3 h T_2 \\ & \quad \left. + 2 \sin h \sin(n\varphi/2) \{ (\cos(n\varphi/2) - 1) \cos^2 h - 1 \} T_3 \right] \\ & + d\varphi \left[\left\{ -\frac{n}{2} \sin(n\varphi/2) \sin(2h) + 2F_0 \sin(n\varphi/2) (1 - \cos(n\varphi/2)) (1 + \cos \theta) \right\} T_1 \right. \\ & \quad \left\{ n \cos^2 h \sin h (\cos(n\varphi/2) - 1) - F_0 (1 + \cos \theta) \cos(2h) \right. \\ & \quad \left. \times (\sin^2(n\varphi/2) \cos^2 h - (1 - \cos(n\varphi/2)) \cos(2h)) \right\} T_2 \\ & \quad + \left\{ n \cos h (\cos(n\varphi/2) \sin^2 h + \cos^2 h) + F_0 (1 + \cos \theta) \right. \\ & \quad \left. \times \left(-\left(\frac{1}{2} \sin^2(n\varphi/2) + \cos(n\varphi/2)\right) \sin^2(2h) - \cos^2(2h) \right) \right\} T_3 \quad (5.5.93) \end{aligned}$$

今, 関数 $h(\theta)$ を,

$$h(\theta) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \theta \leq \theta_0, \\ \text{非減少}, & \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1, \\ \pi/2, & \theta_1 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (5.5.94)$$

を満たす C^∞ 関数に選ぶと, $F_0 = n/2$ のとき,

$$\theta = \theta_0 : C'_-(\theta) = n/2(1 - \cos \theta) = C_+(\theta), \quad (5.5.95a)$$

$$\theta_1 \leq \theta : C'_-(\theta) = C_-(\theta) \quad (5.5.95b)$$

となるので,

$$C' = C_+ (0 \leq \theta \leq \theta_0), \quad C'_- (\theta_0 \leq \theta \leq \pi) \quad (5.5.96)$$

は, \mathbb{R}_*^3 全体を覆う 1 個のチャート上の滑らかなゲージ場配位を与える. もちろん, C_\pm とはゲージ変換で結びつくので, 両者は全く等価な場の配位を与える.

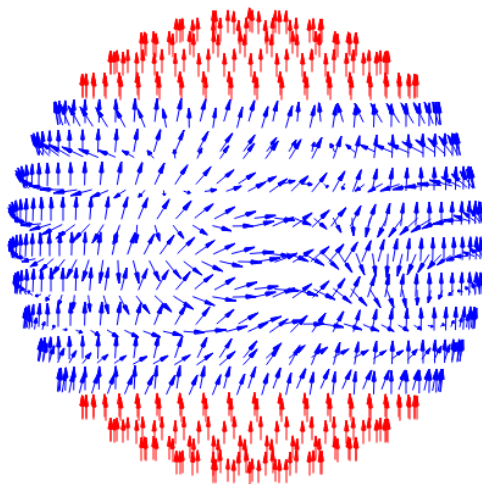


図 8: SO(3) ゲージ理論における $n = 4$ の磁気モノポール解に対する滑らかな Higgs ベクトルの配位. $\theta_0 = \pi/4, \theta_1 = 3\pi/4$.

E. II 型の球対称配位 球対称条件は

$$\Phi(Ox) = O\Phi(x), \quad D\Phi(Ox) = OD\Phi(x), \quad G(Ox) = OG(x)O^{-1}. \quad \forall O \in \text{SO}(3) \quad (5.5.97)$$

以下基準点を $x_0 = x_{\pm} = \pm re_3$ にとる.

まず, 第 1 式より, $n = x/r$ として,

$$O \in H_{x_0} \Rightarrow \Phi(x_0) = O\Phi(x_0) \Rightarrow \Phi(x_0) = \phi(r)n_0. \quad (5.5.98)$$

よって,

$$\Phi(x) = \Phi(L(x)x_0) = L(x)\Phi(x_0) = \phi(r)L(x)n_0 = \phi(r)n \quad (5.5.99)$$

この Higgs 場の配位に対し,

$$(D\Phi)(x) = d\phi n + \phi dn + Cn \quad (5.5.100)$$

より, $D\Phi$ に対する球対称条件は

$$\begin{aligned} C(Ox)On &= OC(x)n \\ \Leftrightarrow O_j^k C_k(x)n &= O^{-1}C_j(Ox)On = C_j^a(Ox)O_a^b T_b n \end{aligned} \quad (5.5.101)$$

となる．特に， $x = x_0$ に対し，

$$O \in H_{x_0} \Rightarrow O_a{}^b C_j^a(x_0) T^b n_0 = O_j{}^k C_k^a(x_0) T_a n_0 \quad (5.5.102)$$

が成り立つ．これより，任意の2次元回転行列 $R_\beta{}^\alpha$ に対し，

$$R_\beta{}^\alpha C_j^\beta(x_0) = (R_3)_j{}^k C_k^\alpha(x_0), \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (5.5.103)$$

が成り立つ．これより

$$j = 3 : R_\beta{}^\alpha C_3^\beta(x_0) = C_3^\alpha(x_0) \Rightarrow C_3^\alpha(x_0) = 0, \quad (5.5.104a)$$

$$j = \gamma : R_\alpha{}^\beta R_\gamma{}^\delta C_\delta^\beta(x_0) = C_\gamma^\alpha(x_0) \Leftrightarrow C_\beta^\alpha(x_0) = p\delta\delta_\beta^\alpha + q\epsilon_{\alpha\beta} \quad (5.5.104b)$$

が得られる．

次に，

$$L(x)_a{}^\gamma (L(x)^{-1})_\gamma{}^b = \delta_a^b - n_a n^b \quad (5.5.105)$$

を用いると，(5.5.101) 式より，

$$\begin{aligned} L(x)^{-1} C_j(x) n &= (L(x))_j{}^k C_k(x_0) e_3 \\ \Leftrightarrow C_j^\alpha(x) &= p(\delta_j^\alpha - n_j n^\alpha) + q\epsilon_j{}^a{}_b n^b + C_j^b(x) n_b n^\alpha \end{aligned} \quad (5.5.106)$$

よって，記号を変えて，

$$C_j(x) = W(r)(T_j - n_j(n \cdot T)) + Z(r)(n \times T)_j + B_j(x) n \cdot T \quad (5.5.107)$$

を得る．対応する $D\Phi$ の表式は

$$D\Phi = \phi'(r) dr n \cdot T - \phi(r) r W(r) (n \times dn) \cdot T + \phi(r) (1 + rZ(r)) dn \cdot T \quad (5.5.108)$$

となり，未定な $B_j(x)$ に依存せず球対称条件を満たす．

次に， $B_j(x)$ の形を決定するために， G の球対称性条件を用いる．まず， G を計算すると

$$\begin{aligned} G &= dC + C \wedge C \\ &= dr \wedge dn^j \{ (rW)' T_j + (rZ)' (n \times T)_j \} + dB(n \cdot T) \\ &\quad - d\Omega (r^2 W^2 + r^2 Z^2 + 2rZ) (n \cdot T) \\ &\quad + B \wedge dn^j \{ -(rZ + 1) T_j + rW (n \times T)_j \} \end{aligned} \quad (5.5.109)$$

となる．これが G に対する球対称条件を満たすためには，まず，任意の $O \in \text{SO}(3)$ に対し

$$dB(Ox) = dB(x) \Rightarrow dB = (F_0 - 1)\Omega_2 \Rightarrow B = -(F_0 - 1)\cos\theta d\varphi + db(x) \quad (5.5.110)$$

が要求される．さらに， $(rZ + 1)^2 + r^2W^2 \neq 0$ のときには，

$$B_j(Ox)(On)^j = B_j(x)n^j \Rightarrow b = b_0(r) + b_1(\theta, \varphi), \quad (5.5.111a)$$

$$B_k(Ox)O^k_j dn^j \wedge dn^l = B_k(x)dn^k \wedge dn^l \Rightarrow B = db_0(r) \quad (5.5.111b)$$

が成り立つことが必要となる．

以上より，II型の球対称配位は，

$$\Phi = \phi(r)n, \quad (5.5.112a)$$

$$D\Phi = dr\phi'(r)(n \cdot T) + rW(r)\phi(r)(n \times dn) \cdot T + \phi(rZ + 1)dn \cdot T, \quad (5.5.112b)$$

$$C = B(n \cdot T) + rZ(r)(n \times T) \cdot dn + rW(r)dn \cdot T, \quad (5.5.112c)$$

$$G = dr \wedge dn^j [\{(rW)' - A(r)(rZ + 1)\} T_j + \{(rZ)' + rA(r)W\} (n \times T)_j] - \Omega_2 (r^2W^2 + (rZ + 1)^2 - F_0) (n \cdot T) \quad (5.5.112d)$$

で与えられる．ここで， $A(r)$ は r の任意関数， B は次の1形式である：

$$rZ = -1, W = 0 \Rightarrow B = (F_0 - 1)(\pm 1 - \cos\theta)d\varphi + db(x), \quad (5.5.113a)$$

$$rZ \neq -1 \text{ or } W \neq 0 \Rightarrow B = A(r)dr, \quad F_0 = 1 \quad (5.5.113b)$$

これらの配位のうち， $rZ = -1, W = 0$ に対応するもの

$$\Phi = \phi(r)n, \quad D\Phi = dr\phi'(r)n \cdot T, \quad C = (F_0 - 1)(\pm 1 - \cos\theta)d\varphi + (n \times dn) \cdot T, \quad G = F_0\Omega_2 \quad (5.5.114)$$

はI型の配位を $L(x)$ によりゲージ変換したものとなっている．したがって，物理的にあらたな配位は， $(rZ + 1)^2 + r^2W^2 \neq 0$ となる $F = 1$ の配位のみである．後ほど見るように，この配位が't Hooft-Polyakov 解を与える．

(E.1) 貼り合わせ条件 上記の配位は U_{\pm} のそれぞれの領域で成り立つ. これら 2つの領域の解をマッチングするための推移関数は, 上記形を保つ必要があるので,

$$g_{-+} = R(\lambda, n) \quad (5.5.115)$$

の形を持たないといけない. この推移関数によるゲージ変換

$$\tilde{C}_j = R(\lambda, n)C_jR(\lambda, n)^{-1} - \partial_jR(\lambda, n)R(\lambda, n)^{-1} \quad (5.5.116)$$

は

$$\tilde{C} + (n \times T) \cdot dn = R(\lambda, n)(C + (n \wedge T) \cdot dn)R(\lambda, n)^{-1} + d\lambda(n \cdot T) \quad (5.5.117)$$

となる. 場で表すと, $Y = Z + 1/r$ として,

$$\begin{pmatrix} Y \\ W \end{pmatrix} \rightarrow R_2(\lambda) \begin{pmatrix} Y \\ W \end{pmatrix}, \quad (5.5.118)$$

$$B \rightarrow B + d\lambda \quad (5.5.119)$$

となる. したがって, C の形が保たれるためには, I型配位に対応する配位に対しては,

$$\lambda = -2(F_0 - 1)\varphi$$

で, マッチング条件は

$$\phi_{\pm} = \phi(r), \quad B_- = B_+ + d\lambda, \quad Z_{\pm} = -1/r, \quad W_{\pm} = 0 \quad (5.5.120)$$

となる. 一方, $(rZ + 1)^2 + r^2W^2 \neq 0$ となる配位に対しては, $\lambda = \lambda(r)$ で, U_{\pm} の各領域での配位が自動的に全領域 \mathbb{R}_*^3 で正則なので, 推移関数 g_{-+} が自明となることを意味する. すなわち, マッチング条件は

$$\phi_{\pm} = \phi(r), \quad A_{\pm}(r) = A(r), \quad Z_{\pm} = Z(r), \quad W_{\pm} = W(r) \quad (5.5.121)$$

となる.

(E.2) モノポール磁荷 次に, モノポール磁荷を求める. このためには, 電磁場を定義する必要があるが, 一般に Higgs 場の真空期待値 Φ が定数でないとき, 局所的に Φ を一定に保つ局所 $SO(3)$ ゲージ変換に対応する Lie 代数 $\mathfrak{so}(3)$ の元が場所に依存するため, 電磁場のセクターは直ちには定まらない. この問題を解決する一つの方法は, Higgs 場が並行になるゲー

ジを用いることである。このゲージでは、Higgs 場を不変に保つ $\mathfrak{so}(3)$ の元は（定数倍を除いて）場所に依らず一意的に定まるので、曖昧さなく（ $\text{SO}(3)$ 場の部分場として）電磁場が定まる。これを元のゲージに変換すれば、II 型球対称配位での電磁場が得られる。

まず、 $\Phi(x) = \phi(x)e_3$ となる I 型の配位では、残留ゲージ自由度は $R_3(\lambda)$ となり、対応する電磁場 $\hat{A}(x)$ は

$$C = Q_e \hat{A}(x) T_3 = Q_e \hat{A}(x) e_3 \cdot T \quad (5.5.122)$$

となる。これに、局所回転ゲージ変換 $O = R(\theta, m)$ を施すと、一般に、

$$Ov \cdot TO^{-1} = (Ov) \cdot T \quad (5.5.123)$$

より、チャート U_+ におけるハリネズミゲージでの場 C_\pm への電磁場 \hat{A}_\pm の埋め込みとして

$$\Phi_+(x) = \phi_+(x)n, \quad (5.5.124a)$$

$$C_+ = \left\{ Q_e \hat{A}_+(x) - (1 - \cos \theta) d\varphi \right\} n \cdot T - dn \cdot (n \times T) \quad (5.5.124b)$$

を得る。このゲージでの残留ゲージ自由度 $O(x)$ は

$$O(x)n = n \Rightarrow O(x) = R(\lambda(x), n) \quad (5.5.125)$$

となるが、 C_+ はこのゲージ変換に対して、

$$C_+ \rightarrow C_+ + d\lambda n \cdot T \Leftrightarrow \hat{A}_+ \rightarrow \hat{A}_+ + Q_e^{-1} d\lambda \quad (5.5.126)$$

と変換するので、電磁場 \hat{A} のゲージ変換と整合的となっている。また、場の強度 G は

$$G_+(x) = Q_e d\hat{A}_+ n \cdot T = Q_e \hat{F}_+ n \cdot T \quad (5.5.127)$$

で与えられ、 $n \cdot T$ が残留ゲージ自由度の生成元であることと整合的となる。

これらのことより、ハリネズミゲージでは

$$A_+(x) = Q_e \hat{A}_+(x) - (1 - \cos \theta) d\varphi, \quad Z_+(x) = -\frac{1}{r}, \quad W_+(x) = 0 \quad (5.5.128)$$

が電磁場セクターを与える。

チャート U_- での電磁セクターも同様にして抽出される. U_+ の場合と同じく $\Phi(x) = \phi_-(x)e_3$ となるゲージで電磁セクター \hat{A}_- を定義すると, II 型配位での場合は, ゲージ変換 $O = R(-\pi + \theta, m)R_1(\pi)$ により得られる:

$$\Phi_-(x) = \phi_-(x)n, \quad (5.5.129a)$$

$$C_- = \left\{ Q_e \hat{A}_-(x) + (1 + \cos \theta) d\varphi \right\} n \cdot T - dn \cdot (n \times T), \quad (5.5.129b)$$

$$G_- = Q_e d\hat{A}_- n \cdot T = Q_e \hat{F}_- n \cdot T \quad (5.5.129c)$$

II 型球対称配位に対しては,

$$A_-(x) = A_-(r)dr \Rightarrow Q_e \hat{A}_-(x) = A_-(r)dr - (1 + \cos \theta) d\varphi \quad (5.5.130)$$

となる.

$U_+ \cap U_-$ では $\Phi_+ = \Phi_-$, $C_+ = C_-$ なので,

$$\phi_{\pm}(x) = \phi(r), \quad A_{\pm}(r) = A(r) \quad (5.5.131)$$

となるので, 電磁ポテンシャルに対する接続条件は

$$Q_e \hat{A}_- = Q_e \hat{A}_+ - 2d\varphi \quad (5.5.132)$$

となる. これは, $n = 2$ の場合 I 型球対称配位と一致する. すなわち, この II 型球対称配位は磁荷

$$Q_e Q_m = 4\pi \quad (5.5.133)$$

の磁気モノポールを表す. このことは, 場の強度

$$Q_e \hat{F} n \cdot T = G(x) = d\Omega n \cdot T \quad (5.5.134)$$

からも直接確かめられる.

(E.3) 有効作用積分 作用積分

$$\begin{aligned} S = 4\pi \int dt \int_0^\infty dr r^2 & \left[\frac{1}{2} \dot{\Phi} \cdot \dot{\Phi} - \frac{1}{2} (D_j \Phi) \cdot (D^j \Phi) - V(\Phi) \right. \\ & \left. + \frac{1}{4g^2} \text{Tr}(G_{0j} G^{0j}) + \frac{1}{8g^2} \text{Tr}(G_{jk} G^{jk}) \right] \end{aligned} \quad (5.5.135)$$

において, $D_j \Phi$ は

$$\begin{aligned} (D_j \Phi)^2 &= [n^a \partial_j \phi + \partial_j n^a \phi + (C_j n)^a \phi \\ &= n^a n_j \phi' + \frac{1}{r} (\delta_j^a - n_j n^a) \phi + (C_j n)^a \phi \end{aligned} \quad (5.5.136)$$

となる。ここで, $(n \cdot T)n = 0$ より,

$$(C_j n)^a = Z[(n \wedge T)_j n]^a + W[T_j n]^a = Z(\delta_j^a - n_j n^a) + W\epsilon_j^a{}_c n^c. \quad (5.5.137)$$

よって,

$$(D_j \Phi)^a = n^a n_j \phi' + \phi \left(Z + \frac{1}{r} \right) (\delta_j^a - n_j n^a) + W\epsilon_j^a{}_c n^c \quad (5.5.138)$$

したがって,

$$(D_j \Phi) \cdot (D^j \Phi) = (\phi')^2 + 2\phi^2 \left\{ \left(Z + \frac{1}{r} \right)^2 + W^2 \right\}. \quad (5.5.139)$$

次に, ゲージ場の寄与を計算する。まず, 運動項は,

$$(n \wedge T)_j n^j = n^j (T_j - n_j (n \cdot T)) = 0, \quad (5.5.140)$$

$$(n \cdot T)_j (T^j - n^j (n \cdot T)) = (n \cdot T)_j T^j = n \cdot T, \quad (5.5.141)$$

$$(n \wedge T)^j (n \wedge T)_j = (n \cdot T)^2 \Rightarrow \text{Tr}[(n \cdot T)^2] = -4, \quad (5.5.142)$$

$$n_j (n \cdot T) n^j (n \cdot T) = (n \cdot T)^2, \quad (5.5.143)$$

$$(T_j - n_j (n \cdot T))(T^j - n^j (n \cdot T)) = T^j T_j - (n \cdot T)^2 = -2I_3 - (n \cdot T)^2 \quad (5.5.144)$$

より,

$$\text{Tr}(G_{0j} G^{0j}) = -\text{Tr}(\dot{C}_j \dot{C}^j) = 2\dot{A}^2 + 4\dot{Z}^2 + 4\dot{W}^2. \quad (5.5.145)$$

次に,

$$\begin{aligned} \partial_j C_k - \partial_k C_j &= 2 \left(Z' - \frac{Z}{r} \right) n_{[j} (n \wedge T)_{k]} - \frac{2Z}{r} \epsilon_{jk}{}^a T_a \\ &\quad + 2 \left(W' + \frac{W}{r} - \frac{Z}{r} \right) n_{[j} T_{k]} \end{aligned} \quad (5.5.146)$$

および

$$[(n \wedge T)_j, (n \wedge T)_k] = -\epsilon_{jka} n^a (n \cdot T), \quad (5.5.147)$$

$$[T_j - n_j (n \cdot T), T_k - n_k (n \cdot T)] = -\epsilon_{jk}{}^a T_a + 2n_{[j} (n \wedge T)_{k]} \quad (5.5.148)$$

$$[(n \wedge T)_{[j}, n_{k]}(n \cdot T)] = -n_{[j} T_{k]}, \quad (5.5.149)$$

$$[(n \wedge T)_{[j}, T_{k]} - n_{k]}(n \cdot T)] = 0, \quad (5.5.150)$$

$$[(n_{[j} (n \cdot T), T_{k]})] = n_{[j} (n \wedge T)_{k]} \quad (5.5.151)$$

より,

$$\begin{aligned}
[C_j, C_k] &= -Z^2 \epsilon_{jka} n^a (n \cdot T) - W^2 (\epsilon_{jk}{}^a T_a + 2n_j (n \wedge T)_k) \\
&\quad - 2AZ n_{[j} T_{k]} + 2AW n_{[j} (n \wedge T)_{k]} \quad (5.5.152)
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
G_{jk} &= 2 \left(Z' - \frac{Z}{r} - W^2 + AW \right) n_{[j} (n \wedge T)_{k]} \\
&\quad - \left(\frac{2Z}{r} + W^2 \right) \epsilon_{jk}{}^a T_a - Z^2 \epsilon_{jka} n^a (n \cdot T) \\
&\quad + 2 \left(W' + \frac{W}{r} - AZ - \frac{A}{r} \right) n_{[j} T_{k]}. \quad (5.5.153)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\text{Tr}(n \wedge T)_j (n \wedge T)^j = -4, \quad (5.5.154)$$

$$\text{Tr}(\epsilon_{jk}{}^a T_a \epsilon^{jkb} T_b) = 2\text{Tr}(T_a T^a) = -12, \quad (5.5.155)$$

$$\text{Tr}((n_{[j} T_{k]})(n^j T^k)) = -2, \quad (5.5.156)$$

$$\text{Tr}(\epsilon_{jka} n^a (n \cdot T) \epsilon_b{}^{jk} n^b (n \cdot T)) = -4, \quad (5.5.157)$$

$$\text{Tr}(n_j (n \wedge T)_k \epsilon^{jka} T_a) = 4, \quad (5.5.158)$$

$$\text{Tr}((\epsilon^{jka} T_a)(\epsilon_{jkb} n^b (n \cdot T))) = -4, \quad (5.5.159)$$

$$\text{Tr}(n_j (n \wedge T)_k n^{[j} T^{k]}) = \text{Tr}(n_j (n \wedge T)_k \epsilon^{jkl} n_l (n \cdot T)) = 0, \quad (5.5.160)$$

$$\text{Tr}(\epsilon_{jk}{}^a T_a n^j T^k) = \text{Tr}(n_j T_k \epsilon^{jka} n_a (n \cdot T)) = 0 \quad (5.5.161)$$

より,

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(G_{jk} G^{jk}) &= -8 ((W')^2 + (Y')^2) - \frac{16}{r} (WW' + YY') \\
&\quad + 16A (3W' - WY') - 8A^2 (W^2 + Y^2) \\
&\quad - 4 (W^2 + Y^2)^2 - \frac{4}{r^4}. \quad (5.5.162)
\end{aligned}$$

ここで,

$$Y = Z + \frac{1}{r} \quad (5.5.163)$$

以上より，球対称配位に対する作用積分は，

$$\begin{aligned}
S = 4\pi \int dt \int_0^\infty dr r^2 & \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\phi')^2 - V(\phi) - \phi^2 (Y^2 + W^2) \right. \\
& + \frac{1}{2g^2} \left\{ \dot{A}^2 + 2\dot{Y}^2 + 2\dot{W}^2 - 8 \left((W')^2 + (Y')^2 \right) \right. \\
& - \frac{16}{r} (WW' + YY') + 16A(3W' - WY') - 8A^2(W^2 + Y^2) \\
& \left. \left. - 4(W^2 + Y^2)^2 - \frac{4}{r^4} \right\} \right] \quad (5.5.164)
\end{aligned}$$

(E.4) 静的球対場に対する方程式 静的球対称配位に対する方程式を求めるには， $\phi = \phi(r)$, $A = A(r)$, $Z = Z(r)$, $W = W(r)$ と置けばよいが，このとき， $A(r)$ は A' を含まないので， A に関する変分方程式より

$$\delta_A S = 0 \Rightarrow A = \frac{YW' - WY'}{(W^2 + Y^2)}. \quad (5.5.165)$$

この関係式を作用積分に代入すると，作用積分は

$$S_{\text{eff}} = -E, \quad (5.5.166)$$

$$\begin{aligned}
E = 4\pi \int dt \int_0^\infty dr r^2 & \left[\frac{1}{2} (\phi')^2 + \frac{\lambda}{4} (v^2 - \phi^2)^2 + \phi^2 F^2 \right. \\
& \left. + \frac{1}{2g^2} \left\{ 2 \left(F' + \frac{F}{r} \right)^2 + \left(F^2 - \frac{1}{r^2} \right)^2 \right\} \right] \quad (5.5.167)
\end{aligned}$$

となる．ここで，

$$F^2 = Y^2 + W^2 \quad (5.5.168)$$

である．

ここで，最終的な有効作用積分においてゲージ場が一個の変数 F にまとめられたのは，理論のゲージ不変性のためである．実際， $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$ を軸とする局所回転

$$O_n(\theta) = e^{\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}} \quad (5.5.169)$$

に対応するゲージ変換を施すと，

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{T})^2 = -(I_3 - \mathbf{n} \circ \mathbf{n}) \quad (5.5.170)$$

より，

$$O_n(\theta) = \mathbf{n} \circ \mathbf{n} + \cos(\theta)(I_3 - \mathbf{n} \circ \mathbf{n}) + \sin(\theta) \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \quad (5.5.171)$$

となるので, ゲージ変換

$$\tilde{C}_j = O_n(\theta)C_jO_n(\theta)^{-1} - \partial_jO_n(\theta)O_n(\theta)^{-1} \quad (5.5.172)$$

は

$$\tilde{C}_j + \frac{1}{r}(n \wedge T)_j = O_n(C_j + \frac{1}{r}(n \wedge T)_j)O_n^{-1} - \theta'n_j(n \cdot T) \quad (5.5.173)$$

となる. 場で表すと

$$\begin{pmatrix} Y \\ W \end{pmatrix} \rightarrow R_2(-\theta) \begin{pmatrix} Y \\ W \end{pmatrix}, \quad (5.5.174)$$

$$A \rightarrow A - \theta' \quad (5.5.175)$$

となる.

このゲージ自由度を用いて $W = 0$ とすると, $A = 0$ となる. このゲージでは, $Y = Z + 1/r (= \pm F)$ のみが残る, 作用積分は

$$S = -E, \quad (5.5.176)$$

$$E = 4\pi \int_0^\infty dr \left[\frac{1}{2}r^2(\phi')^2 + (rZ + 1)^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4}r^2(v^2 - \phi^2)^2 + \frac{1}{g^2} \left\{ (rZ' + Z)^2 + \frac{1}{2}Z^2(rZ + 2)^2 \right\} \right], \quad (5.5.177)$$

場の方程式は

$$\phi'' + \frac{2}{r}\phi' - 2(Z + 1/r)^2\phi + \lambda\phi(v^2 - \phi^2) = 0, \quad (5.5.178a)$$

$$Z'' + \frac{2}{r}Z' - \left(Z + \frac{1}{r} \right) \left(Z^2 + \frac{2}{r}Z + g^2\phi^2 \right) = 0 \quad (5.5.178b)$$

となる. なお, 変数とパラメータのスケールリング

$$\phi \rightarrow v\hat{\phi}, \quad Z \rightarrow gv\hat{Z}, \quad r \rightarrow \frac{1}{gv}\hat{r}, \quad (5.5.179a)$$

$$\lambda \rightarrow g^2\hat{\lambda}, \quad E \rightarrow \frac{v}{g}\hat{E} \quad (5.5.179b)$$

により

$$g = 1, \quad v = 1 \quad (5.5.180)$$

と置くことができる.

(E. 5) 特異厳密解 (Wu-Yang モノポール解) 次の配位が常に厳密に場の方程式を満たすことが直ちにわかる:

$$\phi = v, \quad Z = -\frac{1}{r} \quad (5.5.181)$$

U(1) ゲージ理論における磁気単極子解と同様, この解は原点で特異となり, 全エネルギー E は無限大となるが,

$$B^j = \frac{1}{2} \epsilon^{jkl} G_{kl} = \frac{1}{r^2} (n \cdot T) \quad (5.5.182)$$

より, 有限な磁荷をもつ. その値は次のようにして決まる. まず, 運動項が通常の規格化に従う電磁ポテンシャル \hat{A}_j と今の理論の対応物 A_j の関係が

$$\frac{1}{g} A_j \mapsto \hat{A}_j \quad (5.5.183)$$

で与えられるので,

$$D_\mu \Phi = (\partial_\mu + A_\mu(n \cdot T)) \Phi = \left(\partial + g \hat{A}_\mu(n \cdot T) \right) \Phi \quad (5.5.184)$$

となるが,

$$U(1) \ni e^{i\phi} \mapsto R_n(\phi) = e^{\phi n \cdot T} \quad (5.5.185)$$

となるので,

$$g = Q_e \quad (5.5.186)$$

が得られる. よって,

$$Q_m = \int_{S^2} \hat{B} \cdot d\Sigma = \frac{1}{g} \int_{S^2} \mathbf{B} \cdot d\Sigma = 4\pi \frac{1}{g} = \frac{4\pi}{Q_e} \quad (5.5.187)$$

となり, Dirac の量子化条件 ($n = 2$) が満たされる.

実は, この Wu-Yang モノポール解はゲージ変換により, U(1) ゲージ理論における $n \equiv Q_e Q_m / (4\pi \hbar c) = 2$ の Dirac モノポールに変換される. 実際, n を $e_3 = (0, 0, 1)$ に移す局所回転に対応するゲージ変換

$$\begin{aligned} O &= \exp(-\theta m \cdot T) = (1 - \cos \theta) m \frac{T}{m} + \cos \theta I_3 - \sin \theta m \mathbf{E} \quad (5.5.188) \\ \sin \theta &= \sqrt{x^2 + y^2} / r, \quad \cos \theta = z / r, \\ m &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (-y, x, 0) \quad (5.5.189) \end{aligned}$$

をこの解に施すと

$$C_j = -\frac{1}{r}(n \wedge T)_j \Rightarrow C'_i = A_j T_3, \quad (5.5.190)$$

$$\hat{A}_j dx^j = \frac{1}{Q_e} A_j dx^j = \frac{1}{Q_e} (1 - \cos \theta) d\phi = \frac{4\pi}{Q_e Q_m} \mathcal{A}_+ = \mathcal{A}_+ \quad (5.5.191)$$

となり, Higgs 場が一様な期待値 $(0, 0, v)$ を持つ SSB での, 残存 U(1) ゲージ場に対する $n = 2$ の Dirac モノポールが得られる. また, ゲージ変換

$$O = \exp((\pi - \theta)m \cdot T) = (1 + \cos \theta)m^T m - \cos \theta I_3 + \sin \theta m \cdot \quad (5.5.192)$$

を解に施すと

$$\Phi = vn \Rightarrow \Phi' = -ve_3, \quad (5.5.193)$$

$$C_j = -\frac{1}{r}(n \wedge T)_j \Rightarrow C'_i = A_j (-T_3), \quad (5.5.194)$$

$$\hat{A}_j dx^j = \frac{1}{Q_e} A_j dx^j = -\frac{1}{Q_e} (1 + \cos \theta) d\phi = \frac{4\pi}{Q_e Q_m} \mathcal{A}_- = \mathcal{A}_- \quad (5.5.195)$$

となり, Higgs 場が一様な期待値 $(0, 0, -v)$ を持つ SSB での, 残留 U(1) ゲージ場に対する Dirac 型モノポール解が得られる.

(E. 6) 正則モノポール解 ('t Hooft-Polyakov 解) 正則解は, $r \rightarrow \infty$ で上記特異解に漸近し, かつ原点で正則でなければならないので, 境界条件は次のようになる:

(i) $r \rightarrow \infty$: $Y = Z + 1/r \rightarrow 0$, $\phi \rightarrow v$ とすると, 方程式は無遠で

$$\phi'' + \frac{2}{r}\phi' - 2v^2\lambda(\phi - v) \approx 0, \quad (5.5.196a)$$

$$Y'' + \frac{2}{r}Y' - \frac{2g^2v^2}{2}Y \approx 0 \quad (5.5.196b)$$

となる. 漸近解は,

$$\phi \approx v + \frac{\phi_\infty}{r} e^{-\sqrt{2\lambda}vr}, \quad (5.5.197a)$$

$$Y \approx \frac{z_\infty}{r} e^{-gvr} \quad (5.5.197b)$$

となる. 特に, これより, $r \sim \infty$ で

$$Z \approx -\frac{1}{r} + \frac{z_\infty}{r} e^{-gvr}, \quad (5.5.198)$$

$$B^j \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{ikl} G_{kl} \approx \frac{1}{r^2} n^j (n \cdot T) \quad (5.5.199)$$

を得る. Higgs 場による自発的対称性の破れで残る $U(1)$ の生成基底は $(n \cdot T)$ となるので, これは遠方でこの $U(1)$ ゲージ場に対する磁場が放射状で有限なフラックスを持つことを意味する. したがって, この漸近条件を満たす解は, モノポール解となる.

- (ii) $r \rightarrow 0$: 解が原点 $r = 0$ で滑らかとすると, $\phi(0) = 0$ が必要で, このとき, Z の方程式は

$$Z'' + \frac{2}{r}Z' - \left(Z + \frac{1}{r}\right) \left(Z^2 + \frac{2}{r}Z\right) \approx 0 \quad (5.5.200)$$

これは原点で正則な解をもち,

$$Z = z_0 r^\mu + \dots \Rightarrow \mu^2 + \mu - 2 = 0 \Rightarrow \mu = 1. \quad (5.5.201)$$

このとき, ϕ の方程式は

$$\phi'' + \frac{2}{r}\phi' - \frac{2}{r^2}\phi + \lambda v^2 \phi \approx 0 \quad (5.5.202)$$

原点で正則な解は

$$\phi \approx \phi_0 j_1(\sqrt{\lambda}vr) \quad (5.5.203)$$

以上の境界条件を満たす解は, エネルギー積分 E を最小にする配位を数値的に求めることにより得られる. 実際, E が有限であるためには, $r \rightarrow 0$ で,

$$\sqrt{r}\phi \rightarrow 0, \quad \sqrt{r}Z \rightarrow 0 \quad (5.5.204)$$

が必要となるが, この条件を満たす場の方程式の解は,

$$\phi/r \rightarrow \text{const}, \quad Z/r \rightarrow \text{const} \quad (5.5.205)$$

と振る舞う. また, $r \rightarrow \infty$ で E が有限となるためには,

$$\phi \rightarrow v, \quad rz \rightarrow -1 \quad (5.5.206)$$

が必要となる. したがって, E が有限な配位で E を最小とするものがあれば, 上記境界条件を満たす正則解を与える.,

$\lambda = g^2$ の場合の結果は図 9 のようになる. 対応する境界条件のパラメータは

$$\hat{\phi}_0 \simeq 0.894, \quad \hat{Z}_0 \simeq -0.370, \quad \hat{\phi}_\infty \approx 10^9, \quad \hat{Z}_\infty \approx 5 \times 10^5, \quad (5.5.207)$$

全エネルギーは,

$$E \simeq 4\pi \cdot 1.26 \frac{M_W}{g^2} l \quad M_W = gv \quad (5.5.208)$$

で与えられる.

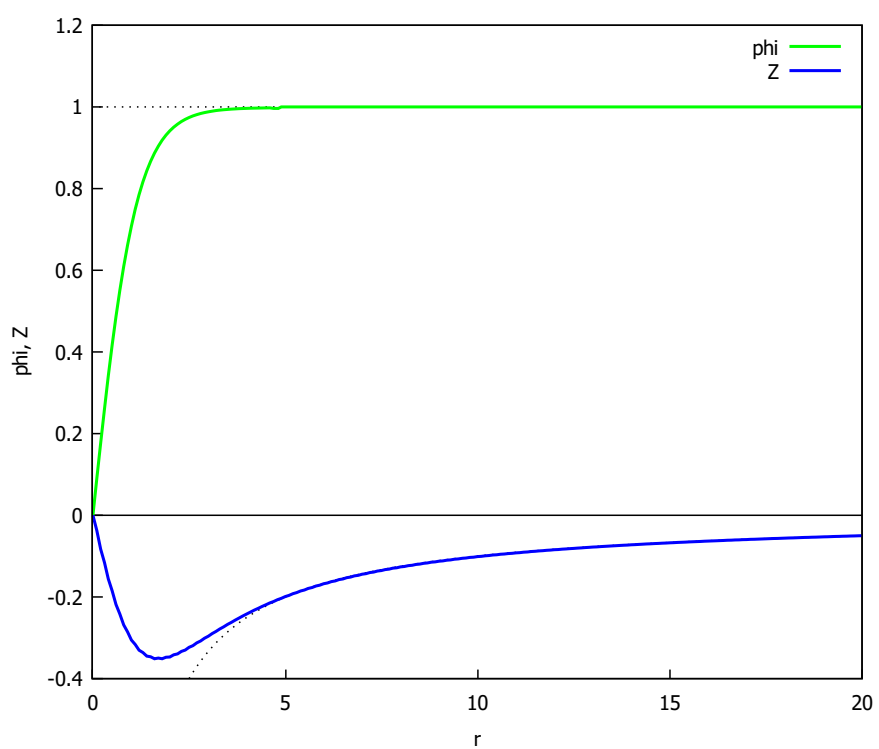


図 9: 't Hooft-Polyakov モノポール解: $\lambda = g^2$, $gvr \rightarrow r, \phi/v \rightarrow \phi, Z/(gv) \rightarrow Z$

(E. 7) II 型球対称解の Dirac gauge での表式 チャート U_+ での II 型球対称配位

$$\Phi = \phi(r)n, \quad (5.5.209a)$$

$$C = A(r)drn \cdot T + rZ(r)dn \cdot (n \times T) + r''(r)dn \cdot T \quad (5.5.209b)$$

をゲージ変換 $R(-\theta, m)$ により変換すると,

$$\Phi_+ = \phi(r)e_3, \quad (5.5.210a)$$

$$\begin{aligned} C_+ = & \{A(r)dr + (1 - \cos\theta)d\varphi\} T_3 \\ & + (rZ(r) + 1) \{-(n \times dn)^\alpha T_\alpha + (1 - \cos\theta)d\varphi n^\alpha T_\alpha\} \\ & + rW(r) \{-(n \times dn) \times T\}_3 + (1 - \cos\theta)d\varphi(n \times T)_3 \end{aligned} \quad (5.5.210b)$$

を得る.

同様に, チャート U_- では, ゲージ変換 $R(\pi - \theta, m)$ により,

$$\Phi_- = -\phi(r)e_3, \quad (5.5.211a)$$

$$\begin{aligned} C_- = & -\{A(r)dr - (1 + \cos\theta)d\varphi\} T_3 \\ & + (rZ(r) + 1) \{-(n \times dn)^\alpha T_\alpha - (1 + \cos\theta)d\varphi n^\alpha T_\alpha\} \\ & + rW(r) \{(n \times dn) \times T\}_3 + (1 + \cos\theta)d\varphi(n \times T)_3 \end{aligned} \quad (5.5.211b)$$

を得る.

F. Dyon 解

(F.1) Ansatz と作用積分 以上のモデルにおいて, $C_0 \neq 0$ とすると, C_0 は大域的 SU(2) 変換に対してベクトル Higgs と同じ振る舞いをするので, 他のゲージ場の空間成分との整合性を考慮すると, 球対称な配位は

$$C_0 = -\psi(t, r)(n \cdot T) \quad (5.5.212)$$

となる. したがって, $P_j^k = \delta_j^k - n_j n^k$ として,

$$[n \cdot T, (n \wedge T)_j] = -P_j^k T_k, \quad [n \cdot T, P_j^k T_k] = (n \wedge T)_j \quad (5.5.213)$$

より,

$$G_{0j} = (\dot{A} + \psi')n_j(n \cdot T) + (\dot{Z} - \psi W)(n \wedge T)_j \\ + \left(\dot{W} + \psi \left(Z + \frac{1}{r} \right) \right) P_j^k T_k. \quad (5.5.214)$$

よって, 作用積分に対する G_{0j} の寄与は

$$\text{Tr}(G_{0j}G^{0j}) = 2(\dot{A} + \psi')^2 + 4(\dot{Z} - \psi W)^2 \\ + \left(\dot{W} + \psi \left(Z + \frac{1}{r} \right) \right)^2 \quad (5.5.215)$$

へと変わるが, 他の項は変更を受けない.

以上より, 定常解に対する作用積分は,

$$S = -4\pi \int dt \int_0^\infty dr r^2 \left[\frac{1}{2}(\phi')^2 + \frac{\lambda}{4}(v^2 - \phi^2)^2 + \phi^2 F^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2g^2} \left\{ 2 \left(F' + \frac{F}{r} \right)^2 + \left(F^2 - \frac{1}{r^2} \right)^2 - (\psi')^2 - 2\psi^2 \left[\frac{3}{2} \right] \right\} \right] \quad (5.5.216)$$

となる.

(F.2) 運動方程式と dyon 解 ゲージ $F = Z + 1/r$ のもとで, 場の方程式は

$$\phi'' + \frac{2}{r}\phi' - 2(Z + 1/r)^2\phi + \lambda\phi(v^2 - \phi^2) = 0, \quad (5.5.217a)$$

$$Z'' + \frac{2}{r}Z' - \left(Z + \frac{1}{r} \right) \left(Z^2 + \frac{2}{r}Z - \psi^2 + g^2\phi^2 \right) = 0 \quad (5.5.217b)$$

$$\psi'' + \frac{2}{r}\psi' - 2 \left(Z + \frac{1}{r} \right)^2 \psi = 0 \quad (5.5.217c)$$

となるこれらの方程式は, $\psi = 0$ の時と同様, 原点で特異な厳密解

$$\phi = v, \quad Z = -\frac{1}{r}, \quad \psi = \frac{Q}{r} \quad (5.5.218)$$

を持つが, その電荷 Q は任意となる. Julia B, Zee A(1975) の数値計算によると, $v > M$ のとき, 漸近条件

$$r \rightarrow 0 : \phi \rightarrow 0, \quad Z \rightarrow 0, \quad \psi \rightarrow 0, \quad (5.5.219a)$$

$$r \rightarrow \infty : \phi \rightarrow v, \quad Z \rightarrow -\frac{1}{r}, \quad \psi \rightarrow M + Q/r \quad (5.5.219b)$$

を満たす正則な解存在する.

解のエネルギー E は, 拘束条件

$$-D_t\Phi \cdot T_a\Phi + \frac{1}{g^2}D_jG_0^j = 0 \Leftrightarrow (5.5.217c) \quad (5.5.220)$$

のもとで,

$$E = 4\pi \int dt \int_0^\infty dr r^2 \left[\frac{1}{2}(\phi')^2 + \frac{\lambda}{4}(v^2 - \phi^2)^2 + \phi^2 F^2 + \frac{1}{2g^2} \left\{ 2 \left(F' + \frac{F}{r} \right)^2 + \left(F^2 - \frac{1}{r^2} \right)^2 + (\psi')^2 + 2\psi^2 F^2 \right\} \right] \quad (5.5.221)$$

ここで, dyon の電荷 Q_e は

$$E_j(n \cdot T) = G_{j0} = -\partial_j\psi(n \cdot T) - \partial_0 C_j, \quad (5.5.222)$$

$$\begin{aligned} Q_e &= \int_{S^2} \hat{E} \cdot d\Sigma = \frac{1}{g} \int_{S^2} E \cdot d\Sigma \\ &= \frac{1}{g} \int_{S^2} (-\psi') n \cdot d\Sigma = \frac{4\pi Q}{g} \end{aligned} \quad (5.5.223)$$

となる. 一方,

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty dr r^2 \{ (\psi')^2 + 2\psi^2 Y^2 \} \\ &= \int dr \left[(r^2\psi\psi')' + \psi \{ -(r^2\psi')' + 2r^2\psi Y^2 \} \right] \\ &= [r^2\psi\psi']_0^\infty = -QM \geq 0 \end{aligned} \quad (5.5.224)$$

(F.3) トポロジ— すでに見たように, $SO(3)$ のベクトル表現に従う Higgs バンドル E は, Chern 数 n が偶数の時, S^2 上 (したがって, \mathbb{R}_*^3 上) では自明となる. このため, モノポール解は至る所正則なベクトルポテンシャルで記述できる.

このとき, E を $\Phi = \phi n$ で記述される S^2 の 1 次元法バンドル N と, それと直交する S^2 の 2 次元接バンドルに直和分解すると, 残留 $U(1)$ に関して, N は自明となるが, T^2 は非自明な $U(1)$ バンドルとなる. その第 1 Chern 類は, よく知られているように,

$$c_1(T(S^2)) = \frac{1}{2\pi} \sin\theta d\theta \wedge d\varphi \Rightarrow \int_{S^2} c_1(T(S^2)) = \chi(S^2) = 2 \quad (5.5.225)$$

となる。したがって、このU(1)ベクトルバンドルに対するU(1)接続(U(1)ゲージ場) \mathcal{A} が存在すれば

$$\frac{i}{2\pi} \text{Tr} d\mathcal{A} = c_1(T(S^2)) = 2 \quad (5.5.226)$$

となり、 $n = 2$ のモノポールを記述する。しかし、SO(3)モノポール解に対するSO(3)ゲージ場 C は $T(S^2)$ を不変に保たないので、この特性類を計算するのに使えない。しかし、局所ゲージ変換 $\exp(-\theta m \cdot T)$ を C に施すと、一般に

$$\begin{aligned} C_+ = & \{-(rZ + 1) \cos \varphi + rW \sin \varphi\} (T_1 \sin \theta d\phi - T_2 d\theta) \\ & + \{(rZ + 1) \sin \varphi + rW \cos \varphi\} (T_2 \sin \theta d\phi + T_1 d\theta) \\ & + \{Adr + (1 - \cos \theta) d\varphi\} T_3 \end{aligned} \quad (5.5.227)$$

に変換される。また、局所ゲージ変換 $\exp((\pi - \theta)m \cdot T)$ を施すと

$$\begin{aligned} C_- = & \{(rZ + 1) \sin \varphi - rW \cos \varphi\} (-T_2 \sin \theta d\phi + T_1 d\theta) \\ & - \{(rZ + 1) \cos \varphi + rW \sin \varphi\} (T_1 \sin \theta d\phi + T_2 d\theta) \\ & - \{Adr - (1 - \cos \theta) d\varphi\} T_3 \end{aligned} \quad (5.5.228)$$

に変換される。

これらのゲージでは、 $\Phi = \pm v e_3$ となり、 $T(S^2)$ のファイバーはすべて、それぞれ S^2 の北極および南極の接平面に移される。これはベクトルバンドル $T(S^2)$ の各チャート ($\theta < \pi$, $\theta > 0$) で自明化 $D_{\pm} \times \mathbb{R}^2$ を与える。また、Wu-Yang 解 ($rZ = -1, W = 0$) では、このゲージで $C = C_{\pm} = (\pm 1 - \cos \theta) d\phi (\pm T_3)$ となるので、 C は $T(S^2)$ のU(1)ゲージ場と見なされる。したがって、その第1 Chern 類は

$$c_1(T(S^2)) = \frac{i}{2\pi} \text{Tr} \rho(dC_{\pm}) = \frac{1}{2\pi} \frac{-1}{2} \text{Tr}(Gn \cdot T) = \frac{1}{2\pi} \frac{gQ_m}{4\pi} d\theta \wedge \sin \theta \varphi \quad (5.5.229)$$

と表される。よって、

$$\frac{gQ_m}{4\pi} = 1 \quad (5.5.230)$$

を得る。

正則な't Hooft-Polyakov 解も、 $r \rightarrow \infty$ で Wu-Yang 解に漸近するので、無限遠球面で同じ議論を行うことにより、同じ結果を得る。したがって、モノポール解の磁荷は、Higgs バンドルをU(1)部分バンドルに分解したときの、各部分バンドルの第1 Chern 数により決定される。

一方、4次元時空上のゲージ理論としては、dyon 解は非自明な Pontrjagin 類を持つ。具体的に計算すると、曲率形式 G は

$$G_{0j} = -\psi' n_j (n \cdot T) + Z (n \wedge T)_j - \psi \left(Z + \frac{1}{r} \right) P_j^k T_k, \quad (5.5.231a)$$

$$G_{jk} = 2 \left(Z' - \frac{Z}{r} \right) n_{[j} (n \wedge T)_{k]} - \frac{2Z}{r} \epsilon_{jk}{}^a T_a - Z^2 \epsilon_{jka} n^a, \quad (5.5.231b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{0j} &= \frac{1}{2} \epsilon_{0j}{}^{kl} G_{kl} \\ &= \frac{(rZ)'}{r} P_j - k T_k - Z \left(Z + \frac{2}{r} \right) n_j (n \cdot T) \end{aligned} \quad (5.5.231c)$$

で与えられるので、

$$\begin{aligned} G_{0j} \tilde{G}_0{}^j &= -4\psi \frac{(rZ)'}{r} \left(Z + \frac{1}{r} \right) - 2\psi' Z \left(Z + \frac{2}{r} \right) \\ &= -\frac{2}{r^2} [\psi(rZ)(rZ + 2)]' \end{aligned} \quad (5.5.232)$$

よって、Higgs バンドル E に対する第 1 Pontrjagin 類は

$$\begin{aligned} p_1(E) &= -\frac{1}{4\pi^2} \text{Tr}(G \wedge G) = -\frac{1}{2\pi^2} \text{Tr}(G_{0j} \tilde{G}_0{}^j) d^4x \\ &= -\frac{1}{\pi^2} d[\psi(rZ)(rZ + 2) dt \wedge d\theta \wedge \sin\theta d\varphi] \end{aligned} \quad (5.5.233)$$

となるので、第 1 Pontrjagin 数に相当する量は、境界条件のみで決まる：

$$\int_0^T dt \int d^3x p_1(E) = -\frac{4}{\pi} MT. \quad (5.5.234)$$

しかし、空間がコンパクトでなく、正則なコンパクト化も存在しないので、この数は整数とはならない。実際、空間 \mathbb{R}^3 を無限遠で一点コンパクト化し S^3 にしたとき、無限遠点に当たる点の近傍での座標系を \tilde{x}^j とするとき、ゲージ場はこの座標系で

$$C = \psi(\tilde{n} \cdot T) dt + \frac{rZ}{\tilde{r}} (\tilde{n} \wedge T) d\tilde{x}^j \quad (5.5.235)$$

となり、 $\tilde{r} = 0$ で特異となる。

G. Higgs セクターの一般化 以上の議論は、容易に、Higgs 場が $SU(2)$ に一般の既約表現 $[2l_0]$ に従う場合に一般化される。

(G.1) Higgs 場の球対称配位 球対称となる条件は, 任意の空間回転 R に対して, $U \in \text{SU}(2)$ が存在して,

$$\Phi'(t, \mathbf{r}) = \Phi(t, R^{-1}\mathbf{r}) \rho_{l_0}(U^{-1})\Phi(t, \mathbf{r}) \quad (5.5.236)$$

となること. このとき, 対応 $R \mapsto U$ は準同型となるので,

$$U = 1 \quad \text{or} \quad U = \pm U(R)^{\pm} U(R) \quad (5.5.237)$$

これらのうち, monopole 解と対応するのは, $U = \pm U(R)$. よって, 球対称条件は

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = \rho_{l_0}(U^{-1})\Phi(t, R(U)\mathbf{r}). \quad (5.5.238)$$

今, Φ を球面調和関数を用いて

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = \sum_{l,m} \phi_{l,m}(t, r) Y_l^m(\mathbf{n}) \quad (5.5.239)$$

と展開すると, この条件は

$$\phi_{l,m}(t, r) = \sum_{m'} \rho_{l_0}(U^{-1}) \phi_{l,m'}(t, r) R(U)_{lm}^{m'} \quad (5.5.240)$$

これは, $\phi_{l,m} \neq 0$ が, $\text{SU}(2)$ の 2 つの表現の積 $[2l_0] \times [2l]$ の 1 次元既約成分であることを意味する.

$$[2l_0] \times [2l] = [2l - l_0] + \cdots + [2l + 2l_0 - 2] + [2l + 2l_0] \quad (5.5.241)$$

より, Φ を $\text{SU}(2)$ テンソル表示で表すと,

$$\Phi = (\Phi^{j_1 \cdots j_{l_0}}); \quad \Phi^{j_1 \cdots j_{l_0}}(t, \mathbf{r}) = \sum_m \phi_{j_1 \cdots j_{l_0}}^{l_0, m} Y_{l_0}^m(\mathbf{n}) \quad (5.5.242)$$

となる. ここで, $Y_l^m(\mathbf{n})$ は同次調和多項式

$$H^{l,m}(\mathbf{r}) = c_{j_1 \cdots j_l}^m x^{j_1} \cdots x^{j_l}; \quad (5.5.243a)$$

$$c_{j_1 \cdots j_l} = c_{(j_1 \cdots j_l)}, \quad \sum_k c_{j_1 \cdots k \cdots k \cdots} = 0 \quad (5.5.243b)$$

を用いて, $Y_l^m(\mathbf{n}) = H^{l,m}(\mathbf{n})$ と表されるので, Φ の式は

$$\Phi^{j_1 \cdots j_{l_0}}(t, \mathbf{r}) = \Delta_{k_1 \cdots k_{l_0}}^{j_1 \cdots j_{l_0}}(t, r) n^{k_1} \cdots n^{k_{l_0}}, \quad (5.5.244)$$

$$\Delta_{k_1 \cdots k_{l_0}}^{j_1 \cdots j_{l_0}} = \sum_m \phi_{l_0, m}^{j_1 \cdots j_{l_0}} c_{k_1 \cdots k_{l_0}}^m \quad (5.5.245)$$

となる. この表示では, Φ が球対称である条件は, $\Delta(t, r)$ が回転に対する不変テンソルであること, したがって, $\Delta_{k_1 \dots k_{l_0}}^{j_1 \dots j_{l_0}}(t, r)$ は対称トレースレステンソルへの射影作用素でなければならない.

以上より,

$$\Phi = (\Phi^{j_1 \dots j_{l_0}}); \quad \Phi^{j_1 \dots j_{l_0}}(t, \mathbf{r}) = \phi(t, r) H^{j_1 \dots j_{l_0}}(n) \quad (5.5.246)$$

ここで, $H^{(l)} = (H^{j_1 \dots j_l}(x))$ は対称でトレースレスな l 次の同次多項式

$$H^{j_1 \dots j_l}(x) = C_l(x^{j_1} \dots x^{j_l} + p_1 \delta^{(j_1 j_2} r^2 x^{j_3} \dots x^{j_l)} + \dots) \quad (5.5.247)$$

$$\sum_{j_1 \dots j_l} H^{j_1 \dots j_l}(n) H_{j_1 \dots j_l}(n) = 1 \quad (5.5.248)$$

(G. 2) 作用積分の表式 以下 l_0 を単に l と表す. まず, Higgs 場に対して,

$$\partial_j \Phi = n_j \phi' H^{(l)}(n) + \phi P_j^k \partial_k H^{(l)}(n). \quad (5.5.249a)$$

$$\rho((n \wedge T)_j) H^{(l)}(n) = [(n \wedge T)_j]^k \partial_k H^{(l)}(n) = P_j^k \partial_k H^{(l)}(n) \quad (5.5.249b)$$

$$\rho((n \cdot T)) H^{(l)}(n) = [(n \wedge T) n^k \partial_k H^{(l)}(n) = 0, \quad (5.5.249c)$$

$$\rho(T) H^{(l)}(n) = [T_j n]^k (\partial_k H^{(l)})(n) = \epsilon_{jkm} n^l \partial^m H^{(l)}(n) \quad (5.5.249d)$$

ここで,

$$P_j^k = \delta_j^k - n^k n_j. \quad (5.5.250)$$

よって,

$$\begin{aligned} D_j \Phi &= n_j \phi' H^{(l)}(n) + (rZ + 1) P_j^k \partial_k H^{(l)}(x) \\ &\quad + W \epsilon_{jm}{}^k n^m \partial_k H^{(l)}(n), \end{aligned} \quad (5.5.251)$$

$$\begin{aligned} D_j \Phi \cdot D^j \Phi &= (\phi')^2 + \{(rZ + 1)^2 + (rW)^2\} \phi^2 \\ &\quad \times P^{jk} \partial_j H^{(l)}(n) \partial_k H^{(l)}(n). \end{aligned} \quad (5.5.252)$$

ここで,

$$\begin{aligned} &\int d^2 \Omega P^{jk} \partial_j H^{(l)}(n) \cdot \partial_k H^{(l)}(n) \\ &= \int_{S^2} d^2 z \sqrt{g} g^{\alpha\beta} D_\alpha H^{(l)}(n) \cdot D_\beta H^{(l)}(n) = - \int_{S^2} d^2 z \sqrt{g} H^{(l)}(n) \cdot D^\alpha D_\alpha H^{(l)}(n) \\ &= l(l+1) \int_{S^2} d^2 z \sqrt{g} H^{(l)}(n) \cdot H^{(l)}(n) = 4\pi l(l+1). \end{aligned} \quad (5.5.253)$$

よって、ゲージセクターの構造は前と同じであるので、作用積分は

$$S_{\text{eff}} = -E, \quad (5.5.254)$$

$$E = 4\pi \int dt \int dr r^2 \left[\frac{1}{2}(\phi')^2 + \frac{\lambda}{4}(v^2 - \phi^2)^2 + \frac{l(l+1)}{2}\phi^2 F^2 + \frac{1}{2g^2} \left\{ 2 \left(F' + \frac{F}{r} \right)^2 + \left(F^2 - \frac{1}{r^2} \right)^2 \right\} \right]. \quad (5.5.255)$$

ここで、

$$F^2 = Y^2 + W^2, \quad Y = Z + \frac{1}{r}. \quad (5.5.256)$$

なお、ゲージ変換で、

$$F \rightarrow Y, \quad W \rightarrow 0, \quad A \rightarrow 0 \quad (5.5.257)$$

とできる。

対応する場の方程式は

$$\phi'' + \frac{2}{r}\phi' - l(l+1) \left(Z + \frac{1}{r} \right)^2 \phi + \lambda\phi(v^2 - \phi^2) = 0, \quad (5.5.258a)$$

$$Z'' + \frac{2}{r}Z' - \left(Z + \frac{1}{r} \right) \left(Z^2 + \frac{2}{r}Z + l(l+1)g^2\phi^2 \right) = 0, \quad (5.5.258b)$$

(G.3) トポロジとモノポールの磁荷 (無限遠も含めて) ある球面 S^2 上で、ゲージフラックス G が

$$G|_{S^2} = \frac{Q_m}{4\pi r^2} n \cdot T \Omega_2 \quad (5.5.259)$$

となり、さらに、 $\Phi = \text{const}$ となる適当なゲージのもとで、

$$C = g\hat{A}T_3 \Rightarrow G = g\hat{F}T_3 \quad (5.5.260)$$

となるとき、解はモノポールを表す。

いま、Higgs 場 Φ を複素化し、 $n \cdot T$ に関する既約表現

$$n \cdot T_3 \Phi^{(k)} = -ik\Phi^{(k)} \quad (5.5.261)$$

に分解する。このとき、各既約成分に対応する Higgs 部分バンドル $E_{(k)}$ に対して、

$$\begin{aligned} G\Phi^{(k)} &= -ikg\hat{F}\Phi^{(k)} \\ \Rightarrow Q_m &= \int_{S^2} \hat{F} = \frac{i}{kg} \int_{S^2} \text{Tr} G|_{\Phi^{(k)}} = \frac{2\pi}{kg} \int_{S^2} c_1(E_{(k)}) \end{aligned} \quad (5.5.262)$$

が成り立つ.

Higgs 場が $SO(3)$ トレースフリー対称テンソルで与えられる場合には, 対応するベクトルバンドルに対して

$$\mathbb{C}^3 \times S^2 = \mathbb{C} \otimes N(S^2) \oplus T(S^2)^{\mathbb{C}}, \quad (5.5.263a)$$

$$\mathbb{C} \otimes N(S^2) \cong \mathbb{C} \times S^2 \text{ (trivial bundle)}, \quad (5.5.263b)$$

$$T(S^2)^{\mathbb{C}} \cong T'(\mathbb{C}P^1) + T''(\mathbb{C}P^1) (= T'(\mathbb{C}P^1)^*), \quad (5.5.263c)$$

$$\otimes_{\text{sym}}^l (\mathbb{C}^3 \times S^2) \cong \mathbb{C} \times N(S^2) \oplus \oplus_{k=1}^l \{ \otimes^k T'(\mathbb{C}P^1) \oplus \otimes^k T''(\mathbb{C}P^1) \} \quad (5.5.263d)$$

が成り立ち,

$$T'(\mathbb{C}P^1) \cong [-K_{\mathbb{C}P^1}] \cong \mathcal{O}(2)_{\mathbb{C}P^1} \Rightarrow E_{(k)} = \otimes^k T'(\mathbb{C}P^1) \cong \mathcal{O}(2k)_{\mathbb{C}P^1} \quad (5.5.264)$$

となるので,

$$c_1(E_{(k)}) = c_1(\mathcal{O}(2k)_{\mathbb{C}P^1}) = 2k[S^2]^* \Rightarrow \int_{S^2} c_1(E_{(k)}) = 2k \quad (5.5.265)$$

が得られる. 上記の Q_m の表式より, これは, Q_m が Higgs 場のタイプに依存しないことを意味する:

$$gQ_m = 4\pi \quad (5.5.266)$$

5.5.2.5 Weinberg-Salam 理論におけるモノポール/dyon

LastUpdate: 2023/4/17

文献

- Cho YM, Maison D: Phys. Lett. B391, 360-365 (1997)
”Monopole configuration in Weinberg-Salam model ”

A. Model

- Higgs 場 : SU(2) doublet Φ
- ゲージ場 : $U(1)_Y \times SU(2)$

$$\mathcal{A}_\mu = -ig_1 B_\mu \oplus -\frac{i}{2} \tau_a g_2 C_\mu^a$$

- Higgs 場とゲージ場の結合

$$\rho(\mathcal{A}) = -ig_1 B \frac{Y}{2} - ig_2 L_a C^a, \quad (L_a = \rho(\tau^a/2)) \quad (5.5.267)$$

$$\mathcal{D}\Phi = (d + \rho(\mathcal{A}))\Phi = \left(d - i\frac{g_1}{2} B - i\frac{g_2}{2} \tau \cdot C \right) \Phi \quad (5.5.268)$$

- ゲージフラックス

$$\mathcal{G} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A},$$

$$i\mathcal{G}_{\mu\nu} = g_1 B_{\mu\nu} \oplus g_2 G_{\mu\nu}^a, \quad (5.5.269)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad (5.5.270)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu C_\nu^a - \partial_\nu C_\mu^a + g_2 \epsilon^a{}_{bc} C_\mu^b C_\nu^c \quad (5.5.271)$$

- 作用積分

$$S = \int d^4x \left[-(\mathcal{D}\Phi)^\dagger \cdot (\mathcal{D}\Phi) - V(\Phi) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} \cdot G^{\mu\nu} \right] \quad (5.5.272)$$

- 場の方程式

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \Phi = \lambda (\Phi^\dagger \Phi - v^2) \Phi, \quad (5.5.273a)$$

$$\nabla^\nu B_{\nu\mu} = J_\mu^{(1)} \equiv \frac{i}{2} g_1 ((\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \Phi - \Phi^\dagger \mathcal{D}_\mu \Phi), \quad (5.5.273b)$$

$$D^\nu G_{\nu\mu}^a = J_\mu^{(2)a} \equiv \frac{i}{2} g_2 ((\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \tau^a \Phi - \Phi^\dagger \tau^a \mathcal{D}_\mu \Phi) \quad (5.5.273c)$$

B. 球対称配位 各球面 $S(r)$ 上の基準点を $\text{NP}:x_0 = re_3$ にとり, 適当な大域的定数ゲージ変換により

$$\Phi(x_0) = -\sqrt{-1}\phi(r) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\sqrt{-1}\phi(r)e_- \quad (5.5.274)$$

と置くことができる. このとき, 球対称配位についての一般論 5.5.2.3 より, 適当なゲージの元で, $\Phi(x_0), D_j\Phi(x_0), B_{jk}(x_0), G_{jk}(x_0)$ は, 任意の $O' \in H_{x_0} \cong \text{SO}(2)$ に対して, 次の条件を満たさねばならない:

$$g'\Phi(x_0) = \Phi(x_0), \quad (5.5.275a)$$

$$O'_j{}^k g' D_k \Phi(x_0) = D_j \Phi(x_0), \quad (5.5.275b)$$

$$O'_j{}^l O'_k{}^m B_{lm}(x_0) = B_{jk}(x_0), \quad (5.5.275c)$$

$$O'_j{}^l O'_k{}^m g' G_{lm}(x_0) g'^{-1} = G_{jk}(x_0). \quad (5.5.275d)$$

ここで, $g' = g(O', x_0)$ である. これらの x_0 での値が与えられると, 球対称な場の配位が

$$\Phi(x) = \Phi(x_0), \quad (5.5.276a)$$

$$D_j \Phi(x) = L(x)_j{}^k D_k \Phi(x_0), \quad (5.5.276b)$$

$$B_{jk}(x) = L(x)_j{}^l L(x)_k{}^m B_{lm}(x_0), \quad (5.5.276c)$$

$$G_{jk}(x) = L(x)_j{}^l L(x)_k{}^m G_{lm}(x_0) \quad (5.5.276d)$$

により定まる.

今,

$$U_3(\lambda/2)\tau_j U_3(\lambda/2)^{-1} = \tau_k R_3(\lambda)^k{}_j \Leftrightarrow U(\lambda) = \begin{pmatrix} e^{-\sqrt{-1}\lambda} & 0 \\ 0 & e^{+\sqrt{-1}\lambda} \end{pmatrix} \quad (5.5.277)$$

と定義すると, 一般い, 準同型 $O' = R_3(\varphi) \mapsto g' \in G = \text{SU}(2) \times \text{U}_Y(1)$ は, N を整数として

$$g' = g(O') = U_3(N\varphi/2)e^{-\sqrt{-1}N\varphi/2} = \begin{pmatrix} e^{-\sqrt{-1}N\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_{\Phi(x_0)} \cong \text{U}_{\text{em}}(1) \quad (5.5.278)$$

で与えられる.

まず, $D\Phi(x)$ の構造からゲージポテンシャルへの情報を導く. $\Phi(x) = \Phi(x_0)$ より,

$$D_j\Phi(x) = -X_j e_- - Y_j e_+; \quad (5.5.279)$$

$$X_j dx^j = \sqrt{-1} d\phi(r) + \frac{1}{2}\phi(r)(g_1 B - g_2 C^3), \quad (5.5.280)$$

$$Y_j dx^j = \frac{g_2}{2}\phi(r)(C^1 - \sqrt{-1}C^2) \quad (5.5.281)$$

を得る. よって, 整合性条件は

$$X_j = (R_3(\varphi))_j^k X_k, \quad (5.5.282a)$$

$$Y_j = (R_3(\varphi))_j^k e^{-\sqrt{-1}\varphi} Y_k \quad (5.5.282b)$$

となる. この第1式より

$$X_1 = X_2 = 0 \quad (5.5.283)$$

を得る. 一方, Y_3 に対する条件より,

$$N \neq 0 \Rightarrow Y_3 = 0 \quad (5.5.284)$$

となる. また, $Y_\alpha (\alpha = 1, 2)$ に対する条件は

$$Y_1 \pm \sqrt{-1}Y_2 = e^{-\sqrt{-1}(N \mp 1)\varphi} (Y_1 \pm \sqrt{-1}Y_2) \quad (5.5.285)$$

となるので,

$$N \neq \pm 1 \Rightarrow Y_1 = Y_2 = 0, \quad (5.5.286a)$$

$$N = 1 \Rightarrow Y_1 - \sqrt{-1}Y_2 = 0 \Leftrightarrow c_\beta^\alpha(x_0) = p\delta_\beta^\alpha + q\epsilon_{\alpha\beta}, \quad (5.5.286b)$$

$$N = -1 \Rightarrow Y_1 + \sqrt{-1}Y_2 = 0 \Leftrightarrow c_\gamma^\alpha(x_0)(\tau_1)^{\gamma\beta} = p\delta_\beta^\alpha + q\epsilon_{\alpha\beta} \quad (5.5.286c)$$

を得る. ここで, a, b は r のみの関数である.

この結果を基に, ゲージ場の配位を決定する. まず, (5.5.275) より,

$$B_{jk}(x_0) = R_3(\varphi)_j^l R_3(\varphi)_k^m B_{lm}(x_0) \Rightarrow B(x_0) = \frac{1}{2}f(r)\epsilon_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta. \quad (5.5.287)$$

よって, (5.5.276) より,

$$B_{[2]}(x) = dx^j L(x)_j^l \wedge dx^k L(x)_k^m B_{lm}(x^0) = r^2 \Omega_2 f(r) \quad (5.5.288)$$

を得る. ここで, $dB_{[2]} = 0$ を用いると, $df = 0$ となる. したがって, F_0 を定数として,

$$g_1 B_{[1]} = eF_0(1 - \cos \theta)d\varphi + d\Lambda, \quad g_1 B_{[2]} = eF_0\Omega_2. \quad (5.5.289)$$

を得る.

C の表式を決定するには, N ごとに場合分けが必要となる.

(B. 1) I型球対称解 まず, $N \neq \pm 1$ の場合を考える. この場合, $D\Phi(x)$ の表式と (5.5.276) により $D\Phi(x_0)$ から得られる表式を比較して,

$$g_1 B - g_2 C^3 = (g_1 b - g_2 c^3)dr \sim 0 \text{ (gauge equivalent)} \quad (5.5.290a)$$

$$C^1 - \sqrt{-1}C^2 = (c^1 - \sqrt{-1}c^2)dr \quad (5.5.290b)$$

を得る. ここで, g, c^j は r のみの関数である. この表式を $G_{[2]}$ の定義

$$G^a = dC^a + \frac{1}{2}g_2 \epsilon_{abc} C^b \wedge C^c \quad (5.5.291)$$

に代入すると,

$$G^3 = dC^3 = \frac{g_1}{g_2} B_{[2]} = \frac{eF_0}{g_2} \Omega_2, \quad (5.5.292a)$$

$$G^\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} c^\beta dr \wedge (g_1 B) \quad (5.5.292b)$$

ところが, これは $G_{3\alpha}(x_0) = 0$ を意味するので, (5.5.276) より, $c^\alpha = 0$ が要求される. 以上より, $N \neq \pm 1$ に対応する球対称配位で, $U_\pm = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, z) \mid \pm z \leq 0\}$ において正則な場の配位は次のようになる:

$$\Phi(x) = -i\phi(r)e_-, \quad (5.5.293a)$$

$$D\Phi(x) = -\sqrt{-1}d\phi(r)e_-, \quad (5.5.293b)$$

$$g_1 B_{\pm[1]}(x) = eF_0(\pm 1 - \cos \theta)d\varphi, \quad (5.5.293c)$$

$$g_1 B_{[2]}(x) = dF_0\Omega_2, \quad (5.5.293d)$$

$$g_2 C_\pm(x) = g_1 B_{\pm[1]}\tau_3, \quad (5.5.293e)$$

$$g_2 G(x) = eF_0\Omega_2\tau_3. \quad (5.5.293f)$$

この表式は自動的に場の方程式の解となっている：

$$\begin{aligned} D \cdot D\Phi &= -\sqrt{-1} \frac{1}{r^2} (r^2 \phi')' e_- \\ \Rightarrow \frac{1}{r^2} (r^2 \phi')' &= \lambda(\phi^2 - v^2)\phi, \end{aligned} \quad (5.5.294)$$

$$\nabla_\nu B^{\nu\mu} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \partial_k (r^2 \sin\theta B^{k\mu}) = 0, \quad J^{(1)} = 0, \quad (5.5.295)$$

$$(D_\nu G^{\nu\mu})^a = \nabla_\nu G^{a\nu\mu} + [C_\nu, G^{\nu\mu}]^a = 0, \quad J^{(2)} = 0. \quad (5.5.296)$$

U_\pm の解は,

$$g_1 B_-(x) = g_1 B_+(x) - 2eF_0 d\varphi, \quad (5.5.297a)$$

$$g_2 C_-(x) = g_2 C_+(x) - 2eF_0 \tau_3 d\varphi \quad (5.5.297b)$$

の関係で結ばれるが, これは, 推移関数

$$g_{-+}(x) = \left(e^{-2\sqrt{-1}eF_0\varphi}, e^{-2\sqrt{-1}eF_0\varphi\tau_3} \right) \in U_Y(1) \times SU(2) \quad (5.5.298)$$

によるゲージ変換になっている. よって,

$$2eF_0 \times 2\pi = 2n\pi \Leftrightarrow 2eF_0 = n \in \mathbb{Z} \quad (5.5.299)$$

のとき, 両者は $r \neq 0$ で大域的に正則な磁気単極子解を与える.

残留ゲージ自由度 U_{em} に対応するゲージ場 \hat{A} は, $U_Y(1) \times SU(2)$ ゲージ場に

$$g_1 B_\pm = e\hat{A}_\pm, \quad g_2 C_\pm = e\hat{A}_\pm \quad (5.5.300)$$

と埋め込まれる. よって, 磁気単極子の磁荷は

$$Q_m = \int_{S^2} \hat{F} = \frac{g_1}{e} \int_{S^2} B_{[2]} = 4\pi F_0 \Leftrightarrow \frac{eQ_m}{2\pi} = 2eF_0 = n \quad (5.5.301)$$

で与えられる.

(B. 2) II型球対称解 まず, $N = 1$ の場合,

$$D_j \Phi(x_0) = -X_j e_- - Y_j e_+, \quad (5.5.302)$$

$$X_1 = X_2 = 0, \quad Y_1 = \sqrt{-1}Y_2, \quad Y_3 = 0 \quad (5.5.303)$$

および

$$c_\beta^\alpha = p\delta_\beta^\alpha + q\epsilon_{\alpha\beta} \Rightarrow c_\beta^1 - \sqrt{-1}c_\beta^2 = (p + \sqrt{-1}q)(\delta_\beta^1 - \sqrt{-1}\delta_\beta^2) \quad (5.5.304)$$

より,

$$\begin{aligned} D_j\Phi(x_0) &= -\delta_j^3 \left(\sqrt{-1}\phi' + \frac{\phi}{2}(g_1b - g_2c^3) \right) e_- - \sqrt{-1}\delta_j^3 \frac{g_2}{2} \phi (c_3^1 - \sqrt{-1}c_3^2) e_+ \\ &\quad - \sqrt{-1} \frac{g_2}{2} \phi (p + \sqrt{-1}q) (\delta_j^1 - \sqrt{-1}\delta_j^2) e_+ \end{aligned} \quad (5.5.305)$$

を得る. したがって, (5.5.276) より,

$$\begin{aligned} D_j\Phi(x) &= -n_j \left(\sqrt{-1}\phi' + \frac{\phi}{2}(g_1b - g_2c^3) \right) e_- - \sqrt{-1}n_j \frac{g_2}{2} \phi (c_3^1 - \sqrt{-1}c_3^2) e_+ \\ &\quad - \sqrt{-1}L_j^\alpha(x) \frac{g_2}{2} \phi (p + \sqrt{-1}q) (\delta_\alpha^1 - \sqrt{-1}\delta_\alpha^2) e_+ \end{aligned} \quad (5.5.306)$$

これを $\Phi(x)$ より得られる表式と比較して,

$$g_1B - g_2C^3 = (g_1b - g_2c^3)dr \sim 0, \quad (5.5.307a)$$

$$C^1 - \sqrt{-1}C^2 = (c_3^1 - \sqrt{-1}c_3^2)dr + (p + \sqrt{-1}q)dx^j(L_j^1 - \sqrt{-1}L_j^2) \quad (5.5.307b)$$

を得る.

今,

$$X^\alpha \equiv -(n \times dn)^\alpha + (1 - \cos\theta)d\varphi n^\alpha \quad (5.5.308)$$

と置くと,

$$X^1 - \sqrt{-1}X^2 = (\sqrt{-1}d\theta + \sin\theta d\varphi)e^{-\sqrt{-1}\varphi}, \quad (5.5.309)$$

$$dx^j(L_j^1 - \sqrt{-1}L_j^2) = -\sqrt{-1}r(X^1 - \sqrt{-1}X^2) \quad (5.5.310)$$

より,

$$C = c_3^\alpha(r)dr\tau_\alpha + r(Y(r)X^\alpha + W(r)\epsilon_{\alpha\beta}X^\beta)\tau_\alpha + \frac{g_1}{g_2}B\tau_3 \quad (5.5.311)$$

となる.

次に, G の構造を決める. まず,

$$x \rightarrow x_0 : X^\alpha \rightarrow \frac{1}{r}\epsilon_{\alpha\beta}x^\beta, \quad (5.5.312)$$

$$dX^\alpha = -\frac{1}{1 + \cos\theta}n^\alpha\Omega_2 \rightarrow 0 \quad (5.5.313)$$

より,

$$dC \rightarrow \frac{dr}{r} \left((rY)' \epsilon_{\alpha\beta} dx^\beta + (rW)' dx^\alpha \right) \tau_\alpha + \frac{eF_0}{g_2} dx^1 \wedge dx^2 \quad (5.5.314)$$

$$C \rightarrow \left(c_3^\alpha dr + Y(r) \epsilon_{\alpha\beta} dx^\beta + W(r) dx^\alpha \right) \tau_\alpha \quad (5.5.315)$$

したがって,

$$\begin{aligned} G(x_0) &= \frac{dx^3}{r} \left((rY)' \epsilon_{\alpha\beta} dx^\beta + (rW)' dx^\alpha \right) \tau_\alpha \\ &\quad + g_2 \left\{ c_3^\alpha dx^3 \wedge (-Y dx^\alpha + W \epsilon_{\alpha\beta} dx^\beta) + (Y^2 + W^2) dx^1 \wedge dx^2 \right\} \tau_3 \\ &\quad + \frac{eF_0}{g_2} dx^1 \wedge dx^2 \tau_3. \end{aligned} \quad (5.5.316)$$

を得る. この表式に対する整合性条件は,

$$g' G_{jk}^a g'^{-1} = O'^a{}_b G_{jk}^b \quad (5.5.317)$$

より,

$$c^\alpha = 0 \quad (5.5.318)$$

となる. 対応する $G(x)$ の表式を求めるには, すでに求めた $C(x)$ の表式から G を計算するのが早い. 結果は,

$$\begin{aligned} G &= \left\{ (rY)' \tau_\alpha + (rW)' \epsilon_{\alpha\beta} \tau_\beta \right\} dr \wedge X^\alpha \\ &\quad - r \left(Y \tau_\alpha + W \epsilon_{\alpha\beta} \tau_\beta \right) \frac{n^\alpha}{1 + \cos \theta} (1 + eF_0) \Omega_2 \\ &\quad + \left\{ g_2 r^2 (Y^2 + W^2) + eF_0 / g_2 \right\} \Omega_2 \tau_3 \end{aligned} \quad (5.5.319)$$

この右辺のうち, 第2項以外は, $G(x_0)$ から公式 (5.5.276) により得られる. これに対して, 第2項は $x \rightarrow x_0$ でゼロになる. したがって, G が (5.5.276) を満たすためには,

$$eF_0 + 1 = 0 \quad (5.5.320)$$

が要求される. これは, $S^2(r)$ 上の Higgs バンドル \mathcal{H} の第1Chern類に対して,

$$c_1(\mathcal{H}) = 2eF_0[\Omega_2] = -2[\Omega_2] \Rightarrow eQ_m = -4\pi \quad (5.5.321)$$

となることを意味する.

以上より, $N = 1$ に対応する球対称性をもつ場の配位は

$$\Phi(x) = -\sqrt{-1}\phi(r)e_-, \quad (5.5.322a)$$

$$D\Phi = -\sqrt{-1}d\phi(r)e_- - \sqrt{-1}\frac{g_2}{2}\phi(r)(Y(r) + \sqrt{-1}W(r))(\sqrt{-1}d\theta + \sin\theta d\varphi)e^{-\sqrt{-1}\varphi}, \quad (5.5.322b)$$

$$g_1B_{\pm} = -(\pm 1 - \cos\theta)d\varphi, \quad (5.5.322c)$$

$$g_1B_{[2]} = -\Omega_2, \quad (5.5.322d)$$

$$g_2C_{\pm} = g_2r(Y(r)X^{\alpha} + W(r)\epsilon_{\alpha\beta}X^{\beta})\tau_{\alpha} + g_1B_{\pm}\tau_3, \quad (5.5.322e)$$

$$g_2G = g_2\{(rY)'\tau_{\alpha} + (rW)'\epsilon_{\alpha\beta}\tau_{\beta}\}dr \wedge X^{\alpha} + \left\{g_2^2r^2(Y^2 + W^2) - \frac{1}{2}\right\}\Omega_2\tau_3 \quad (5.5.322f)$$

となる. ここで,

$$X^{\alpha} - \sqrt{-1}X^2 = (\sqrt{-1}d\theta + \sin\theta d\varphi)e^{-\sqrt{-1}\varphi} \quad (5.5.323)$$

である.

次に, $N = -1$ の場合,

$$D_j\Phi(x_0) = -X_je_- - Y_je_+, \quad (5.5.324)$$

$$X_1 = X_2 = 0, \quad Y_1 = -\sqrt{-1}Y_2, \quad Y_3 = 0 \quad (5.5.325)$$

および

$$c_{\gamma}^{\alpha}(\tau_1)^{\gamma}_{\beta} = q\delta_{\beta}^{\alpha} + p\epsilon_{\alpha\beta} \Rightarrow c_{\beta}^1 - \sqrt{-1}c_{\beta}^2 = (p - \sqrt{-1}q)(\delta_{\beta}^1 + \sqrt{-1}\delta_{\beta}^2) \quad (5.5.326)$$

より,

$$D_j\Phi(x_0) = -\delta_j^3\left(\sqrt{-1}\phi' + \frac{\phi}{2}(g_1b - g_2c^3)\right)e_- - \delta_j^3\frac{g_2}{2}\phi(c_3^1 - \sqrt{-1}c_3^2)e_+ - \frac{g_2}{2}\phi(p - \sqrt{-1}q)(\delta_j^1 + \sqrt{-1}\delta_j^2)e_+ \quad (5.5.327)$$

を得る.. したがって, (5.5.276) より,

$$D_j\Phi(x) = -n_j\left(\sqrt{-1}\phi' + \frac{\phi}{2}(g_1b - g_2c^3)\right)e_- - n_j\frac{g_2}{2}\phi(c_3^1 - \sqrt{-1}c_3^2)e_+ - L_j^{\alpha}(x)\frac{g_2}{2}\phi(p - \sqrt{-1}q)(\delta_{\alpha}^1 + \sqrt{-1}\delta_{\alpha}^2)e_+ \quad (5.5.328)$$

これを $\Phi(x)$ より得られる表式と比較して,

$$g_1 B - g_2 C^3 = (g_1 b - g_2 c^3) dr \sim 0, \quad (5.5.329a)$$

$$C^1 - \sqrt{-1} C^2 = (c_3^1 - \sqrt{-1} c_3^2) dr + (p - \sqrt{-1} q) dx^j (L_j^1 + \sqrt{-1} L_j^2) \quad (5.5.329b)$$

を得る. すなわち, $N = 1$ の場合の解において, $C^2 \rightarrow -C^2$ と置き換えたものが $N = -1$ の場合のゲージ場の配位となる. すなわち,

$$C = c_3^\alpha(r) dr \tau_\alpha + r(Y(r)X^\alpha + W(r)(\epsilon X)^\alpha)(\tau_3)_{\alpha\gamma} \tau_\gamma + \frac{g_1}{g_2} B \tau_3 \quad (5.5.330)$$

となる. $N = 1$ の場合と同様の議論により, $G(x_0)$ に対する整合性条件より $c_3^\alpha = 0$ となる. これを考慮して G を計算すると

$$\begin{aligned} G &= dr \wedge \{(rY)'X^\alpha + (rW)'(\epsilon X)^\alpha\} (\tau_3)_{\alpha\beta} \tau^\beta \\ &\quad - r(Y\tau_\alpha + W\epsilon_{\alpha\beta}\tau_\beta) \frac{(\tau_3 n)^\alpha}{1 + \cos\theta} (1 - eF_0)\Omega_2 \\ &\quad - \{g_2 r^2(Y^2 + W^2) - eF_0/g_2\} \Omega_2 \tau_3 \end{aligned} \quad (5.5.331)$$

この右辺のうち, 第2項以外は, $G(x_0)$ から公式(5.5.276)により得られる. これに対して, 第2項は $x \rightarrow x_0$ でゼロになる. したがって, G が(5.5.276)を満たすためには,

$$eF_0 - 1 = 0 \quad (5.5.332)$$

が要求される. これは, $S^2(r)$ 上の Higgs バンドル \mathcal{H} の第1Chern類に対して,

$$c_1(\mathcal{H}) = 2eF_0[\Omega_2] = 2[\Omega_2] \Rightarrow eQ_m = 4\pi \quad (5.5.333)$$

となることを意味する.

以上より, $N = -1$ に対応する球対称性をもつ場の配位は

$$\Phi(x) = -\sqrt{-1}\phi(r)e_-, \quad (5.5.334a)$$

$$D\Phi = -\sqrt{-1}d\phi(r)e_- - \sqrt{-1}\frac{g_2}{2}\phi(r)(Y(r) - \sqrt{-1}W(r))(-\sqrt{-1}d\theta + \sin\theta d\varphi)e^{\sqrt{-1}\varphi}, \quad (5.5.334b)$$

$$g_1 B_\pm = (\pm 1 - \cos\theta)d\varphi, \quad (5.5.334c)$$

$$g_1 B_{[2]} = \Omega_2, \quad (5.5.334d)$$

$$g_2 C_\pm = g_2 r (Y(r)X^\alpha + W(r)(\epsilon X)^\alpha) (\tau_3)_{\alpha\beta} \tau_\beta + g_1 B_\pm \tau_3, \quad (5.5.334e)$$

$$\begin{aligned} g_2 G &= g_2 dr \wedge \{(rY)'X_\alpha + (rW)'(\epsilon X)^\alpha\} (\tau_3)_{\alpha\beta} \tau^\beta \\ &\quad - \left\{ g_2^2 r^2 (Y^2 + W^2) + \frac{1}{2} \right\} \Omega_2 \tau_3 \end{aligned} \quad (5.5.334f)$$

となる.

C. Cho-Maison dyon

(C.1) 位相的考察 自発的対称性の破れ

$$\Phi \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -iv \end{pmatrix}, \quad (5.5.335a)$$

$$\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y \rightarrow \mathrm{U}(1)_{\mathrm{em}} \quad (5.5.335b)$$

の後に残る $\mathrm{U}(1)$ ゲージ場 \hat{A}_μ が磁荷 Q_m のモノポールを表すとすると, 局所座標近傍

$$\mathcal{U}_\pm = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, z) \mid z \leq 0\} \quad (5.5.336)$$

において,

$$\hat{A} = \hat{A}_\pm = \frac{Q_m}{4\pi} (\pm 1 - \cos \theta) d\varphi \Rightarrow \delta \hat{A} = \hat{A}_- - \hat{A}_+ = -\frac{Q_m}{2\pi} d\phi \quad (5.5.337)$$

とならなければいけない. この $\mathrm{U}(1)$ ゲージ場は, $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)_Y$ のゲージ場に

$$\hat{A}_\mu \mapsto e\hat{A}_\mu Q = e\hat{A}_\mu \frac{Y}{2} + e\hat{A}_\mu L_3 = \frac{g_1}{2} B_\mu Y + g_2 C_\mu^a \frac{\tau_a}{2}; \quad (5.5.338)$$

$$g_1 B_\mu = e\hat{A}_\mu, \quad (5.5.339)$$

$$g_2 C_\mu^a = e\hat{A}_\mu \delta_3^a. \quad (5.5.340)$$

と埋め込まれる. このとき, 特性類の一般論より, Higgs バンドル \mathcal{H}^2 の第 1 Chern 類は

$$c_1(\mathcal{H}^2) = \frac{i}{2\pi} \mathrm{Tr} \mathcal{G} = \frac{i}{2\pi} \mathrm{Tr}(\hat{F}Q) = \frac{eQ_m}{8\pi^2} \Omega_2 = \frac{n}{4\pi} \Omega_2 \Rightarrow \frac{eQ_m}{2\pi} = n \in \mathbb{Z} \quad (5.5.341)$$

となる.

なお, $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2)$ を構造群とする S^2 上の 2次元複素ベクトル束として, \mathcal{H}^2 の同型類はこの第 1 Chern 類で完全に分類される. 実際, $S^2 \cap U_\pm$ はいずれも可縮なので, \mathcal{H}^2 の同型類は $S^2 \cap U_+ \cap U_- \sim S^1$ における遷移関数 g_{-+} のホモトピー類と 1 対 1 に対応する. ところが, このホモトピー類は $\pi_1(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2)) = \pi_1(\mathrm{U}(1)) \cong \mathbb{Z}$, すなわち $c_1(\mathcal{H}^2)$ と 1 対 1 に対応する.

以上のゲージでは，対応する B 場も C 場も一個のチャートで正則に表すことはできない． B 場については，ゲージ変換により，この特異性を回避することはできないが， C 場については可能性がある．その方法は，ベクトル型 Higgs の場合をまねることである．実際，そこでのゲージ場は今のモデルでの C 場と一致するので，ゲージ変換

$$U_r(\theta) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}m_a\tau^a\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -e^{-i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (5.5.342)$$

$$m = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.5.343)$$

を施すことである．このゲージ変換により Higgs 場は次のように変換する：

$$\Phi_0 \mapsto \Phi_+ = \xi \equiv iv \begin{pmatrix} e^{-i\varphi}\sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad (5.5.344)$$

この配位は z 軸の負の部分で特異となる．したがって，必要な Higgs バンドルを自明な \mathbb{C}^2 バンドルに埋め込むことはできない．しかし，この配位に $e^{i\varphi}$ を掛ける $U(1)_Y$ 変換を施すと，

$$\Phi_+ \mapsto \Phi_- = iv \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -e^{i\varphi}\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (5.5.345)$$

となり，南半球の近傍 \mathcal{U}_- で有界正則な配位を得る．

今， \mathcal{U}_\pm における B 場として

$$g_1 B_\pm = -(\pm 1 - \cos\theta)d\varphi \quad (5.5.346)$$

を考えると，

$$\frac{g_1}{2}(B_- - B_+) = d\varphi \quad (5.5.347)$$

より， Φ の $U(1)_Y$ ゲージ変換と整合的となるので，この場は今注目している Higgs バンドル \mathcal{H}^2 上の $U(1)$ 接続を与える．これを用いると，この配位が表す磁気単極子の磁荷を計算することができる．

まず， S^2 上の複素 2 次元 Higgs バンドルを \mathcal{H}^2 と表すと， $\Phi(x)$ が生成する複素線束 \mathcal{H}_Φ はその部分束に，またそれに直交する Higgs ベクトルは電磁バンドルに対応する複素線束 \mathcal{H}_{em} を与える：

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}_\Phi \oplus \mathcal{H}_{\text{em}} \quad (5.5.348)$$

ここで, $U_Y(1) \times SU(2) \cong U(2)$ より, \mathcal{H}^2 を $U(2)$ 束と見なすと, $-i(g_1/2)B$ 場と $-i(g_2/2)C$ 場はその接続となるので, Chern-Weil 公式より,

$$c_1(\mathcal{H}^2) = \frac{i}{2\pi} \text{Tr} \left(-i \frac{1}{2} g_1 B_{[2]} \right) = \frac{1}{4\pi} \text{Tr}(-\Omega_2) = -\frac{1}{2\pi} [\Omega_2] \quad (5.5.349)$$

を得る. 一方, \mathcal{H}_Φ は明らかに非自明な切断 $\Phi(x)$ をもつので, 自明なベクトル束となるので, $c_1(\mathcal{H}_\Phi) = 0$. よって,

$$c_1(\mathcal{H}_{\text{em}}) = c_1(\mathcal{H}^2) = -\frac{1}{2\pi} [\Omega_2] \Leftrightarrow eQ_m = -4\pi \Leftrightarrow n = -2 \quad (5.5.350)$$

を得る.

磁荷がこの値を取るとき, \hat{A}_+ に対応する B 場は $U_r(\theta)$ により変化しないが, C 場は

$$\begin{aligned} g_2 C &= -(n \wedge dn)^a \tau_a = -\frac{1}{r^2} \epsilon_{abc} x^a dx^b dx^c, \\ g_2 G &= -n^a \tau_a \Omega_2 \end{aligned} \quad (5.5.351a)$$

となり, 原点を除いて至るところ正則となる. また, $U(1)_Y$ 変換 $e^{i\varphi}$ により, B 場は \mathcal{U}_- で正則な形に変換される:

$$B = B_+ \rightarrow B_- \quad (5.5.352)$$

正符号の磁荷をもつモノポール解も同様にして作られる. そのためには, ゲージ変換を

$$U'_r(\theta) = U_r(\theta) \tau_1 \quad (5.5.353)$$

と選ぶとよい. このとき, 変換後の場の配位は

$$\Phi_0 \rightarrow \Phi_+ = -iv \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad (5.5.354a)$$

$$g_1 B \rightarrow (1 - \cos \theta) d\varphi, \quad (5.5.354b)$$

$$g_2 C \rightarrow -(n \wedge dn)^a \tau_a, \quad (5.5.354c)$$

$$g_2 G \rightarrow n^a \tau_a \Omega_2 \quad (5.5.354d)$$

となる. 今度は, Φ が \mathcal{U}_- で正則なチャートに移るには, $U(1)_Y$ 変換として $e^{-i\varphi}$ を用いないといけない. これは, Higgs バンドルの第 1 Chern 類が

$$c_1(\mathcal{H}^2) = +\frac{1}{2\pi} [\Omega_2] \quad (5.5.355)$$

となることを意味するので, $eQ_m = 4\pi$ を得る.

以上はタイプIの解について見たが, タイプIIの非可換モノポール解に対しても類似の特異点除去が可能で, $N = 1(eQ_m = -4\pi)$ のとき, $U_r(\theta)$ 変換により,

$$\Phi_+ \rightarrow i\phi(r) \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad (5.5.356a)$$

$$g_1 B_+ \rightarrow -(1 - \cos \theta) d\varphi, \quad (5.5.356b)$$

$$g_2 C_+^a \rightarrow rW(r)dn^a - (rZ(r) + 1)(n \times dn)^a, \quad (5.5.356c)$$

$$g_2 G^a \rightarrow (rW)'dr \wedge dn^a + (rZ)'dr \wedge (dn \times n)^a \\ + \{(rZ)^2 + (rW)^2 - 1\} n^a \Omega_2 \quad (5.5.356d)$$

を得る. 同様に, $N = -1(eQ_m = +4\pi)$ のとき,

$$\Phi_+ \rightarrow -i\phi(r) \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ -e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad (5.5.357a)$$

$$g_1 B_+ \rightarrow (1 - \cos \theta) d\varphi, \quad (5.5.357b)$$

$$g_2 C_+^a \rightarrow rW(r)dn^a - (rZ(r) + 1)(n \times dn)^a, \quad (5.5.357c)$$

$$g_2 G^a \rightarrow (rW)'dr \wedge dn^a + (rZ)'dr \wedge (dn \times n)^a \\ + \{(rZ)^2 + (rW)^2 - 1\} n^a \Omega_2 \quad (5.5.357d)$$

となる. これらの表式で $Z(r) = W(r) = 0$ と置くと, $n = \mp 2$ のタイプI磁気単極子解に対する表式が再現される.

(C.2) Dyon Ansatz $eQ_m = -4\pi$ の磁気単極子解の表式より, その dyon への拡張として次の配位を仮定する:

$$\Phi = \rho(r, r)\xi, \quad \xi = i \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad (5.5.358a)$$

$$g_1 B = -B(t, r)dt - (1 - \cos \theta) d\varphi, \quad (5.5.358b)$$

$$g_2 C^a = C(t, r)dtk^a + (f(t, r) - 1)(k \wedge dk)^a \quad (5.5.358c)$$

ここで

$$k^a \equiv \xi^\dagger \tau^a \xi = -n, \quad (5.5.359)$$

$$k \wedge dk = md\theta - l \sin \theta d\varphi, \quad (5.5.360)$$

$$n = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad l = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.5.361)$$

なお,

$$n \cdot \tau = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \quad (5.5.362a)$$

$$l \cdot \tau = \begin{pmatrix} -\sin \theta & e^{-i\varphi} \cos \theta \\ e^{i\varphi} \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (5.5.362b)$$

$$m \cdot \tau = \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\varphi} \\ -e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.5.362c)$$

(C.3) 場の方程式 この Ansatz のもとでは

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\Phi &= \left\{ \left(\dot{\rho} - \frac{i}{2}(C-B)\rho \right) dt + \rho' dr \right\} \xi \\ &\quad + \frac{1}{2} f \rho (id\theta + \sin \theta d\varphi) \xi_1, \end{aligned} \quad (5.5.363a)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathcal{D}\Phi &= \left\{ -\ddot{\rho} + \frac{i}{2}(C-B)\dot{\rho} + \frac{i}{2}(\dot{C} - \dot{B})\rho + \rho'' + \frac{2}{r}\rho' - \frac{f\rho}{4r^2} \right\} \xi \\ &\quad + \frac{f\rho}{2r^2} \cot \theta \xi_1 - i \frac{\rho f}{2r^2 \sin \theta} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \cos(\theta/2) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.5.363b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \cdot \mathcal{D}\Phi &= - \left\{ \frac{C-B}{2} \left(\dot{\rho} - \frac{i}{2}(C-B)\rho \right) + i \frac{\rho f(2f-3)}{4r^2} \right\} \xi \\ &\quad - \frac{\rho f}{4r^2 \cos(\theta/2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.5.363c)$$

より,

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \cdot \mathcal{D}\Phi &= \left\{ -\ddot{\rho} + i(C-B)\dot{\rho} + \frac{i}{2}(\dot{C} - \dot{B})\rho \right. \\ &\quad \left. + \rho'' + \frac{2}{r}\rho' - \frac{f^2}{2r^2}\rho + \frac{1}{4}(C-B)^2\rho \right\} \xi. \end{aligned} \quad (5.5.364)$$

ここで,

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (5.5.365)$$

また,

$$g_1 dB = B' dt \wedge dr - \sin \theta d\theta \wedge d\varphi, \quad (5.5.366a)$$

$$g_1 \nabla \cdot dB = - \left(B'' + \frac{2}{r} B' \right) dt - \dot{B}' dr, \quad (5.5.366b)$$

$$\stackrel{(1)}{J} = \frac{g_1 \rho^2}{2} (C - B) dt \quad (5.5.366c)$$

および

$$g_2 G = dt \wedge \left\{ -C' k dr + (fCl + \dot{f}m) d\theta + (fCm - \dot{f}l) \sin \theta d\varphi \right\} \\ + f' dr \wedge (md\theta - l \sin \theta d\varphi) - (f^2 - 1) k \sin \theta d\theta \wedge d\varphi, \quad (5.5.367a)$$

$$g_2 D \cdot G = \left(C''' + \frac{2}{r} C'' - \frac{2f^2}{r^2} C' \right) k dt + \dot{C}' k dr \\ + \left\{ \left(-\ddot{f} + f'' + fC^2 - \frac{f(f^2 - 1)}{r^2} \right) m - 2(C\dot{f} + f\dot{C})l \right\} d\theta \\ + \left\{ \left(\ddot{f}C^2 - f'' + \frac{f(f^2 - 1)}{r^2} \right) l - (2C\dot{f} + f\dot{C})m \right\} \sin \theta d\varphi \quad (5.5.367b)$$

$$\stackrel{(2)}{J} = g_2 \rho^2 \left\{ (C - B) k dt + \frac{1}{2} f (md\theta - l \sin \theta d\varphi) \right\} \quad (5.5.367c)$$

が成り立つ.

これらの表式より, 場の方程式は

$$\dot{B}' = \dot{C}' = 0, \quad \partial_t(\rho^2(C - B)) = 0, \quad (5.5.368a)$$

$$\partial_t(f^2 C) = 0, \quad \ddot{f} = 0, \quad (5.5.368b)$$

$$-\ddot{\rho} + \rho'' + \frac{2}{r} \rho' - \frac{f^2}{2r^2} C + \frac{(C - B)^2}{4} \rho = \lambda(\rho^2 - v^2) \rho \quad (5.5.368c)$$

$$B'' + \frac{2}{r} B' = \frac{g_1^2}{2} \rho^2 (B - C), \quad (5.5.368d)$$

$$C'' + \frac{2}{r} C' - \frac{2f^2}{r^2} C = \frac{g_2^2}{2} \rho^2 (C - B), \quad (5.5.368e)$$

$$f'' - \frac{f^2 - 1}{r^2} f = \left(\frac{g_2^2}{2} \rho^2 - C^2 \right) f. \quad (5.5.368f)$$

で与えられる.

特に, 静的配位に対して,

$$\rho'' + \frac{2}{r}\rho' - \frac{f^2}{2r^2}C + \frac{(C-B)^2}{4}\rho = \lambda(\rho^2 - v^2)\rho, \quad (5.5.369a)$$

$$B'' + \frac{2}{r}B' = \frac{g_1^2}{2}\rho^2(B-C), \quad (5.5.369b)$$

$$C'' + \frac{2}{r}C' - \frac{2f^2}{r^2}C = \frac{g_2^2}{2}\rho^2(C-B), \quad (5.5.369c)$$

$$f'' - \frac{f^2-1}{r^2}f = \left(\frac{g_2^2}{2}\rho^2 - C^2\right)f. \quad (5.5.369d)$$

6 超重力理論

Last update: 2023 年 10 月 17 日

6.1 4次元 $N = 1$ 大域的超対称理論

記法

1. 基本スピノール場はすべてマヨラナで反可換：

$$\chi^C \equiv B^{-1}\chi^* = \chi \Rightarrow P_R\chi = (P_L\chi)^C. \quad (6.1.1)$$

$${}^T B = B, \quad BB^* = 1, \quad (6.1.2a)$$

$$B\gamma_a B^{-1} = +\gamma_a^*, \quad B\gamma_5 B^{-1} = -\gamma_5^*. \quad (6.1.2b)$$

2. 荷電共役変換：マヨラナスピノール χ に対し、

$$C = iB\gamma^0 \Rightarrow \bar{\chi} = {}^T\chi C = \chi^\dagger(i\gamma^0). \quad (6.1.3)$$

$${}^T C = -C, \quad C^* = -C^{-1}, \quad (6.1.4a)$$

$$C\gamma_a C^{-1} = -{}^T\gamma_a, \quad C\gamma_5 C^{-1} = +{}^T\gamma_5. \quad (6.1.4b)$$

スピノール双一次式の対称性 α, β を 4次元 Majorana スピノールとするとき、

$$\bar{\alpha}\beta = +\bar{\beta}\alpha, \quad \bar{\alpha}\gamma^a\beta = -\bar{\beta}\gamma^a\alpha, \quad \bar{\alpha}\gamma^{ab}\beta = -\bar{\beta}\gamma^{ab}\alpha, \quad \bar{\alpha}\gamma^{abc}\beta = \bar{\beta}\gamma^{abc}\alpha, \quad (6.1.5a)$$

$$\bar{\alpha}\gamma_*\beta = +\bar{\beta}\gamma_*\alpha, \quad \bar{\alpha}\gamma^a\gamma_*\beta = +\bar{\beta}\gamma^a\gamma_*\alpha, \quad \bar{\alpha}\gamma^{ab}\gamma_*\beta = -\bar{\beta}\gamma^{ab}\gamma_*\alpha,$$

$$\bar{\alpha}\gamma^{abc}\gamma_*\beta = -\bar{\beta}\gamma^{abc}\gamma_*\alpha, \quad (6.1.5b)$$

$$\bar{\alpha}_*P_{L/R}\beta = \bar{\beta}P_{L/R}\alpha; \quad P_{L/R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5), \quad (6.1.5c)$$

$$(\bar{\alpha}\gamma_{[n]}\beta)^\dagger = (\bar{\alpha}\gamma_{[n]}\gamma_*\beta)^\dagger = -(\bar{\alpha}\gamma_{[n]}\gamma_*\beta) \quad (n = 0, 1, 2) \quad (6.1.5d)$$

大域的超対称変換 (古典) 交換関係

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}^\beta\} = -\frac{1}{2}(\gamma_a)_\alpha{}^\beta(iP^a); \quad iP_a = \partial_a, P_a^\dagger = P_a \quad (6.1.6)$$

$$\Leftrightarrow [\bar{\epsilon}_1 Q, \bar{\epsilon}_2 Q] = -\frac{1}{2}(\bar{\epsilon}_1 \gamma_a \epsilon_2)(iP^a). \quad (6.1.7)$$

より, ϵ を Grassmann-odd な定数スピノールとして, 場の無限小超対称変換を古典正準変換

$$\delta \hat{X} = \delta(\bar{\epsilon}Q)X = \delta_\epsilon(Q)X = \{\bar{\epsilon}Q, \hat{X}\}_{\text{PB}} \quad (6.1.8)$$

により定義すると, 古典場に対して

$$[\delta_1, \delta_2]X = -\frac{1}{2}(\bar{\epsilon}_1\gamma^a\epsilon_2)D_a X. \quad (6.1.9)$$

Fierz 恒等式 次元 D が偶数のとき $n = D$, 奇数のとき $n = (D - 1)/2$, $N = 2^{\lfloor D/2 \rfloor}$ として,

$$(\bar{\psi}_1\psi_2)(\bar{\psi}_3\psi_4) = -\frac{1}{N} \sum_{I=0}^n \frac{(-1)^{I(I-1)/2}}{I!} (\bar{\psi}_1\Gamma_{[I}\psi_4)(\bar{\psi}_3\Gamma^{[I}\psi_2) \quad (6.1.10)$$

例えば, 4次元では

$$\begin{aligned} \psi_4(\bar{\psi}_1\psi_2) &= -\frac{1}{4}\psi_2(\bar{\psi}_1\psi_4) \\ &\quad -\frac{1}{4}\gamma_a\psi_2(\bar{\psi}_1\gamma^a\psi_4) \\ &\quad +\frac{1}{8}\gamma_{ab}\psi_2(\bar{\psi}_1\gamma^{ab}\psi_4) \\ &\quad +\frac{1}{4}\gamma_5\gamma_a\psi_2(\bar{\psi}_1\gamma_5\gamma^a\psi_4) \\ &\quad -\frac{1}{4}\gamma_5\psi_2(\bar{\psi}_1\gamma_5\psi_4). \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

特に, χ_1, χ_2, ϵ がマヨラナススピノールの時,

$$2\chi_{[1}(\bar{\epsilon}P_L\chi_2) = -P_L\epsilon(\bar{\chi}_1P_L\chi_2), \quad (6.1.12)$$

$$\chi_{[1}(\bar{\epsilon}P_L\chi_2) = -\frac{1}{8}P_L\gamma_{ab}\epsilon(\bar{\chi}_1P_L\gamma^{ab}\chi_2). \quad (6.1.13)$$

6.1.1 Chiral multiplet

6.1.1.1 1成分系

超対称変換 1成分系のカイラル超組は2個の複素スカラ場 Z, F および1個のマヨラナスピール χ の組 (Z, χ, F) で, その超対称変換は

$$\delta Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} P_L \chi, \quad (6.1.14a)$$

$$\delta P_L \chi = \frac{1}{\sqrt{2}} P_L (\not{\partial} Z + F) \epsilon, \quad (6.1.14b)$$

$$\delta F = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} P_R \not{\partial} \chi. \quad (6.1.14c)$$

ここで, 第1式は χ の定義で, 第2式と第3式の構造は, 交換関係(6.1.9)より完全に決まる.

作用積分の運動項 スカラ場 Z とスピノール場の作用積分を標準的なもの

$$S_0 = \int d^4x \left[-\partial\bar{Z} \cdot \partial Z - \frac{1}{2} \bar{\chi} \not{\partial} \chi \right] \quad (6.1.15)$$

に取ると, その超対称変換は

$$\delta S_0 = \int d^4x \left[-F \delta\bar{F} - \bar{F} \delta F \right] \quad (6.1.16)$$

となる. よって,

$$S_{K,\text{chiral}} = \int d^4x \left[-\partial\bar{Z} \cdot \partial Z - \bar{\chi} P_L \not{\partial} \chi + \bar{F} F \right] \quad (6.1.17)$$

が超対称性をもつ作用積分となる.

複合カイラル超組とその F 項 2組のカイラル超組 $(Z_1, \chi_1, F_1), (Z_2, \chi_2, F_2)$ に対して, $aZ_1 + bZ_2$ (a, b は定数) および $Z_1 Z_2$ を最低次元のスカラ場とするカイラル超組が一意的に存在し, それぞれ

$$Z = aZ_1 + bZ_2, \quad \chi = a\chi_1 + b\chi_2, \quad F = aF_1 + bF_2, \quad (6.1.18)$$

$$Z = Z_1 Z_2, \quad \chi = Z_2 \chi_1 + Z_1 \chi_2, \quad F = F_1 Z_2 + F_2 Z_1 - \bar{\chi}_1 P_L \chi_2 \quad (6.1.19)$$

で与えられる. これより, 特に, 任意の正則関数 $W(Z)$ に対し, それを最低次元のスカラ場とするカイラル超組が一意的に存在し,

$$Z(W) = W(Z), \quad \chi(W) = W'(Z)\chi, \quad [W(Z)]_F \equiv F(W) = W'F - \frac{1}{2} W'' \bar{\chi} P_L \chi \quad (6.1.20)$$

で与えられる. 一般に, F 項の超対称変換は全微分項となるので, その共形次数が 4 ならば, その 4 次元積分は超対称な作用積分を与える. 特に, $W(Z)$ の共形次数が 3 なら, $[W(Z)]_F$ は超対称な相互作用項を与える.

【演習問題 6.1】 (6.1.19) および (6.1.20) を証明せよ. _____□

相互作用項 (F 項) 相互作用項として

$$\mathcal{L}_{I,chiral} = -V(Z, \bar{Z}) + M\bar{\chi}P_L\chi + \bar{M}\bar{\chi}P_R\chi \quad (6.1.21)$$

を仮定すると, 超対称性が成り立つ条件は

$$\partial_Z V = 2MF, \quad \partial_F V = g(Z), \quad \partial_Z g = 2M \quad (6.1.22)$$

となる. これより, $M = -W''(Z)/2$ とおくと,

$$\mathcal{L}_{I,chiral} = -\frac{1}{2}W''\bar{\chi}P_L\chi + W'F. \quad (6.1.23)$$

が得られる. これは, ちょうど, $W(Z)$ から生成されるカイラル超組の F 項と一致する.

カイラル超組に対する超対称な全作用積分は

$$S_{chiral,0} = \int d^4x \left[-\partial\bar{Z} \cdot \partial Z - \bar{\chi}\not{\partial}P_L\chi + \bar{F}F + \left(-\frac{1}{2}W''\bar{\chi}P_L\chi + W'F + \text{h.c.} \right) \right] \quad (6.1.24)$$

で与えられる. F に対する変分方程式は

$$F = -\bar{W}', \quad \bar{F} = -W' \quad (6.1.25)$$

となるので, F を消去すると,

$$S'_{chiral,0} = \int d^4x \left[-\partial\bar{Z} \cdot \partial Z - V_F - \bar{\chi}\not{\partial}P_L\chi - \frac{1}{2}(W''\bar{\chi}P_L\chi + \bar{W}''\bar{\chi}P_R\chi) \right] \quad (6.1.26)$$

を得る. ここで,

$$V_F = |W'(Z)|^2. \quad (6.1.27)$$

6.1.1.2 多成分化

複数のカイラル超組が存在する系 (Z^j, χ^j, F^j) に対して、運動項が標準的で運動項での異なる組の間の混合がない場合には、超対称な作用積分の運動項は単に各超組に対する運動項の和で与えられる。また、相互作用は、超ポテンシャル $W(Z^1, \dots, Z^n)$ に対する F 項より得られる。したがって、この場合の作用積分は、

$$S_{\text{chiral}} = \int d^4x \left[\delta_{jk} (-\partial \bar{Z}^j \cdot \partial Z^k - \bar{\chi}^j \not{\partial} P_L \chi^k + \bar{F}^j F^k) - \frac{1}{2} W_{jk} \bar{\chi}^j P_L \chi^k + W_j F^j + \text{h.c.} \right] \quad (6.1.28)$$

で与えられる。ここで、 $W_j = \partial W / \partial Z^j$, $W_{jk} = \partial^2 W / \partial Z^j \partial Z^k$ である。

しかし、運動項の係数がスカラ場 Z に依存する一般の場合には、いくつかの補正が必要となる

【定理 6.2 (一般的なカイラル超組系に対する超対称作用積分)】 時空微分について高々 2 階の最も一般的なカイラル超組系 (Z^j, χ^j, F^j) に対する超対称ラグランジアンは、次式で与えられる：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{chiral}} = & -g_{j\bar{k}} \partial Z^j \cdot \partial \bar{Z}^k - \frac{1}{2} g_{j\bar{k}} (\bar{\chi}^k \not{D} P_L \chi^j + \bar{\chi}^k \not{D} P_R \chi^j) \\ & + g_{j\bar{k}} \left(F^j - \frac{1}{2} \Gamma_{lm}^j \bar{\chi}^l P_L \chi^m \right) \left(\bar{F}^k - \frac{1}{2} \Gamma_{\bar{l}\bar{m}}^{\bar{k}} \bar{\chi}^{\bar{l}} P_R \chi^{\bar{m}} \right) \\ & + \frac{1}{4} R_{jk\bar{l}\bar{m}} (\bar{\chi}^j P_L \chi^k) (\bar{\chi}^{\bar{l}} P_R \chi^{\bar{m}}) \\ & + F^j W_j + \bar{F}^{\bar{j}} \bar{W}_{\bar{j}} - \frac{1}{2} W_{jk} \bar{\chi}^j P_L \chi^k - \frac{1}{2} \bar{W}_{\bar{j}\bar{k}} \bar{\chi}^{\bar{j}} P_R \chi^{\bar{k}} \end{aligned} \quad (6.1.29)$$

ここで、 $g_{j\bar{k}}$ は Kähler 計量、 $\Gamma_{lm}^j, \Gamma_{\bar{l}\bar{m}}^{\bar{j}}$ は対応する Levi-Civita 接続係数、 $R_{jk\bar{l}\bar{m}}$ は曲率テンソル、 $D\chi^j$ は

$$D_\mu P_L \chi^j = P_L (\partial_\mu \chi^j + \partial_\mu Z^l \Gamma_{lk}^j \chi^k), \quad D_\mu P_R \chi^j = P_R (\partial_\mu \chi^j + \partial_\mu \bar{Z}^{\bar{l}} \Gamma_{\bar{l}\bar{k}}^{\bar{j}} \chi^{\bar{k}}), \quad (6.1.30)$$

により定義される共変微分、 $W(Z)$ は超ポテンシャル、 $W_j = \partial W / \partial Z^j$, $W_{jk} = \partial^2 W / \partial Z^j \partial Z^k$ である。 \square

Proof.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 &= -K_{jk}\partial Z^j \cdot \partial Z^k - (K_{jk})^* \partial \bar{Z}^j \cdot \partial \bar{Z}^k - K_{j\bar{k}}\partial Z^j \cdot \partial \bar{Z}^k \\
&\quad - \frac{1}{2}g_{j\bar{k}}\bar{\chi}^k \not{D} P_L \chi^j - \frac{1}{2}(g_{j\bar{k}})^* \bar{\chi}^k \not{D} P_R \chi^j \\
&\quad + L_{j\bar{k}}(F^j - \bar{\chi}^l B_{lm}^j \chi^m)(\bar{F}^j - \bar{\chi}^l (B_{lm}^j)^* \chi^m) \\
&\quad + \chi^4 \text{項}
\end{aligned} \tag{6.1.31}$$

ここで,

$$D_\mu P_L \chi^j = P_L (\partial_\mu \chi^j + \partial_\mu Z^l \Gamma_{lk}^j \chi^k), \tag{6.1.32}$$

$\Gamma_{lk}^j(Z, \bar{Z})$ は, Z 座標変換 $\chi^j \rightarrow \chi'^j = (\partial Z'^j / \partial Z^k) \chi^k$ に対して, $D'_\mu P_L \chi'^j = (\partial Z'^j / \partial Z^k) D_\mu P_L \chi^k$ が成り立つスカラ多様体上の適当な接続係数である. $K_{j\bar{k}}(Z, \bar{Z})$ と $L_{j\bar{k}}(Z, \bar{Z})$ はエルミート行列に値を取る関数. また, $g_{j\bar{k}}(Z, \bar{Z})$ はエルミート行列としてよい, 実際, $g_{j\bar{k}}$ を $g_{j\bar{k}} = h_{j\bar{k}} + a_{j\bar{k}}$ とエルミート部分 $h_{j\bar{k}}$ と反エルミート部分 $a_{j\bar{k}}$ の和として表すと, 部分積分により, $a_{j\bar{k}}$ に比例した部分は

$$h^{l\bar{m}}(g_{n\bar{m}}\Gamma_{jk}^n + \partial_j a_{k\bar{m}}) \rightarrow \Gamma_{jk}^l \tag{6.1.33}$$

の置き換えにより, Γ_{jk}^l に吸収できる. 以下, $g_{j\bar{k}}$ はエルミート行列とする.

このラグランジアン of 超対称変換のうち, (適当な部分積分により) $\partial^2 Z P_L \chi$ および $\partial Z^2 P_L \chi$ に比例する項は

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_l K_{jk}\partial Z^j \cdot \partial Z^k (\bar{\epsilon} P_L \chi^l) \tag{6.1.34}$$

のみなので, $\partial_l K_{jk} = 0$ を得る. すなわち, $K_{jk} = K_{jk}(\bar{Z})$ は反正則関数でないといけない. したがって, 理論が複素スカラ場が値を取る複素多様体の正則座標変換 $Z^j \rightarrow Z'^j = Z'^i(Z)$ に対して共変的となることを要求すると $K_{jk} = 0$ となる.

次に $\partial^2 Z P_R \chi$ および $\partial Z^2 P_R \chi$ に比例する項は,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\sqrt{2}} \left[2(K_{j\bar{k}} - g_{j\bar{k}}) \partial^2 Z^j \right. \\
&\quad \left. + (-2\partial_l K_{jk} + 2\partial_j K_{k\bar{l}} - g_{m\bar{l}}\Gamma_{jk}^m - \partial_j g_{k\bar{l}}) \partial Z^j \cdot \partial Z^k \right] (\bar{\epsilon} P_R \chi^l) \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{2}} \partial_k g_{j\bar{l}} \partial_\mu Z^j \partial_\nu Z^k (\bar{\epsilon} \gamma^{\mu\nu} P_R \chi^l)
\end{aligned} \tag{6.1.35}$$

これより,

$$K_{j\bar{k}} = g_{j\bar{k}}, \quad (6.1.36a)$$

$$\partial_{\bar{j}} g_{l\bar{k}} - \partial_{\bar{k}} g_{l\bar{j}} = 0, \quad (6.1.36b)$$

$$0 = 2\partial_{\bar{l}} K_{jk} = \partial_{(j} g_{k)\bar{l}} - g_{m\bar{l}} \Gamma_{(jk)}^m. \quad (6.1.36c)$$

この第2式はエルミート計量 $g_{j\bar{k}}$ に対する Kähler 条件となっており, これより $g_{j\bar{k}}$ は実関数 $K(Z, \bar{Z})$ を用いて,

$$g_{j\bar{k}} = K_{j\bar{k}} = \partial_j \partial_{\bar{k}} K. \quad (6.1.37)$$

すなわち, 計量 $g_{j\bar{k}}$ は Kähler 計量となる. さらに, 第3式より, $\Gamma_{jk}^m = \Gamma_{jk}^m(g)$ となる.

次に, $\bar{F} \partial P_L \chi$ に比例した項を取り出すと,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (L_{j\bar{k}} - g_{j\bar{k}}) \bar{\epsilon} P_R \partial \chi^j \bar{F}^k = 0 \Rightarrow L_{j\bar{k}} = g_{j\bar{k}}. \quad (6.1.38)$$

$F^j \bar{F}^k$ に比例した部分より

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} F^j \bar{F}^k \left[(\partial_l g_{j\bar{k}} \bar{\chi}^l P_L \epsilon - 2g_{n\bar{k}} \bar{\chi}^l P_L B_{lj}^n P_L \epsilon) \right. \\ \left. + (\partial_{\bar{l}} g_{j\bar{k}} \bar{\chi}^l P_R \epsilon - 2g_{n\bar{k}} \bar{\chi}^l P_L (B_{lj}^n)^* P_R \epsilon) \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.1.39)$$

よって,

$$\partial_l g_{j\bar{k}} = 2g_{m\bar{k}} B_{lj}^m \Leftrightarrow B_{jk}^m = \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^m(g). \quad (6.1.40)$$

最後に, $F \chi^3$ の係数より, χ^4 項の構造が決まる. Q.E.D.

6.1.2 実超組とベクトル超組

D 項 実超組 $(C, \zeta, \mathcal{H}, B_\mu, \lambda, D)$ は 3 個の複素スカラ C, \mathcal{H}, D , 2 個のマヨラナスピノール ζ, λ および実ベクトル場 B_μ からなり, 超対称変換に対して次のように変換する:

$$\delta C = \frac{1}{2} i \bar{\epsilon} \gamma_5 \zeta, \quad (6.1.41a)$$

$$\delta P_L \zeta = \frac{1}{2} P_L (i \mathcal{H} - \not{B} - i \not{\partial} C) \epsilon, \quad (6.1.41b)$$

$$\delta \mathcal{H} = -i \bar{\epsilon} P_R (\lambda + \not{\partial} \zeta), \quad (6.1.41c)$$

$$\delta B_\mu = -\frac{1}{2} \bar{\epsilon} (\gamma_\mu \lambda + \partial_\mu \zeta), \quad (6.1.41d)$$

$$\delta \lambda = \frac{1}{2} (\gamma^{\mu\nu} \partial_\mu B_\nu + i \gamma_5 D) \epsilon, \quad (6.1.41e)$$

$$\delta D = \frac{1}{2} i \epsilon \gamma_5 \gamma^\mu \partial_\mu \lambda. \quad (6.1.41f)$$

C から出発して, 第 1 式を ζ の定義とし, 新たに登場するスピノール場が 1 個のみであることを要求すると, 超対称性代数より, この変換則が一意的に導かれる.

1 個以上の超組の成分から作られる複合スカラを C として用いると, D 成分は超対称変換が全微分となるので, 超対称なラグランジアンを与える. 例えば, $K(Z, \bar{Z})$ を複素スカラ場の組 (Z^j) の実関数とすると, $[(1/2)K(Z, \bar{Z})]_D + [W(Z)]_F$ がちょうど定理 6.2 を与える:

$$\mathcal{L}_{\text{chiral}} = \frac{1}{2} [K(Z, \bar{Z})]_D + [W(Z)]_F. \quad (6.1.42)$$

ゲージ超組 つぎに, (Z, χ, F) をカイラル超組として, $C = \text{Im } Z$ に対応する実超組を構成すると

$$(C, \zeta, \mathcal{H}, B_\mu, \lambda, D) = \left(\text{Im } Z, -\frac{1}{\sqrt{2}}\chi, iF, \partial_\mu \text{Re } Z, 0, 0 \right) \quad (6.1.43)$$

となる. これより, 任意の実超組 $(C, \zeta, \mathcal{H}, B_\mu, \lambda, D)$ とカイラル超組 (Z, χ, F) に対して,

$$\left(C + \text{Im } Z, \zeta - \frac{1}{\sqrt{2}}\chi, \mathcal{H} + iF, B_\mu + \partial_\mu \text{Re } Z, \lambda, D \right) \quad (6.1.44)$$

は再び実超組として変換する. そこで, 実超組 $(C, \zeta, \mathcal{H}, B_\mu, \lambda, D)$ をゲージ場を表す超組, カイラル超組 (Z, χ, F) から今構成した実超組を一般化されたゲージパラメータと見なし, 理論が拡張されたゲージ変換 (6.1.44) となることを要求する. すると, 明らかに, C, ζ, \mathcal{H} はラグランジアンに現れない. 残りの場 B_μ, λ, D のうち, B_μ の超対称変換は閉じないが, 余分な項 $-(1/2)\bar{\epsilon}\partial_\mu\zeta = -\partial_\mu((1/2)\bar{\epsilon}\zeta)$ は, B_μ に対するゲージ変換と見なせる. したがって, 次の超対称変換を受ける場の組 (A_μ, λ, D) をゲージ場を表す超組と定義することができる:

$$\delta A_\mu = -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda, \quad \delta\lambda = \frac{1}{2}(\gamma^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu + i\gamma_5 D)\epsilon, \quad \delta D = -\frac{1}{2}i\bar{\epsilon}\gamma_5\rlap{/}\partial\lambda. \quad (6.1.45)$$

この超組は (Wess-Zumino ゲージでの) ゲージ超組と呼ばれる. ただし, これらの場の超対称変換の代数は, 標準的なものからゲージ変換分だけずれる:

$$[\delta(\bar{\epsilon}_1 Q), \delta(\bar{\epsilon}_2 Q)]A_\mu^A = -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}_1\gamma^\nu\epsilon_2 F_{\mu\nu}^A, \quad (6.1.46a)$$

$$[\delta(\bar{\epsilon}_1 Q), \delta(\bar{\epsilon}_2 Q)]\lambda^A = -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}_1\gamma^\nu\epsilon_2 D_\nu\lambda^A, \quad (6.1.46b)$$

$$[\delta(\bar{\epsilon}_1 Q), \delta(\bar{\epsilon}_2 Q)]D^A = -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}_1\gamma^\nu\epsilon_2 D_\nu D^A. \quad (6.1.46c)$$

複数のゲージ超組 $(A_\mu^A, \lambda^A, D^A)$ の直和は, 可換ゲージ場を含むヘリシティ $(1, 1/2)$ の超組を表現し, 超対称ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{vector,0} = -\frac{1}{2}F^A \cdot F^A - \frac{1}{2}\bar{\lambda}^A\rlap{/}\partial\lambda^A + \frac{1}{2}D^A D^A \quad (6.1.47)$$

で与えられることが容易に示される.

非可換ゲージ超組 非可換ゲージ場に対応するゲージ超組 $(A_\mu^A, \lambda^A, D^A)$ に対して, 超対称な理論を構成するには, まず, 超対称変換をゲージ変換と可換な形

$$\delta A_\mu^A = -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda^A, \quad (6.1.48a)$$

$$\delta\lambda^A = \frac{1}{4}(\gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^A + 2i\gamma_5 D^A)\epsilon, \quad (6.1.48b)$$

$$\delta D^A = -\frac{1}{2}i\bar{\epsilon}\gamma_5\not{D}\lambda^A. \quad (6.1.48c)$$

に修正する必要がある. ここで,

$$D\lambda^A = d\lambda^A + f^A_{BC}A^B\lambda^C, \quad (6.1.49a)$$

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + f^A_{BC}A_\mu^B A_\nu^C \quad (6.1.49b)$$

である. この変更のもとで, 正則関数 $\mathcal{N}_{AB}(Z) = \mathcal{N}_{BA}(Z)$ と λ^A から作られる複合スカラ場 $\mathcal{N}_{AB}\bar{\lambda}^A P_L \lambda^B$ が生成するカイラル超組を作ると次式を得る:

$$Z(\mathcal{N}) = -\frac{1}{4}\mathcal{N}_{AB}\bar{\lambda}^A P_L \lambda^B, \quad (6.1.50a)$$

$$P_L \chi(\mathcal{N}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathcal{N}_{AB}\left(\not{F}^{-A} - iD^A\right)P_L \lambda^B - \frac{1}{4}\mathcal{N}_{ABj}P_L \chi^j \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B, \quad (6.1.50b)$$

$$\begin{aligned} F(\mathcal{N}) = & \frac{1}{4}\mathcal{N}_{AB}\left(-2\bar{\lambda}^A P_L \not{D}\lambda^B - 2F^{-A} \cdot F^{-B} + D^A D^B\right) \\ & + \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathcal{N}_{ABj}\bar{\chi}^j\left(-\not{F}^{-A} + iD^A\right)P_L \lambda^B - \frac{1}{4}\mathcal{N}_{ABj}F^j \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B \\ & + \frac{1}{8}\mathcal{N}_{ABjk}\bar{\chi}^j P_L \chi^k \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B. \end{aligned} \quad (6.1.50c)$$

ここで, $F_{\mu\nu}^- = (F_{\mu\nu} + i\tilde{F}_{\mu\nu})/2$, $\not{F} = (1/2)\gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, $F^A \cdot F^B = (1/2)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ である. これより, F 項

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = \left[\mathcal{N}_{AB}\bar{\lambda}^A P_L \lambda^B\right]_F + \text{hc} \quad (6.1.51)$$

が, ゲージ結合係数がカイラル場に依存する一般の場合に対して, ゲージ場の超対称ラグランジュ密度関数を与える.

6.1.3 超場による記述

θ^α を定数の Grassmann Majorana スピノールとすると、 $E^{3,1}$ 上の関数を係数として θ から生成される代数の元

$$\Phi(x, \theta) = \phi_0(x) + \theta^\alpha \chi_\alpha(x) + \theta^\alpha \theta^\beta \phi_{\alpha\beta}(x) + \cdots + \theta^1 \theta^2 \theta^3 \theta^4 \phi_4(x) \quad (6.1.52)$$

は形式的に、 x^μ と θ^α の関数と見なすことができる。 $\Phi(x, \theta)$ は超場 (superfield) と呼ばれる。

超空間における並進変換としての超対称変換 4個の生成元をもつ実外積代数を $\mathbb{R}B$ ，その偶成分と奇成分への分解を $\mathbb{R}B = \mathbb{R}B_0 + \mathbb{R}B_1$ と表記するとき、

$$\mathbb{R}S^{4,1} \equiv \mathbb{R}B^{4,4} = (\mathbb{R}B_0)^4 \times (\mathbb{R}B_1)^4 \quad (6.1.53)$$

を4次元における $N = 1$ の超空間と呼ぶ。 x^μ は $\mathbb{R}B_0$ に、 θ^α は $\mathbb{R}B_1$ に値を取るとすると、超場は $\mathbb{R}S^{4,1}$ から $\mathbb{C}B$ に値を取る関数と見なすことができる。

いま、超空間における Grassmann スピノール ϵ をパラメータとする無限小変換 $\delta(\epsilon)$ を

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \frac{1}{4} \bar{\epsilon} \gamma^\mu \theta, \quad (6.1.54a)$$

$$\theta \rightarrow \theta' = \theta - \epsilon \quad (6.1.54b)$$

により定義すると、対応する超場の変換は

$$\delta\Phi = \bar{\epsilon} Q\Phi, \quad (6.1.55)$$

$$Q_\alpha = \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha} - \frac{1}{4} (\gamma^\mu \theta)_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (6.1.56)$$

と表される。ここで、

$$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha} = (C^{-1})_\alpha{}^\beta \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta} \quad (6.1.57)$$

Q_α は、超対称変換と同じ交換関係

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \frac{1}{2} (\gamma^\mu C^{-1})_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (6.1.58)$$

を満たす。したがって、この変換を超場の成分場で表せば、成分場の組が作る超組への超対称変換の表現が得られる。

ベクトル超場 例えば, Φ を任意の複素超場として, Lorentz 不変性を考慮して超場を θ で展開し, スピノール 2 次形式の対称性と Fierz 恒等式から得られる関係式

$$(\bar{\theta}\gamma_*\theta)\bar{\theta} = -(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\gamma_*, \quad (6.1.59a)$$

$$(\bar{\theta}\gamma_*\gamma_\mu\theta)\bar{\theta} = -(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\gamma_*\gamma_\mu \quad (6.1.59b)$$

を考慮すると, 一般に,

$$\begin{aligned} \Phi = & C(x) + \frac{i}{2}\bar{\gamma}_*\theta\zeta - \frac{1}{8}\bar{\theta}(P_L\mathcal{H}_L + P_R\mathcal{H}_R)\theta - \frac{i}{8}\bar{\theta}\gamma_*\gamma^\mu\theta B_\mu \\ & - \frac{i}{8}(\bar{\theta}\theta)\bar{\theta}\gamma_*\left(\lambda + \frac{1}{2}\not{\partial}\zeta\right) + \frac{1}{32}\bar{\theta}P_L\theta\bar{\theta}P_R\theta\left(D + \frac{1}{2}\square C\right) \end{aligned} \quad (6.1.60)$$

が得られる. これにより定義され複素成分場 $(C, \zeta, \mathcal{H}_L, \mathcal{H}_R, B_\mu, \lambda, D)$ により上記の変換を表すと,

$$\delta C = \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\gamma_*\zeta, \quad (6.1.61a)$$

$$\delta\zeta = \frac{i}{2}(\mathcal{H}_L P_L + \mathcal{H}_R P_R)\epsilon - \frac{1}{2}(\not{B} + i\gamma_*\not{\partial}C)\epsilon, \quad (6.1.61b)$$

$$\delta\mathcal{H}_L = -i\bar{\epsilon}P_R(\lambda + \not{\partial}\zeta), \quad (6.1.61c)$$

$$\delta\mathcal{H}_R = i\bar{\epsilon}P_L(\lambda + \not{\partial}\zeta), \quad (6.1.61d)$$

$$\delta B_\mu = -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}(\gamma_\mu\lambda + \partial_\mu\zeta), \quad (6.1.61e)$$

$$\delta\lambda = \frac{1}{2}(iD\gamma_* + \gamma^{\mu\nu}\partial_\mu B_\nu)\epsilon, \quad (6.1.61f)$$

$$\delta D = \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\gamma_*\not{\partial}\lambda. \quad (6.1.61g)$$

これより, C が実場であることを要請すると, 超対称変換との整合性より, $\mathcal{H}_R = \mathcal{H}_L^*$, B_μ, D が実場, ζ と λ が Majorana 場であることが必要となり, 実超組が得られる.

カイラル超場 次に，超空間のベクトル場 \mathbb{D}_α を

$$\mathbb{D}_\alpha = \frac{\vec{\partial}}{\partial \bar{\theta}^\alpha} + \frac{1}{4}(\gamma^\mu \theta)_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (6.1.62)$$

により定義すると，

$$\{\mathbb{D}_\alpha, \mathbb{D}_\beta\} = -\frac{1}{2}(\gamma^\mu C^{-1})_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (6.1.63)$$

$$\{\mathbb{D}_\alpha, \mathbb{Q}_\beta\} = 0 \quad (6.1.64)$$

が成り立つ．これより，超場に対するカイラリティ条件

$$P_R \mathbb{D} \Phi = 0 \quad (6.1.65)$$

は，超対称変換で保存される．新しい偶座標系を

$$x_+^\mu \equiv x^\mu + \frac{1}{8} \bar{\theta} \gamma_* \gamma^\mu \theta \quad (6.1.66)$$

により導入し，超場を x_+^μ と θ を用いて

$$\Phi = \tilde{\Phi}(x_+, \theta) \quad (6.1.67)$$

と表すと，カイラリティ条件は

$$P_R \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \theta} \right|_{x_+ = \text{const}} = 0 \quad (6.1.68)$$

となる．この条件は， $\tilde{\Phi}$ を x_+ を固定して θ で展開したとき， $P_L \theta$ のみが現れることと同等である．したがって， $\tilde{\Phi}$ は

$$\tilde{\Phi}(x_+, \theta) = Z(x_+) + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\theta} P_L \chi(x_+) + \frac{1}{4} \bar{\theta} P_L \theta F(x_+) \quad (6.1.69)$$

と， (Z, χ, F) により表される．この表式を展開して， x, θ で表すと，

$$C = Z, \quad \zeta = -i\sqrt{2} P_L \chi, \quad \mathcal{H}_L = -2F, \quad \mathcal{H}_R = 0, \quad B_\mu = i\partial_\mu Z, \quad \lambda = 0, \quad D = 0 \quad (6.1.70)$$

が得られる．この対応により， (Z, χ, F) の超対称変換に対する変換則を求めると，標準的なカイラル超組の変換則と一致することが確かめられる．

ベクトル型カイラル超場とゲージ超組 ゲージ超組 (B_μ, λ, D) は, 次のベクトル超場と対応する:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{i}{8}\bar{\theta}\gamma_*\gamma^\mu\theta B_\mu(x) - \frac{i}{8}(\bar{\theta}\theta)(\bar{\theta}\gamma_*\lambda(x)) + \frac{1}{64}(\bar{\theta}\theta)^2 D(x) \\ &= -\frac{i}{8}\bar{\theta}\gamma_*\gamma^\mu\theta B_\mu(x_+) - \frac{i}{8}(\bar{\theta}\theta)(\bar{\theta}\gamma_*\lambda(x_+)) + \frac{1}{64}(\bar{\theta}\theta)^2(D(x_+) + i\partial \cdot B(x_+)). \end{aligned} \quad (6.1.71)$$

この超場より, 新しい超場 W_α を

$$W_\alpha \equiv 4\bar{\mathbb{D}}P_R\mathbb{D}P_L\mathbb{D}_\alpha V \quad (6.1.72)$$

により定義すると, W_α は自動的にカイラルな超場となる:

$$P_R\mathbb{D}W_\alpha = 0. \quad (6.1.73)$$

具体的に計算すると,

$$W = -iP_L\lambda(x_+) + \frac{1}{2}(D(x_+) - i\gamma^{\mu\nu}\partial_\mu B_\nu(x_+))P_L\theta - \frac{i}{4}P_L\hat{\theta}\lambda(x_+)(\bar{\theta}P_L\theta). \quad (6.1.74)$$

この超場の超対称変換

$$\delta W_\alpha = \bar{\epsilon}QW_\alpha = \bar{\epsilon}^\beta \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta^\beta} - \frac{1}{2}(P_R\gamma^\mu\theta)_\beta \frac{\partial}{\partial x_+^\mu} \right) W_\alpha \quad (6.1.75)$$

を計算すると, ゲージ超場の正しい変換則が得られる. また, ゲージ超組に対する Lagrange 密度は, カイラル超場 $\mathcal{N}_{AB}\bar{W}^A W^B$ の F 項と一致する:

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = [\mathcal{N}_{AB}\bar{W}^A W^B]_F + \text{h.c.} \quad (6.1.76)$$

6.1.4 ゲージ理論の一般論の復習

Check: 2020/10/7

Source: RM20201008_LTG

変換群と無限小変換 群 G の多様体 X への左作用 Φ_g が与えられたとする:

$$G \ni g \mapsto \Phi_g \in \text{Diff}(X) : \Phi_{g_1 g_2}(x) = (\Phi_{g_1} \circ \Phi_{g_2})(x) = \Phi_{g_1}(\Phi_{g_2}(x)). \quad (6.1.77)$$

これより、 G の単位元 e における接空間 $T_e(G)$ から X 上のベクトル場の集合 $\mathfrak{X}(X)$ への線形写像が定まる。いま、 $T_e(G) \ni A_e, B_e$ に対し、 $A(e) = A_e, B(e) = B_e$ となる G 上の左不変ベクトル場 A, B の間の $\mathfrak{X}(X)$ の交換子 $[A, B]$ を用いて、 $[A_e, B_e] = [A, B]_e$ により交換子を定義すると、 $T_e(G)$ は左不変ベクトル場の全体 $\mathcal{L}(G)$ と同型な Lie 代数となる。この同型対応により両者を同一視すると、 G のリー代数 $\mathcal{L}(G)$ から $\mathfrak{X}(X)$ への線形写像

$$\mathcal{L}(G) \rightarrow \mathfrak{X}(X) : A \mapsto V_A = V(A), \quad V_A = \left. \frac{d}{dt} \Phi_{\exp(tA)}(x) \right|_{t=0} \equiv \delta_A x. \quad (6.1.78)$$

に対して、次の関係式が成り立つ:

$$[A, B] \mapsto V_{[A, B]} = -[V_A, V_B]. \quad (6.1.79)$$

つぎに、 $\phi : X \rightarrow L$ を内部自由度を表す線形空間 L に値を取る関数 $\phi \in \mathcal{F}(X) \otimes L$ 、 ρ を G の L 上の表現として、 G の ϕ への作用 T_g を

$$T_g \phi = \rho(g)^{-1} \Phi_g^* \phi \quad (6.1.80)$$

により定義すると、 ϕ の空間への G の右作用が得られる。このとき、 ϕ の無限小変換 $\delta_A \phi \equiv \delta(A)\phi$ が

$$A \in \mathcal{L}(G) \mapsto \delta_A \phi = (\mathcal{L}_{V_A} - (d\rho)_*(A))\phi \quad (6.1.81)$$

により定義される。さらに、これを用いて、 ϕ の汎関数 $F(\phi)$ の無限小変換を

$$\delta_A F(\phi) = (\delta_A \phi)^i \cdot \frac{\delta F}{\delta \phi^i} \quad (6.1.82)$$

により定義すると、

$$[A, B] \mapsto \delta([A, B]) = [\delta(A), \delta(B)] \quad (6.1.83)$$

が成り立つ。

内部対称性に対するゲージ場系の内部対称性の作る代数を \mathcal{L} とする；

$$\mathcal{L} = \langle T_A \rangle; \quad [T_A, T_B] = T_C f^C{}_{AB}. \quad (6.1.84)$$

このとき、 \mathcal{L} に値を取るゲージ場

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu = T_A A_\mu^A dx^\mu \quad (6.1.85)$$

のゲージ変換は、 $\lambda = \lambda^A T_A$ を変換パラメータとして、

$$\begin{aligned} \delta(\lambda)\mathcal{A}_\mu &= D_\mu \lambda \equiv \partial_\mu \lambda + [\mathcal{A}_\mu, \lambda] \\ \Leftrightarrow \delta(\lambda)A_\mu^A &= D_\mu \lambda^A = \partial_\mu \lambda^A + f^A{}_{BC} A_\mu^B \lambda^C \end{aligned} \quad (6.1.86)$$

で与えられる。また、場 ϕ の共変微分が

$$\delta(\lambda)\phi = -d\rho(\lambda)\phi \mapsto D_\mu \phi = (\partial_\mu + d\rho(\mathcal{A}_\mu))\phi \quad (6.1.87)$$

により定義される。この共変微分はゲージ変換に対して、

$$\delta(\lambda)D_\mu \phi = -d\rho(\lambda)D_\mu \phi \quad (6.1.88)$$

と変換する。また、

$$[D_\mu, D_\nu]\phi = d\rho(\mathcal{R}_{\mu\nu})\phi = -\delta(\mathcal{R}_{\mu\nu})\phi \quad (6.1.89)$$

が成り立つ。ここで、

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}\mathcal{R}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad \mathcal{R}_{\mu\nu} = T_A R_{\mu\nu}^A \quad (6.1.90)$$

は曲率テンソルで、

$$\mathcal{R} = d\mathcal{A} + \frac{1}{2}[\mathcal{A}, \mathcal{A}], \quad (6.1.91a)$$

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu], \quad (6.1.91b)$$

$$R_{\mu\nu}^A = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^A - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^A + f^A{}_{BC} A_\mu^B A_\nu^C \quad (6.1.91c)$$

により定義される。曲率テンソルは、ゲージ変換に対して次のように変換する：

$$\delta(\lambda)\mathcal{R} = -[\lambda, \mathcal{R}]. \quad (6.1.92)$$

また、次の Bianchi 恒等式を満たす：

$$D\mathcal{R} \equiv d\mathcal{R} + [\mathcal{A}, \mathcal{R}] = 0. \quad (6.1.93)$$

6.1.5 カイラル超対称理論のゲージ化

前節で求めたゲージ場に対する超対称理論では、カイラル超組は中性でゲージ変換を受けない。この部分を修正して、ゲージ場のカイラルセクターへの結合を与える操作をゲージ化 (gauging) と呼ぶ。

ゲージ化を行うには、まず、ゲージ群をスカラ多様体 (\mathcal{M}, g) の等長変換群へ埋め込む必要がある。この埋込は、ゲージ群のリー代数の基底を t_A に対して、次の条件を満たす (\mathcal{M}, g) の Killing ベクトルを対応させることにより指定される：

$$t_A \mapsto k_A: [t_A, t_B] = t_C f^C_{AB} \mapsto [k_A, k_B] = k_C f^C_{AB}. \quad (6.1.94)$$

カイラル超組の運動項に現れる計量は Kähler 計量となるので、 k_A は正則 Killing ベクトルでないといけない。この対応により、無限小ゲージ変換 $\theta^A(x)t_A$ に対して、スカラ場、スピノール場、ゲージ場は次のように変換する：

$$\delta_g Z^j = \theta^A k_A^j(Z), \quad (6.1.95a)$$

$$\delta_g P_L \chi^j = \theta^A \partial_k k_A^j(Z) P_L \chi^k, \quad (6.1.95b)$$

$$\delta_g \lambda^A = -\theta^C f^A_{CB} \lambda^B, \quad (6.1.95c)$$

$$\delta_g A_\mu^A = \partial_\mu \theta^A + f^A_{BC} A_\mu^B \theta^C \quad (6.1.95d)$$

これに対応して、共変微分を

$$D_\mu Z^j = \partial_\mu Z^j - A_\mu^A k_A^j, \quad (6.1.96a)$$

$$D_\mu P_L \chi^j = \partial_\mu P_L \chi^j + D_\mu Z^l \gamma_{lk}^j P_L \chi^k - A_\mu^A \partial_k k_A^j P_L \chi^k, \quad (6.1.96b)$$

$$D_\mu \lambda^A = \partial_\mu \lambda^A + A_\mu^C f^A_{CB} \lambda^B, \quad (6.1.96c)$$

$$D_\mu f_{AB} = \partial_\mu f_{AB} - 2A_\mu^C f^D_{C(A} f_{B)D} \quad (6.1.96d)$$

により定義する。この定義の元で、ゲージ変換と可換なカイラル超組の超対称変換は

$$\delta Z^j = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} P_L \chi^j, \quad (6.1.97a)$$

$$\delta P_L \chi^j = \frac{1}{\sqrt{2}} (\not{D} Z^j + F^j) \epsilon, \quad (6.1.97b)$$

$$\delta F^j = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} (\not{D} P_L \chi^j + P_R \lambda^A k_A^j) \quad (6.1.97c)$$

となる。ベクトル超組の変換は (6.1.48) のままで変更はない。

この修正された超対称変換を用いて $K(Z, \bar{Z})/2$ に対する D 項, $W(Z)$ および $(-1/4)f_{AB}(Z)\bar{\lambda}^A P_L \lambda^B$ に対する F 項を計算することによりゲージ化されたカイラル超組と (非可換) ゲージ超組の系に対するゲージ不変かつ超対称なラグランジュ関数が, $K(Z, \bar{Z}), f_{AB}(Z), W(Z), f^A_{BC}, \mathcal{P}(Z, \bar{Z})$ により一意的に定まる:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{kin,chiral}} + \mathcal{L}_{\text{kin,gauge}} + \mathcal{L}_{\text{pot,chiral}}. \quad (6.1.98)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{kin,chiral}} = & -g_{j\bar{k}} DZ^j \cdot DZ^k - \frac{1}{2} g_{j\bar{k}} (\bar{\chi}^k \not{D} P_L \chi^j + \bar{\chi}^k \not{D} P_R \chi^j) \\ & + g_{j\bar{k}} \left(F^j - \frac{1}{2} \Gamma_{lm}^j \bar{\chi}^l P_L \chi^m \right) \left(\bar{F}^k - \frac{1}{2} \Gamma_{\bar{l}\bar{m}}^{\bar{k}} \bar{\chi}^{\bar{l}} P_R \chi^{\bar{m}} \right) \\ & + \frac{1}{4} R_{j\bar{k}\bar{l}\bar{m}} (\bar{\chi}^j P_L \chi^k) (\bar{\chi}^{\bar{l}} P_R \chi^{\bar{m}}) \\ & - D^A \mathcal{P}_A - \sqrt{2} \bar{\lambda}^A \left(P_L \chi^j k_{Aj} + P_R \chi^{\bar{j}} k_{A\bar{j}} \right), \end{aligned} \quad (6.1.99a)$$

$$\mathcal{L}_{\text{pot,chiral}} = F^j W_j + \bar{F}^{\bar{j}} \bar{W}_{\bar{j}} - \frac{1}{2} W_{jk} \bar{\chi}^j P_L \chi^k - \frac{1}{2} \bar{W}_{\bar{j}\bar{k}} \bar{\chi}^{\bar{j}} P_R \chi^{\bar{k}}, \quad (6.1.99b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{kin,gauge}} = & -\frac{1}{2} (\text{Re } f_{AB}) (\bar{\lambda}^A P_L \not{D} \lambda^B + F^A \cdot F^B - D^A D^B) \\ & + \frac{1}{2} (\text{Im } f_{AB}) F \cdot \tilde{F} + \frac{i}{4} (\text{Im } D_\mu f_{AB}) \bar{\lambda}^A \gamma_5 \gamma^\mu \lambda^B \\ & + \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} f_{ABj} \bar{\chi}^j \left(-\not{F}^{-A} + iD^A \right) P_L \lambda^B - \frac{1}{4} f_{ABj} F^j \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} f_{ABjk} \bar{\chi}^j P_L \chi^k \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B + \text{h.c.} \right]. \end{aligned} \quad (6.1.99c)$$

正確には, Kähler ポテンシャル $K(Z, \bar{Z})$ がキリングベクトル k_A で不変なときのみ, 以上の方法で超対称なラグランジアンが得られる. この場合, 直接得られる D 項では, $\mathcal{P}_A \rightarrow ik_A^j \partial_j K$ とおいた表式が得られる. しかし, 上の表式は, $\mathcal{L}_{k_A} K = r_A(Z) + \bar{r}_A(\bar{Z})$ として, $\mathcal{P} = i(k_A^j \partial_j K - r_A(Z))$ となっている. この修正により, $r_A(z)$ がゼロでない一般の場合にも, ラグランジアンが超対称変換で不変となることが直接計算で確かめられる. この修正は, $\mathcal{L}_{k_A} K = 0$ の場合にも, $\mathcal{P}_A = ik_A^j \partial_j K + p_A$ (p_A は実定数) より, 新たな付加項 $p_A D^A$ を生み出す. ただし, 整合性条件より $p_C f^C_{AB} = 0$ が要求される. この付加項は **FI 項** (Fayet-Illiopoulos term) と呼ばれる.

6.2 純超重力理論

概要 超対称代数の構造より，一般共変性を保って超対称性を導入するには，超対称性の局所化が必要となる．したがって，超対称な重力理論，すなわち超重力理論には，重力を表す計量場（ないしフレーム場）に加えて超対称変換に対応するゲージ場である Rarita-Schwinger 場が含まれる．4次元では，これらボーズ場とフェルミ場の力学自由度が一致することを確かめ，さらに，フレーム場と Rarita-Schwinger 場に対する一般共変性をもつ最も単純な作用積分が局所超対称変換で不変であることを示す．

6.2.1 準備的事項

- 線形接続とテンソルの共変微分

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda, \quad (6.2.1a)$$

$$\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_\lambda. \quad (6.2.1b)$$

- **Torsion** と曲率トーシオンテンソル $T_{\nu\lambda}^\mu$ を

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = T(X, Y) \Leftrightarrow T_{\nu\lambda}^\mu = 2\Gamma_{[\nu\lambda]}^\mu \quad (6.2.2)$$

により定義する．また，曲率テンソル $R^\mu{}_{\nu\lambda\sigma}$ を

$$([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]})Z = R(X, Y)Z \Leftrightarrow R_{\lambda\sigma}{}^\mu{}_\nu = 2\partial_{[\lambda}\Gamma_{\sigma]\nu}^\mu + 2\Gamma_{[\lambda|\rho]}^\mu \Gamma_{\sigma]\nu}^\rho \quad (6.2.3)$$

により定義する．

- 接続係数 一般フレーム場を e_a^μ 、双対フレーム場を θ^a とする：

$$\theta^a(e_b) = \delta_b^a, \quad e_a \cdot e_b = g_{ab}(x), \quad \theta^a \cdot \theta^b = g^{ab}(x) \quad (6.2.4)$$

これに対する接続形式 $\omega^a{}_b = dx^\mu \omega_\mu{}^a{}_b$ を

$$\nabla_\mu e_a = e_b \omega_\mu{}^b{}_a, \quad \nabla_\mu \theta^a = -\omega_\mu{}^a{}_b \theta^b. \quad (6.2.5)$$

により定義する．このとき，テンソルの共変微分は

$$\nabla_X (V^a e_a) = X^\mu (D_\mu V^a) e_a \quad : \quad D_\mu V^a = \partial_\mu V^a + \omega_\mu{}^a{}_b V^b \quad (6.2.6a)$$

$$\nabla_X (W_a \theta^a) = X^\mu (D_\mu W_a) \theta^a \quad : \quad D_\mu W_a = \partial_\mu W_a - W_b \omega_\mu{}^b{}_a \quad (6.2.6b)$$

と表される。また、トーシオンテンソル、曲率テンソルに対応するトーシオン形式 \mathcal{T}^a 、曲率形式 $\mathcal{R}^a{}_b$ が

$$\mathcal{T}^a \equiv \frac{1}{2} T_{bc}{}^a \theta^b \wedge \theta^c = D\theta^a \equiv d\theta^a + \omega^a{}_b \wedge \theta^b, \quad (6.2.7a)$$

$$\mathcal{R}^a{}_b \equiv \frac{1}{2} R_{cd}{}^a{}_b \theta^c \wedge \theta^d = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \quad (6.2.7b)$$

と表される。これより、次の Bianchi 恒等式が得られる：

$$D\mathcal{T}^a = \mathcal{R}^a{}_b \wedge \theta^b \Leftrightarrow \partial_{[\lambda} T_{\mu\nu]}{}^a + T_{[\mu\nu}{}^b \omega_{\lambda]}{}^a{}_b = \theta_{[\lambda}^b R_{\mu\nu]}{}^a{}_b \quad (6.2.8a)$$

$$D\mathcal{R}^a{}_b \equiv d\mathcal{R}^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \mathcal{R}^c{}_b - \mathcal{R}^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = 0. \quad (6.2.8b)$$

- 計量接続 Contorsion $K_{\nu\lambda}{}^\mu$ を

$$\Gamma_{\nu\lambda}{}^\mu = \{\mu_{\nu\lambda}\} + K_{\nu\lambda}{}^\mu \Leftrightarrow \omega_\mu{}^a{}_b = \omega_\mu{}^a{}_b(e) + K_\mu{}^a{}_b \quad (6.2.9)$$

により定義する。このとき、接続が計量を保つことを要求すると

$$\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = 0 \Leftrightarrow K_{\mu(\lambda\nu)} = 0. \quad (6.2.10)$$

が成り立ち、これより、torsion と contorsion は一対一に対応

$$K_{\nu\lambda\mu} = -\frac{1}{2} (T_{\nu\lambda\mu} + T_{\mu\nu\lambda} + T_{\mu\lambda\nu}), \quad (6.2.11a)$$

$$T_{\nu\lambda\mu} = 2(-K_{(\mu\nu)\lambda} + K_{(\mu\lambda)\nu}) \quad (6.2.11b)$$

- 正規直交フレームバンドルの接続 正規直交フレーム場を e_a^μ 、双対フレーム場を θ_μ^a とするとき、計量接続の接続係数は

$$\omega_{ab} + \omega_{ba} = -dg_{ab} = 0 \quad (6.2.12)$$

を満たす。また、スピノールの共変微分が

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \gamma^{ab} \psi \quad (6.2.13)$$

により定義される。このとき、

$$D_\mu \gamma^a = 0, \quad D_\mu \gamma_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \gamma_\lambda \quad (6.2.14)$$

が成り立つ。

- Levi-Civita 接続 $\omega^a{}_b(e) = \omega_\mu{}^a{}_b dx^\mu$ は、条件

$$\omega_{ab}(e) + \omega_{ba}(e) = -dg_{ab} = 0, \quad (6.2.15a)$$

$$d\theta^a + \omega^a{}_b(e) \wedge \theta^b = 0 \quad (6.2.15b)$$

により一意的に定まる。

6.2.2 重力場

一般共変性 重力場が計量テンソルのみで決定され、重力場の方程式が一般共変性をもつ計量の2階微分方程式とするのとすると、4次元では、場の方程式あるいは作用積分は一意的に定まり、Einstein-Hilbert 作用積分

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{-g} (R_s(g) - 2\Lambda). \quad (6.2.16)$$

ただし、 $D \geq 5$ では、一意性は破れ、より一般的な Lovelock 理論で与えられる:

$$S_{\text{Lovelock}} = \int d^D x \sqrt{-g} \sum_{m=0}^{[(D-1)/2]} c_m \mathcal{L}_m; \quad (6.2.17)$$

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2^{3m} \pi^m m!} \delta_{\rho_1 \kappa_1 \dots \rho_m \kappa_m}^{\lambda_1 \sigma_1 \dots \lambda_m \sigma_m} R_{\lambda_1 \sigma_1}{}^{\rho_1 \kappa_1} \dots R_{\lambda_m \sigma_m}{}^{\rho_m \kappa_m} \quad (6.2.18)$$

具体的な表式は、

$$\mathcal{L}_0 = 1, \quad \mathcal{L}_1 = \frac{1}{4\pi} R_s, \quad \mathcal{L}_2 = \frac{1}{32\pi^2} (R_s^2 - 4R_\mu{}^\nu R_\nu{}^\mu + R_{\mu\nu\lambda\sigma} R^{\lambda\sigma\mu\nu}) \quad (6.2.19)$$

局所ローレンツ不変性 スピノール場は、接バンドルの構造群の $\text{SO}(D-1, 1)$ 簡約、すなわち正規直交基底の選択に依存するので、重力場がスピノール場と結合する場合には、正規直交基底 e_a ないしその双対基底 θ^a が重力場を記述する基本場となる。また、このとき、接続 $\omega^a{}_b$ はトーシオンを持ち得る。

これらフレーム場と接続係数の組 $\Omega = (\theta^a, \omega^a{}_b)$ を基本変数とする記述では、局所ローレンツ変換に対応する正規直交基底の変更に対して理論は不変でないといけないので、新たなゲージ対称性が生じる。対応するゲージ変換は、無限小局所ローレンツ変換 $\lambda = (\lambda^a{}_b(x)) \in \mathfrak{so}(D-1, 1)$ に対し、

$$\delta_\lambda \theta^a = \lambda^a{}_b \theta^b, \quad \delta \omega^a{}_b = -D\lambda^a{}_b = -d\lambda^a{}_b - [\omega, \lambda]^a{}_b \quad (6.2.20)$$

で与えられる。1階形式での Einstein-Hilbert 作用積分に対応する作用積分

$$S_2 = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x |\theta| e_a^\mu e_b^\nu R_{\mu\nu}{}^{ab}(\omega) \quad (6.2.21)$$

は、局所ローレンツ変換で不変となる。公式

$$\partial_\mu |\theta| = -|\theta| \theta_\nu^a \partial_\mu e_a^\nu = |\theta| \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda, \quad (6.2.22a)$$

$$D_\mu e_a^\nu = -e_a^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\nu, \quad D_\mu \theta_\nu^a = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \theta_\lambda^a \quad (6.2.22b)$$

より、この作用積分の $\omega^a{}_b$ に対する変分は

$$2\kappa^2 \delta_\omega S = \int d^D x |\theta| \left(\frac{1}{2} T^{ab\mu} + T_c^{[a|c|} e^{b]\mu} \right) \delta \omega_{\mu ab} \quad (6.2.23)$$

で与えられる。対応する変分方程式により、トーシオンは一意的に決まり、他の場が存在しない今の場合は、 $\mathcal{T}^a = 0$ となる。

なお、 Ω をポアンカレ群 $\mathcal{P} = \{(a, \Lambda) \mid a \in \mathbb{R}^D, \Lambda \in \text{SO}(D-1, 1)\}$ に対するゲージ場とみなすと、その曲率形式は

$$(\mathcal{T}^a, \mathcal{R}^a{}_b) = d\Omega + [\Omega, \Omega] \quad (6.2.24)$$

となる。

力学自由度 変分方程式によりトーシオンは他の場により一意的に決まるので、重力場の力学自由度は、計量理論のものと一致する。計量を

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + q_{ij} (dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) \quad (6.2.25)$$

と $((D-1)+1)$ 分解すると、ラプス関数 $N(x)$ とシフトベクトル $\beta^j(x)$ は、座標系の取り方を決定する非力学的自由度となります。また、Einstein-Hilbert 作用積分は

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa^2} d^D x [\dot{q}_{ij} p^{ij} - N \mathcal{H}_\perp - \beta^j \mathcal{H}_j]; \quad (6.2.26)$$

$$p^{ij} = -\frac{\sqrt{q}}{2\kappa^2} (K^{ij} - K q^{ij}); \quad K_{ij} = -\frac{1}{2N} (\dot{q}_{ij} - D_i \beta_j - D_j \beta_i) \quad (6.2.27)$$

$$\mathcal{H}_\perp = \frac{2\kappa^2}{\sqrt{q}} \left(p_k^j p_j^k - \frac{1}{2} p^2 \right) - \frac{\sqrt{q}}{2\kappa^2} R_s[q], \quad (6.2.28)$$

$$\mathcal{H}_j = -2D_k p_j^k \quad (6.2.29)$$

と表される。これより、 (q_{ij}, p^{ij}) に対する時間について1階の時間発展方程式と、各時空点ごとに、初期値に対する D 個の拘束条件

$$\mathcal{H}_\perp = 0, \quad \mathcal{H}_j = 0 \quad (6.2.30)$$

が得られる。以上より、真空重力場の力学自由度は

$$\frac{1}{2} D(D+1) - 2D = \frac{1}{2} D(D-1) - D = \frac{1}{2} D(D-3) \quad (6.2.31)$$

となる。

6.2.3 Rarita-Schwinger 場

局所超対称性 スピノール場が存在するとき、正規直交フレーム場 (e_a, θ^a) を導入し、その局所ローレンツ変換に対して不変となるよう理論を作る必要がある。大域的なローレンツ変換 $\delta_\lambda (\lambda \in \mathfrak{so}(D-1, 1))$ と超対称変換 δ_ϵ (ϵ は D 次元の Majorana スピノール) の交換関係は

$$[\delta_\lambda, \delta_\epsilon] = \frac{1}{2} \delta_{\lambda \cdot \gamma \epsilon} \quad (6.2.32)$$

となるので、ローレンツ変換を $\lambda \rightarrow \lambda(x)$ 局所化すると、 $\epsilon' = \lambda \cdot \gamma \epsilon \rightarrow \epsilon'(x) = \lambda(x) \cdot \gamma \epsilon$ より、超対称変換も局所化する必要がある。すなわち、一般共変性と整合的に超対称性を導入するには、必ず、そのゲージ化が必要である。

逆に、超対称変換の交換関係

$$[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] = -\frac{1}{2} D_{\bar{\epsilon}_1 \gamma^a \epsilon_2} \quad (6.2.33)$$

より、超対称性を局所化（ゲージ化）するためには、理論の変換群に一般的な併進、すなわち一般座標変換を含めることが要求される。

ゲージ場 一般に、群で記述される理論の大域的対称性をゲージ対称性に拡張するには、ゲージ変換に対して、 $\delta A_\mu = D_\mu \lambda$ と変換するゲージ場 A_μ を導入する必要がある。同様に、大域的超対称性をゲージ化するには、 $\delta \psi_\mu = D_\mu \epsilon$ と変換するベクトルスピノール場が必要となる。実際、このゲージスピノール場を用いると、例えば、カイラル超組 (Z, χ, F) の「共変微分」を

$$\hat{D}_\mu Z = \partial_\mu Z - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_\mu P_L \chi, \quad (6.2.34a)$$

$$\hat{D}_\mu P_L \chi = \partial_\mu P_L \chi - \frac{1}{\sqrt{2}} P_L (\hat{\mathcal{D}} Z + F) \psi_\mu, \quad (6.2.34b)$$

$$\hat{D}_\mu F = \partial_\mu F - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_\mu \hat{\mathcal{D}} \chi \quad (6.2.34c)$$

により導入すれば、これらの量の局所超対称変換は $\partial_\mu \epsilon$ を含まない形で与えられる。

Rarita-Schwinger 場 一般座標変換、局所ローレンツ変換、局所超対称変換 $\delta\psi_\mu = D_\mu\epsilon$ に対して不変で、 ψ_μ について 2 次、微分に関して 1 階の作用積分は

$$S_{3/2} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x |\theta| (-\bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\lambda} D_\nu \psi_\lambda) \quad (6.2.35)$$

という表式をもつ。ここで、 D_μ の取り方には自由度があるが、ここでは、4 次元の場合の純超重力理論と一致するよう、 $SO(D-1, 1)$ 接続に対応する共変微分

$$D_\mu \psi_\nu = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \gamma^{ab} \right) \psi_\nu \quad (6.2.36)$$

を採用する。ただし、この定義だと、 $[\mu, \nu]$ について反対称化しない限り、座標の添え字に関してはテンソル性を持たないので注意を要する。 $\nabla_\mu \psi_\nu = D_\mu \psi_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(e) \psi_\lambda$ を用いてこのテンソル性を回復することもできるが、ここでは採用しない。

ここで、 $S = S_2 + S_{3/2}$ に対する変分方程式から、 ω^a_b を決定することにする。このとき、

$$\hat{\nabla}_\mu V_\nu^a = \nabla_\mu V_\nu^a + \omega_\mu^a{}_b V^b \quad (6.2.37)$$

に対して、

$$\hat{\nabla}_\mu e_a^\nu = \hat{\nabla}_\mu \theta_\nu^a = 0, \quad (6.2.38)$$

$$|\theta| \nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu (|\theta| V^\mu) + T_{\nu\mu}{}^\nu |\theta| V^\mu; \quad T_{\nu\lambda}{}^\mu = 2\Gamma_{[\nu\lambda]}^\mu \quad (6.2.39)$$

より、

$$2\kappa^2 \delta_\omega S_2 = \int d^D x |\theta| (-2) e_a^\mu e_b^\nu D_\nu \delta\omega_\mu{}^{ab} = \int d^D x |\theta| \left(T_{ab}{}^\mu + 2T_{c[a}^c e_{b]}^\mu \right) \delta\omega_\mu{}^{ab}. \quad (6.2.40)$$

つぎに、

$$\begin{aligned} \gamma^{mnl} \gamma_{ab} &= \gamma^{mnl}{}_{ab} + 6\delta_a^{[l} \delta_b^{n]} \gamma^m + 6\delta_a^{[l} \gamma^{mn]}{}_b, \\ \gamma_{ab} \gamma^{mnl} &= \gamma^{mnl}{}_{ab} + 6\delta_a^{[l} \delta_b^{n]} \gamma^m - 6\delta_a^{[l} \gamma^{mn]}{}_b, \end{aligned} \quad (6.2.41a)$$

より、

$$\begin{aligned} 2\kappa^2 \delta_\omega S_{3/2} &= \int d^D x |\theta| \left(-\frac{1}{4} \right) \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\lambda} \gamma^{ab} \psi_\lambda \delta\omega_{\mu ab} \\ &= \int d^D x |\theta| \frac{1}{4} \bar{\psi}_\nu (\gamma^{\mu\nu\lambda}{}_{ab} + 6e_a^{[\lambda} e_b^{\nu]} \gamma^\mu) \psi_\lambda \delta\omega_\mu{}^{ab} \end{aligned} \quad (6.2.42)$$

よって、 $\delta_\omega S = 0$ より

$$T_{ab}{}^\mu = \frac{1}{2}\bar{\psi}_a\gamma^\mu\psi_b + \frac{1}{4}\bar{\psi}_\nu\gamma^{\nu\mu\rho}{}_{ab}\psi_\rho. \quad (6.2.43)$$

トーシオンとしてこの値を取る接続をもとの作用積分に代入し、その θ_μ^a , ψ_μ に関する変分を取ると、 $\delta\omega^a{}_b$ 経由の項は自動的にゼロとなる。これより、 θ_μ^a , ψ_μ に対する場の方程式は、 $\omega^a{}_b$ を独立の場として θ_μ^a , ψ_μ に関する変分を取り、得られた変分方程式で $\omega^a{}_b$ に上記のトーシオンに対応する表式を代入すれば正しい方程式が得られる（1.5 次形式）。

場の方程式 この方法を用いると、まず、 ψ_μ に対する方程式は

$$\begin{aligned} & |\theta|^{-1} \partial_\nu (|\theta| \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\lambda} \delta\psi_\lambda) \\ &= \overline{D_\nu \psi_\mu} \gamma^{\mu\nu\lambda} \delta\psi_\lambda + \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\lambda} D_\nu \delta\psi_\lambda - 3K_\nu^{[\lambda} \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu]a} \delta\psi_\lambda \end{aligned} \quad (6.2.44)$$

より、

$$\gamma^{\mu\nu\lambda} D_\nu \psi_\lambda = -\frac{3}{2} K_\nu^{[\mu} \gamma^{\lambda\nu]a} \psi_\lambda. \quad (6.2.45)$$

この方程式は、次式と同等：

$$\gamma^{\mu\nu\lambda} D(e)_\nu \psi_\lambda + \frac{3}{2} K_\nu^{[\lambda\nu} \gamma^{\mu]} \psi_\lambda + \frac{1}{4} K_{\nu ab} \gamma^{\mu\nu\lambda ab} \psi_\lambda = 0. \quad (6.2.46)$$

次に、作用積分の θ_μ^a に関する変分

$$2\kappa^2 \delta_\theta S_{3/2} = \int d^D x |\theta| (e_a^\mu \bar{\psi}_\rho \gamma^{\rho\nu\lambda} - 3\bar{\psi}_\rho e_a^{[\rho} \gamma^{\nu\lambda]\mu}) D_\nu \psi_\lambda \delta\theta_\mu^a \quad (6.2.47a)$$

$$2\kappa^2 \delta_\theta S_2 = \int d^D x |\theta| (R_s(\omega) e_a^\mu - 2e^{b\mu} e_a^\nu R_{\nu b}) \delta\theta_\mu^a \quad (6.2.47b)$$

より、Einstein 方程式は

$$\begin{aligned} & e_a^\nu R(\omega)_{\nu b} e^{b\mu} - \frac{1}{2} R_s(\omega) e_a^\mu \\ &= \frac{1}{2} \bar{\psi}_\rho \gamma^{\rho\nu\lambda} D_\nu \psi_\lambda - \frac{3}{2} \bar{\psi}_\rho e_a^{[\rho} \gamma^{\nu\lambda]\mu} D_\nu \psi_\lambda. \end{aligned} \quad (6.2.48)$$

上記の RS 場の方程式を代入すると、右辺はゼロとなることが示される。よって、

$$R(\omega)_{\mu a} \equiv e^{b\nu} R(\omega)_{\mu\nu ab} = 0 \quad (6.2.49)$$

力学自由度 $d_s(D)$ を D 次元での既約実スピノール表現の次元とする：

D	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d_s	4	4	8	8	16	16	16	16	32
タイプ	M	M	SM	SMW	SM	M	M	MW	M

線形化された方程式

$$\gamma^{\mu\nu\lambda} D_\nu \psi_\lambda = 0 \quad (6.2.50)$$

($D_\mu = D_\mu^{(e)}$) は、次式と同値：

$$\gamma^\nu (D_\nu \psi_\mu - D_\mu \psi_\nu) = 0. \quad (6.2.51)$$

簡単のため、背景時空が平坦とすると、ゲージ変換 $\delta_\epsilon \psi_\mu = \partial_\mu \epsilon$ により、 $\psi_0 = 0$ とできる。このとき、残留ゲージ自由度 $\delta_\epsilon \psi_j = \partial_j \epsilon(x^j)$ と、上記方程式の $\mu = 0$ 成分より得られる方程式 $\partial_0 \gamma \cdot \psi = 0$ より、 $\gamma \cdot \psi = 0$ とゲージ固定できる。このとき、このゲージ条件の整合性条件として、

$$\not{\partial}(\gamma \cdot \psi) = \gamma^{ab} \partial_a \psi_b + \not{\partial} \cdot \psi = 0 \Rightarrow \not{\partial} \cdot \psi = \not{\partial}^j \psi_j = 0 \quad (6.2.52)$$

が得られる。以上より、ゲージ固定条件は

$$\psi_0 = 0, \quad \gamma^j \psi_j = 0, \quad \not{\partial}^j \psi_j = 0 \quad (6.2.53)$$

となり、場の方程式は

$$\not{\partial} \psi_j = 0 \quad (6.2.54)$$

と簡単化される。このゲージ固定条件は完全なので、初期値の自由度は $(D-3)d_s(D)$ となる。発展方程式は 1 階なので、通常力学自由度はその半分の

$$\frac{1}{2}(D-3)d_s(D) \quad (6.2.55)$$

で与えられる。これと、重力場の力学自由度の差は

$$\Delta = \frac{1}{2}(D-3)d_s(D) - \frac{D(D-3)}{2} = \frac{D-3}{2}(d_s(D) - D) \quad (6.2.56)$$

となる。これより、 $D=3$ および $D=4$ では両者の自由度がちょうど一致する。一方、 $D \geq 5$ では、重力場の自由度が不足する。したがって、これらの次元で超重力理論を作るには、余分な場が必要となる。

6.2.4 4次元極小超重力理論

4次元では、以上で用いた作用積分

$$S = S_2 + S_{3/2}; \quad (6.2.57)$$

$$S_2 = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x |\theta| e_a^\mu e_b^\nu R_{\mu\nu}{}^{ab}[\omega], \quad (6.2.58)$$

$$S_{3/2} = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x |\theta| \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\lambda} D_\nu[\omega] \psi_\lambda, \quad (6.2.59)$$

$$\omega^a{}_b : T_{ab}{}^\mu = \frac{1}{2} \bar{\psi}_a \gamma^\mu \psi_b \quad (6.2.60)$$

が局所超対称性をもつ。

まず、基本場 (θ_μ^a, ψ_μ) の局所超対称変換は

$$\delta_\epsilon \theta_\mu^a = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma^a \psi_\mu, \quad (6.2.61a)$$

$$\delta_\epsilon \psi_\mu = D_\mu \epsilon \equiv \partial_\mu \epsilon + \frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \gamma^{ab} \epsilon \quad (6.2.61b)$$

となる。実際、交換関係は

$$[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] \theta_\mu^a = (\delta_\xi - \delta_{\hat{\lambda}} - \delta_{\hat{\epsilon}}) \theta_\mu^a, \quad (6.2.62a)$$

$$[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] \psi_\mu = (\delta_\xi - \delta_{\hat{\lambda}} - \delta_{\hat{\epsilon}}) \psi_\mu \pmod{\text{EOM}} \quad (6.2.62b)$$

となり、微分同相変換、局所ローレンツ変換と合わせて閉じた超代数を構成する。ここで、

$$\xi^a = -\frac{1}{2} \bar{\epsilon}_1 \gamma^a \epsilon_2, \quad \hat{\lambda}_{ab} = \xi^\rho \omega_{\rho ab}, \quad \hat{\epsilon} = \xi^\rho \psi_\rho. \quad (6.2.63)$$

1.5次形式を用いると、この変換に対する作用積分の変化は

$$\begin{aligned} 2\kappa^2 \delta S = & \int d^4 x |\theta| \left[(e_a^\mu R_s[\omega] - 2R_a{}^\mu[\omega]) \delta\theta_\mu^a + i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_a D_\nu \psi_\rho \delta\theta_\mu^a \right. \\ & \left. + \frac{i}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\sigma \gamma^{ab} R_{\nu\rho ab} \epsilon + 2T_{\nu\sigma}{}^a \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_a D_\rho \epsilon) \right] \quad (6.2.64) \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{i}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\sigma \gamma^{ab} R_{\nu\rho ab} \epsilon = (R_s e_a^\mu - 2R_a{}^\mu) \delta\theta_\mu^a + \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} R_{\nu\lambda\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma^\sigma \epsilon, \quad (6.2.65)$$

$$(\bar{\epsilon} \gamma^a \psi_{[\sigma}) (\bar{\psi}_{\mu]} \gamma_5 \gamma_a D_\nu \psi_\rho) = T_{\nu\sigma}{}^b (\bar{\epsilon} \gamma_5 \gamma_b D_\nu \psi_\rho) \quad (6.2.66)$$

目次へ

を用いると、

$$2\kappa^2\delta S = \int d^4x |\theta| \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (R_{\nu\rho\sigma a} + D_\nu T^a_{\rho\sigma}) (\bar{\epsilon} \gamma_5 \gamma^a \psi_\mu). \quad (6.2.67)$$

したがって、ビアンキ恒等式

$$D\mathcal{F}^a = \mathcal{R}^a_b \wedge \theta^b \Leftrightarrow D_{[\nu} T^a_{\rho\sigma]} = -R_{[\nu\rho\sigma]}^a \quad (6.2.68)$$

より、 $\delta S = 0$ となる。

6.3 4次元 $N = 1$ 超重力理論—超共形アプローチ

6.3.1 一般座標変換

無限小座標変換 $\delta x^\mu = \xi^\mu$ に対する場の一般座標変換は

$$\delta_{\text{gct}}(\xi)\phi = \mathcal{L}_\xi\phi. \quad (6.3.1)$$

ただし、この変換は内部ゲージ変換と整合的でないので、共変的無限小座標変換を

$$\delta_{\text{cgct}}(\xi) = \delta_{\text{gct}}(\xi) - \delta(\xi^\mu A_\mu^A T_A) \quad (6.3.2)$$

により定義する。この節では、ゲージ場、リー代数の基底の添え字 A, B, C は内部自由度のみを動くとし、並進の自由度を含める時は、 A', B', C' などを使う

具体的には

- 座標スカラ場 ϕ :

$$\delta_{\text{cgct}}(\xi)\phi = \xi^\mu \mathcal{D}_\mu\phi \equiv \xi^\mu (\partial_\mu + A_\mu^A t_A)\phi. \quad (6.3.3)$$

- 内部ゲージ場 A_μ^A : ゲージ場の変換が、拡張した形

$$\delta(\Lambda)A_\mu^A = \partial_\mu\Lambda^A + f^A_{BC}A_\mu^B\Lambda^C + \Lambda^B\mathcal{M}_{\mu B}^A, \quad (6.3.4)$$

をとるとき、

$$\delta_{\text{cgct}}(\xi)A_\mu^A = \xi^\nu \hat{R}_{\nu\mu}^A. \quad (6.3.5)$$

ここで、

$$\hat{R}^A = dA^A + f^A_{BC}A^B \wedge A^C - A^B \wedge \mathcal{M}_B^A. \quad (6.3.6)$$

なお、このゲージ変換の一般化により、共変量のゲージ変換は以下のように修正される：

$$\delta(\Lambda)D_a\phi = -\lambda_a{}^b D_b\phi - \theta^A t_A D_a\phi, \quad (6.3.7a)$$

$$\delta(\Lambda)\hat{R}_{ab}{}^A = f^A_{CB}\Lambda^B \hat{R}_{ab}{}^C + 2\Lambda^B D_{[a}\mathcal{M}_{b]B}{}^A - 2\Lambda^C \mathcal{M}_{[a|C}{}^B \mathcal{M}_{b]B}{}^A. \quad (6.3.7b)$$

また、共変微分の交換関係および Bianchi 恒等式は

$$[\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b]\phi = -\hat{R}_{ab}{}^A T_A\phi, \quad (6.3.8)$$

$$\mathcal{D}_{[a}\hat{R}_{bc]}{}^A = 2\hat{R}_{[ab}{}^B \mathcal{M}_{c]B}{}^A. \quad (6.3.9)$$

- フレーム場 θ_μ^a :

$$\delta_{\text{cgct}}(\xi)\theta_\mu^a = \partial_\mu \xi^a + f^a{}_{Bc} A_\mu^B \xi^c - \xi^\nu \mathcal{R}_{\mu\nu}(P^a). \quad (6.3.10)$$

以上の、共変的一般座標変換は、座標スカラ場、ゲージ場に対しては、内部自由度に対応するゲージ変換と可換となる：

$$[\delta(\Lambda), \delta_{\text{cgct}}(\xi)]\phi = [\delta(\Lambda), \delta_{\text{cgct}}(\xi)]A_\mu^A = 0. \quad (6.3.11)$$

6.3.2 Einstein 重力に対する共形的アプローチ

共形代数 D 次元時空の共形群は $\text{SO}(D, 2)$ で与えられ、そのリー代数は

$$\mathcal{L}(\text{SO}(D, 2)) = \langle P_a, M_{ab}, K_a, D \rangle \quad (6.3.12)$$

交換関係は

$$[P_a, P_b] = 0, \quad [M_{ab}, M_{cd}] = 4\eta_{[a[c} M_{d]b]}, \quad (6.3.13a)$$

$$[M_{ab}, P_c] = -2\eta_{c[a} P_{b]}, \quad [M_{ab}, K_b] = -2\eta_{c[a} K_{b]}, \quad (6.3.13b)$$

$$[P_a, K_b] = 2(\eta_{ab} D + M_{ab}), \quad [D, P_a] = P_a, \quad [D, K_a] = -K_a. \quad (6.3.13c)$$

平坦なミンコフスキー時空への作用は

$$\xi^a = a^a + \lambda^{ab} x_b + \lambda_D x^a + (x \cdot x \lambda_K^a - 2x^a x \cdot \lambda_K), \quad (6.3.14)$$

より,

$$P_a = \partial_a, \quad M_{ab} = x_b \partial_a - x_a \partial_b, \quad D = x^a \partial_a, \quad K_a = x \cdot x \partial_a - 2x_a x^b \partial_b. \quad (6.3.15)$$

局所共形対称性に対応するゲージ場 共形代数の基底 T_A と、無限小局所変換のパラメータ Λ^A , およびゲージ場 A^A を次のように表す：

$$\Lambda^A T_A = \xi^a(x) P_a + \frac{1}{2} \lambda^{ab}(x) M_{ab} + \lambda_D(x) D + \lambda_K^a(x) K_a. \quad (6.3.16a)$$

$$\mathcal{A} = A^A T_A = \theta^a P_a + \frac{1}{2} \omega^{ab} M_{ab} + b D + f^a K_a. \quad (6.3.16b)$$

ゲージ場の内部局所変換に対する変換は

$$\delta\theta^a = -\lambda^a{}_b\theta^b - \lambda_D\theta^a, \quad (6.3.17a)$$

$$\delta\omega^{ab} = d\lambda^{ab} + 2\omega_c^{[a}\lambda^{b]c} - 4\lambda_K^{[a}\theta^{b]}, \quad (6.3.17b)$$

$$\delta f^a = d\lambda_K^a - b\lambda_K^a + \omega^a{}_b\lambda_K^b - \lambda^a{}_b f^b + \lambda_D f^a, \quad (6.3.17c)$$

$$\delta b = d\lambda_D + 2\lambda_K^a\theta_a. \quad (6.3.17d)$$

曲率テンソルは

$$\mathcal{R}(P^a) = \mathcal{F}^a + b \wedge \theta^a; \quad \mathcal{F}^a = d\theta^a + \omega^a{}_b\theta^b, \quad (6.3.18a)$$

$$\mathcal{R}(M^{ab}) = d\omega^{ab} + \omega^a{}_c \wedge \omega^{cb} + 4\theta^{[a} \wedge f^{b]}, \quad (6.3.18b)$$

$$\mathcal{R}(K^a) = df^a + \omega^a{}_b f^b, \quad (6.3.18c)$$

$$\mathcal{R}(D) = db + 2\theta^a \wedge f_a. \quad (6.3.18d)$$

これらの内部ゲージ変換は

$$\delta\mathcal{R}(P^a) = -\lambda^a{}_b\mathcal{R}(P^b) - \lambda_D\mathcal{R}(P^a), \quad (6.3.19a)$$

$$\delta\mathcal{R}(M^{ab}) = 2\lambda^{[a}{}_c\mathcal{R}(M^{b]c}) - 4\lambda_K^{[a}\mathcal{R}(P^{b]}), \quad (6.3.19b)$$

$$\delta\mathcal{R}(K^a) = -\lambda^a{}_b\mathcal{R}(K^b) + \lambda_D\mathcal{R}(K^a), \quad (6.3.19c)$$

$$\delta\mathcal{R}(D) = 2\lambda_{K^a}\mathcal{R}(P^a). \quad (6.3.19d)$$

拘束条件

(i) $\mathcal{R}_{\mu\nu}(P^a) = 0$: この条件は

$$\mathcal{F}^a \equiv d\theta^a + \omega^a{}_b \wedge \theta^b = -b \wedge \theta^a \quad (6.3.20)$$

となる。これより,

$$\omega_\mu{}^a{}_b = \omega_\mu{}^a{}_b(e) + K_\mu{}^a{}_b; \quad (6.3.21)$$

$$K_{\mu ab} = 2\theta_\mu^{[a} e^{b]\nu} b_\nu \quad (6.3.22)$$

(ii) $e_b^\nu \mathcal{R}_{\mu\nu}(M^{ab}) = 0$: この条件は

$$e_b^\nu \mathcal{R}_{\mu\nu}(M^{ab}) = R_\mu{}^a(\omega) + \theta_\mu^a f_b^b + f_\mu^a \quad (6.3.23)$$

より,

$$f_a^a = -\frac{1}{2(D-1)}R_s(\omega), \quad (6.3.24a)$$

$$(D^2)f_\mu^a = -R_\mu{}^a(\omega) + \frac{R_s(\omega)}{2(D-1)}\theta_\mu^a. \quad (6.3.24b)$$

これらの拘束条件は, 局所共形変換と整合的である.

共形不変な作用積分 スカラ場 ϕ の共形ウエイトを w とする :

$$\delta(\lambda_D D)\phi = \lambda_D w \phi. \quad (6.3.25)$$

このとき, ϕ の共変微分は

$$\mathcal{D}_a \phi = (\partial_a - w b_a) \phi = e_a^\mu (\partial_\mu - w b_\mu) \phi. \quad (6.3.26)$$

また, そのゲージ変換は

$$\delta \mathcal{D}_a \phi = -\lambda_a^b \mathcal{D}_b \phi - 2w \lambda_{K^a} \phi + (w+1) \lambda_D \mathcal{D}_a \phi. \quad (6.3.27)$$

よって,

$$\square^C \phi = \partial^a \mathcal{D}_a \phi + \{\omega_b^{ba} - (w+1)b^a\} \mathcal{D}_a \phi + 2w f_a^a \phi \quad (6.3.28)$$

このゲージ変換は,

$$\delta \square^C \phi = (w+2) \lambda_D \square^C \phi + 2(D-2w-2) \lambda_K^a \mathcal{D}_a \phi. \quad (6.3.29)$$

よって,

$$\delta|\theta| = e_a^\mu \delta_\mu^a |\theta| = -D \lambda_D |\theta| \quad (6.3.30)$$

より,

$$w = \frac{1}{2}(D-2) \quad (6.3.31)$$

と取ると,

$$\delta(|\theta| \phi \square^C \phi) = (w+2-D+w) |\theta| \phi \square^C \phi = 0. \quad (6.3.32)$$

以上より, 作用積分

$$S = \int d^D x |\theta| \left(-\frac{1}{2} \right) \phi \square^C \phi \quad (6.3.33)$$

は共形不変で, 拘束条件 $\mathcal{R}_{\mu\nu}(P^a) = 0$, $e_b^\nu \mathcal{R}_{\mu\nu}(M^{ab}) = 0$ に加えて, K^a 変換に対するゲージ条件

$$\text{K-gauge : } b_\mu = 0 \rightarrow \lambda_K^a = -\frac{1}{2} \partial_a \lambda_D \quad (6.3.34)$$

を課すと, 作用積分は

$$S = \int d^D x |\theta| \left(-\frac{1}{2} \phi \square \phi + \frac{D^2}{4(D-1)} R_s \phi^2 \right). \quad (6.3.35)$$

目次へ

この作用積分は依然として局所共形不変で，このゲージ自由度を

$$\phi^2 = \frac{2}{\kappa^2} \frac{D-1}{D-2} \quad (6.3.36)$$

により固定すると，最終的に Einstein-Hilbert 作用積分が得られる：

$$S = \int d^D x |\theta| \frac{1}{2\kappa^2} R_s(e). \quad (6.3.37)$$

6.3.3 4次元純超重力理論に対する超共形アプローチ

超共形代数 $SU(2, 2|1)$ Poincaré 共形代数 $SU(2, 2)$ を含む最小の超代数は, $SU(2, 2|1)$ で与えられ, 生成元は

$$\mathcal{L}_0 = \langle P_a, M_{ab}, K_a, D \rangle \oplus \langle T \rangle, \quad \mathcal{L}_1 = \langle Q_\alpha, S_\alpha \rangle. \quad (6.3.38)$$

$SU(2, 2) \cong SO(4, 2)$ 部分代数以外のゼロでない交換関係は,

$$[M_{ab}, Q] = -\frac{1}{2}\gamma_{ab}Q, \quad [M_{ab}, S] = -\frac{1}{2}\gamma_{ab}S, \quad (6.3.39a)$$

$$[K_a, Q] = \gamma_a S, \quad [P_a, S] = \gamma_a Q, \quad (6.3.39b)$$

$$[D, Q] = \frac{1}{2}Q, \quad [D, S] = -\frac{1}{2}S, \quad (6.3.39c)$$

$$[T, Q] = -\frac{3}{2}i\gamma_5 Q, \quad [T, S] = \frac{3}{2}i\gamma_5 S, \quad (6.3.39d)$$

$$\{Q_\alpha, Q^\beta\} = -\frac{1}{2}(\gamma^a)_{\alpha}{}^{\beta} P_a, \quad \{S_\alpha, S^\beta\} = -\frac{1}{2}(\gamma^a)_{\alpha}{}^{\beta} K_a, \quad (6.3.39e)$$

$$\{Q_\alpha, S^\beta\} = -\frac{1}{2}\delta_{\alpha}^{\beta} D - \frac{1}{4}(\gamma^{ab})_{\alpha}{}^{\beta} M_{ab} + \frac{i}{2}(\gamma_5)_{\alpha}{}^{\beta} T, \quad (6.3.39f)$$

$$\{S_\alpha, Q^\beta\} = +\frac{1}{2}\delta_{\alpha}^{\beta} D - \frac{1}{4}(\gamma^{ab})_{\alpha}{}^{\beta} M_{ab} - \frac{i}{2}(\gamma_5)_{\alpha}{}^{\beta} T \quad (6.3.39g)$$

,

超共形ゲージ場 (Weyl 超組) リー代数の各生成元に対応したゲージパラメータおよびゲージ場を以下のように表記する:

$$\begin{array}{l} T_A : P_a \quad M_{ab} \quad K_a \quad D \quad T \quad Q_\alpha \quad S_\alpha \\ \Lambda^A : \xi^a \quad \lambda^{ab} \quad \lambda_K^a \quad \lambda_D \quad \lambda_T \quad \epsilon^\alpha \quad \eta^\alpha \\ A_\mu^A : \theta_\mu^a \quad \omega_\mu^{ab} \quad f_\mu^a \quad b_\mu \quad B_\mu \quad \psi_\mu \quad \phi_\mu \end{array} \quad (6.3.40)$$

ゲージ場に対する内部ゲージ変換 ($\Lambda^A \neq \xi^a$)

$$\mathcal{A} = A_\mu^A dx^\mu T_A : \quad \delta \mathcal{A} = d\Lambda + [\mathcal{A}, \Lambda] \quad (6.3.41)$$

の具体的表式は

$$\delta\theta^a = -\lambda^a{}_b\theta^b - \lambda_D\theta^a + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma^a\psi, \quad (6.3.42a)$$

$$\delta\omega^{ab} = d\lambda^{ab} + 2\omega_c{}^{[a}\lambda^{b]c} - 4\lambda_K^{[a}\theta^{b]} + \frac{1}{2}\bar{\eta}\gamma^{ab}\psi + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma^{ab}\phi, \quad (6.3.42b)$$

$$\delta f^a = d\lambda_K^a - b\lambda_K^a + \omega^a{}_b\lambda_K^b - \lambda^a{}_bf^b + \lambda_D f^a + \frac{1}{2}\bar{\eta}\gamma^a\phi, \quad (6.3.42c)$$

$$\delta b = d\lambda_D + 2\lambda_{Ka}\theta^a - \frac{1}{2}\bar{\eta}\psi + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\phi, \quad (6.3.42d)$$

$$\delta B = d\lambda_T + \frac{i}{2}\bar{\eta}\gamma_5\psi - \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\gamma_5\phi, \quad (6.3.42e)$$

$$\begin{aligned} \delta\psi = & d\epsilon + \left(\frac{1}{4}\omega^{ab}\gamma_{ab} + \frac{1}{2}b - \frac{3}{2}iB\gamma_5 \right) \epsilon - \theta^a\gamma_a\eta \\ & + \left(-\frac{1}{2}\lambda_D + \frac{3}{2}i\lambda_T\gamma_5 - \frac{1}{4}\lambda^{ab}\gamma_{ab} \right) \psi, \end{aligned} \quad (6.3.42f)$$

$$\begin{aligned} \delta\phi = & d\eta + \left(\frac{1}{4}\omega^{ab}\gamma_{ab} - \frac{1}{2}b + \frac{3}{2}iB\gamma_5 \right) \eta - f^a\gamma_a\epsilon \\ & + \left(\frac{1}{2}\lambda_D - \frac{3}{2}i\lambda_T\gamma_5 - \frac{1}{4}\lambda^{ab}\gamma_{ab} \right) \phi + \lambda_K^a\gamma_a\psi. \end{aligned} \quad (6.3.42g)$$

また,

$$\delta e_a^\mu = -\lambda_a{}^b e_b^\mu + \lambda_D e_a^\mu - \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma^\mu\psi_a, \quad (6.3.43)$$

$$\delta|\theta| = (-4\lambda_D + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma^\mu\psi_\mu)|\theta| \quad (6.3.44)$$

カイラル超組への表現 カイラル超組 $(Z, P_{L\chi}, F)$ への超共形代数の表現は, Z の共形ウエイト w を指定すると, 次のように一意的に定まる:

$$\delta Z = (w\lambda_D + iw\lambda_T)Z + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}P_{L\chi}, \quad (6.3.45a)$$

$$\begin{aligned} \delta P_{L\chi} = & \left\{ \left(w + \frac{1}{2} \right) \lambda_D + \left(w - \frac{3}{2} \right) i\lambda_T \right\} P_{L\chi} \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}}P_L(\not{\partial}Z + F)\epsilon + \sqrt{2}wZP_L\eta, \end{aligned} \quad (6.3.45b)$$

$$\begin{aligned} \delta F = & \{(w+1)\lambda_D + (w-3)i\lambda_T\} F \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}\not{\partial}P_{L\chi} + \sqrt{2}(1-w)\bar{\eta}P_{L\chi}. \end{aligned} \quad (6.3.45c)$$

これより, Z と $P_{L\chi}$ の共変微分がブートストラップ的に定まり

$$\mathcal{D}Z = dZ - (wb + iwB)Z - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}P_{L\chi}, \quad (6.3.46a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}P_{L\chi} = P_L \left[d\chi + \left\{ \frac{1}{4}\omega^{ab}\gamma_{ab} - \left(w + \frac{1}{2}\right)b - \left(w - \frac{3}{2}\right)iB \right\} \chi \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{D}Z + F)\psi - \sqrt{2}wZ\phi \right]. \end{aligned} \quad (6.3.46b)$$

Proof. 1) Q の作用

$$\delta(\bar{\epsilon}Q)Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}P_{L\chi}, \quad \delta(\bar{\epsilon}Q)P_{L\chi} = \frac{1}{\sqrt{2}}P_L((\mathcal{D}Z + F)\epsilon), \quad \delta(\bar{\epsilon}Q)F = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}\mathcal{D}^2P_{L\chi}. \quad (6.3.47)$$

ここで, 共変微分 $\mathcal{D}Z$, $\mathcal{D}\chi$ は, 表現が確定すると, 一般公式

$$\mathcal{D}\phi = d\phi - \delta(\mathcal{A})\phi \quad (6.3.48)$$

により定まる.

2) D の作用: 共形ウエイト. $[D, Q]$ より,

$$\delta(D)Z = wZ, \quad \delta(D)P_{L\chi} = (w + 1/2)P_{L\chi}, \quad \delta(D)F = (w + 1)F. \quad (6.3.49)$$

3) T の作用: カイラルウエイト. $[T, Q]$ より,

$$\delta(T)Z = icZ, \quad \delta(T)P_{L\chi} = i(c - 3/2)P_{L\chi}, \quad \delta(T)F = i(c - 3)F. \quad (6.3.50)$$

4) K^a, S の作用: η の共形ウエイトが $1/2$ で, すべての場およびその微分の共形ウエイトは w 以上となるので, $\delta(S)Z = 0$. これと $[S, S] \propto K$ より, $\delta(K_a)Z = 0$. この結果に, Q 変換を施すことにより, $P_{L\chi}, F$ に対する S 変換が定まり, 整合性より $w = c$ が得られる. さらに, $[S, S] \propto K$ を用いると, K 変換も定まる.

Q.E.D.

修正 F 項 F の変換則より, $w = 3$ と取ると, $|\theta|F$ は

$$|\theta|^{-1}\delta(|\theta|F) = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}\mathcal{D}P_{L\chi} + \frac{1}{2}F\bar{\epsilon}\gamma^\mu\psi_\mu - 2\sqrt{2}\bar{\eta}P_{L\chi} \quad (6.3.51)$$

と変換するので、平坦な時空の場合と異なり、 $\int d^4x|\theta|F$ は超対称変換で不変でない。この問題は、 F の代わりに

$$\tilde{F} = F + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_\mu\gamma^\mu P_L\chi + \frac{1}{2}Z\bar{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu}P_R\psi_\nu \quad (6.3.52)$$

を用いることにより解消される。実際、次に述べる拘束条件のもとで

$$\delta(|\theta|\tilde{F}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu(|\theta|\bar{\epsilon}\gamma^\mu P_L\chi) \quad (6.3.53)$$

が成り立つ。

カイラル超組に対する超共形不変な作用積分 $(Z, P_L\chi, F)$ を超共形変換に対して (6.3.45) に従って変換するカイラル超組とする。このとき、次の組が $Z' = \bar{F}$ を基本スカラ場とするカイラル超組となる：

$$(Z', P_L\chi', F') = (\bar{F}, \not{D}P_R\chi, \square^C\bar{Z}) \quad (6.3.54)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \square^C Z &\equiv \not{D}^\mu \not{D}_\mu Z = e^{a\mu} (\partial_\mu \not{D}_a Z - 2b_\mu \not{D}_a Z + \omega_{\mu ab} \not{D}^b Z + 2f_{\mu a} Z \\ &\quad - iB_\mu \not{D}_a Z - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_\mu P_L \not{D}_a \chi + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\phi}_\mu \gamma_a P_L \chi). \end{aligned} \quad (6.3.55)$$

これらの2つのカイラル超組の積で定義される新たなカイラル超組

$$Z'' = Z\bar{F}, \quad (6.3.56a)$$

$$P_L\chi'' = Z\not{D}P_R\chi + \bar{F}P_L\chi, \quad (6.3.56b)$$

$$F'' = F\bar{F} + Z\square^C\bar{Z} - \bar{\chi}\not{D}P_R\chi \quad (6.3.56c)$$

に対応する修正 F 項 \tilde{F}'' より、 Z のカイラルウエイトが1のとき、次の超共形不変な作用積分が得られる：

$$\begin{aligned} S_{\text{SG}} &= \int d^4x|\theta|\text{Re} \left[F\bar{F} + Z\square^C\bar{Z} - \bar{\chi}P_L\not{D}\chi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_\mu\gamma^\mu (Z\not{D}P_R\chi + \bar{F}P_L\chi) + \frac{1}{2}Z\bar{F}\bar{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu}P_R\psi_\nu \right] \end{aligned} \quad (6.3.57)$$

拘束条件

$$C1 : \mathcal{R}_{\mu\nu}(P^a) = 0.$$

$$\mathcal{R}(P^a) = \mathcal{T}^a + b \wedge \theta^a - \frac{1}{4} \bar{\psi} \wedge \gamma^a \psi; \quad \mathcal{T}^a \equiv d\theta^a + \omega^a_b \wedge \theta^b \quad (6.3.58)$$

より, この条件は

$$\mathcal{T}^a = -b \wedge \theta^a + \frac{1}{4} \bar{\psi} \wedge \gamma^a \psi \quad (6.3.59)$$

これより,

$$\omega^{ab} = \omega^{ab}(e, b, \psi) = \omega^{ab}(e, b) + \frac{1}{2} \bar{\psi}_\mu \gamma^{[a} \psi^{b]} + \frac{1}{4} \bar{\psi}^a \gamma_\mu \psi^b. \quad (6.3.60)$$

$\omega^{ab}(e, b, \psi)$ の変換則は, Q 変換に関して, 元の独立したゲージ場としての ω^{ab} と異なり,

$$\delta(\bar{\epsilon}Q)\omega^{ab}(e, b, \psi) = \delta_{\text{gauge}}\omega^{ab} + \delta_{\mathcal{M}}\omega^{ab} = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma^{ab} \phi + \bar{\epsilon} \mathcal{M}^{ab}(Q) \quad (6.3.61)$$

$$\mathcal{M}_\mu^{ab}(Q) = -\frac{1}{2} \gamma^{[a} \mathcal{R}_{\mu}^{b]}(Q) - \frac{1}{4} \gamma_\mu \mathcal{R}^{ab}(Q). \quad (6.3.62)$$

となる. このゲージ変換則の変更により, $\mathcal{R}(M^{ab})$ の定義は次のように変更される:

$$\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu}(M^{ab}) = \hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab} + 8f_{[\mu}^{[a} \theta_{\nu]}^{b]}; \quad (6.3.63)$$

$$\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab} = R_{\mu\nu}{}^{ab}(\omega) - \bar{\psi}_{[\mu} \gamma^{ab} \phi_{\nu]} - 2\bar{\psi}_{[\mu} \mathcal{M}_{\nu]}{}^{ab}(Q). \quad (6.3.64)$$

C2 : $e_b^\nu \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu}(M^{ab}) = 0$. この条件は, 次式と同等:

$$f_\mu^a = -\frac{1}{4} \hat{R}_\mu{}^a + \frac{1}{24} \theta_\mu^a \hat{R}_s \quad (6.3.65)$$

C3 : $\gamma^\mu \mathcal{R}_{\mu\nu}(Q) = 0$. この条件は,

$$\mathcal{R}_{\mu\nu}(Q) = \mathcal{R}'_{\mu\nu}(Q) - 2\gamma_{[\mu} \phi_{\nu]}, \quad (6.3.66)$$

$$\mathcal{R}'(Q) = \mathcal{D}\psi \equiv \left(d + \frac{1}{2} b \wedge - \frac{3}{2} i B \wedge \gamma_5 + \frac{1}{4} \omega^{ab} \wedge \gamma_{ab} \right) \psi \quad (6.3.67)$$

とおくと, 次式と同等:

$$\phi_\mu = -\frac{1}{2} \gamma^\nu \mathcal{R}'_{\mu\nu}(Q) + \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma^{ab} \mathcal{R}'_{ab}(Q). \quad (6.3.68)$$

以上の C1~C3 の条件が満たされるとき,

$$f_\mu^\mu = -\frac{1}{2}\hat{R}_S = -\frac{1}{12}(R_s(\omega) - \bar{\psi}_a\gamma^{ab}\phi_b), \quad (6.3.69a)$$

$$\gamma^\mu\phi_\mu = -\frac{1}{6}\gamma^{\mu\nu}\mathcal{R}'_{\mu\nu}(Q), \quad (6.3.69b)$$

$$\gamma^{ab}\phi_b = -\frac{1}{4}\gamma^{ab}\mathcal{R}'_{bc}(Q), \quad (6.3.69c)$$

$$\mathcal{M}_\mu^{ab}(Q) = -\frac{1}{2}\gamma_\mu\mathcal{R}^{ab}(Q) = \gamma_\mu\gamma^{[a}\phi^{b]} - \frac{1}{2}\gamma_\mu\mathcal{R}'^{ab}(Q). \quad (6.3.69d)$$

したがって, 独立な場としては, ゲージ場 θ^a, B, ψ_μ および F のみが残る.

【演習問題 6.3 (未確認事項)】 拘束条件を課すと, 従属ゲージ場 ω^{ab}, f^a, ϕ の変換則が変化する。この変化した後の変換則でも, 作用積分 (6.3.57) が不変であることを示せ。すなわち,

$$\int d^4x \frac{\delta S_{SG}}{\delta A^A} \cdot \delta_{\mathcal{M}} A^A = 0 \quad (6.3.70)$$

を示せ。 _____ □

ゲージ固定 P^a, M^{ab}, Q 以外の変換に対するゲージ自由度を取り除くため, 次のゲージ条件を課す:

$$K\text{-gauge} : b_\mu = 0, \quad (6.3.71a)$$

$$D\text{-gauge and } T\text{-gauge} : Z = \sqrt{3}/\kappa, \quad (6.3.71b)$$

$$S\text{-gauge} : \chi = 0 \quad (6.3.71c)$$

このとき,

$$0 = \delta Z = (\lambda_D + i\lambda_T)Z \Rightarrow \lambda_D = \lambda_T = 0, \quad (6.3.72a)$$

$$0 = \delta P_L \chi = \frac{1}{\sqrt{2}}P_L(-i\mathcal{B}Z + F)\epsilon + \sqrt{2}ZP_L\eta \Rightarrow \eta, \quad (6.3.72b)$$

$$0 = \delta b = 2\lambda_K^a - \frac{1}{2}\bar{\eta}\psi + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\phi \Rightarrow \lambda_K^a \quad (6.3.72c)$$

より, D, T, K_a, S に対するゲージ変換が固定される。

超重力作用積分 ゲージ固定条件を (6.3.57) に代入すると,

$$\mathcal{D}_\mu Z = -iB_\mu Z. \quad (6.3.73a)$$

$$\mathcal{D}_\mu P_L \chi = P_L \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (i\mathcal{B}Z - F)\psi_\mu - \sqrt{2}Z\phi_\mu \right], \quad (6.3.73b)$$

$$\square^C \bar{Z} = -ie^{a\mu} \mathcal{D}(\omega)_\mu B_a \bar{Z} + 2f_a^a \bar{Z} - B_a B^a \bar{Z} - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}^a \mathcal{D}_\mu \chi_\mu. \quad (6.3.73c)$$

より,

$$S_{\text{SG}} = \int d^4x |\theta| \left[F\bar{F} + |Z|^2 \left\{ -B_a B^a + 2f_a^a - \frac{i}{4} \bar{\psi}_a \gamma^{abc} \gamma_5 \psi_b B_c - \frac{1}{2} \bar{\psi}_a \gamma^{ab} \phi_b \right\} \right]. \quad (6.3.74)$$

さらに, 拘束条件とゲージ固定条件より

$$f_a^a = -\frac{1}{12} \hat{R}_S = -\frac{1}{12} (R_s(\omega) - \bar{\psi}_a \gamma^{ab} \psi_b), \quad (6.3.75a)$$

$$\gamma^a \phi_a = -\frac{1}{6} \gamma^{ab} \mathcal{R}'_{ab}(Q), \quad (6.3.75b)$$

$$\gamma^{ab} \psi_b = -\frac{1}{4} \bar{\psi}_a \gamma^{abc} \mathcal{R}'_{bc}(Q), \quad (6.3.75c)$$

$$\mathcal{R}'_{ab} = 2\mathcal{D}(\omega)_{[a} \psi_{b]} - 3iB_{[a} \gamma_5 \psi_{b]} \quad (6.3.75d)$$

となることを用いると,

$$S_{\text{SG}} = \int d^4x |\theta| \left[\frac{1}{2\kappa^2} (R_s(\omega) - \bar{\psi}_a \gamma^{abc} \mathcal{D}(\omega)_b \psi_c + 6B_a B^a) - |F|^2 \right] \quad (6.3.76)$$

を得る. ここで, ω^{ab} はトーシオンをもつ接続係数

$$\omega_\mu^{ab} = \omega_\mu^{ab}(e) + \frac{1}{2} \bar{\psi}_\mu \gamma^{[a} \psi^{b]} + \frac{1}{4} \bar{\psi}^a \gamma_\mu \psi^b. \quad (6.3.77)$$

である.

【注 6.4 (超対称変換の修正)】 もとの作用積分 (6.3.57) は, 本来の超対称変換 (6.3.42) に対して不変であるが, 拘束条件 C1 を課すと, ω^{ab} の変換則が変化するため, $\delta(\epsilon)$ に対する不変性が壊れる可能性がある. しかし, ゲージ固定条件と拘束条件 C_3 のもとで,

$$\delta(\epsilon) S_{\text{SG}} = \int d^4x \delta_{\mathcal{M}} \omega_\mu^{ab} \frac{\delta S_{\text{SG}}}{\delta \omega_\mu^{ab}} = \int d^4x |\theta| \mathcal{M}_\mu^{ab}(Q) e^{a\mu} B^b = 0 \quad (6.3.78)$$

より, 不変性は破れない.

この作用積分を不変にする超対称変換 $\tilde{\delta}(\epsilon)$ は、ゲージ固定条件より得られる関係式

$$P_L \eta = \frac{1}{2} i P_L \not{B} \epsilon - \frac{\kappa}{2\sqrt{3}} F P_L \epsilon \quad (6.3.79)$$

を考慮すると、

$$\tilde{\delta} e^a = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma^a \psi, \quad (6.3.80a)$$

$$\tilde{\delta} P_L \psi = P_L \hat{\mathcal{D}} \epsilon \equiv P_L \left(\mathcal{D}(\omega) - \frac{3}{2} i B + \frac{1}{2} i \gamma_\mu dx^\mu \not{B} + \frac{\kappa}{2\sqrt{3}} \gamma_\mu dx^\mu \bar{F} \right) \epsilon, \quad (6.3.80b)$$

$$\tilde{\delta} B_\mu = -\frac{1}{4} i \bar{\epsilon} \gamma_5 \left(-\gamma^\nu \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu}(Q) + \frac{1}{6} \gamma_\mu \gamma^{ab} \hat{\mathcal{R}}_{ab}(Q) \right), \quad (6.3.80c)$$

$$\tilde{\delta} F = \frac{\sqrt{3}}{6\kappa} \bar{\epsilon} P_R \gamma^{\mu\nu} \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu}(Q). \quad (6.3.80d)$$

ここで、

$$P_L \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu}(Q) = 2 P_L \hat{\mathcal{D}}_{[\mu} \psi_{\nu]}. \quad (6.3.81)$$

□

【演習問題 6.5 (未確認)】 上の修正された変換則が閉じた代数をなすことをしめせ。また、この変換に対して、作用積分 (6.3.76) が不変であることを確かめよ。 □

adS 超対称代数

【演習問題 6.6 (共形不変ポテンシャル)】 超共形不変作用積分を用いたアプローチにおいて, 超ポテンシャル $W = cZ^3$ に対応する修正 F 項を加えることができる. 対応する作用積分 $S_{\text{SG}} + S_c$ において, 補助場 B, F を場の方程式を用いて消去すると, 反 de Sitter 超重力理論

$$S_{\text{SG}} + S_c = \int d^4x |\theta| \frac{1}{2\kappa^2} [R_s(\omega) - 2\Lambda - \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} \mathcal{D}(\omega)_\nu \psi_\rho + m_{3/2} \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu]. \quad (6.3.82)$$

が得られることを示せ. ここで,

$$m_{3/2} = \frac{1}{L} = \frac{3^{3/2}c}{2\kappa}, \quad \Lambda = -3m_{3/2}^2. \quad (6.3.83)$$

また, 対応

$$P_a \mapsto \delta_{\text{cgct}}, \quad Q \mapsto \tilde{\delta}(\epsilon) \quad (6.3.84)$$

のもとで, 次の adS 超対称代数が成り立つことを示せ (未確認):

$$[P_a, P_b] = \frac{1}{4L^2} M_{ab}, \quad (6.3.85a)$$

$$[P_a, Q] = \frac{1}{4L} \gamma_a Q, \quad (6.3.85b)$$

$$[Q_\alpha, Q_\beta] = -\frac{1}{2} (\gamma^a)_{\alpha\beta} P_a - \frac{1}{8L} (\gamma^{ab})_{\alpha\beta} M_{ab}. \quad (6.3.85c)$$

□

6.3.4 物質セクターとの結合

超共形対称性およびゲージ対称性の表現 超共形変換と物質場のゲージ対称性は可換であるとする。

Wyle 超組 (超共形ゲージ場)	$\theta^a, \omega^{ab}, f^a, b, B; \psi, \phi$
カイラル超組	(X^I, Ω^I, F^K)
ゲージ超組	$(A^A, P_R \lambda^A, D^A)$
実超組	$(C, P_L \zeta, \mathcal{H}, V_a, P_R \lambda, D)$

Weyl 超組 Weyl 超組の共形およびカイラルウエイトは以下の通り：

	θ^a	$P_L \psi$	b	ω^{ab}	B	$P_L \phi$	f^a
w	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1
c	0	$\frac{3}{2}$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	0

超共形ゲージ超組 A_μ^A は実ベクトル場で、ゲージ変換とカイラル変換は可換なので、 A_μ^A のカイラルウエイトはゼロ。また、 $A_a^A = e_a^\mu A_\mu^A$ と e_a^μ の共形ウエイトが 1 なので、 A_μ^A の共形ウエイトはゼロ。これと、超共形変換の構造より、ゲージ超組に属する場の共形ウエイトとカイラルウエイトは

	A_μ^A	$P_R \lambda^A$	D^A
w	0	3/2	2
c	0	-3/2	0

これと、超共形代数の構造より、 K^a 、 S のゲージ超組への作用は自明で、 Q 変換の作用は次のように定まる：

$$\delta(\bar{\epsilon}Q)A_\mu^A = -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda^A, \quad (6.3.86a)$$

$$\delta(\bar{\epsilon}Q)\lambda^A = \left(\frac{1}{4}\gamma^{ab}\hat{F}_{ab}^A + \frac{1}{2}i\gamma_5 D^A\right)\epsilon, \quad (6.3.86b)$$

$$\delta(\bar{\epsilon}Q)D^A = \frac{1}{2}i\bar{\epsilon}\gamma_5\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\lambda^A. \quad (6.3.86c)$$

ここで,

$$\hat{F}^A = dA^A + \frac{1}{2}f^A{}_{BC}A^B \wedge A^C + \frac{1}{2}\bar{\psi} \wedge \gamma_\nu dx^\nu \lambda^A, \quad (6.3.87a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\lambda^A &= d\lambda^A - \left(-\frac{1}{4}\omega^{ab}\gamma_{ab} + \frac{3}{2}b + \frac{3}{2}i\gamma_5 B \right) \lambda^A \\ &\quad + \lambda^C A^B f^A{}_{BC} - \left(\frac{1}{4}\gamma^{ab}\hat{F}_{ab}{}^A + \frac{1}{2}i\gamma_5 D^A \right) \psi. \end{aligned} \quad (6.3.87b)$$

【演習問題 6.7 (未確認事項)】 上の変換が, $[Q, Q]$ の交換関係と整合的であることを確認せよ。 _____ □

超共形実超組 実超組の基礎スカラ場 C は実場なのでカイラルウエイトはゼロ. そのカイラルウエイトを w とすると, 超共形変換則より,

	C	$P_L\zeta$	\mathcal{H}	V_a	$P_R\lambda$	D
w	w	$w + 1/2$	$w + 1$	$w + 1$	$w + 3/2$	$w + 2$
c	0	$-3/2$	-3	0	$-3/2$	0

また, $\delta = \delta(\lambda_K^a K_a + \bar{\epsilon}Q + \bar{\eta}S)$ に対する変換則は

$$\delta C = \frac{1}{2}i\bar{\epsilon}\gamma_5\zeta, \quad (6.3.88a)$$

$$\delta P_L\zeta = \frac{1}{2}P_L(i\mathcal{H} - \mathcal{V} - i\mathcal{D}C)\epsilon - iwCP_L\eta, \quad (6.3.88b)$$

$$\delta\mathcal{H} = -i\bar{\epsilon}P_R(\lambda + \mathcal{D}\zeta) + (w - 2)i\bar{\eta}P_L\zeta, \quad (6.3.88c)$$

$$\delta V_a = -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}(\gamma_a\lambda + \mathcal{D}_a\zeta) + \frac{1}{2}(1 + w)\bar{\eta}\gamma_a\zeta, \quad (6.3.88d)$$

$$\begin{aligned} \delta P_R\lambda &= P_R \left(\frac{1}{4}\gamma^{ab}F_{ab} - i\frac{D}{2} \right) \epsilon + \frac{w}{2}P_R(i\mathcal{H} - \mathcal{V} + i\mathcal{D}C)\eta \\ &\quad - w\lambda_K P_L\zeta, \end{aligned} \quad (6.3.88e)$$

$$\delta D = \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\gamma_5\mathcal{D}\lambda + iw\bar{\eta} \left(\lambda + \frac{1}{2}\mathcal{D}\zeta \right) - 2w\lambda_K^a \mathcal{D}_a C. \quad (6.3.88f)$$

ここで,

$$F_{ab} \equiv 2\mathcal{D}_{[a}V_{b]} + \epsilon_{abcd}\mathcal{D}^c\mathcal{D}^d C. \quad (6.3.89)$$

【演習問題 6.8 (未確認)】 この変換則が超共形代数の交換関係と整合的であることを確認せよ。 _____ □

目次へ

超共形カイラル超組 規準スカラ場 X^I のカイラルウエイトを w 、 $c = w$ とすると、 $\delta = \delta(\lambda_K^a K_a + \bar{\epsilon}Q + \bar{\eta}S)$ に対する変換則は

$$\delta X^I = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} \Omega^I, \quad (6.3.90a)$$

$$\delta \Omega^I = \frac{1}{\sqrt{2}} P_L (\not{\partial} X^I + F^I) \epsilon + \sqrt{2} w X^I P_L \eta, \quad (6.3.90b)$$

$$\delta F^I = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} \not{\partial} \Omega^I + \bar{\epsilon} P R \lambda^A k_A^I(X) + \sqrt{2} (1-w) \bar{\eta} \Omega^I. \quad (6.3.90c)$$

各成分場の共形ウエイトとカイラルウエイトは

	X^I	Ω^I	F^I
w	w	$w + \frac{1}{2}$	$w + 1$
c	w	$w - \frac{3}{2}$	$w - 3$

【演習問題 6.9 (未確認)】 この変換則が超共形代数の交換関係と整合的であることを確認せよ。 _____ □

修正 D 項による不変作用積分 $(C, \zeta, \mathcal{H}, V_a, \lambda, D)$ を $w(C) = 2$ の超共形実超組とすると,

$$Z = -\bar{\mathcal{H}}, \quad P_L \chi = -\sqrt{2}iP_L(\lambda + \mathcal{P}\zeta), \quad F = D + \mathcal{D}^a \mathcal{D}_a C + i\mathcal{D}^a V_a \quad (6.3.91)$$

により定義される組 $(Z, P_L \chi, F)$ が $w(F) = 4$ の超共形カイラル超組として変換することが示される. したがって, 対応する修正 F 項は, 超共形不変な作用積分を与える;

$$S_D = \int d^4x |\theta| \left[D + \square^C C + \frac{1}{2} \left(i\bar{\psi} \cdot \gamma P_R (\lambda + \mathcal{P}\zeta) - \frac{1}{4} \bar{\psi}_\mu P_L \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu \mathcal{H} + \text{h.c.} \right) \right]. \quad (6.3.92)$$

ここで,

$$\mathcal{D}_a C = \partial_a C - 2b_a C - \frac{1}{2} i\bar{\psi}_a \gamma_5 \zeta, \quad (6.3.93a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a P_L \zeta &= \left(\partial_a + \frac{1}{4} \omega_a^{bc} \gamma_{bc} - \frac{5}{2} b_a + \frac{3}{2} iB_a \right) \zeta - \frac{1}{2} P_L (i\mathcal{H} - V - i\mathcal{P}C) \psi_a \\ &\quad + 2iC P_L \phi_a, \end{aligned} \quad (6.3.93b)$$

$$\begin{aligned} \square^C C &= \mathcal{D}^a \mathcal{D}_a C \\ &= \partial^a \mathcal{D}_a C - 3b^a \mathcal{D}_a C + \omega_a^{ab} \mathcal{D}_b C + 4C f_a^a - \frac{1}{2} i\bar{\psi}^a \gamma_5 \mathcal{D}_a \zeta + \frac{1}{2} i\bar{\psi} \cdot \gamma \gamma_5 \zeta. \end{aligned} \quad (6.3.93c)$$

拘束条件 C1, C2, C3 を課して, ω^{ab}, f^a, ϕ を他のゲージ場で表すと, この作用積分は次の形で表される:

$$\begin{aligned} S_D &= \int d^4x |\theta| \left[D - \frac{1}{2} i\bar{\psi} \cdot \gamma \gamma_5 \lambda - \frac{1}{3} C R(\omega) + \frac{1}{6} (C \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\rho\sigma} - i\bar{\zeta} \gamma^{\rho\sigma} \gamma_5) R'_{\rho\sigma}(Q) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \epsilon^{abcd} \bar{\psi}_a \gamma_b \psi_c \left(B_d - \frac{1}{2} \bar{\psi}_d \zeta \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.3.94)$$

6.3.5 カイラル超組およびゲージ超組と結合した超重力理論の導出

超共形的作用積分 $(X^I, \chi^I, F^I) (I = 0, 1, \dots, n)$ を $n+1$ 個のカイラル超組, (A^A, λ^A, D^A) をゲージ超組, $(\theta^a, \omega^{ab}, f^a, b, B; \psi, \phi)$ を超共形ゲージ場とする. 曲がった時空での最も一般的な超対称理論の超共形不変な拡張は次式で与えられる:

$$\mathcal{L} = [N(X, \bar{X})]_{\bar{D}} + [\mathcal{W}(X)]_{\bar{F}} + [f_{AB}(X) \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B]_{\bar{F}}. \quad (6.3.95)$$

ここで,

- 1) $N(X, \bar{X})$: 共形ウエイト $w = 2$, カイラルウエイト $c = 0$ の実関数.

$$N(\lambda X, \bar{\lambda} \bar{X}) = \lambda \bar{\lambda} N(X, \bar{X}). \quad (6.3.96)$$

- 2) $\mathcal{W}(X)$: 共形ウエイト $w = 3$ の正則関数.

$$X^I \mathcal{W}_I = 3\mathcal{W}(X); \quad \mathcal{W}_I \equiv \frac{\partial \mathcal{W}(X)}{\partial X^I}. \quad (6.3.97)$$

- 3) $f_{AB}(X)$: 共形ウエイト $w = 0$ の正則関数.

$$X^I f_{AB,I} = 0; \quad f_{AB,I} \equiv \frac{\partial f_{AB}(X)}{\partial X^I}. \quad (6.3.98)$$

ゲージ化 ゲージ群 G の Kähler 多様体 $\tilde{\mathcal{M}} = (X^I, N(X, \bar{X}))$ への正則変換群としての作用が与えられると, 共変微分を

$$\mathcal{D}_\mu X^I = (\partial_\mu - b_\mu - iB_\mu) X^I - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_\mu \Omega^I - A_\mu^A k_A^I, \quad (6.3.99a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \Omega^I &= \left(\partial_\mu - \frac{3}{2} b_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu^{ab} \gamma_{ab} - \frac{1}{2} i B_\mu \right) \Omega^I \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} P_L (\mathcal{D} X^I + F^I) \psi_\mu - \sqrt{2} X^I P_L \phi_\mu - A_\mu^A \Omega^J \partial_J k_A^I \end{aligned} \quad (6.3.99b)$$

と変更することにより, カイラル超組がゲージ相互作用する超重力理論が決まる.

ただし, 理論の超共形不変性を保つために, 対応する $\tilde{\mathcal{M}}$ 上の正則 Killing ベクトル

$$k_A = (k_A^I): \quad \delta X^I = \theta^A k_A^I, \quad \delta \Omega^I = \theta^A \partial_J k_A^I \Omega^J \quad (6.3.100)$$

は, X^I と同じ共形ウエイト $w = 1$ を持つことが要求される :

$$X^J \partial_J k_A^I = k_A^I, \quad \partial_J k_A^I = 0. \quad (6.3.101)$$

また, \mathscr{W} と N はこの無限小変換で不変であることが必要で, N の同次性のために Kähler 変換の自由度は失われる :

$$\mathscr{W}_I k_A^I = 0, \quad N_I k_A^I + N_{\bar{I}} k_A^{\bar{I}} = 0, \quad (6.3.102a)$$

$$\mathcal{P}_A = \frac{1}{2} i (N_I k_A^I - N_{\bar{I}} k_A^{\bar{I}}) = i N_I k_A^I = -i N_{\bar{I}} k_A^{\bar{I}}. \quad (6.3.102b)$$

ここで, \mathcal{P}_A は次式で定義されるモーメント写像 :

$$\partial_{\bar{I}} \mathcal{P}_A = i N_{J\bar{I}} k_A^J. \quad (6.3.103)$$

作用積分の具体的表式 拘束条件 C1, C2, C3 の元で,

$$\begin{aligned} |\theta|^{-1} [N]_{\bar{D}} &= N_{I\bar{J}} \left(-\mathcal{D}_\mu X^I \mathcal{D}^\mu \bar{X}^{\bar{J}} - \frac{1}{2} \bar{\Omega}^I \mathcal{D} \Omega^{\bar{J}} - \frac{1}{2} \bar{\Omega}^{\bar{J}} \mathcal{D} \Omega^I + F^I \bar{F}^{\bar{J}} \right) \\ &\quad \frac{1}{2} \left[N_{IJ\bar{K}} \left(-\bar{\Omega}^I \Omega^J \bar{F}^{\bar{K}} + \bar{\Omega}^I (\mathcal{D} X^J) \Omega^{\bar{K}} \right) + \text{h.c.} \right] + \frac{1}{4} N_{IJ\bar{K}\bar{L}} \bar{\Omega}^I \Omega^J \bar{\Omega}^{\bar{K}} \Omega^{\bar{L}} \\ &\quad - i N_I K_A^I D^A - \sqrt{2} \bar{\lambda}^A N_{I\bar{J}} (\Omega^I k_A^{\bar{J}} + \Omega^{\bar{J}} k_A^I) \\ &\quad + \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \bar{\psi} \cdot \gamma \left(N_{I\bar{J}} F^I \Omega^{\bar{J}} - N_{I\bar{J}} \mathcal{D} \bar{X}^{\bar{J}} \Omega^I - \frac{1}{2} N_{IJ\bar{K}} \Omega^{\bar{K}} \bar{\Omega}^I \Omega^J + N_I P_R \lambda^A k_A^I \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_\nu \psi_\rho \left(N_I \mathcal{D}_\sigma X^I + \frac{1}{2} N_{I\bar{J}} \bar{\Omega}^I \gamma_\sigma \Omega^{\bar{J}} + \frac{1}{\sqrt{2}} N_I \bar{\psi}_\sigma \Omega^I \right) + \text{h.c.} \right] \\ &\quad + \frac{1}{6} N \left(-R(\omega) + \frac{1}{2} \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} R'_{\nu\rho}(Q) \right) - \frac{1}{6\sqrt{2}} \left(N_I \bar{\Omega}^I + N_{\bar{I}} \bar{\Omega}^{\bar{I}} \right) \gamma^{\mu\nu} R'_{\mu\nu}(Q), \end{aligned} \quad (6.3.104a)$$

$$|\theta|^{-1} [\mathscr{W}]_{\bar{F}} = \mathscr{W}_I F^I - \frac{1}{2} \mathscr{W}_{I\bar{J}} \bar{\Omega}^I \Omega^{\bar{J}} + \mathscr{W}_I \bar{\psi} \cdot \gamma \Omega^I + \frac{1}{2} \mathscr{W} \bar{\psi}_\mu P_R \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu + \text{h.c.}, \quad (6.3.104b)$$

$$\begin{aligned} |\theta|^{-1} [f_{AB} \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B]_{\bar{F}} &= -\frac{1}{4} f_{AB} \left[2 \bar{\lambda}^A P_L \mathcal{D} \lambda^B + \hat{F}_{\mu\nu}^{-A} \hat{F}^{\mu\nu-B} - D^A D^B \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \bar{\psi} \cdot \gamma P_L \left(\frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu}^{-A} - i D^A \right) \lambda^B - \frac{1}{8} \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu} P_R \psi_\nu \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} f_{AB,I} \bar{\Omega}^I \left(-\frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu}^{-A} + i D^A \right) \lambda^B \\ &\quad + \left[-\frac{1}{4} f_{AB,I} \left(F^I + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi} \cdot \gamma \Omega^I \right) + \frac{1}{8} f_{AB,I\bar{J}} \bar{\Omega}^I \Omega^{\bar{J}} \right] \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (6.3.104c)$$

補助場の消去 運動項を持たない補助場 $F^I, \bar{F}^{\bar{I}}, D^A, B_\mu$ に対する変分方程式は

$$-\bar{F}^{\bar{J}} N_{I\bar{J}} = \mathcal{W}_I - \frac{1}{2} N_{I\bar{J}\bar{K}} \bar{\Omega}^{\bar{J}} \Omega^{\bar{K}}, \quad (6.3.105a)$$

$$(\text{Re } f_{AB}) D^B = \mathcal{P}_A + \mathcal{P}_A^F, \quad (6.3.105b)$$

$$B_\mu = \mathcal{B}_\mu + B_\mu^F. \quad (6.3.105c)$$

ここで,

$$\mathcal{P}_A^F = \frac{i}{2\sqrt{2}} \left(-f_{AB,I} \bar{\Omega}^I \lambda^B + \bar{f}_{AB,\bar{I}} \bar{\Omega}^{\bar{I}} \lambda^B \right), \quad (6.3.106)$$

$$\mathcal{B}_\mu = \frac{i}{2N} \left(N_{\bar{I}} \partial_\mu \bar{X}^{\bar{I}} - N_I \partial_\mu X^I \right) + \frac{1}{N} A_\mu^A \mathcal{P}_A. \quad (6.3.107)$$

$$B_\mu^F = \frac{i}{4N} \left[\sqrt{2} \bar{\psi}_\mu (N_I \Omega^I - N_{\bar{I}} \bar{\Omega}^{\bar{I}}) + N_{I\bar{J}} \bar{\Omega}^I \gamma_\mu \Omega^{\bar{J}} + \frac{3}{2} (\text{Re } f_{AB}) \bar{\lambda}^A \gamma_\mu \gamma_5 \lambda^B \right]. \quad (6.3.108)$$

これらを上で求めた超共形不変作用積分に代入し整理すると, 次式を得る:

$$\begin{aligned} |\theta|^{-1} \mathcal{L} = & \frac{N}{6} \left[-R(e, b) + \bar{\psi}_\mu R^\mu + |\theta|^{-1} \partial_\mu (|\theta| \bar{\psi} \cdot \gamma \psi^\mu) \right] \\ & + \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{1/2} + \mathcal{L}_1 - V + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{\text{mix}} + \mathcal{L}_d + \mathcal{L}_F. \end{aligned} \quad (6.3.109)$$

ここで,

$$\mathcal{L}_0 = -G_{I\bar{J}}D_\mu X^I D^\mu X^{\bar{J}}, \quad (6.3.110a)$$

$$\mathcal{L}_{1/2} = -\frac{1}{2}G_{I\bar{J}}\left(\bar{\Omega}^I \hat{\mathcal{D}}^{(0)}\Omega^{\bar{J}} + \bar{\Omega}^{\bar{J}} \hat{\mathcal{D}}^{(0)}\Omega^I\right), \quad (6.3.110b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= (\text{Re } f_{AB})\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^A F^{\mu\nu B} - \frac{1}{2}\bar{\lambda}^A \mathcal{D}^{(0)}\lambda^B\right) \\ &\quad + \frac{i}{4}\left((\text{Im } f_{AB})F_{\mu\nu}^A \tilde{F}^{\mu\nu B} + (D_\mu \text{Im } f_{AB})\bar{\lambda}^A \gamma_5 \gamma^\mu \lambda^B\right), \end{aligned} \quad (6.3.110c)$$

$$V = V_F + V_D = G^{I\bar{J}}\mathcal{W}_I \bar{\mathcal{W}}_{\bar{J}} + \frac{1}{2}(\text{Re } f)^{-1AB} \mathcal{P}_A \mathcal{P}_B, \quad (6.3.110d)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= \frac{1}{2}\mathcal{W}\bar{\psi}_\mu P_R \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu - \frac{1}{2}\nabla_I \mathcal{W}_J \bar{\Omega}^I \Omega^J + \frac{1}{4}\bar{\mathcal{W}}_{\bar{J}} f_{AB,I} \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B \\ &\quad + \sqrt{2}i\left[-\partial_I \mathcal{P}_A + \frac{1}{4}f_{AB,I}(\text{Re } f)^{-1BC} \mathcal{P}_C\right] \bar{\lambda}^A \Omega^I + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (6.3.110e)$$

$$\mathcal{L}_{\text{mix}} = \bar{\psi} \cdot \gamma P_L \left(\frac{i}{2}\mathcal{P}_A \lambda^A + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{W}_I \Omega^I\right) + \text{h.c.}, \quad (6.3.110f)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_d &= \frac{1}{8}(\text{Re } f_{AB})\bar{\psi}_\mu \gamma^{ab}(F_{ab}^A + \hat{F}_{ab}^A)\gamma^\mu \lambda^B + \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{G_{I\bar{J}}\bar{\psi}_\mu \mathcal{D} X^{\bar{J}} \gamma^\mu \Omega^I \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4}f_{AB,I}\bar{\Omega}^I \gamma^{ab} \hat{F}_{ab}^A \lambda^B - \frac{2}{3}N_I \bar{\Omega}^I \gamma^{\mu\nu} D_\mu \psi_\nu + \text{h.c.}\right\}, \end{aligned} \quad (6.3.110g)$$

$$\mathcal{L}_{4f} = -\frac{N}{6}\mathcal{L}_{\text{SG,torsion}} + \dots \quad (6.3.110h)$$

ただし,

$$DX^I = (d - b - i\mathcal{B})X^I - A^A k_A^I, \quad (6.3.111)$$

$$\begin{aligned} \hat{D}^{(0)}\Omega^I &= \left(d - \frac{3}{2}b + \frac{1}{4}\omega^{ab}(e, b)\gamma_{ab} + \frac{i}{2}\mathcal{B}\right)\Omega^I \\ &\quad + \Gamma_{JK}^I \Omega^K D_\mu X^I - A^A \partial_J k_A^I \Omega^J, \end{aligned} \quad (6.3.112)$$

$$D^{(0)}\lambda^A = \left(d - \frac{3}{2}b + \frac{1}{4}\omega^{ab}(e, b)\gamma_{ab} - \frac{3}{2}i\mathcal{B}\gamma_5\right)\lambda^A - A^C \lambda^B f^A_{BC}, \quad (6.3.113)$$

$$R^\mu = \gamma^{\mu\rho\sigma} \left(\partial_\rho + \frac{1}{2}b_\rho + \frac{1}{4}\omega_\rho^{ab}(e, b)\gamma_{ab} - \frac{3}{2}i\mathcal{B}_\rho \gamma_5\right)\psi_\rho, \quad (6.3.114)$$

$$D_\mu \psi_\nu = \left(\partial_\mu + \frac{1}{2}b_\mu + \frac{1}{4}\omega_\mu^{ab}(e, b, \psi)\gamma_{ab} - \frac{3}{2}i\mathcal{B}_\mu \gamma_5\right)\psi_\nu, \quad (6.3.115)$$

$$\mathcal{L}_{\text{SG,torsion}} = -\frac{1}{16}\left[(\bar{\psi}^\rho \gamma^\mu \psi^\nu)(\bar{\psi}_\rho + \gamma_\mu \psi_\nu + 2\bar{\psi}_\rho \gamma_\nu \psi_\mu) - 4(\bar{\psi}_\mu \gamma \cdot \psi)(\bar{\psi}^\nu \gamma^\mu \psi_\nu)\right] \quad (6.3.116)$$

カイラルスカラーの運動項 同次座標 X^I の代わりに,

$$X^I = yZ^I(z) \quad (6.3.117)$$

により, 新たな複素座標 (y, z^α) ($\alpha = 1, \dots, n$) を導入する. ここで, $Z^I(z)$ は, $\partial Z^I / \partial z^\alpha$ がランク n を持つような z の正則関数の組である. y 座標には, $f(z)$ を任意の正則関数として,

$$y \rightarrow y' = e^{f(z)/a} y, \quad Z^I \rightarrow Z'^I(z) = e^{-f(z)/a} Z^I(z) \quad (6.3.118)$$

という変換の自由度が存在する. X^I に対して, D-gauge 条件 $N = -a$ を課すと, $|y|^2$ は z の関数となる:

$$y\bar{y} = e^{\mathcal{K}(z, \bar{z})/a} \equiv -\frac{a}{N(Z^I, \bar{Z}^{\bar{I}})}. \quad (6.3.119)$$

このゲージ条件のもとで, 変換 (6.3.118) を施すと, \mathcal{K} は次の変換を受ける:

$$\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}' = \mathcal{K} + f(z) + \overline{f(z)}. \quad (6.3.120)$$

最終的に \mathcal{K} はカイラルスカラーが値を取る Kähler 多様体の Kähler ポテンシャルとなるので, これは Kähler ポテンシャルの Kähler 変換を与える.

この D-ゲージ条件を満たす超曲面上では, スカラー場の運動項は

$$\mathcal{L}_0 = -G_{I\bar{J}} DX^I \cdot D\bar{X}^{\bar{J}} = -K_{\alpha\bar{\beta}} \hat{\partial} z^\alpha \cdot \hat{\partial} \bar{z}^{\bar{\beta}}; \quad K_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} \mathcal{K} \quad (6.3.121)$$

すなわち, \mathcal{K} はカイラルスカラーの運動項に対応する Kähler 計量に対する Kähler ポテンシャルと一致する.

Proof. カイラルスカラーの共変微分を新たな座標系で表すと,

$$DX^I = \{dy - (b + i\mathcal{B})y\} Z^I + ydz^\alpha \partial_\alpha Z^I - A^A k_A^I. \quad (6.3.122)$$

ここで, キリングベクトル場 k_A は共形ウエイト 0 なので,

$$[k_A^I \partial_{X^I}, X^I \partial_{X^I}] = 0 \Leftrightarrow \partial_y k_A^\alpha = 0, \quad y \partial_y k_A^y = k_A^y \quad (6.3.123)$$

より,

$$k_A^\alpha = k_A^\alpha(z), \quad k_A^y = \frac{y}{a} r_A(z). \quad (6.3.124)$$

また,

$$\delta_{\text{gauge}} \mathcal{K} = \theta^A \mathcal{L}_{k_A} \mathcal{K} = \delta(a \ln(y\bar{y})) = \theta^A \left(r_A(z) + \overline{r_A(z)} \right) \quad (6.3.125)$$

よって,

$$\delta X^I = \delta y Z^I + y \delta z^\alpha \partial_\alpha Z^I = \theta^A y \left\{ k_A^\alpha \nabla_\alpha Z^I + \frac{i}{a} \mathcal{P}_A Z^I \right\}. \quad (6.3.126)$$

ここで, $\nabla_\alpha Z^I$ は Kähler 変換 (6.3.118) に関する共変微分で

$$\nabla_\alpha y = \partial_\alpha y - \frac{1}{a} \partial_\alpha \mathcal{K} y, \quad (6.3.127a)$$

$$\nabla_\alpha Z^I = \partial_\alpha Z^I + \frac{1}{a} \partial_\alpha \mathcal{K} Z^I, \quad \nabla_{\bar{\alpha}} Z^I = 0. \quad (6.3.127b)$$

また,

$$\mathcal{P}_A \equiv i(k_A^\alpha \partial_\alpha \mathcal{K} - r_A) = -i(k_A^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} \mathcal{K} - \bar{r}_A). \quad (6.3.128)$$

以上より, Killing ベクトルは

$$k_A^I = y (k_A^\alpha \nabla_\alpha Z^I + i a^{-1} \mathcal{P}_A Z^I) \quad (6.3.129)$$

と表される. これを $D_\mu X^I$ の表式に代入すると,

$$D_\mu X^I = Y_\mu X^I + y \hat{\partial}_\mu z^\alpha \nabla_\alpha Z^I. \quad (6.3.130)$$

ただし,

$$Y \equiv \frac{dy}{y} - i(\mathcal{B} + a^{-1} \mathcal{P}_A A^A) - a^{-1} dz^\alpha \partial_\alpha \mathcal{K}, \quad (6.3.131)$$

$$\hat{\partial}_\mu z^\alpha = \partial_\mu z^\alpha - k_A^\alpha A_\mu^A. \quad (6.3.132)$$

この表式において, Z^I と $\nabla_\alpha Z^J$ はエルミート内積 G_{IJ} に関して直交する. 実際, D-gauge $N = -a$ のもとで, $N_{IJ} X^J = 0$ より,

$$\begin{aligned} \partial_\alpha (\bar{X}^{\bar{I}} N_{\bar{I}}) &= \partial_\alpha N = 0 \\ \Leftrightarrow \partial_\alpha \bar{X}^{\bar{I}} N_{\bar{I}} + \bar{X}^{\bar{I}} \partial_\alpha X^J N_{\bar{I}J} + \partial_\alpha X^J N_{\bar{I}J} \bar{X}^{\bar{I}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial_\alpha \bar{y}}{\bar{y}} N + \frac{\partial_\alpha y}{y} N + y G_{J\bar{I}} \bar{X}^{\bar{I}} \partial_\alpha Z^J &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{\mathcal{K}/a} G_{\bar{I}J} \bar{Z}^{\bar{I}} \nabla_\alpha Z^J &= 0. \end{aligned} \quad (6.3.133)$$

よって, カイラルスカラの運動項は

$$-G_{IJ} D X^I \cdot D \bar{X}^{\bar{J}} = -|y|^2 Y \cdot Y G_{IJ} Z^I \bar{Z}^{\bar{J}} + K_{\alpha\bar{\beta}} \hat{\partial}_\mu z^\alpha \hat{\partial}^\mu \bar{z}^{\bar{\beta}}. \quad (6.3.134)$$

ここで,

$$K_{\alpha\bar{\beta}} = |y|^2 G_{I\bar{J}} \nabla_{\alpha} Z^I \overline{\nabla_{\bar{\beta}} Z^{\bar{J}}}. \quad (6.3.135)$$

\mathcal{B}_{μ} は

$$\text{Im} Y = -\mathcal{B} - \frac{1}{a} \mathcal{P}_A A^A - \frac{i}{2} d \ln(y/\bar{y}) + \frac{i}{2} (dz^{\alpha} \partial_{\alpha} \mathcal{K} - d\bar{z}^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} \mathcal{K}) \quad (6.3.136)$$

にのみ含まれるので, \mathcal{B}_{μ} についての変分方程式は, $\text{Im} Y = 0$ となる. また, このとき,

$$\text{Re} Y = \frac{1}{2} d \ln(y\bar{y}) - \frac{1}{2a} d\mathcal{K} = 0 \quad (6.3.137)$$

すなわち, $Y = 0$. さらに,

$$G_{I\bar{J}} \nabla_{\alpha} Z^I \bar{Z}^{\bar{J}} = 0 \Rightarrow G_{I\bar{J}} \partial_{\alpha} Z^I \bar{Z}^{\bar{J}} = -\frac{1}{a} \partial_{\alpha} \mathcal{K} G_{I\bar{J}} Z^I \bar{Z}^{\bar{J}} = \frac{1}{|y|^2} \partial_{\alpha} \mathcal{K} \quad (6.3.138)$$

より,

$$K_{\alpha\bar{\beta}} = |y|^2 G_{I\bar{J}} \partial_{\alpha} Z^I \partial_{\bar{\beta}} \bar{Z}^{\bar{J}} + \frac{1}{a} \partial_{\alpha} \mathcal{K} \partial_{\bar{\beta}} \mathcal{K}. \quad (6.3.139)$$

一方, $N_{I\bar{J}\bar{K}} \bar{Z}^{\bar{J}} = 0$ より,

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha} \partial_{\bar{\beta}} \mathcal{K} &= -a \partial_{\alpha} \partial_{\bar{\beta}} \ln \left[-a^{-1} Z^I G_{I\bar{J}} \bar{Z}^{\bar{J}} \right] \\ &= |y|^2 G_{I\bar{J}} \partial_{\alpha} Z^I \partial_{\bar{\beta}} \bar{Z}^{\bar{J}} + \frac{|y|^2}{a} (N_I \partial_{\alpha} Z^I) (N_{\bar{J}} \partial_{\bar{\beta}} \bar{Z}^{\bar{J}}) \end{aligned} \quad (6.3.140)$$

ここで,

$$\begin{aligned} N_I \partial_{\alpha} Z^I &= \frac{1}{y} N_I (\partial_{\alpha} X^I - \partial_{\alpha} y Z^I) = \frac{1}{y} (\partial_{\alpha} N - N_I \partial_{\alpha} \bar{y} \bar{Z}^{\bar{I}}) - \frac{\partial_{\alpha} y}{y^2} N \\ &= -\frac{N}{y} \partial_{\alpha} \ln(y\bar{y}) = \frac{1}{ay} \partial_{\alpha} \mathcal{K} \end{aligned} \quad (6.3.141)$$

よって,

$$\mathcal{L}_0 = -K_{\alpha\bar{\beta}} \hat{\partial} z^{\alpha} \cdot \hat{\partial} \bar{z}^{\bar{\beta}}; \quad K_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_{\alpha} \partial_{\bar{\beta}} \mathcal{K} \quad (6.3.142)$$

Q.E.D.

カイラルスピノール場の運動項 カイラルスピノール場 Ω^I から

$$\Omega^I = y \chi^0 Z^I + y \chi^{\alpha} \nabla_{\alpha} Z^I \quad (6.3.143)$$

により, (χ^0, χ^α) を導入する :

$$\chi^0 = -a^{-1}N_I\Omega^I, \quad \chi^\alpha = \bar{y}K^{\alpha\bar{\beta}}\Omega^I G_{I\bar{J}}\bar{\nabla}_{\bar{\beta}}\bar{Z}^{\bar{J}}. \quad (6.3.144)$$

このとき,

$$\text{S-gauge: } \chi^0 = 0. \quad (6.3.145)$$

以下, この条件を課すと, スピノール場は $\chi^\alpha (\alpha = 1, \dots, n)$ のみで表される. χ^α の共形ウエイトとカイラルウエイトは $w = 1/2, c = -3/2$, Kähler ウエイトは $(0,0)$ である.

このゲージ条件のもとで, カイラルスピノール場の運動項は

$$\mathcal{L}_{1/2} = -\frac{1}{2}G_{I\bar{J}}\left(\bar{\Omega}^I\hat{\mathcal{D}}^{(0)}\Omega^{\bar{J}} + \bar{\Omega}^{\bar{J}}\hat{\mathcal{D}}^{(0)}\Omega^I\right) = -\frac{1}{2}K_{\alpha\bar{\beta}}\left(\bar{\chi}^{\bar{\beta}}\mathcal{D}^{(0)}\chi^\alpha + \bar{\chi}^\alpha\mathcal{D}^{(0)}\chi^{\bar{\beta}}\right). \quad (6.3.146)$$

Proof. Ω^I の運動項に含まれる共変微分

$$\hat{D}_\mu^{(0)}\Omega^I = D_\mu^{(0)}(y\nabla_\alpha Z^I\chi^\alpha) + \Gamma_{JK}^I D_\mu X^J y\nabla_\alpha Z^K\chi^\alpha \quad (6.3.147)$$

において,

$$D_\mu X^J = yY_\mu Z^J + y\hat{\partial}_\mu z^\beta \nabla_\beta Z^J = y\hat{\partial}_\mu z^\beta \nabla_\beta Z^J, \quad (6.3.148a)$$

$$D_\mu^{(0)}\Omega^I = \mathcal{D}(\omega, \mathcal{B})_\mu(y\nabla_\alpha Z^I\chi^\alpha) - A_\mu^A \partial_J k_A^I y\nabla_\alpha Z^J\chi^\alpha \quad (6.3.148b)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \partial_J k_A^I y\nabla_\alpha Z^J &= \partial_\alpha k_A^I + \frac{1}{a}k_A^I \frac{\partial_\alpha \bar{y}}{\bar{y}} = y\nabla_\alpha \left(\frac{k_A^I}{y}\right) \\ &= y \left[\nabla_\alpha k_A^\beta \nabla_\beta Z^I + k_A^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta Z^I + \frac{i}{a}(\mathcal{P}_A \nabla_\alpha Z^I + \partial_\alpha \mathcal{P}_A Z^I) \right] \end{aligned} \quad (6.3.149)$$

よって,

$$\begin{aligned} D_\mu^{(0)}\Omega^I &= y\nabla_\alpha Z^I D_\mu^{(0)}\chi^\alpha + y\chi^\alpha \left(\hat{\partial}_\mu z^\beta \nabla_\beta \nabla_\alpha Z^I + \hat{\partial}_\mu \bar{z}^{\bar{\beta}} \nabla_{\bar{\beta}} \nabla_\alpha Z^I \right) \\ &\quad - i\frac{y}{a}A_\mu^A \partial_\alpha \mathcal{P}_A Z^I \chi^\alpha. \end{aligned} \quad (6.3.150)$$

ここで,

$$\nabla_{\bar{\beta}} \nabla_\alpha Z^I = \frac{1}{a}K_{\alpha\bar{\beta}}Z^I. \quad (6.3.151)$$

また, (6.3.135) の両辺に ∇_γ を作用させると,

$$G_{IJ} \overline{\nabla_\beta Z^J} \nabla_\gamma \nabla_\alpha Z^I + y \nabla_\gamma Z^K N_{IJK} \nabla_\alpha Z^I \bar{\nabla}_\beta \bar{Z}^J = 0. \quad (6.3.152)$$

これを $\nabla_\gamma \nabla_\alpha Z^I$ について解くと,

$$\nabla_\beta \nabla_\alpha Z^I = -y N_{KIJ} G^{I\bar{J}} \nabla_\alpha Z^K \nabla_\beta Z^L = -y \Gamma_{KL}^I \nabla_\alpha Z^K \nabla_\beta Z^L. \quad (6.3.153)$$

以上より,

$$\hat{D}_\mu^{(0)} \Omega^I = y \nabla_\alpha Z^I D_\mu^{(0)} \chi^\alpha + \frac{y}{a} \left(K_{\alpha\bar{\beta}} \hat{\partial}_\mu \bar{z}^{\bar{\beta}} - i A_\mu^A \partial_\alpha \mathcal{P}_A \right) Z^I \chi^\alpha. \quad (6.3.154)$$

よって, カイラルスピノール場の運動項は

$$\mathcal{L}_{1/2} = -\frac{1}{2} K_{\alpha\bar{\beta}} \left(\bar{\chi}^{\bar{\beta}} \mathcal{D}^{(0)} \chi^\alpha + \bar{\chi}^\alpha \mathcal{D}^{(0)} \chi^{\bar{\beta}} \right). \quad (6.3.155)$$

Q.E.D.

ポテンシャル項 $W(z)$ を

$$\mathcal{W}(X) = y^3 W(z) \quad (6.3.156)$$

により導入すると,

$$G^{I\bar{J}} \mathcal{W}_I \bar{\mathcal{W}}_{\bar{J}} = y \bar{y} \left(-\frac{1}{a} Z^I \bar{Z}^{\bar{J}} + K^{\alpha\bar{\beta}} \nabla_\alpha Z^I \bar{\nabla}_{\bar{\beta}} \bar{Z}^{\bar{J}} \right) \mathcal{W}_I \bar{\mathcal{W}}_{\bar{J}} \quad (6.3.157)$$

において,

$$Z^I \mathcal{W}_I = 2y^2 W(z), \quad (6.3.158a)$$

$$\nabla_\alpha Z^I \mathcal{W}_I = y^2 \nabla_\alpha W. \quad (6.3.158b)$$

ここで, $N = -a = -3/\kappa^2$ より,

$$\nabla_\alpha W \equiv \partial_\alpha W + \kappa^2 \partial_\alpha \mathcal{K} W. \quad (6.3.159)$$

よって,

$$V = V_F + V_D; \quad (6.3.160)$$

$$V_F = e^{\kappa^2 \mathcal{K}} \left(-3\kappa^2 W \bar{W} + \nabla_\alpha W K^{\alpha\bar{\beta}} \overline{\nabla_\beta W} \right),$$

$$V_D = \frac{1}{2} [(\text{Re } f)^{-1}]^{AB} \mathcal{P}_A \mathcal{P}_B. \quad (6.3.161)$$

残留ゲージ対称性 最終的な 4次元超重力理論は，局所座標変換，局所 Lorentz 変換 M^{ab} ，局所超対称変換 Q ，局所内部ゲージ変換 T_A および Kähler 変換に対して不変となるが，これらの変換の一部は，元の理論におけるカイラル変換および S 変換を伴う。

まず，T-gauge 条件 $y = \bar{y}$ より，

$$\lambda_T = \frac{i}{2a}\theta^A(r_A - \bar{r}_A) + \frac{i}{2a\sqrt{2}}\bar{\epsilon}(\chi^\alpha\partial_\alpha\mathcal{K} - \chi^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}}\mathcal{K}) + \frac{i}{2a}[f(z) - \bar{f}(\bar{z})]. \quad (6.3.162)$$

つぎに，S-gauge 条件 $N_I\Omega^I = 0$ より，

$$\frac{2}{\kappa^2}P_L\eta = -\bar{W}P_L\epsilon + \gamma_a P_R\epsilon \left(\frac{1}{4}N_{I\bar{J}}\bar{\Omega}^I\gamma^a\Omega^{\bar{J}} + \frac{1}{8}\text{Re}f_{AB}\bar{\lambda}^A\gamma^a\gamma_5\lambda^B \right). \quad (6.3.163)$$

6.3.6 最も一般的な 4 次元超重力理論の最終形

基本場と自由データ

- Weyl 超組: フレーム場 θ_μ^a ; グラヴィティノー場 ψ_μ (Majorana)
- カイラル超組: 複素スカラー場 z^α ; スピノール場 χ^α ($\gamma_*\chi^\alpha = \chi^\alpha$)。

スカラー場 z^α は、Kähler-Hodge 多様体 (\mathcal{M}_s, g, J) に値を取る。この Kähler-Hodge 多様体の選択は、理論の自由データの一つ。特に、Kähler 計量 $g_{\alpha\bar{\beta}}$ は、 $g_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_\alpha \bar{\partial}_{\bar{\beta}} \mathcal{K}$ により、Kähler ポテンシャル \mathcal{K} を、Kähler 変換 $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} + f(z) + \bar{f}(\bar{z})$ の自由度を除いて決定。

- ゲージ超組: ゲージ場 A_μ^A ; ゲージノー場 λ^A (Majorana)。

ゲージセクターの自由データは、ゲージ群 G と \mathcal{M}_s 上の正則関数を要素とする対称行列であるゲージ結合関数 $f_{AB}(z)$ 。この関数は、ゲージ変換に対して、随伴表現のもとで 2 階対称テンソルとして変換することが必要。

- ゲージ結合: ゲージ場のカイラルセクターとの結合は、ゲージ群 G の Kähler 多様体 (M, g, J) の正則等長変換群への埋込により定義される。対応する正則キリングベクトルの基底を k_A とおくと、 (z^α, χ^α) のゲージ変換は

$$\delta z^\alpha = \theta^A k_A^\alpha, \quad \delta \chi^\alpha = \theta^A \partial_\beta k_A^\alpha \chi^\beta. \quad (6.3.164)$$

各正則 Killing ベクトル場には、対応して、次の条件で特徴付けられるモーメント写像 \mathcal{P}_A が一意的に存在する：

$$k_{A\alpha} = i\partial_\alpha \mathcal{P}_A, \quad k_{A\bar{\alpha}} = -i\partial_{\bar{\alpha}} \mathcal{P}_A, \quad (6.3.165a)$$

$$\mathcal{P}_A = i(k_A^\alpha \partial_\alpha K - r_A) = -i(k_A^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} K - \bar{r}_A). \quad (6.3.165b)$$

一方、ゲージセクターとの結合は G の随伴表現により決まり、特にゲージノー場は次のように変換する：

$$\delta \lambda^A = -\theta^C f^A_{CB} \lambda^B. \quad (6.3.166)$$

ラグランジアン

$$\begin{aligned}
|\theta|^{-1} \mathcal{L} &= \frac{1}{2\kappa^2} [R(e) - \bar{\psi}_\mu R^\mu] \\
&\quad - K_{\alpha\bar{\beta}} \left(\hat{\partial}_\mu z^\alpha \hat{\partial}^\mu \bar{z}^{\bar{\beta}} + \frac{1}{2} \bar{\chi}^\alpha \mathcal{D}^{(0)} \chi^{\bar{\beta}} + \frac{1}{2} \bar{\chi}^{\bar{\beta}} \mathcal{D}^{(0)} \chi^\alpha \right) - V \\
&\quad + (\text{Re } f_{AB}) \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{\mu\nu B} - \frac{1}{2} \bar{\lambda}^A \mathcal{D}^{(0)} \lambda^B \right] \\
&\quad + \frac{1}{4} \left[(\text{Im } f_{AB}) F_{\mu\nu}^A \tilde{F}^{\mu\nu B} + (\hat{\partial}_\mu \text{Im } f_{AB}) \bar{\lambda}^A \gamma_5 \gamma^\mu \lambda^B \right] \\
&\quad + \frac{1}{8} (\text{Re } f_{AB}) \bar{\psi}_\mu \gamma^{ab} (F_{ab}^A + \hat{F}_{ab}^A) \gamma^\mu \lambda^B + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[K_{\alpha\bar{\beta}} \bar{\psi}_\mu \hat{\rho}^{\bar{\beta}} \gamma^\mu \chi^\alpha + \text{h.c.} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[f_{AB,\alpha} \bar{\lambda}^A \gamma^{ab} \hat{F}_{ab}^B \chi^\alpha + \text{h.c.} \right] + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{\text{mix}} + \mathcal{L}_{4f}. \quad (6.3.167)
\end{aligned}$$

ここで,

$$R^\mu = \gamma^{\mu\rho\sigma} \left(\partial_\rho + \frac{1}{4} \omega_\rho^{ab}(e) \gamma_{ab} - \frac{3}{2} i \mathcal{B}_\rho \gamma_5 \right) \psi_\rho, \quad (6.3.168a)$$

$$\hat{\partial}_\mu z^\alpha = \partial_\mu z^\alpha - A_\mu^A k_A^\alpha, \quad (6.3.168b)$$

$$D^{(0)} \chi^\alpha = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu^{ab}(e) \gamma_{ab} + \frac{3}{2} i \mathcal{B}_\mu \right) \chi^\alpha - A_\mu^A \partial_\beta k_A^\alpha(z) \chi^\beta + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \chi^\gamma \hat{\partial}_\mu z^\beta. \quad (6.3.168c)$$

Kähler 接続係数 $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ とカイラル接続係数 \mathcal{B}_μ は,

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = K^{\alpha\bar{\delta}} \partial_\beta K_{\gamma\bar{\delta}}, \quad (6.3.169a)$$

$$\mathcal{B}_\mu = \frac{i}{6} \kappa^2 (\partial_\mu z^\alpha \partial_\alpha \mathcal{K} - \partial_\mu \bar{z}^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} \mathcal{K}) - \frac{\kappa^2}{3} A_\mu^A \mathcal{P}_A. \quad (6.3.169b)$$

ゲージノの共変微分は

$$D_\mu^{(0)} \lambda^A = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu^{ab}(e) \gamma_{ab} - \frac{3}{2} i \mathcal{B}_\mu \gamma_5 \right) \lambda^A - A_\mu^C \lambda^B f^A_{BC}. \quad (6.3.170)$$

超共形ゲージ曲率 \hat{F}_{ab} は

$$\hat{F}_{ab}^A = e_a^\mu e_b^\nu (2\partial_{[\mu} A_{\nu]}^A + f_{BC}^A A_\mu^B A_\nu^C + \bar{\psi}_{[\mu} \gamma_{\nu]} \lambda^A). \quad (6.3.171)$$

次に, 質量項は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_m &= \frac{1}{2} m_{3/2} \bar{\psi}_\mu P_R \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu \\
&\quad - \frac{1}{2} m_{\alpha\beta} \bar{\chi}^\alpha \chi^\beta - m_{\alpha A} \bar{\chi}^\alpha \lambda^A - \frac{1}{2} m_{AB} \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B + \text{h.c.} \quad (6.3.172)
\end{aligned}$$

ここで,

$$m_{3/2} = \kappa^2 e^{\kappa^2 \mathcal{K}/2} W, \quad (6.3.173a)$$

$$m_{\alpha\beta} = e^{\kappa^2 \mathcal{K}/2} \nabla_\alpha \nabla_\beta W, \quad (6.3.173b)$$

$$m_{\alpha A} = i\sqrt{2} \left[\partial_\alpha \mathcal{P}_A - \frac{1}{4} f_{AB,\alpha} [(\text{Re } f)^{-1}]^{BC} \mathcal{P}_C \right] = m_{\alpha A} \quad (6.3.173c)$$

$$m_{AB} = -\frac{1}{2} e^{\kappa^2 \mathcal{K}/2} f_{AB,\alpha} K^{\alpha\bar{\beta}} \nabla_\beta \bar{W}. \quad (6.3.173d)$$

グラヴィティーノとカイラルフェルミオンの混合項は

$$\mathcal{L}_{\text{mix}} = \bar{\psi} \cdot \gamma \left[\frac{i}{2} P_L \lambda^A \mathcal{P}_A + \frac{1}{\sqrt{2}} \chi^\alpha e^{\kappa^2 \mathcal{K}/2} \nabla_\alpha W \right] + \text{h.c.} \quad (6.3.174)$$

最後に, 4体フェルミ項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4f} = & \frac{1}{2\kappa^2} \mathcal{L}_{\text{SG,torsion}} \\ & + \left\{ -\frac{1}{4\sqrt{2}} f_{AB,\alpha} \bar{\psi} \cdot \gamma \chi^\alpha \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B + \frac{1}{8} (\nabla_\alpha f_{AB,\beta}) \bar{\chi}^\alpha \chi^\beta \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B + \text{h.c.} \right\} \\ & + \frac{i}{16} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_\nu \psi_\rho \left(\frac{1}{2} (\text{Re } f_{AB}) \bar{\lambda}^A \gamma_5 \gamma_\sigma \lambda^B + K_{\alpha\bar{\beta}} \bar{\chi}^{\bar{\beta}} \gamma_\sigma \chi^\alpha \right) - \frac{1}{2} K_{\alpha\bar{\beta}} \bar{\psi}_\mu \chi^{\bar{\beta}} \bar{\psi}^\mu \chi^\alpha \\ & + \frac{1}{4} \left(R_{\alpha\bar{\gamma}\beta\bar{\delta}} - \frac{1}{2} \kappa^2 K_{\alpha\bar{\gamma}} K_{\beta\bar{\delta}} \right) \bar{\chi}^\alpha \chi^\beta \bar{\chi}^{\bar{\gamma}} \chi^{\bar{\delta}} \\ & + \frac{3}{64} \kappa^2 [(\text{Re } f_{AB}) \bar{\lambda}^A \gamma_\mu \gamma_5 \lambda^B]^2 - \frac{1}{16} f_{AB,\alpha} \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B K^{\alpha\bar{\beta}} \bar{f}_{CD,\bar{\beta}} \bar{\lambda}^C P_R \lambda^D \\ & + \frac{1}{16} [(\text{Re } f)^{-1}]^{AB} (f_{AC,\alpha} \bar{\chi}^\alpha - \bar{f}_{AC,\bar{\alpha}} \bar{\chi}^{\bar{\alpha}}) \lambda^C (f_{BD,\beta} \bar{\chi}^\beta - \bar{f}_{BD,\bar{\beta}} \bar{\chi}^{\bar{\beta}}) \lambda^D \\ & - \frac{1}{4} \kappa^2 K_{\alpha\bar{\beta}} (\text{Re } f_{AB}) \bar{\chi}^\alpha \lambda^A \bar{\chi}^{\bar{\beta}} \lambda^B. \end{aligned} \quad (6.3.175)$$

残留ゲージ変換 局所ローレンツ変換と一般座標変換を除く残留ゲージ変換のうち，内部ゲージ変換と局所超対称変換に対する変換則は，

$$\delta\theta_\mu^A = \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma^a\psi_\mu, \quad (6.3.176a)$$

$$\begin{aligned} \delta P_L\psi_\mu &= \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_\mu^{ab}(e)\gamma_{ab} - \frac{3}{2}i\mathcal{B}_\mu \right) P_L\epsilon + \frac{\kappa^2}{2}\gamma_\mu e^{\kappa^2\mathcal{K}/2}W P_R\epsilon \\ &+ \frac{\kappa^2}{4}P_L\psi_\mu\theta^A(\bar{r}_A - r_A) + \text{cubic in fermions}, \end{aligned} \quad (6.3.176b)$$

$$\delta z^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\epsilon}\chi^\alpha + \theta^A k_A^\alpha, \quad (6.3.176c)$$

$$\begin{aligned} \delta\chi^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}P_L \left(\hat{\partial}z^\alpha - e^{\kappa^2\mathcal{K}/2}K^{\alpha\bar{\beta}}\nabla_{\bar{\beta}}\bar{W} \right) \epsilon \\ &+ \theta^A \left[\partial_{\bar{\beta}}k_A^\alpha\chi^\beta + \frac{1}{4}\kappa^2(r_A - \bar{r}_A)\chi^\alpha \right] + \text{cubic in fermions}, \end{aligned} \quad (6.3.176d)$$

$$\delta A_\mu^A = -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda^A + \partial_\mu\theta^A + \theta^C A_\mu^B f^A{}_{BC}, \quad (6.3.176e)$$

$$\begin{aligned} \delta\lambda^A &= \left[\frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^A + \frac{i}{2}\gamma_5[(\text{Re } f)^{-1}]^{AB}\mathcal{P}_B \right] \epsilon \\ &+ \theta^B \left[\lambda^C f^A{}_{CB} + \frac{\kappa^2}{4}\gamma_5(\bar{r}_B - r_B)\lambda^A \right] + \text{cubic in fermions}. \end{aligned} \quad (6.3.176f)$$

6.3.7 Dirac の量子化条件

ゲージ場 A とスピノール場 ψ の結合を

$$D\psi = (d - iqA)\psi. \quad (6.3.177)$$

ゲージ変換を

$$\psi \rightarrow e^{iq\theta}\psi, \quad A \rightarrow A + d\theta \quad (6.3.178)$$

とする。

いま、2次元球面 S^2 上の赤道に対応する円を C 、 C の北半球を H^N 、南半球を H^S 、それぞれにおけるゲージポテンシャルを A^N, A^S とするとき、 $A^N - A^S = d\theta$ で、 $e^{q\theta}$ は C 上の一価関数となることより、

$$\begin{aligned} \exp\left(iq \int_{S^2} F\right) &= \exp\left\{iq \left(\int_{H^N} F + \int_{H^S} F\right)\right\} \\ &= \exp\left[iq \int_C (A^N - A^S)\right] = \exp\left(iq \int_C d\theta\right) \end{aligned} \quad (6.3.179)$$

よって、フラックスに対する次の量子化条件が得られる：

$$q \int_{S^2} F = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (6.3.180)$$

単体分割を利用することにより、この条件は、球面だけでなく任意の閉曲面に対して成り立つことが示される：

$$q \int_{\Sigma^2} F = 2\pi n. \quad (6.3.181)$$

6.3.8 Kähler-Hodge 条件

$\mathcal{N} = 1, D = 4$ の大域的超対称理論では、スカラ多様体として任意の Kähler 多様体を用いることができる。しかし、超重力理論におけるスカラ多様体は、以下の理由で、Kähler-Hodge 多様体という Kähler 多様体の部分クラスに限定される。

まず、超重力理論では、 P^a, M^{ab}, Q 以外の超共形ゲージ自由度をゲージ固定すると、Kähler 変換 $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} + f(z) + \overline{f(\bar{z})}$ は、カイラル $U(1)$ ゲージ変換を伴うようになる。このため、最終的な理論での基本場のうち、 $\psi, \chi^\alpha, \lambda^A$ がケラー変換に伴い次のように変換する：

$$\delta\psi = -i\frac{\kappa^2}{2}\text{Im}(f)\gamma_*\psi, \quad (6.3.182a)$$

$$\delta\chi^\alpha = i\frac{\kappa^2}{2}\text{Im}(f)\chi^\alpha, \quad (6.3.182b)$$

$$\delta\lambda^A = i\frac{\kappa^2}{2}\text{Im}(f)\gamma_*\lambda^A. \quad (6.3.182c)$$

対応して、複合ゲージ場

$$\mathcal{A} = \frac{i}{6}\kappa^2(dz^\alpha\partial_\alpha\mathcal{K} - d\bar{z}^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}}\mathcal{K}) \quad (6.3.183)$$

がこのゲージ変換を打ち消すためにこれらの場に次のように結合する：

$$D\psi = \left(d - \frac{3}{2}i\mathcal{A}\gamma_* + \dots\right)\psi + \dots. \quad (6.3.184)$$

(他の場への作用も全く同じ)。よって、 \mathcal{A} は次の Dirac 量子化条件の制限を受ける：

$$\frac{3}{2}\int_{\Sigma_2} d\mathcal{A} = -\frac{\kappa^2}{2}\int_{\Sigma_2} \omega = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (6.3.185)$$

ここで、 ω は Kähler 形式

$$\omega = ig_{\alpha\bar{\beta}}dz^\alpha \wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}} = i\partial_\alpha\partial_{\bar{\beta}}\mathcal{K}dz^\alpha \wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}} \quad (6.3.186)$$

である。これより、 $(\mathcal{M}_s, (\kappa^2/(4\pi))g, J)$ は Kähler-Hodge 多様体となる。

6.4 4次元 $N = 1$ 超重力理論—超空間アプローチ

6.4.1 超場

$N = 1$ 超代数

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m P_m, \quad \{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (6.4.1)$$

の場への表現を考える.

以下, 次の Wess-Berger 記法に従う:

$$\epsilon^{12} = 1, \quad \epsilon_{12} = -1, \quad (6.4.2a)$$

$$\chi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \chi^\beta, \quad \chi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \chi_\beta, \quad (6.4.2b)$$

$$\psi\chi = \psi^\alpha \chi_\alpha, \quad \bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}. \quad (6.4.2c)$$

6.4.1.1 超空間の変換

超空間 $z = (x^m, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ において,

$$\partial_m = \frac{\partial}{\partial x^m}, \quad \delta_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}, \quad \bar{\delta}_{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \quad (6.4.3)$$

を用いて

$$Q_\alpha = \delta_\alpha - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m, \quad (6.4.4a)$$

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\delta}_{\dot{\alpha}} + i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m, \quad (6.4.4b)$$

とおくと,

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m \partial_m, \quad \{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0. \quad (6.4.5)$$

また,

$$D_\alpha = \delta_\alpha + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m, \quad (6.4.6a)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\delta}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m, \quad (6.4.6b)$$

とおくと,

$$\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = -2i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m \partial_m, \quad \{D_\alpha, D_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0, \quad (6.4.7)$$

かつ

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = \{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0. \quad (6.4.8)$$

$\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}$ および $\xi D + \bar{\xi}\bar{D}$ は, それぞれ超群

$$G(x, \theta, \bar{\theta}) = \exp [i(-x^m P_m + \theta Q + \bar{\theta}\bar{Q})] \quad (6.4.9)$$

における左変換と右変換にあたる.

6.4.1.2 超場の変換

超場

$$\begin{aligned} F(x, \theta, \bar{\theta}) = & f(x) + \theta\Phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) \\ & + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta} n(x) + \theta\sigma^m\bar{\theta} v_m(x) \\ & + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\psi(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\theta)d(x) \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

に対して

$$\begin{aligned} \delta F = & (\xi\mathcal{Q} + \bar{\xi}\bar{\mathcal{Q}})\Phi \\ = & \delta f(x) + \theta\delta\Phi(x) + \bar{\theta}\delta\bar{\chi}(x) \\ & + \theta\theta\delta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\delta n(x) + \theta\sigma^m\bar{\theta}\delta v_m(x) \\ & + (\theta\theta)\bar{\theta}\delta\bar{\lambda}(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\delta\psi(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\theta)\delta d(x). \end{aligned} \quad (6.4.11)$$

6.4.1.3 Chiral 超場

条件

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \quad (6.4.12)$$

は

$$\Phi = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y); \quad (6.4.13)$$

$$y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta} \quad (6.4.14)$$

と同等. このとき,

$$\delta F(x) = i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\partial_m\psi. \quad (6.4.15)$$

6.4.1.4 ベクトル超場

条件

$$V = V^\dagger \quad (6.4.16)$$

は, V が実場 $C(x), M(x), N(x), D(x), v_m(x), \chi(x), \lambda(x)$ を用いて

$$\begin{aligned} V = & C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x) \\ & + \frac{i}{2}\theta\theta(M(x) + iN(x)) - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}(M(x) - iN(x)) - \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) \\ & + i(\theta\theta)\bar{\theta}\left(\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi(x)\right) - i(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\left(\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar{\chi}(x)\right) \\ & + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\theta)\left(D(x) + \frac{1}{2}\square C(x)\right) \end{aligned} \quad (6.4.17)$$

と表される. このとき,

$$\delta D(x) = \bar{\xi}\bar{\sigma}^m\partial_m\lambda - \xi\sigma^m\partial_m\bar{\lambda}. \quad (6.4.18)$$

6.4.1.5 可換ゲージ超場

カイラル超場 Φ を用いて, ベクトル超場 V のゲージ変換を

$$V \rightarrow V + \Phi + \Phi^\dagger \quad (6.4.19)$$

により定義すると,

$$C \rightarrow C + A + A^*, \quad (6.4.20a)$$

$$\chi \rightarrow \chi - i\sqrt{2}\psi, \quad (6.4.20b)$$

$$M + iN \rightarrow M + iN - 2iF, \quad (6.4.20c)$$

$$v_m \rightarrow v_m - i\partial_m(A - A^*), \quad (6.4.20d)$$

$$\lambda \rightarrow \lambda, \quad (6.4.20e)$$

$$D \rightarrow D. \quad (6.4.20f)$$

これより, ゲージ条件

$$C = M = N = \chi = 0 \quad (6.4.21)$$

を課すことは常に可能で, このゲージでは

$$V = -\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) \quad (6.4.22)$$

一般に、

$$W_\alpha := -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V, \quad \bar{W}_{\dot{\alpha}} := -\frac{1}{4}DD\bar{D}_{\dot{\alpha}}V \quad (6.4.23)$$

はゲージ不変なカイラル超場となり、次の関係式を満たす：

$$\bar{D}_{\dot{\beta}}W_\alpha = 0, \quad D_\beta\bar{W}_{\dot{\alpha}} = 0, \quad D^\alpha W_\alpha = \bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}. \quad (6.4.24)$$

成分場で表すと、

$$W_\alpha = -i\lambda_\alpha(y) + \left[\delta_\alpha^\beta D(y) - \frac{i}{2}(\sigma^m\bar{\sigma}^n)_\alpha{}^\beta v_{mn}(y) \right] \theta_\beta + \theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\partial_m\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(y), \quad (6.4.25a)$$

$$\bar{W}^{\dot{\alpha}} = i\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(y^+) + \left[\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} D(y^+) + \frac{i}{2}(\bar{\sigma}^m\sigma^n)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} v_{mn}(y^+) \right] \bar{\theta}_{\dot{\beta}} - \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha}\partial_m\bar{\lambda}_\alpha(y^+). \quad (6.4.25b)$$

ここで、

$$y = x + i\theta\sigma\bar{\theta}, \quad y^+ = x - i\theta\sigma\bar{\theta}, \quad (6.4.26)$$

$$v_{mn}(x) = \partial_m v_n(x) - \partial_n v_m(x). \quad (6.4.27)$$

6.4.1.6 非可換ゲージ超場

ゲージ群の Lie 代数 \mathfrak{g} (基底 $\{T_a\}$) に値を取るベクトル超場を

$$V = T^a V_a \quad (6.4.28)$$

として、そのゲージ変換を、 \mathfrak{g} に値をとるカイラル超場

$$\Lambda = T^a \Lambda_a \quad (6.4.29)$$

を用いて、

$$V \rightarrow V'; \quad e^{V'} = e^{-i\Lambda^\dagger} e^V e^{i\Lambda} \quad (6.4.30)$$

により定義する。このとき、 \mathfrak{g} に値を取るカイラルな超場

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}e^{-V}D_\alpha e^V \quad (6.4.31)$$

はゲージ変換に対して、

$$W_\alpha \rightarrow W'_\alpha = e^{-i\Lambda} W_\alpha e^{i\Lambda} \quad (6.4.32)$$

と変換し、場の強度を表す超場となる。

6.4.2 超対称作用積分

6.4.2.1 Chiral 超組

Chiral な超場の組 Φ_i に対して、

$$\mathcal{L} = \Phi_i^\dagger \Phi_i \Big|_D + (\mathcal{W}(\Phi)|_F + \text{h.c.}). \quad (6.4.33)$$

ここで、第1項は成分場で表すと

$$\begin{aligned} \Phi^\dagger \Phi|_D &= \frac{1}{4} (A^* \square A + \square A^* A) - \frac{1}{2} \partial A^* \cdot \partial A \\ &\quad - \frac{i}{2} \bar{\psi} \bar{\sigma} \cdot \overleftrightarrow{\partial} \psi + F^* F \\ &\cong A^* \square A - i \bar{\psi} \bar{\sigma} \cdot \partial \psi + F^* F. \end{aligned} \quad (6.4.34)$$

また、第2項は

$$\mathcal{W}(\Phi) = \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k + \lambda_i \Phi_i \quad (6.4.35)$$

に対して、

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\Phi)|_F &= m_{ij} \left(A_i F_j - \frac{1}{2} \psi_i \psi_j \right) \\ &\quad + g_{ijk} (A_i A_j F_k - \psi_i \psi_j A_k) + \lambda_i F_i. \end{aligned} \quad (6.4.36)$$

よって、 F_i を消去すると、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_k} = F_k^* + \lambda_k + m_{ik} A_i + g_{ijk} A_i A_j = 0 \quad (6.4.37)$$

より、

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -i \bar{\psi}_i \bar{\sigma} \cdot \partial \psi_i + A_i^* \square A_i - \frac{1}{2} (m_{ij} \psi_i \psi_j + m_{ij}^* \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j) \\ &\quad - g_{ijk} \psi_i \psi_j A_k - g_{ijk}^* \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j A_k^* - \mathcal{V}(A, A^*). \end{aligned} \quad (6.4.38)$$

ただし、

$$\mathcal{V} = F_k^* F_k; \quad F_k^* = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \Phi_k}. \quad (6.4.39)$$

ここで、 $\psi_i \psi_j = \epsilon_{\alpha\beta} \psi_i^\alpha \psi_j^\beta$ が i, j の入れ替えについて対称となることに注意。

6.4.2.2 一般カイラル相互作用

カイラル超場のみを含む最も一般的な Lagrangian は Kähler ポテンシャル $K(\Phi, \Phi^\dagger)$ と超ポテンシャル $P(\Phi)$ を用いて

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} K(\Phi, \Phi^\dagger) + \int d^2\theta P(\Phi) + \text{h.c.} \quad (6.4.40)$$

と表される. K に対応する Kähler 計量を

$$g_{ij^*} = \frac{\partial}{\partial A^i} \frac{\partial}{\partial A^{*j}} K|_0 \quad (6.4.41)$$

とおくと, ラグランジアンは成分場を用いて次のように表される:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -g_{ij^*} \partial_m A^i \partial^m A^{*j} - i g_{ij^*} \bar{\chi}^j \bar{\sigma}^m D_m \chi^i + \frac{1}{4} R_{ij^*kl^*} \chi^i \chi^k \bar{\chi}^j \bar{\chi}^l \\ & - \frac{1}{2} D_i D_j P \chi^i \chi^j - \frac{1}{2} D_{i^*} D_{j^*} P^* \bar{\chi}^i \bar{\chi}^j - g^{ij^*} D_i P D_{j^*} P^*. \end{aligned} \quad (6.4.42)$$

6.4.2.3 ゲージ超組

ゲージ超場 V に対応する場の強度を表すカイラル超場を W_α として、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16kg^2} (W^\alpha W_\alpha|_F + \text{h.c.}). \quad (6.4.43)$$

ただし, ゲージ群の Lie 代数の基底 $\{T_a\}$ を

$$\text{Tr}(T_a T_b) = k\delta^{ab} \Rightarrow [T^a, T^b] = it^{[abc]} T^c \quad (6.4.44)$$

と規格化するものとする. このとき, rescale $V \rightarrow 2gV$ により, 成分場を用いて

$$\mathcal{L} \cong -\frac{1}{4} v^{(a)mn} v_{mn}^{(a)} - i \bar{\lambda}^{(a)} \bar{\sigma} \cdot \mathcal{D} \lambda^{(a)} + \frac{1}{2} D^{(a)} D^{(a)}. \quad (6.4.45)$$

ここで,

$$v_{mn}^{(a)} = \partial_m v_n^{(a)} - \partial_n v_m^{(a)} - gt^{abc} v_m^{(b)} v_n^{(c)}, \quad (6.4.46a)$$

$$\mathcal{D}_m \lambda^{(a)} = \partial_m \lambda^{(a)} - gt^{abc} v_m^{(b)} \lambda^{(c)}. \quad (6.4.46b)$$

6.4.2.4 ゲージ相互作用

ゲージ群 G に対応するゲージ超場を V , G の線形表現空間に値を取るカイラル超場を Φ , その超ポテンシャルを $\mathcal{W}(\Phi)$ とするとき,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16kg^2} (W^\alpha W_\alpha|_F + \text{h.c.}) + \Phi^\dagger e^V \Phi|_D + \mathcal{W}(\Phi)|_F + \text{h.c.} \quad (6.4.47)$$

ここで, \mathcal{W} は G 不変性

$$\mathcal{W}(U\Phi) = \mathcal{W}(\Phi) \quad \forall U \in g \quad (6.4.48)$$

を持つものとする. このとき, Λ を G の Lie 代数に値を取る任意のカイラル超場として, ゲージ変換

$$\Phi' = e^{-i\Lambda}\Phi, \quad e^{V'} = e^{-i\Lambda^\dagger} e^V e^{i\Lambda} \quad (6.4.49)$$

に対して, \mathcal{L} は不変となる.

成分場で表し, F 項を消去すると,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -i\bar{\lambda}^{(a)}\bar{\sigma} \cdot \mathcal{D}\lambda^{(a)} - \frac{1}{4}v^{(a)mn}v_{mn}^{(a)} + \frac{1}{2}D^{(a)}D^{(a)} \\ & -i\bar{\psi}\bar{\sigma} \cdot \mathcal{D}\psi - \mathcal{D}A^\dagger \cdot \mathcal{D}A - \mathcal{V}(A) \\ & + i\sqrt{2}g (A^\dagger T^{(a)}\psi\lambda^{(a)} - \text{h.c.}) + gD^{(a)}A^\dagger T^{(a)}A. \end{aligned} \quad (6.4.50)$$

ここで,

$$\mathcal{V} = F_k^* F_k; \quad F_k^* = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \Phi_k}. \quad (6.4.51)$$

超対称変換は

$$\delta A = \sqrt{2}\xi\psi, \quad (6.4.52a)$$

$$\delta\psi = i\sqrt{2}\sigma^m\bar{\xi}\mathcal{D}_m A + \sqrt{2}\xi F, \quad (6.4.52b)$$

$$\delta F = i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\mathcal{D}_m A + 2igT^{(a)}A\bar{\xi}\bar{\lambda}^{(a)}, \quad (6.4.52c)$$

$$\delta v_m^{(a)} = -i\bar{\lambda}^{(a)}\bar{\sigma}^m\xi + i\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\lambda^{(a)}, \quad (6.4.52d)$$

$$\delta\lambda = \sigma^{mn}\xi v_{mn} + i\xi D, \quad (6.4.52e)$$

$$\delta D^{(a)} = -\xi\sigma^m\mathcal{D}_m\bar{\lambda}^{(a)} - \mathcal{D}_m\lambda^{(a)}\sigma^m\bar{\xi}. \quad (6.4.52f)$$

6.4.3 曲がった超空間

6.4.3.1 超空間

局所座標系

$$\mathcal{M} \ni (z^M) = (x^m, \theta^\mu, \bar{\theta}_{\dot{\mu}}). \quad (6.4.53)$$

ここで,

$$z^M z^N = (-1)^{\hat{M}\hat{N}} z^N z^M \quad (\hat{m} = 0, \hat{\mu} = 1), \quad (6.4.54a)$$

$$\partial_M z^N = \delta_M^N + (-1)^{\hat{M}\hat{N}} z^N \partial_M. \quad (6.4.54b)$$

超ベクトル場

$$V = V^M \partial_M \in \mathcal{T}_z \mathcal{M}. \quad (6.4.55)$$

超微分形式 p 次超微分形式 $\omega \in \mathcal{A}^p(\mathcal{M})$ およびその外微分を次のように定義する :

$$\omega = \frac{(-1)^{p(p-1)/2}}{p!} dz^{M_p} \wedge \cdots \wedge dz^{M_1} \omega_{M_1 \cdots M_p}, \quad (6.4.56)$$

$$z^M dz^N = (-1)^{\hat{M}\hat{N}} dz^N z^M, \quad dz^M \wedge dz^N = -(-1)^{\hat{M}\hat{N}} dz^N \wedge dz^M, \quad (6.4.57)$$

$$d\omega := dz^M \wedge \partial_M \omega; \quad (d\omega)_{M_1 \cdots M_{p+1}} = (p+1) \partial_{[M_1} \omega_{M_2 \cdots M_{p+1}]}, \quad (6.4.58)$$

$$d(\omega_p \wedge \chi_q) = d\omega_p \wedge \chi_q + (-1)^p \omega_p \wedge d\chi_q. \quad (6.4.59)$$

超フレーム場 超接空間 $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ および超余接空間 $\mathcal{T}^*(\mathcal{M})$ の基底場を

$$E^A = dz^M E_M^A(z), \quad E_A = E_A^M(z) \partial_M, \quad (6.4.60)$$

$$E_M^A E_A^N = \delta_M^N, \quad E_A^M E_M^B = \delta_A^B. \quad (6.4.61)$$

により導入する. ただし, フレーム添え字 $A = (a, \alpha, \dot{\alpha}), B = (b, \beta, \dot{\beta}), \dots$ の上げ下げは, a, b, \dots は η_{ab} で, $\alpha, \beta, \dots (\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dots)$ は $\epsilon^{\alpha\beta}, \epsilon_{\alpha\beta} (\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}})$ で左からの作用で行う :

$$\epsilon_{12} = -1, \quad \epsilon^{12} = 1, \quad (6.4.62)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma. \quad (6.4.63)$$

6.4.3.2 アフィン接続

超接続形式 各超フレーム場 E^A に対して、超接続形式 ϕ_A^B を対応させる：

$$E^A \rightarrow \phi_A^B = dz^M \phi_{MA}^B; \quad \phi_{AB} = -(-1)^{\hat{A}\hat{B}} \phi_{BA}. \quad (6.4.64)$$

超フレーム場の局所回転

$$\delta_L E^A = E^B L_B^A(z) \quad (6.4.65)$$

に対して、超接続形式は

$$\delta_L \phi_M = [\phi_M, L] + dL \quad (6.4.66)$$

と変換する。ただし、 L_A^B は次の3種類の成分

$$L_a^b, \quad L_\alpha^\beta, \quad L_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \quad (6.4.67)$$

以外はゼロとする。さらに、これらは、 $sl(2, \mathbb{C})$ に属する L_α^β ($L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha}$) により完全に決まる：

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a \sigma_{\beta\dot{\beta}}^b L_{ab} = -2\epsilon_{\alpha\beta} L_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + 2\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} L_{\alpha\beta}. \quad (6.4.68)$$

対応して、 ϕ_A^B も

$$\phi_a^b, \quad \phi_\alpha^\beta, \quad \phi_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \quad (6.4.69)$$

以外の成分はゼロとなり、次の関係式が成り立つ：

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a \sigma_{\beta\dot{\beta}}^b \phi_{ab} = -2\epsilon_{\alpha\beta} \phi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + 2\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \phi_{\alpha\beta}. \quad (6.4.70)$$

超共変微分 超1形式 ω に対して

$$\mathcal{D}_M \omega = (-1)^{\hat{M}\hat{A}} E^A \mathcal{D}_M \omega_A; \quad (6.4.71)$$

$$\mathcal{D}_M \omega_A = \partial_M \omega_A + \phi_{MA}^B \omega_B \quad (6.4.72)$$

と定義すると、超コフレーム場の共変微分は

$$\mathcal{D}_M E^A = (-1)^{\hat{M}\hat{B}} E^B \phi_{MB}^A \quad (6.4.73)$$

となり、コフレームの無限小変換 δ_L に対して

$$\delta_L(\mathcal{D}_M E^A) = (\mathcal{D}_M E^B) L_B^A. \quad (6.4.74)$$

また，超ベクトル場 $V = V^A E_A$ に対して

$$\mathcal{D}_M V = (\mathcal{D}_M V^A) E_A; \quad (6.4.75)$$

$$\mathcal{D}_M V^A = \partial_M V^A - (-1)^{\hat{M}\hat{B}} V^B \phi_{MB}^A. \quad (6.4.76)$$

超フレーム場の共変微分は

$$\mathcal{D}_M E_A = -\phi_{MA}^B E_B \quad (6.4.77)$$

超共変外微分 超テンソルに値を取る p -形式 $\mathcal{X}^{A\dots}$ の共変外微分 $\mathcal{D}\mathcal{X}^{A\dots}$ (超テンソルに値を取る $(p+1)$ -形式が³，任意の超テンソル $\omega_{A\dots}$ に対して

$$\mathcal{D}\omega_{A\dots} = dz^M \mathcal{D}_M \omega_{A\dots}, \quad (6.4.78a)$$

$$d(\omega_{A\dots} \mathcal{X}^{A\dots}) = (\mathcal{D}\omega_{A\dots}) \wedge \mathcal{X}^{A\dots} + \omega_{A\dots} \mathcal{D}\mathcal{X}^{A\dots} \quad (6.4.78b)$$

が成り立つという要請に一意的に定まり，

$$\mathcal{D}\mathcal{X}^A = d\mathcal{X}^A + (-1)^{p+1} \mathcal{X}^B \wedge \phi_B^A, \quad (6.4.79a)$$

$$\mathcal{D}\mathcal{Y}^{AB} = d\mathcal{Y}^{AB} + (-1)^{p+1} \left((-1)^{\hat{B}(\hat{C}+\hat{A})} \mathcal{Y}^{CB} \wedge \phi_C^A + \mathcal{Y}^{AC} \wedge \phi_C^B \right). \quad (6.4.79b)$$

超捩れ形式と超曲率形式 超捩れ形式 \mathcal{T}^A と超曲率形式 \mathcal{R}_A^B を

$$\mathcal{T}^A = \mathcal{D}E^A \equiv dE^A + E^B \wedge \phi_B^A, \quad (6.4.80a)$$

$$\mathcal{R}_A^B = d\phi_A^B + \phi_A^C \wedge \phi_C^B \quad (6.4.80b)$$

により定義する．成分で書くと，

$$\mathcal{T}_{MN}^A = 2\partial_{[M} E_{N]}^A - 2\phi_{[MN]}^A, \quad (6.4.81a)$$

$$\mathcal{R}_{MNA}^B = 2\partial_{[M} \phi_{N]A}^B - 2(-1)^{\hat{M}(\hat{N}+\hat{A}+\hat{C})} \phi_{[N|A]}^C \phi_{M]C}^B \quad (6.4.81b)$$

また，次の関係式が成り立つ：

$$[\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B] \Phi = -2\mathcal{T}_{AB}^C \mathcal{D}_C \Phi, \quad (6.4.82a)$$

$$2[\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B] V_C = \mathcal{R}_{ABC}^D V_D - \mathcal{T}_{AB}^D \mathcal{D}_D V_C. \quad (6.4.82b)$$

これらに対して次の Bianchi 恒等式が成り立つ：

$$\mathcal{D}\mathcal{T}^A \equiv d\mathcal{T}^A - \mathcal{T}^B \wedge \phi_B^A = -E^B \wedge \mathcal{R}_B^A, \quad (6.4.83a)$$

$$\mathcal{D}\mathcal{R}_A^B = 0. \quad (6.4.83b)$$

また, $\mathcal{R}_{MNA}{}^B$ の成分は関係式

$$R_{NMab} = -R_{NMba}, \quad (6.4.84a)$$

$$R_{NM\alpha\beta} = R_{NM\beta\alpha}, \quad (6.4.84b)$$

$$R_{NM\dot{\alpha}\dot{\beta}} = R_{NM\dot{\beta}\dot{\alpha}}, \quad (6.4.84c)$$

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^a \sigma_{\beta\dot{\beta}}{}^b R_{NMab} = -2\epsilon_{\alpha\beta} R_{NM\dot{\alpha}\dot{\beta}} + 2\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} R_{NM\alpha\beta} \quad (6.4.84d)$$

を満たし, これ以外の成分はゼロとなる.

6.4.3.3 超 Riemann 接続

平坦な場合: 平坦な超空間では, ∂_m により生成される通常の4次元の並進対称性と超対称変換 $Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ により生成される奇次元への並進があり, $\{\partial_m, D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\}$ がこれらの変換で不変な超ベクトル場の基底となる. したがって, 標準基底として最も自然なものは

$$E_a = \delta_a^m \partial_m, \quad (6.4.85a)$$

$$E_\alpha = D_\alpha = \partial_\alpha + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m, \quad (6.4.85b)$$

$$E_{\dot{\alpha}} = \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m. \quad (6.4.85c)$$

対応する双対基底は

$$E^a = dx^a - id\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \quad (6.4.86a)$$

$$E^\alpha = d\theta^\alpha, \quad E^{\dot{\alpha}} = d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}. \quad (6.4.86b)$$

これらが平行, したがって $\phi^A{}_B = 0$ とすると,

$$T^a = dE^a = 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a d\theta^\alpha \wedge d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \quad T^\alpha = T^{\dot{\alpha}} = 0. \quad (6.4.87)$$

よって,

$$T_{\alpha\dot{\alpha}}^a = 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a, \quad \text{他の成分} = 0. \quad (6.4.88)$$

超振れテンソルへの制限 超振れテンソルに対して, 次の成分以外はゼロであることを要求する:

$$T_{\alpha\dot{\beta}}{}^c = T_{\dot{\beta}\alpha}{}^c = 2i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^c, \quad (6.4.89a)$$

$$T_{ab}{}^{\gamma/\dot{\gamma}}, \quad T_{a\beta/\dot{\beta}}{}^{\gamma/\dot{\gamma}} \quad (6.4.89b)$$

このとき, \mathcal{F}^A と \mathcal{R}_A^B は条件

$$W_{\alpha\beta\gamma} = W_{(\alpha\beta\gamma)}, \quad (W_{\alpha\beta\gamma})^\dagger = \bar{W}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}}, \quad (6.4.90a)$$

$$(G_{\alpha\dot{\alpha}})^\dagger = G_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad (6.4.90b)$$

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\mathcal{R} = 0, \quad (6.4.90c)$$

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}W_{\beta\gamma\delta} = 0, \quad \mathcal{D}_{\alpha}\bar{W}_{\dot{\beta}\dot{\gamma}\dot{\delta}} = 0, \quad (6.4.90d)$$

$$\mathcal{D}^{\alpha}G_{\alpha\dot{\beta}} = \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}\mathcal{R}^\dagger, \quad \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\beta}}G_{\alpha\dot{\beta}} = \mathcal{D}_{\alpha}\mathcal{R}, \quad (6.4.90e)$$

$$\bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}}\bar{W}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}} + \frac{1}{2}i \left(\mathcal{D}_{\beta\dot{\beta}}G^{\beta\dot{\gamma}} + \mathcal{D}_{\beta\dot{\gamma}}G^{\beta\dot{\beta}} \right) = 0, \quad (6.4.90f)$$

$$\mathcal{D}^{\alpha}W_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2}i \left(\mathcal{D}_{\beta\dot{\beta}}G_{\gamma}^{\dot{\beta}} + \mathcal{D}_{\gamma\dot{\beta}}G_{\beta}^{\dot{\beta}} \right) = 0, \quad (6.4.90g)$$

を満たす超場 $\mathcal{R}, G_{\alpha\dot{\alpha}}, W_{\alpha\beta\gamma}$ により完全に決定される :

Torsion:

$$T_{\alpha\dot{\beta}}{}^c = T_{\dot{\beta}\alpha}{}^c = 2i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^c, \quad (6.4.91a)$$

$$T_{a\dot{\beta}}{}^{\gamma} = -T_{\dot{\beta}a}{}^{\gamma} = i\bar{\sigma}_{a\dot{\beta}}{}^{\gamma}\mathcal{R}, \quad (6.4.91b)$$

$$T_{a\dot{\beta}}{}^{\dot{\gamma}} = -T_{\dot{\beta}a}{}^{\dot{\gamma}} = i\bar{\sigma}_{a\dot{\beta}}{}^{\dot{\gamma}}\mathcal{R}^\dagger, \quad (6.4.91c)$$

$$T_{a\dot{\beta}}{}^{\gamma} = -T_{\dot{\beta}a}{}^{\gamma} = \frac{i}{8}\bar{\sigma}_a{}^{\dot{\epsilon}\epsilon} \left(-\delta_{\epsilon}^{\gamma}G_{\beta\dot{\epsilon}} + 3\delta_{\beta}^{\gamma}G_{\epsilon\dot{\epsilon}} - 3\epsilon_{\beta\epsilon}G^{\gamma\dot{\epsilon}} \right), \quad (6.4.91d)$$

$$T_{a\dot{\beta}}{}^{\dot{\gamma}} = -T_{\dot{\beta}a}{}^{\dot{\gamma}} = \frac{i}{8}\bar{\sigma}_a{}^{\dot{\epsilon}\epsilon} \left(-\delta_{\epsilon}^{\dot{\gamma}}G_{\beta\dot{\epsilon}} + 3\delta_{\beta}^{\dot{\gamma}}G_{\epsilon\dot{\epsilon}} - 3\epsilon_{\beta\dot{\epsilon}}G_{\epsilon}^{\dot{\gamma}} \right), \quad (6.4.91e)$$

$$T_{ab}{}^{\gamma} = -T_{ba}{}^{\gamma} = \frac{1}{8}\bar{\sigma}_a{}^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}_b{}^{\beta\dot{\beta}} \left[-4\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \left(\delta_{\alpha}^{\gamma}\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\delta}}G_{\beta}^{\dot{\delta}} + \delta_{\beta}^{\gamma}\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\delta}}G_{\alpha}^{\dot{\delta}} \right) + \epsilon_{\alpha\beta} \left(\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}G^{\gamma\dot{\beta}} + \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}G^{\gamma\dot{\alpha}} \right) \right], \quad (6.4.91f)$$

$$T_{ab}{}^{\dot{\gamma}} = -T_{ba}{}^{\dot{\gamma}} = \frac{1}{8}\bar{\sigma}_a{}^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}_b{}^{\beta\dot{\beta}} \left[-4\epsilon_{\alpha\beta}\bar{W}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{}^{\dot{\gamma}} + \epsilon_{\alpha\beta} \left(\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\gamma}}D_{\delta}G_{\beta}^{\delta} + \delta_{\beta}^{\dot{\gamma}}D_{\delta}G_{\dot{\alpha}}^{\delta} \right) + \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \left(\mathcal{D}_{\alpha}G_{\beta}^{\dot{\gamma}} + \mathcal{D}_{\beta}G_{\alpha}^{\dot{\gamma}} \right) \right]. \quad (6.4.91g)$$

Curvature:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -8\epsilon_{\alpha(\gamma}\epsilon_{\delta)\beta}\mathcal{R}^\dagger, \quad R_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}\dot{\delta}} = -8\epsilon_{\dot{\alpha}(\dot{\gamma}}\epsilon_{\dot{\delta})\dot{\beta}}\mathcal{R}, \quad (6.4.92a)$$

$$R_{\dot{\alpha}\beta\gamma\delta} = -2\epsilon_{\beta(\gamma}G_{\delta\dot{\alpha}}, \quad R_{\alpha\dot{\beta}\dot{\gamma}\dot{\delta}} = -2\epsilon_{\dot{\beta}(d\gamma}G_{\dot{\delta}\alpha}, \quad (6.4.92b)$$

$$R_{a\beta\gamma\delta} = -\frac{i}{2}\bar{\sigma}_a^{\alpha\dot{\alpha}} \left[-2\epsilon_{\beta(\gamma}\epsilon_{\delta)\alpha}\mathcal{D}_\phi G_{\dot{\alpha}}^\phi + \epsilon_{\beta(\alpha}\mathcal{D}_{\beta)}G_{\delta\dot{\alpha}} \right. \\ \left. + \epsilon_{\beta(\alpha}\mathcal{D}_{\delta)}G_{\gamma\dot{\alpha}} \right], \quad (6.4.92c)$$

$$R_{a\dot{\beta}\dot{\gamma}\dot{\delta}} = -\frac{i}{2}\bar{\sigma}_a^{\alpha\dot{\alpha}} \left[-2\epsilon_{\dot{\beta}(\dot{\gamma}}\epsilon_{\dot{\delta})\dot{\alpha}}\bar{\mathcal{D}}_\phi G_{\alpha}^\phi + \epsilon_{\dot{\beta}(\dot{\alpha}}\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta})}G_{\alpha\dot{\delta}} \right. \\ \left. + \epsilon_{\dot{\beta}(\dot{\alpha}}\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\delta})}G_{\alpha\dot{\gamma}} \right], \quad (6.4.92d)$$

$$R_{a\dot{\beta}\gamma\delta} = \frac{i}{2}\bar{\sigma}_a^{\alpha\dot{\alpha}} \left[4\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}W_{\alpha\gamma\delta} + \epsilon_{\alpha(\gamma}\bar{\mathcal{D}}_{|\dot{\beta}|}G_{\delta)\dot{\alpha}} \right], \quad (6.4.92e)$$

$$R_{a\alpha\dot{\beta}\dot{\gamma}\dot{\delta}} = \frac{i}{2}\bar{\sigma}_a^{\alpha\dot{\alpha}} \left[4\epsilon_{\beta\alpha}\bar{W}_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}\dot{\delta}} + \epsilon_{\dot{\alpha}(\dot{\gamma}}\mathcal{D}_{|\beta|}G_{|\alpha|\dot{\delta})} \right], \quad (6.4.92f)$$

$$R_{ab\gamma\delta} = \frac{1}{2}\bar{\sigma}_a^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}_b^{\beta\dot{\beta}} \left(\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}X_{\alpha\beta\gamma\delta} - \epsilon_{\alpha\beta}\Psi_{\gamma\delta\dot{\alpha}\dot{\beta}} \right), \quad (6.4.92g)$$

$$R_{ab\dot{\gamma}\dot{\delta}} = \frac{1}{2}\bar{\sigma}_a^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}_b^{\beta\dot{\beta}} \left(-\epsilon_{\alpha\beta}\bar{X}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}\dot{\delta}} + \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\Psi_{\alpha\beta\dot{\gamma}\dot{\delta}} \right), \quad (6.4.92h)$$

$$X_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\mathcal{D}_{(\alpha}W_{\beta\gamma\delta)} - \epsilon_{\alpha(\gamma}\epsilon_{\delta)\beta} \left\{ -4\mathcal{R}\mathcal{R}^\dagger + \frac{1}{4}G_{\rho\rho}G^{\rho\rho} \right. \\ \left. + \frac{1}{8}(\bar{\mathcal{D}}_\rho\bar{\mathcal{D}}^\rho\mathcal{R}^\dagger + \mathcal{D}^\rho\mathcal{D}_\rho\mathcal{R}) \right\}, \quad (6.4.92i)$$

$$\Psi_{\alpha\beta\dot{\gamma}\dot{\delta}} = \frac{1}{2}G_{\alpha(\dot{\delta}}G_{|\beta|\dot{\gamma})} + \frac{i}{4} \left(\mathcal{D}_{(\alpha|\dot{\gamma}|}G_{\beta)\dot{\delta}} + \mathcal{D}_{(\alpha|\dot{\delta}|}G_{\beta)\dot{\gamma}} \right) \\ + \frac{1}{4} \left(\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\gamma}}\mathcal{D}_{(\alpha}G_{\beta)\dot{\delta}} + \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\delta}}\mathcal{D}_{(\alpha}G_{\beta)\dot{\gamma}} \right). \quad (6.4.92j)$$

6.4.3.4 超場

超ゲージ変換 超ゲージ変換を超並進 $\xi^A = \xi^M E_M^A$ とそれから決まる無限小局所超 Lorentz 変換 L_A^B の組

$$\delta_\xi = (\xi^A = \xi^M E_M^A, L_A^B = \xi^M \phi_{MA}^B) \quad (6.4.93)$$

により定める。例えば、超スカラ場 Φ 、超ベクトル場 V^A に対する超ゲージ変換は

$$\delta_\xi \Phi = -\xi^M \partial_M \Phi = -\xi^A \mathcal{D}_A \Phi, \quad (6.4.94a)$$

$$\delta_\xi V^A = -\xi^M \mathcal{D}_M V^A. \quad (6.4.94b)$$

このゲージ変換の交換関係は

$$[\delta_\xi, \delta_\eta]V^A = V^D \xi^C \eta^B R_{BCD}{}^A - \xi^C \eta^B T_{BC}{}^D \mathcal{D}_D V^A \quad (6.4.95)$$

部分ゲージ固定 超ゲージ変換で双対フレーム場 E^A および接続形式 $\phi_A{}^B$ は次のように変換する：

$$\delta_\xi E_M{}^A = -\mathcal{D}_M \xi^A - \xi^N T_{NM}{}^A, \quad (6.4.96a)$$

$$\delta_\xi \phi_{MA}{}^B = -\xi^N R_{NMA}{}^B. \quad (6.4.96b)$$

この変換を用いると，超（双対）フレーム場の最低次成分は次の形に変換できる：

$$E_M{}^A|_0 = \begin{pmatrix} e_m{}^a(x) & \frac{1}{2}\psi_m{}^\alpha(x) & \frac{1}{2}\bar{\psi}_{m\dot{\alpha}}(x) \\ 0 & \delta_\mu{}^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \delta^{\dot{\mu}}{}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (6.4.97a)$$

$$E_A{}^M|_0 = \begin{pmatrix} e_a{}^m(x) & -\frac{1}{2}\psi_a{}^\mu(x) & \frac{1}{2}\bar{\psi}_{a\dot{\mu}}(x) \\ 0 & \delta_\alpha{}^\mu & 0 \\ 0 & 0 & \delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\mu}} \end{pmatrix}. \quad (6.4.97b)$$

また，局所超 Lorentz 変換を用いると，接続形式の最低次成分は次の形に変換できる：

$$\phi_{mA}{}^B|_0 = \omega_{mA}{}^B(x), \quad \phi_{\mu A}{}^B|_0 = \phi^{\dot{\mu}}{}_{\dot{A}}{}^B|_0 = 0. \quad (6.4.98)$$

超重力場 この部分ゲージ固定のもとでは，すべての超幾何学量 ($E^A, \phi_A{}^B, \mathcal{T}^A, \mathcal{R}_A{}^B$) が， $E^A, \mathcal{R}, G_a = -(1/2)\sigma_a{}^{\alpha\dot{\alpha}}G_{\alpha\dot{\alpha}}$ の最低次成分

$$e_m{}^a(x), \quad \psi_m{}^\alpha(x), \quad (6.4.99a)$$

$$M(x) = -6\mathcal{R}|_0, \quad b_a = -3G_a|_0 \quad (6.4.99b)$$

のみで表される。

超重力変換 上記の部分ゲージ条件を保つ超ゲージ変換と局所超 Lorentz 変換の組み合わせは，要請

$$\xi^a|_0 = 0, \quad \xi^\alpha|_0 = \zeta^\alpha(x), \quad \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}|_0 = \bar{\zeta}_{\dot{\alpha}}(x), \quad L_{AB}|_0 = 0 \quad (6.4.100)$$

のもとで, ζ^α のみで一意的に定まり,

$$\xi^\alpha(z) = \zeta^\alpha(x), \quad \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}(z) = \bar{\zeta}_{\dot{\alpha}}(x), \quad (6.4.101a)$$

$$\xi^a(z) = 2i [\theta \sigma^a \bar{\zeta}(x) - \zeta(x) \sigma^a \bar{\theta}], \quad (6.4.101b)$$

$$L_{\alpha\beta}(z) = \frac{1}{3} [\theta_\alpha \{2\zeta_\beta(x) M^*(x) - b_{\beta\dot{\gamma}}(x) \bar{\zeta}^{\dot{\gamma}}(x)\} \\ + \theta_\beta \{2\zeta_\alpha(x) M^*(x) - b_{\alpha\dot{\gamma}}(x) \bar{\zeta}^{\dot{\gamma}}(x)\}], \quad (6.4.101c)$$

$$L_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(z) = \frac{1}{3} [\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \{2\bar{\zeta}_{\dot{\beta}}(x) M(x) - \zeta^\gamma(x) b_{\gamma\dot{\beta}}(x)\} \\ + \bar{\theta}_{\dot{\beta}} \{2\bar{\zeta}_{\dot{\alpha}}(x) M(x) - \zeta^\gamma(x) b_{\gamma\dot{\alpha}}(x)\}], \quad (6.4.101d)$$

$$L_{ab} = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_a \sigma_b \epsilon)^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} L_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} - \frac{1}{2} (\epsilon \sigma_a \bar{\sigma}_b)^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}. \quad (6.4.101e)$$

この超重力変換に対して, 超重力場は次のように変換する:

$$\delta e_m^a = i(\psi_m \sigma^a \bar{\zeta} - \zeta \sigma^a \bar{\psi}_m), \quad (6.4.102a)$$

$$\delta \psi_m^\alpha = -2\mathcal{D}_m \zeta^\alpha + \frac{i}{3} e_m^c (M(\epsilon \sigma_c \bar{\zeta})^\alpha + 3b_c \zeta^\alpha + b^d (\zeta \sigma_d \bar{\sigma}^c)^\alpha), \quad (6.4.102b)$$

$$\delta M = -\zeta (\sigma^a \bar{\sigma}^b \psi_{ab} + i b^a \psi_a - i \sigma^a \bar{\psi}_a M), \quad (6.4.102c)$$

$$\delta b_{\alpha\dot{\alpha}} = \zeta^\delta \left[\frac{3}{4} \bar{\psi}_\alpha^{\dot{\gamma}} \delta_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}} + \frac{1}{4} \epsilon_{\delta\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\gamma}\dot{\gamma}}{}_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}} - \frac{i}{2} M^* \psi_{\alpha\dot{\alpha}\delta} \right. \\ \left. + \frac{i}{4} (\bar{\psi}_{\alpha\dot{\rho}}{}^\rho b_{\delta\dot{\alpha}} + \bar{\psi}_{\delta\dot{\rho}}{}^\rho b_{\alpha\dot{\alpha}} - \bar{\psi}_{\delta\dot{\alpha}}{}^\rho b_{\alpha\dot{\rho}}) \right] \\ - \bar{\zeta}^{\dot{\delta}} \left[\frac{3}{4} \psi_\alpha^{\dot{\gamma}} \delta_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}} + \frac{1}{4} \epsilon_{\delta\dot{\alpha}} \psi_\alpha^{\dot{\gamma}\dot{\gamma}}{}_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}} + \frac{i}{2} M \bar{\psi}_{\alpha\dot{\alpha}\dot{\delta}} \right. \\ \left. - \frac{i}{4} (\psi_{\rho\dot{\alpha}}{}^\rho b_{\alpha\dot{\delta}} + \psi_{\rho\dot{\delta}}{}^\rho b_{\alpha\dot{\alpha}} - \psi_{\rho\dot{\delta}}{}^\rho b_{\alpha\dot{\rho}}) \right]. \quad (6.4.102d)$$

カイラル超場 条件

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} \Phi = 0 \quad (6.4.103)$$

を満たす超場をカイラル超場という. この超場の成分を

$$A = \Phi|_0, \quad \chi_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{D}_\alpha \Phi|_0, \quad F = -\frac{1}{4} \mathcal{D}^\alpha \mathcal{D}_\alpha \Phi|_0 \quad (6.4.104)$$

により定義すると, Φ の超重力変換

$$\delta_\zeta \Phi = -\xi^A \mathcal{D}_A \Phi \quad (6.4.105)$$

は

$$\delta A = -\sqrt{2}\zeta^\alpha\chi_\alpha, \quad (6.4.106a)$$

$$\delta\chi_\alpha = -\sqrt{2}\zeta_\alpha F - i\sqrt{2}\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^a\bar{\zeta}^{\dot{\beta}}\hat{D}_a A, \quad (6.4.106b)$$

$$\delta F = -\frac{\sqrt{2}}{3}M^*\zeta^\alpha\chi_\alpha + \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}\left(\frac{\sqrt{2}}{6}b_{\alpha\dot{\alpha}}\chi^\alpha - i\sqrt{2}\hat{D}_{\alpha\dot{\alpha}}\chi^\alpha\right) \quad (6.4.106c)$$

ここで,

$$\hat{D}_a A = e_a{}^m\left(\partial_m A - \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_m{}^\mu\chi_\mu\right), \quad (6.4.107a)$$

$$\hat{D}_a\chi_\alpha = e_a{}^m\left(\mathcal{D}_m\chi_\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{m\alpha}F - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_m{}^\beta\hat{D}_{\alpha\dot{\beta}}A\right) \quad (6.4.107b)$$

カイラル射影 任意の超場 F に対して,

$$2\mathcal{D}_{(\alpha}\mathcal{D}_{\beta)}\mathcal{D}_\gamma F = \mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta\mathcal{D}_\delta F - \mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^A\mathcal{D}_A F \quad (6.4.108)$$

より,

$$2\mathcal{D}_{[\alpha}\mathcal{D}_{\beta]}\mathcal{D}_\gamma F = 2\mathcal{D}_\alpha\mathcal{D}_\beta\mathcal{D}_\gamma F - \mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta\mathcal{D}_\delta F + \mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^A\mathcal{D}_A F. \quad (6.4.109)$$

よって,

$$\mathcal{D}_{[\alpha}\mathcal{D}_{\beta]}\mathcal{D}_\gamma F + \mathcal{D}_{[\beta}\mathcal{D}_{\gamma]}\mathcal{D}_\alpha F + \mathcal{D}_{[\gamma}\mathcal{D}_{\alpha]}\mathcal{D}_\beta F \equiv 0 \quad (6.4.110)$$

と Bianchi 恒等式より

$$\begin{aligned} & 2(\mathcal{D}_\alpha\mathcal{D}_\beta\mathcal{D}_\gamma + \mathcal{D}_\beta\mathcal{D}_\gamma\mathcal{D}_\alpha + \mathcal{D}_\gamma\mathcal{D}_\alpha\mathcal{D}_\beta)F \\ &= -\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^A\mathcal{D}_A\mathcal{D}_\gamma F - \mathcal{T}_{\beta\gamma}{}^A\mathcal{D}_A\mathcal{D}_\alpha F - \mathcal{T}_{\gamma\alpha}{}^A\mathcal{D}_A\mathcal{D}_\beta F \end{aligned} \quad (6.4.111)$$

したがって,

$$\mathcal{D}_\beta\mathcal{D}_\gamma\mathcal{D}_\alpha F = \mathcal{D}_\alpha\mathcal{D}_\beta\mathcal{D}_\gamma F - \mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta\mathcal{D}_\delta F + \mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^\delta\mathcal{D}_\delta\mathcal{D}_\gamma F - 2\mathcal{D}_\beta(\mathcal{T}_{\gamma\alpha}{}^A\mathcal{D}_A F) \quad (6.4.112)$$

を考慮すると,

$$\begin{aligned} 6\mathcal{D}_\alpha\mathcal{D}_\beta\mathcal{D}_\gamma F &= 2(\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta - \mathcal{R}_{\gamma\alpha\beta}{}^\delta)\mathcal{D}_\delta F \\ &\quad - 2\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^\delta\mathcal{D}_\delta\mathcal{D}_\gamma F + 2\mathcal{T}_{\gamma\alpha}{}^\delta\mathcal{D}_\delta\mathcal{D}_\beta F \\ &\quad - (\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^A\mathcal{D}_A\mathcal{D}_\gamma F + \mathcal{T}_{\beta\gamma}{}^A\mathcal{D}_A\mathcal{D}_\alpha F + \mathcal{T}_{\gamma\alpha}{}^A\mathcal{D}_A\mathcal{D}_\beta F) \\ &\quad + 4\mathcal{D}_\beta(\mathcal{T}_{\gamma\alpha}{}^A\mathcal{D}_A F) - 4\mathcal{D}_\alpha(\mathcal{T}_{\gamma\beta}{}^A\mathcal{D}_A F). \end{aligned} \quad (6.4.113)$$

特に, $\mathcal{F}_{\alpha\beta}^A = 0$ のとき,

$$\mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}^\gamma \mathcal{D}_\gamma F = \frac{2}{3} \mathcal{R}_\alpha{}^\gamma{}_\gamma{}^\delta \mathcal{D}_\delta F. \quad (6.4.114)$$

よって,

$$\mathcal{D}_\alpha (\mathcal{D}^\gamma \mathcal{D}_\gamma - 8\mathcal{R}^\dagger) F = 0, \quad (6.4.115a)$$

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} (\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\gamma}} \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\gamma}} - 8\mathcal{R}) F = 0. \quad (6.4.115b)$$

カイラル座標系 カイラル超場 Φ が

$$\Phi = A(x) + \sqrt{2}\Theta^\alpha \chi_\alpha(x) + \Theta^\alpha \Theta_\alpha F(x) \quad (6.4.116)$$

と表示される座標系 $(x^m, \Theta^\alpha, \bar{\Theta}_{\dot{\alpha}})$ を導入する. このとき, 超重力変換はつぎのように表される:

$$\delta\Phi = -\eta^M(x, \Theta) \partial_M \Phi, \quad (6.4.117)$$

ここで,

$$\eta^m = 2i\Theta\sigma^m\bar{\zeta} + \Theta\Theta\bar{\psi}_n\bar{\sigma}^m\sigma^n\bar{\zeta}, \quad (6.4.118a)$$

$$\eta^\alpha = \zeta^\alpha - i\Theta\sigma^m\bar{\zeta}\psi_m{}^\alpha + \Theta\Theta \left\{ \frac{1}{3}M^*\zeta^\alpha + \frac{1}{6}b_a(\epsilon\sigma^a\bar{\zeta})^\alpha - i\omega_m{}^{\alpha\beta}(\sigma^m\bar{\zeta})_\beta - \frac{1}{2}\psi_n{}^\alpha(\bar{\psi}_m\bar{\sigma}^n\sigma^m\bar{\zeta}) \right\} \quad (6.4.118b)$$

カイラル密度 超重力変換に対して

$$\delta\Delta = -\partial_M \left[(-1)^{\hat{M}} \eta^M \Delta \right] \quad (6.4.119)$$

と変換する超場 Δ をカイラル密度とよぶ. Δ をカイラル密度, Φ をカイラル超場とすると

$$\delta(\Delta\Phi) = -\partial_M \left[(-1)^{\hat{M}} \eta^M \Delta\Phi \right] \quad (6.4.120)$$

が成り立つ. 例えば,

$$\mathcal{E}|_0 = \frac{1}{2} \det e_m{}^a \quad (6.4.121)$$

となるカイラル密度 \mathcal{E} は

$$2\mathcal{E} = e \left\{ 1 + i\Theta\sigma^a\bar{\psi}_a - \Theta\Theta (M^* + \bar{\psi}_a\bar{\sigma}^{ab}\bar{\psi}_b) \right\}. \quad (6.4.122)$$

6.4.4 単純超重力理論

References

- Freedman DZ, van Nieuwenhuizen P: Phys. Rev. D13, 3214-8 (1976).
- Deser S, Zumino B: Phys. Lett. B62, 335-7 (1976).

6.4.4.1 作用積分

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \{eR - e\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} (\bar{\psi}_\mu \bar{\sigma}_\nu D_\lambda \psi_\sigma + D_\lambda \bar{\psi}_\sigma \sigma_\nu \psi_\mu)\}. \quad (6.4.123)$$

ここで,

$$R = e_a^\mu e_b^\nu \mathcal{R}^{ab}{}_{\mu\nu}(\omega), \quad (6.4.124)$$

$$\mathcal{R}^{ab} = \frac{1}{2} R_{ab\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = d\omega^{ab} + \omega_{ac} \wedge \omega^c{}_b, \quad (6.4.125)$$

$$D_\mu \psi_\nu = \partial_\mu \psi_\nu + \frac{1}{4} \omega_{ab\mu} \sigma^{ab} \psi_\nu, \quad (6.4.126)$$

$$D_\mu \bar{\psi}_\nu = \partial_\mu \bar{\psi}_\nu + \frac{1}{4} \omega_{ab\mu} \bar{\sigma}^{ab} \bar{\psi}_\nu. \quad (6.4.127)$$

ただし,

$$\bar{\sigma}^a = -\sigma_a = -\epsilon T^a \epsilon, \quad (6.4.128a)$$

$$\sigma^{ab} = -\sigma^{[a} \bar{\sigma}^{b]}, \quad (6.4.128b)$$

$$\bar{\sigma}^{ab} = -\bar{\sigma}^{[a} \sigma^{b]}. \quad (6.4.128c)$$

いま,

$$\Omega := d^4x e, \quad \psi := \psi_\mu dx^\mu, \quad \bar{\sigma} := \bar{\sigma}_\mu dx^\mu, \quad (6.4.129)$$

$$\Sigma_{ab} := I_b I_a \Omega = \frac{1}{2} \epsilon_{abce} \theta^c \wedge \theta^d \quad (6.4.130)$$

とおくと, 作用積分 $S = (1/2\kappa^2) \int \mathcal{L}$ は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\Sigma_{ab} \wedge \mathcal{R}^{ab} + \bar{\psi} \wedge \bar{\sigma} \wedge \mathcal{D}\psi - (\mathcal{D}\psi)^\dagger \wedge \bar{\sigma} \wedge \psi). \quad (6.4.131)$$

さらに,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\bar{\sigma} &= d\bar{\sigma} - \frac{1}{4}\omega_{ab}(\sigma^{ab\dagger}\bar{\sigma} + \bar{\sigma}\sigma^{ab}) \\ &= (d\theta^a + \omega^a_b \wedge \theta^b)\bar{\sigma}_a\end{aligned}\quad (6.4.132)$$

より

$$\mathcal{D}\bar{\sigma} = \tau^a \bar{\sigma}_a. \quad (6.4.133)$$

よって,

$$d(\bar{\psi} \wedge \bar{\sigma} \wedge \psi) = \mathcal{D}\bar{\psi} \wedge \bar{\sigma} \wedge \psi - \bar{\psi} \wedge \tau^a \bar{\sigma}_a \wedge \psi + \bar{\psi} \wedge \bar{\sigma} \wedge \mathcal{D}\psi. \quad (6.4.134)$$

6.4.4.2 場の方程式

$$\delta\mathcal{R}_{ab} = \mathcal{D}\delta\omega_{ab}, \quad (6.4.135a)$$

$$\delta\Sigma_{ab} = \epsilon_{abcd}\theta^c \wedge \delta\theta^d = I_d I_a I_b \Omega \wedge \delta\theta^d. \quad (6.4.135b)$$

より

$$\delta(\mathcal{R}^{ab} \wedge \Sigma_{ab}) = \mathcal{D}\delta\omega^{ab} \wedge \Sigma_{ab} + \mathcal{R}^{ab} \wedge I_d I_a I_b \Omega \wedge \delta\theta^d. \quad (6.4.136)$$

ここで,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{ab} \wedge I_d I_a I_b \Omega &= I_d(\mathcal{R}^{ab} \wedge I_a I_b \Omega) - I_d \mathcal{R}^{ab} \wedge I_a I_b \Omega \\ &= I_d(-I_a \mathcal{R}^{ab} \wedge I_b \Omega) + I_a(I_d \mathcal{R}^{ab} \wedge I_b \Omega) - I_a I_d \mathcal{R}^{ab} I_b \Omega \\ &= I_d(-I_b I_a \mathcal{R}^{ab} \Omega) + I_a(I_b I_d \mathcal{R}^{ab} \Omega) - I_a I_d \mathcal{R}^{ab} I_b \Omega \\ &= (2R_{da} - R\eta_{da})I^a \Omega.\end{aligned}\quad (6.4.137)$$

ただし,

$$R_{a\mu} := e_b^\nu R^b_{\nu\mu} = (I_b \mathcal{R}^b_a)(\partial_\mu). \quad (6.4.138)$$

よって,

$$\delta(\mathcal{R}^{ab} \wedge \Sigma_{ab}) = -\epsilon_{abcd}\tau^c \wedge \theta^d \wedge \delta\omega^{ab} + (2R_a^b - R\delta_a^b)I_b \Omega \wedge \delta\theta^a + d(\Sigma_{ab} \wedge \delta\omega^{ab}). \quad (6.4.139)$$

これらを用いると,

$$\delta\mathcal{L} \approx -\delta\bar{\psi} \wedge \mathcal{A} + \mathcal{A}^\dagger \wedge \delta\psi + \mathcal{B}^{ab} \wedge \delta\omega_{ab} + \mathcal{E}_a^b I_b \Omega \wedge \delta\theta^a \quad (6.4.140)$$

$$\mathcal{A} = \bar{\sigma} \wedge \mathcal{D}\psi - \frac{1}{2} \tau^a \wedge \bar{\sigma}_a \psi, \quad (6.4.141)$$

$$\mathcal{B}^{ab} = -\frac{1}{2} (\hat{\tau}_{ab}^c - \delta_a^c \hat{\tau}_{db}^d + \delta_b^c \hat{\tau}_{da}^d) I_c \Omega, \quad (6.4.142)$$

$$\mathcal{E}_a^b = G_a^b - \frac{1}{2} (\bar{\psi}_c \bar{\sigma}_a (*\mathcal{D}\psi)^{bc} + (\mathcal{D}\bar{\psi})^{bc} \bar{\sigma}_a \psi_c). \quad (6.4.143)$$

ただし,

$$\hat{\tau}_{ab}^c := \tau_{ab}^c - i\bar{\psi}_{[a} \bar{\sigma}^c \psi_{b]}. \quad (6.4.144)$$

6.4.4.3 超対称性

恒等式

$$\mathcal{D}\mathcal{A} \equiv -\frac{i}{2} \mathcal{E}_a^b I_b \Omega \wedge \bar{\sigma}^a \psi + \frac{1}{2} \hat{\tau}^a \wedge \bar{\sigma}_a \mathcal{D}\psi. \quad (6.4.145)$$

より, ζ を任意のスピンオールとして,

$$\begin{aligned} -2d(\bar{\zeta}\mathcal{A} + \mathcal{A}^\dagger\zeta) &= -(2\mathcal{D}\bar{\zeta}) \wedge \mathcal{A} + \mathcal{A}^\dagger \wedge (2\mathcal{D}\zeta) \\ &\quad - \hat{\tau}^a \wedge (\bar{\zeta}\bar{\sigma}_a \mathcal{D}\psi + (\mathcal{D}\psi)^\dagger \bar{\sigma}_a \zeta) \\ &\quad + \mathcal{E}_{ab} I^b \Omega \wedge (-i\bar{\psi}\bar{\sigma}^a \zeta + i\bar{\zeta}\bar{\sigma}^a \psi). \end{aligned} \quad (6.4.146)$$

よって, 超対称変換

$$\delta\psi = 2\mathcal{D}\zeta, \quad (6.4.147a)$$

$$\delta\theta^a = i(\bar{\zeta}\bar{\sigma}^a \psi - \bar{\psi}\bar{\sigma}^a \zeta), \quad (6.4.147b)$$

$$(*\delta\omega)_{ab} = \frac{1}{4} (X_{a;bc} - X_{c;ab} + X_{b;ca}) \theta^c, \quad (6.4.147c)$$

$$X_a = \frac{1}{2} X_{a;bc} \theta^b \wedge \theta^c = \bar{\zeta}\bar{\sigma}_a \mathcal{D}\psi + (\mathcal{D}\psi)^\dagger \bar{\sigma}_a \zeta. \quad (6.4.147d)$$

に対して, 作用積分は不変となる:

$$\begin{aligned} \delta_\zeta \mathcal{L} &\approx -\delta\bar{\psi} \wedge \mathcal{A} + \mathcal{A}^\dagger \wedge \delta\psi + \mathcal{B}^{ab} \wedge \delta\omega_{ab} + \mathcal{E}_{ab} I^b \Omega \wedge \delta\theta^a \\ &= -2d(\bar{\zeta}\mathcal{A} + \mathcal{A}^\dagger\zeta) \approx 0. \end{aligned} \quad (6.4.148)$$

ここで, $\delta\omega_{ab}$ は次のようにも表される:

$$\delta\omega_{ab} = \frac{1}{2} (2B_{c;ab} + B^d{}_{da} \delta_b^c - B^d{}_{db} \delta_a^c) \theta^c, \quad (6.4.149)$$

$$B^a = \frac{1}{2} (\bar{\zeta}\bar{\sigma}^a (*\mathcal{D}\psi) + (*\mathcal{D}\psi)^\dagger \bar{\sigma}^a \zeta). \quad (6.4.150)$$

6.4.5 一般カイラル場との結合

曲がった超空間上のカイラル場に対する超重力変換で不変な最も一般的な作用積分は、Kählerポテンシャル $K(\Phi, \Phi^\dagger)$ と超ポテンシャル $W(\Phi)$ を用いて、次のように表される。

$$\mathcal{L} = \int d^2\Theta 2\mathcal{E} \left[\frac{3}{8\kappa^2} (\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{D}} - 8\mathcal{R}) e^{-\kappa^2 K(\Phi, \Phi^\dagger)/3} + W(\Phi) \right] + \text{h.c.} \quad (6.4.151)$$

\mathcal{R} の成分場表示

$$\begin{aligned} -6\mathcal{R} = & M + \Theta[\sigma^a \bar{\sigma}^b \psi_{ab} - i\sigma^a \bar{\psi}_a M + i\psi_a b^a] \\ & + \Theta\Theta \left[\frac{1}{2}\hat{R} + i\bar{\psi}^a \bar{\sigma}^b \psi_{ab} + \frac{2}{3}MM^* \right. \\ & + \frac{1}{3}b^a b_a - ie_a{}^m \mathcal{D}_m b^a + \frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\psi}M - \frac{1}{2}\psi_a \sigma^a \bar{\psi}_c b^c \\ & \left. + \frac{1}{8}\epsilon^{abcd} (\bar{\psi}_a \bar{\sigma}_b \psi_{cd} + \psi_a \sigma_b \bar{\psi}_{cd}) \right] \end{aligned} \quad (6.4.152)$$

より、 \mathcal{L} は成分場で次のように表される：

$$\begin{aligned} e^{-1}\mathcal{L} = & \frac{1}{2}\hat{R} - g_{ij^*} \partial A^i \cdot \partial A^{*j} - \mathcal{V}(A) \\ & - ig_{ij^*} \bar{\chi}^i \bar{\sigma}^m \mathcal{D}_m \chi^j + \frac{1}{2}\epsilon^{klmn} (\bar{\psi}_k \bar{\sigma}_l \tilde{\mathcal{D}}_m \psi_n + \tilde{\mathcal{D}}_m \bar{\psi}_n \sigma_l \psi_k) \\ & - \frac{\sqrt{2}}{2} g_{ij^*} (\partial_n A^{*j} \chi^i \sigma^m \bar{\sigma}^n \psi_m + \partial_n A^i \bar{\chi}^j \bar{\sigma}^m \sigma^n \bar{\psi}_m) \\ & + \frac{1}{4} g_{ij^*} (i\epsilon^{klmn} \psi_k \sigma_l \bar{\psi}_m + \psi_m \sigma^n \bar{\psi}^m) \chi^i \sigma_n \bar{\chi}^j \\ & - \frac{1}{8} (g_{ij^*} g_{kl^*} - 2R_{ij^*kl^*}) \chi^i \chi^k \bar{\chi}^j \bar{\chi}^l \\ & - e^{K/2} \left[W^* \psi_a \sigma^{ab} \psi_b + W \bar{\psi}_a \bar{\sigma}^{ab} \bar{\psi}_b + \frac{i}{2} \sqrt{2} D_i W \chi^i \sigma^a \bar{\psi}_a \right. \\ & \left. + \frac{i}{2} \sqrt{2} D_{i^*} W^* \bar{\chi}^i \bar{\sigma}^a \psi_a + \frac{1}{2} \mathcal{D}_i D_j W \chi^i \chi^j + \frac{1}{2} \mathcal{D}_{i^*} D_{j^*} W^* \bar{\chi}^i \bar{\chi}^j \right] \end{aligned} \quad (6.4.153)$$

ここで,

$$\mathcal{D}_m \chi^i = \partial_m \chi^i + \chi^i \hat{\omega}_m + \Gamma_{jk}^i \partial_m A^j \chi^k - \frac{1}{4} (K_j \partial_m A^j - K_{j*} \partial_m A^{*j}) \chi^i \quad (6.4.154a)$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_m \psi_n = \partial_m \psi_n + \psi_n \hat{\omega}_m + \frac{1}{4} (K_j \partial_m A^j - K_{j*} \partial_m A^{*j}) \psi_n, \quad (6.4.154b)$$

$$\psi_{ab} = \hat{D}_a \psi_b - \hat{D}_b \psi_a, \quad (6.4.154c)$$

$$D_i W = W_i + K_i W, \quad (6.4.154d)$$

$$\mathcal{D}_i D_j W = W_{ij} + K_{ij} W + K_i D_j W + K_j D_i W - K_i K_j W - \Gamma_{ij}^k (D_k W) \quad (6.4.154e)$$

$$\mathcal{V} = e^K [g^{ij*} (D_i W)(D_j W)^* - 3W^* W]. \quad (6.4.154f)$$

また, $\hat{\omega}_m = (\omega_m^\alpha{}_\beta)$ および Ricci スカラ \hat{R} は, 次の Rarita-Schwinger 場の 2 次式で表される振れをもつスピン接続係数 $\hat{\omega}_{ml;n}$ に対応:

$$\hat{\omega}_{ml;n} = \omega_{ml;n}(e) + \frac{i}{2} \{ \theta_{la} \psi_{[m} \sigma^a \bar{\psi}_{n]} + \theta_{ma} \psi_{[n} \sigma^a \bar{\psi}_{l]} - \theta_{na} \psi_{[l} \sigma^a \bar{\psi}_{m]} \}. \quad (6.4.155)$$

超重力変換は

$$\delta_\zeta e_m^a = i (\zeta \sigma^a \bar{\psi}_m + \bar{\zeta} \bar{\sigma}^a \psi_m), \quad (6.4.156a)$$

$$\delta_\zeta A^i = \sqrt{2} \zeta \chi^i, \quad (6.4.156b)$$

$$\begin{aligned} \delta_\zeta \chi^i &= i \sqrt{2} \sigma^m \bar{\zeta} \hat{D}_m A^i - \sqrt{2} \zeta \chi^i \chi^k \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4} (K_j \zeta \chi^j - K_{j*} \bar{\zeta} \bar{\chi}^j) \chi^i - \sqrt{2} e^{K/2} g^{ij*} D_j W \zeta \chi^i \end{aligned} \quad (6.4.156c)$$

$$\begin{aligned} \delta_\zeta \psi_m &= 2 \mathcal{D}_m \zeta - \frac{\sqrt{2}}{4} (K_j \zeta \chi^j - K_{j*} \bar{\zeta} \bar{\chi}^j) \psi_m \\ &\quad - \frac{i}{2} \sigma_{mn} \zeta g_{ij*} \chi^i \sigma^n \bar{\chi}^j + i e^{K/2} W \sigma_m \bar{\zeta}. \end{aligned} \quad (6.4.156d)$$

ここで,

$$\mathcal{D}_m \zeta = \partial_m \zeta + \zeta \hat{\omega}_m + \frac{1}{4} (K_j \partial_m A^j - K_{j*} \partial_m A^{*j}) \zeta. \quad (6.4.157)$$

6.4.6 一般のカイラル場およびゲージ場との結合

6.4.6.1 構成要素

カイラル場セクター

- スカラ多様体: $(z^\alpha) \in \mathcal{M}$: Kähler 多様体
- Kähler ポテンシャル: $K(z, \bar{z})$
- 超ポテンシャル: $W(z)$

これらのポテンシャルは, Kähler 変換

$$K \rightarrow K' = K(z, \bar{z}) + f(z) + \overline{f(z)}, \quad (6.4.158a)$$

$$W \rightarrow e^{-f(z)}W \quad (6.4.158b)$$

の任意性をもつ.

ゲージセクター

- ゲージ群: 構造定数 $f_{AB}{}^C \rightarrow G$
- ゲージ結合関数: $f_{AB}(z)$ (holomorphic)
- Gauging Killing ポテンシャル: $\mathcal{P}_A(z, \bar{z})$

t_A を G の Killing ベクトル基底とすると,

$$k_A^\alpha(z) = -ig^{\alpha\bar{\beta}}\partial_{\bar{\beta}}\mathcal{P}_A(z, \bar{z}); \quad \nabla_\alpha\partial_{\bar{\beta}}\mathcal{P}_A(z, \bar{z}) = 0 \quad (6.4.159)$$

と表される (\mathcal{M}, K) の holomorphic Killing vector k_A^α を用いて, gauging $G \subset \text{Isom}(\mathcal{M})$ が $t_A \mapsto k_A^\alpha$ により定義される. 群 G を生成する条件は,

$$g_{\alpha\bar{\beta}} \left(k_A^\alpha k_B^{\bar{\beta}} - k_B^\alpha k_A^{\bar{\beta}} \right) = if_{AB}{}^C \mathcal{P}_C. \quad (6.4.160)$$

理論のゲージ不変性を保つため, K, W, f_{AB} はゲージ変換

$$\delta A^A = D\theta^A = d\theta^A + A^B\theta^C f_{BC}{}^A, \quad (6.4.161a)$$

$$\delta z^\alpha = \theta^A k_A^\alpha(z) \quad (6.4.161b)$$

に対して, 次の変換性をもつことが要求される:

$$\delta K = \theta^A [r_A(z) + \overline{r_A(z)}]; \quad r_A = \partial_{k_A} K + i\mathcal{P}_A \quad (6.4.162a)$$

$$\delta W = -\theta^A r_A W, \quad (6.4.162b)$$

$$\delta f_{AB} = \theta^C (2f_{C[A}{}^D f_{B]D} + iC_{AB,C}). \quad (6.4.162c)$$

6.4.6.2 Lagrangian

$$\begin{aligned}
e^{-1}\mathcal{L} &= \frac{1}{2\kappa^2} [R(e) - \bar{\psi}_\mu R^\mu] \\
&\quad - g_{\alpha\bar{\beta}} \left[\hat{D}_\mu z^\alpha \hat{D}^\mu \bar{z}^{\bar{\beta}} + \frac{1}{2} \bar{\chi}^\alpha \mathcal{D}^{(0)} \chi^{\bar{\beta}} + \frac{1}{2} \bar{\chi}^{\bar{\beta}} \mathcal{D}^{(0)} \chi^\alpha \right] - V \\
&\quad - \frac{1}{2} \text{Re}(f_{AB}) \left[F^A \cdot F^B + \bar{\lambda}^A \mathcal{D}^{(0)} \lambda^B \right] \\
&\quad + \left[\frac{1}{2} \text{Im}(f_{AB}) F^A \cdot \tilde{F}^B + \frac{i}{4} \hat{D}_\mu (\text{Im}(f_{AB}) \bar{\lambda}^A \gamma_* \gamma^\mu \lambda^B) \right] \\
&\quad + \frac{1}{8} \text{Re}(f_{AB}) \bar{\psi}_\mu \gamma^{ab} (F_{ab}^A + \hat{F}_{ab}^A) \gamma^\mu \lambda^B \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[g_{\alpha\bar{\beta}} \bar{\psi}_\mu \hat{\mathcal{D}} \bar{z}^{\bar{\beta}} \gamma^\mu \chi^\alpha + \text{h.c.} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[f_{AB,\alpha} \bar{\lambda}^A \gamma^{ab} \hat{F}_{ab}^B \chi^\alpha + \text{h.c.} \right] \\
&\quad + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{\text{mix}} + \mathcal{L}_{4f}. \tag{6.4.163}
\end{aligned}$$

ここで、共変微分は

$$\hat{D}_\mu z^\alpha = \partial_\mu z^\alpha - A_\mu^A k_A^\alpha, \tag{6.4.164}$$

$$D_\mu^{(0)} \chi^\alpha = \left(\nabla_\mu + \frac{3}{2} i \mathcal{A}_\mu \right) \chi^\alpha - A_\mu^A \partial_\beta k_A^\alpha \chi^\beta + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \chi^\gamma \hat{D}_\mu z^\beta, \tag{6.4.165}$$

$$\nabla_\mu \chi^\alpha = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \gamma^{ab} \right) \chi^\alpha. \tag{6.4.166}$$

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = g^{\alpha\bar{\delta}} \partial_\beta g_{\gamma\bar{\delta}}, \tag{6.4.167}$$

$$\mathcal{A}_\mu = \frac{i\kappa^2}{6} (\partial_\mu z^\alpha \partial_\alpha K - \partial_\mu \bar{z}^\alpha \partial_{\bar{\alpha}} K) - \frac{\kappa^2}{3} A_\mu^A \mathcal{P}_A. \tag{6.4.168}$$

また、

$$R^\mu = \gamma^{\mu\rho\sigma} \left(\nabla_\rho - \frac{3}{2} i \mathcal{A}_\rho \gamma_* \right) \psi_\sigma, \tag{6.4.169}$$

$$\hat{F}_{ab}^A = F_{ab}^A + e_a^\mu e_b^\nu \bar{\psi}_{[\mu} \gamma_{\nu]} \lambda^A. \tag{6.4.170}$$

スカラポテンシャル

$$V = V_- + V_+; \quad (6.4.171)$$

$$V_- = -3\kappa^2 e^{\kappa^2 K} |W|^2, \quad (6.4.172)$$

$$V_+ = e^{\kappa^2 K} (D_\alpha W) g^{\alpha\bar{\beta}} \overline{D_\beta W} + \frac{1}{2} (\text{Re}(f)^{-1})^{AB} \mathcal{P}_A \mathcal{P}_B. \quad (6.4.173)$$

このポテンシャルは,

$$\mathcal{G} = \kappa^2 K + \log(\kappa^6 |W|^2) \quad (6.4.174)$$

を用いて,

$$V = V_F + V_D; \quad (6.4.175)$$

$$\begin{aligned} V_F &= e^{\kappa^2 K} \left(-3\kappa^2 |W|^2 + g^{\alpha\bar{\beta}} D_\alpha W \overline{D_\beta W} \right) \\ &= \kappa^{-4} e^{\mathcal{G}} \left(\mathcal{G}^{\alpha\bar{\beta}} \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} \mathcal{G} - 3 \right), \end{aligned} \quad (6.4.176)$$

$$V_D = \frac{1}{2} (\text{Re}(f)^{-1})^{AB} \mathcal{P}_A \mathcal{P}_B \quad (6.4.177)$$

と書くことができる。ここで, $\mathcal{G}^{\alpha\bar{\beta}}$ は $\mathcal{G}_{\alpha\bar{\beta}} = \kappa^2 g_{\alpha\bar{\beta}}$ の逆転置行列。

フェルミオン質量項

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= \frac{1}{2} m_{3/2} \bar{\psi}_\mu P_R \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu \\ &\quad - \frac{1}{2} m_{\alpha\beta} \bar{\chi}^\alpha \chi^\beta - m_{\alpha A} \bar{\chi}^\alpha \lambda^A - \frac{1}{2} m_{AB} \bar{\lambda}^A P_L \lambda^B + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (6.4.178)$$

ここで,

$$m_{3/2} = \kappa^2 e^{\kappa^2 K/2} W, \quad (6.4.179a)$$

$$\begin{aligned} m_{\alpha\beta} &= e^{\kappa^2 K/2} D_\alpha D_\beta W \\ &\equiv e^{\kappa^2 K/2} \left[(\partial_\alpha + \kappa^2 \partial_\alpha K) D_\beta W - \gamma_{\alpha\beta}^\gamma D_\gamma W \right], \end{aligned} \quad (6.4.179b)$$

$$m_{\alpha A} = m_{A\alpha} = i\sqrt{2} \left[\partial_\alpha \mathcal{P}_A - \frac{1}{4} f_{AB,\alpha} (\text{Re}(f)^{-1})^{BC} \mathcal{P}_C \right], \quad (6.4.179c)$$

$$m_{AB} = -\frac{1}{2} e^{\kappa^2 K/2} f_{AB,\alpha} g^{\alpha\bar{\beta}} \overline{D_\beta W}. \quad (6.4.179d)$$

また, グラヴィティノーとスピン 1/2 フェルミオンとの混合項は

$$\mathcal{L}_{\text{mix}} = \bar{\psi} \cdot \gamma \left[\frac{1}{2} i P_L \lambda^A \mathcal{P}_A + \frac{1}{\sqrt{2}} \chi^\alpha e^{\kappa^2 K/2} D_\alpha W \right] + \text{h.c.} \quad (6.4.180)$$

6.4.6.3 変換則

局所超対称変換+ゲージ変換

$$\delta e_\mu^a = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma^a \psi_\mu, \quad (6.4.181a)$$

$$\begin{aligned} \delta P_L \psi_\mu &= \left(\nabla_\mu - \frac{3}{2} i \mathcal{A}_\mu \right) P_L \epsilon + \frac{1}{2} \kappa^2 \gamma_\mu e^{\kappa^2 K/2} P_R \epsilon \\ &+ \frac{1}{4} \kappa^2 P_L \psi_\mu \theta^A (\bar{r}_A - r_A) + \text{cubic in fermions}, \end{aligned} \quad (6.4.181b)$$

$$\delta z^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon} \chi^\alpha + \theta^A k_A^\alpha, \quad (6.4.181c)$$

$$\begin{aligned} \delta \chi^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} P_L \left(\hat{D} z^\alpha - e^{\kappa^2 K/2} g^{\alpha\bar{\beta}} \overline{D_\beta W} \right) \epsilon \\ &+ \theta^A \left[\partial_\beta k_A^\alpha \chi^\beta + \frac{1}{4} \kappa^2 (r_A - \bar{r}_A) \chi^\alpha \right] + \text{cubic in fermions} \end{aligned} \quad (6.4.181d)$$

$$\delta A_\mu^A = -\frac{1}{2} \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^A + \partial_\mu \theta^A + \theta^C A_\mu^B f_{BC}^A, \quad (6.4.181e)$$

$$\begin{aligned} \delta \lambda^A &= + \left[\frac{1}{4} \gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^A + \frac{1}{2} i \gamma_* (Re(f)^{-1})^{AB} \mathcal{P}_B \right] \epsilon \\ &+ \theta^B \left[\lambda^C f_{CB}^A + \frac{1}{4} \kappa^2 \gamma_* (\bar{r}_B - r_B) \lambda^A \right] + \text{cubic in fermions} \end{aligned} \quad (6.4.181f)$$

6.5 4次元 $N = 2$ 超重力理論

6.5.1 大域的 $\mathcal{N} = 2$ 超対称理論におけるゲージ超組

6次元時空 6次元のゲージ場 A_μ と Symplectic Majorana スピノール場 $\psi^i (i = 1, 2)$ の物理自由度はいずれも4なので, 6次元の on-shell でのゲージ超組は $(A_\mu^I, \psi^{iI} (i = 1, 2)) (I \text{ はゲージ群の随伴表現のラベル})$ で与えられる. Off-shell でのゲージ超組は, これに3個のスカラ場 $Y^{ijI} = Y^{jiI} (i, j = 1, 2)$ を加えた組 $(A_\mu^I, \lambda^{iI}, Y^{ijI})$ で与えられる. この超組の超対称変換は

$$\delta A_\mu^I = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^i \gamma_\mu \lambda_i^I, \quad (6.5.1a)$$

$$\delta \lambda^{iI} = -\frac{1}{4} \gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^I \epsilon^i - Y^{ijI} \epsilon_j, \quad (6.5.1b)$$

$$\delta Y^{ijI} = -\frac{1}{2} \bar{\epsilon}^{(i} \not{D} \lambda^{j)I}. \quad (6.5.1c)$$

ここで, symplectic Majorana スピノールに対して, 一般に, 次の添え字上げ下げルールを用いる:

$$\lambda_i = \lambda^j \epsilon_{ji}, \quad \lambda^i = \epsilon^{ij} \lambda_j. \quad (6.5.2)$$

この変換に対して, 次の交換関係が成り立つ:

$$[\delta(\epsilon_1), \delta(\epsilon_2)] = \delta_{\text{cgct}}(\xi^\mu), \quad \xi^\mu = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_2^i \gamma^\mu \epsilon_{1i}. \quad (6.5.3)$$

超対称変換に対して不変な作用積分は,

$$S = \int d^6 x h_{IJ} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^I F^{\mu\nu J} - \frac{1}{2} \bar{\lambda}^{iI} \not{D} \lambda_i^J + 2 \mathbf{Y}^I \cdot \mathbf{Y}^J \right]. \quad (6.5.4)$$

ここで,

$$\mathbf{Y}^I = \frac{1}{2} i \text{Tr}(\sigma \epsilon Y^I). \quad (6.5.5)$$

また, h_{IJ} は Lie 代数の不変内積である.

5次元時空 5次元のゲージ超組は, 6次元からの次元低下により得られ, 6次元の超組にベクトルから得られるスカラ σ^I を加えた $(A_\mu^I, \sigma^I, \lambda^{iI}, \mathbf{Y}^I)$

で与えられる。超対称変換は、

$$\delta A_\mu^I = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^i \gamma_\mu \lambda_i^I, \quad (6.5.6a)$$

$$\delta \sigma^I = \frac{1}{2} i \bar{\epsilon}^i \lambda_i^I, \quad (6.5.6b)$$

$$\delta \lambda^{iI} = -\frac{1}{4} \gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^I \epsilon^i - \frac{1}{2} i \not{D} \sigma^I \epsilon^i - Y^{ijI} \epsilon_j, \quad (6.5.6c)$$

$$\delta \mathbf{Y}^I = \frac{1}{4} (\epsilon \boldsymbol{\sigma})_{ij} \bar{\epsilon}^i [\not{D} \lambda^{jI} + i f^I_{JK} \sigma^J \lambda^{jK}]. \quad (6.5.6d)$$

超対称変換の交換関係は

$$[\delta(\boldsymbol{\epsilon}_1), \delta(\boldsymbol{\epsilon}_2)] = \delta_{\text{cgct}}(\xi^\mu) + \delta_G(\theta^I), \quad \theta^I = -\frac{1}{2} i \sigma^I \bar{\epsilon}_2^i \epsilon_1^j \epsilon_{ji}. \quad (6.5.7)$$

右辺の第2項は、中心電荷と似た役割を果たす。

この超対称変換で不変な作用積分は一意的でなく、6次元から次元低下で得られるもの以外に次のようなものがある：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{5v} = & C_{IJK} \left[\left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^I F^{\mu\nu J} - \frac{1}{2} \bar{\lambda}^{iI} \not{D} \lambda_i^J - \frac{1}{2} D_\mu \sigma^I D^\mu \sigma^J + 2 \mathbf{Y}^I \cdot \mathbf{Y}^J \right) \sigma^K \right. \\ & \left. - \frac{1}{24} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau} A_\mu^I \left\{ F_{\nu\rho}^J F_{\sigma\tau}^K + f^J_{LM} A_\nu^L A_\rho^M \left(-\frac{1}{2} F_{\sigma\tau}^K + \frac{1}{10} f^K_{NP} A_\sigma^N A_\tau^P \right) \right\} \right. \\ & \left. - \frac{1}{8} i \bar{\lambda}^{iI} \gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^J \lambda_i^K - \frac{1}{2} i \bar{\lambda}^{iI} \lambda^{jJ} Y_{ij}^K + \frac{1}{4} \sigma^I \sigma^J \bar{\lambda}^{iL} \lambda_i^M f^K_{LM} \right]. \quad (6.5.8) \end{aligned}$$

ここで、 C_{IJK} は、次のゲージ不変性条件を満たす定数完全対称テンソルである：

$$f_{I(J}^M C_{KL)M} = 0. \quad (6.5.9)$$

このラグランジュ密度から得られる作用積分は、共形不変にもなっている。

4次元時空 4次元時空における $\mathcal{N} = 2$ ゲージ超組は、5次元時空における $\mathcal{N} = 2$ 超組にゲージ場起源のスカラ場を加え、2つのスカラ場を1個の複素スカラ場に X に組んだ場の組 $(X, \Omega_i, A_\mu, \mathbf{Y})^I$ で与えられる。ただし、スピノール場としては、Majorana2個 $\Omega_i (i = 1, 2)$ を用いる。また、 A_μ^I, \mathbf{Y}^I は実数場である。超対称変換は

$$\delta X^I = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^i P_L \Omega_i^I, \quad (6.5.10a)$$

$$P_L \delta \Omega_i^I = P_L \left[\not{D} X^I \epsilon^i + Y_{ij}^I \epsilon^j + \frac{1}{4} \gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^I \epsilon_{ij} \epsilon^j + X^I \bar{X}^K f^I{}_{JK} \epsilon_{ij} \epsilon^j \right], \quad (6.5.10b)$$

$$P_R \delta \Omega_i^I = P_R \left[\not{D} \bar{X}^I \epsilon^i + \bar{Y}_{ij}^I \epsilon^j + \frac{1}{4} \gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^I \epsilon_{ij} \epsilon^j - X^I \bar{X}^K f^I{}_{JK} \epsilon_{ij} \epsilon^j \right], \quad (6.5.10c)$$

$$\delta \mathbf{Y}^I = -\frac{1}{4} (\sigma_2 \boldsymbol{\sigma})^{ij} \bar{\epsilon}^i P_R \not{D} \Omega_j - \frac{i}{2} f^U{}_{JK} (\boldsymbol{\sigma})_{ij} \bar{\epsilon}^j X^J P_R \Omega_i^I + \text{h.c.}, \quad (6.5.10d)$$

$$\delta A^I = \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \bar{\epsilon}^i P_R \gamma_\mu \Omega_j^I + \text{h.c.} \quad (6.5.10e)$$

ここで、 Y_{ij} は

$$Y_{ij}^I = -(\mathbf{Y}^I \cdot \boldsymbol{\sigma} \sigma_2)_{ij} \quad (6.5.11)$$

で、トレースが実数、trace-free 部分が純虚数となるので、

$$\bar{Y}_{ij}^I = \epsilon^{ik} \epsilon^{jl} Y_{kl}^I. \quad (6.5.12)$$

超対称変換の交換関係は

$$[\delta(\epsilon_1), \delta(\epsilon_2)] = \delta_{\text{cgct}}(\xi) + \delta_G(\theta); \quad (6.5.13a)$$

$$\xi^\mu = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_2^i \gamma^\mu P_R \epsilon_1^i + \text{h.c.}, \quad (6.5.13b)$$

$$\theta^I = X^I \epsilon_{ij} \bar{\epsilon}^i P_R \epsilon^j + \text{h.c.} \quad (6.5.13c)$$

【演習問題 6.10 (未確認)】 (6.5.10) がこの交換関係を満たすことを確かめよ。 □

一般的な超対称作用積分を構成するには、 $\mathcal{N} = 2$ の超場を用いるのが便利である。まず、 $D = 4, \mathcal{N} = 2$ の超空間の座標を (x^μ, θ_α^i) とし、超空間における超対称変換を

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \frac{1}{4}\bar{\epsilon}_i \gamma^\mu \theta^i, \quad \theta^i \rightarrow \theta'^i = \theta^i - \epsilon^i \quad (6.5.14)$$

により定義する。ここで、 ϵ^i ($i = 1, 2$) は独立な Majorana スピノールである。対応する、超空間におけるベクトル場は

$$Q_{\alpha i} = \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \bar{\theta}_\alpha^i} - \frac{1}{4}(\gamma^\mu \theta^i)_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (6.5.15)$$

となる。交換関係は、

$$\{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = \frac{1}{2}\delta_{ij}(\gamma^\mu C^{-1})_{\alpha\beta} \partial_\mu. \quad (6.5.16)$$

カイラルな超場を定義するため、 $Q_{\alpha i}$ と可換なベクトル場 $D_{\alpha i}$ を

$$D_{\alpha i} = \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \bar{\theta}_\alpha^i} + \frac{1}{4}(\gamma^\mu \theta^i)_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (6.5.17)$$

により導入し、カイラル超場 V を

$$P_R D_i V = 0 \Leftrightarrow P_R \left. \frac{\overrightarrow{\partial} V}{\partial \bar{\theta}^i} \right|_{x_+ = \text{const}} = 0 \quad (6.5.18)$$

により定義する。ここで、

$$x_+^\mu = x^\mu + \frac{1}{8}\bar{\theta}^i \gamma_* \gamma^\mu \theta^i. \quad (6.5.19)$$

これより、カイラル超場は一般に、

$$\begin{aligned} V = & C(x_+) + \frac{1}{2}\bar{\theta}^i P_L \chi_j(x_+) + \frac{1}{4}(\bar{\theta}^j P_L \theta^k) Z_{jk}(x_+) \\ & + \frac{1}{16}\bar{\theta}^j P_L \gamma^{\mu\nu} \theta^k \epsilon_{jk} V_{\mu\nu}(x_+) + \frac{1}{16}\bar{\Xi}^j \not{D} P_R \tilde{\chi}_j(x_+) + \frac{1}{16}\Theta \square \tilde{C}(x_+) \end{aligned} \quad (6.5.20)$$

と展開される。ここで、

$$\Theta = (\bar{\theta}^1 P_L \theta^1)(\bar{\theta}^2 P_L \theta^2), \quad (6.5.21a)$$

$$\bar{\Xi}^i = -4\bar{\theta}^j P_L (\bar{\theta}^i P_L \theta^j) \quad (6.5.21b)$$

である。上でのべたゲージ超組は、このカイラル超場に

$$C = X, \quad \chi^i = \Omega_i, \quad Z_{ij} = Y_{ij}, \quad V_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}, \quad \tilde{\chi}_j = \Omega_j, \quad \tilde{C} = \bar{X} \quad (6.5.22)$$

により埋め込むことができる。

カイラル超場の関数は再びカイラル超場となり、その最高次の成分 (F 項) の 4 次元積分は、 $\mathcal{N} = 1$ のカイラル超場と同様に、超対称変換で不変となる。これより、 V^I をゲージ超組 $(X^I, \Omega_i^I, A_\mu^I, \mathbf{Y}^I)$ に対応するカイラル超場とすると、 X の正則関数 $F(X)$ に対して、

$$\mathcal{L}_{4v} = i[F(V)]_F + \text{h.c} \quad (6.5.23)$$

の 4 次元積分は、 $\mathcal{N} = 2$ 超対称性をもつ作用積分を与える。具体的な表式は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4v} = & iF_{IJ}D_\mu X^I D^\mu \bar{X}^J + \frac{1}{2}iF_{IJ}F_{\mu\nu}^{-I}F^{-\mu\nu J} + \frac{1}{2}iF_{IJ}\bar{\Omega}_i^I \not{D}P_R\Omega_i^J - iF_{IJ}\mathbf{Y}^I \cdot \mathbf{Y}^J \\ & + \frac{1}{4}iF_{IJK}\mathbf{Y}^I \cdot (-\sigma_2\boldsymbol{\sigma})^{ij}\bar{\Omega}_i^J P_L\Omega_j^K - \frac{1}{16}iF_{IJK}\epsilon^{ij}\bar{\Omega}_i^J \gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^{-J} P_L\Omega_j^K \\ & + \frac{1}{48}iF_{IJKL}\bar{\Omega}_i^I P_L\Omega_j^J \bar{\Omega}_j^K \Omega_k^L \epsilon^{ij}\epsilon^{kl} \\ & + \frac{1}{2}iF_I f^I_{JK}\bar{\Omega}_i^J P_R\Omega_j^K \epsilon^{ij} - \frac{1}{2}iF_{IJ}f^I_{KL}\bar{X}^K \bar{\Omega}_i^J P_L\Omega_j^L \epsilon^{ij} \\ & - iF_I f^I_{JK}f^J_{LM}\bar{X}^K \bar{X}^L X^M + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (6.5.24)$$

このラグランジュ密度の運動項は Kähler で、次の Kähler ポテンシャルにより与えられる：

$$K = iX^I \bar{F}_I(\bar{X}) - i\bar{X}^I F_I(X). \quad (6.5.25)$$

これより、スカラ多様体 \mathcal{M}_v は **rigid special Kähler** 多様体となる。

6.5.2 大域的 $\mathcal{N} = 2$ 超対称理論におけるハイパー超組

ハイパー超組の基本単位は、4個の実スカラー場 q^X と2個の (symplectic) Majorana スピノール ζ^A からなる。一般に、 n_H 個のハイパー超組の系は、 $(q^X, \zeta^A) (X = 1, \dots, 4n_H, A = 1, \dots, 2n_H)$ により記述される。スカラー場が値を取る $4n_H$ 次元の多様体を \mathcal{M}_H と表記するとき、 ζ^A は、 \mathcal{M}_H 上の複素 $2n_H$ 次元ベクトルバンドル $Z(\mathcal{M}_H)$ の q におけるファイバーとスピノールとのテンソル積 $Z_q(\mathcal{M}_H) \otimes \mathcal{S}$ に値を取る。

6次元時空におけるハイパー超組 まず、 ζ^A が symplectic Majorana であることを表すために、 $Z_q^*(\mathcal{M}_H) \otimes \bar{Z}_q^*(\mathcal{M}_H)$ に値を取り、次の「実数性条件」を満たすテンソル $\rho_{A\bar{B}}$ を与える：

$$\rho_{A\bar{B}} \rho^{\bar{B}C} = -\delta_A^C, \quad \rho^{\bar{A}B} \equiv (\rho_{A\bar{B}})^*. \quad (6.5.26)$$

ϵ^i , ζ^A に対する symplectic Majorana 条件は $\epsilon_{ij} (i, j = 1, 2)$ と $\rho_{A\bar{B}}$ を用いて、

$$(\epsilon^i)^C \equiv B^{-1}(\epsilon^i)^* = \epsilon_i \equiv \epsilon^j \epsilon_{ji}, \quad (6.5.27a)$$

$$(\zeta^A)^C \equiv B^{-1}(\zeta^A)^* = \zeta^B \rho_{B\bar{A}}, \quad \zeta^A = P_R \zeta^A \quad (6.5.27b)$$

と表される。

ハイパー超組の最も一般的な超対称変換は、

$$\delta q^X = \bar{\epsilon}^i \zeta^A f^X_{iA}, \quad (6.5.28a)$$

$$\delta \zeta^A = \frac{1}{2} f^{iA} X \not{D} q^X \epsilon_i - \zeta^B \omega_{XB}{}^A \delta q^X \quad (6.5.28b)$$

で与えられる。ここで、 $\omega_{XB}{}^A$ は、ベクトルバンドル $Z(\mathcal{M}_H)$ の線形接続、 f^X_{iA} , f^{iA}_X は、各 i に対して、バンドル $T(\mathcal{M}_H) \otimes Z^*(\mathcal{M}_H)$ および $T^*(\mathcal{M}_H) \otimes Z(\mathcal{M}_H)$ の局所断面で、

$$f^{iA}_X f^X_{jB} = \delta_j^i \delta_B^A \quad (6.5.29)$$

の関係を満たす。さらに、 δq^X が実数、 $\delta \zeta^A$ が symplectic Majorana であることより、 f^X_{iA} は次の関係式を満たすことが要求される：

$$(f^{iA}_X)^* = f^{jB}_X \epsilon_{ji} \rho_{B\bar{A}}, \quad (f^X_{iA})^* = \epsilon^{ij} \rho^{\bar{A}B} f^X_{jB}. \quad (6.5.30)$$

この条件は、

$$2f^{iA}{}_X f^Y{}_{jA} = \delta_X^Y \delta_i^j + \tau_j^i \cdot \mathbf{J}_X^Y; \quad (6.5.31a)$$

$$\mathbf{J}_X^Y = (\mathbf{J}_X^Y)^* = -f^{iA}{}_X f^Y{}_{jA} \tau_i^j, \quad (6.5.31b)$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}_X^Z)(\mathbf{B} \cdot \mathbf{J}_Z^Y) = -\delta_X^Y (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{J}_X^Y \quad (6.5.31c)$$

と同等である。ここで、 $\tau_i^j = i\sigma_i^j$. 特に、 \mathbf{J} は \mathcal{M}_H に4元数構造 (quaternionic structure) を与える。さらに、超対称変換が q^X に関して交換関係 (6.6.15)

$$[\delta_1, \delta_2]q^X = \frac{1}{2}(\bar{\epsilon}_{(1)i} \Gamma^\mu \epsilon_{(2)}^i) D_\mu q^X \quad (6.5.32)$$

を満たすことより、

$$f^Y{}_{jB} D_Y f^X{}_{iA} - f^Y{}_{iA} D_Y f^X{}_{jB} = 0 \quad (6.5.33)$$

が要求される。

最後に、超対称な Lagrange 密度は、

$$\mathcal{L}_6 = -\frac{1}{2} g_{XY}(q) \partial_\mu q^X \partial^\mu q^Y + C_{AB} \bar{\zeta}^A \nabla \zeta^B + \dots \quad (6.5.34)$$

となる。ここで、 $g_{XY}(q)$ は \mathcal{M}_H の Riemann 計量、 C_{AB} は $Z_q(\mathcal{M}_H)$ に関する2階反対称テンソル、すなわち $\wedge^2 Z(\mathcal{M}_H)$ の局所断面で、 \mathcal{L}_6 のエルミート条件より、

$$(C_{AB})^* = \rho^{\bar{A}C} \rho^{\bar{B}D} C_{CD} \quad (6.5.35)$$

を満たす。

Lagrange 密度のこの ζ^A について2次以下の部分が、そのオーダーで超対称変換に対して不変となることより、次の条件が得られる：

$$f_{XiA} \equiv g_{XY} f^Y{}_{iA} = f^{jB}{}_X \epsilon_{ji} C_{BA}, \quad (6.5.36)$$

$$\nabla_X f^Y{}_{iA} \equiv \partial_X f^Y{}_{iA} + \Gamma_{XZ}^Y f^Z{}_{iA} - \omega_{XA}{}^B(q) f^Y{}_{iB} = 0, \quad (6.5.37)$$

$$\nabla_X C_{AB} \equiv \partial_X C_{AB} + 2\omega_{X[A}{}^C C_{B]C} = 0. \quad (6.5.38)$$

この第1式は、次式と同等：

$$g_{XY} = f^{iA}{}_X \epsilon_{ij} C_{AB} f^{jB}{}_Y = (f^{iA})^* d^{\bar{A}}{}_B f^{iB}{}_Y, \quad (6.5.39)$$

$$d^{\bar{A}}{}_B \equiv -\rho^{\bar{A}C} C_{CB} = (d^{\bar{B}}{}_A)^*. \quad (6.5.40)$$

また、第2式より、 $\omega_{XA}{}^B$ が $f^X{}_{iA}$ と g_{XY} により一意的に定まる：

$$\omega_{XA}{}^B = \frac{1}{2} f^{iB}{}_Y (\partial_X f^Y{}_{iA} + \Gamma_{XZ}^Y(q) f^Z{}_{iA}). \quad (6.5.41)$$

この接続係数より決まる $Z(\mathcal{M}_H)$ の曲率テンソル $\mathcal{R}_{XYB}{}^A$ と (\mathcal{M}_H, g_{XY}) に対する曲率テンソル $R_{XY}{}^W{}_Z$ の関係は次式で与えられる：

$$R_{XY}{}^W{}_Z = f^W{}_{iA} f^{iB}{}_Z \mathcal{R}_{XYB}{}^A = \frac{1}{2} f^{iA}{}_X f^{iB}{}_Y f^{kC}{}_Z f^W{}_{kD} W_{ABCD} \quad (6.5.42)$$

$$W_{ABCD} \equiv f^{Xi}{}_A f^Y{}_{iB} \mathcal{R}_{XYCD} = \frac{1}{2} f^{Xi}{}_A f^Y{}_{iB} f^{Zk}{}_C f^W{}_{kD} R_{XYZ}{}^W \quad (6.5.43)$$

W_{ABCD} は対称テンソルで、 \mathcal{M}_H は Ricci 平坦となる：

$$R_{XY}[g] = 0. \quad (6.5.44)$$

以上より、理論の自由データは

i) $Z(\mathcal{M}_H)$ の symplectic 構造と $T(\mathcal{M}_H)$ との対応 $(\rho_{A\bar{B}}, f^X_{iA})$:

$$\rho_{A\bar{B}}\rho^{\bar{B}C} = -\delta^C_A, \quad \rho^{\bar{A}B} \equiv (\rho_{A\bar{B}})^*, \quad (6.5.45a)$$

$$(f^X_{iA})^* = \epsilon^{ij}\rho^{\bar{A}B}f^X_{jB}. \quad (6.5.45b)$$

ii) \mathcal{M}_H の計量と $Z(\mathcal{M}_H)$ の線形接続 $(g_{XY}(q), \omega_{XA}{}^B)$:

$$\nabla_X \rho_{A\bar{B}} \equiv \partial_X \rho_{A\bar{B}} - \omega_{XA}{}^C \rho_{CB} - \bar{\omega}_{X\bar{B}}{}^{\bar{C}} \rho_{A\bar{C}} = 0, \quad (6.5.46a)$$

$$\nabla_X f^Y_{iA} \equiv \partial_X f^Y_{iA} + \Gamma_{XZ}^Y [g] f^Z_{iA} - \omega_{XA}{}^B f^Y_{iB} = 0. \quad (6.5.46b)$$

これらが与えられると、

$$\mathbf{J}_X{}^Y = -f^{iA}{}_X f^Y_{jA} \boldsymbol{\tau}_i{}^j \Rightarrow \nabla_Z \mathbf{J}_X{}^Y = 0. \quad (6.5.47)$$

により、 \mathcal{M}_H の 4 元数構造が定まり、 g_{XY} は小畑計量接続を与える。さらに、(6.5.31b) と (6.5.39) より、この計量が $\mathbf{J}_X{}^Y$ のどの成分についてもエルミートとなることが示される。したがって、 $(\mathcal{M}_H, \mathbf{J}, g)$ はハイパーケーラー多様体 (hyperkähler manifold) となる。さらに、

$$C_{AB} = g_{XY} \epsilon^{ij} f^X_{iA} f^Y_{jB} \quad (6.5.48)$$

により、上記の実数条件を満たす $Z_q(\mathcal{M}_H)$ の反対称テンソル C_{AB} が定まる。

これらのデータを用いて、6次元時空中での $\mathcal{N} = 2$ 超対称性をもつハイパー超組に対する作用積分は次式で与えられる：

$$\mathcal{L}_6 = -\frac{1}{2} g_{XY}(q) \partial_\mu q^X \partial^\mu q^Y + C_{AB} \bar{\zeta}^A \nabla \zeta^B - \frac{1}{4} W_{ABCD} \bar{\zeta}^A \zeta^B \bar{\zeta}^C \zeta^D. \quad (6.5.49)$$

5次元時空中におけるハイパー超組 5次元時空中におけるハイパー超組の理論は、カイラリティの指定がないことを除いて、本質的に6次元時空と同じである。まず、超対称変換は、ゲージ化された場合を含めて

$$\delta q^X = -i \bar{\epsilon}^i \zeta^A f^X_{iA}, \quad (6.5.50a)$$

$$\delta \zeta^A = \frac{1}{2} i f^{iA}{}_X \mathcal{D} q^X \epsilon_i - \zeta^B \omega_{XB}{}^A \delta q^X + \frac{1}{2} \sigma^I k_I^X f^{iA}{}_X \epsilon_i. \quad (6.5.50b)$$

ここで、 σ^I はゲージ超組のスカラ、 k_I^X は \mathcal{M}_H の Killing ベクトルである。

ゲージ場と結合しない場合の超対称 Lagrangian 密度 \mathcal{L}_5 は6次元の表式 (6.5.49) と同じ。

4次元時空中におけるハイパー超組 $\epsilon'^j, \epsilon'_j = \epsilon'^k \epsilon_{kj} = (\epsilon'^j)^C (i, j, k = 1, 2)$ を5次元における Symplectic Majorana スピノールを4次元スピノールと見なしたものとして、対応する4次元の左巻きおよび右巻き Weyl スピノールの組 $\epsilon^i = P_L \epsilon^i, \epsilon_i = (\epsilon^i)^C = B^{-1}(\epsilon^i)^*(i, j = 1, 2)$ を

$$\epsilon'^i = \epsilon^i + \epsilon^{ij} \epsilon_j, \quad \bar{\epsilon}_i = \bar{\epsilon}^i - \epsilon^{ij} \bar{\epsilon}_j, \quad (6.5.51a)$$

$$\epsilon'_i = \epsilon^j \epsilon_{ji} + \epsilon_i, \quad \bar{\epsilon}'_i = \bar{\epsilon}^j \epsilon_{ji} - \bar{\epsilon}_i \quad (6.5.51b)$$

により定義する。この対応において、5次元における荷電共役変換は

$$(\epsilon'^i)^C = -B^{-1} \gamma_* (\epsilon^i)^* \quad (6.5.52)$$

と表される。また、5次元スピノール場 $\zeta'^A, \zeta'_A = \zeta'^B C_{BA}$ と、4次元左巻き Weyl スピノール ζ^A および右巻き Weyl スピノール $\zeta_{\bar{A}} = (\zeta^A)^C$ の対応は、

$$\zeta'^A = \zeta^A - \zeta_{\bar{B}} \rho^{\bar{B}A}, \quad \bar{\zeta}'^A = \bar{\zeta}^A + \bar{\zeta}_{\bar{B}} \rho^{\bar{B}A}, \quad (6.5.53a)$$

$$\zeta'_A = \zeta^B C_{BA} + \zeta_{\bar{B}} d^{\bar{B}}_A, \quad \bar{\zeta}'_A = \bar{\zeta}^B C_{BA} - \bar{\zeta}_{\bar{B}} d^{\bar{B}}_A \quad (6.5.53b)$$

で与えられる。

このとき、超対称変換は、5D からの次元低下より、

$$\delta q^X = -i \bar{\epsilon}^i \zeta^A f^X_{iA} + i \epsilon^{ij} \rho^{\bar{A}B} \bar{\epsilon}_i \zeta_{\bar{A}} f^X_{jB}, \quad (6.5.54a)$$

$$\delta \zeta^A = \frac{1}{2} i f^{iA}_X \not{D} q^X \epsilon_i - \zeta^B \omega_{XB}{}^A \delta q^X + i \bar{X}^I k_I^X f^{iA}_X \epsilon_{ij} \epsilon^j \quad (6.5.54b)$$

ここで、 $\delta \zeta^A$ の右辺第3項は、ゲージ化した場合のゲージ超組からの寄与である。超対称な Lagrange 密度は

$$\mathcal{L}_4 = -\frac{1}{2} g_{XY} \partial_\mu q^X \partial^\mu q^Y - d^{\bar{A}}_B (\bar{\zeta}_{\bar{A}} \nabla \zeta^B + \bar{\zeta}^{\bar{B}} \nabla \zeta_{\bar{A}}) + \frac{1}{2} W_{AB} \epsilon^{\mathcal{F}} d^{\bar{C}}_\epsilon d^{\bar{D}}_{\mathcal{F}} \bar{\zeta}_{\bar{C}} \zeta_{\bar{D}} \bar{\zeta}^A \zeta^B \quad (6.5.55)$$

ここで、

$$\nabla_\mu \zeta^A = \partial_\mu \zeta^A + \partial_\mu q^X \omega_{XB}{}^A \zeta^B. \quad (6.5.56)$$

ゲージ化 ゲージ化は、 $N = 1, D = 4$ の場合と同様、ゲージ群 G をハイパー超組のスカラ多様体 \mathcal{M}_H とその上のバンドル $(Z(\mathcal{M}_H), \rho_{A\bar{B}})$ および対応テンソル f^X_{iA} の同型変換群への埋め込み、および、スピノール場 (ζ^A) への線形表現により与えられる。

対応する \mathcal{M}_H 上の Killing ベクトルを k_I^X と記すと、まず、4 元数構造 \mathbf{J}_X^J の不変性より、

$$(\nabla_X k_I^Y) \mathbf{J}_Y^Z = \mathbf{J}_X^Y (\nabla_Y k_I^Z) \quad (6.5.57)$$

が成り立つ。これより、次の関係を満たすモーメント写像 \mathbf{P}_I が定まる：

$$\partial_X \mathbf{P}_I = \mathbf{J}_X^Y k_{IY}, \quad (6.5.58a)$$

$$k_I^X \mathbf{J}_{XY} k_J^Y = f^K_{IJ} \mathbf{P}_K. \quad (6.5.58b)$$

次に、スピノール場への表現は、

$$t_{IA}{}^B = \frac{1}{2} f^Y_{iA} \nabla_Y k_I^X f^{iB}{}_X \quad (6.5.59)$$

により与えられる。交換関係は

$$[t_I, t_J]_{B^A} = f^K_{IJ} t_{KB}{}^A - k_I^X k_J^Y \mathcal{R}_{XYB}{}^A \quad (6.5.60)$$

また、次の関係式を満たす：

$$t_I^{AB} \equiv C^{AC} t_{IC}{}^A = t_I^{BA}. \quad (6.5.61a)$$

$$\bar{t}_I{}^{\bar{A}}{}_{\bar{B}} \equiv (t_{IA}{}^B)^* = -\rho^{A\bar{D}} t_{ID}{}^C \rho_{C\bar{B}}. \quad (6.5.61b)$$

以上の記号を用いると、ゲージ化されたハイパー超組の $\mathcal{N} = 2$ 超対称性を持つ Lagrange 密度は次式で与えられる：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_6 = & -\frac{1}{2} g_{XY}(q) D_\mu q^X D^\mu q^Y + C_{AB} \bar{\zeta}^A \hat{\mathcal{D}} \zeta^B - \frac{1}{4} W_{ABCD} \bar{\zeta}^A \zeta^B \bar{\zeta}^C \zeta^D \\ & - 2k_I^X f^{iA}{}_X \bar{\zeta}_A \lambda_i^I + 2\mathbf{P}_I \cdot \mathbf{Y}^I, \end{aligned} \quad (6.5.62a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = & -\frac{1}{2} g_{XY}(q) D_\mu q^X D^\mu q^Y + C_{AB} \bar{\zeta}^A \hat{\mathcal{D}} \zeta^B - \frac{1}{4} W_{ABCD} \bar{\zeta}^A \zeta^B \bar{\zeta}^C \zeta^D \\ & - 2ik_I^X f^{iA}{}_X \bar{\zeta}_A \lambda_i^I + i\sigma^I t_{IB}{}^A \bar{\zeta}_A \zeta^B + 2\mathbf{P}_I \cdot \mathbf{Y}^I - \frac{1}{2} \sigma^I \sigma^J k_I^X k_{JX}, \end{aligned} \quad (6.5.62b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & -\frac{1}{2} g_{XY} D_\mu q^X D^\mu q^Y - d^{\bar{A}}{}_{\bar{B}} \left(\bar{\zeta}_A \hat{\mathcal{D}} \zeta^B + \bar{\zeta}^B \nabla \zeta_{\bar{A}} \right) + \frac{1}{2} W_{AB}{}^{\mathcal{E}\mathcal{F}} d^{\bar{C}}{}_{\bar{E}} d^{\bar{D}}{}_{\bar{F}} \bar{\zeta}_{\bar{C}} \zeta_{\bar{D}} \bar{\zeta}^{\mathcal{A}} \zeta^{\mathcal{B}} \\ & + \left(2X^I t_{IAB} \bar{\zeta}^A \zeta^B + 2i f^{iA}{}_X k_I^X \bar{\zeta}_{\bar{B}} \Omega^{jI} \varepsilon_{ij} d^{\bar{B}}{}_{\bar{A}} + \text{h.c.} \right) \\ & + 2\mathbf{P}_I \cdot \mathbf{Y}^I - 2\bar{X}^I X^J k_{JX} k_{IX}. \end{aligned} \quad (6.5.62c)$$

目次へ

ここで、

$$D_\mu q^X = \partial_\mu q^X - A_\mu^I k_I^X, \quad (6.5.63a)$$

$$\hat{D}_\mu \zeta^A = \partial_\mu \zeta^A + \partial_\mu q^X \omega_{XB}{}^A \zeta^B - A_\mu^I t_{IB}{}^A \zeta^B. \quad (6.5.63b)$$

6.5.3 $\mathcal{N} = 2$ 4次元超重力理論

6.5.3.1 最終的な基本場

- Poincaré 超組: $\theta_\mu^a, \psi_\mu^i, A_\mu^0$.

$$\psi_\mu^i = P_L \psi^i. \quad (6.5.64)$$

- ゲージ超組: $A_\mu^\alpha, z^\alpha, \chi^{i\alpha}$ ($\alpha = 1, \dots, n_V$).

$$\chi_i^\alpha = P_L \chi_i^\alpha, \quad \chi^{i\bar{\alpha}} = P_R \chi^{i\bar{\alpha}}. \quad (6.5.65)$$

- ハイパー超組: q^u, ζ^A ($u = 1, \dots, 4n_H; A = 1, \dots, 2n_H$).

$$\zeta^A = P_L \zeta^A, \quad \zeta_A = P_R \zeta_A. \quad (6.5.66)$$

6.5.3.2 スカラー多様体の構造

スカラー多様体 \mathcal{M}_S は、 $4n_H$ 次元の 4 元数型ケーラー多様体 \mathcal{M}_H と $2n_V$ 次元の射影特殊 Kähler 多様体 \mathcal{M}_V の積となる：

$$\mathcal{M}_S = \mathcal{M}_H \times \mathcal{M}_V \ni (q^u, z^\alpha). \quad (6.5.67)$$

(1) 射影特殊ケーラー多様体 \mathcal{M}_V $2n_V$ 次元の射影特殊ケーラー多様体は、閉相似キリングベクトルをもつ $2(n_V + 1)$ 次元のアフィン特殊ケーラー多様体の商多様体として得られる。

まず、 $2(n_V + 1)$ 次元のアフィン特殊ケーラー多様体 M が、 w^I ($I = 0, \dots, n_V$) を複素座標系として、シンプレクティックベクトル

$$V = {}^T(X^I(w), F_I(w)); \quad \langle \partial_I V, \partial_J V \rangle = 0 \quad (6.5.68)$$

により定義される。ここで、シンプレクティック内積 $\langle *, * \rangle$ は

$$\langle V, V' \rangle = X^I F'_I - F_I X'^I. \quad (6.5.69)$$

ケーラーポテンシャル $\tilde{\mathcal{K}}$ は

$$\tilde{\mathcal{K}} = i \langle V, \bar{V} \rangle = i(X^I \bar{F}_I - F_I \bar{X}^I) \quad (6.5.70)$$

により与えられる。 $\partial_J X^I$ が正則行列となる場合には、前ポテンシャルと呼ばれる正則関数 $F(X)$ が存在して、 $F_I = \partial F / \partial X^I$ と表される。

このアフィン特殊ケーラー多様体が閉相似キリングベクトル k_D をもつとすると,

$$k_D^I \partial_I V(w) = V(w). \quad (6.5.71)$$

前ポテンシャルが存在するとき, $k_D = X^I \partial / \partial X^I$ となるので, この条件は

$$X^I \partial_{X^I} F(X) = 2F(X) \quad (6.5.72)$$

と表される.

いま, 新たな正則座標系 $(y, z^\alpha) (\alpha = 1, \dots, n_V)$ を

$$k_D^I \partial_I z^\alpha = 0, \quad k_D^I \partial_I y = y \quad (6.5.73)$$

により導入すると, $k_D = y \partial_y$ で,

$$V = yv(z); \quad v(z) = \mathcal{T}(Z^I(z), \hat{F}_I(z)) \quad (6.5.74)$$

M の正則閉相似ベクトル k_D およびそれに随伴するキリングベクトルの軌道 \mathcal{O} による $2n_V$ 次元の商多様体を \mathcal{M}_V とすると, z^α はその複素座標系となる. M の超曲面

$$\langle V, \bar{V} \rangle = \frac{i}{\kappa^2} \Leftrightarrow y\bar{y} = \frac{i}{\kappa^2 \langle v(z), \bar{v}(z) \rangle} \equiv e^{\kappa^2 \mathcal{K}(z, \bar{z})} \quad (6.5.75)$$

を Σ , $\pi: M \rightarrow \mathcal{M}_V$ として, $p \in \Sigma$ に対して, $\pi(p) \in \mathcal{M}_V$ におけるベクトル a, b の内積を, $\tilde{a}, \tilde{b} \in T_p(\Sigma)$, $\pi(\tilde{a}) = a, \pi(\tilde{b}) = b, \tilde{a}, \tilde{b} \perp \mathcal{O}$ となるベクトルを用いて, $g(a, b) = \tilde{g}(\tilde{a}, \tilde{b})$ により定義する. このとき,

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = \tilde{g}_{\alpha\bar{\beta}} - \frac{\tilde{g}_{\bar{y}\alpha} \tilde{g}_{y\bar{\beta}}}{\tilde{g}_{y\bar{y}}} = iy\bar{y} \langle \nabla_\alpha v, \bar{\nabla}_{\bar{\beta}} \bar{v} \rangle = \partial_\alpha \partial_{\bar{\beta}} \mathcal{K} \quad (6.5.76)$$

が成り立つ. すなわち, \mathcal{M}_V は, \mathcal{K} をケーラーポテンシャルとするケーラー多様体となる. ここで,

$$\nabla_\alpha v = (\partial_\alpha + \kappa^2 \partial_\alpha \mathcal{K})v, \quad \bar{\nabla}_{\bar{\alpha}} v = 0, \quad \nabla_\alpha y = \bar{\nabla}_{\bar{\alpha}} y = 0. \quad (6.5.77)$$

また, $v(z)$ は次の条件を満たす \mathcal{M}_V 上の正則シンプレクティックベクトル場となり, $v(z)$ を与えると \mathcal{M}_V の射影特殊ケーラー構造が定まる:

$$\langle v, \nabla_\alpha v \rangle = \langle \nabla_\alpha v, \nabla_{\bar{\beta}} v \rangle = 0 \quad (6.5.78)$$

曲率テンソルは,

$$R_{\alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}} = \frac{2}{a} g_{\bar{\alpha}(\alpha} g_{\beta)\bar{\beta}} - C_{\alpha\beta\gamma} g^{\gamma\bar{\gamma}} \bar{C}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}, \quad (6.5.79a)$$

$$C_{\alpha\beta\gamma} = i \langle \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} V, \nabla_{\gamma} V \rangle \quad (6.5.79b)$$

$g_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_{\alpha} \partial_{\bar{\beta}} \mathcal{K}$ がスカラー場 z^{α} およびスピノール場 $\chi^{i\alpha}$ の運動項を決定する. また, $g_{\alpha\bar{\beta}}$ が正則なとき, 行列 $(\bar{Z}^J(\bar{z}) \nabla_{\alpha} Z^J(z))$ は正則で, ゲージ場の結合関数 \mathcal{N}_{IJ} は,

$$\bar{\mathcal{N}}_{IJ} = \left(\bar{F}_I(\bar{z}) \nabla_{\alpha} \hat{F}_I(z) \right) \left(\bar{Z}^J(\bar{z}) \nabla_{\alpha} Z^J(z) \right)^{-1} \quad (6.5.80)$$

で与えられる. とくに, 前ポテンシャルが存在するときには,

$$\mathcal{N}_{IJ} = \bar{F}_{IJ} + i \frac{N_{IK} X^K N_{IL} X^L}{N_{MN} X^M X^N}, \quad N_{IJ} = 2\text{Im} F_{IJ}. \quad (6.5.81)$$

(2) 4元数型ケーラー多様体 \mathcal{M}_H $4n_H$ 次元の4元数型ケーラー多様体は, 閉相似キリングベクトルをもつ $4(n_H+1)$ 次元のハイパーケーラー多様体の商多様体として得られる. $\rho_{A\bar{B}} (A, B = 1, \dots, 2n_H)$ を \mathcal{M}_H の $2n_H$ 次元ベクトルバンドル $Z(\mathcal{M}_H)$ のテンソルで

$$\rho_{A\bar{B}} \rho^{\bar{B}C} = -\delta_A^C, \quad \rho^{\bar{A}B} = (\rho_{A\bar{B}})^* \quad (6.5.82)$$

を満たすものとする. また, $f^{iA}_u, f^u_{iA} (i = 1, 2, A = 1, \dots, 2n_H, u = 1, \dots, 4n_H)$ を次の性質を持つテンソル $(T^*(\mathcal{M}_H) \otimes (Z(\mathcal{M}_H) \oplus Z(\text{cal} \mathcal{M}_H)))$ の断面) とする:

$$f^{iA}_v f^u_{iA} = \delta_v^u, \quad f^{iA}_u f^u_{jB} = \delta_j^i \delta_B^A, \quad (6.5.83a)$$

$$(f^{iA}_u)^* = f^{jB}_u \epsilon_{ji} \rho_{B\bar{A}}, \quad (f^u_{iA})^* = \epsilon^{ij} \rho^{\bar{A}B} f^u_{jB}. \quad (6.5.83b)$$

さらに, h_{uv} を計量として, 反対称形式 C_{AB} を

$$h_{uv} = f^{iA}_u \epsilon_{ij} C_{AB} f^{jB}_v \Leftrightarrow h_{uv} f^u_{iA} f^v_{jB} = \epsilon_{ij} C_{AB} \quad (6.5.84)$$

により定義する. このとき, h_{uv} がスカラー場 q^u の運動項を, C_{AB} がスピノール場 ζ^A の運動項を決定する.

f^u_{iA} の実数性条件より,

$$2f^{iA}_u f^v_{jA} = \delta_u^v \delta_j^i + \tau_j^i \cdot \mathbf{J}_u^v \Leftrightarrow \mathbf{J}_u^v = (\mathbf{J}_u^v)^* = -f^{iA}_u f^v_{jA} \tau_i^j \quad (6.5.85)$$

により, $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$ を定義すると, (\mathbf{J}, h) は \mathcal{M}_H の4元数型ケーラー構造となり,

$$\tilde{\nabla}_u \mathbf{J} \equiv \nabla_u \mathbf{J} + 2\omega_u \times \mathbf{J} = 0 \quad (6.5.86)$$

が成り立つ. ここで, 接続係数 $\omega_u = (-1/2)\omega_{uj}{}^i \tau_i{}^j$ ($\tau_i{}^j = i\sigma_{ij}$) とバンドル $Z(\mathcal{M}_H)$ の接続係数 $\omega_{uB}{}^A$ は, 条件

$$\tilde{\nabla}_v f^{iA}{}_u \equiv \partial_v f^{iA}{}_u + f^{iB}{}_u \omega_{vB}{}^A + f^{jA}{}_u \omega_{vj}{}^i - \Gamma_{vu}^w [h] f^{iA}{}_w = 0 \quad (6.5.87)$$

より

$$\omega_{uj}{}^i \delta_B^A + \omega_{uB}{}^A \delta_j^i = -f^v{}_{jB} (\partial_v f^{iA}{}_v - \Gamma^w{}_{uv} f^{iA}{}_w) \quad (6.5.88)$$

と定まる. $\omega_{uj}{}^i$ は

$$\nabla_u \epsilon^{ij} \equiv \partial_u \epsilon^{ij} + 2\epsilon^{k[j} \omega_{uk}{}^{i]} = 2\omega_u{}^{[ij]} = 0 \quad (6.5.89)$$

より, $\omega_u = (-1/2)\omega_{uj}{}^i \tau_i{}^j$ は $SU(2)$ 接続となる. また,

$$\nabla_u \rho_{A\bar{B}} \equiv \partial_u \rho_{A\bar{B}} - \omega_{uA}{}^C \rho_{C\bar{B}} - \omega_{u\bar{B}}{}^{\bar{C}} \rho_{A\bar{C}} = 0 \quad (6.5.90)$$

より, $\omega_{uB}{}^A$ は $USp(2n_H)$ 接続となる.

これらの接続の曲率テンソルをそれぞれ, \mathcal{R}_{uv} , $\mathcal{R}_{uvB}{}^A$ とおくと, 計量 h のリーマン曲率テンソルは

$$R_{uv}{}^w{}_x = f^w{}_{iA} f_x{}^{iB} \mathcal{R}_{uvB}{}^A - \mathbf{J}_x{}^w \cdot \mathcal{R}_{uv} \quad (6.5.91)$$

と表される. さらに, 4元数型ケーラー多様体はアインシュタイン空間となる:

$$R_{uv} = \frac{1}{4n_H} h_{uv} R. \quad (6.5.92)$$

また, $SU(2)$ 接続に対する曲率形式は4元数型構造に比例する:

$$\mathcal{R}_{uv} = \frac{1}{2} \nu \mathbf{J}_{uv}; \quad \nu \equiv \frac{R}{4n_H(n_H + 2)} = -\kappa^2. \quad (6.5.93)$$

(3) ゲージ化 ゲージ変換に対応する4元数型ケーラー多様体 \mathcal{M}_H のキリングベクトルを k_I^u と表記すると, もとのハイパーケーラー多様体の対応するキリングベクトルの対するモーメント写像 \mathbf{P}_I との間に

$$(\nabla_u k_I^v) \mathbf{J}_v{}^w - \mathbf{J}_u{}^v (\nabla_v k_I^w) = \nu \mathbf{J}_u{}^w \times \mathbf{P}_I \quad (6.5.94)$$

の関係が成り立つ。これより

$$\tilde{\nabla}_u \mathbf{P}_I \equiv \partial_u \mathbf{P}_I + 2\boldsymbol{\omega}_u \times \mathbf{P}_I = \mathbf{J}_{uv} k_I^v, \quad (6.5.95a)$$

$$\nabla_u k_I^v = -\mathbf{R}_u^v \cdot \mathbf{P}_I + f^{iB}{}_u f^v{}_{iA} t_{IB}^A; \quad t_{IA}^B \equiv \frac{1}{2} f^v{}_{iA} \nabla_v k_I^u \quad (6.5.95b)$$

$$2n_H \nu \mathbf{P}_I = \mathbf{J}_u{}^v \nabla_v k_I^u. \quad (6.5.95c)$$

なお、キリングベクトルは次の整合性条件を満たす必要がある：

$$k_I^u \mathbf{J}_{uv} k_J^v = f^K{}_{IJ} \mathbf{P}_K + \nu \mathbf{P}_I \times \mathbf{P}_J. \quad (6.5.96)$$

ゲージ変換のアフィン特殊ケーラー多様体に対する作用は線形で随伴表現に従う。対応する前ポテンシャルの変換は

$$\delta_G F \equiv F_I \theta^K X^J f_{JK}^I = -\theta^K C_{K,IJ} X^I X^J \quad (6.5.97)$$

と変換する。ここで、 $C_{K,IJ}$ は実定数である。これより、射影特殊ケーラー多様体における対応するキリングベクトル k_I^α は

$$\delta z^\alpha = \theta^J k_J^\alpha; \quad k_J^\alpha \nabla_\alpha Z^I = Z^K f_{KJ}^I - i\kappa^2 Z^I P_J^0. \quad (6.5.98)$$

ここで、

$$P_I^0 = -iN_{IJ} f_{KL}^J X^K \bar{X}^L = iN_{JL} f_{KI}^J X^K \bar{X}^L = -iN_{JK} f_{LI}^J X^K \bar{X}^L. \quad (6.5.99)$$

6.5.3.3 超重力理論の最も一般的な作用積分

$$\begin{aligned}
|\theta|^{-1} \mathcal{L} = & \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{1}{2} R - \bar{\psi}_{i\mu} \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \psi_\rho^i \right) - g_{\alpha\bar{\beta}} \hat{\partial}_\mu z^\alpha \hat{\partial}^\mu \bar{z}^{\bar{\beta}} - \frac{1}{2} h_{uv} \hat{\partial}_\mu q^u \hat{\partial}^\mu q^v - V \\
& + \frac{2}{3} C_{I,JK} |\theta|^{-1} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\mu^I A_\nu^J \left(\partial_\rho A_\sigma^K + \frac{3}{8} f^K{}_{LM} A_\rho^L A_\sigma^M \right) \\
& + \left\{ -\frac{1}{4} i \mathcal{N}_{IJ} F_{\mu\nu}^{+I} F^{+\mu\nu J} + F_{\mu\nu}^{+I} \text{Im} \mathcal{N}_{IJ} Q^{\mu\nu+J} \right. \\
& \quad - \frac{1}{4} g_{\alpha\bar{\beta}} \bar{\chi}_i^\alpha \not{D} \chi^{i\bar{\beta}} - \bar{\zeta}_A \hat{D} \zeta^A \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} g_{\alpha\bar{\beta}} \bar{\psi}_{ia} \hat{\partial} z^\alpha \gamma^a \chi^{i\bar{\beta}} - i \bar{\psi}_a^i \hat{\partial} q^u \gamma^a \zeta^A f_{uiA} + \text{h.c.} \right\} \\
& + \mathcal{L}_m - \bar{\psi}_i \cdot \gamma v^i + \text{four-fermion terms.} \tag{6.5.100}
\end{aligned}$$

ここで、共変微分は

$$\hat{\partial}_\mu z^\alpha = \partial_\mu z^\alpha - A_\mu^I k_I^\alpha, \quad \hat{\partial}_\mu q^u = \partial_\mu q^u - A_\mu^I k_I^u, \tag{6.5.101a}$$

$$D_\mu \psi_{\nu i} = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu{}^{ab}(\theta) \gamma_{ab} + \frac{i}{2} \mathcal{B}_\mu \right) \psi_{\nu i} + \mathcal{V}_{\mu i}{}^j \psi_{\nu j}, \tag{6.5.101b}$$

$$D_\mu \chi_i^\alpha = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu{}^{ab}(\theta) \gamma_{ab} + \frac{i}{2} \mathcal{B}_\mu \right) \chi_i^\alpha + \mathcal{V}_{\mu i}{}^j \chi_j^\alpha - A_\mu^I \chi_i^\beta \partial_\beta k_I^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \chi_i^\gamma \partial_\mu z^\beta, \tag{6.5.101c}$$

$$D_\mu \zeta^A = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu{}^{ab}(\theta) \gamma_{ab} + \frac{i}{2} \mathcal{B}_\mu \right) \zeta^A - A_\mu^I t_{IB}{}^A \zeta^B + \partial_\mu q^u \omega_{uB}{}^A \zeta^B \tag{6.5.101d}$$

これらの式に現れる複合ゲージ場 $\mathcal{B}_\mu, \mathcal{V}_{\mu i}{}^j = \boldsymbol{\tau}_i{}^j \cdot \boldsymbol{\nu}_\mu$ の表式は、

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_\mu &= -\kappa^2 \omega_\alpha \partial_\mu z^\alpha - \kappa^2 \omega_{\bar{\alpha}} \partial_\mu \bar{z}^{\bar{\alpha}} - \kappa^2 A_\mu^I P_I^0 \\
&= -\kappa^2 \hat{\partial}_\mu z^\alpha + \frac{i}{2} A_\mu^I r_I + \text{h.c.}, \tag{6.5.102a}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\nu}_\mu = -\boldsymbol{\omega}_u \partial_\mu q^u - \frac{1}{2} \kappa^2 A_\mu^I \mathbf{P}_I = -\boldsymbol{\omega}_u \hat{\partial}_\mu q^u + \frac{1}{2} A_\mu^I \mathbf{r}_I. \tag{6.5.102b}$$

ただし、 $\omega_\alpha = (-i/2) \partial_\alpha \mathcal{K}$, $\mathbf{r}_I = -2\boldsymbol{\omega}_u k_I^u - \kappa^2 \mathbf{P}_I$. また、 ζ^A に対するゲージ変換の表現行列 $t_{IA}{}^B$ は

$$t_{IA}{}^B = \frac{1}{2} f^v{}_{iA} \nabla_v k_I^u f^{iB}{}_u. \tag{6.5.103}$$

また、CS 項の係数 $C_{K,IJ}$ は

$$C_{K,IJ} = \bar{C}_{K,IJ} = -f_{K(I}^L F_{J)L} \tag{6.5.104}$$

Pauli 項の Q は

$$Q^{ab-J} \equiv \bar{\nabla}_{\bar{\alpha}} \bar{X}^J \left(\frac{1}{8} g^{\beta\bar{\alpha}} C_{\beta\gamma\delta} \bar{\chi}_i^{\gamma} \gamma_{ab} \chi_j^{\delta} \epsilon^{ij} + \bar{\chi}^{\bar{\alpha}i} \gamma^a \psi^{bj} \epsilon_{ij} \right) + X^J \left(\bar{\psi}_i^a \psi_j^b \epsilon^{ij} + \frac{1}{2} \kappa^2 \bar{\zeta}^A \gamma^{ab} \zeta^B C_{AB} \right). \quad (6.5.105)$$

スカラーポテンシャル V はゲージ化により生じ,

$$V = \left[-\frac{1}{2} ((\text{Im} \mathcal{N})^{-1})^{IJ} - 4\kappa^2 X^I \bar{X}^J \right] \mathbf{P}_I \cdot \mathbf{P}_J + 2\bar{X}^I X^J k_I^u k_J^v h_{uv} + (N^{-1})^{IJ} P_I^0 P_J^0 \quad (6.5.106)$$

スピノール場の質量項 \mathcal{L}_m は,

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} S_{ij} \bar{\psi}_\mu^i \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu^j - \frac{1}{2} m_{\alpha\beta}^{ij} \bar{\chi}_i^\alpha \chi_j^\beta - m_{i\bar{\alpha}}^A \bar{\chi}^{i\bar{\alpha}} \zeta_A - \frac{1}{2} m_{AB} \bar{\zeta}^A \zeta^B + \text{h.c.} \quad (6.5.107)$$

ここで,

$$S_{ij} = P_{Iij} \bar{X}^J, \quad (6.5.108a)$$

$$m_{\alpha\beta}^{ij} = \frac{1}{2} P_I^{ij} C_{\alpha\beta\gamma} g^{\gamma\bar{\delta}} \bar{\nabla}_{\bar{\delta}} \bar{X}^I + \epsilon^{ij} \nabla_\alpha X^I k_i^{\bar{\gamma}} g_{\beta\bar{\gamma}}, \quad (6.5.108b)$$

$$m_{i\bar{\alpha}}^A = 2i k_I^u \epsilon_{ij} f^{jA}{}_u \bar{\nabla}_{\bar{\alpha}} \bar{X}^I, \quad (6.5.108c)$$

$$m_{AB} = -4X^I t_{IAB}. \quad (6.5.108d)$$

最後に、 v^i は

$$v^i = \frac{1}{2} W_\alpha^{ij} \chi_j^\alpha + 2N^i{}_A \zeta^A; \quad (6.5.109)$$

$$W_\alpha^{ij} \equiv (i\epsilon^{ij} P_I^0 - P_I^{ij}) \nabla_\alpha X^I = \epsilon^{ij} g_{\alpha\bar{\beta}} k_I^{\bar{\beta}} X^I + P_I^{ij} \nabla_\alpha X^I \quad (6.5.110)$$

$$N^i{}_A \equiv i f^{iB}{}_u k_I^u X^I C_{BA}. \quad (6.5.111)$$

6.5.3.4 超対称変換

ボゾン場の超対称変換は

$$\delta\theta_\mu^a = \frac{1}{2}\bar{\epsilon}^i\gamma^a\psi_{\mu i} + \text{h.c.}, \quad (6.5.112a)$$

$$\delta z^\alpha = \frac{1}{2}\bar{\epsilon}^i\chi_i^\alpha, \quad (6.5.112b)$$

$$\delta q^u = -i\epsilon^i\zeta^A f^u{}_{iA} + \text{h.c.}, \quad (6.5.112c)$$

$$\delta A_\mu^I = \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\bar{\epsilon}_j\gamma_\mu\gamma_\mu\chi_j^\alpha\nabla_\alpha X^I + \epsilon^{ij}\bar{\epsilon}_i\psi_{\mu j}X^I + \text{h.c.} \quad (6.5.112d)$$

フェルミ場の超対称変換のボゾン部分は

$$\delta\psi_\mu^i = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab} - \frac{1}{2}i\mathcal{B}_\mu\right)\epsilon^i + \mathcal{V}_\mu{}^i{}_j\epsilon^j - \frac{1}{16}\gamma^{ab}T_{ab}^-\epsilon^{ij}\gamma_\mu\epsilon_j + \frac{1}{2}\kappa^2\gamma_\mu S^{ij}\epsilon_j, \quad (6.5.113a)$$

$$\delta\chi_i^\alpha = \hat{\rho}z^\alpha\epsilon_i - \frac{1}{2}G_{ab}^{-\alpha}\gamma^{ab}\epsilon_{ij}\epsilon^j + g^{\alpha\bar{\beta}}\bar{W}_{\bar{\beta}ji}\epsilon^j, \quad (6.5.113b)$$

$$\delta\zeta^A = \frac{1}{2}if^i{}_A{}_u\hat{\rho}q^u\epsilon_i - \zeta^B\omega_{uB}{}^A\delta q^u + \bar{N}_i^A\epsilon^i. \quad (6.5.113c)$$

ここで,

$$\bar{W}_{\bar{\alpha}ij} = (-i\epsilon_{ij}P_I^0 - P_{Iij})\bar{\nabla}_{\bar{\alpha}}\bar{X}^I = \epsilon_{ij}g_{\beta\bar{\alpha}}k_I^\beta\bar{X}^I + P_{Iij}\bar{\nabla}_{\bar{\alpha}}\bar{X}^I, \quad (6.5.114a)$$

$$\bar{N}_i^A \equiv -i\epsilon_{ij}f^j{}_A{}_uk_I^u\bar{X}^I, \quad (6.5.114b)$$

$$T_{ab}^+|_{\text{bos}} = -4\kappa^2\bar{X}^I\text{Im}\mathcal{N}_{IJ}F_{ab}^{+J} = 2i\kappa^2(\bar{X}^IG_{Iab}^+ - \bar{F}_IF_{ab}^{+I}), \quad (6.5.114c)$$

$$G_{ab}^{-\alpha} = g^{\alpha\bar{\beta}}\bar{\nabla}_{\bar{\beta}}\bar{X}^I\text{Im}\mathcal{N}_{IJ}F_{ab}^{-J}. \quad (6.5.114d)$$

なお、フェルミ場の超対称変換に対するゲージ化による付加項 (femion shift) とスカラーポテンシャルの間には次の関係がある：

$$-3\kappa^2 S^{ik}S_{jk} + W_\alpha^{ik}g^{\alpha\bar{\beta}}\bar{W}_{\bar{\beta}jk} + 4N_A^i\bar{N}_i^A = \delta_j^i V. \quad (6.5.115)$$

次元 D	超共形代数	R 対称性
6	$\text{OSp}(8^* 2)$	$\text{USp}(2) \cong \text{SU}(2)$
5	$F^2(4)$	$\text{USp}(2) \cong \text{SU}(2)$
4	$\text{SU}(2, 2 2)$	$\text{SU}(2) \times \text{U}(1)$

表 10: $D = 4, 5, 6$ における極小超共形代数と R 対称性

6.5.4 $\mathcal{N} = 2$ 4次元超重力理論の超共形アプローチによる導出

$\mathcal{N} = 2$ 超共形代数 生成元と対応するゲージパラメータおよびゲージ場は

P_A	M_{ab}	D	K_a	U_i^j	T	Q^i	S^i
ξ^a	λ^{ab}	λ_D	λ_K^a	λ_j^i	λ_T	ϵ_i	η_i
θ_μ^a	ω_μ^{ab}	b_μ	f_μ^a	$V_{\mu j}^i$	B_μ	$\psi_{i\mu}$	$\phi_{i\mu}$

標準 Weyl 超組と拘束条件 上記の超共形ゲージ場に、 $\mathcal{N} = 1$ の場合と同様の拘束条件とゲージ固定条件を課して、物理的なゲージ場 θ^a, ψ_i のみを残すと、off-shell ではボゾン場とフェルミオン場の数がバランスしないため、超対称変換が閉じない。この問題を解決するため、超共形ゲージ場超組に $(T_{ab}, D; \chi^i)$ を加えて、超組を拡大し、変換則を修正する。

拘束条件としては、次のものを選ぶ：

$$R_{\mu\nu}(P^a) = 0 \Rightarrow \omega^{ab} \quad (6.5.116a)$$

$$\hat{R}_{ac}(M^{bc}) + i\hat{R}_a{}^b(T) + \frac{1}{4}T_{ca}^-T^{+bc} + \frac{3}{2}\delta_a^b D = 0 \Rightarrow f^a \quad (6.5.116b)$$

$$\gamma^b \hat{R}_{ba}(Q^i) + \frac{3}{2}\gamma_a \chi^i = 0 \Rightarrow \phi_i \quad (6.5.116c)$$

物質超組との結合 ゲージ超組 $(X^I, \Omega_i^I, A_\mu^I, \mathbf{Y}^I)$ とハイパー超組 (q^X, λ^A) の共形ウェイト w とカイラルウェイト c は、超共形代数の構造と超対称変換に対する変換則より、次のようになる。

成分場	ゲージ超組 (off-shell)				ハイパー超組 (on-shell)	
	X^I	A_μ^I	\mathbf{Y}^I	Ω_i^I	q^X	ζ^A
自由度	2	3	3	8	4	4
w	1	0	2	3/2	1	3/2
c	1	0	0	1/2	0	-1/2
L/R				L		L

これより、ゲージ超組 $(X^I, \Omega_i^I, A_\mu^I, \mathbf{Y}^I)$ の超共形変換に対する変換則は

$$\delta X^I = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \Omega_i^I, \quad (6.5.117a)$$

$$\delta \Omega_i^I = \mathcal{D} X^I \epsilon_I + \frac{1}{4} \gamma^{ab} \mathcal{F}_{ab}^I \epsilon_{ij} \epsilon^j + Y_{ij}^I \epsilon^j + X^J \bar{X}^K f^I{}_{JK} \epsilon_{ij} \epsilon^j + (2\mathbf{X}^I, 117b)$$

$$\delta A^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \bar{\epsilon}_i \gamma_\mu \Omega_j^I + \epsilon^{ij} \bar{\epsilon}_i \psi_{\mu j} X^I + \text{h.c.}, \quad (6.5.117c)$$

$$\delta \mathbf{Y}^I = \frac{1}{4} \boldsymbol{\tau}^{ij} \bar{\epsilon}_i \mathcal{D} \Omega_j^I - \frac{1}{2} f^I{}_{JK} \boldsymbol{\tau}_i{}^j \bar{\epsilon}_j X^J \Omega^{iK} + \text{h.c.}. \quad (6.5.117d)$$

ここで、

$$\mathcal{F}_{ab}^{I-} \equiv \hat{F}_{ab}^{I-} - \frac{1}{2} \bar{X}^I T^-{}_{ab}, \quad (6.5.118a)$$

$$\hat{F}_{\mu\nu}^I = F_{\mu\nu}^I + (-\epsilon_{ij} \bar{\psi}_{[\mu}^i \gamma_{\nu]} \Omega^{Ij} - \epsilon_{ij} \bar{\psi}_\mu^i \psi_\nu^j \bar{X}^I + \text{h.c.}) \quad (6.5.118b)$$

$D\Phi = d\Phi - \delta(A^I T_I)\Phi$ より、共変微分は次のようになる：

$$\mathcal{D} X^I = DX^I - \frac{1}{2} \bar{\psi}^i \Omega_i^I; \quad (6.5.119a)$$

$$DX^I = (d - b - i\mathcal{B})X^I + A^J X^K f^I{}_{JK}, \quad (6.5.119b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \Omega_i^I &= D\Omega_i^I - \mathcal{D} X^I \psi_i - \frac{1}{4} \gamma^{ab} \mathcal{F}_{ab}^{I-} \epsilon_{ij} \psi^j \\ &\quad - Y_{ij}^I \psi^j - X^J \bar{X}^K f^I{}_{JK} \epsilon_{ij} \psi^j - 2X^I \phi_i, \end{aligned} \quad (6.5.119c)$$

$$D\Omega_i^I = \left(d + \frac{1}{4} \omega^{ab} \gamma_{ab} - \frac{3}{2} b - \frac{1}{2} i\mathcal{B} \right) \Omega_i + V_i{}^j \Omega_j^I + A_\mu^J \Omega_i^K (6.5.119d)$$

次に、ハイパー超組 (q^X, λ^A) に対しては、 \mathcal{M}_H の相似 Killing ベクトル k_D^X を通して、dilation 変換が作用するとする。また、 k_D^X より

$$\mathbf{k}^X = \frac{1}{2} k_D^Y \mathbf{J}_Y{}^X \quad (6.5.120)$$

により $SU(2)$ Killing ベクトル \mathbf{k}^X が定義される。 $U_i{}^J$ 変換は、この Killing ベクトルを通してハイパー超組に作用するとする。したがって、 $(D, T, U_i{}^J)$ のハイパー超組への作用は

$$\delta q^X = \lambda_D k_D^X - 2\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{k}^X, \quad (6.5.121a)$$

$$\delta \zeta^A = \left(\frac{3}{2} \lambda_D - \frac{3}{2} i\lambda_T \right) \zeta^A - \zeta^B \omega_{XB}{}^A \delta q^X \quad (6.5.121b)$$

となる。超共形ゲージ場に対する共変微分は

$$\mathcal{D}q^X = Dq^X + i\bar{\psi}^i \zeta^A f^X_{iA} - i\epsilon^{ij} \rho^{\bar{A}B} \bar{\psi}_i \zeta_{\bar{A}} f^X_{jB}, \quad (6.5.122a)$$

$$Dq^X = dq^X - bk_{\mathbb{D}}^X + 2\mathbf{V} \cdot \mathbf{k}^X - A^I k_I^X, \quad (6.5.122b)$$

$$\hat{\mathcal{D}}\zeta^A = \hat{D}\zeta^A - \frac{i}{2} f^{iA}{}_X \mathcal{D}q^X \psi_i - i\bar{X}^I k_I^X f^{iA}{}_X \epsilon_{ij} \psi^j - i f^{iA}{}_X k_{\mathbb{D}}^X \psi_i, \quad (6.5.122c)$$

$$\hat{D}\zeta^A = \left(d + \frac{1}{4} \omega^{ab} \gamma_{ab} - \frac{3}{2} b + \frac{1}{2} i\mathcal{B} \right) \zeta^A - A^I t_{IB}{}^A \zeta^B + dq^X \omega_{XB}{}^A, \quad (6.5.122d)$$

各成分場の超共形変換に対する変換則は、一般公式 $D\Phi = d\Phi - \delta(\mathcal{A}^I T_I)\Phi$ より読み取ることができる。

超共形不変作用積分 大域的 $\mathcal{N} = 2$ 超対称理論を超共形ゲージ変換に対して共変化し、相似 Killing ベクトルの作用で不変という要請を課すと、超共形不変な作用積分が得られる。まず、ゲージ超組の部分の共形不変性より、前ポテンシャル $F(X)$ が共形ウエイト 2 を持つことが要求される：

$$X^I \partial_I F = 2F \quad (6.5.123)$$

このとき、

$$N \equiv N_{IJ} X^I \bar{X}^J; \quad N_{IJ} \equiv 2\text{Im} F_{IJ} = -i(F_{IJ} - \overline{F_{IJ}}) \quad (6.5.124)$$

とおくと、 $N = N(X, \bar{X})$ がゲージ超組のスカラ多様体 \mathcal{M}_v に対する共形ウエイト 2 の Kähler ポテンシャルを与える。

つぎに、ハイパー超組のセクターが共形不変であるためには、スカラー多様体 \mathcal{M}_H の相似 Killing ベクトル $k_{\mathbb{D}}$ とゲージ対称性に対応する Killing ベクトル k_I が可換となることが要求される：

$$[k_{\mathbb{D}}, k_I] = 0 \quad (6.5.125)$$

これより、3つ組モーメント写像 \mathbf{P}_I が次のように定まる：

$$\mathbf{P}_I = \mathbf{k}_X k_I^X. \quad (6.5.126)$$

以上の情報により、ゲージ超組とハイパー超組からなる系の超共形不変な作用積分 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_h$ が定まる（具体的表式は省略）。

部分ゲージ固定 次の条件により、 (K_a, D, S_i) に対応するゲージ自由度を固定する：

$$\text{K-gauge} : b_\mu = 0, \quad (6.5.127a)$$

$$\text{D-gauge} : -\frac{1}{6}N - \frac{1}{12}k_D^2 = \frac{1}{2}\kappa^{-2}, \quad (6.5.127b)$$

$$\text{S-gauge} : N_{IJ}X^J\Omega^{iI} + id^{\bar{A}}_B A^{iB}\zeta_{\bar{A}} = 0. \quad (6.5.127c)$$

ここで、

$$A^{iA} \equiv f^{iA}_X k_D^X. \quad (6.5.128)$$

D-gauge 条件と

$$|\theta|^{-1}\mathcal{L} = \left(-\frac{1}{6}N - \frac{1}{12}k_D^2\right)R + \left(-N + \frac{1}{4}k_D^2\right)D + \dots \quad (6.5.129)$$

より得られる、補助場 D に関する場の方程式より

$$N = -\kappa^{-2}, \quad k_D^2 = -4\kappa^{-2}. \quad (6.5.130)$$

また、S-gauge 条件と場の方程式

$$N_{IJ}X^I\Omega^{iJ} - 2i = 0 \quad (6.5.131)$$

より、

$$N_{IJ}X^I\Omega^{iJ} = 0, \quad d^{\bar{A}}_B A^{iB}\zeta_{\bar{A}} = 0. \quad (6.5.132)$$

6.6 高次元超重力理論の一般的分類

6.6.1 次元と最大超対称性への制限

References

- Porrati M: PRD78, 065016 (2008)
“Universal limits on massless high-spin particles”
- C. Aragone and S. Deser, Phys. Lett. 86B, 161 (1979).
“Consistency Problems of Hypergravity”

4次元時空において、一般の曲がった時空でのダイナミクスが整合的となるためには、場のスピンは2以下に制限される。例えば、4次元時空において、スピン5/2を持つ場は添え字について対称なスピノールテンソル $\psi_{\mu\nu}$ により記述され、自由場の作用積分は、正規直交基底に関する成分表示のもとで、

$$S = \int d^4x |\theta| \left[-\frac{1}{2} \bar{\psi}_{ab} \mathcal{D} \psi_{ab} - \bar{\psi}_{ab} \gamma^b \mathcal{D} \gamma_c \psi^{ca} + 2 \bar{\psi}_{ab} \gamma^b D_c \psi^{ca} + \frac{1}{4} \bar{\psi}_a^a \mathcal{D} \psi_b^b - \bar{\psi}_a^a D_b \gamma_c \psi^{bc} \right] \quad (6.6.1)$$

で与えられる。平坦な時空では、場は次のゲージ自由度をもつ：

$$\delta \psi_{\mu\nu} = \partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu; \quad \gamma^\mu \zeta_\mu = 0. \quad (6.6.2)$$

しかし、曲がった時空に対応原理に従って移行し、作用積分において $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$ の置き換えを行うと、対応する共変化されたゲージ変換に対して、作用積分は

$$\delta \psi_{ab} = D_a \zeta_b + D_b \zeta_a \Rightarrow \delta S = -4 \int d^4x |\theta| \bar{\zeta}_a \gamma_b \psi_{cd} R^{abcd} \quad (6.6.3)$$

このため、4次元へのトーラスコンパクト化の整合性を考慮すると、高次元においても、超対称変換生成元の最大数は32となる。これより、各次元での複素スピノール表現の最小次元を $\dim_{s,\min}^{\mathbb{C}}$ 、実スピノール表現の最初次元を $\dim_{s,\min}^{\mathbb{R}}$ とおくと、独立な超対称変換生成元を表すスピノール Q^i の数 \mathcal{N} は、 $\mathcal{N} \dim_{s,\min}^{\mathbb{R}} \leq 32$ となる。

6.6.2 基本超対称代数

超対称変換の作る極小代数の交換関係は、 $\epsilon^j (j = 1, \dots, \mathcal{N})$ を各次元での Grassmann スピノールパラメータ、 Δ^{ij} を \mathcal{N} 次の定数行列として、

$$[\bar{\epsilon}_{(1)i} Q^i, \bar{\epsilon}_{(2)j} Q^j] = \frac{1}{2} \Delta^{ij} \bar{\epsilon}_{(1)i} \Gamma^M \epsilon_{(2)j} P_M \quad (P_M = \partial_M) \quad (6.6.4)$$

と表される。ただし、 C を荷電共役変換行列として、

$$\bar{\epsilon} = {}^T \epsilon C \quad (6.6.5)$$

である。また、ユニタリ変換に対する無限小変換の生成元 $\bar{\epsilon} \cdot Q \equiv \bar{\epsilon}_i Q^i$ はエルミートないし反エルミートでないといけなないので、荷電共役変換行列の位相を $C = iB\Gamma^0$ となるように取るとき、 ϵ と Q は次の条件を満たすことが要求される：

$$(\bar{\epsilon} \cdot Q)^\dagger \equiv \eta_B \bar{\epsilon}^c \cdot Q^c = \pm \bar{\epsilon} \cdot Q; \quad B\Gamma^a B^{-1} = \eta_B (\Gamma^a)^*. \quad (6.6.6)$$

Majorana スピノールが存在する $D \equiv 4, 8, 9, 10, 11 \pmod{8}$ では、 ϵ_i および Q^i を Majorana スピノールにとると条件 (6.6.6) が満たされる。このとき、

$$\bar{\epsilon}_1 \Gamma^M \epsilon_2 = -\bar{\epsilon}_2 \Gamma^M \epsilon_1, \quad (6.6.7)$$

$$(\bar{\epsilon}_1 \Gamma^M \epsilon_2)^\dagger = \bar{\epsilon}_1 \Gamma^M \epsilon_2 \quad (6.6.8)$$

が成り立つので、交換関係の左辺が $\epsilon_{(1)} \leftrightarrow \epsilon_{(2)}$ に対して反対称であることと $P_M^\dagger = -P_M$ を考慮すると、 Δ^{ij} は実対称行列となる。したがって、 Q^i の基底を適当に取り替えることにより、

$$\Delta^{ij} = -\delta^{ij} \quad (D = 2, 3, 4 \pmod{8}), \quad +\delta_{ij} \quad (D = 8, 9 \pmod{8}) \quad (6.6.9)$$

とできる。

一方、Majorana スピノールが存在しない $D \equiv 5, 6, 7 \pmod{8}$ では、次の条件により定義される *symplectic Majorana* スピノールにとると条件 (6.6.6) が満たされる：

$$\epsilon_i = (J^{-1})_{ij} B^{-1} (\epsilon_j)^*, \quad Q^j = J^{jk} B^{-1} (Q^k)^\dagger. \quad (6.6.10)$$

ここで、 $J = (J^{ij})$ は正則な定数行列である。 $D \equiv 5, 6, 7$ では $B^* B = -1$ となるので、Symplectic Majorana 条件の整合性は

$$J^* J = -1 \quad (6.6.11)$$

となる。

一般に、SM スピノールの基底の変更に対して、 J は次のように変換する：

$$\psi'_i = T_i^j \psi_j \Rightarrow J' = T^* J T^{-1} \quad (6.6.12)$$

特に、 $J = J^*$ を要請すると、 $J^2 = -1$ となるので、適当な $T \in \text{GL}(2n, \mathbb{R})$ を用いて、

$$J = T J_0 T^{-1}; \quad J_0 = \oplus^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.6.13)$$

と表される。以下、 $J = J_0$ とする。したがって、 \mathcal{N} は偶数となることが要求される。

Majorana スピノールおよび SM スピノールに対して、

$$(\bar{\epsilon}_i Q^i)^\dagger = \sigma \bar{\epsilon}_i Q^i; \quad \sigma = \begin{cases} 1 & : D \equiv 4, 5, 10, 11 \pmod{8}, \\ -1 & : D \equiv 6, 7, 8, 9 \pmod{8} \end{cases} \quad (6.6.14)$$

が成り立つ (ϵ, Q は、ともに、Grassmann 代数の奇元であることに注意)。ここで、 $\sigma = +1$ の場合には、 $i\bar{\epsilon}Q$ が無限小ユニタリ変換を与える。

SM スピノールで表される超対称変換生成元 $Q^i (i = 1, \dots, 2n = N)$ に対する交換関係は、一般に

$$\begin{aligned} [\bar{\epsilon}_{(1)i} Q^i, \bar{\epsilon}_{(2)j} Q^j] &= \frac{1}{2} \Delta^{ij} \bar{\epsilon}_{(1)i} \Gamma^A \epsilon_{(2)j} P_A \\ \Leftrightarrow \{Q^i, T Q^j\} &= -\frac{1}{2} \Delta^{ij} \Gamma^A T C^{-1} P_A \end{aligned} \quad (6.6.15)$$

で与えられる。 $D \equiv 5, 6, 7$ では、一般に

$$\bar{\epsilon}_1 \Gamma^A \epsilon_2 = \bar{\epsilon}_2 \Gamma^A \epsilon_1 \quad (6.6.16)$$

が成り立つので、 Δ^{ij} は反対称行列でないといけない：

$$\Delta^{ij} = -\Delta^{ji}. \quad (6.6.17)$$

さらに、

$$(\bar{\epsilon}_{(1)i} \Gamma^A \epsilon_{(2)j})^\dagger = J^{ik} J^{jl} (\bar{\epsilon}_{(1)k} \Gamma^A \epsilon_{(2)l}) \quad (6.6.18)$$

より、

$$T J \Delta^* J = \Delta \quad (6.6.19)$$

が要求される。これらの条件を満たす行列 Δ は、 J を保つ変換により、常に、 $\Delta = J$ とできる。

D	\mathbb{C} -spinor rep.	Majorana	Weyl	Majorana-Weyl	by \mathbb{R} -rep.
2	$1 + 1'$	\bigcirc	self	\bigcirc	$(1_{\mathbb{R}} + 1'_{\mathbb{R}}) \otimes \mathbb{C}$
3	2	\bigcirc	–	–	$(2_{\mathbb{R}}) \otimes \mathbb{C}$
4	$2 + \bar{2}$	\bigcirc	complex	–	$(4_{\mathbb{R}} = 2_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C}$
5	4	–	–	–	$8_{\mathbb{R}} = 4_{\mathbb{C}}$
6	$4 + 4'$	–	self	–	$8_{\mathbb{R}} + 8'_{\mathbb{R}}$
7	8	–	–	–	$16_{\mathbb{R}} = 8_{\mathbb{C}}$
8	$8 + \bar{8}$	\bigcirc	complex	–	$(16_{\mathbb{R}} = 8_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C}$
9	16	\bigcirc	–	–	$16_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$
10	$16 + 16'$	\bigcirc	self	\bigcirc	$(16_{\mathbb{R}} + 16'_{\mathbb{R}}) \otimes \mathbb{C}$
11	32	\bigcirc	–	–	$32_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$
12	$32 + \bar{32}$	\bigcirc	complex	–	$64_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$

表 11: Spinor representation of $\text{SO}(D - 1, 1)$

6.6.3 各次元の基本超対称代数の構造

- **11 次元:** $\mathcal{O}_{11} \cong \mathbb{C}(32) \oplus \mathbb{C}(32), \mathcal{O}_{10}^* \cong \mathbb{R}(32)$. スピノール Q は Majorana で、個数は $\mathcal{N} = 1$. 対応する超重力理論は、微分について 2 階の範囲で一意的 [Cremmer E, Julia B, Scherk J 1978].

$$\{Q_{\alpha}, Q_{\beta}\} = -\frac{1}{2}(\Gamma^M T C^{-1})_{\alpha\beta} P_M. \quad (6.6.20)$$

- **10 次元:** $\mathcal{O}_{10} \cong \mathbb{C}(32), \mathcal{O}_9^* \cong \mathbb{R}(16) \oplus \mathbb{R}(16)$. スピノール Q^i は Majorana-Weyl で、 $\mathcal{N} \leq 2$. $\mathcal{N} = 2$ となるタイプ II 型は、 Q^i のカイラリティが $(1, 1)$ となる

$$\text{IIA 型} : \mathcal{P}_L Q^1 = Q^1, \quad \mathcal{P}_R Q^2 = Q^2, \quad (6.6.21a)$$

$$\{Q_{\alpha}^1, Q_{\beta}^2\} = 0, \quad (6.6.21b)$$

$$\{Q_{\alpha}^1, Q_{\beta}^1\} = -\frac{1}{2}(\mathcal{P}_L \Gamma^M T C^{-1} T \mathcal{P}_L)_{\alpha\beta} P_M, \quad (6.6.21c)$$

$$\{Q_{\alpha}^2, Q_{\beta}^2\} = -\frac{1}{2}(\mathcal{P}_R \Gamma^M T C^{-1} T \mathcal{P}_R)_{\alpha\beta} P_M \quad (6.6.21d)$$

と、 $(2, 0)$ ないし $(0, 2)$ となる

$$\text{IIB 型} : \mathcal{P}_L Q^i = Q^i \quad (i = 1, 2), \quad (6.6.22a)$$

$$\{Q_{\alpha}^i, Q_{\beta}^j\} = -\delta^{ij} \frac{1}{2}(\mathcal{P}_L \Gamma^M T C^{-1} T \mathcal{P}_L)_{\alpha\beta} P_M \quad (6.6.22b)$$

$$(\text{or } \mathcal{P}_L \rightarrow \mathcal{P}_R) \quad (6.6.22c)$$

が存在。II型の理論は、微分について2階の範囲では一意的。

一方、 $\mathcal{N} = 1$ のタイプI型理論の超対称代数の構造は一意的で、カイラリティは $(1, 0)$ ないし $(0, 1)$ ：

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = -\frac{1}{2}(\mathcal{P}_L \Gamma^M \mathcal{T} C^{-1} \mathcal{T} \mathcal{P}_L)_{\alpha\beta} P_M, \quad (\text{or } \mathcal{P}_L \rightarrow \mathcal{P}_R). \quad (6.6.23)$$

I型の理論は、任意の10次元ゲージ超組と結合することができる。この自由度を除く重力セクターは、微分について2階の範囲では一意的。

- **9次元:** $\mathcal{O}_9 \cong \mathbb{C}(16) \oplus \mathbb{C}(16)$, $\mathcal{O}_8^* \cong \mathbb{R}(16)$ で、スピノール Q^j は Majorana。カイラリティがないので、タイプは、 $\mathcal{N} = 1$ のI型と $\mathcal{N} = 2$ のII型の2種類のみ：

$$\{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} = -\delta^{ij} \frac{1}{2} (\Gamma^M \mathcal{T} C^{-1})_{\alpha\beta} P_M \quad (6.6.24)$$

II型の理論は一意的だが、I型の理論には、9次元ベクトル超組を結合させる自由度あり。

- **8次元:** $\mathcal{O}_8 \cong \mathbb{C}(16)$, $\mathcal{O}_7^* \cong \mathbb{C}(8)$, $\mathcal{O}_7 \cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}(8) \cong \mathbb{C}(8) + \mathbb{C}(8)^*$ で、スピノール Q^j は Majorana。 $\mathcal{N} \leq 2$ だが、カイラルスピノールは複素表現で、複素共役変換でカイラリティが入れ替わるので、 $\mathcal{N} = 1$ のI型理論、 $\mathcal{N} = 2$ のII型理論のいずれも1種類のみ。超対称交換関係は、 $D = 9$ と同じで、カイラル射影を行うと、

$$\{(\mathcal{P}_L Q^i)_\alpha, (\mathcal{P}_R Q^j)_\beta\} = -\delta^{ij} \frac{1}{2} (\mathcal{P}_L \Gamma^M \mathcal{T} C^{-1} \mathcal{T} \mathcal{P}_R)_{\alpha\beta} P_M \quad (6.6.25a)$$

$$\{(\mathcal{P}_L Q^i)_\alpha, (\mathcal{P}_L Q^j)_\beta\} = \{(\mathcal{P}_R Q^i)_\alpha, (\mathcal{P}_R Q^j)_\beta\} = 0. \quad (6.6.25b)$$

II型の理論は一意的だが、I型の理論には、8次元ベクトル超組を結合させる自由度あり。

- **7次元:** $\mathcal{O}_7 \cong \mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$, $\mathcal{O}_6^* \cong \mathbb{H}(4)$, $\mathcal{O}_6 \cong \mathbb{C}(8)$ で、スピノール Q^j は Symplectic Majorana。 $\mathcal{N} = 2, 4$ (超対称生成元の数は16, 32)。交換関係は

$$[Q_\alpha^i, Q_\beta^j] = -\frac{1}{2} \Delta^{ij} (\Gamma^M \mathcal{T} C^{-1})_{\alpha\beta} P_M \quad (i, j = 1, \dots, \mathcal{N}) \quad (6.6.26)$$

ここで、 $\Delta = J_0$ 。

$\mathcal{N} = 4$ の理論は一意的だが、 $\mathcal{N} = 2$ の理論には、7次元ベクトル超組を結合させる自由度あり。

- **6次元:** $\mathcal{O}_6 \cong \mathbb{C}(8), \mathcal{O}_5^* \cong \mathbb{H}(2) + \mathbb{H}(2), \mathcal{O}_5 \cong \mathbb{C}(4) + \mathbb{C}(4)$ で、スピノール Q^j は Symplectic Weyl. $\mathcal{N} = 2, 4, 6, 8$ で、カイラリティで分類すると、
 - $\mathcal{N} = 8$: $(2, 2), (3, 1), (4, 0)$. $(2, 2)$ 型の理論は、 $D \geq 7$ からの KK 次元低下により得られるものと一致する。これに対し、 $(3, 1), (4, 0)$ の理論は、原理的には存在するが [Townsend PK:PLB139, 283 (1984)], 重力が計量とは異なるテンソルにより記述され、これまで線形レベルでのみ具体的に構成されている [Hull CM: NPB583, 237 (2000) arXiv:hep-th/0004195]。
 - $\mathcal{N} = 6$: $(2, 1), (3, 0)$. $(2, 1)$ 型は重力が計量で記述されるが、 $(3, 0)$ 型の理論では重力が計量テンソルでは表されず、これまでに相互作用する理論は発見されていない。
 - $\mathcal{N} = 4$: $(1, 1), (2, 0)$.
 - * $(1, 1)$: ベクトル超組を結合させる自由度あり。
 - * $(2, 0)$: テンソル超組を結合させる自由度あり。
 - $\mathcal{N} = 2$: $(1, 0)$. ベクトル超組、テンソル超組、ハイパー超組を結合する自由度あり。
- **5次元:** $\mathcal{O}_5 \cong \mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4), \mathcal{O}_4^* \cong \mathbb{H}(2), \mathcal{O}_4 \cong \mathbb{C}(4)$. スピノール Q^j は Symplectic Majorana. $\mathcal{N} = 2, 4, 6, 8$. 交換関係は (6.6.26) と同じ。理論の自由度は、
 - $\mathcal{N} = 6, 8$: 理論は一意的で、 $D \geq 6$ から次元低下で得られるものと一致。
 - $\mathcal{N} = 4$ の理論には、5次元ベクトル超組を結合させる自由度あり。
 - $\mathcal{N} = 2$ の理論には、ベクトル超組とハイパー超組を結合させる自由度と、前ポテンシャルと呼ばれるスカラ多様体上の正則関数の自由度あり (?)。
- **4次元:** $\mathcal{O}_4 \cong \mathbb{C}(4), \mathcal{O}_3^* \cong \mathbb{C}(2), \mathcal{O}_3 \cong \mathbb{C}(2) + \mathbb{C}(2)^*$. スピノール Q^j は Majorana で、 $\mathcal{N} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$. 超対称変換の交換関係の構造は、8次元と同じ。理論の自由度は

- $\mathcal{N} = 5, 6, 8$: 物質超組の自由度はなく、ベクトル場のゲージ化の自由度を除いて理論は一意的。
- $\mathcal{N} = 3, 4$: ベクトル場のゲージ化の自由度に加え、4次元ベクトル超組を結合させる自由度あり。
- $\mathcal{N} = 2$: 4次元ベクトル超組およびハイパー超組を結合させる自由度、ゲージ化の自由度、および前ポテンシャルの自由度あり。
- $\mathcal{N} = 1$: 4次元ゲージ超組およびカイラル超組を結合させる自由度、ゲージ化の自由度、カイラル超組に対する Kähler ポテンシャル、超ポテンシャルおよびゲージ超組の結合関数の自由度あり。

6.6.4 基本超重力理論の構造と一意性

超対称性の数による分類 以下、理論の含む微分は、スカラ場について2階まで、スピノール場について1階までとする。また、実超電荷の数を n_s と表記する：

- $n_s > 8$: 超重力理論の運動項は、理論が含む超組のタイプと数を指定すると、一意的に決まる。
 - $n_s > 16$: 重力超組のみの理論なので、運動項は一意的。
 - $n_s = 16$: 結合するベクトル超組（ないし、 $D = 6, (2, 0)$ 型に対してはテンソル超組）の数を指定するすると、運動項は一意的。
- $n_s = 8$: スカラ多様体はハイパー超組のスカラに対する quaternionic-Kähler 多様体とテンソル超組 ($D = 6$)/ベクトル超組ないしテンソル超組 ($D = 5$)/ベクトル超組 ($D = 4$) のスカラに対する特殊多様体の直積。これら特殊多様体の取り方は自由。
- $n_s = 4$: スカラ多様体は Kähler-Hodge 構造を持つ複素多様体で、カイラル超組の運動項の自由度は、Kähler 計量 $\mathcal{K}(z, \bar{z})$ 。ゲージ超組の運動項にはスカラ多様体上の正則関数行列 $\mathcal{M}_{AB}(z)$ の自由度あり。

物理自由度 各タイプのテンソル場, スピノール場の物理自由度は次の通り:

計量	ベクトル場	スカラ-場	p -形式場	RS場	スピノール場
$\frac{D(D-3)}{2}$	$D-2$	1	$\frac{(D-2)\cdots(D-p-1)}{p!}$	$\frac{d_s(D)}{2}(D-3)$	$\frac{d_s(D)}{2}$

ここで, $d_s(D)$ を D 次元での既約実スピノール表現の次元で, 以下の通り:

D	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d_s	4	4	8	8	16	16	16	16	32
タイプ	M	M	SM	SMW	SM	M	M	MW	M
\mathcal{N}	1	1	2	2	2	1	1	1	1

基本場

- $D = 8$
 - $\mathcal{N} = 2$:
 Boson: g_{MN} (20), A_M^I (6×6), Φ^j (7×1), $C_{[2]}^p$ (3×15), $C_{[3]}$ (20)
 Fermion: $\psi_M^{(i)}$ (2×40), λ^I (6×8)
 - $\mathcal{N} = 1$:
 Suga: g_{MN} (20), B_{MN} (15), A_M^I (2×6), σ (1); ψ_M (40), χ (8)
 Vector: A_M (6), ϕ^i (2×1); λ (8).

6.6.5 理論の変形とゲージ化された超重力理論

用語の定義

- **Ungauged supersymmetry:** すべての内部ゲージ場は可換で, 超ポアンカレ群はゲージ化されていない。
- **Gauged supersymmetry:** 物質超組のベクトル場は, 一般に非可換群に対するゲージ場となっていて, ゲージ場は他の超組にもゲージ結合するが, 超ポアンカレ群はゲージ化されていない。

- **Ungauged supergravity:** 超ポアンカレ群はゲージ化されているが、物質超組のベクトル場は可換で、他の場と結合しない。
- **Gauged supergravity:** 超重重力セクターのベクトル場が非可換群に対するゲージ場となっているか、物質セクターの場の非可換対称性がゲージ化されている。

理論の変形 基本超重重力理論に対して、次のような理論の改変操作を理論の変形 (deformation) という：

- 非可換ゲージ群によりゲージ化する。
- R 対称性をゲージ化する。例：SO(8)-gauged maximal supergravity in 4D [de Wit B, Nicolai H (1982)]
- フェルミオンに質量項（湯川結合）を持たせ、宇宙項やスカラポテンシャルを導入する。例：adS 超重重力理論、massive IIA in 10D [Romans LL (1986)]

6.6.6 中心電荷

基本超対称代数は、一般に中心電荷 (central charge) と呼ばれる他の変換と可換な作用素による拡大を許す。

- $D = 4$: Majorana 表示では

$$\{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} = -\frac{1}{2}\delta^{ij}(\gamma^\mu \mathcal{T}C^{-1})_{\alpha\beta}P_\mu + (A^{[ij]} + iB^{[ij]}\gamma_5)(\mathcal{T}C^{-1})_{\alpha\beta}. \quad (6.6.27)$$

Weyl 表示では

$$\{(\mathcal{P}_L Q^i)_\alpha, (\mathcal{P}_R Q^j)_\beta\} = -\delta^{ij}\frac{1}{2}(\mathcal{P}_L \Gamma^M \mathcal{T}C^{-1} \mathcal{T} \mathcal{P}_R)_{\alpha\beta} P_M \quad (6.6.28a)$$

$$\{(\mathcal{P}_L Q^i)_\alpha, (\mathcal{P}_L Q^j)_\beta\} = Z^{[ij]}(\mathcal{P}_L \mathcal{T}C^{-1})_{\alpha\beta}, \quad (6.6.28b)$$

$$\{(\mathcal{P}_R Q^i)_\alpha, (\mathcal{P}_R Q^j)_\beta\} = \bar{Z}^{[ij]}(\mathcal{P}_R \mathcal{T}C^{-1})_{\alpha\beta}. \quad (6.6.28c)$$

ここで、 $Z^{[ij]} = A^{[ij]} + iB^{[ij]}$.

D	32			24		20
10	$O(1, 1)$	$\frac{SU(1,1)}{U(1)}$				
9	$\frac{SL(2)}{SO(2)} \otimes O(1, 1)$					
8	$\frac{SL(3)}{SU(2)} \otimes \frac{SL(2)}{U(1)}$					
7	$\frac{SL(5)}{USp(4)}$					
6	$\frac{O(5,5)}{USp(4) \times USp(4)}$	$\frac{F_{4,4}}{USp(6) \times USp(2)}$	$\frac{E_{6,6}}{USp(8)}$	$\frac{SU^*(4)}{USp(4)}$	$\frac{SU^*(6)}{USp(6)}$	
5		$\frac{E_{6,6}}{USp(8)}$		$\frac{SU^*(6)}{USp(6)}$		
4		$\frac{E_{7,7}}{SU(8)}$		$\frac{SO^*(12)}{U(6)}$		$\frac{SU(1,5)}{U(5)}$

D	16		12	8
10	$O(1, 1)?$			
9	$\frac{O(1,n)}{O(n)} \otimes O(1, 1)$			
8	$\frac{O(2,n)}{U(1) \times O(n)} \otimes O(1, 1)$			
7	$\frac{O(3,n)}{USp(2) \times O(n)} \otimes O(1, 1)$			
6	$\frac{O(4,n)}{SO(4) \times O(n)} \otimes O(1, 1)$	$\frac{O(5,n)}{O(n) \times USp(4)}$		$\frac{O(1,n)}{O(n)} \times \text{QK}$
5	$\frac{O(5,n)}{USp(4) \times O(n)} \otimes O(1, 1)$			$\text{VSR} \times \text{QK}$
4	$\frac{SU(1,1)}{U(1)} \times \frac{SO(6,n)}{SU(4) \times SO(n)}$		$\frac{SU(3,n)}{U(3) \times SU(n)}$	$\text{SK} \times \text{QK}$

表 12: 8 個以上の超電荷をもつ超重力理論におけるスカラ多様体の等質空間としての構造リスト. QK=quaternionic-Kähler 多様体、VSR=very special real 多様体、SK=special Kähler 多様体。

次元	スピノールタイプ	R-対称性
$D = 10$	MW	$SO(\mathcal{N}_L) \times SO(\mathcal{N}_R)$
$D = 9$	M	$SO(\mathcal{N})$
$D = 8, 4$	M	$U(\mathcal{N})$
$D = 7, 5$	SM	$USp(\mathcal{N})$
$D = 6$	SW	$USp(\mathcal{N}_L) \times USp(\mathcal{N}_R)$

表 13: 各次元の超対称変換代数における R-対称性

6.7 高次元の SUGRA 理論

6.7.1 Notation

時空の次元を D とする.

計量 :

- 計量 : $(\eta_{MN}) = [- + \dots +]$
- Levi-Civita 記号 : $\epsilon_{0\dots D-1} = 1$
- 体積要素 : $\sqrt{-g}dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{D-1} = \sqrt{-g}d^Dx$

微分形式 :

- Hodge 双対 : $(*\omega)_{M_1\dots M_{D-p}} = \frac{1}{p!}\epsilon_{M_1\dots M_{D-p}N_1\dots N_p}\omega^{N_1\dots N_p}$
- 微分形式の内積 : $(\chi_q \cdot \omega_p)_{M_1\dots M_{p-q}} = \frac{1}{q!}\chi^{N_1\dots N_q}\omega_{N_1\dots N_q M_1\dots M_{p-q}}$
- 微分形式の発散 : $(\nabla \cdot \omega)_{M_1\dots M_{p-1}} = \nabla^N \omega_{NM_1\dots M_{p-1}}$

γ 行列とスピノール:

- $\Gamma^A \Gamma^B + \Gamma^B \Gamma^A = 2\eta^{AB}$
- $\Gamma^{M_1\dots M_p} = \Gamma^{[M_1 \dots M_p]}$
- $\nabla_M = \partial_M + \frac{1}{4}\omega_{ABM}\Gamma^{AB}$
- $\bar{\psi} = \psi^\dagger \Gamma^0$

6.7.2 共通の構造

Einstein 方程式

$$R_{MN} = \frac{1}{2} \partial_M \Phi \partial_N \Phi + \sum_p c_p e^{\alpha_p \Phi} \left[(I_M F_p) \cdot (I_N F_p) - \frac{p-1}{D-2} F_p \cdot F_p g_{MN} \right]. \quad (6.7.1)$$

Dilaton 方程式 Bianchi 方程式と Einstein 方程式より

$$0 = \nabla_M \Phi \left(\square \Phi - \sum_p c_p \alpha_p e^{\alpha_p \Phi} F_p \cdot F_p \right) + 2 \sum_p c_p \left[I_M F_p \cdot \nabla \cdot (e^{\alpha_p \Phi} F_p) - e^{\alpha_p \Phi} F \cdot I_M (dF) \right]. \quad (6.7.2)$$

このうち、第1項と第2項は一般に独立にゼロとなる。特に、

$$\square \Phi = \sum_p c_p \alpha_p e^{\alpha_p \Phi} F_p \cdot F_p. \quad (6.7.3)$$

6.8 11次元理論

Refereces

- Cremmer E, Julia B, Scherk J: PLB76, 409 (1978)
“Supergravity theory in 11 dimensions”
- Cremmer E, Julia B: PLB80, 48 (1978)
”N = 8 Supergravity Theory I. The Lagrangian”

6.8.1 定式化

Notation change:2022/1/30 ($C = iB\Gamma^0$)

LastUpdate: 2022/1/30

基本場: 基本的な場は

$$\text{フレーム場: } e_A = (e_A^M); \quad g^{MN} = \eta^{AB} e_A^M e_B^N, \quad \theta^A(e_B) = \delta_B^A,$$

$$3 \text{ 形式場: } A_3 = \frac{1}{3!} A_{MPQ} dx^M \wedge dx^P \wedge dx^Q,$$

$$\text{Majorana } 3/2 \text{ 場: } \Psi_M = \Psi_M^c \equiv B^{-1} \Psi_M^*; \quad \bar{\Psi} = {}^T \Psi C$$

ここで, C はつぎの条件により定義される荷電共役変換行列:

$$C^{-1} \Gamma_A C = -{}^T \Gamma_A, \quad {}^T C = -C, \quad (6.8.1)$$

$$C = iB\Gamma^0 \Rightarrow C^{-1} {}^T B C^* B = -1. \quad (6.8.2)$$

Majorana 表示では、

$${}^T \Gamma_A = \Gamma^A, \quad (\Gamma_A)^* = \Gamma_A, \quad C = i\Gamma^0. \quad (6.8.3)$$

作用積分 完全な作用積分は

$$2\kappa^2 S = \int d^{11}x |\theta| \left[e_A^M e_B^N \mathcal{R}^{AB}{}_{MN}(\omega) - \frac{1}{2} |F_4|^2 - \frac{1}{6} * (F_4 \wedge F_4 \wedge A_3) \right. \\ \left. - \bar{\Psi}_M \Gamma^{MNP} D_N \left[\frac{1}{2} (\omega + \tilde{\omega}) \right] \Psi_P \right. \\ \left. - \frac{1}{192} [\bar{\Psi}_M \Gamma^{MNWXYZ} \Psi_N + 12 \bar{\Psi}^W \Gamma^{XY} \Psi^Z] (F_{WXYZ} + \tilde{F}_{WXYZ}) \right]. \quad (6.8.4)$$

表 14: Cremmer-Julia-Scherk[93]/Cremmer-Julia[90] の記法との対応

	CJS 記法	CJ 記法	このノートの記法
計量	η_{ab}	η_{AB}	$-\eta_{AB}$
Levi-Civita	$\epsilon_{a_1 \dots a_{11}}$	$\epsilon_{A_1 \dots A_{11}}$	$-\epsilon_{A_1 \dots A_{11}}$
γ 行列	γ^a (純虚 Majorana 表示)	Γ^A	$i\Gamma^A$
係数	$\sqrt{2}K$	$\sqrt{2}\kappa$	κ
場	V_μ^a	e_M^A	θ_M^A
	$R(\omega)$	$R(\omega)$	$-R(\omega)$
	$2KA_{\mu\nu\lambda}$	$2A_{MNP}$	A_{MNP}
	$\sqrt{2}K\psi_\mu$	$\sqrt{2}\psi_M$	Ψ_M
	$\sqrt{2}K\bar{\psi}_\mu$	$\sqrt{2}\bar{\psi}_M$	$\bar{\Psi}_M$
Local SUSY param	$\sqrt{2}\epsilon$	$\sqrt{2}\epsilon$	ϵ

ここで,

$$\omega_{ABM} = \omega_{ABM}(e) + K_{MAB}, \quad (6.8.5a)$$

$$K_{MAB} = \frac{1}{8} [\bar{\Psi}_N \Gamma_{MAB}{}^{NP} \Psi_P + 4\bar{\Psi}_M \Gamma_{[A} \Psi_{B]} - 2\bar{\Psi}_B \Gamma_M \Psi_A] \quad (6.8.5b)$$

$$\begin{aligned} T_{MN}{}^A &= 2K_{[M}{}^A{}_{N]} \\ &= -\frac{1}{4} \bar{\Psi}_Q \Gamma^A{}_{MN}{}^{QP} \Psi_P + \frac{1}{2} \bar{\Psi}_M \Gamma^A \Psi_N \end{aligned} \quad (6.8.5c)$$

$$\tilde{\omega}_{ABM} = \omega_{ABM} - \frac{1}{8} \bar{\Psi}_N \Gamma_{MAB}{}^{NP} \Psi_P, \quad (6.8.5d)$$

$$D_M(\omega) = \partial_M + \frac{1}{4} \omega^{AB}{}_M \Gamma_{AB}, \quad (6.8.5e)$$

$$F = dA, \quad (6.8.5f)$$

$$\tilde{F}_{MNPQ} = F_{MNPQ} + 3\bar{\Psi}_{[M} \Gamma_{NP} \Psi_{Q]}. \quad (6.8.5g)$$

基本場の次元は

$$[\kappa] = L^{9/2}, \quad [e_A^M] = L^0, \quad [A_{MNP}] = L^0, \quad [\Psi_M] = L^{-1/2}. \quad (6.8.6)$$

場の方程式:

$$R_{MN}(\tilde{\omega}) - \frac{1}{2}g_{MN}R(\tilde{\omega}) = \frac{1}{12}\tilde{F}_{MPQR}\tilde{F}_N{}^{PQR} - \frac{1}{4}g_{MN}|F_4|^2 \quad (6.8.7a)$$

$$\Gamma^{MNP}\tilde{D}_N(\tilde{\omega})\Psi_P = 0, \quad (6.8.7b)$$

$$d*\tilde{F} + \frac{1}{2}\tilde{F} \wedge \tilde{F} = 0. \quad (6.8.7c)$$

ここで,

$$\tilde{D}_M(\tilde{\omega}) = D_M(\tilde{\omega}) + T_M{}^{PQRS}\tilde{F}_{PQRS}, \quad (6.8.8)$$

$$T_M{}^{PQRS} = \frac{1}{288} \left(\Gamma_M{}^{PQRS} - 8\delta_M^{[P}\Gamma^{QRS]} \right). \quad (6.8.9)$$

対称性:

a) 一般共変性 :

$$\delta\theta_M^A = (\mathcal{L}_\xi\theta^A)_M \equiv \theta_N^A\partial_M\xi^N + \xi^N\partial_N\theta_M^A, \quad (6.8.10a)$$

$$\delta\Psi_M = \Psi_N\partial_M\xi^N + \xi^N\partial_N\Psi_M, \quad (6.8.10b)$$

$$\delta A_{MNP} = (\mathcal{L}_\xi A_3)_{MNP} \equiv 3A_{Q[MN}\xi_{P]}\xi^Q + \xi^Q\partial_Q A_{MNP}. \quad (6.8.10c)$$

b) 局所 SO(10,1) 変換 :

$$\delta\theta_M^A = -\theta_M^B\alpha_B^A, \quad (6.8.11a)$$

$$\delta\Psi_M = \frac{1}{4}\alpha_{AB}\Gamma^{AB}\Psi_M, \quad (6.8.11b)$$

$$\delta A_{MNP} = 0. \quad (6.8.11c)$$

c) $N = 1$ SUSY:

$$\delta\theta_M^A = \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\Gamma^A\Psi_M, \quad (6.8.12a)$$

$$\delta\Psi_M = \tilde{D}_M(\tilde{\omega})\epsilon, \quad (6.8.12b)$$

$$\delta A_{MNP} = -\frac{3}{2}\bar{\epsilon}\Gamma_{[MN}\Psi_{P]}. \quad (6.8.12c)$$

d) A_3 のゲージ変換 :

$$\delta\theta_M^A = 0, \quad (6.8.13a)$$

$$\delta\Psi_M = 0, \quad (6.8.13b)$$

$$\delta A = d\Lambda. \quad (6.8.13c)$$

e) T/P 変換 : 空間ないし時間座標の奇数個の反転と

$$A_{MNP} \rightarrow -A_{MNP}. \quad (6.8.14)$$

Bosonic part: $\Psi_M = 0$ とおくと、作用積分は

$$2\kappa^2 S = \int d^{11}x (-g)^{1/2} \left(R - \frac{1}{2} |F_4|^2 \right) - \frac{1}{6} \int A_3 \wedge F_4 \wedge F_4. \quad (6.8.15)$$

場の方程式は

$$d * F_4 + \frac{1}{2} F_4 \wedge F_4 = 0. \quad (6.8.16)$$

また、エネルギー-運動量テンソルは

$$\kappa^2 T_{MN} = \frac{1}{12} F_{MABC} F_N{}^{ABC} - \frac{1}{4} |F_4|^2 g_{MN}. \quad (6.8.17)$$

よって、

$$R_{MN} = \frac{1}{12} F_{MABC} F_N{}^{ABC} - \frac{1}{6} |F_4|^2 g_{MN}. \quad (6.8.18)$$

6.8.2 物理自由度

計量場： 局所 Lorentz 変換の自由度を取り除くと，自明な背景場での重力場は計量場の摂動 h_{MN} で記述され，その方程式は

$$\psi_{MN} = h_{MN} - \frac{1}{2}h\eta_{MN} \quad (6.8.19)$$

を用いて，

$$k^2\psi_{MN} + 2k_{(M}k^P\psi_{N)P} - k^Pk^Q\psi_{PQ}\eta_{MN} = 0 \quad (6.8.20)$$

と表される．ゲージ自由度は

$$\delta\psi_{MN} = i(-k_M\xi_N - k_N\xi_M + k \cdot \xi\eta_{MN}). \quad (6.8.21)$$

ゲージ条件

$$\psi_{0M} = 0 \quad (6.8.22)$$

を課すと，残留ゲージ自由度は

$$\xi_0 = -\mathbf{k}^2\xi, \quad \xi^I = k_0k^I\xi. \quad (6.8.23)$$

ゲージ条件と場の方程式の整合性より

$$k^J\psi_{JI} = 0. \quad (6.8.24)$$

したがって，

$$k^M\psi_{MN} = 0, \quad (6.8.25a)$$

$$k^2\psi_{MN} = 0. \quad (6.8.25b)$$

ここで，残留ゲージ変換に対して

$$\delta\psi_{IJ} = ik_0(-k_Ik_J + \mathbf{k}^2\delta_{IJ})\xi. \quad (6.8.26)$$

したがって，物理自由度は

$$\frac{1}{2}D(D-1) - (D-1) - 1 = \frac{1}{2}D(D-3) = 44. \quad (6.8.27)$$

A_3 場： 自明な背景場に対して， A_3 場の方程式は

$$k^M F_{MPQR} = 0; \quad F_{MPQR} = 4ik_{[M} A_{PQR]}. \quad (6.8.28)$$

ゲージ変換は

$$\delta A_{MNP} = i(k_M \chi_{NP} + k_N \chi_{PM} + k_P \chi_{MN}). \quad (6.8.29)$$

ゲージ条件

$$A_{IJ0} = 0 \quad (6.8.30)$$

を課すと，残留ゲージ自由度は

$$\chi_{IJ} = \frac{1}{k_0}(k_I \chi_{J0} - k_J \chi_{I0}). \quad (6.8.31)$$

このとき，

$$ik^M F_{MPQR} = -k^2 A_{PQR} + 3k_{[P} A_{QR]I} k^I \quad (6.8.32)$$

より，

$$ik^M F_{MPQ0} = k_0 A_{PQI} k^I = 0. \quad (6.8.33)$$

よって，

$$A_{IJK} k^K = 0. \quad (6.8.34)$$

この条件下で，元の場の方程式は

$$ik^M F_{MIJK} = -k^2 A_{IJK} = 0. \quad (6.8.35)$$

よって，

$$k^2 = 0. \quad (6.8.36)$$

また， A_{IJK} は残留ゲージ変換で不変．よって，物理自由度は

$$\frac{(D-1)(D-2)(D-3)}{3!} - \frac{(D-2)(D-3)}{2} = \frac{(D-2)(D-3)(D-4)}{3!} = 84. \quad (6.8.37)$$

Rarita-Schwinger 場: 平坦で自明な背景場のもとで， Ψ_M の方程式は

$$\Gamma^{MNP} k_N \Psi_P = 0. \quad (6.8.38)$$

この式は，局所超対称性変換

$$\delta \Psi_M = ik_M \epsilon \quad (6.8.39)$$

に対して不変.

まず, $M = 0$ 成分より

$$\Gamma^{IJ}k_I\Psi_J = 0. \quad (6.8.40)$$

これは次の式と同値 :

$$(k^I\Gamma_I)(\Gamma^J\Psi_J) = k^I\Psi_I \Leftrightarrow \Gamma^I\Psi_I = \frac{1}{\mathbf{k}^2}(k^J\Gamma_J)(k^K\Psi_K). \quad (6.8.41)$$

次に, $M = I$ 成分より

$$\Gamma^0\Gamma^{IJ}(-k_0\Psi_J + k_J\Psi_0) + \Gamma^{IJK}k_J\Psi_K = 0. \quad (6.8.42)$$

この式に $\Gamma^{IJ}k_J$ をかけて I について和をとると,

$$\Gamma^{IJ}k_J\Gamma_I^K k_K = -(D-2)\mathbf{k}^2, \quad (6.8.43a)$$

$$\Gamma^{IJ}k_J\Gamma_I^K\Psi_K = -(D-2)k^I\Psi_I - (D-3)\Gamma^{IJ}k_I\Psi_J, \quad (6.8.43b)$$

$$\Gamma^{IJ}k_J\Gamma^{IJK}k_J = (D-3)(-\mathbf{k}^2\Gamma^K + k^K\Gamma^I k_I) \quad (6.8.43c)$$

および (6.8.41) より

$$\psi_0 = \frac{k_0}{\mathbf{k}^2}k^I\Psi_I. \quad (6.8.44)$$

これを上式に代入し,

$$\Gamma^{IJK} = \Gamma^I\Gamma^{JK} - \delta^{IJ}\Gamma^K + \delta^{IK}\Gamma^J, \quad (6.8.45a)$$

$$\Gamma^{IJ} = \Gamma^I\Gamma^J - \delta^{IJ} \quad (6.8.45b)$$

および (6.8.41) より

$$\Gamma^{IJK}k_J\Psi_K = (k_J\Gamma^J) \left(\Psi_I - \frac{k_I}{\mathbf{k}^2}k^K\Psi_K \right), \quad (6.8.46a)$$

$$\Gamma^{IJ}\Psi_J = \Gamma^I\Gamma^J\Psi_J - \Psi^I = \frac{1}{\mathbf{k}^2}\Gamma^I(k_J\Gamma^J)(k^K\Psi_K) - \Psi^I, \quad (6.8.46b)$$

$$\Gamma^{IJ}k_J = \Gamma^I(k_J\Gamma^J) - k^I \quad (6.8.46c)$$

が成り立つことを考慮すると,

$$(k_M\Gamma^M) \left(\Psi_I - \frac{k_I}{\mathbf{k}^2}k^J\Psi_J \right) = 0 \quad (6.8.47)$$

を得る.

ここで，局所超対称変換の自由度を

$$\Psi_0 = 0 \quad (6.8.48)$$

により固定すると，場の方程式は

$$(k_M \Gamma^M) \Psi_I = 0, \quad (6.8.49a)$$

$$\Gamma^I \Psi_I = 0, \quad (6.8.49b)$$

$$k^I \Psi_I = 0 \quad (6.8.49c)$$

となる．この第1式より

$$k \cdot k = 0. \quad (6.8.50)$$

また，第1式は第2および第3式と整合的．例えば， $k^0 = k^1, k^I = 0 (I = 2, \dots)$ と取ると，

$$\Psi^1 = 0, \quad \Psi^2 = \Gamma^2 \sum_{I=3, \dots} \Gamma^I \Psi_I \quad (6.8.51)$$

となり， $\Psi_I (I = 3, \dots)$ が

$$(1 + \Gamma^0 \Gamma^1) \Psi_I = 0 \quad (6.8.52)$$

を満たせば Ψ_2 も同じ式を満たす．さらに，この式は各 I に対してスピノール表現の次元/2個の解をもつ．よって，Rarita-Schwinger場の物理的自由度は

$$32/2 \times (D - 3) = 128. \quad (6.8.53)$$

6.8.3 理論の一意性

Creation: 2021/3/27

Last update: 2022/5/16

6.8.3.1 11次元1粒子状態とトーラスコンパクト化による4次元1粒子状態の対応

Creation: 2021/4/2

Resource: RM20201123

トーラスコンパクト化は超対称性を破らないので、11次元における整合的な極大超重力理論は、トーラスコンパクト化により4次元 $N = 8$ 極大超重力理論に帰着する。

この対応において、4次元極大超重力理論のゼロ質量1粒子状態は、ヘリシティ λ と重複度 m を用いて次のように表される：

$$(\lambda)^m : (\pm 2)^1, (\pm 3/2)^8, (\pm 1)^{28}, (\pm 1/2)^{56}, (0)^{70}. \quad (6.8.54)$$

一方、平坦な背景時空での11次元理論のゼロ質量1粒子状態は、光的運動量ベクトル k とそれを不変にする $SO(10, 1)$ の等方群 $G_k \cong ISO(9) \cong SO(9) \times \mathbb{R}^9$ の極大コンパクト部分群 $SO(9)$ の既約表現 ρ により分類される。Dynkin ウェイトを用いると、11次元のゼロ質量1粒子状態と4次元のゼロ質量1粒子状態は、次のように対応する：

$$(k^M, [a_1 a_2 a_3 a_4]) \longleftarrow (k^a, \lambda), \quad (6.8.55a)$$

$$\lambda = a_1 + a_2 + a_3 + a_4/2. \quad (6.8.55b)$$

これより、まず、4次元において最大ヘリシティが2となる $SO(9)$ の既

約表現は,

$$\begin{aligned}
44 [2000] &\rightarrow (\pm 2)^1 + (\pm 1)^7 + (0)^{28} && (6.8.56a) \\
495 [0200] &\rightarrow (\pm 2)^{27} + (\pm 1)^{112} + (0)^{217} && (6.8.56b) \\
1980 [0020] &\rightarrow (\pm 2)^{168} + (\pm 1)^{483} + (0)^{678} && (6.8.56c) \\
2772 [0004] &\rightarrow (\pm 2)^{294} + (\pm 1)^{672} + (0)^{840} && (6.8.56d) \\
231 [1100] &\rightarrow (\pm 2)^7 + (\pm 1)^{49} + (0)^{119} && (6.8.56e) \\
594 [1010] &\rightarrow (\pm 2)^{21} + (\pm 1)^{147} + (0)^{258} && (6.8.56f) \\
1650 [0110] &\rightarrow (\pm 2)^{105} + (\pm 1)^{405} + (0)^{630} && (6.8.56g) \\
924 [1002] &\rightarrow (\pm 2)^{35} + (\pm 1)^{245} + (0)^{364} && (6.8.56h) \\
2772 [0102] &\rightarrow (\pm 2)^{189} + (\pm 1)^{707} + (0)^{980} && (6.8.56i) \\
4158 [0012] &\rightarrow (\pm 2)^{378} + (\pm 1)^{1029} + (0)^{1344} && (6.8.56j)
\end{aligned}$$

明らかに重力子にあたる $\lambda = 2$ の多重度が 1 なのは **44** [2000] のみ.

つぎに, 4次元における最大ヘリシティが $+3/2$ となる $SO(9)$ の表現を探すと

$$\begin{aligned}
128 [1001] &\rightarrow (\pm 3/2)^8 + (\pm 1/2)^{56} && (6.8.57a) \\
432 [0101] &\rightarrow (\pm 3/2)^{48} + (\pm 1/2)^{168} && (6.8.57b) \\
768 [0011] &\rightarrow (\pm 3/2)^{112} + (\pm 1/2)^{272} && (6.8.57c) \\
672 [0003] &\rightarrow (\pm 3/2)^{112} + (\pm 1/2)^{224} && (6.8.57d)
\end{aligned}$$

よって, **128** [1001] が一意的に選ばれる.

最後に, まが足りない $\lambda = \pm 1, \pm 0$ の状態に対応する表現を見つけるため, 4次元での既約分解が $\lambda_{\max} = 1$ となるものをリストアップすると

$$\begin{aligned}
9 [1000] &\rightarrow (\pm 1)^1 + (0)^7 && (6.8.58a) \\
36 [0100] &\rightarrow (\pm 1)^7 + (0)^{22} && (6.8.58b) \\
84 [0010] &\rightarrow (\pm 1)^{21} + (0)^{42} && (6.8.58c) \\
126 [0002] &\rightarrow (\pm 1)^{35} + (0)^{56} && (6.8.58d)
\end{aligned}$$

これより, ボゾンのヘリシティと多重度が 4次元極大超重重力理論と一致するのは, **36** [0010].

以上より, トーラスコンパクト化により 4次元極大超重重力理論のゼロ質量 1 粒子状態を再現する $SO(9)$ の表現 (11次元でのゼロ質量 1 粒子状

態) が次のように定まる :

$$\text{Boson} : \mathbf{44} [2000] + \mathbf{84} [0010], \quad (6.8.59a)$$

$$\text{Fermion} : \mathbf{128} [1001] \quad (6.8.59b)$$

6.8.3.2 線型理論レベルでの 11 次元場の決定

Creation: 2021/4/4

Resource: RM20201123

Update: 2021/5/2

11 次元における 1 粒子状態を表す場を決定するには, まず, $\text{SO}(9)$ の既約表現を, $\text{SO}(10, 1)$ の既約表現に持ち上げないといけない. すなわち, $(k^I) \mapsto (k^1, \dots, k^9, k^{10}, k^0) = (k^I, 0, 0)$ で決まる標準埋め込み $\text{SO}(9) \subset \text{SO}(10, 1)$ による表現の既約分解が, 1 粒子状態を表す $\text{SO}(9)$ の既約表現 ρ_9 を含むような $\text{SO}(10, 1)$ の既約表現 ρ_{11} を探すことが必要となる.

ただし, このような表現は無限にあるので, 既約分解で得られる $\text{SO}(9)$ の既約表現のなかで, ρ_9 が最高レベルとなる ρ_{11} に候補を限定する. これは, 通常, ρ_9 が最高レベルとならない ρ_{11} に対応するテンソル (-スピノール) 場を用いる場合, ρ_9 に対応する既約成分は, その発散・縮約により得られるより階数の低いテンソル (-スピノール) 場に含まれ, したがって, 実質的に ρ_9 が最高レベルとなる ρ_{11} に対応するテンソル (-スピノール) 場に帰着されるためである. ただし, これを厳密に一般的に示すことは難しいが, 上で定めた 11 次元極大超重力理論で現れる 1 粒子状態に対しては, これが成立することが確かめられる.

$\text{SO}(10, 1)$ の表現の Dynkin ウェイトと標準埋め込みでの $\text{SO}(9)$ の表現の Dynkin ウェイトの対応は次のようになる :

$$\text{SO}(10, 1) \quad \text{SO}(9) \quad (6.8.60)$$

$$[a_1 a_2 a_3 a_4 a_5] \mapsto [a_1 a_2 a_3 2a_4 + a_5] \quad (6.8.61)$$

上で述べたルールより, 両者の最高ウェイトがこの対応を持つことを要請すると, アップリフトが次のように定まる :

$$\begin{array}{l} \text{SO}(10, 1) \quad \supset \quad \text{SO}(9) \\ \text{Boson} : \quad \mathbf{65} [20000] \quad \longrightarrow \quad \mathbf{44} [2000] \\ \quad \quad \quad \mathbf{165} [00100] \quad \longrightarrow \quad \mathbf{84} [0010] \\ \text{Fermion} : \quad \mathbf{320} [10001] \quad \longrightarrow \quad \mathbf{128} [1001] \end{array} \quad (6.8.62)$$

この結果をさらに $SL(12)$ の表現にアップリフトすると 1 粒子状態に対応するテンソル (-スピノール) 場が得られる.

(A) 1 粒子状態 $44 [2000]$ に対応するテンソル場 まず, 標準的な埋め込み $SO(10,1) \subset SL(11)$ に対して, 表現の Dynkin ウェイトの対応は

$$SL(11) \quad SO(10,1) \quad (6.8.63)$$

$$[a_1 \cdots a_{10}] \mapsto [a_1 + a_{10} \ a_2 + a_9 \ a_3 + a_8 \ a_4 + a_7 \ 2(a_5 + a_6)] \quad (6.8.64)$$

で与えられるので, $65 [20000]$ の $SL(11)$ の既約表現へのアップリフトとしては, 次の 3 つの可能性がある:

$$\begin{aligned} SL(11) & \supset SO(10,1) \\ \mathbf{66} [20^{(9)}] = YT(2) & = \mathbf{65} [20000] + \mathbf{1}, \\ \mathbf{120}_{\text{adj}} [10^{(8)} 1] = YT(2, 1^9) & = \mathbf{65} [20000] + \mathbf{55} [01000], \\ \mathbf{66}^* [0^{(9)}, 2] = YT(2^{10}) & = \mathbf{65} [20000] + \mathbf{1} \end{aligned} \quad (6.8.65)$$

ここで, $YT(n_1, n_2, \dots)$ は, 対応する $SL(11)$ の既約表現が, 符号数 (n_1, n_2, \dots) の Young 図形と対応することを意味する.

(A-1) 既約表現 $\mathbf{66} [20^{(9)}]$ この $SL(11)$ の既約表現は, $YT(2)$ より, 2 階の対称テンソル場 h_{MN} で表され, そのトレースレス部分 $\eta^{MN} h_{MN} = h_M^M = 0$ が, $SO(10,1)$ に対する既約表現 $\mathbf{65}$ を与える. 次に, 運動量表示のもとで, 光的運動量 k^M に対し, $V_M = h_{MN} k^N$ および $h_{MN} : h_{MN} k^N = 0$ は, $SO(9)$ で不変で, $\mathbf{65} = \mathbf{11} + \mathbf{54}$ の分解を与える.

ここで, ゼロ質量粒子を記述するテンソル場は, 一般に, ローレンツ変換によりゲージ変換を受けるので, ゲージ不変自由度が物理自由度に対応する. 今の 2 階対称テンソルの場合, 運動量表示で, ゲージ変換は, ベクトル場 ξ_M を用いて,

$$\delta h_{MN} = k_M \xi_N + k_N \xi_M \quad (6.8.66)$$

と表される. $\delta V_M = k_M \xi_N k^N$ となるので, $V_M = 0$ を保つゲージ変換は, $\xi_M k^M = 0$ となる. よって, $\mathbf{54}$ のゲージ不変自由度として $54 - (11 - 1) = 44$ が得られる:

$$\mathbf{44} [2000] \Leftrightarrow h_{MN} : h_M^M = 0, \partial^N h_{NM} = 0 \quad \text{mod } \delta h_{MN} = \partial_M \xi_N + \partial_N \xi_M \quad (6.8.67)$$

(A-2) 既約表現 $120 [10^{(8)} 1]$ この既約表現は, $YT(2, 1^9)$ より, 11 階の任意テンソル $t_{a_1 \dots a_{11}} \in \mathcal{T}^{11}$ を用いて, 標準 Young 盤 B より決まる次のような 11 階テンソル場 T で記述される:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(2,1^9)}(B) &= \hat{c}_B \mathcal{T}^{11} \ni T_{a_1 \dots a_{11}} \\ T_{a_1 \dots a_{11}} &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_B} \text{sign}(\sigma) \sigma(t_{a_1 \dots a_{11}} + t_{a_{11} \dots a_1}) , \quad B = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 11 \\ \hline 2 & \\ \hline \vdots & \\ \hline 10 & \\ \hline \end{array} \\ &= 10! (t_{[a_1 \dots a_{10}]a_{11}} - t_{a_{11}[a_1 \dots a_{10}]}) \end{aligned} \quad (6.8.68)$$

この Young 対称性をもつテンソルは, 次のように $(1, 1)$ 型テンソル f_a^b と 1 対 1 に対応する:

$$f_a^b \equiv \frac{1}{10!} T_{c_1 \dots c_{10} a} \epsilon^{c_1 \dots c_{10} b} \quad (6.8.69a)$$

$$\Leftrightarrow T_{a_1 \dots a_{10} a_{11}} = -f_{a_{11}}^b \epsilon_{a_1 \dots a_{10} b}. \quad (6.8.69b)$$

これより, f_a^b の取り得る値は, 方程式

$$(\hat{c}_B t)_{a_1 \dots a_{11}} \equiv 10! (t_{[a_1 \dots a_{10}]a_{11}} - t_{a_{11}[a_1 \dots a_{10}]}) = -f_{a_{11}}^b \epsilon_{a_1 \dots a_{10} b}. \quad (6.8.70)$$

が $t_{a_1 \dots a_{11}}$ に関して解をもつという条件で決まる. 特に, この式の a_1, \dots, a_{11} に関する完全反対称化より, 拘束条件

$$f_c^c = 0 \quad (6.8.71)$$

が得られる.

実は, この条件が十分条件であることも次のようにして示される. まず,

$$\alpha_{a_1 \dots a_{11}} \equiv f_{a_{11}}^b \epsilon_{a_1 \dots a_{10} b} \quad (6.8.72)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{1}{10!} f_{a_1}^b \epsilon_{a_2 \dots a_{11} b} \epsilon^{a_1 \dots a_{10} c} &= \frac{1}{10} (f_{a_{11}}^c - f_b^b \delta_{a_{11}}^c) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{10} (f_{a_{11}}^c - f_b^b \delta_{a_{11}}^c) \epsilon_{a_1 \dots a_{10} c} &= -f_{a_{11}}^b \epsilon_{[a_1 \dots a_{10}]a_{11} b} \end{aligned} \quad (6.8.73)$$

より,

$$(\hat{c}_B \alpha)_{a_1 \dots a_{11}} = \frac{11!}{10} \alpha_{a_1 \dots a_{11}} - 9! f_c^c \epsilon_{a_1 \dots a_{11}}. \quad (6.8.74)$$

よって, $f_c^c = 0$ なら, t に対する上記の方程式は次の特殊解をもつ:

$$t = \frac{10}{11!} \alpha \quad (6.8.75)$$

次に, f_a^b のゲージ変換則を求める. まず, ξ^a は $k_a \xi^a = 0$ を満たす任意のベクトルとして, $t \in \mathcal{T}^{11}$ のゲージ変換則は, 運動量表示で, 一般に

$$\delta t_{a_1 \dots a_{11}} = k_{a_1} t_{b a_2 \dots a_{11}} \xi^b + \dots + k_{a_{11}} t_{a_1 a_2 \dots a_{10} b} \xi^b \quad (6.8.76)$$

で与えられる. これより, $T \in \mathcal{T}^{(2,1^9)}$ のゲージ変換は,

$$\delta T_{a_1 \dots a_{11}} = -10 k_{[a_1} \epsilon_{a_2 \dots a_{10}]bc} f_{a_{11}}{}^b \xi^c - k_{a_{11}} \epsilon_{a_1 \dots a_{10} b} f_c{}^b \xi^c. \quad (6.8.77)$$

この変換則を f_a^b に翻訳すると

$$\delta f_a^b = -k_c f_a{}^c \xi^b + k_a f_c{}^b \xi^c \quad (6.8.78)$$

となる. この変換は, 拘束条件 $f_c^c = 0$ を満たす.

特に,

$$\delta(k^a f_a^b) = -(k_a f_a{}^c k_c) \xi^b, \quad \delta(f_a^b k_b) = k_a (\xi^c f_c{}^b k_b) \quad (6.8.79)$$

より,

$$f \in \mathcal{T}_{\text{HH}}^2 = \{f_a^b \mid k^a f_a^b = 0, k_a^b k_b = 0\} \Rightarrow \delta f_a^b = k_a \xi^c f_c{}^b \in \mathcal{T}_{\text{HH}}^2 \quad (6.8.80)$$

すなわち, $\mathcal{T}_{\text{HH}}^2$ はゲージ変換に対する \mathcal{T}^2 の不変部分空間. この不変空間に含まれる極小の不変部分空間は, f_a^b が δf_a^b と同じ構造を持つことより, $f_a^b = k_a g^b$ ($g^b k_b = 0$):

$$f \in \mathcal{V}_H = \{f_a^b = k_a g^b \mid g^b k_b = 0\} \Rightarrow \delta f_a^b = 0. \quad (6.8.81)$$

$f \in \mathcal{T}_{\text{HH}}^2$ なら $\delta f \in \mathcal{V}_H$ なので, 剰余空間 $\mathcal{T}_{\text{HH},G}^2 / \mathcal{V}_H$ が $\mathcal{T}_{\text{HH}}^2$ に対応するゲージ不変自由度を表し, $\text{SO}(10,1)$ の既約表現 **120** [20000 から誘導される右正則表現のゲージ不変な分解を与える:

$$\dim \mathcal{V}_H = 10, \dim \mathcal{T}_{\text{HH}}^2 = 120 - 21 = 99 \Rightarrow \dim(\mathcal{T}_{\text{HH},G}^2 \cong \mathcal{T}_{\text{HH}}^2 / \mathcal{V}_H) = 99 - 10 = 89. \quad (6.8.82)$$

しかし, \mathcal{V}_H は, f_{ab} の対称性/反対称性を保たないので, この記述では, $\text{SO}(9)$ の既約表現 **44** へのゲージ不変な分解

$$89 = \mathbf{44} [2000] + (\mathbf{36} [0100] + \mathbf{9} [1000]) \quad (6.8.83)$$

は得られない。

この問題は、ゲージ自由度を拡張することにより解消される。まず、ゲージ変換を

$$\delta f_{ab} = k_a g_b + \omega_{ab}; \quad \omega_{ab} = -\omega_{ba}, \quad k^b g_b = 0 \quad (6.8.84)$$

と拡張する。すると、任意の $f \in \mathcal{T}_{\text{tf}}^2$ はゲージ変換により対称テンソル $f \in \mathcal{S}_{\text{tf}}^2$ に写される。そこで、 f が対称テンソルとなるよう部分ゲージ固定すると、残留ゲージ自由度は、

$$\delta f_{ab} = k_a g_b + k_b g_a \quad (6.8.85)$$

となる。このゲージ変換は $f_{ab} k^b$ の値を保つので、さらに、拘束条件 $f_{ab} k^b = 0 \Leftrightarrow f \in \mathcal{S}_{\text{tf},\text{H}}^2$ を課することができる。このとき、ゲージ不変な自由度は、

$$\dim(\mathcal{S}_{\text{tf},\text{H}}^2) = {}_{12}C_2 - 1 - 11 = 54 \Rightarrow \dim(\mathcal{T}_{\text{tf},\text{H},\text{G}}^2) = 54 - 10 = 44 \quad (6.8.86)$$

となり、44 表現が抽出される。1 形式の基底 θ_M^a を Minkowski 時空からの摂動として

$$\theta_M^a = \delta_M^a + f_M^a \quad (6.8.87)$$

と表すと、 f_M^a は上記の拡張されたゲージ変換を受ける。したがって、既約表現 **120** $[10^{(8)}1]$ に従うテンソル場による 1 粒子状態 **44** $[2000]$ の記述は、1 形式基底場 θ_M^a による記述と同等であると見なされる。

(A-3) 既約表現 66* $[0^{(9)}2]$ この既約表現は、 $YT(2^{10})$ より得られ、20 階の任意テンソル $t_{a_1 \dots a_{20}} \in \mathcal{T}^{20}$ を用いて、標準 Young 盤 B より決まる次のような 20 階テンソル場 T で記述される：

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(2^{10})}(B) &= \hat{c}_B \mathcal{T}^{20} \ni T_{a_1 \dots a_{20}} \\ T_{a_1 \dots a_{20}} &= (\hat{c}_B t)_{a_1 \dots a_{20}} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{K}_B} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_B} \text{sign}(\sigma) \sigma \tau(t), \quad B = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 11 \\ \hline 2 & 12 \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline 10 & 20 \\ \hline \end{array} \\ &= (10!)^2 (a_B t)_{[a_1 \dots a_{10}][a_{11} \dots a_{20}]} \end{aligned} \quad (6.8.88)$$

台 B に対応する対称群 \mathfrak{S}_{20} の複素既約表現の次数 $N_{(2^9)}$ は

$$N_{(2^{10})} = \frac{(20)! \Delta(11, 10, \dots, 2)}{11! 10! \dots 2!} = \frac{20!}{10! 11!} = 2^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 16796. \quad (6.8.89)$$

よって、一般論より、

$$\hat{c}_B^2 = \frac{2^{10}(10!)^2}{16796} \hat{c}_B \quad (6.8.90)$$

射影 \hat{c}_B の構造より、 $T \in \mathcal{T}^{(2^{10})}$ は

$$T_{a_1 \dots a_{20}} = \epsilon_{a_1 \dots a_{10} b} \epsilon_{a_{11} \dots a_{20} c} S^{bc}; \quad S^{bc} = S^{cb} \quad (6.8.91)$$

と適当な $S \in \mathcal{S}^2$ を用いて表される。いま、

$$t = T \Rightarrow (10!)^2 (a(B_3)t)_{[a_1 \dots a_{10}][a_{11} \dots a_{20}]} = \epsilon_{a_1 \dots a_{10} b} \epsilon_{a_{11} \dots a_{20} c} S^{bc} \quad (6.8.92)$$

とおくと、 S' は

$$\begin{aligned} S'^{bc} &= \epsilon^{a_1 \dots a_{10} b} \epsilon^{a_{11} \dots a_{20} c} \sum_{p=0}^{10} {}^{10}C_p \epsilon_{a_1 \dots a_p a_{p+1} \dots a_{20} d} \epsilon_{a_{11} \dots a_{p+10} a_{p+1} \dots a_{10} e} S^{de} \\ &= 10! p! (10-p)! S^{bc} \end{aligned} \quad (6.8.93)$$

となるので、 $\pi: \mathcal{T}^{(2^{10})} \rightarrow \mathcal{S}^2$ は全射である。一方、既約表現 $\mathcal{T}^{(2^{10})}$ の次元は 66 で、 $\dim \mathcal{S}^2$ と一致するので、この対応は全単射である。

ゲージ変換は、

$$\delta T_{a_1 \dots a_{20}} = k_{a_1} T_{da_2 \dots a_{20}} \xi^d + \dots + k_{a_{20}} T_{a_1 \dots a_{19} d} \xi^d; \quad \xi_d k^d = 0 \quad (6.8.94)$$

S^{bc} で表すと、

$$\delta S^{bc} = -i (\xi^b S^{cd} k_d + \xi^c S^{bd} k_d). \quad (6.8.95)$$

S を $S^{bc} k_c = 0 \equiv S \in \mathcal{S}_{\mathbb{H}}^2$ に制限すると、 $\delta S^{bc} = 0$ となる。これに加えてさらにトレースレスを要請すると、 $\text{SO}(10, 1)$ の **66** 次元表現は、

$$\mathbf{66} = (\mathbf{54} + \mathbf{1}) + \mathbf{11} \Rightarrow \dim(\mathcal{S}_{\text{tf,H,G}}^2) = 54 \quad (6.8.96)$$

と分解する。しかし、この場合、共変的な制限で、次元を **44** まで下げることができない。したがって、YT(2^{10}) 型のテンソル場は、11 次元のゼロ質量 1 粒子状態 **44** [2000] を記述するのに適した場ではない。

(B) 1 粒子状態 **84** [0010] を記述するテンソル場 $\text{SO}(10, 1)$ の既約表現 **165** [00100] を $\text{SL}(11)$ の表現にアップリフトする方法としては、次の 2 つの可能性がある：

$$\begin{aligned} \text{SL}(11) &\supset \text{SO}(10, 1) \\ \mathbf{165} [0010^{(7)}] = \text{YT}(1, 1, 1) &= \mathbf{165} [00100] \\ \mathbf{165}^* [0^{(7)}100] = \text{YT}(1^8) &= \mathbf{165} [00100] \end{aligned} \quad (6.8.97)$$

(B-1) 既約表現 **165** $[0010^{(7)}]$ この $SL(11)$ の既約表現は, $YT(1, 1, 1)$ より, 3階反対称テンソル場 $A_{MNL} \in \mathcal{A}^3$ により記述される. まず, \mathcal{A}^3 は, 発散 $k^L A_{LMN}$ が $SO(10, 1)$ に関して2階のテンソル場 \mathcal{A}_H^2 として振る舞い, $k^L A_{LMN} = 0$ を満たす \mathcal{A}_H^3 の次元は, ${}_{11}C_3 - ({}_{11}C_2 - 10) = 165 - 45 = 120$. ゲージ変換は,

$$\delta A = d\Lambda, \quad \Lambda \in \mathcal{A}_H^2/d\mathcal{A}_H^1 \quad (6.8.98)$$

よって, ゲージ不変自由度は

$$\dim \mathcal{A}_{H,G}^3 = 120 - (45 - 9) = 84. \quad (6.8.99)$$

したがって, $\mathcal{A}_{H,G}^3$ が1粒子状態 **84** $[0010]$ を記述する.

(B-2) 既約表現 **165*** $[0^{(7)}100]$ この $SL(11)$ の既約表現は, $YT(1^8)$ より, $SO(10, 1)$ テンソルとしては, \mathcal{A}^8 ないし, その Hodge 共役 \mathcal{A}^3 により記述される:

$$T_{M_1 \dots M_8} = \frac{1}{3!} \epsilon_{M_1 \dots M_8 a_1 \dots a_3} B^{a_1 a_2 a_3}. \quad (6.8.100)$$

$B \in \mathcal{A}^3$ による表示は, 一見, (B-1) と同じに見えるが, ゲージ変換が異なる. 実際, ゲージ変換

$$\delta T_{M_1 \dots M_8} = k_{M_1} T_{NM_2 \dots M_8} \xi^N + \dots + k_{M_8} T_{M_1 \dots M_7 N} \xi^N, \quad k_M \xi^M = 0 \quad (6.8.101)$$

は, B で表すと

$$\delta B^{a_1 a_2 a_3} = -3 \xi^{[a_1} B^{a_2 a_3] b} k_b \quad (6.8.102)$$

となる. したがって, $B \in \mathcal{A}_H^3$ を要求すると, B はゲージ不変となる. このため, $\dim \mathcal{A}_H^3 = 120$ まで分解できても, 1粒子状態 $[0010]$ に対応する **84** 次元表現まで Lorentz 共変的に分解することはできない.

(C) 1粒子状態 **128** $[1001]$ まず, **128** $[1001]$ のアップリフト **320** $[10001]$ は, 次のように $SO(10, 1)$ に関するベクトル表現とスピノール表現のテンソル積の既約分解から得られる:

$$\mathbf{11}_v [10000] \times \mathbf{32}_s [00001] = \mathbf{320} [10001] + \mathbf{32}_s [00001] \quad (6.8.103)$$

すなわち, **320** $[10001]$ は, Rarita-Schwinger 型場 $\Psi_M \in \mathcal{T}^1 \otimes \mathcal{S}$ により記述される.

今, E^9 と $E^{1,1}$ のガンマ行列を

$$\gamma^m : \gamma^1, \dots, \gamma^9; \quad \gamma_{(9)} \equiv \gamma^1 \gamma^2 \dots \gamma^9 = 1, \quad (6.8.104)$$

$$\hat{\gamma}^a : \hat{\gamma}^a \hat{\gamma}^b + \hat{\gamma}^b \hat{\gamma}^a = 2\eta^{ab}, a, b = 0, 1; \quad \hat{\gamma}_{(1,1)} = \hat{\gamma}^0 \hat{\gamma}^1 \quad (6.8.105)$$

として, $E^{10,1}$ のガンマ行列 Γ^M ($M = 0, \dots, 10$) を

$$\Gamma^m = \gamma^m \otimes \hat{\gamma}_{(1,1)} \quad (m = 1, \dots, 9), \quad \Gamma^{10} = 1 \otimes \hat{\gamma}^1, \quad \Gamma^0 = 1 \otimes \hat{\gamma}^0 \quad (6.8.106)$$

とおく. このとき, まず, $\Gamma^M \Psi_M$ は $\text{SO}(10, 1)$ に関して **32** 次元表現に従うので, 拘束条件

$$\Gamma^M \Psi_M = 0 \Rightarrow \Psi_M \in \mathcal{T}_\Gamma^1 \otimes \mathcal{S} \quad (6.8.107)$$

を課すことにより, $\mathbf{11}_v \times \mathbf{32}_s$ の **320** 成分を取り出すことができる.

つぎに, $\mathbf{32}_s$ スピノール空間での作用素 P を

$$P \equiv -\Gamma^{1\dots 9} = -\Gamma^0 \Gamma^{10} = 1 \otimes \hat{\gamma}_{(1,1)} \quad (6.8.108)$$

により定義する. すると, この P は $\text{SO}(9)$ 変換で不変で $P^2 = 1$ なので, $\mathbf{320}$ [10001] の固有空間 $P = \pm 1$ への分解 $\mathcal{T}_\Gamma^1 \otimes (\mathcal{S}^+ + \mathcal{S}) = \mathbf{160}^+ + \mathbf{160}^-$ は, $\text{SO}(9)$ 不変な分解を与える. さらに, 各固有空間 $\mathcal{T}_\Gamma^1 \otimes \mathcal{S}^\pm$ において, $k^M \Psi_M = 0$ は 16 個の拘束条件を与える. 最後に, Ψ_M のゲージ変換は

$$\delta \Psi_M = k_M (\Psi_N \xi^N); \quad k_N \xi^N = 0 \quad (6.8.109)$$

で与えられ, ゲージ自由度は, 各 $\mathcal{T}_\Gamma^1 \otimes \mathcal{S}^\pm$ において $\dim \mathcal{S}^\pm = 16$. 以上より,

$$\mathbf{11}_v \times \mathbf{32}_s \xrightarrow{\Gamma^M \Psi_M = 0} \mathbf{320} \xrightarrow{P \Psi_M = \Psi_M} \mathbf{160} \xrightarrow{k^M \Psi_M = 0} \mathbf{144} \xrightarrow{\text{mod } \delta \Psi_M} \mathbf{128} \quad (6.8.110)$$

なお, $P \Psi_M = \Psi_M \Leftrightarrow \Gamma^L \partial_L \Psi_M = 0$ である.

(D) まとめ 以上まとめると, トーラスコンパクト化により 4 次元極大超重力理論に帰着する 11 次元理論 \mathfrak{n} の一粒子状態とそれを記述する基本場は次のようになる:

i) 重力場: $\mathbf{44}$ [2000]

$$h_{MN} = h_{NM} : h_N^N = 0, \quad \partial^N h_{NM} = 0, \quad \partial \cdot \partial h_{MN} = 0 \quad (6.8.111a)$$

$$\delta h_{MN} = \partial_M \xi_N + \partial_N \xi_M. \quad (6.8.111b)$$

または,

$$f_M^a : f_a^a = 0, \partial^M f_M^a = 0, \partial \cdot \partial f_M^a = 0, \quad (6.8.112a)$$

$$\delta f_M^a = \partial_M \lambda^a + \omega^a_M; , \omega_{ab} = -\omega_{ba}. \quad (6.8.112b)$$

ii) ゲージ場: 84 [0010]

$$A_{MNL} = A_{[MNL]} : \partial^L A_{MNL} = 0. \partial \cdot \partial A_{MNL} = 0 \quad (6.8.113a)$$

$$\delta A_{[3]} = d\Lambda_{[2]}. \quad (6.8.113b)$$

iii) Rarita-Schwinger 場: 128 [1001]

$$\Psi_M : \Gamma^M \Psi_M = \partial^M \Psi_M = \Gamma^N \partial_N \Psi_M = 0, \quad (6.8.114a)$$

$$\delta \Psi_M = \partial_M \chi. \quad (6.8.114b)$$

6.8.3.3 線型レベルでの 11 次元作用積分の決定

Creation: 2021/4/11

Resource: RM20210411

Update:2021/6/6

6.8.3.2 で求めた基本場 $h_{MN}, f^A_M, C_{MNL}, \Psi_M$ に対する線型理論レベルでの作用積分をゲージ不変性に基づいて決定する.

(1) h_{MN} : この場は, 次のような既約分解により, 11 次元の重力子を記述する:

$$\text{SO}_9 : \mathbf{44} [2000] \subset \text{SO}_{10,1} : \mathbf{65} [20000] \subset \text{SL}_{11} : \mathbf{66} [20^{(9)}] = \text{YT}(2) \quad (6.8.115)$$

SL_{11} のテンソルとしては, 2 階の対称テンソルで, ゲージ自由度

$$h_{MN} = h_{NM} : \delta h_{MN} = \partial_M \xi_N + \partial_N \xi_M. \quad (6.8.116)$$

をもつ.

微分について 2 階で, h_{MN} について 2 次式となる, Lorentz 不変な最も一般的な Lagrangian は

$$\mathcal{L} \sim ah^{MN} \partial^2 h_{MN} + bh \partial^2 h + ch \partial^M \partial^N h_{MN} + dh^{MN} \partial_M \partial^L h_{LN}. \quad (6.8.117)$$

ここで, a, b, c, d は定数, $h = h_M^M$ で, \sim は全微分項を除いて等しいことを意味する. ゲージ変換に対する変化は,

$$\delta\mathcal{L} \sim - \left[(4a + 2d)\partial^2\partial^N h_{NM} + (4b + 2c)\partial_M\partial^2 h + (2c + 2d)\partial_M\partial^L\partial^N h_{NL} \right] \xi^M \quad (6.8.118)$$

となるので, 作用積分がゲージ不変である条件は

$$b = -a, \quad c = 2a, \quad d = -2a. \quad (6.8.119)$$

これは, $a = 1/(8\kappa^2)$ と取ると, Einstein-Hilbert 作用積分において, $g_{MN} = \eta_{MN} + h_{MN}$ を代入し, h_{MN} について 2 次まで取った式と一致する:

$$2\kappa^2\mathcal{L} = \frac{1}{4}h^{MN}\partial^2 h_{MN} - \frac{1}{4}h\partial^2 h + \frac{1}{2}h\partial^M\partial^N h_{MN} - \frac{1}{2}h^{MN}\partial_M\partial^L h_{LN}. \quad (6.8.120)$$

場の方程式は,

$$\partial^2 h_{MN} + \partial_M\partial_N h - 2\partial_P\partial_{(M}h_{N)}^P + \eta_{MN}(\partial^P\partial^Q h_{PQ} - \partial^2 h) = 0. \quad (6.8.121)$$

ゲージ条件 $\partial^N h_{MN} = 0$ を課すと,

$$\partial^2 h_{MN} + \partial_M\partial_N h - \eta_{MN}\partial^2 h = 0 \Rightarrow \partial^2 h = 0 \quad (6.8.122)$$

で, 残留ゲージ自由度は

$$\partial^2 \xi_M + \partial_M\partial^P \xi_P = 0 \Rightarrow \partial^2(\partial_P \xi^P) = 0. \quad (6.8.123)$$

ここで,

$$\delta h = 2\partial_P \xi^P \quad (6.8.124)$$

なので, 残留ゲージ自由度を用いて, さらなるゲージ固定条件 $h = 0$ を追加できる. このとき,

- ゲージ条件: $\partial^N h_{MN} = 0, \quad h = 0.$
- 場の方程式: $\partial^2 h_{MN} = 0.$
- 残留ゲージ自由度: $\delta h_{MN} = \partial_M \xi_N + \partial_N \xi_M: \quad \partial_M \xi^M = 0, \quad \partial^2 \xi_M = 0$

となる. これは, 一粒子状態が 44 [2000] で与えられる条件と一致する.

(2) f^A_M : この場は、次のような既約分解により、11次元の重力子を記述する：

$$\text{SO}_9 : \mathbf{44} [2000] \subset \text{SO}_{10,1} : \mathbf{65} [20000] \subset \text{SL}_{11} : \mathbf{120} [10^{(8)} 1] = \text{YT}(2, 1^9) \quad (6.8.125)$$

SL_{11} テンソルとしては、(1, 1) 型混合 2 階テンソルであるが、正しい 1 粒子状態への分解を得るには、ゲージ変換を次のように拡張する必要がある：

$$\delta f^A_M = \partial_M \xi^A + \omega^A_M; \quad \omega^{AB} = -\omega^{BA}. \quad (6.8.126)$$

微分について 2 階で、 f^A_M について 2 次式となる、Lorentz 不変な最も一般的な Lagrangian は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \sim & a f^A_B \partial^2 f^A_B + b f \partial^2 f + c f^A_B \partial^2 f^B_A + d f \partial_A \partial^B f^A_B \\ & + e f^A_B \partial_A \partial_C f^{CB} + g f^A_B \partial_A \partial^C f^B_C + h f^A_B \partial^B \partial^C f^C_A \end{aligned} \quad (6.8.127)$$

ここで、 a, b, c, d, e, g, h は定数、 $f = f^A_A$. この Lagrangian のゲージ変換に対する変化は

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} \sim & - [2(a+h) \partial^2 \partial_M f^{AM} + (2b+d) \partial_A \partial^2 f + (2c+g) \partial^2 \partial_C f^C_A \\ & + (d+2e+g) \partial_A \partial_C \partial^M f^C_M] \xi^A \\ & + [2(a-c) \partial^2 f_{AB} + (2e-g) \partial_A \partial_C f^C_B + (g-2h) \partial^M \partial_A f^B_M] \xi^B \end{aligned} \quad (6.8.128)$$

よって、ゲージ不変となる条件は

$$b = -2a, \quad c = a, \quad d = 4a, \quad e = -a, \quad g = -2a, \quad h = -a. \quad (6.8.129)$$

これは、フォーム場 θ^A_M で表した Einstein-Hilbert 作用積分において、 θ^A_M を $\theta^A_M = \delta^A_M + f^A_M$ とおき、 f^A_M について展開したとき、 f^A_M について 2 次の項と一致する：

$$2\kappa^2 \mathcal{L} \sim f^{(AB)} \partial^2 f_{AB} + 2\partial_A f^{(AC)} \partial^B f_{(BC)} - f \partial^2 f + 2f^{(AB)} \partial_A \partial_B f. \quad (6.8.130)$$

(3) C_{MNL} : このフォーム場は、次のような既約分解により、11次元のゲージ粒子を記述する：

$$\text{SO}_9 : \mathbf{84} [0010] \subset \text{SO}_{10,1} : \mathbf{165} [00100] \subset \text{SL}_{11} : \mathbf{165} [0010^{(7)}] = \text{YT}(1, 1, 1) \quad (6.8.131)$$

ゼロ質量粒子に対する場の一般論より，この3形式場はゲージ自由度

$$\delta C_{[3]} = d\lambda_{[2]} \Leftrightarrow \delta C_{MNL} = 3\partial_{[M}\lambda_{NL]} \quad (6.8.132)$$

をもち，ゲージ不変な自由度が **84** [0010] と対応する．

微分について2階で， C_{MNL} に2次となり，Lorentz 不変な最も一般的な Lagrangian は

$$\mathcal{L} \sim aC^{MNL}\partial^2 C_{MNL} + bC^{MNL}\partial^P\partial_M C_{PNL} \quad (6.8.133)$$

ゲージ変換に対する \mathcal{L} の変化は

$$\delta\mathcal{L} \sim -2(3a+b)\partial^2\partial^L C_{LMN}\lambda^{MN}. \quad (6.8.134)$$

よって，作用積分がゲージ不変となる条件は

$$b = -3a. \quad (6.8.135)$$

対応する Lagrangian は

$$2\kappa^2\mathcal{L} = -\frac{1}{2}G \cdot G \equiv -\frac{1}{2 \cdot 4!}G_{PMNL}G^{PMNL}, \quad (6.8.136)$$

$$G = dC \Leftrightarrow G_{PMNL} = 4\partial_{[P}C_{MNL]}. \quad (6.8.137)$$

対応する場の方程式は

$$d*G = 0 \Leftrightarrow \partial^P G_{PMNL} \equiv \partial^2 C_{MNL} - 3\partial_P\partial_{[M}C^P{}_{NL]} = 0 \quad (6.8.138)$$

ゲージ条件 $\partial^P C_{PMN} = 0$ を課すと，場の方程式は

$$\partial^P C_{PMN} = 0 \Rightarrow \partial^2 C_{MNL} = 0. \quad (6.8.139)$$

残留ゲージ自由度は，

$$\begin{aligned} \partial^2\lambda_{MN} - 2\partial^P\partial_{[M}\lambda_{N]P} &= 0; & \delta\lambda_{MN} &= 2\partial_{[M}\xi_{N]}, \delta\xi_M = \partial_M\sigma \\ \Leftrightarrow \partial^2\lambda_{MN} = 0, \partial^P\lambda_{PM} &= 0; & \partial^2\xi_M &= \partial_M\xi^M = 0, \partial^2\sigma = 0 \end{aligned} \quad (6.8.140)$$

よって，残るゲージ不変な自由度は，既約成分 **84** [0010] と一致する．

(4) Ψ_M : この場合は、次の既約分解により、11次元のスピンール粒子を記述する：

$$\text{SO}_9 : \mathbf{128} [1001] \subset \text{SO}_{10,1} : \mathbf{320} [10001] \subset \text{SO}_{10,1} : \mathbf{11}_v \times \mathbf{32}_s \quad (6.8.141)$$

ゲージ自由度は

$$\delta\Psi_M = \partial_M\chi. \quad (6.8.142)$$

微分に関して1階、 Ψ_M について2次の最も一般的な Lorentz 不変 Lagrangian は

$$\mathcal{L} \sim a\bar{\Psi}_M\Gamma^{MNL}\partial_N\Psi_L + b\bar{\Psi}_M\Gamma^M\partial^L\Psi_L. \quad (6.8.143)$$

ここで、 a, b は定数で、 $\bar{\Psi}_M = \bar{\Psi}_M C$. この Lagrangian のゲージ変換に対する変化は

$$\mathcal{L} \sim b\bar{\chi} (\partial^2\Gamma^M\Psi_M - \not{\partial}\partial^M\Psi_M). \quad (6.8.144)$$

よって、作用積分がゲージ不変となる条件は

$$b = 0 \quad (6.8.145)$$

で、対応する Lagrangian は

$$2\kappa^2\mathcal{L} = -i\bar{\Psi}_M\Gamma^{MNL}\partial_N\Psi_L \quad (6.8.146)$$

場の方程式は

$$\Gamma^{MNL}\partial_N\Psi_M = 0 \quad (6.8.147)$$

となる.

いま、ゲージ固定条件

$$\Gamma^M\Psi_M = 0 \Rightarrow \not{\partial}\chi = 0 \quad (6.8.148)$$

を課すと、

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma_M\Gamma^{MNL}\partial_N\Psi_L = -\partial_M\Gamma^L\Psi_L + \not{\partial}\Psi_M \Rightarrow \not{\partial}\Psi_M = 0, \quad (6.8.149) \\ \Rightarrow 0 &= \Gamma^{MNL}\partial_N\Psi_L = \Gamma^{MN}\partial_N\Gamma^L\Psi_L - \Gamma^M\partial^N\Psi_N + \not{\partial}\Psi_M \Rightarrow \partial^M(\not{\partial}\Psi_M) = 0 \end{aligned}$$

以上より、ゲージ不変自由度は

$$\not{\partial}\Psi_M = 0, \Gamma^M\Psi_M = \partial^M\Psi_M = 0, \quad (6.8.151a)$$

$$\delta\Psi_M = \partial_M\chi : \not{\partial}\chi = 0 \quad (6.8.151b)$$

により与えられ、 $\mathbf{128} [1001]$ と一致する.

(5) まとめ 以上まとめると, 11次元での超重力理論の作用積分は, 自由場近似で

$$2\kappa^2 \mathcal{L} = f^{(AB)} \partial^2 f_{AB} + 2\partial_A f^{(AC)} \partial^B f_{(BC)} - f \partial^2 f + 2f^{(AB)} \partial_A \partial_B f - \frac{1}{2} G \cdot G - \bar{\Psi}_M \Gamma^{MNL} \partial_N \Psi_L. \quad (6.8.152)$$

ここで,

$$G \cdot G \equiv \frac{1}{4!} G_{PMNL} G^{PMNL}. \quad (6.8.153)$$

したがって, トーラスコンパクト化により4次元極大超重力理論に射影される11次元の共変的理論は, $\{e_A^M\}$ を正規直交基底として,

$$2\kappa^2 |\theta|^{-1} \mathcal{L} = -e_A^M e_B^N R_{MN}{}^{AB}(\omega) - \frac{1}{2} G \cdot G - \bar{\Psi}_M \Gamma^{MNL} D(\omega) \Psi_L + |\theta|^{-1} \mathcal{L}_{\text{ho}}. \quad (6.8.154)$$

ここで,

$$g^{MN} = \eta^{AB} e_A^M e_B^N, \quad (6.8.155a)$$

$$G \cdot G \equiv \frac{1}{4!} g^{M_1 N_1} \dots g^{M_4 N_4} G_{M_1 \dots M_4} G_{N_1 \dots N_4}, \quad (6.8.155b)$$

$$\Gamma^M = e_A^M \Gamma^A \quad (6.8.155c)$$

である. また, $\omega = (\omega_M{}^{AB})$ は直交フレームバンドルにおける線型接続で,

$$D_M = \partial_M + \frac{1}{4} \omega_{MAB} \Gamma^{AB} \quad (6.8.156)$$

である. この ω は作用積分の ω に関する変分方程式により定まる.

最後に, \mathcal{L}_{ho} は平坦背景場からの摂動に関して3次以上ないし, 3階以上の微分を含む一般座標変換および局所 Lorentz 変換に関して不変な量である.

6.8.3.4 一般共変的かつゲージ不変な作用積分の一般形

Creation: 2021/5/30

Resource: RM20210521

Update: 2021/9/11

(1) 3形式ポテンシャル $C_{[3]}$ $C_{[3]}$ とその共変微分のスカラー多項式で、ゲージ変換

$$\delta C_{[3]} = d\Lambda_{[2]} \quad (6.8.157)$$

に対して不変、かつ、含む微分の総階数が2以下のものをすべて求める。なお、以下、

$$\int d^D x |\theta| \mathcal{L} = \int d^D x |\theta| X \Rightarrow \mathcal{L} \sim X \quad (6.8.158)$$

と表記する。

1-1) $\nabla^a C X$ 型: $\nabla^a C X \sim \pm C \nabla^a X$ なので、Lagrangian が

$$\mathcal{L} \sim C_I X^I; \quad C_I X^I \equiv C_{MNL} X^{MNL} \quad (6.8.159)$$

の形を持つとして良い。このとき、

$$\begin{aligned} 0 &\sim 3\partial_M \Lambda_{NL} X^{MNL} \sim -3\Lambda_{NL} \partial_M X^{MNL} \\ \Leftrightarrow d * X = 0 &\Leftrightarrow X = - * dY \end{aligned} \quad (6.8.160)$$

より、

$$S = \int G_{[4]} \wedge Y; \quad G_{[4]} = dC. \quad (6.8.161)$$

1-2) $\nabla^a C \nabla^p C X$ 型: 部分積分により

$$\nabla^a C \nabla^b C X \sim (-1)^a C \nabla^{a+b} C X + [\text{terms } \propto C C^p \nabla^q X \ (p < a + b)] \quad (6.8.162)$$

となるので、

$$\mathcal{L} \sim C_{I_1} \nabla_{S_1} \cdots \nabla_{S_p} C_{I_2} X^{I_1 I_2; S} + \text{lower-order terms} \quad (6.8.163)$$

ここで、 $I_i = [M_i N_i L_i]$. ゲージ不変性より

$$0 \sim -3\Lambda_{N_1 L_1} \nabla_{M_1} \nabla_{S_1} \cdots \nabla_{S_p} C_{I_2} (X^{I_1 I_2; S} + (-1)^p X^{I_2 I_1; S}). \quad (6.8.164)$$

ここで、

$$X^{I_1 I_2; S} = (-1)^p X^{I_2 I_1; S} \quad (6.8.165)$$

よって、 C の異なる階数の微係数は互いに線形独立なことより、

$$\nabla_{M_1} \nabla_{S_1} \cdots \nabla_{S_p} C_{I_2} X^{I_1 I_2; S} = 0, \forall C_{[3]}. \quad (6.8.166)$$

これが満たされるための条件は, $X^{I_1 I_2; S}$ を (M_1, S_1, \dots, S_p) について対称化するとゼロとなること. このとき, $X^{I_1 I_2; S}$ は, $[I_1, I_2]$ の置換に対する上記の変換則より, (M_2, S_1, \dots, S_p) について対称化してもゼロとなる. これより, 特に, $p \geq 1$ となる.

まず, $p = 1$ のとき, (6.8.166) は, $X^{I_1 I_2; S}$ が $[I_2 S]$ に関して完全反対称であることを意味するので,

$$\mathcal{L} \sim C_{I_1} G_{J_2} Y^{I_1 J_2} + \text{lot's} \quad (6.8.167)$$

となる. ここで, $J_2 = [M_2 N_2 L_2 S]$ である. このとき, ゲージ不変性は

$$0 \sim \nabla_{M_1} G_{J_2} Y^{I_1 J_2} + \text{lot's} \quad (6.8.168)$$

となる. これが任意の $C_{[3]}$ について成り立つのは, $Y^{I_1 J_2}$ が $[M_1 J_2]$ に完全反対称, したがって $[I_1 J_2]$ について完全反対称の時. したがって,

$$\mathcal{L} \sim C_{I_1} G_{J_2} Y^{[I_1 J_2]} + C_{I_1} C_{I_2} Z^{I_1 I_2}. \quad (6.8.169)$$

このゲージ不変性は

$$0 \sim G_{J_2} \nabla_{M_1} Y^{[I_1 J_2]} + 2 \nabla_{M_1} (C_{I_2} Z^{I_1 I_2}) \quad (6.8.170)$$

これより, 特に, $Z_{I_1 I_2}$ は $[M_1 I_2]$ について完全反対称, したがって, $[I_1 I_2]$ に関して完全反対称となるが, これは $Z^{I_1 I_2} = Z^{I_2 I_1}$ と矛盾. よって, $Z^{I_1 I_2} = 0$ なので, ゲージ不変であるためには,

$$\nabla_{M_1} Y^{[I_1 J_2]} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Y^{I_1 J_2} = \text{const} \times \epsilon^{I_1 J_2} & : D = 7 \\ d * Y = 0 \Leftrightarrow * Y = dW & : D \geq 8. \end{cases} \quad (6.8.171)$$

よって, $p = 1$ の場合のゲージ不変な作用積分は

$$D = 7 : S = \int k C \wedge G, \quad (6.8.172)$$

$$D \geq 8 : S = \int C \wedge G \wedge dW = \int G \wedge G \wedge W \Rightarrow \mathcal{L} \sim G_{J_1} G_{J_2} Y^{[I_1 I_2]} \quad (6.8.173)$$

つぎに, $p \geq 2$ のとき, $N_1 L_1$ と I_2 を固定して, $X^{I_1 I_2; S_1 \dots S_p} \Rightarrow \{M_1 S_1 \dots S_p\}$ と表記することにする

$$\{M_1 S_1 \dots S_p\} = a(M_1 S_i) \{M_1 S_1 \dots S_p\} + s(M_1 S_i) \{M_1 S_1 \dots S_p\} \quad (6.8.174)$$

となる．ここで， $a(M_1 S_i)$ と $s(M_1 S_i)$ は，それぞれ， $[M_1, S_i]$ について反対称化および対称化する作用素である．この式を i について 1 から p まで足すと

$$\{M_1 S_1 \cdots S_p\} = \{(M_1 S_1 \cdots S_p)\} + \frac{2}{p+1} \sum_i a(M_1 S_i) \{M_1 S_1 \cdots S_p\} \quad (6.8.175)$$

を得る．したがって，(6.8.166) より

$$\mathcal{L} \sim \frac{2p}{p+1} C_{[M_1|N_1 L_1]} \nabla_{S_1} \nabla_{S_2} \cdots \nabla_{S_p} C_{I_2} X^{I_1 I_2 S} \quad (6.8.176)$$

これは， $X^{I_1 I_2 S}$ が $(M_1, S_i) (i = 1, \dots, p)$ の置換に関して反対称として良いことを意味する．したがって， $[I_1, S_i]$ に関して完全反対称として良い． I_1 と I_2 を入れ替えて同じ議論をくり返すと， $[I_2, S_i]$ に関して完全反対称であることが分かる．よって，

$$\mathcal{L} \sim G_{J_1} \nabla_{S_3} \cdots \nabla_{S_p} G_{J_2} Y^{J_1 J_2 S_3 \cdots S_p}. \quad (6.8.177)$$

1-3) $C^a \nabla^p C \nabla^q C X$ 型 ($p + q \leq 2$) 一般性を失うことなく $p \leq q \leq 1$ としよ。

まず， $p = q = 0$ のとき，

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\sim C_{I_1} \cdots C_{I_r} X^{I_1 \cdots I_r}, \quad (6.8.178) \\ \delta \mathcal{L} &\sim -3r \Lambda_{N_1 L_1} \nabla_{M_1} (C_{I_2} \cdots C_{I_r} X^{I_1 \cdots I_r}) \\ &\sim -3r(r-1) \Lambda_{N_1 L_1} C_{I_2} \cdots C_{I_{r-1}} \nabla_{M_1} C_{I_r} X^{I_1 \cdots I_r} + (\text{lot's}) \end{aligned} \quad (6.8.179)$$

となるが，これは $X^{I_1 I_2 S} = 0$ を要求する．したがって，この方のゲージ不変作用積分は存在しない．

つぎに， $p = 0, q = 1$ とする．このとき，

$$\mathcal{L} \sim C_{I_1} \cdots C_{I_{r-1}} \nabla_S C_{I_r} X^{I_1 \cdots I_r S} + (\text{lot's}), \quad (r \geq 3) \quad (6.8.180)$$

$$X^{I_2 \cdots I_r I_1 S} = -\frac{1}{r-1} X^{I_1 \cdots I_r S}, \quad (6.8.181)$$

\mathcal{L} のゲージ変換は

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &\sim 3(r-1) \Lambda_{N_1 L_1} \nabla_{M_1} (C_{I_2} \cdots C_{I_{r-1}} \nabla_S C_{I_r}) X^{I_2 \cdots I_{r-1} [I_r, I_1] S} + (\text{lot's}) \\ &\sim -3r \Lambda_{N_1 L_1} \nabla_{M_1} (C_{I_2} \cdots C_{I_{r-1}} \nabla_S C_{I_r}) X^{I_1 \cdots I_r S} + (\text{lot's}). \end{aligned} \quad (6.8.182)$$

と表されるので、ゲージ不変となるためには、

$$X^{I_1 \cdots I_r; S} | (M_1 S) = 0 \Rightarrow X^{[I_1 \cdots I_r; S]} | [I_1 S] = X^{[I_1 \cdots I_r; S]} \quad (6.8.183)$$

よって、 \mathcal{L}' を lower order terms として、

$$\mathcal{L} \sim C_{I_1} \cdots C_{I_{r-1}} G_J Y^{I_1 \cdots I_{r-1} J} + \mathcal{L}' \quad (6.8.184)$$

ここで、 $J = [I_r S]$. このゲージ変換は

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} \sim & -3\Lambda_{N_1 L_1} [C_{I_2} \cdots C_{I_{r-1}} \nabla_{M_1} G_J + (r-2)C_{I_2} \cdots C_{I_{r-2}} \nabla_{M_1} C_{I_{r-1}} G_J] Y^{I_1 \cdots I_{r-1} J} \\ & -3\Lambda_{N_1 L_1} C_{I_2} \cdots C_{I_{r-1}} G_J \nabla_{M_1} Y^{I_1 \cdots I_{r-1} J}. \end{aligned} \quad (6.8.185)$$

よって、ゲージ不変であるためには、

$$Y^{I_1 \cdots I_{r-1} J} | [M_1 J] = Y^{I_1 \cdots I_{r-1} J} \Rightarrow Y^{I_1 \cdots I_{r-1} J} | [I_i J] = Y^{I_1 \cdots I_{r-1} J} \quad \forall i = 1, \dots, r-1 \quad (6.8.186)$$

が必要. ところが、このとき、

$$Y | (M_1 M_2) = 0 \Rightarrow Y^{I_1 I_2 \cdots} = -Y^{I_2 I_1 \cdots} \quad (6.8.187)$$

ところが、 Y は I_1, \dots, I_{r-1} について対称なので、結局 $Y = 0$. すなわち、今考えている形のゲージ不変な作用積分は存在しない.

最後に、 $p = q = 1, r \geq 3$ の場合を調べる：

$$\mathcal{L} \sim \mathcal{L}_0 + (\text{lot's}); \quad \mathcal{L}_0 \sim C_{I_1} \cdots C_{I_{r-2}} \nabla_S C_{I_{r-1}} \nabla_T C_{I_r} X^{I_1 \cdots I_{r-1} (I_r) (ST)} \quad (6.8.188)$$

$$X^{I_1 \cdots I_{r-2} I_{r-1} I_r; ST} = X^{I_1 \cdots I_{r-2} I_r I_{r-1}; TS}, \quad (6.8.189)$$

$$X^{I_1 \cdots I_r; [ST]} = -(r-2) X^{I_1 \cdots I_{r-1} I_{r-2} I_r; [ST]}. \quad (6.8.190)$$

ゲージ変換は

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_0 \sim & 3\Lambda_{N_1 L_1} [2C_{I_2} \cdots C_{I_{r-1}} \nabla_{M_1} \nabla_S \nabla_T C_{I_r} X^{I_2 \cdots I_{r-1} (I_1 I_r) (ST)} \\ & + 2(r-2)C_{I_2} \cdots C_{I_{r-2}} \nabla_{M_1} C_{I_{r-1}} \nabla_S \nabla_T C_{I_r} A^{I_1 \cdots I_r; ST} \\ & + (r-2)(r-3)C_{I_2} \cdots C_{I_{r-3}} \nabla_{M_1} C_{I_{r-2}} \nabla_S C_{I_{r-1}} \nabla_T C_{I_r} B^{I_1 \cdots I_r; ST} \\ & + 2C_{I_2} \cdots C_{I_{r-1}} \nabla_S \nabla_T C_{I_r} \nabla_{M_1} E^{I_1 \cdots I_r; ST} \\ & + (r-2)C_{I_2} \cdots C_{I_{r-2}} \nabla_S C_{I_{r-1}} \nabla_T C_{I_r} \nabla_{M_1} F^{I_1 \cdots I_r; ST} \\ & + 2C_{I_2} \cdots C_{I_{r-1}} \nabla_T C_{I_r} \nabla_{M_1} \nabla_S X^{I_2 \cdots I_{r-1} I_1 I_r; ST}] \end{aligned} \quad (6.8.191)$$

ここで、

$$A^{I_1 \dots I_r; ST} = (-X^{I_2 \dots I_{r-2} [SN_1 L_1] I_{r-1} I_r; M_1 T} + X^{I_2 \dots I_{r-1} I_1 I_r; (ST)} + X^{I_2 \dots I_{r-1} [SN_1 L_1] I_r; M_1 T} + X^{I_2 \dots I_{r-2} I_r [SN_1 L_1] I_{r-1}; TM_1}) \quad (6.8.192a)$$

$$B^{I_1 \dots I_r; ST} = -X^{I_1 \dots I_r; ST} + X^{I_2 \dots I_{r-1} I_1 I_r; ST} + X^{I_2 \dots I_{r-2} I_r I_1 I_{r-1}; TS} \quad (6.8.192b)$$

$$E^{I_1 \dots I_r; ST} = X^{I_2 \dots I_{r-1} I_1 I_r; (ST)} + X^{I_2 \dots I_{r-1} I_r [SN_1 L_1]; TM_1} | (ST), \quad (6.8.192c)$$

$$F^{I_1 \dots I_r; ST} = -X^{I_1 \dots I_r; ST} + X^{I_2 \dots I_{r-1} I_1 I_r; ST} + X^{I_2 \dots I_{r-2} I_r I_{r-1}; TS} + X^{I_2 \dots I_{r-1} I_r [SN_1 L_1]; TM_1} + X^{I_2 \dots I_{r-2} I_r I_{r-1}; TS} \\ = B^{I_1 \dots I_r; ST} + X^{I_2 \dots I_{r-1} I_r [SN_1 L_1]; TM_1} + X^{I_2 \dots I_{r-2} I_r I_{r-1}; TS} \quad (6.8.192d)$$

これより、 \mathcal{L} がゲージ不変となるためには

$$X^{I_1 \dots I_{r-2} [M_{r-1} N_{r-1} L_{r-1}] I_r; (ST)} | (M_{r-1} ST) = 0, \quad (6.8.193a)$$

$$A^{I_1 \dots I_r; ST} = 0, \quad (6.8.193b)$$

$$B^{I_1 \dots I_r; ST} = 0 \quad (r \geq 4) \quad (6.8.193c)$$

が必要. 特に, 第3式より, $r \geq 4$ のときには,

$$X^{I_2 \dots I_{r-2} I_1 I_{r-1} I_r; ST} = X^{I_2 \dots I_{r-2} l_{r-1} I_1 I_r; ST} + X^{l_2 \dots l_{r-2} I_r I_1 I_{r-1}; TS} \quad (6.8.194)$$

いま, $X^{I_2 \dots I_{r-2} abc; (ST)} = (abc)(a, b, c = I_1, I_{r-1}, I_r)$ と略記すると,

$$(abc) = (bca) + (cab) = 2(abc) + (bca) + (cab) = 3(abc) \Rightarrow (abc) = 0 \quad (6.8.195)$$

同様に, $X^{I_2 \dots I_{r-2} abc; [ST]} = [abc]$ と略記すると, $[abc]$ は完全反対称なので,

$$[abc] = [bac] - [cab] = -2[abc] \Rightarrow [abc] = 0. \quad (6.8.196)$$

これは $X = 0$ を意味する. よって, $r = 3$.

$r = 3$ とすると, $\delta\mathcal{L}$ の leading-order 項がゼロとなる条件は,

$$X^{I_1 I_2 I_3; (ST)} | (M_2 ST) = 0, \quad X^{I_1 I_2 I_3; (ST)} | (M_3 ST) = 0 \quad (6.8.197a)$$

$$X^{I_1 I_2 I_3; (ST)} = -X^{[S, N_1 L_1] I_2 I_3; (M_1 T)}, \quad (6.8.197b)$$

$$X^{[I_2 I_3] I_1; (ST)} = 3X^{I_2 I_3 [SN_1 L_1]; [M_1 T]} | (TS). \quad (6.8.197c)$$

このとき, lower-order 項を打ち消すために Lagrangina に加えることのできる項は

$$\mathcal{L}_1 \sim C_{I_1} C_{I_2} \nabla_S C_{I_3} Y^{I_1 I_2 I_3; S} + C_{I_1} C_{I_2} C_{I_3} Z^{I_1 I_2 I_3} \quad (6.8.198)$$

であるが，部分積分により，

$$Y^{I_1 I_2 I_3; S} = Y^{I_2 I_1 I_3; S} = -2Y^{I_1 I_3 I_2; S} \quad (6.8.199)$$

となるので， $Y^{I_1 I_2 I_3; S} = -2Y^{I_1 I_3 I_2; S} = 4Y^{I_1 I_2 I_3; S}$ となり， $Y = 0$ 。よって， $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ がゲージ不変となるためには，

$$\nabla_{M_1} E^{I_1 I_2 I_3; ST} = \nabla_{M_1} F^{I_1 I_2 I_3; ST} = 0. \quad (6.8.200)$$

ここで，

$$\begin{aligned} E^{I_1 I_2 I_3; ST} &= X^{I_2 I_1 I_3; (ST)} + X^{I_2 I_3 [SN_1 L_1]; (M_1 T)} | (ST) \\ &= \frac{1}{2} X^{I_2 I_1 I_3; (ST)} + \frac{3}{2} X^{I_2 I_3 I_1; (ST)} | (ST M_1) = \frac{1}{2} X^{I_2 I_1 I_3; (ST)} \end{aligned} \quad (6.8.201)$$

また，

$$F^{I_1 I_2 I_3; ST} = -X^{I_1 I_2 I_3; ST} + 2X^{I_2 I_1 I_3; ST} | (SM_1) + 2X^{I_3 I_1 I_2; TS} | (TM_1) \quad (6.8.202)$$

より，

$$\begin{aligned} F^{I_1 I_2 I_3; (ST)} &= -X^{I_1 I_2 I_3; (ST)} + 2X^{(I_2 | I_1 | I_3); ST} | (SM_1) + 2X^{(I_2 | I_1 | I_3); TS} | (TM_1) \\ &= -X^{I_1 I_2 I_3; (ST)} + X^{(I_2 I_3) I_1; (ST)}, \end{aligned} \quad (6.8.203)$$

$$\begin{aligned} F^{I_1 I_2 I_3; [ST]} &= -3X^{I_1 I_2 I_3; [ST]} + X^{[I_2 I_3] [SN_1 L_1]; TM_1} - X^{[I_2 I_3] [TN_1 L_1]; SM_1} \\ &= 2X^{I_2 I_3 [TN_1 L_1]; [SM_1]} | [ST] \end{aligned} \quad (6.8.204)$$

以上より， E, F に対する条件は，

$$\nabla_{M_1} X^{I_1 I_2 I_3; (ST)} = \nabla_{M_2} X^{I_1 I_2 I_3; (ST)} = 0, \quad (6.8.205a)$$

$$\nabla_T X^{I_1 I_2 I_3; [ST]} | [M_3 S] = 0. \quad (6.8.205b)$$

X に対する条件 (6.8.197) を書き換える。まず，一般に $T^{abc} = T^{acb}$ の関係が成り立つテンソルに対して，

$$T^{abc} = T^{(abc)} + \frac{2}{3} (T^{[ab]c} + T^{[ac]b}) \quad (6.8.206)$$

となるので，(6.8.197) の第 3 式より，

$$X^{I_1 I_2 I_3; (ST)} = X^{(I_1 I_2 I_3); (ST)} + 2 (X^{I_1 I_2 [SN_3 L_3]; [M_3 T]} + X^{I_1 I_3 [SN_2 L_2]; [M_2 T]}) | [M, N, L] (ST) \quad (6.8.207)$$

これに

$$3X^{I_1 I_2 [SN_3 L_3]; [M_3 T]} | [M_3 N_3 L_3] - X^{I_1 I_2 I_3; [ST]} = -4X^{I_1 I_2 I_3; [ST]} | [I_3 S] \quad (6.8.208)$$

を代入して,

$$X^{I_1 I_2 I_3; (ST)} = X^{(I_1 I_2 I_3); (ST)} + Y^{I_1 I_2 I_3; (ST)}, \quad (6.8.209a)$$

$$Y^{I_1 I_2 I_3; (ST)} = -\frac{8}{3} (X^{I_1 I_2 I_3; [ST]} | ([I_3 S] - [I_2 S])) | (ST) \quad (6.8.209b)$$

(6.8.197) の第 1 式と第 2 式をこの関係式に適用すると,

$$0 = X^{(I_1 I_2 I_3); (ST)} + X^{([SN_1 L_1] I_2 I_3); (M_1 T)} + X^{([TN_1 L_1] I_2 I_3); (M_1 S)} \\ + Y^{I_3 I_2 I_1; (ST)} + Y^{I_3 I_2 [SN_1 L_1]; (M_1 T)} + Y^{I_3 I_2 [TN_1 L_1]; (M_1 S)} \quad (6.8.210a)$$

$$0 = X^{(I_1 I_2 I_3); (ST)} + X^{([SN_1 L_1] I_2 I_3); (M_1 T)} + 2Y^{I_1 I_2 I_3; (ST)} | (M_1 S) \quad (6.8.210b)$$

$$0 = X^{(I_1 I_2 I_3); (ST)} + X^{([TN_1 L_1] I_2 I_3); (M_1 S)} + 2Y^{I_1 I_2 I_3; (ST)} | (M_1 T) \quad (6.8.210c)$$

この第 1 式から第 2 式と第 3 式を引くと,

$$X^{(I_1 I_2 I_3); (ST)} = -2Y^{I_1 I_2 I_3; (ST)} | (M_1 S) - 2Y^{I_1 I_2 I_3; (ST)} | (M_1 T) \\ + Y^{I_3 I_2 I_1; (ST)} + Y^{I_3 I_2 [SN_1 L_1]; (M_1 T)} + Y^{I_3 I_2 [TN_1 L_1]; (M_1 S)} \quad (6.8.211)$$

を得る. よって, 結局, $X^{I_1 I_2 I_3; (ST)}$ が $Y^{I_1 I_2 I_3; (ST)}$ のみを用いて

$$X^{I_1 I_2 I_3; (ST)} = Y^{I_3 I_2 I_1; (ST)} - Y^{I_1 I_2 I_3; (ST)} \\ + 2Y^{I_3 I_2 [SN_2 L_2]; (M_1 T)} | (ST) - 2Y^{[SN_1 L_1] I_2 I_3; (M_1 T)} | (ST) \quad (6.8.212)$$

と表される.

6.8.3.5 超対称変換

Creation: 2021/10/3

Last update: 2021/11/26

大域的な単純超対称代数

$$[\bar{\epsilon}_1 Q, \bar{\epsilon}_2 Q] = \xi^M P_M; \quad \xi^M = -\frac{1}{2} (\bar{\epsilon}_1 \Gamma^M \epsilon_2) \quad (6.8.213)$$

に対応する局所超対称変換の基本場 $(\theta_M^A, \Psi_M, C_{MNL})$ への作用を、交換関係の整合性により決定する。なお、 $C_{[3]}$ に対するゲージ変換は線形理論と同じ

$$\delta C_{[3]} = d\Lambda_{[2]} \quad (6.8.214)$$

で与えられるとする。さらに、このゲージ変換に対して不変な量の超対称変換は、再びゲージ不変となることを仮定する。

基本場のスケール次元は

$$[\theta_M^A] = [C_{MNL}] = 0, \quad [\Psi_M] = 1/2, \quad [\epsilon] = -1/2 \quad (6.8.215)$$

となり、線形理論に対応する一般共変的、局所ローレンツ不変かつ C -ゲージ不変な Lagrangian 密度

$$2\kappa^2 |\theta|^{-1} \mathcal{L}_0 = e_A^M e_B^N R_{MN}{}^{AB}(\omega) - \frac{1}{2} G \cdot G - \bar{\Psi}_M \Gamma^{MNL} D_N(\omega) \Psi_L \quad (6.8.216)$$

の項はすべてスケール次元 2 をもつ。また、完全な Lagrangian 密度を得るためにこれに付け加わる非線形項はすべてスケール次元が 2 以上となる。

一方、超対称変換の一般的な構造は次のようになる：

$$\delta_\epsilon \theta_M^A = \bar{\epsilon} \mathcal{O}_M^{AN} \Psi_N, \quad \delta e_A^M = -\mathcal{O}_A^{MN} \Psi_N, \quad (6.8.217a)$$

$$\delta_\epsilon \Psi_M = (D_M + \mathcal{O}_M) \epsilon, \quad (6.8.217b)$$

$$\delta_\epsilon C_{MNL} = \bar{\epsilon} \mathcal{O}_{MNL}^P \Psi_P \quad (6.8.217c)$$

ここで、 \mathcal{O}_M^{AN} , \mathcal{O}_M , \mathcal{O}_{MNL}^P はすべて基本場と Γ 行列から作られるスケール次元 0 以上の（微分）多項式である。この変換式は、 X を基本変数として、

$$\delta_\epsilon X = T_{-1} + T_0 + T_1 + \dots \quad (6.8.218)$$

という構造をもつ。ここで、 T_n はスケール次元が X より n だけ大きい項の和である。

一般に、完全な作用積分 S を

$$S = S^{(2)} + S^{(3)} + \dots + S^{(m)} \quad (6.8.219)$$

と表す。ここで、 $S^{(k)}$ は Lagrangian 密度がスケール次元 k の部分である。このとき、上記の δX の分解において、項 T_n は $S^{(k)}$ を $S^{(k+n)}$ に移す。したがって、 S が超対称変換で不変で、かつ $T_{-1} = 0$ なら、 $S^{(2)}$ が $\delta X = T_0$ に対して不変となり、上記 \mathcal{L}_0 の極小な極小超対称拡大を与える。

そこで、 $T_{-1} = 0$ となることを示そう。まず、 T_{-1} は $X = \Psi_M$ に対してのみ現れ、 $T_{-1} = c\Gamma_M\epsilon$ という構造をもつ。一方、 $S^{(2)}$ に対応するLagrangian密度 $\mathcal{L}^{(2)}$ は、一般に

$$\begin{aligned} \frac{2\kappa^2}{|\theta|} \mathcal{L}^{(2)} &= \frac{2\kappa^2}{|\theta|} \mathcal{L}_0 - \frac{k}{3!(4!)^2} \epsilon^{M_1 \dots M_{11}} C_{M_1 M_2 M_3} G_{M_4 \dots M_7} G_{M_8 \dots M_{11}} \\ &\quad + \bar{\Psi}_P X^{PQM_1 \dots M_4} \Psi_Q G_{M_1 \dots M_4} \\ &\quad + Y^{(M\alpha)(N\beta)(L\gamma)(P\delta)} \Psi_{M\alpha} \Psi_{N\beta} \Psi_{L\gamma} \Psi_{P\delta} \end{aligned} \quad (6.8.220)$$

という構造をもつ。このとき、 $\delta X = T_{-1}$ の寄与は

$$\begin{aligned} \frac{2\kappa^2}{|\theta|} \delta_{T_{-1}} \mathcal{L}^{(2)} &\sim -2c\bar{\Gamma}_M \epsilon \Gamma^{MNL} D_N \Psi_L + c\bar{\Psi} (D_N \Gamma^{MNL}) \Gamma_L \epsilon \\ &\quad - 2c\bar{\epsilon} \Gamma_P X^{PQM_1 \dots M_4} \Psi_Q G_{M_1 \dots M_4} + cY^{(M_1\alpha_1) \dots} (\Gamma_{M_1} \epsilon)_{\alpha_1} \Psi_{M_2\alpha_2} \dots \end{aligned} \quad (6.8.221)$$

となる。これが、任意の配位、任意の ϵ に対してゼロとなるのは $c = 0$ の場合に限る。よって、 $T_{-1} = 0$ 。

以上より、まず \mathcal{L} はスケール次元2の項のみからなり、 $\delta X = T_0$ となるとして、許される超対称変換を探す。このとき、

$$\mathcal{O}_M^{AN} = c_1 \Gamma^A \delta_M^N + c_2 \Gamma^N \theta_M^A + c_3 \Gamma_M e^{AN} + c_4 \Gamma_M^{AN}, \quad (6.8.222)$$

$$\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_M(\Psi^2) + G_{PQRS} Z^{PQRS}, \quad (6.8.223)$$

$$\mathcal{O}_{MNL}^P = a \Gamma_{[MN} \delta_{L]}^P + b \Gamma_{MNL}^P \quad (6.8.224)$$

$\mathcal{O}_M(\Psi^2)$ は Ψ について2次のスケール次元1のテンソル、 Z^{PQRS} は Γ 行列と θ_M^A, e_A^M から作られるスケール次元ゼロのテンソルである。また、 θ_M^A および C_{MNL} が実場であることより、 c_1, \dots, c_4 と a, b は実定数となる。

これらの量を、交換関係が常に

$$[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] = \mathcal{L}_\xi + \delta_\lambda + \delta_\Lambda + \delta_{\epsilon'} \quad (6.8.225)$$

を満たすように決定する。

(1) 振率テンソルの決定 まず、11次元超重力理論のLagrangian密度が、一般論より、 \mathcal{L}_0 を線型理論の一般共変化に対応する部分

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1; \quad (6.8.226)$$

$$\frac{2\kappa^2}{|\theta|} \mathcal{L}_1 = [G\Psi^2 + [\Psi^4] + [CG^2]] \quad (6.8.227)$$

と言う構造をもつことより、接続 D_M の振率テンソルを決定する。

まず、 ω_M^{AB} を決める方程式は

$$\frac{\delta S}{\delta \omega_M^{AB}} = \frac{\delta S_0}{\delta \omega_M^{AB}} = 0 \quad (6.8.228)$$

より、

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{-g}} \partial_N (\sqrt{-g} e_{[A}^M e_{B]}^N) + 4\omega_{N[B}{}^C e_{A]}^{[M} e_C^{N]} * \omega \\ & - \frac{1}{4} \bar{\Psi}_N \Gamma^{NML} \Gamma_{AB} \Psi_L = 0 \\ \Leftrightarrow & 2\omega_C{}^C{}_{[A} e_{B]}^M - 2\omega_{[B}{}^M{}_{A]} \\ & = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \partial_N (\sqrt{-g} e_{[A}^M e_{B]}^N) + \frac{1}{4} \bar{\Psi}_N \Gamma^{NML} \Gamma_{AB} \Psi_L. \end{aligned} \quad (6.8.229)$$

この方程式は、 K_M^{AB} を随伴振率テンソル

$$\omega_M^{AB} = \omega_M^{AB}(\theta) + K_M^{AB} \quad (6.8.230)$$

として、次の2式と同値となる：

$$\omega_C{}^C{}_{[A}(\theta) \delta_{B]}^D + \omega_{[BA]}{}^D(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_N (\sqrt{-g} e_{[A}^M e_{B]}^N) \theta_M^D, \quad (6.8.231a)$$

$$2K_C{}^C{}_{[A} \delta_{B]}^D + 2K_{[BA]}{}^D = \frac{1}{4} \bar{\Psi}_N \Gamma^{NDL} \Gamma_{AB} \Psi_L. \quad (6.8.231b)$$

この第2式を K_M^{AB} について解いて

$$T_{MN}{}^A = 2K_{[M}{}^A{}_{N]} = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_M \Gamma^A \Psi_N - \frac{1}{4} \bar{\Psi}_Q \Gamma^{AQP}{}_{MN} \Psi_P. \quad (6.8.232)$$

(2) X_M^A : θ_M^A に対する交換関係は

$$\begin{aligned} X_M^A & \equiv [\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] \theta_M^A \\ & = \frac{c_2}{2} \{ -(\bar{\epsilon}_1 \Gamma^N \Psi_B) \theta_M^A (\bar{\epsilon}_2 \Gamma^B \Psi_N) + (\bar{\epsilon}_1 \Gamma^A \Psi_M) (\bar{\epsilon}_2 \Gamma^N \Psi_N) \} \\ & \quad + \frac{c_3}{2} \{ (\bar{\epsilon}_1 \Gamma^B \Psi_M) (\bar{\epsilon}_2 \Gamma_B \Psi^A) - (\bar{\epsilon}_1 \Gamma^N \Psi^A) (\bar{\epsilon}_2 \Gamma_M \Psi_N) \} \\ & \quad + \frac{c_4}{2} \{ (\bar{\epsilon}_1 \Gamma^B \Psi_M) (\bar{\epsilon}_2 \Gamma_B{}^{AN} \Psi^N) - (\bar{\epsilon}_1 \Gamma^N \Psi_C) (\bar{\epsilon}_2 \Gamma_M{}^{AC} \Psi_N) \} \\ & \quad + \bar{\epsilon}_2 \mathcal{O}_M^{AN} (D_N \epsilon_1 + \mathcal{O}_N \epsilon_1) - (\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2). \end{aligned} \quad (6.8.233)$$

ここで,

$$\begin{aligned} & \bar{\epsilon}_2 \mathcal{O}_M^{AN} D_N \epsilon_1 - (\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2) \\ &= -D_N \left(\bar{\epsilon}_1 \mathcal{O}_M^{AN} \epsilon_2 \right) + \bar{\epsilon}_1 (D_N \mathcal{O}_M^{AN}) \epsilon_2 + c_4 (\overline{D_N \epsilon_1} \Gamma_M^{AN} \epsilon_2 - \bar{\epsilon}_1 \Gamma_M^{AN} D_N \epsilon_2) \end{aligned} \quad (6.8.234)$$

また, (6.8.225) において,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi \theta_M^A &= \xi^N \partial_N \theta_M^A + \theta_N^A \partial_M \xi^N \\ &= \partial_M (\theta_N^A \xi^N) + \xi^N (\partial_N \theta_M^A - \partial_M \theta_N^A) \\ &= \partial_M \xi^A + \xi^N (d\theta^A)_{NM} \\ &= \partial_M \xi^A + \xi^N (\Theta^A - \omega^A_B \wedge \theta^B)_{NM} \\ &= D_M \xi^A - \omega^A_B(\xi) \theta_N^B + \xi^N T_{NM}^A \end{aligned} \quad (6.8.235)$$

この表式を上記の X_M^A の表式と比べて,

$$c_4 = 0, \quad c_2 = c_3 = 0, \quad c_1 = 1/2 \quad (6.8.236)$$

を得る. ここで c_1 の値は約束で, ϵ のスケーリングにより任意のゼロでない値に変更できる. よって, θ_M^A の超対称変換が確定した:

$$\delta_\epsilon \theta_M^A = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \Gamma^A \Psi_M. \quad (6.8.237)$$

このとき, X_M^A は

$$\begin{aligned} X_M^A &= D_M \xi^A + \left\{ \bar{\epsilon}_2 \frac{1}{2} \Gamma^A \mathcal{O}_M \epsilon_1 - (\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2) \right\} \\ &= \mathcal{L}_\xi \theta_M^A + \omega^A_B(\xi) \theta_M^B - \frac{1}{2} \xi^N \bar{\Psi}_N \Gamma^A \Psi_M \\ &\quad + \frac{1}{4} \xi^N \bar{\Psi}_C \Gamma^A_{NM}{}^{CD} \Psi_D + \frac{1}{2} (\bar{\epsilon}_2 \Gamma^A \mathcal{O}_M \epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1 \Gamma^A \mathcal{O}_M \epsilon_2) \end{aligned} \quad (6.8.238)$$

ここで \mathcal{O}_M は, 必要なら Fierz 変換を行うことにより, 次の形の項の線形結合となる:

$$\mathcal{O}_M \quad X_M^A \\ Y_M \rightarrow 2\xi^A Y_M, \quad (6.8.239a)$$

$$Y_{BM} \Gamma^B \rightarrow \sigma^{AB} Y_{BM}, \quad (6.8.239b)$$

$$Y_{BCM} \Gamma^{BC} \rightarrow 4\xi^B Y^A_{BM}, \quad (6.8.239c)$$

$$Y_{BCDM} \Gamma^{BCD} \rightarrow 3\sigma^{CD} Y^A_{CDM}, \quad (6.8.239d)$$

$$Y_{B_1 \dots B_4 M} \Gamma^{B_1 \dots B_4} \rightarrow \sigma^{AB_1 \dots B_4} Y_{B_1 \dots B_4 M}, \quad (6.8.239e)$$

$$Y_{B_1 \dots B_5 M} \Gamma^{B_1 \dots B_5} \rightarrow \sigma^{AB_1 \dots B_5} Y_{B_1 \dots B_5 M}. \quad (6.8.239f)$$

ここで, $Y_{B_1 \dots B_n M}$ は Ψ について 2 次のテンソルで,

$$\sigma^{AB\dots} = \bar{\epsilon}_2 \Gamma^{AB\dots} \epsilon_1. \quad (6.8.240)$$

これらの項のうち, X_M^A が (6.8.225) に対応する構造をもつものは以下の通り:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_M(\Psi^2) = & x(\bar{\Psi}_P \Gamma^{PQ}{}_{BCM} \Psi_Q) \Gamma^{BC} \\ & + (y_1 \bar{\Psi}_{[B} \Gamma_C \Psi_{D]} + y_2 \bar{\Psi}_E \Gamma^E{}_{[BC} \Psi_{D]}) \theta_M^D \Gamma^{BC} \\ & + (z_1 \bar{\Psi}_{[M} \Gamma_{QR} \Psi_{S]} + z_2 \bar{\Psi}_P \Gamma^P{}_{[QRS} \Psi_M] \\ & \quad + z_3 \bar{\Psi}_P \Gamma_{QRSM} \Psi^P + z_4 \bar{\Psi}_P \Gamma^{PN}{}_{QRSM} \Psi_N) \Gamma^{QRS} \\ & + u(\bar{\Psi}_{B_1} \Gamma_{B_2} \Psi_{B_3}) \Gamma^{B_1 B_2 B_3}{}_M + v(\bar{\Psi}_{B_1} \Gamma_{B_2 B_3} \Psi_{B_4}) \Gamma^{B_1 B_2 B_3 B_4}{}_M \end{aligned} \quad (6.8.241)$$

対応する X_{AM} への寄与は

$$\begin{aligned} & 4x\xi^B (\bar{\Psi}_P \Gamma^{PQ}{}_{ABM} \Psi_Q) \\ & + 4\xi^C \{ y_1 (\bar{\Psi}_{[A} \Gamma_C \Psi_{B]}) + y_2 (\bar{\Psi}_E \Gamma^E{}_{[AC} \Psi_{B]}) \} \theta_M^B \\ & + 3\sigma^{RS} \{ z_1 (\bar{\Psi}_{[B} \Gamma_{AR} \Psi_{S]}) + z_2 (\bar{\Psi}_P \Gamma^P{}_{[ARS} \Psi_B] \\ & \quad + z_3 (\bar{\Psi}_P \Gamma_{ARSB} \Psi^P) + z_4 (\bar{\Psi}_P \Gamma^{PN}{}_{ARSB} \Psi_N) \} \theta_M^B \\ & + u\sigma_A{}^{B_1 B_2 B_3}{}_M (\bar{\Psi}_{B_1} \Gamma_{B_2} \Psi_{B_3}) + v\sigma^{AB_1 \dots B_4}{}_M (\bar{\Psi}_{B_1} \Gamma_{B_2 B_3} \Psi_{B_4}) \end{aligned} \quad (6.8.242)$$

次に, \mathcal{O}_M において $G_{[4]}$ に比例した項の候補は,

$$\mathcal{O}(G) = G_{B_1 \dots B_4} \left(w \delta_M^{[B_1} \Gamma^{B_2 B_3 B_4]} + s \Gamma^{B_1 \dots B_4}{}_M \right). \quad (6.8.243)$$

対応する X_M^A への寄与は

$$(3wG^A{}_{BC_1 C_2} \sigma^{C_1 C_2} + sG_{C_1 \dots C_4} \sigma^{AC_1 \dots C_4}{}_B) \theta_M^B \quad (6.8.244)$$

より, θ_M^A の局所 Lorentz 変換となる.

以上より, (6.8.225) において,

$$\xi^M = -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}_1\Gamma^M\epsilon_2, \quad (6.8.245a)$$

$$\epsilon' = -\xi^N\Psi_N, \quad (6.8.245b)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{AB} = & \omega_{AB}(\xi) + \left(4x + \frac{1}{4}\right)\xi^C(\bar{\Psi}_P\Gamma^{PQ}{}_{ACB}\Psi_Q) \\ & + 4\xi^C\{y_1(\bar{\Psi}_{[A}\Gamma_C\Psi_{B]}) + y_2(\bar{\Psi}_E\Gamma^E{}_{[AC}\Psi_{B]})\} \\ & + 4\xi^C(y_1\bar{\Psi}_{[A}\Gamma_C\Psi_{B]} + y_2\Psi_D\Gamma^D{}_{[AB}\Psi_{C]}) \\ & + 3\sigma^{CD}\{z_1(\bar{\Psi}_{[B}\Gamma_{AC}\Psi_{D]}) + z_2(\bar{\Psi}_E\Gamma^E{}_{[ACD}\Psi_{B]}) \\ & \quad + z_3(\bar{\Psi}_E\Gamma_{ACDB}\Psi^E) + z_4(\bar{\Psi}_F\Gamma^{FE}{}_{ACDB}\Psi_E)\} \\ & - u\sigma_{AB}{}^{C_1C_2C_3}\bar{\Psi}_{C_1}\Gamma_{C_2}\Psi_{C_3} + v\sigma_{AB}{}^{C_1\cdots C_4}(\bar{\Psi}_{C_1}\Gamma_{C_2C_3}\Psi_{C_4}) \\ & + 3w\sigma^{CD}G_{ABCD} + s\sigma_{AB}{}^{C_1\cdots C_4}G_{C_1\cdots C_4}. \end{aligned} \quad (6.8.245c)$$

(3) X_{MNL} : C_{MNL} に対する局所超対称変換の交換関係は

$$\begin{aligned} X_{MNL} & \equiv [\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}]C_{MNL} \\ & = a\bar{\epsilon}_2\Gamma_{[MN}(D_L]\epsilon_1 + \mathcal{O}_M\epsilon_1) + b\bar{\epsilon}_2\Gamma_{MNL}{}^P(D_P\epsilon_1 + \mathcal{O}_P\epsilon_1) \\ & \quad + a(\bar{\epsilon}_2\Gamma_{A[N}\Psi_L)(\bar{\epsilon}_1\Gamma^A\Psi_M] \\ & \quad + \frac{3b}{2}(\bar{\epsilon}_2\Gamma_{ANL}{}^P)(\bar{\epsilon}_1\Gamma^A\Psi_M) \\ & \quad - \frac{b}{2}(\bar{\epsilon}_2\Gamma_{MNL}{}^A\Psi_P)(\bar{\epsilon}_1\Gamma^M\Psi_A) - (\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2). \end{aligned} \quad (6.8.246)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_2\Gamma_{[MN}D_L]\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1\Gamma_{[MN}D_L]\epsilon_2 & = \bar{\epsilon}_2\Gamma_{[MN}D_L]\epsilon_1 + \overline{D_{[L}\epsilon_2}\Gamma_{MN]}\epsilon_1 \\ & = D_{[L}(\bar{\epsilon}_2\Gamma_{MN]}\epsilon_1) - \bar{\epsilon}_2D_{[L}\Gamma_{MN]}\epsilon_1 = \frac{1}{3}(d\sigma_{[2]})_{LMN} - 2\Gamma_{[LM}^P\bar{\epsilon}_2\Gamma_{|P|N]}\epsilon_1 \\ & = \frac{1}{3}(d\sigma_{[2]})_{LMN} + T_{[LM}{}^P\sigma_{N]P}. \end{aligned} \quad (6.8.247)$$

一方,

$$\bar{\epsilon}_2\Gamma_{MNL}{}^PD_P\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1\Gamma_{MNL}{}^PD_P\epsilon_2 = \bar{\epsilon}_2\Gamma_{MNL}{}^PD_P\epsilon_1 - \overline{D_P\epsilon_2}\Gamma_{MNL}{}^P\epsilon_1 \quad (6.8.248)$$

これは交換関係に決して登場しない項なので, $b = 0$.

次に、上の X_{MNL} の表式の第3項に Fierz 変換を施すと

$$\begin{aligned}
& (\bar{\epsilon}_2 \Gamma_{P[N} \Psi_L)(\bar{\epsilon}_1 \Gamma^P \Psi_M] - (\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2) = -(\bar{\epsilon}_2 \Gamma_{P[N} \Psi_L)(\bar{\Psi}_M] \epsilon_1 \Gamma^P \epsilon_1) - (\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2) \\
& = \frac{2}{32} (\bar{\epsilon}_2 \Gamma_A \epsilon_1)(\bar{\Psi}_{[M} \Gamma^P \Gamma^A \Gamma_{|P|N} \Psi_{L]}) \\
& \quad - \frac{2}{32 \cdot 2} (\bar{\epsilon}_2 \Gamma_{AB} \epsilon_1)(\bar{\Psi}_{[M} \Gamma^P \Gamma^{AB} \Gamma_{|P|N} \Psi_{L]}) \\
& \quad + \frac{2}{32 \cdot 5!} (\bar{\epsilon}_2 \Gamma_{A_1 \dots A_5} \epsilon_1)(\bar{\Psi}_{[M} \Gamma^P \Gamma^{A_1 \dots A_5} \Gamma_{|P|N} \Psi_{L]}) \\
& = \frac{1}{8} \xi_A (\bar{\Psi}_{[M} \Gamma^P \Gamma^A \Gamma_{|P|N} \Psi_{L]}) - \frac{1}{32} \sigma_{AB} (\bar{\Psi}_{[M} \Gamma^P \Gamma^{AB} \Gamma_{|P|N} \Psi_{L]}) \\
& \quad + \frac{1}{16 \cdot 5!} \sigma_{A_1 \dots A_5} (\bar{\Psi}_{[M} \Gamma^P \Gamma^{A_1 \dots A_5} \Gamma_{|P|N} \Psi_{L]}) \\
& = -\xi_A (\bar{\Psi}_{[M} \Gamma^A \Psi_{L]}) - \frac{1}{2} \sigma_{A[N} (\bar{\Psi}_M \Gamma^A \Psi_{L]}) / \tag{6.8.249}
\end{aligned}$$

次に、

$$\bar{\epsilon}_2 \Gamma_{[MN} \mathcal{O}_{L]} \epsilon_1 - (\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2) = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 + Q_7. \tag{6.8.250}$$

ここで,

$$\begin{aligned} Q_1 &\equiv x(\bar{\epsilon}_2\Gamma_{[MN}\Gamma^{BC}\epsilon_1)(\bar{\Psi}^A\Gamma_{L]ADBC}\Psi^D) - (\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2) \\ &= -8x\sigma_{[L}^C(\bar{\Psi}_{|A|}\Gamma^{AB}{}_{MN]C}\Psi_B), \end{aligned} \quad (6.8.251a)$$

$$\begin{aligned} Q_2 &\equiv (\bar{\epsilon}_2\Gamma_{[MN}\Gamma^{BC}\epsilon_1)\theta_L^D\{y_1(\bar{\Psi}_{[B}\Gamma_C\Psi_{D]}) + y_2(\bar{\Psi}_E\Gamma^E{}_{[BC}\Psi_{D]})\} - (\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2) \\ &= -8\sigma_{[L}^C\theta_M^D\theta_N^{B]}\{y_1(\bar{\Psi}_B\Gamma_C\Psi_D) + y_2(\bar{\Psi}_E\Gamma^E{}_{BC}\Psi_B)\}, \end{aligned} \quad (6.8.251b)$$

$$\begin{aligned} Q_3 &\equiv (\bar{\epsilon}_2\Gamma_{[MN}\Gamma^{BCD}\epsilon_1)\theta_L^E\{z_1(\bar{\Psi}_{[E}\Gamma_{BC}\Psi_{D]}) + z_2(\bar{\Psi}_E\Gamma^E{}_{[BC}\Psi_{D]}) \\ &\quad + z_3(\bar{\Psi}_F\Gamma_{BCDE}\Psi^F) + z_4(\bar{\Psi}_G\Gamma^{GF}{}_{BCDE}\Psi_F)\} \\ &= 2\left(\sigma_{[MN}{}^{BCD} + 12\delta_{[M}^C\delta_N^{B}\xi^{D]}\right)\theta^E{}_{L}\{z_1(\bar{\Psi}_{[E}\Gamma_{BC}\Psi_{D]}) \\ &\quad + z_2(\bar{\Psi}_F\Gamma^F{}_{[BCD}\Psi_{E]}) + z_3(\bar{\Psi}_F\Gamma_{BCDE}\Psi^F) + z_4(\bar{\Psi}_G\Gamma^{GF}{}_{BCDE}\Psi_G)\} \end{aligned} \quad (6.8.251c)$$

$$\begin{aligned} Q_4 &\equiv u(\bar{\epsilon}_2\Gamma_{[MN}\Gamma^{B_1B_2B_3}{}_{L]}\epsilon_1)(\bar{\Psi}_{B_1}\Gamma_{B_2}\Psi_{B_3}) - (\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2) \\ &= 2u\left(\sigma_{MN}{}^{B_1B_2B_3}{}_{L} + 6\sigma_L^{[B_3}\delta_M^{B_1}\delta_N^{B_2]}\right)(\bar{\Psi}_{B_1}\Gamma_{B_2}\Psi_{B_3}), \end{aligned} \quad (6.8.251d)$$

$$\begin{aligned} Q_5 &\equiv u(\bar{\epsilon}_2\Gamma_{[MN}\Gamma^{B_1\cdots B_4}{}_{L]}\epsilon_1)(\bar{\Psi}_{B_1}\Gamma_{B_2B_3}\Psi_{B_4}) - (\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2) \\ &= 16v\delta_{[N}^{[B_1}\sigma_M{}^{B_2B_3B_4]}{}_{L]}(\bar{\Psi}_{B_1}\Gamma_{B_2B_3}\Psi_{B_4}), \end{aligned} \quad (6.8.251e)$$

$$\begin{aligned} Q_6 &\equiv w(\bar{\epsilon}_2\Gamma_{[MN}\delta_L^{B_1}\Gamma^{B_2B_3B_4}\epsilon_1)G_{B_1\cdots B_4} - (\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2) \\ &= 2w\left(\delta_{[L}^{B_1}\sigma_{MN]}{}^{B_2B_3B_4} - 12\delta_L^{B_1}\delta_M^{B_2}\delta_N^{B_3}\Gamma^{B_4}\right)G_{B_1\cdots B_4}, \end{aligned} \quad (6.8.251f)$$

$$\begin{aligned} Q_7 &\equiv s(\bar{\epsilon}_2\Gamma_{[MN}\Gamma^{B_1\cdots B_4}{}_{L]}\epsilon_1)G_{B_1\cdots B_4} - (\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2) \\ &= 16s\delta_{[N}^{B_1}\sigma_M{}^{B_2B_3B_4]}{}_{L]}G_{B_1\cdots B_4}. \end{aligned} \quad (6.8.251g)$$

よって, 一般公式

$$\mathcal{L}_\xi C = i_\xi dC + d(i_\xi C) = i_\xi G + d(i_\xi C) \quad (6.8.252)$$

を用いると,

$$X_{MNL} = (\mathcal{L}_\xi C)_{MNL} + (d\Lambda)_{MNL} + \delta_\epsilon C_{MNL} + X'_{MNL}. \quad (6.8.253)$$

ここで,

$$\Lambda_{MN} = -(i_\xi C)_{MN} - \frac{1}{3}\sigma_{MN} \quad (6.8.254)$$

および

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}X'_{MNL} = & \left\{ 2(w + 8s)\delta_{[L}^{B_1}\sigma_{MN]}^{B_2B_3B_4} + \left(\frac{1}{a} - 24w\right)\delta_L^{B_1}\delta_M^{B_2}\delta_N^{B_3}\xi^{B_4} \right\} G_{B_1\dots B_4} \\
& + 2u \left(\sigma_{MN}^{B_1B_2B_3} + 6\sigma^{[B_3}_L\delta_N^{B_1}\delta_M^{B_2]} \right) (\bar{\Psi}_{B_1}\Gamma_{B_2}\Psi_{B_3}) \\
& + 2 \left(\sigma_{MN}^{BCD} + 12\delta_M^C\delta_N^B\xi^D \right) \theta_L^E \{ (z_1 - 8v)(\bar{\Psi}_{[E}\Gamma_{BC}\Psi_{D]}) \\
& + z_2(\bar{\Psi}_F\Gamma^F_{[BCD}\Psi_E]) + z_3(\bar{\Psi}_F\Gamma_{BCDE}\Psi^F) + z_4(\bar{\Psi}_G\Gamma^{GF}_{BCDE}\Psi_F) \} \\
& - \sigma_{P[L} \left[\left(8x + \frac{1}{4} \right) (\bar{\Psi}_A\Gamma^{AC}{}_{M^P}{}_{N]} \right. \\
& \quad \left. + 8 \{ y_1(\bar{\Psi}_{[B}\Gamma_C\Psi_{D]}) + 8y_2(\bar{\Psi}_{|E|}\Gamma^E_{BC}\Psi_{D]) \} \eta^{PC}\theta_N^D\theta_M^B \right] \\
& - (24z_1 + 2)\xi^P(\bar{\Psi}_{[L}\Gamma_{MN}\Psi_{P]}. \tag{6.8.255}
\end{aligned}$$

X'_{MNL} がゼロとならねばならないので,

$$x = -1/32, \quad y_1 = y_2 = 0, \tag{6.8.256a}$$

$$z_1 = -1/12, \quad z_2 = z_3 = z_4 = 0, \tag{6.8.256b}$$

$$u = 0, \quad v = -1/96, \tag{6.8.256c}$$

$$s = -\frac{w}{8} = -\frac{1}{192a} \tag{6.8.256d}$$

を得る.

(4) 結果のまとめ 以上より, 11D 超重力理論の局所超対称変換は 1 個のパラメーター a の自由度を除いて一意に定まり, 次式で与えられる:

$$\delta\theta_M^A = \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\Gamma^A\Psi_M, \quad \delta e_A^M = -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\Gamma^M\Psi_A, \tag{6.8.257a}$$

$$\delta\Psi_M = D_M\epsilon + \mathcal{O}_M\epsilon, \tag{6.8.257b}$$

$$\delta C_{MNL} = a\bar{\epsilon}\Gamma_{[MN}\Psi_{L]}. \tag{6.8.257c}$$

ここで,

$$\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_M(\Psi) + \mathcal{O}_M(G); \tag{6.8.258}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_M(\Psi) = & -\frac{1}{32}(\bar{\Psi}_A\Gamma^{AD}{}_{BCM}\Psi_D)\Gamma^{BC} - \frac{1}{12}(\bar{\Psi}_{[E}\Gamma_{BC}\Psi_{D]})\theta_M^E\Gamma^{BCD} \\
& - \frac{1}{96}(\bar{\Psi}_{B_1}\Gamma_{B_2B_3}\Psi_{B_4})\Gamma^{B_1\dots B_4}{}_M, \tag{6.8.259}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{O}_M(G) = H^{B_1\dots B_4}{}_M G_{B_1\dots B_4} \tag{6.8.260}$$

となる。ただし、

$$H^{B_1 \dots B_4}{}_M = -\frac{1}{192a} (\Gamma^{B_1 \dots B_4}{}_M - 8\delta_M^{B_1} \Gamma^{B_2 B_3 B_4}) G_{B_1 \dots B_4} \quad (6.8.261)$$

である。

これらの局所変換の交換関係は

$$[\delta_{\epsilon_1}, \delta_{\epsilon_2}] = \mathcal{L}_\xi + \delta_\lambda + \delta_{\epsilon'} + \delta_\Lambda. \quad (6.8.262)$$

ここで、

$$\xi^M = \frac{1}{2}(\epsilon_2 \Gamma^M \epsilon_1), \quad (6.8.263a)$$

$$\epsilon' = -\xi^M \Psi_M, \quad (6.8.263b)$$

$$\Lambda_{MN} = -(i_\xi C)_{MN} - \frac{1}{3} \sigma_{MN}, \quad (6.8.263c)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{AB} = & \omega_{AB}(\xi) + \frac{1}{8} \xi^C (\bar{\Psi}_P \Gamma^{PQ}{}_{ACB} \Psi_Q) + \frac{1}{4} \sigma^{CD} (\bar{\Psi}_{[D} \Gamma_{AC} \Psi_{B]}) \\ & - \frac{1}{96} \sigma^{AC_1 \dots C_4} (\bar{\Psi}_{C_1} \Gamma_{C_2 C_3} \Psi_{C_4}) + \frac{1}{8a} \sigma^{CD} G^A{}_{CDB} \\ & - \frac{1}{192a} \sigma^{AC_1 \dots C_4}{}_B G_{C_1 \dots C_4}, \end{aligned} \quad (6.8.263d)$$

$$\sigma_{A_1 \dots A_n} = (\epsilon_2 \Gamma_{A_1 \dots A_n} \epsilon_1), \quad (6.8.263e)$$

6.8.3.6 極小モデルの一意性

Creation: 2022/1/15

Resource: RM20211219

Last Update: 2022/1/16

6.8.3.5 で述べたように、4次元極大超重力理論との対応から決定される一般共変的 Lagrangian 密度

$$\frac{2\kappa^2}{|\theta|} \mathcal{L}_0 = e_A{}^M e_B{}^N R_{MN}{}^{AB}(\omega) - \frac{1}{2} G \cdot G - \bar{\Psi}_M \Gamma^{MNL} D_N(\omega) \Psi_L \quad (6.8.264)$$

と、場の Minkowski 時空解からのずれについて2次の精度で一致する11次元の $N=1$ 超重力理論が存在するなら、Lagrangian 密度のすべての項がスケール次元2をもつ超重力理論（極小理論）が存在する。ここでは、そのような極小理論の一意性を証明する。

まず, $(\theta_M^A, \Psi_M, C_{MNL})$ を基本場とするスケール次元 2 の一般共変的かつ局所ローレンツ不変かつ $C_{[3]}$ ゲージ場のゲージ変換

$$\delta_\Lambda \theta_M^A = 0, \quad \delta_\Lambda \Psi_M = 0, \quad \delta C_{MNL} = 3\partial_{[M} \Lambda_{NL]} \quad (6.8.265)$$

で不変な 11 次元理論の Lagrangian 密度は, 一般に

$$\begin{aligned} \frac{2\kappa^2}{|\theta|} \mathcal{L} &= \frac{2\kappa^2}{|\theta|} \mathcal{L}_0 + (\bar{\Psi}_P F^{PQM_1 \dots M_4} \Psi_Q) G_{M_1 \dots M_4} \\ &\quad + Y^{(M_1 \alpha_1) \dots (M_4 \alpha_4)} (\Psi_{M_1})_{\alpha_1} \dots (\Psi_{M_4})_{\alpha_4} \\ &\quad - k * (C \wedge G \wedge G) \end{aligned} \quad (6.8.266)$$

と表される. ここで, $F^{PQM_1 \dots M_4}$ は θ_M^A と Γ 行列の多項式で表されるテンソルで, 定数 x_2, x_4, y_4, x_6 を用いて

$$\begin{aligned} F^{PQM_1 \dots M_4} &= x_6 \Gamma^{PQM_1 \dots M_4} - \frac{x_4}{2} \{g^{P[M_1} \Gamma^{M_2 M_3 M_4]Q} + (P \leftrightarrow Q)\} \\ &\quad + y_4 g^{PQ} \Gamma^{M_1 \dots M_4} + x_2 g^{P[M_1} g^{Q]M_2} \Gamma^{M_3 M_4} \end{aligned} \quad (6.8.267)$$

と表される.

いま, 条件を満たす極小理論が 2 つあるとすると, \mathcal{L}_0 は共通なので, 両者の Lagrangian 密度の差は

$$\begin{aligned} \frac{2\kappa^2}{|\theta|} \Delta \mathcal{L} &= (\bar{\Psi}_P \Delta F^{PQM_1 \dots M_4} \Psi_Q) G_{M_1 \dots M_4} + \Delta Y^{(M_1 \alpha_1) \dots (M_4 \alpha_4)} (\Psi_{M_1})_{\alpha_1} \dots (\Psi_{M_4})_{\alpha_4} \\ &\quad - \Delta k * (C \wedge G \wedge G) \end{aligned} \quad (6.8.268)$$

と表され, しかもそれ自体が local SUSY 変換 (6.8.257) で不変となる. この不変性より, $\Delta \mathcal{L} = 0$ となることを示そう.

(1) $\Delta F = 0$ の証明. $\delta_\epsilon \Delta \mathcal{L}$ のうち, $G_{[4]}$ について 2 次の項を取り出すと,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= -\frac{1}{96a} \bar{\Psi}_P \Delta F^{PQM_1 \dots M_4} (\Gamma^{B_1 \dots B_4}{}_Q - 8\delta_Q^{B_1} \Gamma^{B_2 B_3 B_4}) \epsilon \\ &\quad \times G_{B_1 \dots B_4} G_{M_1 \dots M_4} \\ &\quad - a \frac{\Delta k}{2(4!)^2} \epsilon^{M_1 \dots M_{11}} \bar{\epsilon} \Gamma_{[M_1 M_2} \Psi_{M_3]} G_{M_4 \dots M_7} G_{M_8 \dots M_{11}} \\ &= -\frac{1}{96a} \bar{\Psi}_P Z^{PB_1 \dots B_4 M_1 \dots M_4} \epsilon G_{B_1 \dots B_4} G_{M_1 \dots M_4}. \end{aligned} \quad (6.8.269)$$

ここで,

$$Z^{PB_1 \cdots B_4 M_1 \cdots M_4} = \Delta F^{PQM_1 \cdots M_4} (\Gamma^{B_1 \cdots B_4}{}_Q - 8\delta_Q^{B_1} \Gamma^{B_2 B_3 B_4}) - \frac{48a^2 \Delta k}{(4!)^2} \epsilon^{PQRB_1 \cdots B_4 M_1 \cdots M_4} \Gamma_{QR}. \quad (6.8.270)$$

F^{*****} の表式を代入して, $Z^{PB_1 \cdots B_4 M_1 \cdots M_4}$ を具体的に計算すると,

$$\begin{aligned} & Z^{PB_1 \cdots B_4 M_1 \cdots M_4} \\ &= \{192\Delta(3x_6 - y_4)\Gamma^{M_1} g^{B_1 M_2} g^{B_2 M_3} g^{B_3 M_4} g^{B_4 P} \\ &\quad + 24\Delta(6x_6 + y_4)\Gamma^P g^{B_1 M_1} \cdots g^{B_4 M_4} \\ &\quad + 24\Delta(2x_2 + 5x_4 + 4y_4)\Gamma^{B_1} g^{B_2 M_1} g^{B_3 M_2} g^{B_4 M_3} g^{PM_4}\} \\ &\quad - \frac{48a^2 \Delta k}{(4!)^2} \epsilon^{PQRB_1 \cdots B_4 M_1 \cdots M_4} \Gamma_{QR} \\ &\quad + \{-96\Delta(3x_6 + y_4)\Gamma^{B_4 M_4 P} g^{B_1 M_1} g^{B_2 M_2} g^{B_3 M_3} \\ &\quad + 144\Delta(3x_6 - 2y_4)\Gamma^{B_1 M_1 M_2} g^{B_2 M_3} g^{B_3 M_4} g^{B_4 P} \\ &\quad - 36\Delta(x_2 + 2x_4 + 4y_4)\Gamma^{B_1 B_2 M_1} g^{B_3 M_2} g^{B_4 M_3} g^{M_4 P}\} \\ &\quad + (-6\Delta x_6 + y_4)\Gamma^{B_1 \cdots B_4 M_1 \cdots M_4 P} \\ &\quad + \{\Delta(-x_2 - 4x_4 + 4y_4)\Gamma^{B_1 \cdots B_4 M_1 M_2 M_3} g^{M_4 P} + 4\Delta(3x_6 + 2y_4)\Gamma^{B_1 B_2 B_3 M_1 \cdots M_4} g^{B_4 P} \\ &\quad + 16\Delta(-3x_6 + y_4)\Gamma^{B_1 B_2 B_3 M_1 M_2 M_3 P} g^{B_4 M_4}\} \\ &\quad \{+24\Delta x_4 \Gamma^{B_1 B_2 B_3 M_1 M_2} g^{B_4 M_3} g^{M_4 P} + 24\Delta y_4 (3\Gamma^{B_1 B_2 M_1 M_2 P} g^{B_3 M_3} g^{B_4 M_4} \\ &\quad - 2\Gamma^{B_1 B_2 B_3 M_1 M_2} g^{B_4 M_3} g^{M_4 P} + 4\Gamma^{M_1 M_2 M_3 B_1 B_2} g^{M_4 B_3} g^{B_4 P})\} \end{aligned} \quad (6.8.271)$$

ここで, 右辺は $[B_1 \cdots B_4]$ および $[M_1 \cdots M_4]$ のおのおのについて反対称化するものとする. また, Z へは

$$Z^{P([B_1 \cdots B_4][M_1 \cdots M_4])} \equiv \frac{1}{2} (Z^{PB_1 \cdots B_4 M_1 \cdots M_4} + Z^{PM_1 \cdots M_4 B_1 \cdots B_4})$$

の組み合わせで寄与することに注意する．具体的には

$$\begin{aligned}
& Z^{P([B_1 \cdots B_4][M_1 \cdots M_4])} \\
&= 24\Delta(6x_6 + y_4)\Gamma^P g^{B_1 M_1} \cdots g^{B_4 M_4} \\
&\quad + 24\Delta \left(12x_6 + x_2 + \frac{5}{2}x_4 - 2y_4 \right) \{ \Gamma^{M_1} g^{B_1 M_2} g^{B_2 M_3} g^{B_3 M_4} g^{B_4 P} + (B \leftrightarrow M) \} \\
&\quad + \left(-\frac{a^2 \Delta k}{12} - 3\Delta x_6 + \frac{1}{2}y_4 \right) \epsilon^{PQR B_1 \cdots B_4 M_1 \cdots M_4} \Gamma_{QR} \\
&\quad - 18\Delta(x_2 + 2x_4 - 12x_6 + 8y_4) \{ \Gamma^{B_1 B_2 M_3} g^{B_3 M_1} g^{B_4 M_2} g^{M_4 P} + (B \leftrightarrow M) \} \\
&\quad + \frac{1}{2}\Delta(12x_6 - x_2 - 4x_4 + 12y_4) \{ \Gamma^{B_1 \cdots B_4 M_1 M_2 M_3} g^{M_4 P} + (M \leftrightarrow B) \} \\
&\quad + 12\Delta(x_4 + 2y_4) \{ \Gamma^{B_1 B_2 B_3 M_1 M_2} g^{B_4 M_3} g^{M_4 P} + (M \leftrightarrow B) \} \\
&\quad + 72\Delta y_4 \Gamma^{B_1 B_2 M_1 M_2 P} g^{B_3 M_3} g^{B_4 M_4} \tag{6.8.272}
\end{aligned}$$

これより,

$$\mathcal{Z} = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_4 = y_4 = x_6 = \Delta k = 0 \tag{6.8.273}$$

したがって,

$$\Delta F^{PQM_1 \cdots M_4} = 0, \quad \Delta k = 0 \tag{6.8.274}$$

が示された.

(2) $\Delta Y = 0$ の証明. $\Delta F = \Delta k = 0$ のとき,

$$\delta_\epsilon \mathcal{L} \sim 0 \Leftrightarrow \delta_\epsilon (|\theta| \Delta Y (\Psi)^4) \sim 0 \tag{6.8.275}$$

ここで, Y は θ_M^A のみに依存する代数式で, $\delta_\epsilon \theta_M^A, \delta_\epsilon \Psi_M$ は Ψ_M の導関数を含まない. したがって, $\delta_\epsilon \mathcal{L} \sim 0$ において, 部分積分により $D\epsilon$ を消去した時, $D\Psi_M$ に比例する項は

$$4|\theta|Y(\Psi)^3 \delta_\epsilon \Psi \supset 4|\theta|Y(\Psi)^3 D\epsilon \tag{6.8.276}$$

の部分積分のみから生じる. よって,

$$\delta_\epsilon \mathcal{L} \sim 0 \Rightarrow Y(\Psi)^2 D\Psi = 0 \Rightarrow Y = 0 \tag{6.8.277}$$

となる. 以上より,

$$\delta_\epsilon \Delta \mathcal{L} \sim 0 \Rightarrow \Delta \mathcal{L} = 0 \tag{6.8.278}$$

が示された.

6.8.3.7 極小モデルの存在

極小モデルの一意性が示されたので、最後に、その存在を示す。そのためには、極小モデルの一般形 (6.8.266) に含まれる CJS 理論が任意の局所超対称変換 (6.8.257) で不変であることを示せばよい。

(1) F と k の決定 まず, $\delta_\epsilon \mathcal{L}$ のうち $(G)^2$ に比例した項を計算すると,

$$\frac{2k^2}{|\theta|} (\delta_\epsilon)_G^2 = -\frac{1}{96a} (\bar{\Psi}_P Z^{PB_1 \dots B_4 C_1 \dots C_4} \epsilon) G_{B_1 \dots B_4} C_{C_1 \dots C_4} \quad (6.8.279)$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned} Z^{PB_1 \dots B_4 C_1 \dots C_4} = & \left\{ x_6 \Gamma^{PQC_1 \dots C_4} + x_4 g^{C_1(P\Gamma Q)C_2 C_3 C_4} + y_4 g^{PQ} \Gamma^{C_1 \dots C_4} \right. \\ & \left. + x_2 g^{PC_1} g^{QC_2} \Gamma^{C_3 C_4} \right\} (\Gamma^{B_1 \dots B_4}{}_Q - 8\delta_Q^{B_1} \Gamma^{B_2 B_3 B_4}) \\ & - \frac{48a^2 k}{(4!)^2} \epsilon^{PQRB_1 \dots B_4 C_1 \dots C_4} \Gamma_{QR} \\ & - \frac{192a}{8 \cdot 4!} g^{B_1 C_1} g^{B_2 C_2} g^{B_3 C_3} (-8g^{P(B_4 \Gamma^{C_4})} + g^{B_4 C_4}) \end{aligned} \quad (6.8.280)$$

ここで, 右辺の表式は, それぞれ $[B_1 \dots B_4]$ および $[C_1 \dots C_4]$ に関して反対称化するものとする。

右辺のガンマ行列の積を反対称標準基底で展開すると

$$\begin{aligned} Z = & (144x_6 + 24y_4 - a) \Gamma^P g^{B_1 C_1} \dots g^{B_4 C_4} \\ & + 4(72x_6 + 6x_2 + 15x_4 - 12y_4 - a) \left\{ \Gamma^{C_1} g^{B_1 C_2} g^{B_2 C_3} g^{B_3 C_4} g^{B_4 P} + (B \leftrightarrow C) \right\} \\ & + \frac{1}{12} (-a^2 k - 36x_6 + 6y_4) \epsilon^{PQRB_1 \dots B_4 C_1 \dots C_4} \Gamma_{QR} \\ & - 18(x_2 + 2x_4 - 12x_6 + 8y_4) \left\{ \Gamma^{B_1 B_2 C_3} g^{B_3 C_1} g^{B_4 C_2} g^{PC_4} + (B \leftrightarrow C) \right\} \\ & + \frac{1}{2} (12x_6 - x_2 - 4x_4 + 12y_4) \left\{ \Gamma^{B_1 \dots B_4 C_1 C_2 C_3} g^{PC_4} + (B \leftrightarrow C) \right\} \\ & + 12(x_4 + 2y_4) \left\{ \Gamma^{B_1 B_2 B_3 C_1 C_2} g^{B_4 C_3} g^{PC_4} + (B \leftrightarrow C) \right\} \\ & + 72y_4 \Gamma^{B_1 B_2 C_1 C_2 P} g^{B_3 C_3} g^{B_4 C_4}. \end{aligned} \quad (6.8.281)$$

ただし, 再び, 右辺の表式は, それぞれ $[B_1 \dots B_4]$ および $[C_1 \dots C_4]$ に関して反対称化するものとする。よって, 条件 $(\delta_\epsilon \mathcal{L})_{G^2} = 0$, すなわち $Z = 0$ は次の条件と同等となる:

$$\begin{aligned} Z = 0 & \Leftrightarrow x_4 = y_4 = 0, \quad 12x_6 = x_2, \quad 144x_6 = a, \quad 12x_2 = a, \quad 36x_6 + a^2 k = 0 \\ & \Leftrightarrow x_2 = \frac{a}{12}, \quad x_6 = \frac{a}{144}, \quad x_4 = y_4 = 0, \quad k = -\frac{1}{4a}. \end{aligned} \quad (6.8.282)$$

すなわち, F と k が a のみで完全に決まってしまう。

(2) a の決定 次に, a を決定するために, $\delta_\epsilon \mathcal{L}$ のうち, $D\Psi G$ に比例した項に着目する. このような項は, \mathcal{L} の中の次の2つの項より生じる:

$$-|\theta| \bar{\Psi}_M \Gamma^{MNL} D_N \Psi_L \rightarrow -2|\theta| \overline{H^{C_1 \dots C_4}_M} \epsilon \Gamma^{MNL} D_N \Psi_L \quad (6.8.283)$$

$$|\theta| (\bar{\Psi}_P F^{PQC_1 \dots C_4} \Psi_Q) G_{C_1 \dots C_4} \rightarrow -2|\theta| (\bar{\epsilon} F^{PQC_1 \dots C_4} D_P \Psi_Q) G_{C_1 \dots C_4} \quad (6.8.284)$$

これらの和がゼロとなる条件は

$$\Gamma^{MPQ} H^{C_1 \dots C_4}_M = F^{PQC_1 \dots C_4} \quad (6.8.285)$$

となる. 左辺を具体的に展開すると, $9/(4a^2) F^{PQC_1 \dots C_4}$ となるので, a の値は

$$\frac{9}{4a^2} = 1 \Leftrightarrow a = \pm \frac{3}{2} \quad (6.8.286)$$

と定まる. a の符号は, C 場の符号を変えると変化するので, いずれを採用しても理論としては変わらない. 以下, CJS 理論に従って, 負の符号を採用する. すると, 結局, a, k および F, H が次のように定ま:

$$a = -\frac{3}{2}, \quad k = \frac{1}{6}, \quad (6.8.287)$$

$$F^{PQM_1 \dots M_4} = -\frac{1}{96} (\Gamma^{PQM_1 \dots M_4} + 12g^{P[M_1} g^{Q|M_2} \Gamma^{M_3 M_4]}) \quad (6.8.288)$$

$$H^{C_1 \dots C_4}_M = \frac{1}{288} (\Gamma^{C_1 \dots C_4}_M - 8\delta_M^{[1} \Gamma^{C_2 C_3 C_4]}) \quad (6.8.289)$$

(3) $Y(\Psi)$ の決定 次に, Ψ について4次の項 $Y(\Psi)$ を CJS 理論の表式

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{64} (\bar{\Psi}_M \Gamma^{MNP} \Gamma^{AB} \Psi_P) (\bar{\Psi}_L \Gamma_{NAB}{}^{LQ} \Psi_Q) \\ &\quad - \frac{1}{64} \{ (\bar{\Psi}_M \Gamma^{MNWXYZ} \Psi_N) + 12 (\bar{\Psi}^W \Gamma^{XY} \Psi^Z) \} \\ &\quad \times (\bar{\Psi}_{[W} \Gamma_{XY} \Psi_{Z]}) \end{aligned} \quad (6.8.290)$$

に選ぶと, $\delta_\epsilon \mathcal{L} \simeq 0$ となることを示そう. そのために, 全ラグランジュ密度 \mathcal{L} を次のように, 6 個の部分の和に分解する:

$$2\kappa^2 \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_6; \quad (6.8.291)$$

$$\mathcal{L}_1 = |\theta| e_A^M e_B^N R_{MN}{}^{AB}(\omega), \quad (6.8.292)$$

$$\mathcal{L}_2 = -|\theta| \bar{\Psi}_M \Gamma^{MNL} D_N(\omega) \Psi_L, \quad (6.8.293)$$

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{|\theta|}{48} g^{M_1 N_1} \dots g^{M_4 N_4} G_{M_1 \dots M_4} G_{N_1 \dots N_4}, \quad (6.8.294)$$

$$\mathcal{L}_4 = -\frac{|\theta|}{36 \cdot (4!)^2} \epsilon^{M_1 \dots M_{11}} C_{M_1 M_2 M_3} G_{M_4 \dots M_7} G_{M_8 \dots M_{11}} \quad (6.8.295)$$

$$\mathcal{L}_5 = +|\theta| (\bar{\Psi}_P F^{PQM_1 \dots M_4} \Psi_Q) G_{M_1 \dots M_4}, \quad (6.8.296)$$

$$\mathcal{L}_6 = +|\theta| Y^{(M_1 \alpha_1) \dots (M_4 \alpha_4)} (\Psi_{M_1})_{\alpha_1} \dots (\Psi_{M_4})_{\alpha_4}. \quad (6.8.297)$$

(3-1) $\delta_\epsilon \mathcal{L}_1$

$$|\theta|^{-1} \delta_\epsilon \mathcal{L}_1 = V_A(\Gamma^M) R_M{}^A(\omega) - \frac{1}{2} V_M(\Gamma^M) R(\omega). \quad (6.8.298)$$

ここで, V_R は

$$V_R(Q) \equiv (\bar{\Psi}_R Q \epsilon), \quad (6.8.299)$$

により定義される. また, $R_M{}^A(\omega)$ と $R(\omega)$ は, 次式で定義される接続 ω に対する Ricci 曲率テンソルおよびスカラー曲率である:

$$R_M{}^A(\omega) \equiv R_{MN}{}^{AB}(\omega) e_B^N, \quad R(\omega) \equiv R_M{}^A(\omega) e_A^M \quad (6.8.300)$$

(3-2) $\delta_\epsilon \mathcal{L}_2$

$$\delta_\epsilon \mathcal{L}_2 = |\theta| (L_{2,1} + L_{2,2} + L_{2,3} + L_{2,4} + L_{2,5} + L_{2,6} + L_{2,7}) \quad (6.8.301)$$

$$L_{2,1} = \left(\bar{\epsilon} \Gamma^{MNL} \hat{D}_M \hat{D}_N \Psi_L \right), \quad (6.8.302)$$

$$L_{2,2} = - \left(\bar{\Psi}_M \Gamma^{MNL} \hat{D}_N \hat{D}_L \epsilon \right), \quad (6.8.303)$$

$$L_{2,3} = \bar{\epsilon} \left(\hat{D}_M \Gamma^{MNL} \right) \hat{D}_N \Psi_L, \quad (6.8.304)$$

$$L_{2,4} = -\frac{1}{2} \left(\bar{\epsilon} \Gamma^S \Psi_S \right) \left(\bar{\Psi}_M \Gamma^{MNL} \hat{D}_N \Psi_L \right), \quad (6.8.305)$$

$$L_{2,5} = \frac{3}{2} \left(\bar{\Psi}_M \Gamma^{A[NL} \hat{D}_N \Psi_L \right) \left(\bar{\epsilon} \Gamma^M \Psi_A \right), \quad (6.8.306)$$

$$L_{2,6} = 2 \left(\overline{\hat{D}_N \Psi_M \Gamma^{MNL}} \mathcal{O}_L \epsilon \right), \quad (6.8.307)$$

$$(6.8.308)$$

$$L_{2,7} = \bar{\Psi}_M \left(\hat{D}_N \Gamma^{MNL} \right) \mathcal{O}_L \epsilon. \quad (6.8.309)$$

ここで、 \hat{D}_M は D_M にテンソル添え字に対する Levi-Civita 接続を加えたもので、例えば

$$\hat{D}_M \Psi_N = D_M \Psi_N - \{^L_{MN}\} \Psi_L \quad (6.8.310)$$

である。特に、正規直交基底 e_A^M, θ_M^A に対しては

$$\hat{D}_M e_A^N = \left(-\Gamma_{ML}^N + \{^N_{ML}\} \right) e_A^L = -K_M^N{}^L e_A^L = -K_M^N \quad (6.8.311)$$

$$\hat{D}_M \theta_N^A = \left(\Gamma_{MN}^L - \{^L_{MN}\} \right) \theta_N^A = K_M^L{}^A \theta_N^A = K_M^A{}^N, \quad (6.8.312)$$

$$\hat{D}_M |\theta| \equiv \partial_M |\theta| = |\theta| \{^N_{MN}\} = |\theta| \Gamma_{MN}^N (\neq |\theta| \Gamma_{NM}^N) \quad (6.8.313)$$

まず、Levi-Civita 接続については第 1 Bianchi 恒等式が $R_{[MNL]}^P(\theta) = 0$ となるので

$$\hat{D}_{[M} \hat{D}_N \Psi_{L]} = \frac{1}{8} \Gamma_{AB} R_{[MN}{}^{AB}(\omega) \Psi_L] \quad (6.8.314)$$

が成り立つ。また、11 次元ガンマ行列に対して、

$$\Gamma^{MNL} \Gamma_{AB} = \Gamma^{MNL}{}_{AB} - 6 \Gamma^{[MN}{}_{[A} \delta_{B]}^L] - 6 \Gamma^{[M} \delta_{[A}^N \delta_{B]}^L] \quad (6.8.315)$$

が成り立つ。これより、

$$\begin{aligned} L_{2,1} &= \frac{1}{8} \left(\bar{\epsilon} \Gamma^{MNL} \Gamma_{AB} \Psi_L \right) R_{MN}{}^{AB} \\ &= -\frac{1}{8} V_L \left(\Gamma^{MNL P}{}_{[B} \right) R_{[MNP]}{}^B - \frac{1}{4} V_L \left(\Gamma^{MNP} \right) R_{[MNP]}{}^L \\ &\quad + \frac{1}{2} V_L \left(\Gamma^{MLN} \right) R_{[MN]} + \frac{1}{4} V_L \left(\Gamma^L \right) R - \frac{1}{2} V_L \left(\Gamma^M \right) R_M \end{aligned} \quad (6.8.316)$$

を得る.

同様にして,

$$\hat{D}_{[N}\hat{D}_{L]}\epsilon = \frac{1}{8}\Gamma_{AB}R_{NL}{}^{AB}\epsilon \quad (6.8.317)$$

より

$$\begin{aligned} L_{2,2} &= -\frac{1}{8}(\bar{\Psi}_M\Gamma^{MNL}\Gamma_{AB}\epsilon)R_{NL}{}^{AB} \\ &= -\frac{1}{8}V_L(\Gamma^{MNL}{}_B)R_{[MNP]}{}^B + \frac{1}{4}V_L(\Gamma^{MNP})R_{[MNP]}{}^L \\ &\quad -\frac{1}{2}V_L(\Gamma^{MLN})R_{[MN]} + \frac{1}{4}V_L(\Gamma^L)R - \frac{1}{2}V_L(\Gamma^M)R_M \end{aligned} \quad (6.8.318)$$

よって, Bianchi 恒等式

$$R_{[MNL]}{}^A = -\hat{D}_{[M}\mathcal{T}_{NL]}{}^A \quad (6.8.319)$$

を考慮すると

$$L_{2,1} + L_{2,2} = \frac{1}{4}V_L(\Gamma^{MNL}{}_B)\hat{D}_{[M}\mathcal{T}_{NP]}{}^B - \delta\mathcal{L}_1/|\theta| \quad (6.8.320)$$

を得る.

つぎに,

$$\hat{D}_M\Gamma^{MN_1\dots N_p} = \mathcal{T}_{MS}{}^S\Gamma^{MN_1\dots N_p} - \frac{p}{2}\mathcal{T}_{MS}{}^{[N_1}\Gamma^{MS|N_2\dots N_p]} \quad (6.8.321)$$

より,

$$L_{2,3} = T_{NL}(\Gamma^{MNL})\mathcal{T}_{MS}{}^S - T_{NL}(\Gamma^{MS[L})\mathcal{T}_{MS}{}^{N]}, \quad (6.8.322)$$

$$L_{2,7} = -\mathcal{T}_{NS}{}^S V_R(\Gamma^{NRM}\mathcal{O}_M) + \mathcal{T}_{NS}{}^{[R} V_R(\Gamma^{M]NS}\mathcal{O}_M) \quad (6.8.323)$$

を得る. ここで,

$$T_{NL}(\Gamma^{M\dots}) \equiv \overline{\hat{D}_N\Psi_L\Gamma^{M\dots}\epsilon} \quad (6.8.324)$$

である.

さらに,

$$X_{PQNL}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \equiv (\bar{\Psi}_P\mathcal{A}\epsilon) \left(\overline{\hat{D}_N\Psi_L\mathcal{B}\Psi_Q} \right) \quad (6.8.325)$$

と定義すると,

$$L_{2,4} = \frac{1}{2}X_{PQNL}(\Gamma^P, \Gamma^{NLQ}), \quad (6.8.326)$$

$$L_{2,5} = -\frac{3}{2}X_{PQNL}(\Gamma^{[Q}, \Gamma^{NL]P}), \quad (6.8.327)$$

$$L_{2,6} = -2T_{NL}(\Gamma^{MNL}\mathcal{O}_M) \quad (6.8.328)$$

を得る.

以上まとめると,

$$\begin{aligned}
|\theta|^{-1}\delta_\epsilon(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) &= \frac{1}{4}V_R(\Gamma^{MNRL}{}_A)\hat{D}_{[M}\mathcal{T}_{NL]}{}^A \\
&\quad + T_{NL}(\Gamma^{MNL})\mathcal{T}_{MS}{}^S - T_{NL}(\Gamma^{MS[L})\mathcal{T}_{MS}{}^{N]} \\
&\quad + \frac{1}{2}X_{PQNL}(\Gamma^P, \Gamma^{NLQ}) - \frac{3}{2}X_{PQNL}(\Gamma^{[Q}, \Gamma^{NL]P}) \\
&\quad - 2T_{NL}(\Gamma^{MNL}\mathcal{O}_M) \\
&\quad - \mathcal{T}_{NS}{}^S V_R(\Gamma^{NRM}\mathcal{O}_M) + \mathcal{T}_{NS}{}^{[R}V_R(\Gamma^{M]NS}) \quad (6.8.329)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\hat{D}_{[M}\mathcal{T}_{NL]}{}^A &= -\frac{1}{2}\left(\overline{\hat{D}_{[M}\Psi_{|P|}\Gamma^A{}_{NL]}{}^{PQ}\Psi_Q}\right) + \left(\overline{\hat{D}_M\Psi_N\Gamma^A\Psi_L}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}K_{[M}{}^{[P}{}_{|S|}S_{PQ}(\Gamma^{Q]A}{}_{NL]}{}^S) + \frac{1}{4}\mathcal{T}_{[MN]}{}^S S_{PQ}(\Gamma^A{}_{[S}{}^{BQ]}) \quad (6.8.330)
\end{aligned}$$

(3-3) $\delta_\epsilon\mathcal{L}_3, \delta_\epsilon\mathcal{L}_4$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\theta|}\delta_\epsilon\mathcal{L}_3 &= -\frac{1}{24}\delta G_{M_1\dots M_4}G^{M_1\dots M_4} - \frac{1}{2}\frac{\delta|\theta|}{|\theta|}G \cdot G \\
&\quad - \frac{1}{12}\delta g^{M_1N_1}g^{M_2N_2}\dots g^{M_4N_4}G_{M_1\dots M_4}G_{N_1\dots N_4} \\
&= -\frac{1}{6}\partial_{M_1}(\delta C_{M_2M_3M_4})G^{M_1\dots M_4} - \frac{1}{4}(\bar{\epsilon}\Gamma^S\Psi_S)G \cdot G \\
&\quad + \frac{1}{12}(\bar{\epsilon}\Gamma^M\Psi^N)G_{ML_1L_2L_3}G_N{}^{L_1L_2L_3} \\
&\simeq \frac{1}{4}V_{M_1}(\Gamma_{M_2M_3})(\hat{D} \cdot G)^{M_1M_2M_3} \\
&\quad + \frac{1}{4}V_R(\Gamma^R)G \cdot G - \frac{1}{12}V_R(\Gamma_S)G^R{}_{M_1M_2M_3}G^{SM_1M_2M_3} \quad (6.8.331)
\end{aligned}$$

同様にして,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\theta|}\delta_\epsilon\mathcal{L}_4 &\simeq -\frac{1}{12 \cdot (4!)^2}\epsilon^{M_1\dots M_{11}}\delta C_{M_1M_2M_3}G_{M_4\dots M_7}G_{M_8\dots M_{11}} \\
&\simeq -\frac{1}{8 \cdot (4!)^2}\epsilon^{M_1\dots M_{11}}V_{M_1}(\Gamma_{M_2M_3})G_{M_4\dots M_7}G_{M_8\dots M_{11}} \quad (6.8.332)
\end{aligned}$$

(3-4) $\delta_\epsilon \mathcal{L}_5$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\theta|} \delta_\epsilon \mathcal{L}_5 &= 4S_{PQ}(F^{PQM_1 \dots M_4}) \hat{D}_{M_1} \delta C_{M_2 M_3 M_4} + G_{M_1 \dots M_4} \\
&\quad \times \left\{ 2(\overline{\delta \Psi_P} F^{PQM_1 \dots M_4} \Psi_Q) + \frac{1}{|\theta|} S_{PQ}(\delta(|\theta| F^{PQM_1 \dots M_4})) \right\} \\
&= 6\hat{D}_{M_1} \{S_{PQ}(F^{PQM_1 \dots M_4})\} (\bar{\epsilon} \Gamma_{M_2 M_3} \Psi_{M_4}) \\
&\quad + \left\{ 2(\overline{\hat{D}_N \epsilon + \mathcal{O}_N \epsilon}) F^{NLM_1 \dots M_4} \Psi_L - \frac{1}{2} V_R(\Gamma^R) S_{PQ}(F^{PQM_1 \dots M_4}) \right. \\
&\quad \quad \left. + S_{PQ}(\delta F^{PQM_1 \dots M_4}) \right\} G_{M_1 \dots M_4} \\
&\simeq 12X_{PQNL}(\Gamma_{M_1 M_2}, F^{NLM_1 M_2 PQ}) - 6V_R(\Gamma_{S_1 S_2}) S_{PQ}(\hat{D}_M F^{MS_1 S_2 PQR}) \\
&\quad + 2V_R(F^{NRM_1 \dots M_4}) \hat{D}_N G_{M_1 \dots M_4} \\
&\quad + \left\{ 2T_{NL}(F^{NLM_1 \dots M_4}) + 2V_R(\hat{D}_N F^{NRM_1 \dots M_4}) - 2V_R(F^{NRM_1 \dots M_4} \mathcal{O}_N) \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{1}{2} V_R(\Gamma^R) S_{PQ}(F^{PQM_1 \dots M_4}) + S_{PQ}(\delta F^{PQM_1 \dots M_4}) \right\} G_{M_1 \dots M_4} \quad (6.8.333)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\hat{D}_M \Gamma^N = D_M \Gamma^N + \{ \begin{smallmatrix} N \\ ML \end{smallmatrix} \} \Gamma^L = -K_M^N \Gamma^L \quad (6.8.334)$$

より

$$\begin{aligned}
\hat{D}_M F^{MNL_1 \dots L_4} &= -\frac{1}{96} \hat{D}_M \Gamma^{MNL_1 \dots L_4} - \frac{1}{8} g^{M[L_1} g^{N|L_2} \hat{D}_M \Gamma^{L_3 L_4]} \\
&= -\frac{1}{96} \mathcal{T}_{MS}^S \Gamma^{MNL_1 \dots L_4} + \frac{5}{192} \mathcal{T}_{MS}^{[N} \Gamma^{MS|L_1 \dots L_4]} \\
&\quad - \frac{1}{4} g^{M[L_1} g^{N|L_2} K_M^{L_3} S \Gamma^{L_4]S}. \quad (6.8.335)
\end{aligned}$$

また, ゲージ場に対する Bianchi 恒等式

$$\hat{D}_{[M_1} G_{M_2 \dots M_5]} = \frac{1}{5} (dG)_{M_1 \dots M_5} = 0 \quad (6.8.336)$$

より

$$V_R(F^{NRM_1 \dots M_4}) \hat{D}_N G_{M_1 \dots M_4} = \frac{1}{8} V_R(\Gamma_{PQ}) (\hat{D} \cdot G)^{RPQ} \quad (6.8.337)$$

よって,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\theta|} \delta_\epsilon \mathcal{L}_5 &= -12 X_{PQNL}(\Gamma_{S_1 S_2}, F^{LNPQS_1 S_2}) \\
&+ \frac{1}{16} \mathcal{T}_{MS}^S S_{PQ} [MS_1 S_2 RPQ] V_R [S_1 S_2] \\
&- \frac{5}{32} \mathcal{T}_{MS_2}^{[S_1} S_{PQ} (\Gamma^{MS_3 | S_2 RPQ})] V_R [S_1 S_2] \\
&+ \frac{3}{2} g^{M[S_1} g^{S_2 | R]} K_M^P S_3 S_{PQ} (\Gamma^Q] S_3) V_R [S_1 S_2] \\
&+ \left[-\frac{1}{48} \mathcal{T}_{LS}^S V_R [LRM_1 \cdots M_4] + \frac{5}{96} \mathcal{T}_{S_1 S_2}^{[R} V_R (\Gamma^{S_1 S_2 | M_1 \cdots M_4}) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{R[M_1} K^{M_2 M_3} S V_R (\Gamma^{M_4] S}) - 2 V_R (F^{NRM_1 \cdots M_4} \mathcal{O}_N(\Psi)) \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} V_R (\Gamma^R) S_{PQ} (F^{PQM_1 \cdots M_4}) + 3 V_R (\Gamma^{[P} S_{PQ} (F^{R|Q} M_1 \cdots M_4]) \right] G_{M_1 \cdots M_4} \\
&+ 2 T_{NL} (F^{NLM_1 \cdots M_4}) G_{M_1 \cdots M_4} \\
&- \frac{1}{4} V_R [M_1 M_2] (\hat{D} \cdot G)^{RM_1 M_2} \\
&- 2 V_R (F^{SRM_1 \cdots M_4} H^{N_1 \cdots N_4} S) G_{M_1 \cdots M_4} G_{N_1 \cdots N_4} \tag{6.8.338}
\end{aligned}$$

(3-5) $\delta_\epsilon (\mathcal{L}_1 + \cdots + \mathcal{L}_5)$:

Creation: 2022/5/13

以上より, $\delta_\epsilon (\mathcal{L}_1 + \cdots + \mathcal{L}_5)$ のうち G^2 に比例した項は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\theta|} \delta_\epsilon (\mathcal{L}_1 + \cdots + \mathcal{L}_5) |_{G^2} &= \frac{1}{4} V_R (\Gamma^R) G \cdot G - \frac{1}{12} V_R (\Gamma_S) G^R_{M_1 M_2 M_3} G^{SM_1 M_2 M_3} \\
&- \frac{1}{8 \cdot (4!)^2} \epsilon^{RM_1 \cdots M_{10}} V_R (\Gamma_{M_1 M_2}) G_{M_3 \cdots M_6} G_{M_7 \cdots M_{10}} \\
&- 2 V_R (F^{MRN_1 \cdots N_4} H^{L_1 \cdots L_4} M) G_{N_1 \cdots N_4} G_{L_1 \cdots L_4}. \tag{6.8.339}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
&V_R (F^{MRN_1 \cdots N_4} H^{L_1 \cdots L_4} M) G_{N_1 \cdots N_4} G_{L_1 \cdots L_4} \\
&= -\frac{1}{4608} V_R [N_1 \cdots N_4 L_1 \cdots L_4 R] G_{N_1 \cdots N_4} G_{L_1 \cdots L_4} \\
&\quad - \frac{1}{24} V_R [S] G^{RM_1 M_2 M_3} G^S_{M_1 M_2 M_3} + \frac{1}{8} V_R [R] G \cdot G \tag{6.8.340}
\end{aligned}$$

また,

$$\Gamma^{M_1 \cdots M_8} = \frac{1}{2} \epsilon^{M_1 \cdots M_9 N_1 N_2} \Gamma_{N_1 N_2} \quad (6.8.341)$$

より

$$\begin{aligned} & \frac{2}{4608} V_R[N_1 \cdots N_4 L_1 \cdots L_4] G_{N_1 \cdots N_4} G_{L_1 \cdots L_4} \\ &= \frac{1}{4608} \epsilon^{R_1 \cdots R_{10}} V_R[M_1 M_2] G_{M_3 \cdots M_6} G_{M_7 \cdots M_{10}} \end{aligned} \quad (6.8.342)$$

よって,

$$\delta_\epsilon(\mathcal{L}_1 + \cdots + \mathcal{L}_5)|_{G^2} \quad (6.8.343)$$

また, $\Gamma^{MPQ} H^{N_1 \cdots N_4}_M = F^{PQN_1 \cdots N_4}$ より,

$$\delta_\epsilon(\mathcal{L}_1 + \cdots + \mathcal{L}_5)|_{d\Psi G + \Psi D \cdot G} = 0. \quad (6.8.344)$$

一方, $\Psi^3 G$ に比例した項は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\theta|} \delta_\epsilon(\mathcal{L}_1 + \cdots + \mathcal{L}_5)|_G = G_{C_1 \cdots C_4} \times \\ & \left\{ -\mathcal{T}_{NS}^S V_R(F^{NRC_1 \cdots C_4}) - \frac{1}{48} \mathcal{T}_{NS}^S V_R[NRC_1 \cdots C_4] \right. \\ & \quad + \mathcal{T}_{NS}^{[R} V_R(\Gamma^M]^{NS} H^{C_1 \cdots C_4}_M) + \frac{5}{96} \mathcal{T}_{NS}^{[R} V_R(\Gamma^{]NS|C_1 \cdots C_4}) \\ & \quad + \frac{1}{2} g^{R[C_1} K^{C_2 C_3}{}_S V_R(\Gamma^{C_4]S}) - 2V_R(F^{MRC_1 \cdots C_4} \mathcal{O}_M(\Psi)) \\ & \quad \left. - \frac{7}{2} V_R(\Gamma^{[R} S_{PQ}(F^{PQC_1 \cdots C_4})) \right\} \end{aligned} \quad (6.8.345)$$

$\Psi^2 D\Psi$ に比例した項は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\theta|} \delta_\epsilon(\mathcal{L}_1 + \cdots + \mathcal{L}_5)|_{\Psi^2 D\Psi} = \frac{1}{8} X_{PQNL}(\Gamma^{NPS_1 S_2 S_3}, \Gamma^{LQ}_{S_1 S_2 S_3}) \\ & \quad + \frac{1}{4} X_{PQNL}(\Gamma^{NLPQ}_S, \Gamma^S) + \frac{1}{2} X_{PQNL}(\Gamma^P, \Gamma^{NLQ}) \\ & \quad - \frac{3}{2} X_{PQNL}(\Gamma^{[Q}, \Gamma^{NL]P}) - 12 X_{PQNL}(\Gamma_{S_1 S_2}, F^{LN PQ S_1 S_2}) \\ & \quad + \frac{1}{2} T_{NL}(\Gamma^{NL[P} S_{PQ}(\Gamma^{Q]}) - \frac{1}{2} T_{NL}(\Gamma^{PQ[L} S_{PQ}(\Gamma^{N]}) \\ & \quad + \frac{1}{4} T_{NL}(\Gamma^{S_1 S_2 [L} S_{PQ}(\Gamma^{N]PQ}_{S_1 S_2}) + \frac{1}{16} T_{NL}(\Gamma^{S_3 NL} \Gamma^{S_1 S_2}) S_{PQ}(\Gamma^{PQ}_{S_1 S_2 S_3}) \\ & \quad + \frac{1}{6} T_{NL}(\Gamma^{NL[P} \Gamma^{QS_1 S_2]}) S_{PQ}(\Gamma_{S_1 S_2}) \\ & \quad - \frac{1}{48} T_{NL}(\Gamma^{MNL} \Gamma^{PQS_1 S_2}_M) S_{PQ}(\Gamma_{S_1 S_2}) \end{aligned} \quad (6.8.346)$$

ガンマ行列の積を展開すると,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\theta|} \delta_\epsilon(\mathcal{L}_1 + \cdots + \mathcal{L}_5)|_{\Psi^2 D\Psi} &= \frac{1}{8} X_{PQNL}(\Gamma^{NPS_1S_2S_3}, \Gamma^{LQ}_{S_1S_2S_3}) \\
&+ \frac{1}{4} X_{PQNL}(\Gamma^{NLPQ}_S, \Gamma^S) + 2X_{PQNL}(\Gamma^{[P}, \Gamma^{QNL]}) \\
&+ \frac{1}{8} X_{PQNL}(\Gamma_{S_1S_2}, \Gamma^{LNPQS_1S_2}) + \frac{1}{4} X_{PQNL}(\Gamma^{LQ}, \Gamma^{NP}) \\
&+ \frac{1}{2} X_{PQNL}(\Gamma^{QS}, \Gamma^{[N}_S]g^{P]L}) + \frac{1}{2} X_{PQNL}(\Gamma^{LS}, \Gamma^{[P}_S]g^{N]Q}) \\
&+ \frac{1}{4} g^{L[N} g^{P]Q} X_{PQNL}(\Gamma^{S_1S_2}, \Gamma_{S_1S_2}) \\
&- \frac{1}{16} T_{NL}(\Gamma^{LNS_1S_2S_3}) S_{PQ}(\Gamma^{PQ}_{S_1S_2S_3}) + \frac{1}{8} T_{NL}(\Gamma_S) S_{PQ}(\Gamma^{LNPQS}) \\
&+ \frac{1}{2} T_{NL}(\Gamma^{QL[N}) S_{PQ}(\Gamma^{P]}) + \frac{1}{2} T_{NL}(\Gamma^{NP[Q}) S_{PQ}(\Gamma^{L]}) \\
&- \frac{1}{16} T_{NL}(\Gamma^{LNPQS_1S_2}) S_{PQ}(\Gamma_{S_1S_2}) - \frac{1}{8} T_{NL}(\Gamma^{PQ}) S_{PQ}(\Gamma^{LN}) \\
&+ \frac{1}{2} S_{PQ}(\Gamma^{S[L}) g^{N][P} T_{NL}(\Gamma^{Q]}_S) + \frac{1}{8} T_{NL}(\Gamma_S) S_{PQ}(\Gamma^{LNPQS}) \\
&+ \frac{1}{8} g^{N[P} g^{Q]L} T_{NL}(\Gamma^{S_1, S_2}) S_{PQ}(\Gamma_{S_1S_2}) \tag{6.8.347}
\end{aligned}$$

最後に Ψ^5 に比例する項は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\theta|} \delta_\epsilon(\mathcal{L}_1 + \cdots + \mathcal{L}_5)|_{\Psi^5} &\tag{6.8.348} \\
&= -\frac{1}{8} K_{[M}^{[P} |_{S_1]} S_{PQ}(\Gamma_N^{Q]} |_{S_2} |_{S_3}^{S_1}) V_R(\Gamma^{MNR S_2 S_3}) \\
&+ \frac{1}{16} \mathcal{T}_{[MN}^{S_1} S_{PQ}(\Gamma_{S_2}^{PQ} |_{S_1 S_3}) V_R(\Gamma^{MNR S_2 S_3}) \\
&- \mathcal{T}_{NS}^S V_R(\Gamma^{NRM} \mathcal{O}_M(\Psi)) + \mathcal{T}_{NS}^{[R} V_R(\Gamma^{M]NS} \mathcal{O}_M(\Psi)) \\
&+ \frac{1}{16} \mathcal{T}_{MS}^S S_{PQ}(\Gamma^{MS_1S_2RPQ}) V_R(\Gamma_{S_1S_2}) \\
&- \frac{5}{32} \mathcal{T}_{MS_3}^{[S_1} S_{PQ}(\Gamma^{M S_3 | S_2} RPQ]) V_R(\Gamma_{S_1S_2}) \\
&+ \frac{3}{2} g^{M[S_1} g^{S_2|R]} K_M^P |_{S_3} S_{PQ}(\Gamma^{Q]S_3}) V_R(\Gamma_{S_1S_2}) \tag{6.8.349}
\end{aligned}$$

(3-6) $\delta_\epsilon \mathcal{L}_6$: $\mathcal{L}_6 = |\theta|Y(\Psi)$ において, CJS 理論では

$$\begin{aligned}
Y &= -\frac{1}{64}S_{PQ}(\Gamma^{PQS_1S_2S_3})S_{LN}(\Gamma_{S_1S_2S_3}{}^{LN}) \\
&\quad + \frac{1}{32}S_{PQ}(\Gamma^{S_1})S_{LN}(\Gamma_{S_1}{}^{PQLN}) \\
&\quad - \frac{1}{64}S_{PQ}(\Gamma_{S_1S_2})S_{LN}(\Gamma^{LNPQS_1S_2}) \\
&\quad - \frac{3}{16}S_{PQ}(\Gamma_{S_1S_1})S_{LN}(\Gamma^{[S_1S_2]}g^{P[L}g^{Q]N}). \quad (6.8.350)
\end{aligned}$$

局所超対称変換は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\theta|}\delta_\epsilon \mathcal{L}_6 &= \frac{4}{64}S_{PQ}(\Gamma^{PQS_1S_2S_3}) \left(\bar{\Psi}_N \Gamma_{S_1S_2S_3}{}^{LN} (\hat{D}_L + \mathcal{O}_L) \epsilon \right) \\
&\quad - \frac{1}{16}S_{PQ}(\Gamma_{S_1}{}^{LNPQ}) \left(\bar{\Psi}_N \Gamma^{S_1} (\hat{D}_L + \mathcal{O}_L) \epsilon \right) \\
&\quad - \frac{1}{16}S_{PQ}(\Gamma^{S_1}) \left(\bar{\Psi}_N \Gamma_{S_1}{}^{PQLN} (\hat{D}_L + \mathcal{O}_L) \epsilon \right) \\
&\quad + \frac{1}{32}S_{PQ}(\Gamma^{PQLNS_1S_2}) \left(\bar{\Psi}_N \Gamma_{S_1S_2} (\hat{D}_L + \mathcal{O}_L) \epsilon \right) \\
&\quad + \frac{1}{32}S_{PQ}(\Gamma_{S_1S_2}) \left(\bar{\Psi}_N \Gamma^{LNPQS_1S_2} (\hat{D}_L + \mathcal{O}_L) \epsilon \right) \\
&\quad + \frac{3}{4}S_{PQ}(\Gamma_{S_1S_2})g^{L[P}g^{Q|N|} \left(\bar{\Psi}_N \Gamma^{S_1S_2} (\hat{D}_L + \mathcal{O}_L) \epsilon \right) \\
&\quad + \frac{1}{|\theta|}\delta_\epsilon \left(|\theta| e_A^P e_B^Q e_C^L e_D^N \right) \times \\
&\quad \left\{ -\frac{1}{64}S_{PQ}(\Gamma^{ABS_1S_2S_3})S_{LN}(\Gamma^{CD}{}_{S_1S_2S_3}) \right. \\
&\quad \quad + \frac{1}{32}S_{PQ}(\Gamma^{S_1})S_{LN}(\Gamma_{S_1}{}^{ABCD}) \\
&\quad \quad - \frac{1}{64}S_{PQ}(\Gamma_{S_1S_2})S_{LN}(\Gamma^{ABCD}{}_{S_1S_2}) \\
&\quad \quad \left. - \frac{1}{32}S_{PQ}(\Gamma^{CD})S_{LN}(\Gamma^{AB}) \right\} \\
&\quad - \frac{1}{32|\theta|}\delta(|\theta|g^{L[P}g^{Q]N})S_{PQ}(\Gamma^{S_1S_2})S_{LN}(\Gamma_{S_1S_2}) \\
&\quad - \frac{1}{8|\theta|}\delta(|\theta|e_A^{[P}g^{Q][L}e_B^{N]})S_{PQ}(\Gamma_{S_1}{}^B)S_{LN}(\Gamma^{S_1A}) \quad (6.8.351)
\end{aligned}$$

これより, $\Psi^D\Psi$ に比例する項は

$$\begin{aligned}
\delta Y|_{\Psi^2 D\Psi} &= \frac{1}{8}X(\Gamma^{PNS_1S_2S_3}, \Gamma^{LQ}_{S_1S_2S_3}) - \frac{1}{8}X(\Gamma^{S_1}, \Gamma_{S_1}^{LNQP}) \\
&\quad - \frac{1}{8}X(\Gamma_{S_1}^{LNQP}, \Gamma^{S_1}) + \frac{1}{16}X(\Gamma^{PQNLS_1S_2}, \Gamma_{S_1S_2}) \\
&\quad + \frac{1}{16}X(\Gamma_{S_1S_2}, \Gamma^{PQNLS_1S_2}) - \frac{3}{2}X(\Gamma_{S_1S_2}, \Gamma_{S_3S_4})g^{N[L}g^{P|Q}g^{S_1|S_3}g^{S_4]S_2} \\
&\quad + \frac{1}{16}T_{NL}[LNS_1S_2S_3]S_{PQ}[PQS_1S_2S_3] - \frac{1}{16}T_{NL}[S_1]S_{PQ}[S_1LNPQ] \\
&\quad - \frac{1}{16}T_{NL}[S_1LNPQ]S_{PQ}[S_1] + \frac{1}{32}T_{NL}[S_1S_2]S_{PQ}[LNPQS_1S_2] \\
&\quad + \frac{1}{32}T_{NL}[LNPQS_1S_2]S_{PQ}[S_1S_2] \\
&\quad - \frac{3}{4}T_{NL}[S_1S_2]S_{PQ}[S_3S_4]g^{N[P}g^{Q|L}g^{S_1|S_3}g^{S_4]S_2}
\end{aligned} \tag{6.8.352}$$

G に比例する項は Ψ^3G に比例していて,

$$\begin{aligned}
\delta Y|_G &= \frac{1}{16}S_{PQ}[PQS_1S_2S_3]W_{RM}[S_1S_2S_3MR] - \frac{1}{16}S_{PQ}[S_1MRPQ]W_{RM}[S_1] \\
&\quad - \frac{1}{16}S_{PQ}[S_1]W_{RM}[S_1PQMR] + \frac{1}{32}S_{PQ}[PQMRS_1S_2]W_{RM}[S_1S_2] \\
&\quad + \frac{1}{32}S_{PQ}[S_1S_2]W_{RM}[RMPQS_1S_2] \\
&\quad + \frac{3}{4}S_{PQ}[S_1S_2]W_{RM}[S_3S_4]g^{M[P}g^{Q|R}g^{S_1|S_3}g^{S_2]S_4}.
\end{aligned} \tag{6.8.353}$$

ここで,

$$W_{RM}[P\dots] \equiv (\bar{\Psi}_R\Gamma^{P\dots}H^{C_1\dots C_4}{}_M\epsilon)G_{C_1\dots C_4} \tag{6.8.354}$$

最後に,

$$\delta_\epsilon\mathcal{L}_6|_{\Psi^5} = \delta_\epsilon\mathcal{L}_6 - \delta_\epsilon\mathcal{L}_6|_{\Psi^2 D\Psi}(D \rightarrow \hat{D}(\tilde{\omega})) - \delta_\epsilon\mathcal{L}_6|_{\Psi^3 G}(G \rightarrow (G + \tilde{G})/2) \tag{6.8.355}$$

と置くと,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\theta|} \delta_\epsilon \mathcal{L}_6 |_{\Psi^5} &= \frac{1}{8} \tilde{K}_{S_4} [{}^P S_5 S_{PQ} (\Gamma^Q]_{S_1 S_2 S_3 S_5}) V_R [S_1 S_2 S_3 S_4 R] \\
&+ \frac{1}{8} S_{PQ} [PQ S_1 S_2 S_3] \tilde{K}_{S_4} [{}^{S_4} S_5 V_R (\Gamma^R]_{S_1 S_2 S_3} S_4) \\
&- \frac{1}{4} \tilde{K}_{S_2} [{}^{S_2} S_3 S_{PQ} (\Gamma^{RPQ}]_{S_1} S_3) V_R [S_1] \\
&- \frac{1}{4} S_{PQ} [S_1] \tilde{K}_{S_2} [{}^P S_3 V_R (\Gamma^{QS_2 R}]_{S_1} S_3) \\
&+ \frac{1}{8} \tilde{K}_{S_3} [{}^P S_4 S_{PQ} (-\Gamma^{QS_3 R}]_{S_4 S_1 S_2}) V_R [S_1 S_2] \\
&+ \frac{1}{8} S_{PQ} [S_1 S_2] \tilde{K}_{S_3} [{}^P S_4 V_R (-\Gamma^{QRS_3}]_{S_4 S_1 S_2}) \\
&- \frac{1}{2} \tilde{K}_{S_2} [{}^{S_2} S_3 S_{PQ} [S_3 S_1] g^{R] [Q} V_R (\Gamma^P]_{S_1}) \\
&- \frac{1}{2} S_{PQ} (-\Gamma^{S_1 [S_2}) g^{R] [Q} \tilde{K}_{S_2} [{}^P]_{S_3} V_R [S_3 S_1] \\
&+ \frac{1}{4} \tilde{K}_{S_1} [{}^{S_1} S_2 S_{PQ} (-\Gamma^R] S_2) V_R [PQ] \\
&+ \frac{1}{4} S_{PQ} [S_1 R] \tilde{K}_{S_1} [{}^P S_2 V_R (-\Gamma^Q] S_2) \\
&+ \left(-\frac{1}{2} V_R (\Gamma^R) \delta_{S_5}^{[P} \delta_{S_6}^{Q]} \delta_{S_7}^{[L} \delta_{S_8}^{N]} + V_R (\Gamma^P) \delta_{S_6}^{[Q]} \delta_{S_5}^R \delta_{S_7}^{[L} \delta_{S_8}^{N]} \right. \\
&\quad \left. + V_R (\Gamma^L) \delta_{S_6}^{[N]} \delta_{S_5}^R \delta_{S_7}^{[P} \delta_{S_8}^{Q]} \right) \\
&\times \left\{ -\frac{1}{64} S_{PQ} [S_5 S_6 S_1 S_2 S_3] S_{LN} (S_7 S_8 S_1 S_2 S_3) + \frac{1}{32} S_{PQ} [S_1] S_{LN} [S_1 S_5 \cdots S_8] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{64} S_{PQ} [S_1 S_2] S_{LN} [S_5 \cdots S_8 S_1 S_2] - \frac{1}{32} S_{PQ} [S_7 S_8] S_{LN} [S_5 S_6] \right\} \\
&+ \left\{ \frac{1}{64} V_R (\Gamma^R) g^{LP} g^{QN} - \frac{1}{32} V_R (\Gamma^L) g^{(P)R} g^{QN} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{32} V_R (\Gamma^Q) g^{(N)R} g^{LP} \right\} S_{PQ} [S_1 S_2] S_{LN} [S_1 S_2] \\
&\left\{ \frac{1}{16} V_R (\Gamma^R) \delta_{S_1}^P g^{QL} \delta_{S_2}^N - \frac{1}{16} V_R (\Gamma^P) \delta_{S_1}^R g^{QL} \delta_{S_2}^N \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{8} \delta_{S_1}^P V_R (\Gamma^Q) g^{(L)R} \delta_{S_2}^N - \frac{1}{16} \delta_{S_1}^P g^{QL} V_R (\Gamma^N) \delta_{S_2}^R \right\} \\
&\times S_{PQ} [S_3 S_2] S_{LN} [S_3 S_1] \\
&+ \delta_\epsilon Y |_G \left(G_{M_1 \cdots M_4} \rightarrow \frac{3}{2} \bar{\Psi}_{[M_1} \Gamma_{M_2 M_3} \Psi_{M_4]} \right)
\end{aligned} \tag{6.8.356}$$

6.8.4 Killing スピノール

定義式

$$\nabla_M \epsilon + \frac{1}{288} (\Gamma_M^{P_1 P_2 P_3 P_4} - 8\delta_M^{P_1} \Gamma^{P_2 P_3 P_4}) F_{P_1 P_2 P_3 P_4} \epsilon = (6.8.357a)$$

$$\nabla_M \bar{\epsilon} + \frac{1}{288} (\Gamma_M^{P_1 P_2 P_3 P_4} + 8\delta_M^{P_1} \Gamma^{P_2 P_3 P_4}) F_{P_1 P_2 P_3 P_4} \epsilon = (6.8.357b)$$

Majorana 条件

$$\bar{\epsilon} = \epsilon^\dagger \Gamma^0 = \epsilon^T C, \quad (6.8.358)$$

$$\epsilon^* = B\epsilon, \quad (6.8.359)$$

$$C = B\Gamma^0, \quad B^T = B. \quad (6.8.360)$$

随伴形式

$$K_M := \bar{\epsilon} \Gamma_M \epsilon, \quad (6.8.361a)$$

$$\Omega_{MN} := \bar{\epsilon} \Gamma_{MN} \epsilon, \quad (6.8.361b)$$

$$\Sigma_{M_1 \dots M_5} := \bar{\epsilon} \Gamma_{M_1 \dots M_5} \epsilon. \quad (6.8.361c)$$

代数的関係式

$$K^2 \leq 0, \quad (6.8.362a)$$

$$\Omega_M^P \Omega_{PN} = -K_M K_N + g_{MN} K^2, \quad (6.8.362b)$$

$$\Omega^2 = -5K^2, \quad (6.8.362c)$$

$$I_K \Omega = 0. \quad (6.8.362d)$$

$$I_M \Sigma \cdot I_N \Sigma = 14K_M K_N - 4g_{MN} K^2, \quad (6.8.363a)$$

$$\Sigma^2 = -6K^2, \quad (6.8.363b)$$

$$I_K \Sigma = \frac{1}{2} \Omega \wedge \Omega. \quad (6.8.363c)$$

$$(I_K * \Sigma)_{M_1 \dots M_5} = \hat{\Omega}_{[M_1}^P \Sigma_{M_2 \dots M_5]P}, \quad (6.8.364a)$$

$$K^2 \Omega \wedge \Sigma = \frac{1}{2} K \wedge \Omega \wedge \Omega \wedge \Omega. \quad (6.8.364b)$$

微分関係式

$$\nabla_M K_N + \nabla_N K_M = 0, \quad (6.8.365a)$$

$$dK = \frac{2}{3} I_\Omega F + \frac{1}{3} I_\Sigma * F. \quad (6.8.365b)$$

$$\begin{aligned} \nabla_X \Omega &= \frac{1}{6} X \wedge F \cdot \Sigma, F + \frac{1}{3} (I_X F) \cdot \Sigma \\ &\quad - \frac{1}{6} [I_X \Sigma, F]_3 + \frac{1}{3} I_X I_K F, \end{aligned} \quad (6.8.366a)$$

$$d\Omega = I_K F. \quad (6.8.366b)$$

$$\begin{aligned} \nabla_X \Sigma &= \frac{1}{6} I_X I_K * F - \frac{1}{3} I_X F \wedge \Omega + \frac{1}{6} F \wedge I_X \Omega \\ &\quad + \frac{1}{6} X \wedge [\Omega, F]_1 + \frac{1}{3} [I_X F, * \Sigma]_2 \\ &\quad - \frac{1}{6} [F, I_X * \Sigma]_2 + \frac{1}{6} X \wedge [F, * \Sigma]_3, \end{aligned} \quad (6.8.367a)$$

$$d\Sigma = I_K * F - \Omega \wedge F. \quad (6.8.367b)$$

ここで, p 形式 α , q 形式 β および正整数 $k \leq p, q$ に対して

$$[\alpha, \beta]_k = \frac{1}{(p-k)!(q-k)!k!} \alpha_{P_1 \dots P_k M_1 \dots M_{p-k}} \beta^{P_1 \dots P_k M_{p-k+1} \dots M_{p+q-2k}} dx^{M_1} \wedge \dots \wedge dx^{M_{p+q-2k}}. \quad (6.8.368)$$

特に,

$$\mathcal{L}_K \Omega = 0, \quad \mathcal{L}_K \Sigma = 0, \quad \mathcal{L}_K F = 0. \quad (6.8.369)$$

6.8.5 Nullスピノール

光的基底

$$ds^2 = 2\theta^+ \theta^- + \sum_{I=1}^9 (\theta^I)^2, \quad (6.8.370)$$

$$\theta^\pm(e_\pm) = 1, \quad \theta^\pm(e_\mp) = \theta^\pm(e_I) = \theta^I(e_\pm) = 0, \quad \theta^I(e_J) = \delta^I_J. \quad (6.8.371)$$

向き付けは

$$\epsilon_{+-12 \dots 89} = -1, \quad \epsilon^{+-12 \dots 89} = 1, \quad (6.8.372)$$

$$\text{Vol} = \theta^{-+12 \dots 89}, \quad (6.8.373)$$

$$\Gamma^{+-1 \dots 9} = 1. \quad (6.8.374)$$

これは、通常の正規直交基底で表すと、

$$\theta^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta^{10} \pm \theta^0), \quad (6.8.375a)$$

$$\epsilon_{01\dots 9\#} = 1 \quad (\# = 10), \quad (6.8.375b)$$

$$\text{Vol} = \theta^{01\dots 9\#}, \quad (6.8.375c)$$

$$\Gamma_{(10)} := * \Gamma_{[10]} = \Gamma^{01\dots 9\#} = -1. \quad (6.8.375d)$$

に対応する.

6.8.5.1 標準光的スピノール

定義 次の条件を満たす光的スピノール ϵ ,

$$\text{Majorana 条件: } \epsilon^* = B\epsilon \quad (B = \Gamma^{35\dots 9}), \quad (6.8.376a)$$

$$\Gamma^{1234}\epsilon = \Gamma^{3456}\epsilon = \Gamma^{5678}\epsilon = \Gamma^{1357}\epsilon = -\epsilon, \quad (6.8.376b)$$

$$\Gamma^+\epsilon = 0 \quad (6.8.376c)$$

が定数倍の自由度を除いて一意的に存在する. また, 任意の光的スピノールとこのスピノールは Lorentz 変換で互いに移り合う.

(注) このとき, $\Gamma^{+-1\dots 9} = 1$ および $\Gamma^{+-}\epsilon = 1$ より

$$\Gamma^9\epsilon = \Gamma^{1234}\Gamma^{5678}\Gamma^{+-}\epsilon = \epsilon. \quad (6.8.377)$$

テンソル積表示で, (6.8.376b) と $\Gamma^\pm\epsilon = 0$ を満たす $\epsilon(\epsilon^\dagger\epsilon = 1)$ は位相の自由度を除いて次式で与えられる:

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{1}{4} \left[(uuudu) - (uuddd) + (uduuu) - (uddud) \right. \\ & + i \{ (duudd) + (duddu) + (ddwud) + (dddwu) \} \\ & \pm \{ (duudu) - (duddd) + (dduuu) - (dddud) \} \\ & \left. \pm i \{ (uuudd) + (uuddu) + (udwud) + (udduu) \} \right] \quad (6.8.378) \end{aligned}$$

対応する光的ベクトルは

$$K_* = -\sqrt{2}\theta^\pm, \quad K = -\sqrt{2}e_\mp. \quad (6.8.379)$$

不変4形式 8D 空間上の4形式 ϕ を

$$-\phi = \theta^{1234} + \theta^{1256} + \theta^{1278} + \theta^{1357} - \theta^{1368} - \theta^{1458} - \theta^{1467} \\ - \theta^{2358} - \theta^{2367} - \theta^{2457} + \theta^{2468} + \theta^{3456} + \theta^{3478} + \theta^{5678} \quad (6.8.380)$$

により定義する.

ϕ は次の関係式を満たす :

$$*_8\phi = \phi, \quad (6.8.381a)$$

$$\phi^{i_1 i_2 i_3 k} \phi_{j_1 j_2 j_3 k} = 6\delta_{j_1 j_2 j_3}^{i_1 i_2 i_3} - 9\phi^{[i_1 i_2} [j_1 j_2 \delta_{j_3]}^{i_3]}, \quad (6.8.381b)$$

$$\phi^{i_1 i_2 k_1 k_2} \phi_{j_1 j_2 k_1 k_2} = 12\delta_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} - 4\phi^{i_1 i_2}{}_{j_1 j_2}, \quad (6.8.381c)$$

$$\phi^{i k_1 k_2 k_3} \phi_{j k_1 k_2 k_3} = 42\delta_{j.}^i. \quad (6.8.381d)$$

ここで

$$\delta_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k} := \delta_{j_1}^{[i_1} \dots \delta_{j_k}^{i_k]}. \quad (6.8.382)$$

これらより, 次の関係式を得る :

$$[\phi, \phi]_1 = 0, \quad [\phi, \phi]_2 = -12\phi, \quad [\phi, \phi]_3 = 0, \quad (6.8.383a)$$

$$[\phi_i, \phi_j]_2 = 3\theta_i \wedge \theta_j + 4\phi_{ij}, \quad (6.8.383b)$$

$$[\phi_{ij}, \phi]_2 = 3\theta_i \wedge \theta_j - 2\phi_{ij}, \quad (6.8.383c)$$

$$[\phi_i, \phi_j]_1 = 6\theta_{(i} \wedge \phi_{j)} - 6\delta_{ij}\phi, \quad (6.8.383d)$$

$$[\phi, \phi_i]_1 = 6\phi \wedge \theta_i, \quad (6.8.383e)$$

$$\phi_i \cdot \phi_j = 7\delta_{ij} = -[\phi_i, \phi]_{3;j}. \quad (6.8.383f)$$

標準光的スピノールの性質 (6.8.376b) を満たす ϵ は

$$\phi \cdot \Gamma_{[4]}\epsilon = 14\epsilon \quad (6.8.384)$$

を満たす. これより

$$\Gamma_{[1]}\epsilon = -\frac{1}{7}\phi \cdot \Gamma_{[3]}\epsilon, \quad (6.8.385a)$$

$$\Gamma_{[2]}\epsilon = -\frac{1}{3}\phi \cdot \Gamma_{[2]}\epsilon, \quad (6.8.385b)$$

$$\Gamma_{[3]}\epsilon = \phi \cdot \Gamma_{[1]}\epsilon, \quad (6.8.385c)$$

$$\Gamma_{[4]}\epsilon = \phi\epsilon + \frac{1}{4}[\phi, \Gamma_{[2]}]_1\epsilon, \quad (6.8.385d)$$

$$\Gamma_{[5]}\epsilon = \phi \wedge \Gamma_{[1]}\epsilon, \quad (6.8.385e)$$

および

$$[\phi, \Gamma_{[3]}]_1 \epsilon = 6\phi \wedge \Gamma_{[1]} \epsilon, \quad (6.8.386a)$$

$$[\phi, \Gamma_{[3]}]_2 \epsilon = 6[\phi, \Gamma_{[1]}]_1 \epsilon, \quad (6.8.386b)$$

$$[\phi, \Gamma_{[4]}]_2 \epsilon = \frac{8}{3}\phi \cdot \Gamma_{[2]} \epsilon, \quad (6.8.386c)$$

$$\phi \cdot \Gamma_{[5]} \epsilon = -\phi \cdot \Gamma_{[3]} \epsilon \quad (6.8.386d)$$

が得られる.

6.8.5.2 不変群

ϵ を

$$\Gamma^+ \epsilon = 0, \quad \Gamma^9 \epsilon = \epsilon \quad (6.8.387)$$

を満たす光的スピノールとする. このとき, 無限小 Lorentz 変換 $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$ に対して, ϵ が不変となる条件

$$\omega_{ab} \Gamma^{ab} \epsilon = 0 \quad (6.8.388)$$

は,

$$(\omega_{+-} - \omega_{9i} \Gamma^i + \hat{\omega} \cdot \Gamma_{[2]} + \Gamma^- (\omega_{-9} + \omega_{-i} \Gamma^i)) \epsilon = 0. \quad (6.8.389)$$

ここで, $\hat{\omega} = (\omega_{ij}), \Gamma_{[2]} = (\Gamma_{ij})$. これに Γ^+ をかけることにより,

$$(\omega_{-9} + \omega_{-i}) \epsilon = 0, \quad (6.8.390a)$$

$$(\omega_{+-} - \omega_{9i} \Gamma^i + \hat{\omega} \cdot \Gamma_{[2]}) \epsilon = 0. \quad (6.8.390b)$$

さらに, Γ^9 をかけることにより,

$$\omega_{-9} = 0, \quad (6.8.391a)$$

$$\omega_{-i} \Gamma^i \epsilon = 0 \Rightarrow \omega_{-i} = 0, \quad (6.8.391b)$$

$$\omega_{9i} = 0, \quad (6.8.391c)$$

および

$$(\omega_{+-} + \hat{\omega} \cdot \Gamma_{[2]}) \epsilon = 0 \quad (6.8.392)$$

を得る. この最後の式より,

$$((\omega_{+-})^2 - (\hat{\omega} \cdot \Gamma_{[2]})^2) \epsilon = 0. \quad (6.8.393)$$

ところが, $(\Gamma^a)^\dagger = \Gamma_a$ となる表示で

$$0 \leq \epsilon^\dagger \hat{\omega} \cdot \Gamma_{[2]}^\dagger \hat{\omega} \cdot \Gamma_{[2]} \epsilon = -\epsilon^\dagger (\hat{\omega} \cdot \Gamma_{[2]})^2 \epsilon. \quad (6.8.394)$$

よって,

$$\omega_{+-} = 0, \quad (6.8.395a)$$

$$\hat{\omega} \cdot \Gamma_{[2]} \epsilon = 0. \quad (6.8.395b)$$

ここで, (6.8.385) より,

$$\hat{\omega} \cdot \Gamma_{[2]} \epsilon = \hat{\omega}^7 \cdot \Gamma_{[2]} \epsilon \quad (6.8.396)$$

また,

$$\begin{aligned} (\hat{\omega}^7 \cdot \Gamma_{[2]})^2 \epsilon &= 4\hat{\omega}^7 \cdot (\hat{\omega}^7 \cdot \Gamma_{[4]}) \epsilon \\ &= 4\hat{\omega}^7 \cdot (\hat{\omega}^7 \cdot \phi) \epsilon + \hat{\omega}^7 \cdot (\hat{\omega}^7 \cdot [\phi, \Gamma_{[2]}]_1) \epsilon. \end{aligned} \quad (6.8.397)$$

かつ,

$$\hat{\omega}^7 \cdot (\hat{\omega}^7 \cdot \phi) = -3\hat{\omega}^7 \cdot \hat{\omega}^7, \quad (6.8.398a)$$

$$\hat{\omega}^7 \cdot (\hat{\omega}^7 \cdot [\phi, \Gamma_{[2]}]_1) \epsilon = 2\omega_{j_1 j_2} (\hat{\omega}^7 \cdot \phi)_{k j_1} \Gamma^{k j_2} = -6\hat{\omega}_{j_1 j_2}^7 \hat{\omega}_k^{7 j_1} \Gamma^{k j_2} \epsilon \quad (6.8.398b)$$

よって, $\hat{\omega}^7 = 0$.

以上より, 標準光的スピノールを不変にする無限小 Lorentz 変換は

$$\omega_{+-} = \omega_{-9} = \omega_{-i} = \omega_{9i} = \hat{\omega}_{ij}^7 = 0. \quad (6.8.399)$$

ω_{+9}, ω_{+i} は任意.

Spin(7) 次に, $\hat{\omega}^{21}$ の生成する変換群 G が Spin(7) となることを示す.
まず,

$$\hat{\omega}^7 = 0 \Leftrightarrow \phi \cdot \omega = \omega \quad (6.8.400)$$

に注意すると, $\hat{\omega}^7 = 0$ となる条件は,

$$\omega_{18} = -\omega_{27} + \omega_{36} + \omega_{45}, \quad (6.8.401a)$$

$$\omega_{28} = \omega_{17} + \omega_{35} - \omega_{46}, \quad (6.8.401b)$$

$$\omega_{38} = -\omega_{16} - \omega_{25} - \omega_{47}, \quad (6.8.401c)$$

$$\omega_{48} = -\omega_{15} + \omega_{26} + \omega_{37}, \quad (6.8.401d)$$

$$\omega_{58} = \omega_{14} + \omega_{23} - \omega_{67}, \quad (6.8.401e)$$

$$\omega_{68} = \omega_{13} - \omega_{24} + \omega_{57}, \quad (6.8.401f)$$

$$\omega_{78} = -\omega_{12} - \omega_{34} - \omega_{56}. \quad (6.8.401g)$$

これより,

$$(E_{ab})_{ij} = \delta_{ai}\delta_{bj}, \quad (6.8.402)$$

$$M_{ab} = E_{ab} - E_{ba}, \quad (6.8.403)$$

$$h_j = -iM_{2j-1}2j \quad (j = 1, \dots, 4), \quad (6.8.404)$$

$$E_{j\epsilon k\eta} = \frac{1}{2} \{ \epsilon M_{2j-1}2k-1 - \eta M_{2j}2k + i(M_{2j}2k-1 + \epsilon\eta M_{2j-1}2k) \} \quad (6.8.405)$$

とおくと ($\epsilon, \eta = \pm 1$), G の Lie 代数は

$$\tilde{h}_j = h_j - h_4 \quad (j = 1, 2, 3), \quad (6.8.406a)$$

$$A_{j\pm} = E_{k_{\pm}l_{\mp}} \quad (\epsilon_{jkl} \neq 1), \quad (6.8.406b)$$

$$B_{j\pm} = \pm\sqrt{2}iE_{j\pm 4\mp}, \quad (6.8.406c)$$

$$C_{j\pm} = E_{k_{\pm}l_{\pm}} \mp i(E_{k_{\mp}4\pm} + E_{k_{\mp}4\mp}) \quad (6.8.406d)$$

で生成される.

これらの交換関係より,

$$h'_1 = \tilde{h}_1 + \frac{1}{2}B_{1+} + \frac{1}{4}B_{2+} + \frac{1}{4}B_{3+}, \quad (6.8.407a)$$

$$h'_2 = \tilde{h}_2 + \frac{1}{4}B_{1+} + \frac{1}{2}B_{2+} + \frac{1}{4}B_{3+}, \quad (6.8.407b)$$

$$h'_3 = \tilde{h}_3 + \frac{1}{4}B_{1+} + \frac{1}{4}B_{2+} + \frac{1}{2}B_{3+} \quad (6.8.407c)$$

は可換で, Cartan 部分代数 \mathcal{H} となることが分かる. また, 対応する Weyl

基底は

$$W(2, 1, 1) = B_{1+}, \quad (6.8.408a)$$

$$W(1, 2, 1) = B_{2+}, \quad (6.8.408b)$$

$$W(1, 1, 0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}B_{3-} + C_{3+}, \quad (6.8.408c)$$

$$W(1, 0, -1) = 4A_{2-} + B_{1+}, \quad (6.8.408d)$$

$$W(1, 1, 2) = B_{3+}, \quad (6.8.408e)$$

$$W(1, 0, 1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}B_{2-} + C_{2+}, \quad (6.8.408f)$$

$$W(0, 1, -1) = 4A_{1+} + B_{2+}, \quad (6.8.408g)$$

$$W(1, -1, 0) = 4A_{3+} + B_{1+}, \quad (6.8.408h)$$

$$W(0, 1, 1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}B_{1-} + C_{1+}, \quad (6.8.408i)$$

$$W(0, -1, -1) = -2B_{1+} + \frac{\sqrt{2}}{2}(B_{2-} - B_{3-}) + 2\sqrt{2}C_{1+} - C_{2+} + C_{3+}, \quad (6.8.408j)$$

$$W(-1, 1, 0) = 4A_{3-} + B_{2+}, \quad (6.8.408k)$$

$$W(0, -1, 1) = 4A_{1-} + B_{3+}, \quad (6.8.408l)$$

$$W(-1, 0, -1) = B_{1-} + 2\sqrt{2}B_{2+} - B_{3-} - \sqrt{2}C_{1+} - 4C_{2-} + \sqrt{2}C_{3+}, \quad (6.8.408m)$$

$$W(-1, -1, -2) = -4h'_3 - 4A_{1+} - 4A_{2-} + B_{3+} + 8B_{3-}, \quad (6.8.408n)$$

$$W(-1, 0, 1) = 4A_{2+} + B_{3+}, \quad (6.8.408o)$$

$$W(-1, -1, 0) = -\frac{1}{4}(B_{1-} - B_{2-}) - \frac{\sqrt{2}}{2}B_{3+} + \frac{\sqrt{2}}{4}(-C_{1+} + C_{2+}), \quad (6.8.408p)$$

$$W(-1, -2, -1) = -4h'_2 - 4A_{1-} - 4A_{3+} + B_{2+} + 8B_{2-}, \quad (6.8.408q)$$

$$W(-2, -1, -1) = -4h'_1 - 4A_{2+} - 4A_{3-} + B_{1+} + 8B_{1-}. \quad (6.8.408r)$$

さらに,

$$\alpha_1 = W(0, 1, -1), \quad \alpha_2 = W(1, -1, 0), \quad \alpha_3 = W(0, 1, 1) \quad (6.8.409)$$

とおくと,

$$W(2, 1, 1) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \quad (6.8.410a)$$

$$W(1, 2, 1) = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \quad (6.8.410b)$$

$$W(1, 1, 0) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad (6.8.410c)$$

$$W(1, 0, -1) = \alpha_1 + \alpha_2, \quad (6.8.410d)$$

$$W(1, 1, 2) = \alpha_2 + 2\alpha_3, \quad (6.8.410e)$$

$$W(1, 0, 1) = \alpha_2 + \alpha_3, \quad (6.8.410f)$$

$$W(0, 1, -1) = \alpha_1, \quad (6.8.410g)$$

$$W(1, -1, 0) = \alpha_2, \quad (6.8.410h)$$

$$W(0, 1, 1) = \alpha_3 \quad (6.8.410i)$$

より, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ がルートの基本系となる.

Cartan 部分代数 \mathcal{H} の Cartan 計量は, $x_1 h'_1 + x_2 h'_2 + x_3 h'_3$ に対して,

$$2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) \quad (6.8.411)$$

に比例する. これより,

$$(\alpha_1, \alpha_1) = (\alpha_2, \alpha_2) = 2, \quad (\alpha_3, \alpha_3) = 1, \quad (6.8.412a)$$

$$(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_2, \alpha_3) = -1, \quad (\alpha_1, \alpha_3) = 0. \quad (6.8.412b)$$

よって, G の Lie 代数は $\mathfrak{so}(7)$ に同型.

最後に, 表現 $G \subset \mathrm{SO}(8)$ のウェイト系は

$$(1, 1, 1) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3), \quad (6.8.413)$$

$$(1, 0, 0) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3), \quad (6.8.414)$$

$$(0, 1, 0) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3), \quad (6.8.415)$$

$$(0, 0, 1) = \frac{1}{2}(-\alpha_1 + \alpha_3) \quad (6.8.416)$$

およびこれらの -1 倍となるので, $G \supset \mathbb{C}^8$ は $\mathrm{Spin}(7)$ のスピノール表現 8_s と一致する.

6.8.5.3 双対関係式

11D での双対と 8D での双対に関して

$$*(\theta^{+-9} \wedge \hat{\omega}_p) = (-1)^p *_8 \hat{\omega}_p, \quad (6.8.417a)$$

$$*(\theta^{+-} \wedge \hat{\omega}_p) = \theta^9 \wedge *_8 \hat{\omega}_p, \quad (6.8.417b)$$

$$*(\theta^{+9} \wedge \hat{\omega}_p) = -\theta^+ \wedge *_8 \hat{\omega}_p, \quad (6.8.417c)$$

$$*(\theta^{-9} \wedge \hat{\omega}_p) = \theta^- \wedge *_8 \hat{\omega}_p, \quad (6.8.417d)$$

$$*(\theta^+ \wedge \hat{\omega}_p) = (-1)^p \theta^{+9} \wedge *_8 \hat{\omega}_p, \quad (6.8.417e)$$

$$*(\theta^- \wedge \hat{\omega}_p) = (-1)^{p+1} \theta^{+9} \wedge *_8 \hat{\omega}_p, \quad (6.8.417f)$$

$$*(\theta^9 \wedge \hat{\omega}_p) = (-1)^p \theta^{+-} \wedge *_8 \hat{\omega}_p. \quad (6.8.417g)$$

8D での双対に関して,

$$[\phi, \alpha_p]_1 = (-1)^p [\phi, *_8 \alpha_p]_{5-p}, \quad *[\phi, \alpha_p]_1 = [\phi, \alpha_p]_p \quad (6.8.418a)$$

$$[\phi, \alpha_p]_2 = [\phi, *_8 \alpha_p]_{6-p}. \quad (6.8.418b)$$

6.8.5.4 Spin(7) 分解

1 形式 α_1 ($\mathbf{8}_s$) は既約で,

$$\phi \cdot (\phi \cdot \alpha_1) = -7\alpha_1. \quad (6.8.419)$$

2 形式 α_2 は可約で

$$[\mathbf{8}_s, \mathbf{8}_s] = \mathbf{7} + \mathbf{21}; \quad (6.8.420a)$$

$$\alpha_2^{\mathbf{7}} = \frac{1}{4}(\alpha_2 - \phi \cdot \alpha_2), \quad \alpha_2^{\mathbf{21}} = \frac{3}{4} \left(\alpha_2 + \frac{1}{3} \phi \cdot \alpha_2 \right), \quad (6.8.420b)$$

$$\alpha_2 = \alpha_2^{\mathbf{21}} + \alpha_2^{\mathbf{7}}, \quad \phi \cdot \alpha_2 = \alpha_2^{\mathbf{21}} - 3\alpha_2^{\mathbf{7}}. \quad (6.8.420c)$$

特に,

$$\phi \cdot (\phi \cdot \alpha_2) = 3\alpha_2 - 2\phi \cdot \alpha_2. \quad (6.8.421)$$

これと関係式

$$[\phi, \phi \cdot \alpha_2]_1 = -3[\phi, \alpha_2]_1 \quad (6.8.422)$$

より,

$$[\phi, \alpha_2^{\mathbf{21}}]_1 = 0, \quad (6.8.423a)$$

$$\alpha^{\mathbf{7}} = -\frac{1}{24}[\phi, [\phi, \alpha]_1]_3. \quad (6.8.423b)$$

3 形式 α_3 も可約で

$$[\mathbf{8}_s, \mathbf{8}_s, \mathbf{8}_s] = \mathbf{8} + \mathbf{48}; \quad (6.8.424a)$$

$$\alpha_3^{\mathbf{8}} = \frac{1}{7}(\alpha_3 - [\phi, \alpha_3]_2), \quad \alpha_3^{48} = \frac{6}{7} \left(\alpha_3 + \frac{1}{6}[\phi, \alpha_3]_2 \right) \quad (6.8.424b)$$

$$\alpha_3 = \alpha_3^{48} + \alpha_3^{\mathbf{8}}, \quad [\phi, \alpha_3]_2 = \alpha_3^{48} - 6\alpha_3^{\mathbf{8}}, \quad (6.8.424c)$$

$$\phi \cdot \alpha_3 = \phi \cdot \alpha_3^{\mathbf{8}}, \quad \phi \cdot (\phi \cdot \alpha_3) = -7\alpha_3^{\mathbf{8}}. \quad (6.8.424d)$$

これらのうち, $\alpha_3^{\mathbf{8}}$ は,

$$V = \phi \cdot \alpha_3^{\mathbf{8}} \quad (6.8.425)$$

とおくとき, 次の関係式を満たす:

$$\alpha_3^{\mathbf{8}} = -\frac{1}{7}V \cdot \phi, \quad (6.8.426a)$$

$$[\phi_i, \alpha_3^{\mathbf{8}}]_1 = \frac{6}{7}(-\theta_{(i} \wedge \phi_j) + \delta_{ij}\phi) V^j, \quad (6.8.426b)$$

$$[\phi, \alpha_3^{\mathbf{8}}]_1 = -\frac{6}{7}\phi \wedge V, \quad (6.8.426c)$$

$$[\phi, I_i \alpha_3^{\mathbf{8}}]_1 = \frac{6}{7}\theta_{[i} \wedge \phi_j] V^j. \quad (6.8.426d)$$

4 形式 α_4 も可約

$$[\mathbf{8}_s, \mathbf{8}_s, \mathbf{8}_s, \mathbf{8}_s] = \mathbf{1} + \mathbf{7} + \mathbf{27} + \mathbf{35}; \quad (6.8.427)$$

$$\alpha_4 = \alpha_4^{\mathbf{1}} + \alpha_4^{\mathbf{7}} + \alpha_4^{27} + \alpha_4^{35}, \quad (6.8.428)$$

$$(6.8.429)$$

で

$$\alpha_4^{\mathbf{1}} = \frac{1}{14}(\phi \cdot \alpha_4)\phi, \quad (6.8.430a)$$

$$\begin{aligned} \alpha_4^{\mathbf{7}} &= -\frac{1}{32}[\phi, [\phi, \alpha_4]_3]_1 \\ &= -\frac{1}{8}(1 + *8)\alpha_4 + \frac{1}{8}\phi(\phi \cdot \alpha_4) + \frac{1}{8}[\phi, \alpha_4]_2 - \frac{1}{16}[\phi, [\phi, \alpha_4]_3]_1 \end{aligned} \quad (6.8.430b)$$

$$\begin{aligned} \alpha_4^{27} &= \frac{3}{7}\phi(\phi \cdot \alpha_4) - \frac{3}{32}[\phi, [\phi, \alpha_4]_3]_1 + \frac{1}{2}[\phi, \alpha_4]_2 \\ &= \frac{5}{8}(1 + *8)\alpha_4 - \frac{11}{56}\phi(\phi \cdot \alpha_4) - \frac{1}{8}[\phi, \alpha_4]_2 + \frac{1}{16}[\phi, [\phi, \alpha_4]_3]_1 \end{aligned} \quad (6.8.430c)$$

$$\alpha_4^{35} = \frac{1}{2}(1 - *8)\alpha_4. \quad (6.8.430d)$$

これらは次の関係式を満たす.

$$\alpha_4^1 + \alpha_4^7 + \alpha_4^{27} = \frac{1}{2}(1 + *_8)\alpha_4, \quad (6.8.431a)$$

$$(1 + *_8)\alpha_4 = \phi(\phi \cdot \alpha_4) + [\phi, \alpha_4]_2 - \frac{1}{4}[\phi, [\phi, \alpha_4]_3]_1 \quad (6.8.431b)$$

射影作用素 $\phi \cdot \alpha_4 = \phi \cdot \alpha_4^1; \quad \phi \cdot \alpha^7 = \phi \cdot \alpha^{27} = \phi \cdot \alpha^{35} = 0, \quad (6.8.432a)$

$$[\phi, \alpha_4]_3 = [\phi, \alpha_4^7]_3; \quad [\phi, \alpha_4^1]_3 = [\phi, \alpha_4^{27}]_3 = [\phi, \alpha_4^{35}]_3 = 0, \quad (6.8.432b)$$

$$[\phi, \alpha_4]_2 = -12\alpha_4^1 - 6\alpha_4^7 + 2\alpha_4^{27}, \quad (6.8.432c)$$

$$[\phi, \alpha_4]_k = *_8[\phi, \alpha_4]_{4-k}, \quad (6.8.432d)$$

$$\phi \cdot [\phi, \alpha_4]_3 = -3[\phi, \alpha_4]_3, \quad (6.8.432e)$$

$$[\phi, [\phi, \alpha_4]_2]_3 = -6[\phi, \alpha_4]_3, \quad (6.8.432f)$$

$$(6.8.432g)$$

$$2[\phi_i, \alpha_4]_k = (-1)^k I_i[\phi, \alpha_4]_k - \theta_i \wedge [\phi, \alpha_4]_{k+1} \text{ for } *_8\alpha_4 = 0, \quad (6.8.433a)$$

$$2[\phi, I^i \alpha_4]_k = I_i[\phi, \alpha_4]_k + (-1)^k \theta_i \wedge [\phi, \alpha_4]_{k+1} \text{ for } *_8\alpha_4 = 0, \quad (6.8.433b)$$

$$\phi_i \cdot (1 + *_8)\alpha_4 = -I_i[\phi, \alpha_4^7]_3 - (\phi \cdot \alpha_4^1)\theta_i, \quad (6.8.433c)$$

$$\phi \cdot I_i(1 + *_8)\alpha_4 = I_i[\phi, \alpha_4^7]_3 - (\phi \cdot \alpha_4^1)\theta_i, \quad (6.8.433d)$$

$$\phi^j(\phi_j \cdot I_i \alpha_4) = -I_i \alpha_4 + [\phi, I_i \alpha_4]_2, \quad (6.8.433e)$$

$$\phi_{[i} \cdot (I_j] \alpha_4) = \phi_{[i} \cdot (I_j] \alpha_4^7), \quad (6.8.433f)$$

$$[\phi_i, \phi]_2 = -6\phi_i, \quad (6.8.433g)$$

$$[\phi_i, \alpha_4^7]_2 = -3I_i \alpha_4^7 - \frac{1}{2}\theta^i \wedge [\phi, \alpha_4^7]_3, \quad (6.8.433h)$$

$$[\phi, I_i \alpha_4^7]_2 = -3I_i \alpha_4^7 + \frac{1}{2}\theta^i \wedge [\phi, \alpha_4^7]_3, \quad (6.8.433i)$$

$$[\phi_i, \alpha_4^{27}]_2 = [\phi, I_i \alpha_4^{27}]_2 = I_i \alpha_4^{27}, \quad (6.8.433j)$$

$$\phi_i \cdot [\phi, I_j \alpha_4]_2 = -6\phi_i \cdot I_j \alpha_4, \quad (6.8.433k)$$

$$[\phi_i, \alpha_4]_k = (-1)^k *_8[\phi_i, *_8\alpha_4]_{3-k}. \quad (6.8.433l)$$

6.8.6 超対称解の分類 II. 光的 Killing(GGP 形式)

Ref: Gauntlett JP, Gutowski JB, Pakis S(2003) JHEP0312:049

6.8.6.1 光的基底

$$ds^2 = 2\theta^+\theta^- + \sum_{I=1}^9 (\theta^I)^2, \quad (6.8.434)$$

$$\theta^\pm(e_\pm) = 1, \quad \theta^\pm(e_\mp) = \theta^\pm(e_I) = \theta^I(e_\pm) = 0, \quad \theta^I(e_J) = \delta^I_J, \quad (6.8.435)$$

$$e_- = K^*, \quad \theta^+ = K_*. \quad (6.8.436)$$

向き付けは

$$\epsilon_{+-12\dots 89} = -1, \quad \epsilon^{+-12\dots 89} = 1, \quad (6.8.437)$$

$$\text{Vol} = \theta^{-+12\dots 89}. \quad (6.8.438)$$

6.8.6.2 代数的関係式

$$K^2 = \Omega^2 = 0, \quad (6.8.439a)$$

$$\Omega_M{}^P \Omega_{PN} = -K_M K_N, \quad (6.8.439b)$$

$$I_M \Sigma \cdot I_N \Sigma = 14 K_M K_N, \quad (6.8.439c)$$

$$I_K \Omega = 0, \quad (6.8.439d)$$

$$I_K \Sigma = \frac{1}{2} \Omega \wedge \Omega, \quad (6.8.439e)$$

$$(I_K * \Sigma)_{M_1 \dots M_5} = \hat{\Omega}_{[M_1}{}^P \Sigma_{M_2 \dots M_5]P}, \quad (6.8.439f)$$

$$K \wedge \Omega \wedge \Omega \wedge \Omega = 0. \quad (6.8.439g)$$

$I_K \Omega = 0$ より

$$\Omega = \theta^+ \wedge \alpha + \beta. \quad (6.8.440)$$

ここで, α, β は θ^I のみで書かれる 1 形式および 2 形式. このとき,

$$\Omega_M{}^P \Omega_{PN} = -K_M K_N \alpha^2 + 2K_{(M} (\alpha \cdot \beta)_{N)} + \beta_M{}^P \beta_{PN} \quad (6.8.441)$$

となるので, 上記の代数的関係式より,

$$\alpha \cdot \alpha = 1, \quad (6.8.442a)$$

$$\alpha \cdot \beta = 0, \quad (6.8.442b)$$

$$\beta_M^P \beta_{PN} = 0. \quad (6.8.442c)$$

よって, $\beta = 0$ で, θ^I を適当に選べば,

$$\Omega = \theta^+ \wedge \theta^9. \quad (6.8.443)$$

これより,

$$\Omega \wedge \Omega = 0. \quad (6.8.444)$$

したがって, $I_K \Sigma = 0$ となるので, Ω と同様にして,

$$\Sigma = \theta^+ \wedge \phi. \quad (6.8.445)$$

6.8.6.3 接続係数と F の決定:

i) dK_* よりの情報: まず, (6.8.365b)

$$d\theta^+ = \frac{2}{3} I_\Omega F + \frac{1}{3} I_\Sigma *F, \quad (6.8.446)$$

において, (6.8.443) より

$$I_\Omega F = I_9 I_K F = \frac{1}{2} F_{-9ij} \theta^{ij} + F_{+-9i} \theta^{+i}. \quad (6.8.447)$$

(6.8.445) より,

$$\begin{aligned} I_\Sigma *F &= *(\Sigma \wedge F) \\ &= \frac{1}{2} F_{-9ij} *(\theta^{+-9ij} \wedge \phi) - \frac{1}{3!} F_{-ijk} *(\theta^{+-ijk} \wedge \phi) \\ &\quad + \frac{1}{3!} F_{9ijk} *(\theta^{+9ijk} \wedge \phi) + \frac{1}{4!} F_{ijkl} *(\theta^{+ijkl} \wedge \phi). \end{aligned} \quad (6.8.448)$$

ここで,

$$*(\theta^{+-9ij} \wedge \phi) = \frac{1}{2} (*_8 \phi)^{ij}{}_{kl} \theta^{kl} = \frac{1}{2} \phi^{ij}{}_{kl} \theta^{kl}, \quad (6.8.449a)$$

$$*(\theta^{+-ijk} \wedge \phi) = (*_8 \phi)^{ijk}{}_l \theta^l = \phi^{ijk}{}_l \theta^l, \quad (6.8.449b)$$

$$*(\theta^{+9ijk} \wedge \phi) = (*_8 \phi)^{ijk}{}_l \theta^{+l} = \phi^{ijk}{}_l \theta^{+l}, \quad (6.8.449c)$$

$$*(\theta^{+ijkl} \wedge \phi) = (*_8 \phi)^{ijkl} \theta^{+9} = \phi^{ijkl} \theta^{+9}. \quad (6.8.449d)$$

よって,

$$I_{\Sigma} * F = \frac{1}{4} F_{-9ij} \phi_{kl}^{ij} \theta^{kl} - \frac{1}{3!} F_{-ijk} \phi_l^{ijk} \theta^{l9} \\ + \frac{1}{3!} F_{9ijk} \phi_l^{ijk} \theta^{+l} + \frac{1}{4!} F_{ijkl} \phi^{ijkl} \theta^{+9}. \quad (6.8.450)$$

以上より,

$$d\theta^+ = F_{-9}^{21} + \frac{1}{3} F_{-9}^7 - \left(\frac{2}{3} F_{+-9}^8 + \frac{1}{3} F_9^8 \cdot \phi \right) \wedge \theta^+ - \frac{1}{3} F_-^8 \cdot \phi. \quad (6.8.451)$$

ii) Killing 方程式よりの情報 : (6.8.365b) と

$$\nabla_{\mu} \theta^+ = \omega_{+-\mu} \theta^+ - \omega_{-9\mu} \theta^9 - \omega_{-i\mu} \theta^i \quad (6.8.452)$$

より,

$$\omega_{-(\alpha\beta)} = 0. \quad (6.8.453)$$

iii) $d\Omega$ よりの情報 : 次に,

$$I_K F = d\Omega = d\theta^+ \wedge \theta^9 - \theta^+ \wedge d\theta^9 \quad (6.8.454)$$

より,

$$\theta^+ \wedge d\theta^9 = -\frac{2}{3} F_{-9}^7 - F_- + \frac{1}{3} (F_{+-9}^8 - F_9^8 \cdot \phi) \wedge \theta^{+9} + F_{+-} \wedge \theta^+ \\ = +\omega^9_- \theta^{+-} + \omega^9_i \theta^{+i}. \quad (6.8.455)$$

これより,

$$F_- = 0, \quad F_{-9}^7 = 0. \quad (6.8.456)$$

および

$$\omega_{9-9} = 0, \quad \omega_{9-i} = \omega_{9i-} = 0, \\ \omega_{9i9} = \frac{1}{3} (F_{+-i9} + (F_9^8 \cdot \phi)_i), \quad (6.8.457)$$

$$\omega_{9[ij]} = \frac{1}{2} F_{+-ij} \quad (6.8.458)$$

を得る.

これらと, (6.8.451), (6.8.453) より,

$$\omega_{+--} = \omega_{-i-} = \omega_{-9-} = \omega_{-i9} = 0, \quad (6.8.459a)$$

$$\omega_{+-9} = \omega_{-9+} = -\frac{1}{3!}F^{\mathbf{1}} \cdot \phi, \quad (6.8.459b)$$

$$\omega_{+-i} = \omega_{-i+} = \frac{1}{3} \left(F_{+-i9} - \frac{1}{2}(F_9^{\mathbf{8}} \cdot \phi)_i \right), \quad (6.8.459c)$$

$$\omega_{-ij} = \frac{1}{2}F_{-9ij}^{\mathbf{21}}. \quad (6.8.459d)$$

iv) $\nabla\Omega$ よりの情報 (6.8.366a)

$$\begin{aligned} \nabla_X\Omega &= \frac{1}{6}X \wedge F \cdot \Sigma + \frac{1}{3}(I_X F) \cdot \Sigma \\ &\quad - \frac{1}{6}[I_X \Sigma, F]_3 + \frac{1}{3}I_X I_K F, \end{aligned} \quad (6.8.460)$$

において,

$$F \cdot \Sigma = (\phi \cdot F^{\mathbf{1}})\theta^+ + F_-^{\mathbf{1}} \cdot \phi, \quad (6.8.461a)$$

$$(I_X F) \cdot \Sigma = -\theta^+ \wedge ((I_X F) \cdot \phi) + (I_K I_X F) \cdot \phi, \quad (6.8.461b)$$

$$[I_X \Sigma, F]_3 = X^+[\phi, F]_3 + \theta^+ \wedge (I_X \phi \cdot F) - [I_X \phi, I_K F]_3. \quad (6.8.461c)$$

よって,

$$\begin{aligned} \nabla_+\Omega &= -\frac{1}{6}(\phi \cdot F^{\mathbf{1}})\theta^{+-} - \frac{1}{2}\theta^+ \wedge (F_+^{\mathbf{8}} \cdot \phi) + \frac{1}{3}F_{+-9}^{\mathbf{8}} \wedge \theta^9 + \frac{1}{6}(F^{\mathbf{8}} \cdot \phi) \wedge \theta^9 \\ &\quad - \frac{4}{3}F_{+-}^{\mathbf{7}} - \frac{1}{6}[\phi, \hat{F}]_3, \end{aligned} \quad (6.8.462a)$$

$$\nabla_-\Omega = 0, \quad (6.8.462b)$$

$$\nabla_9\Omega = -\frac{1}{6}(\phi \cdot F^{\mathbf{1}})\theta^{+9} + \frac{1}{3}\theta^+ \wedge (F_{+-9}^{\mathbf{8}} - F_9^{\mathbf{8}} \cdot \phi), \quad (6.8.462c)$$

$$\begin{aligned} \nabla_i\Omega &= \left(\frac{1}{6}(\phi \cdot F_9^{\mathbf{8}})_i - \frac{1}{3}F_{+-9i}^{\mathbf{8}} \right) \theta^{+9} + \left(\frac{1}{6}(F_{-9} \cdot \phi)_{ij} + \frac{1}{3}F_{-9ij} \right) \theta^{j9} - \frac{1}{6}(F^{\mathbf{1}} \cdot \phi)\theta^{+i} \\ &\quad + \left(\frac{1}{3}(I_i F \cdot I_j \phi) + \frac{1}{6}(I_j F \cdot I_i \phi) + \frac{1}{6}(\phi \cdot F_{+-})_{ij} + \frac{1}{3}F_{+-ij} \right) \theta^{+j}. \end{aligned} \quad (6.8.462d)$$

これと

$$\begin{aligned} \nabla\Omega &= \nabla\theta^+ \wedge \theta^9 + \theta^+ \wedge \nabla\theta^9 \\ &= \omega_{-9}\theta^{+-} + \omega_{+-}\theta^{+9} - \omega_{9i}\theta^{+i} - \omega_{-i}\theta^{i9} \end{aligned} \quad (6.8.463)$$

を比較して，新たな情報として制限

$$F_{+-}^7 = -\frac{1}{8}[\phi, \hat{F}]_3, \quad (6.8.464)$$

および

$$\omega_{-i+} = \frac{1}{3}F_{+-i9} + \frac{1}{6}(F_9^8 \cdot \phi)_i, \quad (6.8.465a)$$

$$\omega_{9ij} = \frac{1}{6}\phi \cdot F^1 \delta_{ij} - \frac{1}{2}I_{(i}F_{j)}\phi + \frac{1}{2}F_{+-ij} \quad (6.8.465b)$$

を得る．

v) $\nabla\Sigma$ よりの情報 $*\Sigma$ が

$$*\Sigma = \theta^+ \wedge \theta^9 \wedge \phi \quad (6.8.466)$$

で与えられる．また， $\nabla\Sigma$ は接続形式を用いて

$$\begin{aligned} \nabla_X \Sigma = & \theta^{+-} \wedge \omega_{-i}(X)\phi_i + \theta^{+9} \wedge \omega_{9i}(X)\phi_i \\ & + \theta^+ \wedge (\omega_{+-}(X)\phi + \omega_{ij}(X)\theta^i \wedge \phi^j) \\ & + \theta^9 \wedge \omega_{9-}(X)\phi - \omega_{-i}\theta^i \wedge \phi \end{aligned} \quad (6.8.467)$$

と表される．

まず，

$$\nabla_- \Sigma = \frac{1}{6}\theta^+ \wedge [\phi, \hat{F}_{-9}]_1 \quad (6.8.468)$$

および

$$[\phi, \hat{F}_{-9}]_1 = [\phi, \hat{F}_{-9}^7]_1 = 0 \quad (6.8.469)$$

より，

$$\hat{\omega}_-^7 = 0. \quad (6.8.470)$$

次に,

$$\begin{aligned}
\nabla_+ \Sigma = & \theta^{+-9} \wedge \left(\frac{4}{3} \hat{F}_{+-}^7 + \frac{1}{6} [\phi, \hat{F}^7]_3 \right) \\
& + \theta^{+-} \wedge \left(-\frac{1}{3} \phi \cdot \hat{F}_{+-9} + \frac{7}{6} \hat{F}_9^8 \right) \\
& - \frac{7}{2} \theta^{+9} \wedge \hat{F}_+^8 \\
& + \frac{1}{2} \theta^+ \wedge [\phi, \hat{F}_{+9}^7]_1 \\
& + \theta^9 \wedge \left(-\frac{1}{3} [\phi, \hat{F}_{+-}^7]_1 + \frac{1}{6} (1 + *_8) \hat{F} - \frac{1}{6} [\phi, \hat{F}]_2 \right) \\
& + \frac{1}{3} \phi \wedge \hat{F}_{+-9} - \frac{1}{6} *_8 \hat{F}_9 - \frac{1}{6} [\phi, \hat{F}_9]_1
\end{aligned} \tag{6.8.471}$$

より,

$$\hat{\omega}_+^7 = \frac{1}{2} \hat{F}_{+9}^7 \tag{6.8.472}$$

が得られる.

次に,

$$\begin{aligned}
\nabla_9 \Sigma = & -\theta^{+9} \wedge \left(\frac{7}{3} \hat{F}_9^8 + \frac{1}{3} \phi \cdot \hat{F}_{+-9} \right) \\
& + \frac{1}{3} \theta^9 \wedge [\phi, \hat{F}_{-9}^7]_1 \\
& + \frac{1}{6} \theta^+ \wedge \left(-[\phi, \hat{F}_{+-}^7]_1 - (1 + *_8) \hat{F} + [\phi, \hat{F}]_2 \right)
\end{aligned} \tag{6.8.473}$$

より,

$$\hat{\omega}_9^7 = -\frac{1}{6} \hat{F}_{+-}^7 + \frac{1}{24} [\phi, \hat{F}^7]_3 \tag{6.8.474}$$

が得られる.

最後に,

$$\begin{aligned}
\nabla_i \Sigma = & \theta^{+-} \wedge \left(\frac{2}{3} \theta^i \wedge \hat{F}_{-9}^7 - \frac{1}{3} [\phi, \hat{F}_{-9i}]_1 - \frac{1}{6} [\phi_i, \hat{F}_{-9}]_1 \right) \\
& + \theta^{+9} \wedge \left(+\frac{1}{6} \theta^i \wedge \hat{F}_{+-} - \frac{1}{3} \phi^j \hat{F}_{+-ij} - \frac{1}{6} [\phi_i, \hat{F}_{+-}]_1 - \frac{1}{6} \theta^i \wedge \phi \cdot \hat{F}_{+-} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{3} \hat{F}_i - \frac{1}{6} *_8(\theta^i \wedge \hat{F}) + \frac{1}{3} [\phi, \hat{F}_i]_2 - \frac{1}{6} [\phi_i, \hat{F}]_2 - \frac{1}{6} \theta^i \wedge [\phi, \hat{F}]_3 \right) \\
& + \theta^+ \wedge \left(-\frac{1}{3} F_{+-9i} \phi + \frac{1}{6} \phi_i \wedge \hat{F}_{+-9} + \frac{1}{6} \theta^i \wedge \phi \cdot \hat{F}_{+-9} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{6} (1 + *_8) \theta^i \wedge \hat{F}_9 - \frac{1}{6} \theta^i \wedge [\phi, \hat{F}_9]_2 - \frac{1}{3} [\phi, \hat{F}_{9i}]_1 - \frac{1}{6} [\phi_i, \hat{F}_9]_1 \right) \\
& - \frac{1}{6} *_8(\theta^i \wedge \hat{F}_{-9}) + \frac{1}{3} \hat{F}_{-9i} \wedge \phi - \frac{1}{6} \phi_i \wedge \hat{F}_{-9} - \frac{1}{6} \theta^i \wedge [\phi, \hat{F}_{-9}] \quad [6.8.475]
\end{aligned}$$

より,

$$\hat{\omega}_i^7 = (1 - \phi \cdot) \left(\frac{1}{24} \theta_i \wedge \hat{F}_{+-9} + \frac{1}{84} \theta_i \wedge \phi \cdot \hat{F}_9^8 - \frac{1}{8} \hat{F}_{9i}^{48} \right) \quad (6.8.476)$$

が得られる. これは GGP の結果

$$\hat{\omega}_i^7 = (1 - \phi \cdot) \frac{1}{24} \theta_i \wedge \hat{F}_{+-9} - \frac{1}{24} \left(\theta_i \wedge \phi \cdot \hat{F}_9 - [\phi_i, \hat{F}_9]_2 \right) - \frac{1}{12} (1 - \phi \cdot) F_{9i} \quad (6.8.477)$$

と一致することを示すことができる. また,

$$\hat{\omega}^7 := \frac{1}{3} \omega_i^7 \wedge \theta^i = \frac{1}{24} \phi \cdot \hat{F}_{+-9} - \frac{1}{12} \hat{F}_9 \quad (6.8.478)$$

が成り立つ.

まとめ 以上の結果は次のようにまとめられる :

I) F への制限

$$\hat{F}_- = 0, \quad \hat{F}_{-9}^7 = 0, \quad \hat{F}_{+-}^7 = -\frac{1}{8} [\phi, \hat{F}^7]_3. \quad (6.8.479)$$

II) ω と F の関係

$$\omega_{+-} = -\frac{1}{6}\phi \cdot \hat{F}^1\theta^9 - \frac{1}{3}\hat{F}_{+-9} - \frac{1}{6}\phi \cdot \hat{F}_9^8, \quad (6.8.480a)$$

$$\omega_{-9} = -\frac{1}{6}\phi \cdot \hat{F}^1\theta^+, \quad (6.8.480b)$$

$$\omega_{-i} = \left(-\frac{1}{3}F_{+-9i} + \frac{1}{6}\phi_i \cdot \hat{F}_9^8\right)\theta^+ + \frac{1}{2}\hat{F}_{-9i}^{21}, \quad (6.8.480c)$$

$$\begin{aligned} \omega_{9i} = & -\frac{1}{2}\phi_i \cdot \hat{F}_+^8\theta^+ - \frac{1}{3}\left(\phi_i \cdot \hat{F}_9^8 + F_{+-9i}\right)\theta^9 \\ & + \frac{1}{6}\phi \cdot \hat{F}^1\theta_i - \frac{1}{2}\hat{F}_{(i}^{1+35} \cdot \phi_j)\theta^j + \frac{1}{2}\hat{F}_{+-i}^{7+21}, \end{aligned} \quad (6.8.480d)$$

$$\hat{\omega}_-^7 = 0, \quad (6.8.480e)$$

$$\hat{\omega}_+^7 = \frac{1}{2}\hat{F}_{+9}^7, \quad (6.8.480f)$$

$$\hat{\omega}_9^7 = -\frac{1}{6}\hat{F}_{+-}^7 + \frac{1}{24}[\phi, \hat{F}^7]_3 = -\frac{1}{2}\hat{F}_{+-}^7, \quad (6.8.480g)$$

$$\hat{\omega}_i^7 = (1 - \phi \cdot) \left(\frac{1}{24}\theta_i \wedge \hat{F}_{+-9} + \frac{1}{84}\theta_i \wedge \phi \cdot \hat{F}_9^8 - \frac{1}{8}\hat{F}_{9i}^{48} \right). \quad (6.8.480h)$$

これより, ω_{abc} は次の関係式を満たす :

$$\omega_{-ab} = -\omega_{-ba}, \quad (6.8.481a)$$

$$\omega_{-[ij]}^7 = 0, \quad (6.8.481b)$$

$$\omega_{-9i} = 0, \quad (6.8.481c)$$

$$\omega_{9i-} = 0, \quad (6.8.481d)$$

$$\hat{\omega}_-^7 = 0, \quad (6.8.481e)$$

$$\omega_{-9+} = \frac{1}{4}\omega_{9i}{}^i, \quad (6.8.481f)$$

$$\omega_{ij9}^7 = -\omega_{9[ij]}^7, \quad (6.8.481g)$$

$$\omega_{9i9} + 6\omega_{+-i} = -8\phi_i \cdot \hat{\omega}^7. \quad (6.8.481h)$$

したがって, 接続係数のうち

$$\omega_{+9a}, \quad \omega_{+ia}, \quad \hat{\omega}_a^{21} \quad (6.8.482)$$

は制限を受けない.

また, F は ω_{ab} を用いて次のように表される :

$$F_{+-9i} = -2\omega_{+-i} - \omega_{9i9}, \quad (6.8.483a)$$

$$F_{+-ij} = 2\omega_{9[ij]}, \quad (6.8.483b)$$

$$F_{+9ij}^7 = 2\omega_{ij+}^7, \quad (6.8.483c)$$

$$F_{-9ij}^7 = 0, \quad (6.8.483d)$$

$$F_{-9ij}^{21} = 2\omega_{-ij}^{21}, \quad (6.8.483e)$$

$$\hat{F}_+^8 = -\frac{2}{7}\phi \cdot \omega_{+9}, \quad (6.8.483f)$$

$$\hat{F}_- = 0, \quad (6.8.483g)$$

$$\hat{F}_9^8 = -\frac{2}{7}\phi^j (\omega_{9j9} - \omega_{+-j}), \quad (6.8.483h)$$

$$F_{9ijk}^{48} = -12 (\omega_{[ijk]}^7)^{48}, \quad (6.8.483i)$$

$$\hat{F}^1 = -\frac{3}{7}\omega_{-9+}\phi, \quad (6.8.483j)$$

$$\hat{F}^7 = \frac{1}{2}[\phi, \hat{\omega}_9^7]_1, \quad (6.8.483k)$$

$$\hat{F}^{35} = \frac{1}{2}[\phi, \hat{\omega}_9^{35}]_1. \quad (6.8.483l)$$

F のうち

$$\hat{F}_{+9}^{21}, \quad \hat{F}_+^{48}, \quad \hat{F}^{27} \quad (6.8.484)$$

は任意.

Killing スピノールの存在 (6.8.385) を用いると, (6.8.376b) を満たす ϵ に対して, (6.8.479) および (6.8.480) が成り立てば, (6.8.357) は

$$d\epsilon = 0 \quad (6.8.485)$$

となる.

6.8.6.4 局所 $(\text{Spin}(7) \times \mathbb{R}^8) \times \mathbb{R}$ 変換

一般に, 光的基底の局所 Lorentz 変換

$$e'_a = e_b \Lambda^b_a, \quad \theta^a = \Lambda^a_b \theta'^b \quad (6.8.486)$$

に対して, 接続形式は

$$\omega'_{ab} = \omega_{cd} \Lambda^c_a \Lambda^d_b + (\Lambda^{-1} d\Lambda)_{ab} \quad (6.8.487)$$

と変換する。また，4形式フラックスは

$$F'_{abcd} = F_{efgh} \Lambda^e{}_a \Lambda^f{}_b \Lambda^g{}_c \Lambda^h{}_d. \quad (6.8.488)$$

特に，標準光的スピノールの不変群 $G = (\text{Spin}(7) \times \mathbb{R}^8) \times \mathbb{R} \ni (Q, p, \alpha)$ の作用は

$$e'_- = e_-, \quad (6.8.489a)$$

$$e'_+ = e_+ - \frac{1}{2}(\alpha^2 + p^2)e_- - \alpha e_9 - p^i e_i, \quad (6.8.489b)$$

$$e'_9 = e_9 + \alpha e_-, \quad (6.8.489c)$$

$$e'_i = Q_i{}^j (e_j + p_j e_-). \quad (6.8.489d)$$

対応する行列 Λ は，基底 (e_-, e_+, e_9, e_i) に関して（順序に注意）

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha^2+p^2}{2} & \alpha & p^T Q^T \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & -p & 0 & Q^T \end{pmatrix}, \quad (6.8.490a)$$

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha^2+p^2}{2} & -\alpha & p^T \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & Qp & 0 & Q \end{pmatrix}, \quad (6.8.490b)$$

$$\Lambda^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha^2+p^2}{2} & 1 & -\alpha & -p^T \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ Qp & 0 & 0 & Q \end{pmatrix}. \quad (6.8.490c)$$

対応する群の積演算は

$$(Q_1, p_1, \alpha_1)(Q_2, p_2, \alpha_2) = (Q_2 Q_1, p_1 + Q_1^T p_2, \alpha_1 + \alpha_2). \quad (6.8.491)$$

これより,

$$\Lambda^{-1}d\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d\alpha & (dp^T)Q^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -Q dp & 0 & Q dQ^T \end{pmatrix}, \quad (6.8.492a)$$

$$((\Lambda^{-1}d\Lambda)_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d\alpha & (dp^T)Q^T \\ 0 & -d\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -Q dp & 0 & Q dQ^T \end{pmatrix}. \quad (6.8.492b)$$

よって,

$$\omega'_{+-} = \omega_{+-} + \alpha\omega_{-9} + p^j\omega_{-j}, \quad (6.8.493a)$$

$$\omega'_{-9} = \omega_{-9}, \quad (6.8.493b)$$

$$\omega'_{-i} = Q_i^j\omega_{-j}, \quad (6.8.493c)$$

$$\omega'_{9i} = Q_i^j(\omega_{9i} + \alpha\omega_{-j} - p_j\omega_{-9}), \quad (6.8.493d)$$

$$\omega'_{ij}{}^7 = Q_i^k Q_j^l (\omega_{kl} - 2p_{[k}\omega_{l]-})^7, \quad (6.8.493e)$$

$$\omega'_{ij}{}^{21} = Q_i^k Q_j^l (\omega_{kl} - 2p_{[k}\omega_{l]-})^{21} + (QdQ^T)_{ij}{}^{21}, \quad (6.8.493f)$$

$$\omega'_{+9} = \omega_{+9} + \alpha\omega_{+-} + \frac{\alpha^2 - p^2}{2}\omega_{-9} + p^j(\alpha\omega_{-j} + \omega_{9j}) + d\alpha, \quad (6.8.493g)$$

$$\begin{aligned} \omega'_{+i} &= Q_i^j(\omega_{+j} - \alpha\omega_{9j} + \omega_{jk}p^k) + \left((Qp)_i p^j - \frac{\alpha^2 + p^2}{2} \right) \omega_{-j} \\ &\quad + (Qp)_i(\omega_{+-} + \alpha\omega_{-9}) + ((dp^T)Q^T)_i. \end{aligned} \quad (6.8.493h)$$

$\omega_{+-}, \omega_{-9}, \omega_{9i}, \hat{\omega}^7$ の成分の変換則は

$$\omega'_{+-9} = \omega'_{-9+} = \omega_{+-9} = \omega_{-9+}, \quad (6.8.494a)$$

$$\omega'_{+-i} = \omega'_{-i+} = Q_i^j (\omega_{+-j} - \omega_{-jk} p^k), \quad (6.8.494b)$$

$$\omega'_{-ij} = Q_i^k Q_j^l \omega_{-kl}, \quad (6.8.494c)$$

$$\omega'_{9i+} = Q_i^j [\omega_{9j+} + \alpha_{-j+} - \alpha \omega_{9j9} - (\omega_{9jk} + \alpha \omega_{-jk}) p^k - p_j \omega_{-9+}], \quad (6.8.494d)$$

$$\omega'_{9i9} = Q_i^j \omega_{9j9}, \quad (6.8.494e)$$

$$\omega'_{9ij} = Q_i^k Q_j^l (\omega_{9kl} + \alpha \omega_{-kl}), \quad (6.8.494f)$$

$$\omega'^7_{ij+} = Q_i^k Q_j^l [\omega_{kl+} - \alpha \omega_{kl9} - 2p_{[k} \omega_{l]-+} - (\omega_{klm} - 2p_{[k} \omega_{l]-m}) p^m]^7, \quad (6.8.494g)$$

$$\omega'^7_{ij9} = Q_i^k Q_j^l \omega_{kl9}^7, \quad (6.8.494h)$$

$$\omega'^7_{ijk} = Q_i^l Q_j^m Q_k^n (\omega_{lmn} - 2p_{[l} \omega_{m]-n})^7. \quad (6.8.494i)$$

6.8.6.5 ゲージ固定

Killing ゲージ 最初に, $G = (\text{Spin}(7) \times \mathbb{R}^8) \times \mathbb{R}$ による局所 Lorentz 変換により $[e_-, e_+] = 0$ となるゲージに常に移れることを示す.

まず,

$$[e_-, e_+] = (\omega_{-9+} - \omega_{+9-}) e_9 + (\omega_{-i+} - \omega_{+i-}) e_i \quad (6.8.495)$$

において,

$$\omega'_{+9-} = \omega_{+9-} + \partial_- \alpha, \quad (6.8.496a)$$

$$\omega'_{+i-} = Q_i^j \{ \omega_{+j-} + \omega_{jk-}^{21} p^k + \partial_- p_j \} \quad (6.8.496b)$$

より,

$$\omega'_{+9-} - \omega'_{-9+} = \omega_{+9-} - \omega_{-9+} + \partial_- \alpha, \quad (6.8.497a)$$

$$\omega'_{+i-} - \omega'_{-i+} = Q_i^j \{ \omega_{+i-} - \omega_{-i+} + (\omega_{jk-}^{21} + \omega_{-jk}^{21}) p^k + \alpha \delta_{ij} \} \quad (6.8.497b)$$

よって, 常に

$$\omega_{+9-} - \omega_{-9+} = \omega_{+i-} - \omega_{-i+} = 0 \quad (6.8.498)$$

となるゲージが取れ, そのとき $[e_-, e_+] = 0$.

次に,

$$[e_-, e_9] = (\omega_{+9-} - \omega_{+-9})e_- \quad (6.8.499)$$

において, $\omega_{+-9} = \omega_{-9+}$ より, 上記のゲージ条件では右辺はゼロとなるので, $[e_-, e_9] = 0$.

最後に, 同じゲージ条件のもとで

$$[e_-, e_i] = e_j(\omega_{ji-}^{21} + \omega_{-ji}^{21}). \quad (6.8.500)$$

ここで,

$$\omega'_{ji-}^{21} + \omega'_{-ji}^{21} = Q_i^k Q_j^l [\omega_{kl-}^{21} + \omega_{-kl}^{21} - (Q^T dQ)_{kl}^{21}] \quad (6.8.501)$$

より, Q を適当にとると,

$$\omega_{ij-}^{21} + \omega_{-ij}^{21} = 0 \quad (6.8.502)$$

とでき, このとき $[e_-, e_i] = 0$. また, 以上のゲージ条件下で残るゲージ自由度は

$$\partial_- \alpha = \partial_- p_i = \partial_- Q = 0. \quad (6.8.503)$$

以下, $K = e_- = \partial_v$ となる座標系を取る. このとき,

$$\partial_v e_+ = \partial_v e_9 = \partial_v e_i = 0. \quad (6.8.504)$$

GGP ゲージ 次に, 残留ゲージ自由度を適当に選べば $\{e_9, e_+, e_-\}$ が包含系となることを示す. まず, 上記のゲージ条件下で

$$[e_+, e_9] = 2\omega_{-9+}e_+ + \omega_{+99}e_9 + \omega_{+9+}e_- + (\omega_{+i9} - \omega_{9i+})e_i. \quad (6.8.505)$$

ここで

$$\omega'_{+i9} - \omega'_{9i+} = Q_i^j [\omega_{+i9} - \omega_{9i+} + (\omega_{9jk} + \omega_{jk9})p^k + 2\omega_{+-9}p_j + \partial_9 p_j]. \quad (6.8.506)$$

よって, 残留ゲージ自由度を用いて, ある $v = \text{const}$ 面上で $[e_+, e_9] \cdot e_i = 0$ とできる. このとき, $K = e_-$ が Killing ベクトルであることとゲージ条件より, $\mathcal{L}_K([e_+, e_9] \cdot e_i) = 0$ となるので, 至る所 $[e_+, e_9] \cdot e_i = 0$ となる.

このとき,

$$\partial_- x^I = \partial_+ x^I = \partial_9 x^I = 0 \quad (6.8.507)$$

を満たす独立な関数 x^1, \dots, x^8 が局所的に存在する. さらに, $\{e_+, e_-\}$ も包含系なので, これらの独立な関数 z で

$$\partial_- z = \partial_+ z = 0 \quad (6.8.508)$$

となるものが存在する. さらに, これに加えて

$$\partial_- u = 0, \quad \partial_- v = 1 \quad (6.8.509)$$

となる独立な関数 u, v を取ることができる. このとき,

$$e_- = \partial_v, \quad (6.8.510a)$$

$$e_+ = \alpha_1 \partial_v + \alpha_2 \partial_u, \quad (6.8.510b)$$

$$e_g = \beta_1 \partial_v + \beta_2 \partial_u + \beta_3 \partial_z, \quad (6.8.510c)$$

$$e_i = \gamma_{i1} \partial_v + \gamma_{i2} \partial_u + \gamma_{i3} \partial_z + e_i^I \partial_I \quad (6.8.510d)$$

となる. これより, これらの双対基底は

$$\theta^- = dv + \frac{1}{2} \mathcal{F} du + B dz + \nu_I dx^I, \quad (6.8.511a)$$

$$\theta^+ = L^{-1}(du + A dz + \lambda_I dx^I), \quad (6.8.511b)$$

$$\theta^g = C(dz + \sigma_I dx^I), \quad (6.8.511c)$$

$$\theta^i = \theta_i^I dx^I \quad (6.8.511d)$$

となる. ここで, $\mathcal{F}, B, \nu_I, L, A, \lambda_I, C, \sigma_I, \theta_i^I$ は v に依存しない関数. 残る座標変換の自由度は

$$x'^I = x'^I(x), \quad (6.8.512a)$$

$$z' = z'(z, x), \quad (6.8.512b)$$

$$u' = u'(u, z, x), \quad (6.8.512c)$$

$$v' = v + f(u, z, x). \quad (6.8.512d)$$

6.9 10次元 IIB 型理論

Refereces

- Schwarz JH, West PC: PLB126, 301 (1983)
“Symmetries and transformation rules of chiral $N = 2, d = 10$ supergravity”
- Schwarz JH: NPB226, 269 (1983)
“Covariant field equations of chiral $N = 2, d = 10$ supergravity”
- Howe P, West PC: NPB238, 181 (1984)
“The complete $N = 2, d = 10$ supergravity”

6.9.1 基本公式

Γ 行列:

$$\Gamma^M \Gamma^N + \Gamma^N \Gamma^M = 2\eta^{MN}, \quad (6.9.1a)$$

$$\Gamma_{11} = * \Gamma_{[10]} = \Gamma^{0 \cdots 9}; \quad (\Gamma_{11})^2 = 1, \quad \Gamma_{11} \Gamma^M = -\Gamma^M \Gamma_{11}, \quad (6.9.1b)$$

$$* \Gamma_{[10-k]} = (-1)^{k(k+1)/2} \Gamma_{11} \Gamma_{[k]} = (-1)^{k(k-1)/2} \Gamma_{[k]} \Gamma_{11}. \quad (6.9.1c)$$

6.9.2 Schwarz-West の定式化

記号法についての注:

- Schwarz の論文 (NPB226:269(1983)) で用いられている記法では, 計量の符号と Levi-Civita 記号の符号が我々のものと異なる. 対応して, $i\Gamma^M$ が Γ^M として用いられている.
- Polchinski の記法では, 計量の符号は同じだが Levi-Civita 記号の符号 (ないし体積要素の符号) が我々のものと異なる.

基本場:

- ボゾン

- 計量: g_{MN}
- スカラ場: $V_+^\alpha = (V_-^\alpha)^*$ ($\alpha = 1, 2$); $\epsilon_{\alpha\beta} V_-^\alpha V_+^\beta = 1$
- 複素 2-形式ゲージ場: A_2^α ($\alpha = 1, 2$); $A_2^2 = (A_2^1)^*$
- 実 4-形式ゲージ場: A_4

- フェルミオン

- 複素 Weyl スピノール: λ ; $\Gamma^{11}\lambda = \mp\lambda$
- 複素 Weyl スピノールベクトル: ψ_M ; $\Gamma^{11}\psi_M = \pm\psi_M$

スカラ場 V_\pm^α より作られる 2 次の行列は $SU(1, 1)$ に属する :

$$V = \begin{pmatrix} V_-^\alpha & V_+^\alpha \end{pmatrix} \in SU(1, 1). \quad (6.9.2)$$

誘導場 :

$$Q_M = -i\epsilon_{\alpha\beta} V_-^\alpha \partial_M V_+^\beta, \quad (6.9.3)$$

$$P_M = -\epsilon_{\alpha\beta} V_+^\alpha \partial_M V_+^\beta, \quad (6.9.4)$$

$$F_3^\alpha = dA_2^\alpha, \quad (6.9.5)$$

$$G_3 = -\epsilon_{\alpha\beta} V_+^\alpha F_3^\beta, \quad (6.9.6)$$

$$\tilde{F}_5 = dA_4 + \frac{i\kappa}{16} \epsilon_{\alpha\beta} A_2^\alpha \wedge F_3^\beta. \quad (6.9.7)$$

$SU(1, 1) \times U(1)_{\text{local}}$ 変換: V_\pm^α に対する局所 $U(1)$ 変換を

$$V_\pm^\alpha \rightarrow e^{\pm i\Sigma} V_\pm^\alpha \quad (6.9.8)$$

とすると, 他の場は

$$\begin{aligned} Q_M &\rightarrow Q_M + \partial_M \Sigma, & P_M &\rightarrow e^{2i\Sigma} P_M, \\ F_3 &\rightarrow F_3, & G_3 &\rightarrow e^{i\Sigma} G_3, & \tilde{F}_5 &\rightarrow \tilde{F}_5, \\ \lambda &\rightarrow e^{3i\Sigma/2} \lambda, & \psi_M &\rightarrow e^{i\Sigma/2} \psi_M \end{aligned} \quad (6.9.9)$$

と変換する. これに対応して, $U(1)$ 電荷 q を持つ場に対する共変微分を

$$D_M = \nabla_M - iqQ_M \quad (6.9.10)$$

により定義する. 場の $SU(1, 1)$ および $U(1)$ 変換は次の通り :

	V_\pm^α	Q_M	P_M	F_3^α	G_3	\tilde{F}_5	λ	ψ_M
$SU(1, 1)$ (次元)	2	1	1	2	1	1	1	1
$U(1)$ 電荷 q	± 1	0	2	0	1	0	3/2	1/2

場の方程式:

$$D \cdot P = -\frac{\kappa^2}{4} G_3 \cdot G_3 + O(\psi^2), \quad (6.9.11a)$$

$$D \cdot G_3 = P \cdot G_3^* - 4i\kappa G_3 \cdot \tilde{F}_5 + O(\psi^2), \quad (6.9.11b)$$

$$*\tilde{F}_5 = \pm \tilde{F}_5, \quad (6.9.11c)$$

$$\Gamma^M D_M \lambda = \frac{i\kappa}{240} \tilde{F}_5 \lambda + O(\psi^3), \quad (6.9.11d)$$

$$\Gamma^{MNP} D_N \psi_P = -\frac{1}{2} P \Gamma^M \lambda^* + \frac{\kappa}{48} G_3^* \Gamma^M \lambda + O(\psi^3), \quad (6.9.11e)$$

$$R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = P_M P_N^* + P_M^* P_N - g_{MN} P \cdot P^* + \frac{\kappa^2}{6} \tilde{F}_{MP_1 \dots P_4} \tilde{F}_N^{P_1 \dots P_4} \\ + \frac{\kappa^2}{8} \left(G_M^{PQ} G_{NPQ}^* + G_M^{*PQ} G_{NPQ} \right) - \frac{\kappa^2}{4} g_{MN} G_3 \cdot G_3^* + O(\psi^3). \quad (6.9.11f)$$

ここで,

$$\psi_p = \Gamma^{M_1 \dots M_p} \omega_{M_1 \dots M_p}. \quad (6.9.12)$$

ゲージ変換:

$$\delta A_2^\alpha = d\Lambda_1^\alpha, \quad (6.9.13a)$$

$$\delta A_4 = d\Lambda_3 - \frac{i\kappa}{16} \epsilon_{\alpha\beta} \Lambda_1^\alpha \wedge F_3^\beta. \quad (6.9.13b)$$

F_3^α および \tilde{F}_5 はこのゲージ変換で不変.

超対称変換: ボーズ場の変換は

$$\delta e_M^A = 2\kappa \text{Im}(\bar{\epsilon} \Gamma^A \psi_M), \quad (6.9.14a)$$

$$\delta V_+^\alpha = -i\kappa V_-^\alpha \bar{\epsilon}^* \lambda, \quad \delta V_-^\alpha = i\kappa V_+^\alpha \bar{\epsilon} \lambda^*, \quad (6.9.14b)$$

$$\delta A_{MN}^\alpha = iV_+^\alpha \bar{\epsilon}^* \Gamma_{MN} \lambda^* - iV_-^\alpha \bar{\epsilon} \Gamma_{MN} \lambda \\ + 4iV_+^\alpha \bar{\epsilon} \Gamma_{[M} \psi_{N]}^* - 4iV_-^\alpha \bar{\epsilon}^* \Gamma_{[M} \psi_{N]}, \quad (6.9.14c)$$

$$\delta A_{MNPQ} = -2\text{Re}(\bar{\epsilon} \Gamma_{[MNP} \psi_{Q]}) - \frac{3i\kappa}{8} \epsilon_{\alpha\beta} A_{[MN}^\alpha \delta A_{PQ]}^\beta \quad (6.9.14d)$$

フェルミ場の変換は

$$\delta\lambda = -\frac{1}{\kappa}\Gamma^M\epsilon^*\hat{P}_M - \frac{1}{24}\Gamma^{MNP}\epsilon\hat{G}_{MNP}, \quad (6.9.15a)$$

$$\begin{aligned} \delta\psi_M = & \frac{1}{\kappa}D_M\epsilon + \frac{i}{480}\Gamma^{P_1\dots P_5}\Gamma_M\epsilon\hat{F}_{P_1\dots P_5} - \frac{1}{96}\left(\Gamma_M{}^{NPQ}\hat{G}_{NPQ} - 9\Gamma^{PQ}\hat{G}_{MPQ}\right)\epsilon^* \\ & - \frac{7i\kappa}{16}\left(\Gamma_N\lambda\bar{\psi}_M\Gamma^N\epsilon^* - \frac{1}{1680}\Gamma_{P_1\dots P_5}\lambda\bar{\psi}_M\Gamma^{P_1\dots P_5}\epsilon^*\right) \\ & + \frac{i\kappa}{32}\left[\left(\frac{9}{4}\Gamma_M\Gamma^P + 3\Gamma^P\Gamma_M\right)\epsilon\bar{\lambda}\Gamma_P\lambda - \left(\frac{1}{24}\Gamma_M\Gamma^{P_1P_2P_3} + \frac{1}{6}\Gamma^{P_1P_2P_3}\Gamma_M\right)\epsilon\bar{\lambda}\Gamma_{P_1P_2P_3}\lambda\right. \\ & \left. + \frac{1}{960}\Gamma_M\Gamma^{P_1\dots P_5}\epsilon\bar{\lambda}\Gamma_{P_1\dots P_5}\lambda\right]. \end{aligned} \quad (6.9.15b)$$

ここで,

$$\hat{G}_{MNP} = G_{MNP} + 3i\kappa\bar{\psi}_{[M}\Gamma_{NP]}\lambda + 6i\kappa\bar{\psi}_{[M}^*\Gamma_N\psi_{P]}, \quad (6.9.16a)$$

$$\hat{F}_{MNPQR} = \tilde{F}_{MNPQR} + 5\kappa\bar{\psi}_{[M}\Gamma_{NPQ}\psi_{R]} - \frac{\kappa}{16}\bar{\lambda}\Gamma_{MNPQR}\epsilon. \quad (6.9.16b)$$

ゼロフェルミ場: $\lambda = 0, \psi_M = 0$ となる背景では, ゲージ条件

$$V = \frac{1}{\sqrt{1-|w|^2}} \begin{pmatrix} 1 & w \\ w^* & 1 \end{pmatrix} \quad (6.9.17)$$

のもとで, 場の方程式は

$$D \cdot P = -\frac{\kappa^2}{4}G_3 \cdot G_3, \quad (6.9.18a)$$

$$D \cdot G_3 = P \cdot G_3^* - 4i\kappa G_3 \cdot \tilde{F}_5, \quad (6.9.18b)$$

$$\begin{aligned} R_{MN} = & P_M P_N^* + P_M^* P_N + \frac{\kappa^2}{6}\tilde{F}_{MP_1\dots P_4}F_N{}^{P_1\dots P_4} \\ & + \frac{\kappa^2}{8}\left(G_M{}^{PQ}G_{NPQ}^* + G_M{}^{*PQ}G_{NPQ} - g_{MN}G_3 \cdot G_3^*\right) \end{aligned} \quad (6.9.18c)$$

$$*\tilde{F}_5 = \pm\tilde{F}_5. \quad (6.9.18d)$$

ここで,

$$P_M = \frac{1}{1 - |w|^2} \partial_M w, \quad (6.9.19a)$$

$$Q_M = \frac{1}{1 - |w|^2} \text{Im} (w \partial_M w^*), \quad (6.9.19b)$$

$$G_3 = \frac{1}{\sqrt{1 - |w|^2}} \left(\tilde{F}_3 - w \tilde{F}_3^* \right); \quad F_3^1 = \tilde{F}_3 = d\tilde{A}_2, \quad (6.9.19c)$$

$$\tilde{F}_5 = dA_4 - \frac{\kappa}{8} \text{Im} \left(\tilde{A}_2 \wedge \tilde{F}_3^* \right). \quad (6.9.19d)$$

また, 超対称変換は,

$$\delta\lambda = -\frac{1}{\kappa} \not{P} \epsilon^* - \frac{1}{24} G_3 \epsilon, \quad (6.9.20a)$$

$$\delta\psi_M = \frac{1}{\kappa} D_M \epsilon + \frac{i}{480} \tilde{F}_5 \Gamma_M \epsilon - \frac{1}{96} \left(\Gamma_M^{NPQ} G_{NPQ} - 9\Gamma^{PQ} G_{MPQ} \right) \epsilon. \quad (6.9.20b)$$

6.9.3 Polchinski 記号法での表式

Schwarz-West 記号法との対応 モジュライ変数 τ を

$$\tau = \frac{w + i}{1 + iw} \Leftrightarrow w = \frac{\tau - i}{1 - i\tau} \quad (6.9.21)$$

により導入すると,

$$1 - |w|^2 = \frac{4\tau_2}{|1 - i\tau|^2} \quad (6.9.22)$$

より,

$$|w|^2 < 1 \Leftrightarrow \tau_2 > 0. \quad (6.9.23)$$

この τ を用いると,

$$V = \frac{1}{2\tau_2} \begin{pmatrix} 1 + i\tau^* & \tau - i \\ \tau^* + i & 1 - i\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i(\theta-5\pi/4)} & 0 \\ 0 & e^{i(\theta-5\pi/4)} \end{pmatrix} \quad (6.9.24a)$$

$$P_M = e^{2i\theta} \frac{-i}{2\tau_2} \partial_\mu \tau, \quad (6.9.24b)$$

$$Q_M = \partial_M \theta - \frac{1}{2\tau_2} \partial_M \tau_1, \quad (6.9.24c)$$

$$\kappa G_3 \rightarrow \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{\tau_2}} (\tau H_3 - F_3), \quad (6.9.24d)$$

$$\kappa \tilde{F}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} [(1-i)H_3 + (1+i)F_3], \quad (6.9.24e)$$

$$4\kappa \tilde{F}_5 \rightarrow \tilde{F}_5, \quad (6.9.24f)$$

$$\kappa \lambda \rightarrow e^{3i\theta/2} \lambda, \quad (6.9.24g)$$

$$\kappa \psi_M \rightarrow e^{i\theta/2} \psi_M, \quad (6.9.24h)$$

$$\epsilon \rightarrow e^{i\theta/2} \epsilon. \quad (6.9.24i)$$

ここで,

$$e^{i\theta} = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{|1-i\tau|}{1-i\tau}. \quad (6.9.25)$$

場の方程式: G_3 を

$$G_3 := \tau H_3 - F_3, \quad \tilde{G}_3 = \tau_2^{-1/2} G_3. \quad (6.9.26)$$

により定義すると,

$$\square\tau + i\frac{(\nabla\tau)^2}{\tau_2} = -\frac{i}{2}G_3 \cdot G_3, \quad (6.9.27a)$$

$$\nabla \cdot G_3 = -\frac{i\nabla\tau}{2\tau_2}(G_3 + G_3^*) - i\tilde{F}_5 \cdot G_3, \quad (6.9.27b)$$

$$dG_3 = -\frac{i}{2\tau_2}d\tau \wedge (G_3 - G_3^*), \quad (6.9.27c)$$

$$d\tilde{F}_5 = \frac{i}{2\tau_2}G_3 \wedge G_3^*, \quad (6.9.27d)$$

$$*\tilde{F}_5 = \pm\tilde{F}_5, \quad (6.9.27e)$$

$$\begin{aligned} R_{MN} = & \frac{1}{4\tau_2^2}(\nabla_M\tau\nabla_N\tau^* + \nabla_M\tau^*\nabla_N\tau) \\ & + \frac{1}{8\tau_2}\left[G_{MPQ}G_N^{*PQ} + G_{MPQ}^*G_N^{PQ}\right] - \frac{1}{8\tau_2}G_3 \cdot G_3^*g_{MN} \\ & + \frac{1}{96}\tilde{F}_{MP_1\dots P_4}\tilde{F}_N{}^{P_1\dots P_4}. \end{aligned} \quad (6.9.27f)$$

H_3, F_3 および

$$\tau = C_0 + ie^{-\Phi} \quad (6.9.28)$$

により定義される C_0, Φ を用いると,

$$\square\Phi - e^{2\Phi}(\nabla C_0)^2 - \frac{1}{2}e^\Phi[(C_0H_3 - F_3)^2 - e^{-2\Phi}H_3^2] = 0, \quad (6.9.29a)$$

$$\nabla(e^{2\Phi}\nabla C_0) - e^\Phi H_3 \cdot (C_0H_3 - F_3) = 0, \quad (6.9.29b)$$

$$\nabla \cdot T \begin{pmatrix} H_3 \\ F_3 \end{pmatrix} = \tilde{F}_5 \cdot \begin{pmatrix} H_3 \\ F_3 \end{pmatrix}; \quad T = \frac{1}{\tau_2} \begin{pmatrix} \tau_1 & -1 \\ |\tau|^2 & -\tau_1 \end{pmatrix}, \quad (6.9.29c)$$

$$F_3 = dC_2, \quad H_3 = dB_2, \quad (6.9.29d)$$

$$\tilde{F}_5 = dC_4 - \frac{1}{2}C_2 \wedge H_3 + \frac{1}{2}B_2 \wedge F_3, \quad (6.9.29e)$$

$$*\tilde{F}_5 = \pm\tilde{F}_5, \quad (6.9.29f)$$

$$\begin{aligned} R_{MN} = & \frac{1}{2}\nabla_M\Phi\nabla_N\Phi + \frac{1}{2}e^{2\Phi}\nabla_MC_0\nabla_NC_0 \\ & + \frac{1}{4}\left[e^\Phi(C_0H - F)_{MPQ}(C_0H - F)_N{}^{PQ} + e^{-\Phi}H_{MPQ}H_N{}^{PQ}\right] \\ & - \frac{1}{8}\left[e^\Phi(C_0H_3 - F_3) \cdot (C_0H_3 - F_3) + e^{-\Phi}H_3 \cdot H_3\right]g_{MN} \\ & + \frac{1}{96}\tilde{F}_{MP_1\dots P_4}\tilde{F}_N{}^{P_1\dots P_4}. \end{aligned} \quad (6.9.29g)$$

これらの方程式は $SL(2, \mathbb{R})$ 変換

$$\tau \rightarrow \Lambda \circ \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad (6.9.30a)$$

$$\begin{pmatrix} B_2 \\ -C_2 \end{pmatrix} \rightarrow T_{\Lambda^{-1}} \begin{pmatrix} B_2 \\ -C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_2 \\ -C_2 \end{pmatrix}, \quad (6.9.30b)$$

$$C_4 \rightarrow C_4, \quad (6.9.30c)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \quad (6.9.30d)$$

に対して不変.

特に, $B_2 = C_2 = 0$ のとき, 場の方程式は次の方程式系に帰着される:

$$\square\Phi - e^{2\Phi}(\nabla C_0)^2 = 0, \quad (6.9.31a)$$

$$\nabla(e^{2\Phi}\nabla C_0) = 0, \quad (6.9.31b)$$

$$*F_5 = \pm F_5, \quad dF_5 = 0, \quad (6.9.31c)$$

$$R_{MN} = \frac{1}{2}e^{2\Phi}\nabla_M C_0\nabla_N C_0 + \frac{1}{2}\nabla_M\Phi\nabla_N\Phi + \frac{1}{96}\tilde{F}_{MP_1\dots P_4}\tilde{F}_N{}^{P_1\dots P_4} \quad (6.9.31d)$$

ここで, \tilde{F}_5 は自己双対な奇数次の微分形式なので, 常に

$$\tilde{F}_5 \cdot \tilde{F}_5 = * \tilde{F}_5 \cdot \tilde{F}_5 = 0. \quad (6.9.32)$$

作用積分 (Einstein frame): Einstein フレームでの Bosonic part の作用積分は

$$\begin{aligned} 2\kappa^2 S_{\text{IIB}} = & \int d^{10}x (-g)^{1/2} \left[R - \frac{\nabla\bar{\tau} \cdot \nabla\tau}{2(\text{Im}\tau)^2} - \frac{1}{2}\mathcal{M}_{ij}F_3^i \cdot F_3^j - \frac{1}{4}\tilde{F}_5 \cdot \tilde{F}_5 \right] \\ & \pm \frac{1}{4} \int C_4 \wedge F_3^i \wedge F_3^j \epsilon_{ij}. \end{aligned} \quad (6.9.33)$$

ここで,

$$\tau = C_0 + ie^{-\Phi}, \quad (6.9.34a)$$

$$F_3^i = (H_3, F_3) = (dB_2, dC_2), \quad (6.9.34b)$$

$$\tilde{F}_5 = F_5 - \frac{1}{2}C_2 \wedge H_3 + \frac{1}{2}B_2 \wedge F_3; \quad F_5 = dC_4 \quad (6.9.34c)$$

$$(\mathcal{M}_{ij}) = \frac{1}{\text{Im}\tau} \begin{pmatrix} |\tau|^2 & -\text{Re}\tau \\ -\text{Re}\tau & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.9.34d)$$

10次元体積要素を Ω とおくと、この作用積分は次のように書き直される：

$$\begin{aligned}
2\kappa^2 S_{\text{IIB}} &= \int \Omega \left[R - \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{2}e^{2\Phi}(\nabla C_0)^2 \right] \\
&\quad - \frac{1}{2}e^\Phi(C_0 * H_3 - *F_3) \wedge (C_0 H_3 - F_3) - \frac{1}{2}e^{-\Phi} *H_3 \wedge H_3 \\
&\quad - \frac{1}{4} * \tilde{F}_5 \wedge \tilde{F}_5 \pm \frac{1}{2} C_4 \wedge H_3 \wedge F_3 \\
&= \int \Omega \left[R - \frac{\nabla\tau \cdot \nabla\bar{\tau}}{2(\text{Im}\tau)^2} \right] - \frac{1}{2\text{Im}\tau} *G_3 \wedge \bar{G}_3 \\
&\quad - \frac{1}{4} * \tilde{F}_5 \wedge \tilde{F}_5 \pm \frac{i}{4\text{Im}\tau} C_4 \wedge G_3 \wedge \bar{G}_3. \tag{6.9.35}
\end{aligned}$$

作用積分 (String frame): Einstein frame での計量 g_{MN} と string frame での計量 \tilde{g}_{MN} とは

$$\tilde{g}_{MN} = e^{\Phi/2} g_{MN} \tag{6.9.36}$$

により結ばれる。この string frame での計量を用いると、作用積分は次のように表される：

$$S_{\text{IIB}} = S_{\text{NS}} + S_{\text{R}} + S_{\text{CS}}; \tag{6.9.37a}$$

$$S_{\text{NS}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int dx^{10} (-\tilde{g})^{1/2} e^{-2\Phi} \left(\tilde{R} + 4(\tilde{\nabla}\Phi)^2 - \frac{1}{2} H_3 \cdot H_3 \right) \tag{6.9.37b}$$

$$S_{\text{R}} = -\frac{1}{4\kappa^2} \int dx^{10} (-\tilde{g})^{1/2} \left(F_1 \cdot F_1 + \tilde{F}_3 \cdot \tilde{F}_3 + \frac{1}{2} \tilde{F}_5 \cdot \tilde{F}_5 \right) \tag{6.9.37c}$$

$$S_{\text{CS}} = \pm \frac{1}{4\kappa^2} \int C_4 \wedge H_3 \wedge F_3. \tag{6.9.37d}$$

ここで、

$$F_1 := dC_0, \quad \tilde{F}_3 := F_3 - C_0 \wedge H_3. \tag{6.9.38}$$

6.9.4 超対称性

超対称変換: Polchinski 記号法のもとで、

$$* \tilde{F}_5 = \pm \tilde{F}_5, \tag{6.9.39a}$$

$$\Gamma^{11} \lambda = \mp \lambda, \tag{6.9.39b}$$

$$\Gamma^{11} \psi_M = \pm \psi_M \tag{6.9.39c}$$

に対して,

$$\delta\lambda = \frac{i}{2\tau_2} \Gamma^M \partial_M \tau \epsilon^* - \frac{1}{24} \tilde{G}_3 \epsilon, \quad (6.9.40a)$$

$$\delta\psi_M = D_M \epsilon + \frac{i}{16 \cdot 5!} \tilde{F}_5 \Gamma_M \epsilon - \frac{1}{96} \left(\Gamma_M^{NPQ} \tilde{G}_{NPQ} - 9 \Gamma^{PQ} \tilde{G}_{MPQ} \right) \epsilon. \quad (6.9.40b)$$

ここで,

$$D_M = \nabla_M + i \frac{1}{4\tau_2} \partial_M \tau, \quad (6.9.41a)$$

$$\nabla_M = \partial_M + \frac{1}{4} \omega_{ABM} \Gamma^{AB}. \quad (6.9.41b)$$

整合性条件： $C_2 = B_2 = C_0 = \Phi = 0$ のとき, 超対称変換は

$$\delta\lambda = 0, \quad (6.9.42a)$$

$$\delta\psi_M = \tilde{\nabla}_M \epsilon. \quad (6.9.42b)$$

ここで,

$$\tilde{\nabla}_M = \nabla_M + \frac{i}{16 \cdot 5!} \tilde{F}_5 \Gamma_M. \quad (6.9.43)$$

この整合性条件は

$$[\tilde{\nabla}_M, \tilde{\nabla}_N] \epsilon = 0. \quad (6.9.44)$$

ここで,

$$\nabla_M \Gamma^N = 0, \quad (6.9.45)$$

$$[\nabla_M, \nabla_N] = \frac{1}{4} R_{MNAB} \Gamma^{AB} \quad (6.9.46)$$

より,

$$[\tilde{\nabla}_M, \tilde{\nabla}_N] = \frac{1}{4} R_{MNAB} \Gamma^{AB} + \frac{2i}{16 \cdot 5!} \nabla_{[M} \tilde{F}_5 \Gamma_{N]} - \frac{1}{(16 \cdot 5!)^2} [\tilde{F}_5 \Gamma_M, \tilde{F}_5 \Gamma_N]. \quad (6.9.47)$$

ここで, F_5 の自己双対性を考慮すると, 右辺の第2項は

$$\frac{2i}{16 \cdot 5!} \nabla_{[M} \tilde{F}_5 \Gamma_{N]} = -\frac{i}{96} \nabla_{P_1} F_{P_2 P_3 P_4 M N} \Gamma^{P_1 \dots P_4} (1 \pm \Gamma^{11}). \quad (6.9.48)$$

また,

$$[\tilde{F}_5 \Gamma_M, \tilde{F}_5 \Gamma_N] = 2400 F^{Q_1 \dots Q_4} F_{Q_1 \dots Q_4 [M} \Gamma^P_{N]} (1 \pm \Gamma^{11}). \quad (6.9.49)$$

よって,

$$[\tilde{\nabla}_M, \tilde{\nabla}_N] = \frac{1}{4} R_{MNAB} \Gamma^{AB} - \frac{i}{96} \nabla_{P_1} F_{P_2 P_3 P_4 M N} \Gamma^{P_1 \dots P_4} (1 \pm \Gamma^{11}) - \frac{1}{64 \cdot 4!} F^{Q_1 \dots Q_4} {}_P F_{Q_1 \dots Q_4 [M} \Gamma^P{}_{N]} (1 \pm \Gamma^{11}). \quad (6.9.50)$$

6.9.5 厳密解

6.9.5.1 SO(4) × SO(4) 対称 1/2 BPS 解

仮定

1. 時空と場が空間的 SO(4) × SO(4) 対称性をもつ.
2. $C_0 + ie^\phi = i$, $G_{[3]} = 0$.
3. 1/2 超対称性 (正確には, Killing スピノールが後述する特別の形を持つことを仮定).

これらの仮定より, 時空計量と $F_{[5]}$ は

$$ds^2 = ds^2(X_4) + e^{H+G} ds^2(S^3) + e^{H-G} ds^2(\tilde{S}^3), \quad (6.9.51a)$$

$$F_{[5]} = F \wedge \Omega(S^3) + \tilde{F} \wedge \Omega(\tilde{S}^3). \quad (6.9.51b)$$

ここで, H, G は X_4 上の関数, また, F と \tilde{F} は X_4 上の互いに双対な閉 2 形式:

$$F = e^{3G} {}_4\tilde{F}, \quad \tilde{F} = -e^{-3G} {}_4F, \quad (6.9.52a)$$

$$F = dB, \quad \tilde{F} = d\tilde{B}. \quad (6.9.52b)$$

Γ 行列とスピノールの分解 10 次元スピノール Γ_M を, 4 次元 γ 行列 γ_μ , S^3 および \tilde{S}^3 上の γ 行列である 2 組の Pauli 行列 $\sigma_a, \tilde{\sigma}_a$, およびそれらの独立な Pauli 行列 $\hat{\sigma}_a$ を用いて,

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1, \quad \Gamma_a = \gamma_5 \otimes \sigma_a \otimes 1 \otimes \hat{\sigma}_1, \quad \Gamma_{\tilde{a}} = \gamma_5 \otimes 1 \otimes \tilde{\sigma}_a \otimes \hat{\sigma}_2 \quad (6.9.53)$$

と表現する. ここで,

$$\gamma_5 := -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (6.9.54)$$

このとき,

$$\Gamma_{11} = \gamma_5 \hat{\sigma}_3 \quad (6.9.55)$$

より, Killing スピノール ζ に対するカイラリティ条件 $\Gamma_{11}\zeta = \pm\zeta$ は

$$\gamma_5 \hat{\sigma}_3 \zeta = \pm\zeta. \quad (6.9.56)$$

[目次へ](#)

解の一般形

[目次へ](#)

6.10 10次元 IIA 型理論

References

- Campbell C, West PC: NPB243, 112 (1984)
 “ $N = 2$ $D = 10$ nonchiral supergravity and its spontaneous compactification”
- Giani F, Pernici M: PRD 30, 325 (1984)
 “ $N = 2$ supergravity in ten dimensions”

6.10.1 基本場

- ボーズ場
 - NS 場 : $g_{MN}, \Phi, B_{[2]}$
 - R 場 : $C_{[1]}, C_{[3]}$
- フェルミ場
 - Chirality の異なる Majorana 1/2 場 : λ, λ'
 - Chirality の異なる Majorana 3/2 場 : ψ_M, ψ'_M

6.10.2 作用積分

Massive IIA 理論 [338] のストリングフレームでの Bosonic part の作用積分は

$$S_{\text{IIA,B}} = S_{\text{NS}} + S_{\text{R}} + S_{\text{CS}}; \quad (6.10.1)$$

$$S_{\text{NS}} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-\tilde{g})^{1/2} e^{-2\Phi} \left(\tilde{R} + 4(\tilde{\nabla}\Phi)^2 - \frac{1}{2}H_3 \cdot H_3 \right) \quad (6.10.2)$$

$$S_{\text{R}} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-\tilde{g})^{1/2} \left(\tilde{F}_2 \cdot \tilde{F}_2 + \tilde{F}_4 \cdot \tilde{F}_4 + m_0^2 \right), \quad (6.10.3)$$

$$S_{\text{CS}} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int \left(B_2 \wedge dC_3 \wedge dC_3 - \frac{m_0}{3} B_2^3 \wedge dC_3 + \frac{m_0^2}{20} B_2^6 \right) \quad (6.10.4)$$

ここで,

$$H_3 = dB_2, \quad \tilde{F}_2 = dC_1 + m_0 B_2, \quad \tilde{F}_4 = dC_3 - C_1 \wedge H_3 - \frac{m_0}{2} B_2 \wedge B_2. \quad (6.10.5)$$

Einstein フレーム g_{MN} へ移ると

$$\tilde{g}_{MN} = e^{\Phi/2} g_{MN} \quad (6.10.6)$$

より,

$$S_{\text{NS}} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-g)^{1/2} \left(R - \frac{1}{2} (\partial\Phi)^2 - \frac{1}{2} e^{-\Phi} H_3 \cdot H_3 \right) \quad (6.10.7a)$$

$$S_{\text{R}} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-g)^{1/2} \times \left(e^{3\Phi/2} \tilde{F}_2 \cdot \tilde{F}_2 + e^{\Phi/2} \tilde{F}_4 \cdot \tilde{F}_4 + e^{5\Phi/2} m_0^2 \right). \quad (6.10.7b)$$

6.10.3 場の方程式

Einstein フレームでのディラトンおよびゲージ場の方程式は

$$\square\Phi + \frac{1}{2} e^{-\Phi} |H_3|^2 - \frac{3}{4} e^{3\Phi/2} |\tilde{F}_2|^2 - \frac{1}{4} e^{\Phi/2} |\tilde{F}_4|^2 - \frac{5m_0^2}{4} e^{5\Phi/2} = 0, \quad (6.10.8a)$$

$$dH_3 = 0, \quad (6.10.8b)$$

$$d(e^{-\Phi} *H_3) - e^{\Phi/2} \tilde{F}_2 \wedge * \tilde{F}_4 + \frac{1}{2} \tilde{F}_4 \wedge \tilde{F}_4 + m_0 e^{3\Phi/2} * \tilde{F}_2 = 0, \quad (6.10.8c)$$

$$d\tilde{F}_2 = m_0 H_3, \quad (6.10.8d)$$

$$d(e^{3\Phi/2} * \tilde{F}_2) - e^{\Phi/2} H_3 \wedge * \tilde{F}_4 = 0, \quad (6.10.8e)$$

$$d\tilde{F}_4 + H_3 \wedge \tilde{F}_2 = 0, \quad (6.10.8f)$$

$$d(e^{\Phi/2} * \tilde{F}_4) + H_3 \wedge \tilde{F}_4 = 0. \quad (6.10.8g)$$

また,

$$\begin{aligned}
\kappa_{10}^2 T_{MN} &= \frac{1}{2} \partial_M \Phi \partial_N \Phi - \frac{1}{4} (\nabla \Phi)^2 g_{MN} \\
&+ \frac{1}{4} e^{-\Phi} (H_{MPQ} H_N{}^{PQ} - |H_3|^2 g_{MN}) \\
&+ e^{3\Phi/2} \left(\frac{1}{2} \tilde{F}_{MP} \tilde{F}_N{}^P - \frac{1}{4} |\tilde{F}_2|^2 g_{MN} \right) \\
&+ e^{\Phi/2} \left(\frac{1}{12} \tilde{F}_{MPQR} \tilde{F}_N{}^{PQR} - \frac{1}{4} |\tilde{F}_4|^2 g_{MN} \right) \\
&- \frac{m_0^2}{4} e^{5\Phi/2} g_{MN}.
\end{aligned} \tag{6.10.9}$$

よって, Einstein 方程式は

$$\begin{aligned}
R_{MN} &= \frac{1}{2} \partial_M \Phi \partial_N \Phi \\
&+ e^{-\Phi} \left(\frac{1}{4} H_{MPQ} H_N{}^{PQ} - \frac{1}{8} |H_3|^2 g_{MN} \right) \\
&+ e^{3\Phi/2} \left(\frac{1}{2} \tilde{F}_{MP} \tilde{F}_N{}^P - \frac{1}{16} |\tilde{F}_2|^2 g_{MN} \right) \\
&+ e^{\Phi/2} \left(\frac{1}{12} \tilde{F}_{MPQR} \tilde{F}_N{}^{PQR} - \frac{3}{16} |\tilde{F}_4|^2 g_{MN} \right) \\
&+ \frac{m_0^2}{16} e^{5\Phi/2} g_{MN}.
\end{aligned} \tag{6.10.10}$$

6.10.4 厳密解

6.10.4.1 超対称 AdS コンパクト化

文献

- Lüst D, Tsimpis D 2005: JHEP0502:027

仮定 解が $SO(3, 2)$ 不変で, かつ $N=1$ SUSY (i.e., 4kis) を仮定. この仮定より,

- NS 場

$$ds^2 = h^{-1/2}(y) ds^2(\text{adS}^4) + ds^2(Y_6), \tag{6.10.11a}$$

$$\Phi = \phi(y), \tag{6.10.11b}$$

$$B_{[2]} = \frac{1}{2} B_{mn}(y) dy^m \wedge dy^n. \tag{6.10.11c}$$

- RR 場

$$C_{[1]} = A_m(y)dy^m, \quad (6.10.12a)$$

$$\tilde{F}_{[4]} = f(y)\Omega(\text{adS}^4) + \frac{1}{4!}F_{mnpq}(y)dy^m \wedge dy^n \wedge dy^p \wedge dy^q \quad (6.10.12b)$$

- Killing スピノール

$$\epsilon = (\alpha\theta_+(x) \otimes \eta_+(y) - \bar{\alpha}\theta_-(x) \otimes \eta_-(y)) + (\beta\theta_+(x) \otimes \eta_-(y) - \bar{\beta}\theta_-(x) \otimes \eta_+(y)) \quad (6.10.13)$$

ここで,

$$\nabla_\mu(\text{adS}^4)\theta_+ = W\gamma_\mu\theta_-, \quad (6.10.14)$$

$$\theta_- = \bar{\theta}_+ \quad (6.10.15)$$

また,

$$\eta_- = \bar{\eta}_+, \quad \eta_+^\dagger\eta_+ = \eta_-^\dagger\eta_- = 1. \quad (6.10.16)$$

一般解 $|\alpha| \neq |\beta|$ のとき, $X_4 = E^{3,1}$ となるので, 定義の修正により $\alpha = \beta$.

- 自由データ

– SU(3) 構造 Y_6 は SU(3) 構造 (J, Ω) をもつ :

$$J_m^p J_p^n = -\delta_m^n, \quad (6.10.17a)$$

$$iJ_m^n \Omega_{npq} = \Omega_{mpq}, \quad (6.10.17b)$$

$$\Omega \wedge J = 0, \quad (6.10.17c)$$

$$\Omega \wedge \bar{\Omega} = \frac{4i}{3}J^3. \quad (6.10.17d)$$

これらは解の自由データで, Killing スピノール解を用いて

$$J_{mn} = i\eta_-^\dagger \gamma_{mn} \eta_- = -i\eta_+^\dagger \gamma_{mn} \eta_+, \quad (6.10.18a)$$

$$\Omega_{mnp} = \eta_-^\dagger \gamma_{mnp} \eta_+, \quad \bar{\Omega}_{mnp} = -\eta_+^\dagger \gamma_{mnp} \eta_- \quad (6.10.18b)$$

Ω は ISD である.

– パラメータ $\beta = \alpha, \phi, f, h$ は定数.

- 2形式場 次の条件を満たす J に関する (1, 1) 形式 $G_{[2]}$:

$$J^{mn}G_{mn} = 0, \quad (6.10.19a)$$

$$dG_{[2]} = \frac{2e^{-\phi/4}}{27} \left(\frac{27}{5}m_0^2e^{2\phi} - f^2 \right) \text{Re}(\Omega) \quad (6.10.19b)$$

- 計量

$$\Lambda(\text{adS}^4) = -6|W|^2, \quad (6.10.20)$$

$$W = h^{-1/4} \left(\frac{\alpha}{|\alpha|} \right)^{-2} \left(-\frac{m_0}{2f}e^{5\phi/4} + \frac{i}{6}fe^{\phi/4} \right). \quad (6.10.21)$$

- フォーム場

$$H_{[3]} = \frac{2m_0}{f}e^{7\phi/4}\text{Re}(\Omega), \quad (6.10.22a)$$

$$\tilde{F}_{[2]} = \frac{f}{9}e^{-\phi/2}J + G_{[2]}, \quad (6.10.22b)$$

$$\tilde{F}_{[4]} = f\Omega(\text{adS}^4) + \frac{3m_0}{10}e^\phi J \wedge J. \quad (6.10.22c)$$

- Torsion class

$$dJ = -\frac{3}{2}\text{Im}(\mathcal{W}_1\bar{\Omega}) + \mathcal{W}_4 \wedge J + \mathcal{W}_3, \quad (6.10.23a)$$

$$d\Omega = \mathcal{W}_1J^2 + \mathcal{W}_2 \wedge J + \bar{\mathcal{W}}_5 \wedge \Omega \quad (6.10.23b)$$

とおくとき,

$$\mathcal{W}_1 = -\frac{4i}{9}fe^{\phi/4}, \quad (6.10.24a)$$

$$\mathcal{W}_2 = -ie^{3\phi/4}\tilde{F}_{[2]}, \quad (6.10.24b)$$

$$\mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_4 = \mathcal{W}_5 = 0. \quad (6.10.24c)$$

特徴

- J が (Weyl 変換により) Y_6 の複素構造となる (可積分となる) ことはない.

6.11 10次元II型理論の Democratic formulation

Reference

- Bergshoeff E, Kallosh R, Ortin T, Roest D, van Proeyen A: CQG17, 3359-82 (2001)[39]

New Formulations of $D = 10$ Supersymmetry and D8-O8 Domain Walls

- Grana M: PLC 433, 91-158 (2006) [209]

“Flux compactifications in string theory: A comprehensive review”

6.11.1 基本場

$$\text{IIA} : \left\{ g_{MN}, B_{[2]}, \phi, C_M^{(1)}, C_{MNP}^{(3)}, C_{M\dots P}^{(5)}, C_{M\dots P}^{(7)}, C_{M\dots P}^{(9)}, \psi_M, \lambda \right\}, \quad (6.11.1a)$$

$$\text{IIB} : \left\{ g_{MN}, B_{[2]}, \phi, C_M^{(0)}, C_{MNP}^{(2)}, C_{M\dots P}^{(4)}, C_{M\dots P}^{(6)}, C_{M\dots P}^{(8)}, \psi_M, \lambda \right\} \quad (6.11.1b)$$

ここで、IIA に対しては ψ_M, λ は右と左カイラリティの doublets, IIB に対しては条件

$$\Gamma_{11}\psi_M = \psi_M, \quad \Gamma_{11}\lambda = -\lambda \quad (6.11.2)$$

を満たす同じカイラリティの doublets.

6.11.2 擬作用積分

$$\begin{aligned}
S = & \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[e^{-2\phi} \left(R(\omega(e)) + 4d\phi \cdot d\phi + 2d\phi \cdot \chi^{(1)} \right. \right. \\
& - \frac{1}{2} H \cdot H - H \cdot \chi^{(3)} \\
& \left. \left. - 2\bar{\psi}_M \Gamma^{MNP} \nabla_N \psi_P + 2\bar{\lambda} \Gamma^M \nabla_M \lambda - 4\bar{\lambda} \Gamma^{MN} \nabla_M \psi_N \right) \right. \\
& \left. - \sum_{n \in S} \left(\frac{1}{4} G^{(n)} \cdot G^{(n)} + \frac{1}{2} G^{(n)} \cdot \Psi^{(n)} \right) \right] \\
& + \text{quartic fermionic terms.} \tag{6.11.3}
\end{aligned}$$

ここで,

$$S = \begin{cases} (0, 2, \dots, 10); & IIA \\ (1, 3, \dots, 9); & IIB \end{cases} \tag{6.11.4}$$

また,

$$\mathbf{G} = \sum_{n \in S} \frac{1}{\ell_s^{n-1}} G^{(n)}, \quad \mathbf{C} = \sum_{n \in S} \frac{1}{\ell_s^{n-1}} C^{(n-1)} \tag{6.11.5}$$

として,

$$H = dB, \quad \mathbf{G} = d\mathbf{C} - \frac{1}{\ell_s^2} dB \wedge \mathbf{C} + \ell_s G^{(0)} e^{B/\ell_s^2}. \tag{6.11.6}$$

(この定義は, IIB の標準的なものに対応. IIA の標準的なものとは B の符号が異なる.) 各場の次元は, 微分形式は成分でなく dx^* を含むとして,

$$\begin{aligned}
[\kappa_{10} = L^4, \quad [g_{MN}] = L^0, \quad [\phi] = L^0, \\
[H_{[3]}] = L^2, \quad [B_{[2]}] = L^2, \quad [G_{[n]}] = L^{n-1}, \quad [C_{[n]}] = L \tag{6.11.7}
\end{aligned}$$

$$[\lambda] = [\Psi_M] = L^{-1/2}. \tag{6.11.8}$$

さらに,

$$\chi_M^{(1)} = -2\bar{\psi}_N \Gamma^N \psi_M - 2\bar{\lambda} \Gamma^N \Gamma_M \psi_N, \tag{6.11.9a}$$

$$\chi_{MNP}^{(3)} = \frac{1}{2} \bar{\psi}_Q \Gamma^{[Q} \Gamma_{MNP} \Gamma^{R]} \mathcal{P} \psi_R + \bar{\lambda} \Gamma_{MNP}{}^Q \mathcal{P} \psi_Q - \frac{1}{2} \bar{\lambda} \mathcal{P} \Gamma_{MNP} \lambda, \tag{6.11.9b}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{M_1 \dots M_n}^{(n)} = & \frac{1}{2} e^{-\phi} \bar{\psi}_P \Gamma^{[P} \Gamma_{M_1 \dots M_n} \Gamma^{Q]} \mathcal{P} \psi_Q + \frac{1}{2} e^{-\phi} \bar{\lambda} \Gamma_{M_1 \dots M_n} \Gamma^Q \mathcal{P} \psi_Q \\
& - \frac{1}{4} e^{-\phi} \bar{\lambda} \Gamma_{[M_1 \dots M_{n-1}} \mathcal{P} \Gamma_{M_n]} \lambda. \tag{6.11.9c}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\mathcal{P} := \Gamma_{11} \text{ (IIA)}, \quad -\sigma^3 \text{ (IIB)}, \quad (6.11.10a)$$

$$\mathcal{P}_n := (\Gamma_{11})^n \text{ (IIA)}, \quad \begin{cases} \sigma^1 & (n+1)/2 : \text{even} \\ \sigma^2 & (n+1)/2 : \text{odd} \end{cases} \text{ (IIB)} \quad (6.11.10b)$$

$\Psi^{(n)}$ は次の関係式を満たす ;

$$\Psi^{(n)} = (-1)^{[n/2]+1} * \Psi^{(10-n)}. \quad (6.11.11)$$

6.11.3 場の方程式

Bianchi 恒等式

$$dH = 0, \quad d\mathbf{G} - H \wedge \mathbf{G} = 0. \quad (6.11.12)$$

付加拘束条件

$$G^{(n)} + \Psi^{(n)} = (-1)^{[n/2]} * G^{(10-n)}. \quad (6.11.13)$$

変分方程式 (string frame, bosonic part only)

$$d * G^{(n)} + H \wedge * G^{(n+2)} = 0, \quad (6.11.14a)$$

$$d(e^{-2\phi} * H) + \frac{1}{2} \sum_n * G^{(n)} \wedge G^{(n-2)} = 0, \quad (6.11.14b)$$

$$\square\phi - (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{4} R_s - \frac{1}{8} H^2 = 0, \quad (6.11.14c)$$

$$\begin{aligned} R_{MN} = & -2\nabla_M \nabla_N \phi + \frac{1}{4} (-\square\phi + 2(\nabla\phi)^2) g_{MN} \\ & + \frac{1}{2} H_M^{(2)} \cdot H_N^{(2)} - \frac{1}{8} H^{(3)} \cdot H^{(3)} g_{MN} \\ & + e^{2\phi} \sum_n \frac{1}{4} \left(G_M^{(n-1)} \cdot G_N^{(n-1)} - \frac{n-1}{8} G^{(n)} \cdot G^{(n)} g_{MN} \right) \end{aligned} \quad (6.11.14d)$$

これより,

$$R_s = -\frac{9}{2} \square\phi + 5(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{4} H^2 - \sum_n \frac{n-5}{16} e^{2\phi} (G^{(n)})^2. \quad (6.11.15)$$

(注) $G^{(n)}$ の内積とその双対 $G^{(10-n)}$ の間には, Lorentz 時空では

$$(G^{(n)})^2 = -(G^{(10-n)})^2, \quad (6.11.16a)$$

$$(G^{(n)})_M \cdot (G^{(n)})_N = (G^{(10-n)})_M \cdot (G^{(10-n)})_N - (G^{(10-n)})^2 g_{MN} \quad (6.11.16b)$$

の関係があるので, R_{MN} の右辺で, 互いに双対な G の寄与は同じ値を与える.

場の方程式 (Einstein frame, bosonic part only) 計量を $g_{MN} \rightarrow e^{\phi/2} g_{MN}$ と変換すると,

$$d(e^{(5-n)\phi/2} *G^{(n)}) + e^{(3-n)\phi/2} H \wedge *G^{(n+2)} = 0, \quad (6.11.17a)$$

$$G^{(n)} = (-1)^{[n]} e^{(n-5)\phi/2} *G^{(10-n)}, \quad (6.11.17b)$$

$$d(e^{-\phi} *H) + \frac{1}{2} \sum_n e^{(5-n)\phi/2} *G^{(n)} \wedge G^{(n-2)} = 0, \quad (6.11.17c)$$

$$\square\phi + (\nabla\phi)^2 - 2R_s + e^{-\phi} H^2 = 0, \quad (6.11.17d)$$

$$R_{MN} = \frac{1}{2} \nabla_M \phi \nabla_N \phi + \frac{e^{-\phi}}{2} \left(H_M^{(2)} \cdot H_N^{(2)} - \frac{1}{4} H^{(3)} \cdot H^{(3)} g_{MN} \right) \\ + \sum_n \frac{1}{4} e^{-(n-5)\phi/2} \left(G_M^{(n-1)} \cdot G_N^{(n-1)} - \frac{n-1}{8} G^{(n)} \cdot G^{(n)} g_{MN} \right) \quad (6.11.17e)$$

特に,

$$R_s = \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{4} (H^{(3)})^2 + \sum_n \frac{5-n}{16} e^{-(n-5)\phi/2} (G^{(n)})^2 \quad (6.11.18)$$

これを用いると, dilaton の方程式は次のように書き換えられる:

$$\square\phi = -\frac{1}{2} e^{-\phi} (H^{(3)})^2 + \sum_n \frac{5-n}{8} e^{-(n-5)\phi/2} (G^{(n)})^2 \quad (6.11.19)$$

(注) $G^{(n)}$ の内積とその双対 $G^{(10-n)}$ の間には, Lorentz 時空では

$$e^{-(n-5)\phi/2} (G^{(n)})^2 = -e^{(n-5)\phi/2} (G^{(10-n)})^2 \quad (6.11.20)$$

の関係がある.

6.11.4 対称性

ゲージ対称性

$$\delta_\Lambda B = d\Lambda, \quad \delta_\Lambda \mathbf{C} = (d\Lambda - G^{(0)}\Lambda) \wedge e^B, \quad (6.11.21)$$

ここで,

$$\Lambda = \sum_{n \in S} \Lambda^{(n)}. \quad (6.11.22)$$

局所超対称性

$$\delta e_M^A = \bar{\epsilon} \Gamma^A \psi_M, \quad (6.11.23a)$$

$$\delta \phi = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \lambda, \quad (6.11.23b)$$

$$\delta B_{MN} = -2\bar{\epsilon} \Gamma_{[M} \mathcal{P} \psi_{N]}, \quad (6.11.23c)$$

$$\begin{aligned} \delta C_{M_1 \dots M_{n-1}}^{(n-1)} &= -e^{-\phi} \bar{\epsilon} \Gamma_{[M_1 \dots M_{n-2}} \mathcal{P}_n \left\{ (n-1) \psi_{M_{n-1}] - \frac{1}{2} \Gamma_{M_{n-1}] \lambda} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} (n-2)(n-1) C_{[M_1 \dots M_{n-3}}^{(n-3)} \delta B_{M_{n-2} M_{n-1]}, \quad (6.11.23d) \end{aligned}$$

$$\delta \lambda = \left(\Gamma^M \partial_M \phi + \frac{1}{2} \mathbb{H} \mathcal{P} \right) \epsilon + \frac{e^\phi}{8} \sum_{n \in S} (-1)^n (5-n) \mathcal{G}^n \mathcal{P}_n \epsilon, \quad (6.11.23e)$$

$$\delta \psi_M = \nabla_M \epsilon + \frac{1}{4} \mathcal{P} \mathbb{H}_M \epsilon + \frac{e^\phi}{16} \sum_{n \in S} \mathcal{G}^{(n)} \Gamma_M \mathcal{P}_n \epsilon. \quad (6.11.23f)$$

ここで,

$$\mathbb{H} = \frac{1}{3!} H^{MNP} \Gamma_{MNP}, \quad \mathbb{H}_M = \frac{1}{2} H_{MNP} \Gamma^{NP}, \quad (6.11.24a)$$

$$\mathcal{G}^{(n)} = \frac{1}{n!} G_{M_1 \dots M_n}^{(n)} \Gamma^{M_1 \dots M_n} \quad (6.11.24b)$$

また, $\mathcal{P}, \mathcal{P}_n$ は

$$\text{IIA} : \mathcal{P} = \Gamma_*, \quad \mathcal{P}_n = \Gamma_*^{n/2} \sigma^1, \quad (6.11.25a)$$

$$\text{IIB} : \mathcal{P} = -\sigma^3, \quad \mathcal{P}_n = \begin{cases} \sigma^1 & : n = 3, 7, \\ i\sigma^2 & : n = 1, 5, 9 \end{cases} \quad (6.11.25b)$$

6.12 10次元I型理論

References

- Chapline GF, Manton NS: PLB120, 105 (1983)
 “Unification of Yang-Mills theory and supergravity in ten dimensions”

6.12.1 基本場

- 重力セクター
 - ボーズ場
 - * 計量/フレーム場: $g_{MN} (e_M^A)$
 - * 2形式場: $C_2 \Rightarrow \tilde{F}_3$
 - * デイラトン: Φ
 - フェルミ場
 - * スピン3/2場: ψ_M
 - * デイラティーノ: λ
- ゲージセクター
 - ゲージ場: $A_1 \in \text{Ad}(G)$
 - ゲージノ: $\chi \in \text{Ad}(G)$

6.12.2 作用積分

ストリングフレームでの Bosonic part の作用積分は

$$S_{I,B} = S_c + S_o; \quad (6.12.1)$$

$$2\kappa_{10}^2 S_c = \int d^{10}x (-g)^{1/2} \left[e^{-2\Phi} (R + 4(\partial\Phi)^2) - \frac{1}{2} |\tilde{F}_3|^2 \right]; \quad (6.12.2)$$

$$2g_{10}^2 S_o = - \int d^{10}x (-g)^{1/2} e^{-\Phi} \text{Tr}_v (|F_2|^2). \quad (6.12.3)$$

ここで,

$$\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} = \frac{\alpha'}{4} \quad (6.12.4)$$

とおくと,

$$\tilde{F}_3 = dC_2 - \frac{\alpha'}{4}\omega_3; \quad (6.12.5)$$

$$\omega_3 = \text{Tr}_v \left(A_1 \wedge dA_1 - \frac{2i}{3} A_1 \wedge A_1 \wedge A_1 \right), \quad (6.12.6)$$

$$F_2 = dA_1 - iA_1 \wedge A_1. \quad (6.12.7)$$

特に,

$$d\tilde{F}_3 = -\frac{\alpha'}{4}\text{Tr}_v(F_2 \wedge F_2) \quad (6.12.8)$$

Einstein フレームでの作用積分は

$$g_{MN} \rightarrow e^{\Phi/2} g_{MN} \quad (6.12.9)$$

とおいて,

$$2\kappa_{10}^2 S_c = \int d^{10}x (-g)^{1/2} \left(R - \frac{1}{2}(\partial\Phi)^2 - \frac{1}{2}e^\Phi |\tilde{F}_3|^2 \right) \quad (6.12.10a)$$

$$2g_{10}^2 S_o = - \int d^{10}x (-g)^{1/2} e^{\Phi/2} \text{Tr}_v (|F_2|^2). \quad (6.12.10b)$$

6.12.3 場の方程式

ディラトンおよびゲージ場の方程式は

$$\square\Phi - \frac{1}{2}e^\Phi \tilde{F}_3 \cdot \tilde{F}_3 - \frac{\alpha'}{8}e^{\Phi/2} \text{Tr} F_2 \cdot F_2 = 0, \quad (6.12.11a)$$

$$d\tilde{F}_3 = -\frac{\alpha'}{4}\text{Tr} F_2 \wedge F_2, \quad (6.12.11b)$$

$$d(e^\Phi * \tilde{F}_3) = 0, \quad (6.12.11c)$$

$$DF_2 := dF_2 - iA_1 \wedge F_2 + iF_2 \wedge A_1 = 0, \quad (6.12.11d)$$

$$d(e^{\Phi/2} * F_2) + e^\Phi F_2 \wedge * \tilde{F}_3 = 0. \quad (6.12.11e)$$

また,

$$\begin{aligned} \kappa_{10}^2 T_{MN} = & \frac{1}{2}\partial_M\Phi\partial_N\Phi - \frac{1}{4}(\nabla\Phi)^2 g_{MN} \\ & + \frac{1}{4}e^\Phi \left(\tilde{F}_{MPQ}\tilde{F}_N{}^{PQ} - |\tilde{F}_3|^2 g_{MN} \right) \\ & + \frac{\alpha'}{4}e^{\Phi/2} \left(\text{Tr}_v(F_{MP}F_N{}^P) - \frac{1}{2}\text{Tr}_v(|F_2|^2)g_{MN} \right) \end{aligned} \quad (6.12.12)$$

より, Einstein 方程式は

$$\begin{aligned}
 R_{MN} = & \frac{1}{2} \partial_M \Phi \partial_N \Phi \\
 & + e^\Phi \left(\frac{1}{4} \tilde{F}_{MPQ} \tilde{F}_N{}^{PQ} - \frac{1}{8} |\tilde{F}_3|^2 g_{MN} \right) \\
 & + \frac{\alpha'}{4} e^{\Phi/2} \left(\text{Tr}_v(F_{MP} F_N{}^P) - \frac{1}{8} \text{Tr}_v(|F_2|^2) g_{MN} \right) \quad (6.12.13)
 \end{aligned}$$

6.13 10次元ヘテロ型理論

6.13.1 基本場

- 重力セクター
 - ボーズ場
 - * フレーム場 $e_M^A \Rightarrow g_{MN}$
 - * 2形式場 $B_2 \Rightarrow \tilde{H}_3$
 - * デイラトン Φ
 - フェルミ場
 - * スピン 3/2 場 ψ_M : 左巻き $\Gamma_{(10)}\psi_M = \pm\psi_M$
 - * デイラティノー λ : 右巻き $\Gamma_{(10)}\lambda = \pm\lambda$
- ゲージセクター
 - ゲージ場: $A_1 \in \text{Ad}(G)$
 - ゲージノ: $\chi \in \text{Ad}(G)$

	Gravitational sector	Gauge sector
Boson	metric g_{MN} 2-form B_2 dilaton Φ	gauge field $A_1 \in \text{Ad}(G)$
Fermion	gravitino $\Psi_M(\mathbf{56})$ dilatinno $\lambda(\mathbf{8})$	gaugino $\chi(\mathbf{8}) \in \text{Ad}(G)$

6.13.2 作用積分

ストリングフレームでの Bosonic part の作用積分は

$$S_{\text{Het},B} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-g)^{1/2} e^{-2\Phi} \left[R + 4(\partial\Phi)^2 - \frac{1}{2}|\tilde{H}_3|^2 - \frac{\alpha'}{4} \text{Tr}_v (|F_2|^2) \right]. \quad (6.13.1)$$

ここで,

$$\tilde{H}_3 = dB_2 - \frac{\alpha'}{4}\omega_3, \quad (6.13.2)$$

$$\omega_3 = \text{Tr}_v \left(A_1 \wedge dA_1 - \frac{2i}{3} A_1 \wedge A_1 \wedge A_1 \right), \quad (6.13.3)$$

$$F_2 = dA_1 - iA_1 \wedge A_1. \quad (6.13.4)$$

I型とヘテロ型の変数の対応は

$$(g_{MN})_I = e^{-\Phi_h}(g_{MN})_h, \quad \Phi_I = -\Phi_h, \quad (6.13.5)$$

$$\tilde{F}_3 = \tilde{H}_3, \quad (A_1)_I = (A_1)_h. \quad (6.13.6)$$

特に, Einstein フレームでの作用積分は, I型で

$$C_2 \rightarrow B_2 \quad (6.13.7)$$

と置き換えたものと一致.

6.13.3 場の方程式

String frame

$$R_{MN} + 2\nabla_M \nabla_N \Phi - \frac{1}{4} \tilde{H}_{MPQ} \tilde{H}_N{}^{PQ} - \frac{\alpha'}{4} \text{tr}(F_{MP} F_N{}^P) = 0, \quad (6.13.8a)$$

$$R - 4(\nabla\Phi)^2 + 4\Box\Phi - \frac{1}{2}|\tilde{H}_3|^2 - \frac{\alpha'}{4} \text{tr}(|F_2|^2) = 0, \quad (6.13.8b)$$

$$\nabla_P(e^{-2\Phi} \tilde{H}^P{}_{MN}) = 0, \quad (6.13.8c)$$

$$D_N(e^{-2\Phi} F^N{}_M) + \frac{1}{2} e^{-2\Phi} \tilde{H}_{MNP} F^{NP} = 0. \quad (6.13.8d)$$

最後の2つの式は

$$d(e^{-2\Phi} * \tilde{H}_3) = 0, \quad (6.13.9a)$$

$$D(e^{-2\Phi} * F_2) + \frac{1}{2} e^{-2\Phi} * \tilde{H}_3 \wedge F_2 = 0 \quad (6.13.9b)$$

と同等.

6.13.4 超対称変換

String frame で

$$\delta\psi_M = \left(\nabla_M(e) + \frac{1}{4} H_{MPQ} \Gamma^{PQ} \right) \epsilon, \quad (6.13.10a)$$

$$\delta\lambda = \left(\Gamma^M \partial_M \Phi - \frac{1}{12} H_{MPQ} \Gamma^{MPQ} \right) \epsilon, \quad (6.13.10b)$$

$$\delta\chi = F_{MN} \Gamma^{MN} \epsilon. \quad (6.13.10c)$$

6.14 6次元理論

6.14.1 Conventions

γ 行列 :

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}, \quad (6.14.1)$$

$$(\gamma^a)^\dagger = \gamma_a = -\gamma^0 \gamma^a (\gamma^0)^{-1}, \quad (6.14.2)$$

$$\Gamma = \gamma_7 = -\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 \gamma^5. \quad (6.14.3)$$

荷電共役行列 C は

$$C\gamma_a C^{-1} = -\mathcal{T}(\gamma_a), \quad (6.14.4)$$

$$\mathcal{T}C = C, \quad C^\dagger C = C^* C = 1. \quad (6.14.5)$$

スピノール表現: $8_{\mathbb{C}} = 4_{\mathbb{C}} + 4'_{\mathbb{C}}$ (no Majorana,).

シンプレクティック Majorana-Weyl スピノール: 次の条件を満たす 8 成分複素スピノールの組 $(\chi^A) = (\chi^1, \chi^2)$:

$$\Gamma\chi^A = -\chi^A, \quad (6.14.6a)$$

$$\bar{\chi}^A = \mathcal{T}(\chi^A)C. \quad (6.14.6b)$$

ここで,

$$\bar{\chi}^A = \epsilon^{AB}\bar{\chi}_B, \quad (6.14.7a)$$

$$\bar{\chi}_A = (\chi^A)^\dagger \gamma^0. \quad (6.14.7b)$$

具体的には,

$$(\chi^1)^\dagger \gamma^0 = -\mathcal{T}(\chi^2)C \Leftrightarrow (\chi^2)^\dagger \gamma^0 = \mathcal{T}(\chi^1)C. \quad (6.14.8)$$

一般に, $\chi^1 = \chi$ および

$$\gamma_{[k]} := \gamma_{a_1 \dots a_k} \quad (6.14.9)$$

とおくと,

$$\bar{\chi}^1 \gamma_{[k]} \chi^1 = \mathcal{T}\chi C \gamma_{[k]} \chi, \quad (6.14.10a)$$

$$\bar{\chi}^2 \gamma_{[k]} \chi^1 = -\bar{\chi} \gamma_{[k]} \chi, \quad (6.14.10b)$$

$$\bar{\chi}^1 \gamma_{[k]} \chi^2 = -(-1)^{[(k+1)/2]} \bar{\chi} \gamma_{[k]} \chi, \quad (6.14.10c)$$

$$\bar{\chi}^2 \gamma_{[k]} \chi^2 = (\mathcal{T}\chi C \gamma_{[k]} \chi)^*. \quad (6.14.10d)$$

6.14.2 場の物理自由度

ヘリシティ	-2	-3/2	-1	-1/2	0	1/2	1	3/2	2
物理自由度	5	8	3	4	1	4	3	8	5
$N = 1$ Scalar multiplet	0	0	0	1	8	1	0	0	0
$N = 1$ Vector multiplet	0	0	1*	1*	1* + 1	1	1	0	0
$N = 1$ Tensor multiplet	1*	1*	1*	0	0	0	1	1	1

この表で、すべての場は実で自由度をカウント。

6.14.3 双線形形式

Symplectic Majorana spinor ϵ^A に対して,

$$\Omega_{[k]}^{AB} := (-1)^{[k/2]} \bar{\epsilon}^A \gamma_{[k]} \epsilon^B \quad (6.14.11)$$

とおくと,

i) $\Omega_{[2l]}^{AB} = 0:$

$$\bar{\epsilon}^A \gamma_{[k]} \epsilon^B = -\bar{\epsilon}^A \gamma_{[k]} \gamma_7 \epsilon^B = (-1)^{k+1} \bar{\epsilon}^A \gamma_7 \gamma_{[k]} \epsilon^B = (-1)^{k+1} \bar{\epsilon}^A \gamma_{[k]} \epsilon^B \quad (6.14.12)$$

ii) $*\Omega_{[6-k]}^{AB} = (-1)^{[k/2]+k+1} \Omega_{[k]}^{AB}:$

$$*\gamma_{[6-k]} = -(-1)^{[k/2]} \gamma_{[k]} \gamma_7 \quad (6.14.13)$$

iii) $\Omega_{[k]}^{BA} = (-1)^{[(k+1)/2]} \Omega_{[k]}^{AB}:$

$${}^T(\epsilon^A) {}^T \gamma_{[k]} {}^T(\bar{\epsilon}^B) = \bar{\epsilon}^A C^{-1} {}^T \gamma_{[k]} {}^T C \epsilon^B, \quad {}^T C = C, \quad C \gamma_a C^{-1} = -{}^T \gamma_a \quad (6.14.14)$$

iv) $(\Omega_{[k]}^{AB})^* = \epsilon^{AC} \epsilon^{BD} \Omega_{[k]}^{CD}:$

$$(\epsilon^B)^\dagger \gamma_{[k]}^\dagger \gamma_0 \epsilon^{AC} \epsilon^C = (-1)^{k(k+1)/2} \epsilon^{BD} \epsilon^{AC} \bar{\epsilon}^D \gamma_{[k]} \epsilon^C \quad (6.14.15)$$

これらより, $\Omega_{[1]}^{AB}$ と $\Omega_{[3]}^{AB}$ のみが独立で,

$$\Omega_{[1]}^{AB} = V \epsilon^{AB}; \quad V^* = V, \quad (6.14.16a)$$

$$\Omega_{[3]}^{11} = X^1 + iX^2, \quad \Omega_{[3]}^{22} = X^1 - iX^2, \quad \Omega_{[3]}^{12} = \Omega_{[3]}^{21} = iX^3;$$

$$(X^I)^* = X^I, \quad *X^I = -X^I \quad (6.14.16b)$$

と表される。

6.14.4 Fierz 恒等式

6次元スピノールに対する Fierz 恒等式は

$$(\bar{\epsilon}^A M_1 \epsilon^B)(\bar{\epsilon}^C M_2 \epsilon^D) = -\frac{1}{4}\epsilon^{AD}(\bar{\epsilon}^C M_2 V \cdot \gamma M_1 \epsilon^B) - \frac{1}{8}\Omega_{[3]}^{AD} \cdot (\bar{\epsilon}^C M_2 \gamma_{[3]} M_1 \epsilon^B) \quad (6.14.17)$$

6.14.4.1 $M_1 = \gamma_a, M_2 = \gamma_b$

$$\begin{aligned} -V_a V_b \epsilon^{AB} \epsilon^{CD} &= -\frac{1}{4}\epsilon^{AD} \epsilon^{CB} (2V_a V_b - \eta_{ab} V \cdot V) + \frac{1}{4}\epsilon^{AD} (V \cdot \Omega^{CB})_{ab} - \frac{1}{4}\epsilon^{CB} (V \cdot \Omega^{AD})_{ab} \\ &\quad - \frac{1}{8}\eta_{ab} \Omega^{AD} \cdot \Omega^{CB} + \frac{1}{8}(\Omega_a^{AD} \cdot \Omega_b^{CB} + \Omega_b^{AD} \cdot \Omega_a^{CB}) \end{aligned} \quad (6.14.18)$$

これは、次の3式と同等：

$$A1) \quad V \cdot V = 0$$

$$A2) \quad (V \cdot \Omega^{AB})_{ab} = 0$$

$$A3) \quad \Omega_a^{AD} \cdot \Omega_b^{CB} + \Omega_b^{AD} \cdot \Omega_a^{CB} = 4V_a V_b (2\delta^{AD}\delta^{CB} - \delta^{AB}\delta^{DC} - \delta^{AC}\delta^{BD})$$

6.14.4.2 $M_1 = \gamma_a, M_2 = \gamma_{bcd}$

$$\begin{aligned} \epsilon^{AB} V_a \Omega_{bcd}^{CD} &= \frac{1}{2}\epsilon^{AD} V_a \Omega_{bcd}^{CB} + \frac{1}{4}\epsilon^{CB} V_a \Omega_{bcd}^{AD} \\ &\quad + \frac{3}{4}\epsilon^{CB} \Omega_{a[cd]}^{AD} V_b - \frac{3}{4}\Omega_{a[d}^{CB} \cdot \Omega_{bc]}^{AD} \end{aligned} \quad (6.14.19)$$

これは、次式と同等：

$$A4) \quad \Omega_{a[b}^{BC} \cdot \Omega_{cd]}^{AD} = -\frac{1}{3}V_a (\epsilon^{AB}\Omega_{bcd}^{CD} + \epsilon^{AC}\Omega_{bcd}^{BD} + \epsilon^{DB}\Omega_{bcd}^{CA} + \epsilon^{DC}\Omega_{bcd}^{AB})$$

6.15 5次元理論

6.15.1 Conventions

γ 行列 :

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}, \quad (6.15.1)$$

$$(\gamma^a)^\dagger = \gamma_a = -\gamma^0 \gamma^a (\gamma^0)^{-1}, \quad (6.15.2)$$

$$\Gamma := -i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 = 1. \quad (6.15.3)$$

成分表示は

$$\gamma^0 = -i\sigma_2 \otimes \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.15.4a)$$

$$\gamma^1 = -\sigma_1 \otimes \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.15.4b)$$

$$\gamma^2 = 1 \otimes \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.15.4c)$$

$$\gamma^3 = 1 \otimes \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.15.4d)$$

$$\gamma^4 = \sigma_3 \otimes \sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (6.15.4e)$$

荷電共役行列 C は

$$C^T \gamma_a C^{-1} = \gamma_a, \quad (6.15.5)$$

$${}^T C = -C, \quad C C^\dagger = 1, \quad (6.15.6)$$

$$C = i\gamma^3 \gamma^0 = i\sigma_2 \otimes \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.15.7)$$

$$C^2 = -1, \quad C^* = C. \quad (6.15.8)$$

スピノール表現: $4_{\mathbb{C}} = 8_{\mathbb{R}}$ (no Majorana, no Weyl).

シンプレクティック Majorana スピノール: 次の条件を満たす 4 成分複素スピノールの組 (ϵ^1, ϵ^2) :

$$\tilde{\epsilon}^a = {}^T \epsilon^a C. \quad (6.15.9)$$

ここで,

$$\tilde{\epsilon}^a := i\epsilon_a^\dagger \gamma^0, \quad (6.15.10a)$$

$$\epsilon_a := \epsilon_{ab} \epsilon^b. \quad (6.15.10b)$$

具体的には,

$$\epsilon^2 = iC\gamma^0(\epsilon^1)^* \Leftrightarrow \epsilon^1 = -iC\gamma^0(\epsilon^2)^*. \quad (6.15.11)$$

一般に, $\epsilon^1 = \epsilon$ および

$$\Gamma_n := \gamma_{a_1 \dots a_n}, \quad \tilde{\Gamma}_n = \gamma_{a_n \dots a_1} \quad (6.15.12)$$

とおくと,

$$\tilde{\epsilon}^1 \Gamma_n \epsilon^1 = T_\epsilon C \Gamma_n \epsilon, \quad (6.15.13a)$$

$$\tilde{\epsilon}^2 \Gamma_n \epsilon^1 = -i\tilde{\epsilon} \Gamma_n \epsilon, \quad (6.15.13b)$$

$$\tilde{\epsilon}^1 \Gamma_n \epsilon^2 = i\tilde{\epsilon} \tilde{\Gamma}_n \epsilon, \quad (6.15.13c)$$

$$\tilde{\epsilon}^2 \Gamma_n \epsilon^2 = (-1)^n (T_\epsilon C \tilde{\Gamma}_n \epsilon)^*. \quad (6.15.13d)$$

場の物理自由度:

ヘリシティ	-2	-3/2	-1	-1/2	0	1/2	1	3/2	2
物理自由度	5	8	3	4	1	4	3	8	5
$N = 1$ Scalar multiplet	0	0	0	1	8	1	0	0	0
$N = 1$ Vector multiplet	0	0	1*	1*	1* + 1	1	1	0	0
$N = 1$ Tensor multiplet	1*	1*	1*	0	0	0	1	1	1

この表で, すべての場は実で自由度をカウント.

6.15.2 極小モデル

6.15.2.1 定式化

基本場: $g_{\mu\nu}, A_\mu, \psi_\mu$.

ボーズ場の作用積分:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int \left(R * 1 - \frac{3}{2} * F \wedge F - F \wedge F \wedge A \right). \quad (6.15.14)$$

場の方程式:

$$R_{\mu\nu} = \frac{3}{2}F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{2}F \cdot F g_{\mu\nu}, \quad (6.15.15a)$$

$$d * F + F \wedge F = 0. \quad (6.15.15b)$$

超対称変換:

$$\{Q^a, \tilde{Q}^b\} = i\epsilon^{ab}\gamma_{\mu}P^{\mu}. \quad (6.15.16)$$

これは, $Q^1 = Q$ とおくと

$$\{Q, \bar{Q}\} = -\gamma_{\mu}P^{\mu} \quad (6.15.17)$$

と同等. ψ_{μ} の変換は

$$\delta\psi_{\mu}^a = \nabla_{\mu}\epsilon^a + \frac{i}{8}(\gamma_{\mu}^{\alpha\beta} - 4\delta_{\mu}^{\alpha}\gamma^{\beta})F_{\alpha\beta}\epsilon^a. \quad (6.15.18)$$

M 理論との関係 5次元極小超重力理論はM理論の T^6 コンパクト化により得られる.

6.15.2.2 Killing スピノール

Killing スピノールから定義される微分形式: Killing スピノール ϵ からスカラ f , 1形式 V および2形式 $\Phi^{(ab)}$ を次のように定義する:

$$f = i\bar{\epsilon}\epsilon, \quad (6.15.19a)$$

$$V_{\mu} = -\bar{\epsilon}\gamma_{\mu}\epsilon, \quad (6.15.19b)$$

$$\Phi^{(11)} = (\Phi^{(22)})^* = J^{(1)} + iJ^{(2)} = -T_{\epsilon}C\gamma_{\mu\nu}\epsilon, \quad (6.15.19c)$$

$$\Phi^{(12)} = \Phi^{(21)} = -iJ^{(3)} = i\bar{\epsilon}\gamma_{\mu\nu}\epsilon. \quad (6.15.19d)$$

このとき,

$$V \cdot V = -f^2, \quad V^0 = \epsilon^{\dagger}\epsilon \quad (6.15.20)$$

が成り立つので, V は時間的ないし光的ベクトルとなる.

注 V が空間的となることがないことは, 次のようにしても示される. まず,

$$S \in \text{Spin}(4, 1) \mapsto \Lambda(S) \in \text{SO}_{+}(4, 1) : S^{-1}\gamma^a S = \Lambda(S)^a_b \gamma^b \quad (6.15.21)$$

は2重被覆表現となっている．これより，写像 $\epsilon \rightarrow V : \mathcal{S}_{4,1} \rightarrow E^{4,1}$ は，スピノール空間 $\mathcal{S}_{4,1} \cong \mathbb{R}^8$ における $\text{Spin}(4,1)$ の各軌道空間から，対応する $E^{4,1}$ の $\text{SO}_+(4,1)$ の軌道空間の上への写像を与える．したがって，もし，空間的 V がこの写像の像に含まれるなら， V の任意の $\text{SO}_+(4,1)$ による変換，特に， $V^0 = 0$ となるベクトルも像に含まれる．ところが， $V^0 = \epsilon^\dagger \epsilon$ より， $\epsilon \neq 0$ なら $V^0 > 0$ ．よって， V は空間的となることはない．

代数的関係式：

$$i_V J^{(i)} = 0, \quad (6.15.22a)$$

$$i_V *J^{(i)} = -f J^{(i)}, \quad (6.15.22b)$$

$$J_{\mu\alpha}^{(i)} J_{\nu}^{(j)\alpha} = \delta_{ij} (f^2 g_{\mu\nu} + V_\mu V_\nu) - \epsilon_{ijk} f J_{\mu\nu}^{(k)}, \quad (6.15.22c)$$

$$J^{(i)} \wedge J^{(j)} = -2\delta_{ij} f *V, \quad (6.15.22d)$$

$$V_\mu \gamma^\mu \epsilon = i f \epsilon, \quad (6.15.22e)$$

$$\Phi_{\mu\nu}^{(ab)} \gamma^{\mu\nu} \epsilon^c = -8 f \epsilon^{c(a} \epsilon^{b)}, \quad (6.15.22f)$$

$$(6.15.22g)$$

微分関係式：

$$df = -i_V F, \quad (6.15.23a)$$

$$\nabla_\mu V_\nu = -f F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta\gamma} F^{\alpha\beta} V^\gamma, \quad (6.15.23b)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu J_{\nu\lambda}^{(i)} &= F_\mu{}^\alpha (*J^{(i)})_{\alpha\nu\lambda} + F^\alpha{}_{[\nu} (*J^{(i)})_{\lambda]\mu\alpha} \\ &\quad + \frac{1}{2} g_{\mu[\nu} F^{\alpha\beta} (*J^{(i)})_{\lambda]\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (6.15.23c)$$

$$(6.15.23d)$$

これらのうち，(6.15.23b) は

$$\nabla_\mu V_\nu + \nabla_\nu V_\mu = 0, \quad (6.15.24a)$$

$$dV = -2f F - *(F \wedge V), \quad (6.15.24b)$$

と同等．特に， V は Killing ベクトルとなる．また，(6.15.23a) より，

$$dJ^{(i)} = 0, \quad (6.15.25a)$$

$$d *J^{(i)} = -F \wedge J^{(i)}. \quad (6.15.25b)$$

この式と (6.15.23a), (6.15.22a) および $dF = 0$ より,

$$\mathcal{L}_V f = 0, \quad \mathcal{L}_V F = 0, \quad \mathcal{L}_V J^{(i)} = 0 \quad (6.15.26)$$

を得る.

6.15.2.3 V が時間的な場合の一般解

(Gauntlett JP, Gutowski JB, Hull CM, Pakis S & Reall HS (2002)[178])

A. $f > 0$ の場合: このとき, まず, V が時間的 Killing より,

$$ds^2 = -f^2(dt + \omega)^2 + f^{-1}h_{mn}dx^m dx^n, \quad (6.15.27)$$

$$V^* = \partial_t, \quad V_* = -f^2(dt + \omega) \quad (6.15.28)$$

と書ける. ここで, $f, h_{mn}, \omega = \omega_m dx^m$ は x^m のみに依存.

次に, (6.15.24b) より

$$i_V *dV = -2fi_V *F - df \wedge V - f^2F \quad (6.15.29)$$

となるので,

$$F = \frac{1}{3f^2}df \wedge V - \frac{2}{3f}dV + \frac{1}{3f^2}i_V *dV, \quad (6.15.30a)$$

$$i_V *F = -\frac{2}{3f}df \wedge V + \frac{1}{3}dV - \frac{2}{3f}i_V *dV \quad (6.15.30b)$$

を得る. $fd\omega$ を (X_4, h) 上で双対成分と反双対成分に分解する:

$$fd\omega = G^+ + G^-; *_h G^\pm = \pm G^\pm. \quad (6.15.31)$$

すると,

$$V_* = -f^2(dt + \omega) \quad (6.15.32)$$

より

$$\frac{1}{f}dV = \frac{2}{f^2}df \wedge V - G^+ - G^- \quad (6.15.33)$$

を得る. これと, 一般に X_4 上の p -形式 χ_p に対して,

$$*_\chi_p = -f^{2p-5}V_* \wedge *_h \chi_p, \quad (6.15.34a)$$

$$i_V *_\chi_p = f^{2p-3} *_h \chi_p \quad (6.15.34b)$$

が成り立つので,

$$\frac{1}{f^2}i_V *dV = -G^+ + G^-. \quad (6.15.35)$$

よって,

$$F = -\frac{1}{f^2}df \wedge V + \frac{1}{3}G^+ + G^-. \quad (6.15.36)$$

さらに,

$$\theta^0 = f(dt + \omega) = -\frac{1}{f}V_*. \quad (6.15.37)$$

とおくと,

$$d\theta^0 = -\frac{1}{f}dV + \frac{1}{f^2}df \wedge V = -\frac{1}{f^2}df \wedge V + G^+ + G^-. \quad (6.15.38)$$

よって,

$$F = d\theta^0 - \frac{2}{3}G^+. \quad (6.15.39)$$

これと $dF = 0$ より

$$dG^+ = 0 \quad (6.15.40)$$

さらに, (6.15.15b) より,

$$\Delta_h f^{-1} = \frac{4}{9}G^+ \cdot G^+. \quad (6.15.41)$$

次に, (6.15.22a) と (6.15.26) より, $J^{(i)}$ は X_4 上の t に依存しない 2 形式と見なされる. このとき, $\hat{J}^{(i)m}_n = h^{ml}J^{(i)}_{ln}$ とおくと, (6.15.22c) は

$$\hat{J}^{(i)2} = -1, \quad (6.15.42a)$$

$$\hat{J}^{(i)}\hat{J}^{(j)} = \epsilon_{ijk}\hat{J}^{(k)} \quad (i \neq j) \quad (6.15.42b)$$

と書き換えられる. また, (6.15.22b) は

$$*_h J^{(i)} = -J^{(i)} \quad (6.15.43)$$

となる. さらに, (6.15.23c) は

$$*J = -f^{-1}V_* \wedge *_h J, \quad (6.15.44)$$

$$F_\mu{}^\gamma (*J)_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{2}{f}V_{[\alpha}(*_h J)_{\beta]\gamma}F_\mu{}^\gamma + \frac{1}{f}\nabla_\mu f(*_h J)_{\alpha\beta}, \quad (6.15.45)$$

$$F^{\beta\gamma}(*J)_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{2}{f}V_\alpha(*_h J) \cdot F + \frac{2}{f}\nabla^\beta f(*_h J)_{\alpha\beta} \quad (6.15.46)$$

より,

$$\begin{aligned} (\nabla_m J_{nl})^\perp &= \frac{1}{f} D_m f (*_h J)_{nl} + \frac{1}{f} D_{[l} f (*_h J)_{n]m} \\ &\quad + \frac{1}{f} h_{m[n} (*_h J)_{l]p} D^p f. \end{aligned} \quad (6.15.47)$$

D_m を計量 h に関する X_4 上の Riemann 接続とすると, この式は

$$D_m \hat{J}^{(i)} = 0 \quad (6.15.48)$$

と同等. 以上より, (X_4, h) は複素構造の組 $(\hat{J}^{(1)}, \hat{J}^{(2)}, \hat{J}^{(3)})$ が反自己双対な超 Kähler 多様体となる.

以上の条件が満たされるとき, 基底

$$\theta^0 = f(dt + \omega) = -f^{-1} V_*, \quad \theta^I = f^{-1/2} \hat{\theta}^I, \quad (6.15.49)$$

($\hat{\theta}^I$ は h_{mn} の正規直交基底) に関する接続形式は

$$\omega_{0I} = \frac{D_I f}{f^{1/2}} \theta^0 + \frac{f}{2} (d\omega)_{IJ} \theta^J, \quad (6.15.50a)$$

$$\omega_{IJ} = \hat{\omega}_{IJ} + \frac{1}{2f^{1/2}} \left(D_I f \hat{\theta}_J - D_J f \hat{\theta}_I \right) + \frac{f}{2} (d\omega)_{IJ} \theta^0 \quad (6.15.50b)$$

ここで, $D_I = \hat{e}_I^m D_m$.

これより,

$$V^\mu \nabla_\mu \epsilon = \partial_t \epsilon + \frac{f^{1/2}}{2} D_m f \hat{\gamma}^m \gamma^0 + \frac{f^3}{8} (d\omega)_{mn} \hat{\gamma}^{mn} \quad (6.15.51)$$

ここで, $\hat{\gamma}^m = \hat{e}_I^m \gamma^I$. また,

$$V^\mu \delta \psi_\mu = V^\mu \nabla_\mu \epsilon - \frac{1}{8} \left\{ i f^2 \gamma^0 \hat{\gamma}^{mn} F_{mn} + 4i f^{1/2} \hat{\gamma}^m D_m f \right\} \epsilon. \quad (6.15.52)$$

さらに, E^4 の γ 行列に対して,

$$*\hat{\gamma}_{[2]} = -(*\hat{\gamma}_{[4]})\hat{\gamma}_{[2]} \quad (6.15.53)$$

および $\gamma^{1234} = i\gamma^0$ より,

$$(1 + *)\hat{\gamma}_{[2]} = (1 - *\hat{\gamma}_{[4]})\hat{\gamma}_{[2]} = (1 - i\gamma^0)\hat{\gamma}_{[2]} \quad (6.15.54)$$

よって,

$$V^\mu \delta \psi_\mu = \partial_t \epsilon + \left\{ \frac{f^2}{48} (4G_{mn}^+ + G_{mn}^-) \hat{\gamma}^{mn} + \frac{i}{2} f^{1/2} D_m f \hat{\gamma}^m \right\} (1 - i\gamma^0) \epsilon. \quad (6.15.55)$$

次に,

$$\begin{aligned} \delta \psi_m &= \nabla_m \epsilon + \frac{i}{4f} (\hat{\gamma}_m{}^l D_l f - 2D_m f) \gamma^0 \\ &\quad + f^{1/2} (\hat{\gamma}_m{}^{nl} F_{nl} - 4\hat{\gamma}^l F_{ml}) \end{aligned} \quad (6.15.56)$$

および

$$\nabla_m \epsilon = D_m \epsilon + \frac{f^{1/2}}{4} G_{mn} \gamma^m \gamma^0 - \frac{1}{4f} \hat{\gamma}_m{}^l D_l f \quad (6.15.57)$$

$$\hat{\gamma}_{mnl} F^{nl} = -2 * \hat{\gamma}_{[4]} \hat{\gamma}^p (*F)_{pm} \quad (6.15.58)$$

より,

$$\begin{aligned} \delta \psi_m &= D_m \epsilon - \frac{1}{2f} D_m f \epsilon + \frac{1}{4f} (-\hat{\gamma}_m{}^l D_l f + 2D_m f) (1 - i\hat{\gamma}^0) \epsilon \\ &\quad + i \frac{f^{1/2}}{2} F_{pm} \hat{\gamma}^p (1 - i\hat{\gamma}^0) \epsilon. \end{aligned} \quad (6.15.59)$$

以上より,

$$\epsilon(t, x) = f^{1/2} \eta; \quad \gamma^{1234} \eta (= i\gamma^0 \eta) = \eta. \quad (6.15.60)$$

とおくと, ϵ に対する方程式は,

$$\partial_t \eta = 0, \quad D_m \eta = 0 \quad (6.15.61)$$

となる. 複素構造が反自己双対な超 Kähler 多様体ではこの方程式を満たす解が固定点での任意の初期値に対し常に存在.

さらに, Killing 方程式の整合性条件より,

$$0 = E_{\mu\nu} \gamma^\nu \epsilon - \frac{i}{2} [(d * F + F \wedge F)]^\nu (2g_{\nu\mu} - \gamma_{\mu\nu}) \epsilon - \frac{i}{12} dF_{***} (\gamma_\mu^{***} - 6\delta_\mu^* \gamma^{**}) \epsilon. \quad (6.15.62)$$

したがって, 上記の解に対して,

$$E_{\mu\nu} \gamma^\nu \epsilon = 0 \quad (6.15.63)$$

これより,

$$E_{\mu\nu}V^\nu = 0, \quad E_{\mu\nu}E_\mu^\nu = 0 \text{ (no sum on } \mu) \quad (6.15.64)$$

を得る. これらの式は, V が時間的な場合, $E_{\mu\nu} = 0$ と同値となる.

以上より, 反自己双対的 Kähler 多様体 (X_4, h) とその上の自己双対形式

$$dG^+ = 0, \quad *_h G^+ = G^+ \quad (6.15.65)$$

が与えられると,

$$\Delta_h f^{-1} = \frac{4}{9} G^+ \cdot G^+, \quad (6.15.66a)$$

$$fd\omega = G^+ + G^-; \quad *_h G^- = -G^- \quad (6.15.66b)$$

より, f, ω が決まり, 時空計量と F は

$$ds^2 = -f^2(dt + \omega)^2 + f^{-1}h_{mn}dx^m dx^n, \quad (6.15.67a)$$

$$F = df \wedge (dt + \omega) + \frac{1}{3}G^+ + G^- = d[f(dt + \omega)] - \frac{2}{3}G^+ \quad (6.15.67b)$$

で与えられる. また, Killing スピノールは

$$\epsilon(t, x) = f^{1/2}\eta(x); \quad (6.15.68a)$$

$$D_m \eta = 0, \quad (6.15.68b)$$

$$\gamma^{1234}\eta = \eta. \quad (6.15.68c)$$

B. $f < 0$ の場合

$$ds^2 = -f^2(dt + \omega)^2 + |f|^{-1}h_{mn}dx^m dx^n, \quad (6.15.69a)$$

$$|f|d\omega = G^+ + G^-; \quad *_h G^\pm = \pm G^\pm, \quad (6.15.69b)$$

$$F = (dt + \omega) \wedge d|f| - \frac{1}{3}G^- - G^+, \quad (6.15.69c)$$

$$dG^- = 0, \quad (6.15.69d)$$

$$\Delta_h |f|^{-1} = \frac{4}{9}G^- \cdot G^-, \quad (6.15.69e)$$

$$\hat{j}^{(i)} \hat{j}^{(j)} = -\delta^{ij} \mathbf{1} + \epsilon^{ijk} \hat{j}^{(k)}, \quad (6.15.69f)$$

$$*_h J^{(i)} = J^{(i)}, \quad (6.15.69g)$$

$$D_m \hat{j}^{(i)} = 0. \quad (6.15.69h)$$

この解に対して, Killing スピノールは

$$\epsilon(t, x) = |f|^{1/2} \eta(x); \quad (6.15.70a)$$

$$D_m \eta = 0, \quad (6.15.70b)$$

$$\gamma^{1234} \eta = -\eta. \quad (6.15.70c)$$

6.15.2.4 Static solution

Killing ベクトルが超曲面に直交する条件は $G^+ = 0$ と同値で, このとき, 一般解は

$$ds^2 = -f^2 dt^2 + f^{-1} h_{mn} dx^m dx^n, \quad (6.15.71a)$$

$$\Delta_h f^{-1} = 0, \quad (6.15.71b)$$

$$F = df \wedge dt. \quad (6.15.71c)$$

6.15.2.5 X_4 が平坦な例

E^4 は次の複素構造に関して, 反自己双対的超 Kähler となる:

$$J^{(1)} = dx^1 \wedge dx^4 + dx^3 \wedge dx^2 = (1 - *) dx^{14}, \quad (6.15.72a)$$

$$J^{(2)} = dx^4 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^1 = (1 - *) dx^{42}, \quad (6.15.72b)$$

$$J^{(3)} = dx^4 \wedge dx^3 + dx^1 \wedge dx^2 = (1 - *) dx^{43} \quad (6.15.72c)$$

いま, $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ に Euler 角を

$$x^1 + ix^2 = r \cos \frac{\theta}{2} e^{i(\psi+\phi)/2}, \quad x^3 + ix^4 = r \sin \frac{\theta}{2} e^{i(\psi-\phi)/2} \quad (6.15.73)$$

により導入する. このとき, $U \in \text{SU}(2)$ は

$$U = D \left(\frac{\phi}{2} \right) R \left(\frac{\theta}{2} \right) D \left(\frac{\psi}{2} \right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\psi+\phi}{2}} & -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\psi-\phi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\psi-\phi}{2}} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\psi+\phi}{2}} \end{pmatrix} \quad (6.15.74)$$

と表される. ここで,

$$D(\alpha) := \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \quad R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (6.15.75)$$

この座標系では, $i\sigma_I/2$ に対応する $SU(2)$ の左不変基底 χ_L^I は

$$\chi_L^1 = \sin \psi d\theta - \cos \psi \sin \theta d\phi, \quad (6.15.76a)$$

$$\chi_L^2 = -\cos \psi d\theta - \sin \psi \sin \theta d\phi, \quad (6.15.76b)$$

$$\chi_L^3 = d\psi + \cos \theta d\phi \quad (6.15.76c)$$

と表され, 次の Maurer-Cartan 方程式を満たす :

$$d\chi_L^I = \frac{1}{2}\epsilon_{IJK}\chi_L^J \wedge \chi_L^K. \quad (6.15.77)$$

対応する右不変基底 χ_R^I は

$$\chi_R^1 = -\sin \phi d\theta + \cos \phi \sin \theta d\psi, \quad (6.15.78a)$$

$$\chi_R^2 = -\cos \phi d\theta - \sin \phi \sin \theta d\psi, \quad (6.15.78b)$$

$$\chi_R^3 = d\phi + \cos \theta d\psi \quad (6.15.78c)$$

と表され, 次の Maurer-Cartan 方程式を満たす :

$$d\chi_R^I = -\frac{1}{2}\epsilon_{IJK}\chi_R^J \wedge \chi_R^K. \quad (6.15.79)$$

E^4 の計量は

$$ds^2(E^4) = dr^2 + \frac{r^2}{4} \{(\chi^1)^2 + (\chi^2)^2 + (\chi^3)^2\} \quad (6.15.80)$$

と表される. また, 体積要素は

$$\begin{aligned} \Omega(E^4) &= dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \\ &= \frac{r^3}{8} dr \wedge \chi^1 \wedge \chi^2 \wedge \chi^3 \\ &= \frac{r^3}{8} \sin \theta dr \wedge d\phi \wedge d\theta \wedge d\psi \end{aligned} \quad (6.15.81)$$

超 Kähler 計量を与える $(J^{(1)}, J^{(2)}, J^{(3)})$ は

$$J^{(I)} = \frac{1}{4}d(r^2\chi_R^I) \quad (6.15.82)$$

と表される. また, χ_L^I は自己双対的超 Kähler 構造を与える :

$$\bar{J}^{(1)} := (1 + *)dx^{14} = \frac{1}{4}d(r^2\chi_L^1) \quad (6.15.83a)$$

$$\bar{J}^{(2)} := (1 + *)dx^{24} = \frac{1}{4}d(r^2\chi_L^2) \quad (6.15.83b)$$

$$\bar{J}^{(3)} := (1 + *)dx^{34} = \frac{1}{4}d(r^2\chi_L^3) \quad (6.15.83c)$$

BMPV 解 ω と f が

$$f = f(r), \quad \omega = \Psi(r)\chi_L^3 \quad (6.15.84)$$

の形を持つとすると,

$$fd\omega = f \left(\Psi' + \frac{2}{r}\Psi \right) dr \wedge \chi_L^3 \quad (6.15.85)$$

より,

$$G^+ = \frac{f}{2} \left(\Psi' + \frac{2}{r}\Psi \right) (1 + *) dr \wedge \chi_L^3 = \frac{f}{r^3} (r^2\Psi)' \bar{J}^3 \quad (6.15.86)$$

よって, 条件 $dG^+ = 0$ と f の方程式は

$$G^+ = \chi \bar{J}^3, \quad (6.15.87a)$$

$$\frac{f}{r^3} (r^2\Psi)' = \chi, \quad (6.15.87b)$$

$$\Delta f^{-1} = \frac{1}{r^3} (r^3(f^{-1})')' = \frac{8\chi^2}{9}. \quad (6.15.87c)$$

この一般解は,

$$f^{-1} = \lambda + \frac{\mu}{r^2} + \frac{\chi^2}{9} r^2, \quad (6.15.88a)$$

$$\Psi = \frac{j}{2r} + \chi \left(\frac{\mu}{2} + \frac{\lambda}{4} r^2 + \frac{\chi^2}{54} r^4 \right). \quad (6.15.88b)$$

$\lambda \neq 0$ のときには, スケーリングで $\lambda = 1$ とできる. このとき, さらに $\chi = 0$ なら,

$$f^{-1} = 1 + \frac{\mu}{r^2}, \quad \omega = \frac{j}{2r^2} \chi_L^3 \quad (6.15.89)$$

となり, BMPV 解が得られる [52]. この解の質量と各運動量は,

$$M = \frac{3\pi\mu}{4G}, \quad J = -\frac{\pi j}{2G}. \quad (6.15.90)$$

また, $|j| \leq \mu^{3/2}$ のとき, CTC はホライズン内に限られる.

一方, $\chi \neq 0$ のときは漸近的に平坦でなく, 一般にホライズンの外にも CTC が存在する.

5次元 Gödel 解: ω と f が

$$f = f(r), \quad \omega = \Psi(r)\chi_R^3 \quad (6.15.91)$$

の形を持つとすると

$$fd\omega = f \left(\Psi' - \frac{2}{r}\Psi \right) dr \wedge \chi_R^3 \quad (6.15.92)$$

より,

$$G^+ = \frac{f}{2} \left(\Psi' - \frac{2}{r}\Psi \right) (1 + *)dr \wedge \chi_R^3 = -r^5 f \left(\frac{\Psi}{r^2} \right)' \frac{1}{4} d \left(\frac{\chi_R^3}{r^2} \right). \quad (6.15.93)$$

よって, 条件 $dG^+ = 0$ と f の方程式は

$$G^+ = -\frac{\chi}{4} d \left(\frac{\chi_R^3}{r^2} \right), \quad (6.15.94a)$$

$$r^5 f \left(\frac{\Psi}{r^2} \right)' = \chi, \quad (6.15.94b)$$

$$\Delta f^{-1} = \frac{1}{r^3} (r^3(f^{-1})')' = \frac{8\chi^2}{9r^8}. \quad (6.15.94c)$$

この一般解は,

$$f^{-1} = \lambda + \frac{\mu}{r^2} + \frac{\chi^2}{27r^6}, \quad (6.15.95a)$$

$$\Psi = \gamma r^2 - \chi \left(\frac{\lambda}{4r^2} + \frac{\mu}{6r^4} + \frac{\chi^2}{270r^8} \right). \quad (6.15.95b)$$

$\lambda \neq 0$ ($\Rightarrow \lambda = 1$) のとき, この解は漸近的に平坦で正則. 特に, $\mu = \chi = 0, \gamma \neq 0$ のとき, 解は

$$ds^2 = -(dt + \gamma r^2 \chi_R^3)^2 + dr^2 + \frac{r^2}{4} \{(\chi_R^1)^2 + (\chi_R^2)^2 + (\chi_R^3)^2\} \quad (6.15.96a)$$

$$F = \gamma d(r^2 \chi_R^3) \quad (6.15.96b)$$

となり, 明らかに $SU_L(2) \times U_R(1)$ 対称性をもつ. この解はさらに, $V = \partial_t$ 以外に次の Killing ベクトルをもち, 一様であることもわかる:

$$\begin{aligned} B_1 &= \partial_1 - \frac{x^2}{2} \partial_t, & B_2 &= \partial_2 + \frac{x^1}{2} \partial_t, \\ B_3 &= \partial_3 + \frac{x^4}{2} \partial_t, & B_4 &= \partial_4 - \frac{x^3}{2} \partial_t. \end{aligned} \quad (6.15.97)$$

この解はまた, 任意の点を通る CTC をもち, 4次元 Gödel 解の 5次元版と見なされる. この解はこの次元での極大 SUSY (8kis) をもつ.

超対称ブラックリング解: 4次元 Euclid 空間 E^4 に対する次の座標系 (y, ψ, x, ϕ) :

$$ds^2(E^4) = \frac{R^2}{(x-y)^2} \left[\frac{dy^2}{y^2-1} + (y^2-1)d\psi^2 + \frac{dx^2}{1-x^2} + (1-x^2)d\phi^2 \right];$$

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -\infty < y \leq -1 \quad (6.15.99)$$

を用いて,

$$G^+ = \frac{3q}{4}(dx \wedge d\phi + dy \wedge d\psi) \quad (6.15.100)$$

とおくと, 解は

$$f^{-1} = 1 + \frac{Q - q^2}{2R^2}(x - y) - \frac{q^2}{4R^2}(x^2 - y^2), \quad (6.15.101a)$$

$$\omega = \omega_\psi d\psi + \omega_\phi d\phi; \quad (6.15.101b)$$

$$\omega_\phi = -\frac{q}{8R^2}(1 - x^2) [3Q^2 - q^2(3 + x + y)], \quad (6.15.101c)$$

$$\omega_\psi = \frac{3}{2}q(1 + y) + \frac{q}{8R^2}(1 - y^2) [3Q^2 - q^2(3 + x + y)] \quad (6.15.101d)$$

また, ゲージ場のポテンシャルは

$$A = f(dt + \omega) - \frac{q}{2} \{ (1+x)d\phi + (1+y)d\psi \}. \quad (6.15.102)$$

座標変換

$$\rho \sin \Theta = \frac{R\sqrt{y^2-1}}{x-y}, \quad \rho \cos \Theta = \frac{R\sqrt{1-x^2}}{x-y} \quad (6.15.103)$$

により,

$$dx^2(E^4) = d\rho^2 + \rho^2 (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\psi^2 + \cos^2 \Theta d\phi^2), \quad (6.15.104a)$$

$$f^{-1} = 1 + \frac{Q - q^2}{\Sigma} + \frac{q^2 \rho^2}{\Sigma^2}, \quad (6.15.104b)$$

$$\omega_\phi = -\frac{q\rho^2 \cos^2 \Theta}{2\Sigma^2} \left[3Q - q^2 \left(3 - \frac{2\rho^2}{\Sigma} \right) \right], \quad (6.15.104c)$$

$$\omega_\psi = -\frac{6qR^2 \rho^2 \sin^2 \Theta}{\Sigma(\rho^2 + R^2 + \Sigma)} - \frac{q\rho^2 \sin^2 \Theta}{2\Sigma^2} \left[3Q - q^2 \left(3 - \frac{2\rho^2}{\Sigma} \right) \right] \quad (6.15.104d)$$

ここで,

$$\Sigma^2 = (\rho^2 - R^2)^2 + 4R^2 \rho^2 \cos^2 \Theta. \quad (6.15.105)$$

これより，質量と角運動量は

$$M = \frac{3\pi}{4G}Q, \quad (6.15.106a)$$

$$J_\phi = \frac{\pi}{8G}q(3Q - q^2), \quad J_\psi = \frac{\pi}{8G}q(6R^2 + 3Q - q^2) \quad (6.15.106b)$$

また， $R \rightarrow 0$ 極限で，BMPV 解に帰着する．

CTC が存在しない条件は，

$$g_{\psi\psi} = 4 \left[\frac{(Q - q^2)^2}{4q^2} - R^2 \right] + \frac{q^2}{4}(1 - x^2) + O(y^{-1}) \quad (6.15.107)$$

等より，

$$L^2 := 3 \left[\frac{(Q - q^2)^2}{4q^2} - R^2 \right] > 0. \quad (6.15.108)$$

ホライズンは， $y \rightarrow -\infty$ で，座標系

$$r = -R/y, \quad (6.15.109a)$$

$$dt = dv - B(r)dr, \quad d\phi = d\phi' - C(r)dr, \quad d\psi = d\psi' - (6.15.109b)$$

$$B(r) = \frac{q^2 L}{4Rr^2} + \frac{B_1}{r} + B_0, \quad C(r) = -\frac{q}{2Lr} + C_0, \quad (6.15.109c)$$

$$B_1 = \frac{Q + 2q^2}{4L} + \frac{(Q - q^2)L}{3R^2}, \quad (6.15.109d)$$

$$B_0 = \frac{q^2 L}{8R^3} + \frac{2L}{3R} - \frac{R}{2L} + \frac{3R^3}{2L^3} + \frac{3(Q - q^2)^3}{16q^2 RL^3}, \quad (6.15.109e)$$

$$C_0 = -\frac{(Q - q^2)^3}{8q^3 RL^3} \quad (6.15.109f)$$

を用いると，計量は $r = 0$ で正則で，ホライズンの計量は

$$ds_H^2 = L^2 d\psi'^2 + \frac{q^2}{4}(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\chi^2). \quad (6.15.110)$$

ここで， $x = \cos \theta$, $\chi = \phi - \psi$.

最後に，電荷と双極子電荷は

$$\mathcal{Q} = \frac{4}{3}M, \quad (6.15.111a)$$

$$D = \frac{1}{16\pi G} \int_{S^2} F = \frac{q}{8G}. \quad (6.15.111b)$$

ここで， S^2 は $t, \psi, y = \text{const.}$

6.15.2.6 光的一般解

V が光的 Killing ベクトルのとき, $f = 0$ より, (6.15.23a) と (6.15.24b) は

$$i_V F = 0, \quad dV = -*(F \wedge V). \quad (6.15.112)$$

これより,

$$V \wedge dV = -*(i_V(F \wedge V)) = *(Ff) = 0, \quad (6.15.113a)$$

$$\nabla_V V = i_V dV = *(V \wedge F \wedge V) = 0. \quad (6.15.113b)$$

よって, 適当な関数 u, H が存在して,

$$V = H^{-1} du. \quad (6.15.114)$$

したがって, V のアフィンパラメータを v として,

$$ds^2 = -H^{-1} du(\mathcal{F} du + 2dv) + H^2 \gamma_{mn} (dy^m + a^m du)(dy^n + a^n du). \quad (6.15.115)$$

ここで, $H = H(u, y)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(u, y)$, $\gamma_{mn} = \gamma_{mn}(u, y)$.

次に, (6.15.22a) と (6.15.22b),

$$i_V J^{(i)} = 0, \quad V \wedge J^{(i)} = 0 \quad (6.15.116)$$

より,

$$J^{(i)} = J_m^{(i)} du \wedge dy^m. \quad (6.15.117)$$

したがって, (6.15.25a), $dJ^{(i)} = 0$, より

$$\partial_{[m} J_n^{(i)} = 0 \Rightarrow J_m^{(i)} = \partial_m x^i. \quad (6.15.118)$$

これより,

$$J^{(i)} = du \wedge dx^i \quad (6.15.119)$$

で, y^i を x^i に座標変換すれば, (6.15.22c) は

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} \quad (6.15.120)$$

を与える. よって,

$$ds^2 = -H^{-1} du(\mathcal{F} du + 2dv) + H^2 (d\mathbf{x} + \mathbf{a} du)^2. \quad (6.15.121)$$

次に,

$$\theta^+ = V_* = H^{-1}du, \quad \theta^- = -(dv + \frac{1}{2}\mathcal{F}du), \quad \theta^i = H(dx^i + a^i du) \quad (6.15.122)$$

とおくと, $i_V F = 0$ より

$$F = F_{+i}\theta^+ \wedge \theta^i + F'; \quad F' = \frac{1}{2}F_{ij}\theta^i \wedge \theta^j. \quad (6.15.123)$$

ここで,

$$F \wedge V = *dV, \quad (6.15.124)$$

$$*(du \wedge \omega_p) = (-1)^p H^{3-2p} du \wedge *_X \omega_p \quad (6.15.125)$$

より,

$$F' = -H^{-2} *_X dH. \quad (6.15.126)$$

また, (6.15.23c) より

$$F_{+i} = -\frac{1}{3}H(*da)_i \quad (6.15.127)$$

よって,

$$F = -\frac{1}{3H^2}\epsilon_{ijk}\partial_j(H^2 a_k)du \wedge dx^i - \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\partial_k H dx^i \wedge dx^j. \quad (6.15.128)$$

これを dF に代入して

$$\Delta_X H = 0, \quad (6.15.129a)$$

$$\partial_u \nabla H = \frac{1}{3}\nabla \times (H^{-2}\nabla \times (H^3 \mathbf{a})). \quad (6.15.129b)$$

最後に, (6.15.22d) より,

$$\gamma^+ \epsilon = 0 \quad (6.15.130)$$

となり, この条件の下で Killing スピノールに対する方程式は

$$\partial_\mu \epsilon = 0 \quad (6.15.131)$$

に帰着する.

Killing スピノール方程式の解があるとき, 整合性条件より $E_{-\mu} = E_{+i} = E_{ij} = 0$ が得られるので, Einstein 方程式のうち $E_{++} = 0$ のみが必要. この方程式は

$$\Delta_X \mathcal{F} = 2H^2 D_u W_{ii} + 2HW_{(ij)}W_{(ij)} + \frac{2}{3}HW_{[ij]}W_{[ij]} \quad (6.15.132)$$

となる。ここで、

$$D_u = \partial_u - a_i \partial_i, \quad (6.15.133a)$$

$$W_{ij} = D_u H \delta_{ij} - H \partial_j a_i. \quad (6.15.133b)$$

以上より、まず $X_3 = E^3$ 上の調和関数 H が与えられると、

$$\partial_u \nabla H = \frac{1}{3} \nabla \times (H^{-2} \nabla \times (H^3 \mathbf{a})). \quad (6.15.134)$$

により、 \mathbf{a} が調和関数 \mathcal{H} の自由度を除いて決まる。さらに、Einstein 方程式 $R_{++} = 0$ より、 \mathcal{F} が調和関数 \mathcal{F}_0 の自由度を除いて決まる。したがって、一般解は、3つの (u に依存した) 調和関数 $H, \mathcal{H}, \mathcal{F}_0$ により記述される。

6.15.2.7 pp-wave

一般に、適当な関数 u が存在して、 $k = du$ が光的、測地的で発散、シアー、回転がゼロとなる時、すなわち

$$\nabla_\mu k_\nu = b_\mu k_\nu + k_\mu c_\nu, \quad (k \cdot c = 0) \quad (6.15.135)$$

が成り立つとき、時空は平面波 (plane-fronted wave) を表すという。さらに、 $\nabla_\mu k_\nu = 0$ となる時 pp-wave (plane-fronted wave with parallel rays) という。上で求めた解は、

$$\nabla_\mu V_\nu + \nabla_\nu V_\mu = 0, \quad dV = -*(F \wedge V) = H^{-3} V \wedge dH \quad (6.15.136)$$

より、常に plane-fronted wave である。

また、pp-wave となる条件は $H = H(u)$ で、このとき、座標変換で $H = 1$ とでき、 \mathbf{a} の方程式は

$$\nabla \times \mathbf{a} = \nabla \phi \quad (6.15.137)$$

となる。この解は、適当な座標変換

$$\mathbf{x} = O(u) \mathbf{x}' + \mathbf{v}(u) \quad (6.15.138)$$

により、次の形に変換できる。

$$ds^2 = -\mathcal{F} du^2 - 2dudv + d\mathbf{x}^2, \quad (6.15.139a)$$

$$F = \frac{2}{3} du \wedge \omega_1(u), \quad (6.15.139b)$$

$$\Delta_X \mathcal{F} = \frac{4}{3} \omega_1^2. \quad (6.15.139c)$$

6.15.2.8 極大超対称解

ブラックストリング解： $\mathcal{F} = \mathbf{a} = 0, H = H(x)$ ($\Delta_X H = 0$) は解となる。特に,

$$ds^2 = -2H^{-1}dudv + H^2d\mathbf{x}^2, \quad (6.15.140a)$$

$$F = -\frac{1}{2}\partial_k H dx^i \wedge dx^j, \quad (6.15.140b)$$

$$H = 1 + \frac{R}{2r} \quad (6.15.140c)$$

はブラックストリング解 [193] を与える。

$\text{AdS}_3 \times S^2$ ： ブラックストリング解の近ホライズン極限 ($r \rightarrow 0$) は、次の $\text{AdS}_3 \times S^2$ 解を与える：

$$ds^2 = R^2 \left[-\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\psi^2 + \frac{1}{4} d\Omega_2^2 \right] \quad (6.15.141a)$$

$$F = \frac{R}{2} \cos \theta d\theta \wedge d\phi, \quad (6.15.141b)$$

極大対称 pp 波： $\text{AdS}_3 \times S^2$ において、座標変換 $(t, \rho, \psi, \theta, \phi) \rightarrow (u, v, \psi, r, z)$,

$$u = t + \frac{\phi}{2}, \quad v = \frac{R^2}{2} \left(t - \frac{\phi}{2} \right), \quad \rho = \frac{r}{R}, \quad \theta = -\frac{2z}{R} \quad (6.15.142)$$

を施し、 $R \rightarrow \infty$ 極限 (Penrose 極限) を取ると、極大超対称 pp 波解が得られる：

$$ds^2 = -2dudv - \left(z^2 + \frac{r^2}{4} \right) du^2 + dr^2 + r^2 d\psi^2 + dz^2 \quad (6.15.143a)$$

$$F = du \wedge dz. \quad (6.15.143b)$$

極小 5D SUGRA での光的な極大超対称解は、この pp 波解と $\text{AdS}_3 \times S^2$ で尽くされる。

6.15.3 ベクトル超組との結合

5次元極小 SUGRA+ $U(1)^{N-1}$ ゲージ場系の超対称解の分類

Reference

- Gauntlett et al (2002)[178]
- Gauntlett JP, Gutowski JB (2004,2005)[175, 176]

Killing スピノール \Rightarrow 微分形式 :

$$f = i\bar{\epsilon}\epsilon, \quad V_\mu = -\bar{\epsilon}\gamma_\mu\epsilon, \quad J^{(1)} + iJ^{(2)} = -\frac{T}{\epsilon}C\gamma_{\mu\nu}\epsilon, \quad J^{(3)} = -\bar{\epsilon}\gamma_{\mu\nu}\epsilon. \quad (6.15.144)$$

- $V \cdot V = -f^2$: V_μ は常に, 時間的ないし光的 Killing ベクトル.

例えば, 時間的な場合

$$ds^2 = -f^2(dt + \omega)^2 + |f|^{-1}ds^2(X_4). \quad (6.15.145)$$

- $J^{(i)}$ は $ds^2(X_4) = h_{mn}dx^m dx^n$ の (反) 自己双対 hyper-Kähler 構造を与える.

$$J_m^{(i)p} J_p^{(j)n} = -\delta^{ij}\delta_m^n + \epsilon_{ijk}J_m^{(k)n}, \quad (6.15.146)$$

$${}^h\nabla J^{(i)} = 0, \quad *_h J^{(i)} = \mp J^{(i)}. \quad (6.15.147)$$

作用積分:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int R *1 - G_{IJ}dX^I \wedge dX^J - G_{IJ}F^I \wedge dF^J - \frac{1}{6}C_{IJK}F^I \wedge F^J \wedge A^K. \quad (6.15.148)$$

ここで,

$$C_{IJK} = C_{(IJK)} : C_{IJK}C_{J'(LM)C_{PQ)K'}\delta^{JJ'}\delta^{KK'} = \frac{4}{3}\delta_{I(L}C_{MPQ)} \quad (6.15.149)$$

$$C_{IJK}X^I X^J X^K = 1, \quad (6.15.150)$$

$$2G_{IJ} = 9X_I X_J - C_{IJK}X^K; \quad 6X_I = C_{IJK}X^J X^K. \quad (6.15.151)$$

解の一般形:

$$fd\omega = G^+ + G^-; \quad *_h G^\pm = \pm G^\pm, \quad (6.15.152)$$

$$F^I = d(fX^I(dt + \omega)) + \Theta^I; \quad *_h \Theta^I = \pm \Theta^I, \quad (6.15.153)$$

$$G^\pm = -\frac{2}{3}X_I \Theta^I. \quad (6.15.154)$$

$$d\Theta^I = 0, \quad \Delta_h(f^{-1}X_I) = \frac{1}{6}C_{IJK}\Theta^J \cdot \Theta^K, \quad (6.15.155)$$

$$(6.15.156)$$

これまでに構成された解

- **BMPV 解:** S^3 ホライズンをもつ 4パラメータ族 (3 電荷+ $J_\psi = J_\phi$) [Beckenridge, Myers, Peet & Vafa (1997)].
- **正則な超対称 5D ブラックリング解, IIB D1-D5-P スーパーチューブ解:**
($X_4 = E^4$) $S^2 \times S^1$ ホライズンをもち、回転が $J_\phi \neq J_\psi$ となる 7パラメータ族 (3 電荷+3 磁気双極子モーメント+リング径). 5 個の保存量以外に自由なパラメータを 2 個含む (連続的な一意性の破れ)
[Elvang, Emparan, Mateos & Reall (hep-th/0408120)].
- **多重ブラックリング解、ブラックホール・ブラックリング系:**
空間的に $U(1)$ 不変性しか持たない解 (Cf. Reall 予想 [Reall(2003)])
[Gauntlett & Gutowski (hep-th/0408010,0408122)].

$$ds^2(X_4) = H^{-1}(dx^4 + \chi)^2 + H ds^2(E^3) \text{ (Gibbons-Hawking ansatz)} \quad (6.15.157)$$

$$\Rightarrow \text{independent harmonic functions: } H, K^I, L_I, M. \quad (6.15.158)$$

[目次へ](#)

6.16 4次元理論

[目次へ](#)

6.16.1 $N = 2$ 極小超重力理論

6.16.1.1 解の分類

Reference

- Tod K P 1983 Phys. Lett. B 121 241

概要

- Timelike Killing

Israel-Wilson-Perjes solutions of Einstein-Maxwell theory. Free data: harmonic functions on \mathbb{R}^3 .

- Null Killing

pp-wave solutions. Free data: harmonic functions on \mathbb{R}^2 .

6.17 Tadpole 条件

6.17.1 II 型理論

Democratic formulation において, フォーム場

$$G_n := dC_{n-1} - H_3 \wedge C_{n-3} + G_0(e^B)_n, \quad (6.17.1)$$

$$G_n = (-1)^{[n/2]} *G_{10-n} \quad (6.17.2)$$

に対する Bianchi 恒等式は, ブレーンの寄与を含めると

$$dG_n - H_3 \wedge G_{n-2} = (2\pi\sqrt{\alpha'})^{n-1} \rho_{8-n}^{\text{loc}} \quad (6.17.3)$$

となる. これを, 部分多様体で積分して

$$N(Dp \cap \Sigma_{9-p}) - 2^{p-5} N(Op \cap \Sigma_{9-p}) + \frac{1}{(2\pi\sqrt{\alpha'})^{7-p}} \int_{\Sigma_{9-p}} H_3 \wedge G_{6-p} = 0. \quad (6.17.4)$$

IIB 内部空間が CY に共形的なら, $H^1(CY) = H^5(CY) = 0$ より, 自明でない条件は

$$N_{D3}(\Sigma_6) - 4N_{O3}(\Sigma_6) + \frac{1}{(2\pi)^4(\alpha')^2} \int_{\Sigma_6} H_3 \wedge G_3 = 0, \quad (6.17.5a)$$

$$N_{D5}(\Sigma_4) - N_{O5}(\Sigma_4) + \frac{1}{(2\pi)^2\alpha'} \int_{\Sigma_4} H_3 \wedge G_1 = 0, \quad (6.17.5b)$$

$$N_{D7}(\Sigma_2) - \frac{1}{4}N_{O7}(\Sigma_2) = 0, \quad (6.17.5c)$$

$$N_{NS7}(\Sigma_2) = 0, \quad (6.17.5d)$$

$$N_{NS5}(\Sigma_4) = 0. \quad (6.17.5e)$$

6.18 高次補正

目次へ

D	Duality Group	Max. compact subG	Moduli	F	seed Q
4	$E_{(7)} : 133$	$SU(8) : 63$	70	$28 + 28$	5
5	$E_{6(6)} : ??$	$USp(8) : ??$??	27	3
6	$SO(5, 5) : 45$	$SO(5) \times SO(5) : 20$	25	16	2
7	$SL(5, \mathbb{R}) : 24$	$SO(5) : 10$	14	10	2
8	$SL(3, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R}) : 11$	$SO(3) \times U(1) : 4$	7	6	2
9	$SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+ : 4$	$U(1) : 1$	3	3	2

表 15: II 型超弦理論のトーラスコンパクト化で得られる各次元での極大超重力理論

7 極大超重力理論

Last update: 2012/9/30

7.1 トーラスコンパクト化で得られる極大超重力理論

7.2 $D = 4, N = 8$ 理論

7.2.1 $E_{7(7)}$ の 56 次元表現と対称空間 $E_{7(7)}/\text{SU}(8)$

7.2.1.1 Sp 表示

$E_{7(7)}$ の 56 次元表現は, Sp 表示 $\rho_{\text{Sp}}^{56}(E_{7(7)}) \subset \text{Sp}(56, \mathbb{R})$ のもとで

$$\rho_{\text{Sp}}(g) = \exp \begin{pmatrix} \Lambda \wedge \mathbf{1} & \star \Sigma \\ \Sigma & -{}^T \Lambda \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} \Lambda^{[m} \delta_{[p} \delta_{q]}^{n]} & (\star \Sigma)^{mnpq} \\ \Sigma_{mnpq} & -\Lambda^{[p} \delta_{[m} \delta_{n]}^{q]} \end{pmatrix};$$

$$\Lambda \in \mathfrak{sl}(8, \mathbb{R}), \quad \Sigma \in \bigwedge^4 \mathbb{R}^8 \quad (7.1)$$

と表示される. ここで,

$$\rho_{\text{Sp}}(g) \Omega {}^T \rho_{\text{Sp}}(g) = \Omega, \quad (7.2a)$$

$$\Omega = (\Omega^{MN}) = \begin{pmatrix} \Omega^{\Lambda\Sigma} & \Omega^{\Lambda}_K \\ \Omega_{\Xi\Sigma} & \Omega_{\Xi K} \end{pmatrix} = \Omega_{\text{Sp}} := \begin{pmatrix} 0 & I_{28} \\ -I_{28} & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.2b)$$

この表示のもとで, 極大コンパクト群 $\text{SU}(8)$ は,

$$\rho_{\text{Sp}}(g) = \exp \begin{pmatrix} A \wedge \mathbf{1} & V \\ -V & A \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix};$$

$$A = -{}^T A \in \mathfrak{so}(8, \mathbb{R}), \quad V = -\star V \in \bigwedge^4 \mathbb{R}^8. \quad (7.3)$$

と表される. また, $E_{7(7)}/\text{SU}(8)$ に対応する reductive な部分空間は

$$L(\phi) = \exp \begin{pmatrix} S \wedge \mathbf{1} & U \\ U & -S \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix};$$

$$S = {}^T S \in \mathfrak{sl}(8, \mathbb{R}), \quad U = \star U \in \bigwedge^4 \mathbb{R}^8. \quad (7.4)$$

7.2.1.2 $\text{Usp}(\text{CJ})$ 表示

$E_{7(7)}$ の 56 次元表現は, Usp 表示 $\rho_{\text{Usp}}^{56}(E_{7(7)}) \subset \text{Usp}(56)$ では,

$$\rho_{\text{Usp}}(g) = \exp \begin{pmatrix} \Lambda \wedge \mathbf{1} & \Sigma \\ \bar{\Sigma} & \bar{\Lambda} \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^{AB}{}_{CD} & V^{ABCD} \\ \bar{V}_{ABCD} & \bar{U}_{AB}{}^{CD} \end{pmatrix};$$

$$\Lambda = (\Lambda^A{}_B) \in \mathfrak{su}(8), \quad \Sigma = (\Sigma^{ABCD}) = \eta \star \bar{\Sigma}. \quad (7.5)$$

と表される。ここで,

$$\rho_{\text{Usp}}(g) \Omega \rho_{\text{Usp}}(g)^\dagger = \Omega, \quad (7.6a)$$

$$\Omega = \Omega_{\text{Usp}} := -i \begin{pmatrix} I_{28} & 0 \\ 0 & -I_{28} \end{pmatrix}, \quad (7.6b)$$

(注) 正確には, $\rho_{\text{Usp}}^{56}(g) \in \text{Sp}(56, \mathbb{C}) \cap \text{U}(28, 28)$ である。これに対して, 通常用語では, $\text{USp}(56) = \text{Sp}(56, \mathbb{C}) \cap \text{U}(56) = \text{Sp}(28)$.

ρ_{Sp} との関係は

$$\rho_{\text{Usp}} = \mathcal{T} \rho_{\text{Sp}} \mathcal{T}^{-1}, \quad (7.7)$$

$$\Omega_{\text{Usp}} = \mathcal{T} \Omega_{\text{Sp}} \mathcal{T}^{-1}, \quad (7.8)$$

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{Usp}} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} T^{AB}{}_{mn} & iT^{ABpq} \\ T_{CDmn} & -iT_{CD}{}^{pq} \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

$$T^{AB}{}_{mn} = \frac{i}{4} \Gamma_{mn}^{AB}. \quad (7.10)$$

ただし, $A, B, \dots = 1, 2, \dots, 8$, $m, n, \dots = 1, 2, \dots, 8$. E^8 のガンマ行列

$$\Gamma_{mn}^{AB} = (\Gamma_{mn})^{AB} =: (\Gamma^{AB})_{mn} \quad (7.11)$$

はすべて実かつ $[AB], [mn]$ について反対称で, 次の関係式を満たす:

$$(\Gamma^{ab})_{AB} (\Gamma_{ab})_{CD} = 16 (\delta_{A[C} \delta_{D]B}), \quad (7.12a)$$

$$(\Gamma^{AB})_{ab} (\Gamma_{AB})_{cd} = 16 (\delta_{a[c} \delta_{d]b}), \quad (7.12b)$$

$$[\Gamma^{ab}, \Gamma^{cd}]_{AB} = -8 \delta_{[b}^{[c} (\Gamma_{AB})_{a]}^d], \quad (7.12c)$$

$$[\Gamma^{AB}, \Gamma^{CD}]_{ab} = -8 \delta_{[B}^{[C} (\Gamma_{ab})_{A]}^D], \quad (7.12d)$$

$$\{\Gamma^{AB}, \Gamma^{CD}\}_{ab} = 2\Gamma_{ac}^{[AB} \Gamma_{cb}^{CD]} + 4\delta_{ab} \delta^{A[D} \delta_{C]B}, \quad (7.12e)$$

これより, 特に,

$$\mathcal{T}_{\text{Usp}} \in \text{U}(8) \quad (7.13)$$

となる.

この表示の元で, 極大コンパクト部分群 $\text{SU}(8)$ は,

$$\rho_{\text{Usp}}(g) = \exp \begin{pmatrix} \Lambda \wedge \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \bar{\Lambda} \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = (\Lambda^A{}_B) \in \mathfrak{su}(8), \quad (7.14)$$

対称空間 $E_{7(7)}/\mathrm{SU}(8)$ に対応する部分空間は

$$\begin{aligned} L(\phi) &= \exp \begin{pmatrix} 0 & \phi^{ABCD} \\ \bar{\phi}_{ABCD} & 0 \end{pmatrix}; \\ \phi &= (\phi^{ABCD}) = \eta \star \bar{\phi} \end{aligned} \quad (7.15)$$

と表される.

7.2.1.3 Usp(DN) 表示

$E_{7(7)}$ の 56 次元表現に対するもう一つの Usp 表示 $L(\phi) \in \rho_{\mathrm{Usp}}^{56}(E_{7(7)}) \subset \mathrm{Usp}(56)$ は,

$$\begin{aligned} \rho_{\mathrm{DN}}(g) &= \exp \begin{pmatrix} A \wedge \mathbf{1} + iV & S \wedge \mathbf{1} + iU \\ S \wedge \mathbf{1} - iU & A \wedge \mathbf{1} - iV \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T_u & -v^\dagger \\ -T_v & u^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{ab}{}_{ij} & -\bar{v}_{cd;ij} \\ -v^{ab;kl} & \bar{u}_{cd}{}^{kl} \end{pmatrix} \\ \rho_{\mathrm{DN}}(g)^{-1} &= \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{v} \\ v & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_{ab}{}^{ij} & \bar{v}_{cd;ij} \\ v^{ab;kl} & u^{cd}{}_{kl} \end{pmatrix}; \\ T A &= -A, \quad T S = S \in \mathfrak{sl}(8, \mathbb{R}), \\ \star U &= U, \quad \star V = -V \in \wedge^4 \mathbb{R}^8. \end{aligned} \quad (7.16)$$

ここで,

$$\rho_{\mathrm{DN}}(g)\Omega\rho_{\mathrm{DN}}(g)^\dagger = \Omega, \quad (7.17a)$$

$$\Omega = \Omega_{\mathrm{Usp}}, \quad (7.17b)$$

ρ_{Sp} との関係は

$$\rho_{\mathrm{DN}} = \mathcal{T} \rho_{\mathrm{Sp}} \mathcal{T}^{-1}, \quad (7.18)$$

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathrm{DN}} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

この表示では, 極大コンパクト部分群 $\mathrm{SU}(8)$ は,

$$\rho_{\mathrm{DN}}(g) = \exp \begin{pmatrix} A \wedge \mathbf{1} + iV & 0 \\ 0 & A \wedge \mathbf{1} - iV \end{pmatrix}. \quad (7.20)$$

[目次へ](#)

また、対称空間 $E_{7(7)}/\text{SU}(8)$ に対応する部分空間は、

$$L(\phi) = \exp \begin{pmatrix} 0 & S \wedge \mathbf{1} + iU \\ S \wedge \mathbf{1} - iU & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.21)$$

[目次へ](#)

7.2.2 Cremmer-Julia 理論 (ungauged)

7.2.2.1 基本場

- スカラ場 70 次元 : $\phi \in E_{7(7)}/\text{SU}(8)$
- ベクトル場 28 次元 : $F \in \mathbb{R}^{28} \otimes \mathcal{A}^2$
- スピン 1/2 場 56 個 : λ_{ABC} ($A, B, C = 1, \dots, 8$)
- スピン 3/2 場 8 個 : ψ_μ^A ($A = 1, \dots, 8$)
- 重力場: $\theta_\mu^A \Rightarrow g_{\mu\nu}$

7.2.2.2 対称性

global $E_{7(7)} \times$ local $\text{SU}(8)$

7.2.2.3 スカラ場のコセット表現

ϕ を

$$\phi \in E_{7(7)}/\text{SU}(8) \mapsto L(\phi) \in \text{GL}(56, \mathbb{C}) \quad (7.22)$$

とコセット表現するとき, $E_{7(7)}$ は $L(\phi)$ に左から作用, また, $\text{SU}(8)$ は右から作用.

- Sp 表示 : $L(\phi) \in \rho_{\text{Sp}}^{56}(E_{7(7)}) \subset \text{Sp}(56, \mathbb{R})$ となる表示

$$L(\phi) = \exp \begin{pmatrix} S \wedge \mathbf{1} & U \\ U & -{}^T S \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix};$$

$$S = {}^T S \in \mathfrak{sl}(8, \mathbb{R}), \quad U = \star U \in \bigwedge^4 \mathbb{R}^8. \quad (7.23)$$

- Usp(CJ) 表示 : $L(\phi) \in \rho_{\text{Usp}}^{56}(E_{7(7)}) \subset \text{Usp}(56)$ となる表示

$$L(\phi) = \exp \begin{pmatrix} 0 & \phi^{ABCD} \\ \bar{\phi}_{ABCD} & 0 \end{pmatrix};$$

$$\phi = (\phi^{ABCD}) = \eta \star \bar{\phi}. \quad (7.24)$$

- Usp(DN) 表示 : $L(\phi) \in \rho_{\text{Usp}}^{56}(E_7(7)) \subset \text{Usp}(56)$ となる表示の一つ.

$$L(\phi) = \exp \begin{pmatrix} 0 & 2S \wedge \mathbf{1} + iU \\ 2S \wedge \mathbf{1} - iU & 0 \end{pmatrix};$$

$$S = {}^T S \in \mathfrak{sl}(8, \mathbb{R}), \quad U = \star U \in \wedge^4 \mathbb{R}^8. \quad (7.25)$$

7.2.2.4 スピノール場

Majorana スピノールによる表示では,

$$\psi_\mu^a, \quad \lambda_{abc} \in \mathbb{R}^4 \quad (a, b, c = 1, \dots, 8) \quad (7.26)$$

$L(\phi)$ に右から作用する $E_{7(7)} \supset \text{SL}(8)$ の部分群 $\text{SO}(8)$ に対し, それぞれ基本表現, 3階反対称表現に従って変換.

Weyl スピノール表示では,

$$\psi_\mu^a \mapsto \begin{pmatrix} \psi_\mu^A \\ \sigma_2 \psi_{\mu A} \end{pmatrix}, \quad \lambda^{abc} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda^{ABC} \\ \sigma_2 \lambda_{ABC} \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

ただし,

$$\psi_{\mu A} = (\psi_\mu^A)^*, \quad \lambda_{ABC} = (\lambda^{ABC})^* \quad (7.28)$$

ψ_μ^A および λ^{ABC} は, $L(\phi)$ に右作用する $\text{SU}(8)$ に対し, それぞれ基本表現, 3階反対称表現に従って変換.

7.2.2.5 局所 SU(8) 対称性

局所 $\text{SU}(8)$ 変換は, スカラ場とスピノール場のみに作用.

$$U \in \text{SU}(8) \Rightarrow L(\phi) \rightarrow L(\phi) \rho^{56}(U^{-1}), \quad \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F},$$

$$\psi_\mu^A \rightarrow U^A_B \psi_\mu^B, \quad \lambda^{ABC} \rightarrow 3U^{[A}_D \lambda^{BC]D}. \quad (7.29)$$

いま,

$$L(\phi)^{-1} \partial_\mu L(\phi) = \mathcal{Q}_\mu(\phi) + \mathcal{P}_\mu(\phi), \quad \mathcal{Q}_\mu \in \mathfrak{su}(8), \quad \mathcal{P}_\mu \perp \mathcal{Q}_\mu \in E_{7(7)} \quad (7.30)$$

とおくと, 無限小 $\text{SU}(8)$ 変換 $\delta U = \Lambda$ に対し,

$$\delta \mathcal{Q}_\mu = -[\rho(\Lambda), \mathcal{Q}_\mu] + \rho(\partial_\mu \Lambda), \quad (7.31a)$$

$$\delta \mathcal{P}_\mu = -[\rho(\Lambda), \mathcal{P}_\mu] \quad (7.31b)$$

と変換する. $\text{Usp}(\text{CJ})$ 表示では, $\mathcal{Q}_\mu, \mathcal{P}_\mu$ は

$$\mathcal{Q}_\mu = \begin{pmatrix} 2Q_\mu \wedge \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 2\bar{Q}_\mu \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & P_\mu \\ \bar{P}_\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

と表示される. これらを用いて, スカラおよび Weyl スピノールに対する共変微分が次のように定義される:

$$L(\phi)^{-1} D_\mu L(\phi) = L(\phi)^{-1} \partial_\mu L(\phi) - \mathcal{Q}_\mu(\phi) = \mathcal{P}_\mu(\phi), \quad (7.33a)$$

$$D_\mu \psi_\nu^A = \partial_\mu \psi_\nu^A + (Q_\mu)^A_B \psi_\nu^B, \quad (7.33b)$$

$$D_\mu \lambda^{ABC} = \partial_\nu \lambda^{ABC} + 3(Q_\mu)^{[A}_D \lambda^{BC]D} \quad (7.33c)$$

Majorana スピノールに対しては,

$$D_\mu(\psi_\nu^a) = \partial_\mu(\psi_\nu^a) + \begin{pmatrix} Q_\mu & 0 \\ 0 & \bar{Q}_\mu \end{pmatrix} (\psi_\mu^a), \quad (7.34a)$$

$$D_\mu(\lambda^{abc}) = \begin{pmatrix} D_\mu \lambda^{ABC} \\ \sigma_2(D_\mu \lambda^{ABC})^* \end{pmatrix} \quad (7.34b)$$

7.2.2.6 スカラ場の運動項

$$\begin{aligned} 2\kappa^2 \mathcal{L}_s &= -\frac{e}{12} \text{Tr}((L^{-1} D_\mu L)^\dagger (L^{-1} D^\mu L)) \\ &= -\frac{e}{6} P_{\mu ABCD} P^{\mu ABCD} \quad (\text{Usp}(\text{CJ}) \text{ 表示}) \\ &= -\frac{e}{6} P_{\mu abcd} P^{\mu abcd} \quad (\text{Usp}(\text{DN}) \text{ 表示}). \end{aligned} \quad (7.35)$$

7.2.2.7 スピノール場の運動項

$$\begin{aligned} 2\kappa^2 \mathcal{L}_f &= -2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_{\mu a} \gamma_\sigma \gamma_5 D_\nu(\omega, Q) \psi_\rho^a - \frac{i}{3} \bar{\lambda}_{abc} \gamma^\mu D_\mu(\omega, Q) \lambda^{abc} \\ &\quad - i \frac{\sqrt{2}}{3} e \bar{\psi}_\mu^a \gamma^\nu \gamma^\mu \left(P_{\nu abcd} + \hat{P}_{\nu abcd} \right) \lambda^{bcd} \end{aligned} \quad (7.36)$$

7.2.2.8 ベクトル場の運動項

$$F \in \mathbb{R}^{28} \otimes \mathcal{A}^2 \mapsto \mathcal{F} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{56} \otimes \mathcal{A}^2$$

とおくと, \mathcal{F} は次の双対性条件を満たす:

$$L(\phi)^{-1} * \mathcal{F} = \Omega L(\phi)^{-1} \mathcal{F} \Leftrightarrow * \mathcal{F} = \tilde{\Omega} \mathcal{F}. \quad (7.37)$$

ここで,

$$\tilde{\Omega}(\phi) = L(\phi)\Omega L(\phi)^{-1} \quad (7.38)$$

これと, 方程式

$$d\mathcal{F} = 0 \quad (7.39)$$

の組が, スピノール場を無視した場合のベクトル場の方程式となり, $E_{7(7)}$ の \mathcal{F} に対する左作用: $\rho^{56}(E_{7(7)}) \triangleright \mathbb{C}^{56}$ で不変となる.

- Sp 表示: 実 E_7 -ベクトル表示

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} F^{mn} \\ G_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{56}, \quad m, n = 1, \dots, 8, \quad (7.40a)$$

$$*G_{mn} = -\mathcal{N}_{mn;pq} F^{pq}. \quad (7.40b)$$

ここで,

$$\mathcal{N} = \tilde{\Omega}_{12}^{-1} - \tilde{\Omega}_{12}^{-1} \tilde{\Omega}_{11} \tilde{\Omega}_{11}^* \tilde{\Omega}_{12}. \quad (7.41a)$$

この表示では, ベクトル場の運動項は

$$2\kappa^2 \mathcal{L}_v = \frac{e}{2} F_{\mu\nu}^{mn} *G_{mn}^{\mu\nu} = -\frac{e}{2} F_{\mu\nu}^{mn} \mathcal{N}_{mn;pq} F^{\mu\nu pq}. \quad (7.42)$$

- Usp(DN) 表示: 複素 E_7 カイラルベクトル表示

$$\mathcal{F}^+ = \begin{pmatrix} F_1^+ \\ F_2^+ \end{pmatrix} = \frac{1+i*}{2} \mathcal{F}_{\text{DN}} \mathcal{F}_{\text{Sp}}. \quad (7.43a)$$

ベクトル場の運動項は

$$2\kappa^2 \mathcal{L}_v = -\frac{e}{2} F_{\mu\nu}^{+jk} (2S_{jklm} - 1) F^{+\mu\nu, lm} + \text{h.c.} \quad (7.44)$$

Usp(DN) 表示での $L(\phi)$ を用いると

$$S^{-1} - 1 = u^{-1}v \Leftrightarrow (u + v)S = u. \quad (7.45)$$

\mathcal{N} との関係は Sp 表示で

$$S = \frac{1}{2}(\mathcal{N}(* \rightarrow -i) + 1) = \frac{1}{2}\tilde{\Omega}_{12}^{-1} \left(\tilde{\Omega}_{12} + 1 + i\tilde{\Omega}_{11} \right). \quad (7.46)$$

- Usp(CJ) 表示 : E_7 不変表示

$$\hat{\mathcal{F}}'_{AB} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\Gamma_{abAB} \quad i\gamma_5 \Gamma_{AB}^{ab} \right) L(\phi)^{-1} \mathcal{F}_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} = \hat{\mathcal{F}}'_{AB\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} \quad (7.47)$$

7.2.2.9 Lagrangian

$$\begin{aligned} 2\kappa^2 \mathcal{L}^{\text{total}} = & eR(\omega, e) - \frac{e}{6} \bar{P}_{\mu abcd} P^{\mu abcd} + \frac{e}{2} F_{\mu\nu}^{mn}(B) * G_{mn}^{F\mu\nu}(B, \phi, \psi, \lambda) \\ & - 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_{\mu a} \gamma_\sigma \gamma_5 D_\nu(\omega, Q) \psi_\rho^a - \frac{i}{3} \bar{\lambda}^{abc} \gamma^\mu D_\mu(\omega, Q) \lambda_{abc} \\ & - i \frac{\sqrt{2}}{3} e \bar{\psi}_{\mu a} \gamma^\nu \gamma^\mu \left(P_\nu^{abcd} + \hat{P}_\nu^{abcd} \right) \lambda_{bcd} \\ & + e \left\{ \hat{\mathcal{F}}_{ab}^+(B, \phi, \psi, \lambda)^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu}^{+ab}(\psi, \lambda) + \text{hc} \right\} \\ & + \text{some quartic terms of spinors.} \end{aligned} \quad (7.48)$$

ここで,

$$G^F = \mathcal{N} * F - (\mathcal{N} + 1) * \mathcal{O}, \quad (7.49)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathcal{F}}^+ \\ \hat{\mathcal{O}}^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{T}_0 L^{-1} \begin{pmatrix} F^+ \\ G^{F+} \end{pmatrix}, \quad (7.50)$$

$$\mathcal{T}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}. \quad (7.51)$$

ψ を

$$\mathcal{V} := \mathcal{T}_0 L^{-1} \mathcal{T}_0^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{u} & -\bar{v} \\ -v & u \end{pmatrix} \quad (7.52)$$

により定義すると,

$$\hat{\mathcal{F}}^+ = \mathcal{U}(u^{-1})SF^+ - (\bar{u} + \bar{v})S\mathcal{O}^+, \quad (7.53a)$$

$$\hat{\mathcal{O}}^+ = u\mathcal{O}^+. \quad (7.53b)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mu\nu}^{ab} &= -\frac{i}{2\sqrt{2}}\bar{\psi}_\lambda^a\gamma^{[\lambda}\gamma_{\mu\nu}\gamma^{\sigma]}\psi_\sigma^b \\ &\quad + \frac{i}{4}\bar{\psi}_\lambda^c\gamma_{\mu\nu}\gamma^\lambda\lambda_{abc} + \frac{i}{4\sqrt{2}}\eta \star (\bar{\lambda} \wedge \gamma_{\mu\nu}\lambda)^{ab}. \end{aligned} \quad (7.54)$$

また,

$$\hat{P}_\mu = P_\mu + i\frac{\sqrt{2}}{3}\bar{\psi}_\mu^{(L)} \wedge \lambda^{(R)} + i\frac{\eta}{4} \star (\bar{\psi}_\mu^{(R)} \wedge \lambda^{(L)}). \quad (7.55)$$

7.2.2.10 超対称変換

$\epsilon_A \in \mathbb{R}^4$ ($A = 1, \dots, 8$) を局所超対称変換を生成する Majorana スピノールの組として,

$$\delta_S e_\mu^\alpha = i\bar{\epsilon}_A \gamma^\alpha \psi_\mu^A, \quad (7.56a)$$

$$\begin{aligned} L(\phi)^{-1}\delta_S L(\phi) &= -2\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & P_{ABCD} \\ \bar{P}^{ABCD} & 0 \end{pmatrix}; \\ P &= \frac{i}{4} \{ \bar{\epsilon}^{(L)} \wedge \lambda^{(R)} + \eta \star (\bar{\epsilon}^{(R)} \wedge \lambda^{(L)}) \}, \end{aligned} \quad (7.56b)$$

$$\begin{aligned} \delta_S \begin{pmatrix} B_\mu^{m'n'} + iC_{\mu m'n'} \\ B_\mu^{m'n'} - iC_{\mu m'n'} \end{pmatrix} &= -2\sqrt{2}L(\phi) \begin{pmatrix} X_{\mu AB} \\ \bar{X}_\mu^{AB} \end{pmatrix}; \\ X_{\mu AB} &= i\bar{\epsilon}_{[A}^{(L)}\psi_{\mu B]}^{(R)} + \frac{i}{2\sqrt{2}}\bar{\epsilon}^{(R)C}\gamma_\mu\lambda_{ABC}^{(L)}, \end{aligned} \quad (7.56c)$$

$$\begin{aligned} \delta_S \psi_{\mu A}^{(R)} &= D_\mu(\omega, Q)\epsilon_A^{(R)} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\hat{\mathcal{F}}'_{AB}\gamma_\mu\epsilon^{(L)B} \\ &\quad + \frac{i}{4}(\bar{\lambda}_{ABC}^{(L)}\gamma^\alpha\lambda_{(L)}^{DBC})\gamma_\alpha\gamma_\mu\epsilon_D^{(R)} - \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_\mu^{(R)B}\gamma^\alpha\lambda_{ABC}^{(R)})\gamma_\alpha\epsilon^{(L)C}, \end{aligned} \quad (7.56d)$$

$$\delta_S \lambda_{ABC}^{(R)} = \sqrt{2}\hat{P}_{\mu ABCD}\gamma^\mu\epsilon^{(L)D} + \frac{3}{4}\hat{\mathcal{F}}'_{[AB}\epsilon_{C]}^{(R)}. \quad (7.56e)$$

7.2.3 deWit-Nicolai 理論 (SO(8)gauging)

7.2.3.1 基本変数

- スカラ場 $\mathcal{V}(\phi) = \mathcal{F}_{\text{DN}} L^{-1} \in E_{7(7)} : \rho_{\text{Usp}}^{56}(\text{SU}(8)) \triangleright \mathcal{V} \triangleleft \rho_{\text{Sp}}^{56}(\text{SO}(8))$:

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{v} \\ v & u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}^{-1} = \begin{pmatrix} T_u & -v^\dagger \\ -T_v & u^\dagger \end{pmatrix},$$

$$u = (u^{AB}{}_{ab}), \quad \bar{u} = (u_{AB}{}^{ab}), \quad (7.57)$$

$$v = (v^{AB}{}^{ab}), \quad \bar{v} = (v_{AB}{}_{ab}). \quad (7.58)$$

ゲージ変換は

$$\delta u^{AB}{}_{ab} = -2\Lambda^{[A}{}_{C} u^{B]C}{}_{ab} - 2g\Xi_{[a}{}^c u^{AB}{}_{b]c}. \quad (7.59)$$

- スピノール場 $\psi_\mu^A, \lambda^{ABC} : \text{SU}(8) \triangleright \psi_\mu, \lambda$

$$\psi_\mu^a = \begin{pmatrix} \psi_\mu^A \\ \sigma_2 \psi_{A\mu} \end{pmatrix}, \quad \psi_{A\mu} = (\psi_\mu^A)^*, \quad (7.60a)$$

$$\lambda^{abc} = \begin{pmatrix} \lambda^{ABC} \\ \sigma_2 \lambda_{ABC} \end{pmatrix}, \quad \psi_{ABC} = (\psi^{ABC})^*, \quad (7.60b)$$

$$(7.60c)$$

ゲージ変換は, $(\Lambda^A{}_B) \in \text{SU}(8)$, $(\Xi_a{}^b) \in \text{SO}(8)$ に対して,

$$\delta \psi_\mu^A = \Lambda^A{}_B \psi_\mu^B, \quad \delta \lambda_\mu^{ABC} = 3\Lambda^{[A}{}_D \lambda^{BC]D}. \quad (7.61)$$

- ベクトル場 (SO(8) ゲージ場) : $A_\mu^{ab} = -A_\mu^{ba} \Rightarrow F_{\mu\nu}^{ab}$

$$F^{ab} = dA^{ab} - gA^{ac} \wedge A^{cb}. \quad (7.62)$$

ゲージ変換は,

$$\delta A = d\Xi + g[\Xi, A], \quad \delta F = g[\Xi, F]. \quad (7.63)$$

7.2.3.2 共変微分

スカラ場 \mathcal{V} とゲージ場 A より

$$\partial_\mu \mathcal{V} \mathcal{V}^{-1} + \mathcal{V} \mathcal{A}_\mu \mathcal{V}^{-1} = -\mathcal{Q}_\mu - \mathcal{P}_\mu; \quad (7.64)$$

$$\mathcal{A}_\mu = \begin{pmatrix} 2A_\mu \wedge \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 2A_\mu \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (7.65)$$

$$\mathcal{Q}_\mu = \begin{pmatrix} 2Q_\mu \wedge \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 2\bar{Q}_\mu \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix}; \quad Q_\mu = (Q_\mu^A{}_B) \quad (7.66)$$

$$\mathcal{P}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & P_\mu \\ \bar{P}_\mu & 0 \end{pmatrix}; \quad P_\mu = (P_{\mu ABCD}) \quad (7.67)$$

とおく, 特に, $Q_\mu = Q_\mu(\phi, A), P_\mu = P_\mu(\phi, A)$ は A にも依存. ゲージ変換に対して,

$$\delta Q_\mu = -\partial_\mu \Lambda + [\Lambda, Q_\mu], \quad \delta P_\mu^{ABCD} = -4\Lambda^{[A} P_\mu^{BCD]E}. \quad (7.68)$$

これらを用いて,

$$D_\mu \mathcal{V} = \partial_\mu \mathcal{V} + \mathcal{Q}_\mu \mathcal{V} + \mathcal{V} \mathcal{A}_\mu = -\mathcal{P}_\mu \mathcal{V}, \quad (7.69a)$$

$$D_\mu \psi_\nu^A = \nabla_\mu \psi_\nu^A + Q_\mu^A{}_B \psi_\nu^B, \quad (7.69b)$$

$$D_\mu \lambda^{ABC} = \nabla_\mu \lambda^{ABC} + 3Q_\mu^A{}_D \lambda^{BCD}, \quad (7.69c)$$

$$D_\mu F^{ab} = \nabla_\mu F - g[A_\mu, F]. \quad (7.69d)$$

7.2.3.3 Lagrangian

全 Lagrangian は

$$\mathcal{L}^{\text{total}} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{g^2}; \quad (7.70)$$

$$\begin{aligned} 2\kappa^2 \mathcal{L}_0 &= eR(\omega, e) - \frac{e}{6} P_{\mu ABCD} P^{\mu ABCD} \\ &\quad - 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_{\mu A} \gamma_\sigma D_\nu(\omega, Q) \psi_\rho^A - \frac{i}{3} \bar{\lambda}_{ABC} \gamma^\mu D_\mu(\omega, Q) \lambda^{ABC} \\ &\quad - i \frac{\sqrt{2}}{6} e \left(\bar{\psi}_{\mu A} \gamma^\nu \gamma^\mu \left(P_\nu^{ABCD} + \hat{P}_\nu^{ABCD} \right) \lambda_{BCD} + \text{h.c.} \right) \\ &\quad - \frac{e}{2} [F_{\mu\nu}^+ \cdot (2S - 1) F^{+\mu\nu} - 4F_{\mu\nu}^+ \cdot S u^{-1} \mathcal{O}^{+\mu\nu} + \text{h.c.}] \\ &\quad + \frac{e}{2} \{ \mathcal{O}_{\mu\nu}^+ \cdot T(u^{-1})(S + T u \bar{v}) u^{-1} \mathcal{O}^{+\mu\nu} + \text{h.c.} \} \\ &\quad + 2\kappa^2 \mathcal{L}_{f^A}; \end{aligned} \quad (7.71)$$

$$\begin{aligned}
2\kappa^2 \mathcal{L}_{f^4} &= e\bar{\psi}_\mu^{[A}\psi_\nu^{B]}\bar{\psi}_A^\mu\psi_B^\nu - \frac{\sqrt{2}}{4}e\left[\bar{\psi}_\lambda^A\gamma^{\mu\nu}\gamma^\lambda\lambda_{ABC}\bar{\psi}_\mu^B\bar{\psi}_\nu^C + \text{h.c.}\right] \\
&- e\left[\frac{\eta}{4}\star(\bar{\lambda}\wedge\gamma_{\mu\nu}\lambda\wedge\bar{\psi}^\mu\psi^\nu) + \frac{1}{8}\bar{\psi}_\lambda^a\gamma_{\mu\nu}\gamma^\lambda\lambda_{ACD}\bar{\psi}_\mu^B\gamma_\nu\lambda^{BCD} + \text{h.c.}\right] \\
&- \frac{\sqrt{2}}{12}e\eta\left[\star(\bar{\lambda}\wedge\gamma^{\mu\nu}\lambda\wedge(\bar{\psi}\cdot\gamma_\nu\lambda)) + \text{h.c.}\right] \\
&- \frac{e}{16}(\bar{\lambda}^{ACD}\gamma^\mu\lambda_{BCD})(\bar{\lambda}^{BEF}\gamma_\nu\lambda_{AEF}) + \frac{e}{48}(\bar{\lambda}^{ABC}\gamma^\mu\lambda_{ABC})^2. \quad (7.72)
\end{aligned}$$

ここで,

$$S = (u+v)^{-1}u, \quad (7.73a)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\mu\nu}^{+AB} &= -\frac{i}{2\sqrt{2}}\bar{\psi}_\lambda^A\gamma^{[\lambda}\gamma_{\mu\nu}\gamma^{\sigma]}\psi_\sigma^B \\
&\quad + \frac{i}{4}\bar{\psi}_\lambda^C\gamma_{\mu\nu}\gamma^\lambda\lambda^{ABC} + \frac{i}{4\sqrt{2}}\eta\star(\bar{\lambda}\wedge\gamma_{\mu\nu}\lambda)^{AB}, \quad (7.73b)
\end{aligned}$$

$$\hat{P}_\mu^{ABCD} = P_\mu^{ABCD} - \frac{\sqrt{2}}{4}i((1+\eta\star)(\bar{\psi}_\mu\wedge\lambda))^{ABCD}. \quad (7.73c)$$

Gauging による付加項は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_g &= ig\frac{\sqrt{2}}{2}A_{1AB}\bar{\psi}_\mu^A\gamma^{\mu\nu}\psi_\nu^B + \frac{i}{6}gA_{2A}{}^{BCD}\bar{\psi}_\mu^A\gamma^\mu\lambda_{BCD} \\
&\quad + ig\frac{\sqrt{2}}{144}\eta\epsilon^{ABCDEFGH}A_2^K{}_{DEF}\bar{\lambda}_{ABC}\lambda_{GHK} + \text{h.c.}, \quad (7.74a)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{g^2} = g^2e\left\{\frac{3}{4}|A_1^{AB}|^2 - \frac{1}{24}|A_2^A{}_{BCD}|^2\right\}. \quad (7.74b)$$

ここで,

$$A_1^{AB} = -\frac{4}{21}T_C{}^{ABC}, \quad A_{2D}{}^{ABC} = -\frac{4}{3}T_D{}^{[ABC]}, \quad (7.75)$$

$$T_C{}^{DAB} = (u^{AB}{}_{ab} + v^{ABab})(u_{CE}{}^{bd}u^{DE}{}_{ca} - v_{CEbd}v^{DEda}). \quad (7.76)$$

7.2.3.4 局所超対称変換

$\epsilon = (\epsilon^A)(A = 1, \dots, 8)$ を無限小局所超対称変換のパラメータとなる (+)chirality のスピノール場として,

$$\delta\mathcal{V}\mathcal{V}^{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & (\bar{\epsilon} \wedge \lambda + \eta \star (\bar{\epsilon} \wedge \lambda))_{ABCD} \\ (\bar{\epsilon} \wedge \lambda + \eta \star (\bar{\epsilon} \wedge \lambda))^{ABCD} & \end{pmatrix}, \quad (7.77a)$$

$$\begin{aligned} \delta\lambda &= -2\sqrt{2}\gamma^\mu\epsilon \cdot \hat{P}_\mu + \frac{i}{2}\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^-\gamma^{\mu\nu}\epsilon - i\frac{\sqrt{2}}{2}\eta \star (\bar{\lambda} \wedge \lambda \cdot \epsilon) \\ &\quad + \delta_g\lambda, \end{aligned} \quad (7.77b)$$

$$\delta A_\mu = -i(u^\dagger + v^\dagger)(\bar{\epsilon} \cdot \gamma_\mu\lambda + \sqrt{2}\bar{\epsilon} \wedge \psi_\mu) + \text{h.c.}, \quad (7.77c)$$

$$\begin{aligned} \delta\psi_\mu^A &= 2D_\mu\epsilon^A + \frac{\sqrt{2}}{4}i\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}^{-AB}\gamma^{\rho\sigma}\gamma_\mu\epsilon_B \\ &\quad + \frac{i}{16}\eta\gamma_\mu\gamma_{\lambda\sigma}\epsilon_B \star (\bar{\lambda} \wedge \gamma^{\lambda\sigma}\lambda)^{BA} + \frac{i}{4}(\bar{\lambda}^{ACD}\gamma^\nu\lambda_{BCD})\gamma_\nu\gamma_\mu\epsilon^B \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4}i(\bar{\psi}_{\mu C}\gamma^\nu\lambda^{ABC})\gamma_\nu\epsilon_B + \delta_g\psi_\mu^A, \end{aligned} \quad (7.77d)$$

$$\delta e_\mu^m = i\bar{\epsilon} \cdot \gamma^m\psi_\mu + \text{h.c.} \quad (7.77e)$$

ここで,

$$\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu AB}^+ = \bar{\mathcal{F}}_{\mu\nu AB}^+ + \frac{i}{4}\bar{\psi}_\lambda^C\gamma^\lambda\gamma_{\mu\nu}\lambda_{ABC} - \frac{\sqrt{2}}{8}i\bar{\psi}_{\rho A}\{\gamma_{\mu\nu}, \gamma^{\rho\sigma}\}\psi_{\sigma B}, \quad (7.78)$$

$$\bar{\mathcal{F}}^+ = T(u^{-1})SF^+ - (\bar{u} + \bar{v})S\mathcal{O}^+, \quad \bar{\mathcal{F}}^- = (\bar{\mathcal{F}}^+)^\dagger. \quad (7.79)$$

また,

$$\delta_g\bar{\lambda}^{ABC} = -2ig\bar{\epsilon}^D A_{2D}^{ABC}, \quad (7.80a)$$

$$\delta_g\bar{\psi}_\mu^A = -\sqrt{2}ig\bar{\epsilon}_B\gamma_\mu A_1^{BA}. \quad (7.80b)$$

7.2.4 一般の gauging

Reference

- de Wit B, Samtleben H, Trigiante M: JHEP0706:049 (2007)
 “The maximal $D = 4$ supergravities”.

	Ours	dWBT
Notation	η_{ab}	η_{ab}
	$\epsilon_{012\dots}$	$\epsilon^{012\dots}$
	$\omega^a{}_b(X)$	$-\omega^a{}_b(X)$
	$\mathcal{R}^a{}_b$	$-\mathcal{R}^a{}_b$
	R	$-R$
	γ^a	γ^a
	$\bar{\psi}$	$-i\bar{\psi}$
	ψ^i	ψ^i
	χ^{ijk}	χ^{ijk}

添え字ルール 添え字を

- Sp 添え字:

$$(X_M) = \begin{pmatrix} X_\Lambda \\ X^\Sigma \end{pmatrix},$$

$$(M = 1, \dots, 56, \Lambda, \Sigma = 1, \dots, 28). \quad (7.81)$$

- Usp 添え字:

$$(Y^{\underline{N}}) = (Y^{ij} Y_{ij}),$$

$$(\underline{N} = 1, \dots, 56, i, j = 1, \dots, 8). \quad (7.82)$$

と表す. $SU(8)$ 変換と $Sp(56)$ 変換は次の様に作用:

- $(U^i{}_j) \in SU(8)$: $U_i{}^j = (U^i{}_j)^*$ として,

$$y^i \mapsto U^i{}_j y^j, \quad y_i \mapsto U_i{}^j y_j. \quad (7.83)$$

- $L = (L_M^N) \in \text{Sp}(56, \mathbb{R})$: $(L^M_N) = \mathcal{T}(L^{-1}) = -\Omega L \Omega$ として,

$$X^M \mapsto L^M_N X^N, \quad X_M \mapsto L_M^N X_M. \quad (7.84)$$

ここで,

$$\Omega = (\Omega^{MN}) = \begin{pmatrix} \Omega^{\Lambda\Sigma} & \Omega^\Lambda{}_\Omega \\ \Omega_{K\Sigma} & \Omega_{K\Omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_\Omega^\Lambda \\ -\delta_K^\Sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.85a)$$

$$\Omega_{\text{USp}} = (\Omega_{\underline{M}^N}) = \begin{pmatrix} -i 1 \wedge 1 & 0 \\ 0 & i 1 \wedge 1 \end{pmatrix}, \quad (7.85b)$$

$$(7.85c)$$

7.2.4.1 スカラ場

スカラ場を $E_{7(7)}$ の 56 次元表現に対する Sp-Usp 混合表示

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= L \mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}^{-1} \mathcal{V}_{\text{CJ}}^{-1} \in \text{GL}(56, \mathbb{C}) \\ (\mathcal{V}_{\text{CJ}} \in E_{7(7)} \subset \text{Usp}(56)) &: \end{aligned} \quad (7.86)$$

$$\rho_{\text{Sp}}^{56}(E_{7(7)}) \triangleright \mathcal{V} \triangleleft \rho_{\text{Usp}}^{56}(\text{SU}(8)) \quad (7.87)$$

で表す。成分は,

$$\mathcal{V} = (V_M^N) = (\mathcal{V}_M^{ij} \mathcal{V}_{Mij}) = \begin{pmatrix} V_\Lambda^{ij} & \mathcal{V}_{\Lambda kl} \\ V^{\Sigma ij} & \mathcal{V}^{\Sigma kl} \end{pmatrix} \quad (7.88)$$

ここで,

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{CJ}} = (S_N^M) = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{ij}^\Lambda & \mathcal{T}_{ij\Sigma} \\ \mathcal{T}^{kl\Lambda} & \mathcal{T}^{kl\Sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\Gamma_\Lambda^{ij} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\Gamma_\Sigma^{kl} \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.89)$$

\mathcal{V} は次の関係式を満たす:

$$\mathcal{V} \Omega_{\text{Usp}} \mathcal{V}^\dagger = \Omega_{\text{Sp}} = \Omega, \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{V}_M^{ij} \mathcal{V}_{Nij} - \mathcal{V}_{Mkl} V_N^{kl} = i \Omega_{MN}, \quad (7.90)$$

$$\mathcal{V}^\dagger \Omega \mathcal{V} = \Omega_{\text{Usp}}, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Omega^{MN} \mathcal{V}_M^{ij} \mathcal{V}_{Nkl} = i \delta_{[k}^i \delta_{l]}^j, \\ \Omega^{MN} \mathcal{V}_M^{ij} \mathcal{V}_N^{kl} = 0 \end{cases}. \quad (7.91)$$

これより,

$$(\mathcal{V}^{-1})_{\underline{M}^N} = i \Omega^{NP} \begin{pmatrix} -\mathcal{V}_{Pij} \\ \mathcal{V}_P^{kl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \mathcal{V}^\Lambda_{ij} & i \mathcal{V}^\Sigma_{ij} \\ i \mathcal{V}^{\Lambda kl} & -i \mathcal{V}^{\Sigma kl} \end{pmatrix}. \quad (7.92)$$

7.2.4.2 スピノール場

スピノール場は, Dirac 表示での chiral spinor ψ_μ^i, χ^{ijk} で与えられる:

$$\mathrm{SU}(8) \triangleright \psi_\mu, \lambda, \quad (7.93)$$

$$\gamma_5 \psi_\mu^i = \psi_\mu^i, \quad \gamma_5 \chi^{ijk} = \chi^{ijk}. \quad (7.94)$$

これより, chiral 表示で

$$\psi_\mu^i = \begin{pmatrix} \xi_\mu^i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{ijk} = \begin{pmatrix} \eta^{ijk} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.95)$$

以下, 次の記号法を採用:

$$\psi_{i\mu} = (\psi_\mu^i)^c = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_2 (\xi_\mu^i)^* \end{pmatrix}, \quad (7.96a)$$

$$\bar{\psi}_\mu^i = \overline{(\psi_{i\mu})} = (i \mathbb{T} \xi_\mu^i \sigma_2, 0), \quad (7.96b)$$

$$\bar{\psi}_{i\mu} = \overline{(\psi_\mu^i)} = (0, i (\xi_\mu^i)^\dagger), \quad (7.96c)$$

$$\chi_{ijk} = (\chi^{ijk})^c = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_2 (\eta^{ijk})^* \end{pmatrix}, \quad (7.96d)$$

$$\bar{\chi}^{ijk} = \overline{(\chi_{ijk})} = (i \mathbb{T} \eta^{ijk} \sigma_2, 0), \quad (7.96e)$$

$$\bar{\chi}_{ijk} = \overline{(\chi^{ijk})} = (0, i (\eta^{ijk})^\dagger). \quad (7.96f)$$

7.2.4.3 ベクトル場と gauging

ゲージ場は 56 個のベクトル場

$$A^M = A_\mu^M dx^\mu \quad (7.97)$$

で与えられる. このベクトル場を, 埋め込み定数テンソル Θ_M^α を用いて $E_{7(7)}$ の Lie 代数 (基底 $t_\alpha \in \mathrm{Sp}(56, \mathbb{R})$) に埋め込む:

$$(A^M) \mapsto A = A^M \Theta_M^\alpha t_\alpha \in \mathfrak{e}_{7(7)} \subset \mathfrak{sp}(56, \mathbb{R}). \quad (7.98)$$

このとき, X テンソルを

$$X_{MN}{}^L = (X_M)_N{}^L = \Theta_M^\alpha (t_\alpha)_N{}^L \quad (7.99)$$

により定義すると,

$$[X_M, X_N] = -X_{MN}{}^P X_P \quad (7.100)$$

が成り立つ. これより, A^M のゲージ変換は

$$\delta A_\mu^M = D_\mu \Lambda^M - g Z^{M,\alpha} \Xi_{\mu\alpha}, \quad (7.101)$$

$$D_\mu \Lambda^M = \partial_\mu \Lambda^M + g X_{PQ}{}^M A_\mu{}^P \Lambda^Q. \quad (7.102)$$

ここで, Λ^M および $\Xi_{\mu\alpha}$ はゲージパラメター (任意関数) で,

$$Z^{M,\alpha} = \frac{1}{2} \Omega^{MN} \Theta_N{}^\alpha. \quad (7.103)$$

整合性条件より

$$\Omega^{MN} \Theta_M{}^\alpha \Theta_N{}^\beta = 0 \Rightarrow X_M Z^{M,\alpha} = 0. \quad (7.104)$$

この X テンソルを用いて,

$$\mathcal{F}^M = dA^M + \frac{1}{2} g X_{[NP]}{}^M A^N \wedge A^P \quad (7.105)$$

によりフラックスを定義すると, ゲージ共変的でない. そこで, 新たなゲージ場 $B_{\mu\nu\alpha}$ を用いて,

$$\mathcal{H}_{\mu\nu}{}^M = \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^M + g Z^{M,\alpha} B_{\mu\nu\alpha}, \quad (7.106a)$$

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}{}^{+\Lambda} = \mathcal{H}_{\mu\nu}{}^{+\Lambda}, \quad (7.106b)$$

$$\mathcal{G}_{\mu\nu\Lambda}{}^+ = \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} \mathcal{H}_{\mu\nu}{}^{+\Sigma} + 2i \mathcal{O}_{\mu\nu\Lambda}{}^+, \quad (7.106c)$$

$$(\mathcal{G}_{\mu\nu}^M) = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{\mu\nu}{}^{+\Lambda} \\ \mathcal{G}_{\mu\nu\Lambda}{}^+ \end{pmatrix} \quad (7.106d)$$

と定義し, $B_{\mu\nu\alpha}$ のゲージ変換を

$$Z^{M,\alpha} \delta B_{\mu\nu\alpha} = 2Z^{M,\alpha} (D_{[\mu} \Xi_{\nu]\alpha} + t_{\alpha N}{}^L \Omega_{LP} A_{[\mu}{}^N \delta A_{\nu]}{}^P) - 2X_{(NP)}{}^M \Lambda^P \mathcal{G}_{\mu\nu}{}^N \quad (7.107)$$

とおくと, $\mathcal{G}_{\mu\nu}^M$ は, mod. 場の方程式で, ゲージ共変となる:

$$\delta \mathcal{G}^M = -g \Lambda^P X_{PN}{}^M \mathcal{G}^N \quad \text{mod}(X^\Lambda{}_M{}^N (\mathcal{G}^{(+)} - \mathcal{H}^{(+)})_\Lambda = 0) \quad (7.108)$$

7.2.4.4 共変微分

スカラ場 \mathcal{V} とゲージ場 A より

$$\mathcal{V}^{-1} \partial_\mu \mathcal{V} - \mathcal{V}^{-1} \mathcal{A}_\mu \mathcal{V} = \mathcal{Q}_\mu + \mathcal{P}_\mu; \quad (7.109)$$

$$\mathcal{A}_\mu = A_\mu^M X_M, \quad (7.110)$$

$$\mathcal{Q}_\mu = \begin{pmatrix} 2Q_\mu \wedge \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 2\bar{Q}_\mu \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix}; \quad Q_\mu = (Q_\mu^i{}_j) \quad (7.111)$$

$$\mathcal{P}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & P_\mu \\ \bar{P}_\mu & 0 \end{pmatrix}; \quad P_\mu = (P_{\mu ijkl}) \quad (7.112)$$

とおく, 特に, $Q_\mu = Q_\mu(\phi, A)$, $P_\mu = P_\mu(\phi, A)$ は A にも依存. $SU(8)$ ゲージ変換に対して,

$$\delta Q_\mu = -\partial_\mu \Lambda + [\Lambda, Q_\mu], \quad \delta P_\mu^{ijkl} = -4\Lambda^{[i} P_\mu^{jkl],m}. \quad (7.113)$$

これらを用いて, 共変微分を

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{V} = \partial_\mu \mathcal{V} - \mathcal{V} \mathcal{Q}_\mu - g \mathcal{A}_\mu \mathcal{V} = \mathcal{V} \mathcal{P}_\mu, \quad (7.114a)$$

$$D_\mu \psi_\nu^i = \nabla_\mu \psi_\nu^i + Q_\mu^i{}_j \psi_\nu^j, \quad (7.114b)$$

$$D_\mu \lambda^{ijk} = \nabla_\mu \lambda^{ijk} + 3Q_\mu^{[i} \lambda^{jkl]}. \quad (7.114c)$$

により定義する. ここで,

$$\mathcal{R}_M = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{Mij}{}^{kl} & \mathcal{P}_{Mijkl} \\ \mathcal{P}_M{}^{ijkl} & \mathcal{Q}_M{}^{ij}{}_{kl} \end{pmatrix} = (\mathcal{V}^{-1})_L^L X_{ML}{}^N \mathcal{V}_N^N = i \mathcal{V}_M^M T_{ML}{}^N, \quad (7.115)$$

すなわち,

$$\mathcal{Q}_{Mij}{}^{kl} = \mathcal{Q}_M^{[i} \delta_j^{kl]} = i \Omega^{NP} \mathcal{V}_{Nij} X_{MP}{}^Q \mathcal{V}_Q{}^{kl}, \quad (7.116a)$$

$$\mathcal{P}_{Mijkl} = (\star \mathcal{P}_M)^{ijkl} = i \Omega^{NP} \mathcal{V}_{Nij} X_{MP}{}^Q \mathcal{V}_{Qkl}. \quad (7.116b)$$

とおくと, $Q_{\mu i}{}^j$ と $P_{\mu ijkl}$ は次の様に表される:

$$Q_{\mu i}{}^j = \frac{2}{3} i (\mathcal{V}_{\Lambda ik} \partial_\mu \mathcal{V}^{\Lambda jk} - \mathcal{V}^{\Lambda}_{ik} \partial_\mu \mathcal{V}_{\Lambda}{}^{jk}) - g A_\mu^M \mathcal{Q}_{Mi}{}^j, \quad (7.117a)$$

$$\begin{aligned} P_{\mu ijkl} &= i \Omega^{MN} \mathcal{V}_{Mij} \mathcal{D}_\mu \mathcal{V}_{Nkl} = i (\mathcal{V}_{\Lambda ij} \mathcal{D}_\mu \mathcal{V}^{\Lambda}_{kl} - \mathcal{V}^{\Lambda}_{ij} \mathcal{D}_\mu \mathcal{V}_{\Lambda kl}) \\ &= i (\mathcal{V}_{\Lambda ij} \partial_\mu \mathcal{V}^{\Lambda}_{kl} - \mathcal{V}^{\Lambda}_{ij} \partial_\mu \mathcal{V}_{\Lambda kl}) - g A_\mu^M \mathcal{P}_{Mijkl}. \end{aligned} \quad (7.117b)$$

特に, ある点 $\mathcal{V}(0)$ の近傍で

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(0) \exp \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ \bar{\phi} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.118)$$

となる剰余類表現を取ると,

$$Q_{\mu i}{}^j = -g A_{\mu}{}^M \mathcal{Q}_{M i}{}^j, \quad (7.119a)$$

$$P_{\mu ijkl} = \partial_{\mu} \phi_{ijkl} - g A_{\mu}{}^M \mathcal{P}_{M ijkl} \quad (7.119b)$$

となる.

7.2.4.5 Lagrangian

全 Lagrangian は

$$\mathcal{L}^{\text{total}} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{CS}} + \mathcal{L}_g - eP(\mathcal{V}) : \quad (7.120)$$

$$\begin{aligned} 2\kappa^2 \mathcal{L}_0 &= eR(\omega, e) - \frac{e}{6} P_{\mu ijkl} P^{\mu ijkl} \\ &+ 2e^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_{\mu i} \gamma_{\sigma} D_{\nu}(\omega, Q) \psi_{\rho}^i - \frac{i}{3} \bar{\chi}_{ijk} \gamma^{\mu} D_{\mu}(\omega, Q) \chi^{ijk} \\ &- i \frac{\sqrt{2}}{6} e \left(\bar{\psi}_{\mu i} \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} \left(P_{\nu}^{ijkl} + \hat{P}_{\nu}^{ijkl} \right) \chi_{jkl} + \text{h.c.} \right) \\ &- \frac{e}{2} \left[i \mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} \mathcal{H}_{\mu\nu}^{+\Lambda} \mathcal{H}^{+\mu\nu\Sigma} - 4 \mathcal{H}_{\mu\nu}^{+\Lambda} \mathcal{O}_{\Lambda}^{+\mu\nu} + \text{h.c.} \right] \\ &- 2e \mathcal{V}^{\Lambda}{}_{ij} \mathcal{V}^{\Sigma ij} \left\{ \mathcal{O}_{\mu\nu\Lambda}^{+} \mathcal{O}_{\Sigma}^{+\mu\nu} + \text{h.c.} \right\} \\ &+ 2\kappa^2 \mathcal{L}_{f^4}; \end{aligned} \quad (7.121)$$

$$\begin{aligned} 2\kappa^2 \mathcal{L}_{f^4} &= e \bar{\psi}_{\mu}^{[i} \psi_{\nu}^{j]} \bar{\psi}_i^{\mu} \psi_j^{\nu} + \frac{\sqrt{2}}{4} e \left[\bar{\psi}_{\chi}^i \gamma^{\mu\nu} \gamma^{\lambda} \chi_{ijk} \bar{\psi}_{\mu}^j \bar{\psi}_{\nu}^k + \text{h.c.} \right] \\ &- e \left[-\frac{\eta}{4} \star (\bar{\chi} \wedge \gamma_{\mu\nu} \chi \wedge \bar{\psi}^{\mu} \wedge \psi^{\nu}) + \frac{1}{8} \bar{\psi}_{\lambda}^i \gamma_{\mu\nu} \gamma^{\lambda} \chi_{ikl} \bar{\psi}_{\mu j} \gamma_{\nu} \chi^{jkl} + \text{h.c.} \right] \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{12} e \eta \left[\star (\bar{\chi} \wedge \gamma^{\mu\nu} \chi \wedge (\bar{\psi} \cdot \gamma_{\nu} \chi)) + \text{h.c.} \right] \\ &- \frac{e}{16} (\bar{\chi}^{ikl} \gamma^{\mu} \chi_{jkl}) (\bar{\chi}^{jmn} \gamma_{\nu} \chi_{imn}) + \frac{e}{48} (\bar{\chi}^{ijk} \gamma^{\mu} \chi_{ijk})^2. \end{aligned} \quad (7.122)$$

ここで, $\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}$ は

$$\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma} \mathcal{V}^{\Sigma ij} = -\mathcal{V}_{\Lambda}{}^{ij} \quad (7.123)$$

の解で

$$-i[(\mathcal{N} - \bar{\mathcal{N}})^{-1}]^{\Lambda\Sigma} = \mathcal{V}^\Lambda{}_{ij} \mathcal{V}^{\Sigma ij} \geq 0 \quad (7.124)$$

を満たす。また

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mu\nu}^{+ij} &= -\frac{i}{2\sqrt{2}} \bar{\psi}_\lambda^i \gamma^{[\lambda} \gamma_{\mu\nu} \gamma^{\sigma]} \psi_\sigma^j \\ &\quad - i \frac{1}{4} \bar{\psi}_{\lambda k} \gamma_{\mu\nu} \gamma^\lambda \chi^{ijk} + \frac{i}{4\sqrt{2}} \eta \star (\bar{\chi} \wedge \gamma_{\mu\nu} \chi)^{ij}, \end{aligned} \quad (7.125a)$$

$$\hat{P}_\mu^{ijkl} = P_\mu^{ijkl} - i \frac{\sqrt{2}}{4} ((1 - \eta \star)(\bar{\psi}_\mu \wedge \chi))^{ijkl}. \quad (7.125b)$$

Gauging による付加項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g &= i g e \frac{\sqrt{2}}{2} A_{1ij} \bar{\psi}_\mu^i \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu^j - \frac{1}{6} g e A_{2i}{}^{jkl} \bar{\psi}_\mu^i \gamma^\mu \chi_{jkl} \\ &\quad - i g e \frac{\sqrt{2}}{144} \eta \epsilon^{ijkpqr} A_2{}^n{}_{pqr} \bar{\chi}_{ijk} \chi_{lmn} + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (7.126a)$$

$$\begin{aligned} P(\mathcal{V}) &= g^2 \left\{ -\frac{3}{4} |A_1^{ij}|^2 + \frac{1}{24} |A_2{}^i{}_{jkl}|^2 \right\} \\ &= \frac{g^2}{336} \mathcal{M}^{MN} \{ 8 \mathcal{P}_M{}^{ijkl} \mathcal{P}_{Nijkl} + 9 \mathcal{Q}_{Mi}{}^j \mathcal{Q}_{Nj}{}^i \} \\ &= \frac{g^2}{672} \{ X_{MN}{}^R X_{PQ}{}^S \mathcal{M}^{MP} \mathcal{M}^{NQ} \mathcal{M}_{RS} + 7 X_{MN}{}^Q X_{PQ}{}^N \mathcal{M}^{MP} \} \end{aligned} \quad (7.126b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CS} &= \frac{i}{2} g \Theta^{\Lambda\alpha} B_\alpha \left(dA_\Lambda + g X_{MN\Lambda} A^M \wedge A^N - \frac{g}{2} \Theta^{\Lambda\beta} B_\beta \right) \\ &\quad + \frac{i}{6} g X_{MN\Lambda} A^M \wedge A^N \wedge \left(dA^\Lambda + \frac{g}{2} X_{PQ}{}^\Lambda A^P \wedge A^Q \right) \\ &\quad + \frac{i}{12} g X_{MN}{}^\Lambda A^M \wedge A^N \wedge \left(dA_\Lambda + \frac{g}{2} X_{PQ\Lambda} A^P \wedge A^Q \right). \end{aligned} \quad (7.126c)$$

ここで, A_1, A_2 は

$$A_1{}^{jk} = -\frac{i}{7} \Omega^{MN} \mathcal{Q}_{Ml}{}^j \mathcal{V}_N{}^{kl}, \quad (7.127a)$$

$$A_2{}^i{}_{jkl} = -i \Omega^{MN} \mathcal{Q}_{Mi}{}^{[j} \mathcal{V}_N{}^{kl]}. \quad (7.127b)$$

で定義される SU(8) テンソル, \mathcal{M}_{MN} はスカラ場のみ依存した Sp(56, R) テンソル

$$\mathcal{M}_{MN} = (\mathcal{V} \mathcal{V}^\dagger)_{MN} = \mathcal{V}_M{}^{ij} \mathcal{V}_{Nij} + \mathcal{V}_{Mij} \mathcal{V}_N{}^{ij}, \quad (7.128a)$$

$$\mathcal{M}^{MN} = (\mathcal{M}_{MN})^{-1} = \Omega^{MP} \Omega^{NQ} \mathcal{M}_{PQ}. \quad (7.128b)$$

7.2.4.6 可能な Gauging

埋め込みテンソル Θ_M^α に対する条件は,

- 1) Lie 代数条件: 埋め込まれた無限小変換 $X_M = \Theta_M^\alpha t_\alpha$ が閉じた Lie 代数 G を作り, さらに, その adjoint 表現 $\text{ad}(X_M)(F^N X_N)$ から誘導されるゲージ場 F^M の変換は, $E_{7(7)}$ の 56 次元表現から誘導されるものと一致しなければならない. この後半の条件は

$$\text{ad}(X_M)(F^N X_N) = [X_M, X_N]F^N = \rho_{56}(X_M)^L{}_N X_L F^N \quad (7.129)$$

と表され, これより,

$$[X_M, X_N] = -X_{MN}{}^L X_L \quad (7.130)$$

を得る. この条件が満たされれば, 明らかに, X_M は閉じた Lie 代数を作る.

- 2) 超対称性条件: 理論が $N = 8$ の局所超対称性を持つための条件.

$$t_{\alpha M}{}^N \Theta_N^\alpha = 0, \quad (t_\beta t^\alpha)_M{}^N \Theta_N^\beta = -\frac{1}{2} \Theta_M^\alpha. \quad (7.131)$$

これらは,

$$X_{NM}{}^N = 0, \quad (X_N t^\alpha)_M{}^N t_\alpha = -\frac{1}{2} X_M \quad (7.132)$$

と同等.

超対称条件は, $E_{7(7)}$ の表現の分解

$$\mathbf{56} \times \mathbf{133} = \mathbf{56} + \mathbf{912} + \mathbf{6480} \quad (7.133)$$

において,

$$(\Theta_M^\alpha) \in \mathbf{912}_{E_{7(7)}} \quad (7.134)$$

を意味する. また,

$$(C_{MN}{}^\alpha) \in (\mathbf{56} \times \mathbf{912})_{E_{7(7)}} \quad (7.135)$$

が導かれる. したがって,

$$(\mathbf{912} \times \mathbf{912})_s = \mathbf{133} + \mathbf{8645} + \mathbf{1463} + \mathbf{152152} + \mathbf{253935}, \quad (7.136a)$$

$$\mathbf{56} \times \mathbf{912} = \mathbf{133} + \mathbf{8645} + \mathbf{1539} + \mathbf{40755}, \quad (7.136b)$$

$$(\mathbf{133} \times \mathbf{133})_a = \mathbf{133} + \mathbf{8645} \quad (7.136c)$$

より，超対称条件のもとで Lie 代数条件は，次の条件と同等になる：

$$\Theta_M^\alpha \Theta_N^\beta \Omega^{MN} = 0 \Leftrightarrow \Theta^{\Lambda[\alpha} \Theta_{\Lambda}^{\beta]} = 0. \quad (7.137)$$

この条件は，適当な $\text{Sp}(56, \mathbb{R})$ 変換により，常に $\Theta^\alpha = (\Theta_M^\alpha)$ を electric, すなわち $\Theta^{\Lambda\alpha} = 0$ とできることを意味する.

7.2.4.7 T テンソル

埋め込みテンソル Θ_M^α とスカラ場行列 \mathcal{V} を用いて， T テンソルを

$$T_{\underline{MN}}^P[\Theta, \phi] = \frac{1}{2} (\mathcal{V}^{-1})_{\underline{M}}^M (\mathcal{V}^{-1})_{\underline{N}}^N \mathcal{V}_P^P X_{MN}^P. \quad (7.138)$$

このとき， $X_M \in E_{7(7)}$ より，

$$T_{\underline{MN}}^P = (T_{ij\underline{N}}^P, T^{ij}{}_{\underline{N}}^P) \quad (7.139)$$

と分解すると，

$$T_{ij} = (T_{ij\underline{N}}^P) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \mathbf{1} \wedge \overset{(1)}{T}{}_{ij} & \star \overset{(2)}{T}{}_{ij} \\ \overset{(2)}{T}{}_{ij} & \frac{2}{3} \mathbf{1} \wedge \overset{(1)}{T}{}_{ij} \end{pmatrix}; \quad (7.140)$$

$$T^{ij} = (T^{ij\underline{N}}^P) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \mathbf{1} \wedge \overset{(1)}{T}{}^{ij} & \overset{(2)}{T}{}^{ij} \\ \star \overset{(2)}{T}{}^{ij} & -\frac{2}{3} \mathbf{1} \wedge \overset{(1)}{T}{}^{ij} \end{pmatrix}; \quad (7.141)$$

ここで

$$\overset{(1)}{(T^{ij})}_k{}^l = T_k{}^{lij} = \frac{3}{4} i \Omega^{MN} \mathcal{Q}_{Mk}{}^l \mathcal{V}_N{}^{ij}, \quad (7.142a)$$

$$\overset{(1)}{(T_{ij})}{}^k{}_l = \overset{(1)}{(T^{ij})}_k{}^{l*}. \quad (7.142b)$$

$$\overset{(2)}{(T^{ij})}_{klmn} = T_{klmn}{}^{ij} = \frac{i}{2} \mathcal{P}_{Mklmn} \mathcal{V}_N{}^{ij}, \quad (7.142c)$$

$$\overset{(2)}{(T_{ij})}{}^{klmn} = \overset{(2)}{(T^{ij})}_{klmn}{}^*. \quad (7.142d)$$

Susy 条件は， $T_{\underline{MN}}^P$ が $E_{7(7)}$ の 920 次元表現に属することを要求する。これを $\text{SU}(8)$ の表現に分解すると $920 = \mathbf{36} + \mathbf{36}^c + \mathbf{420} + \mathbf{420}^c$ となるが， $\delta_{[i}^{[k} T_{j]}^{lmn]}$ と $T^{klmn}{}_{ij}$ はいずれも $\mathbf{1512} + \mathbf{420} + \mathbf{28}$ と既約分解され，420

次元表現しか含まないので、両者は比例しないといけない。したがって、Susy 条件は次の条件と同等となる：

$$T^{klmn}{}_{ij} = -\frac{4}{3}\delta_{[i}^{[k}T_{j]}{}^{lmn]}, \quad (7.143a)$$

$$T_i{}^{jkl} = -\frac{3}{4}A_{2i}{}^{jkl} - \frac{3}{2}A_1{}^{j[k}\delta_i^{l]} \quad (7.143b)$$

ここで、

$$A_1{}^{[ij]} = 0, \quad A_{2i}{}^{jkl} = A_{2i}{}^{[jkl]}, \quad A_{2i}{}^{jki} = 0. \quad (7.144)$$

7.2.4.8 ゲージ対称性の自発的破れ

スカラーのモジュライ空間 S のある点 O の近傍で、次の様な剰余類表現を取る：

$$\mathcal{V} = V(O) \exp \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ \bar{\phi} & 0 \end{pmatrix} : \quad \phi = (\phi_{ijkl}), \quad \bar{\phi} = \star\phi = (\phi^{ijkl}). \quad (7.145)$$

このとき、 O で

$$\partial_\mu \mathcal{V} = \mathcal{V}(O) \begin{pmatrix} 0 & \partial_\mu \phi \\ \partial_\mu \bar{\phi} & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.146)$$

また、

$$\begin{aligned} \Omega^{MN}(\mathcal{V}_M{}^P)^\star \partial_\mu \mathcal{V}_N{}^Q &= \Omega^{MN}(\mathcal{V}(O)_M{}^P)^\star \mathcal{V}(O)_N{}^Q \begin{pmatrix} 0 & \partial_\mu \phi \\ \partial_\mu \bar{\phi} & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\Omega_{\text{Usp}} \begin{pmatrix} 0 & \partial_\mu \phi \\ \partial_\mu \bar{\phi} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.147)$$

より、

$$Q_{\mu i}{}^j = -gA_\mu{}^M \mathcal{Q}_{Mi}{}^j, \quad (7.148a)$$

$$P_{\mu ijkl} = \partial_\mu \phi - gA_\mu{}^M \mathcal{P}_{Mijkl}. \quad (7.148b)$$

次に、埋め込みテンソルが $X_{MP}{}^Q$ のとき、 \mathcal{V} のゲージ変換は

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{V} &= -g\Lambda^M X_M \mathcal{V} = -g\Lambda^M (\mathcal{V}_N{}^N(\mathcal{V}^{-1})_N{}^P X_{MP}{}^L \mathcal{V}_L{}^L) \\ &= -g\Lambda^M \mathcal{V} \mathcal{R}_M. \end{aligned} \quad (7.149)$$

一方, 基準点 O において

$$\delta\mathcal{V} = \mathcal{V}(O) \begin{pmatrix} 0 & \delta\phi \\ \delta\bar{\phi} & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.150)$$

よって,

$$\delta\phi_{ijkl} = -g\Lambda^M \mathcal{P}_{Mijkl}. \quad (7.151)$$

これより, 点 O が極点のとき,

$$\Lambda^M \mathcal{P}_{Mijkl} \neq 0 \quad (7.152)$$

に対応するゲージ対称性が破れる. したがって, $P_{\mu ijkl}$ の構造より, ちょうど $\delta\phi$ に対応するスカラの成分が Higgs 機構によりゲージ対称性の破れたゲージ場に質量を与える. また, $\delta\phi = 0$ に対応するゲージ場成分は, 最低次で, スカラ場と decouple する.

7.2.4.9 局所超対称変換

$\epsilon = (\epsilon^i)(i = 1, \dots, 8)$ を無限小局所超対称変換のパラメータとなる (+)chirality のスピノール場として,

$$\mathcal{V}^{-1}\delta\mathcal{V} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & (\bar{\epsilon} \wedge \chi + \eta \star (\bar{\epsilon} \wedge \chi))_{ijkl} \\ (\bar{\epsilon} \wedge \chi + \eta \star (\bar{\epsilon} \wedge \chi))^{ijkl} & \end{pmatrix}, \quad (7.153a)$$

$$\delta A_\mu^M = \Omega^{MN} \mathcal{V}_N^{jk} (\bar{\epsilon}^l \gamma_\mu \chi^{ljk} + \sqrt{2} (\bar{\epsilon} \wedge \psi_\mu)_{jk}) + \text{h.c.}, \quad (7.153b)$$

$$\begin{aligned} \delta B_{\mu\nu\alpha} &= \frac{2}{3} \sqrt{2} (t_\alpha)_M{}^P \Omega^{MQ} \left(i \mathcal{V}_{Pij} \mathcal{V}_{Qkl} \bar{\epsilon}^i \gamma_{\mu\nu} \chi^{jkl} + i 2 \sqrt{2} \mathcal{V}_{Pjk} \mathcal{V}_Q{}^{ik} \bar{\epsilon}_i \gamma_{[\mu} \psi_{\nu]}^j + \text{h.c.} \right) \\ &\quad - 2 (t_\alpha)_M{}^P \Omega_{PN} A_{[\mu}{}^N \delta A_{\nu]}{}^Q, \end{aligned} \quad (7.153c)$$

$$\delta e_\mu^m = i \bar{\epsilon} \cdot \gamma^m \psi_\mu + \text{h.c.}, \quad (7.153d)$$

$$\begin{aligned} \delta \psi_\mu^i &= 2 D_\mu \epsilon^i + \frac{\sqrt{2}}{4} \hat{\mathcal{H}}_{\rho\sigma}^{-ij} \gamma^{\rho\sigma} \gamma_\mu \epsilon_j \\ &\quad + \frac{i}{16} \eta \gamma_\mu \gamma_{\lambda\sigma} \epsilon_j \star (\bar{\chi} \wedge \gamma^{\lambda\sigma} \chi)^{ji} + \frac{i}{4} (\bar{\chi}^{ikl} \gamma^\nu \chi_{jkl}) \gamma_\nu \gamma_\mu \epsilon^j \\ &\quad + i \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{\psi}_{\mu k} \gamma^\nu \chi^{ijk} \gamma_\nu \epsilon_j + \delta_g \psi_\mu^i, \end{aligned} \quad (7.153e)$$

$$\begin{aligned} \delta \chi^{ijk} &= 2 \sqrt{2} \gamma^\mu \epsilon_l \hat{P}_\mu^{lijk} + \frac{3}{2} \hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^{-[ij} \gamma^{\mu\nu} \epsilon^{k]} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \eta \star (\bar{\chi} \wedge \chi \cdot \epsilon)^{ijk} \\ &\quad + \delta_g \chi^{ijk}. \end{aligned} \quad (7.153f)$$

ここで,

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu ij}^+ = \bar{\mathcal{H}}_{\mu\nu ij}^+ + i\frac{1}{4}\bar{\psi}_\lambda^k \gamma^\lambda \gamma_{\mu\nu} \chi_{ijk} - \frac{\sqrt{2}}{8}i\bar{\psi}_{\rho i} \{\gamma_{\mu\nu}, \gamma^{\rho\sigma}\} \psi_{\sigma j}, \quad (7.154)$$

$$\bar{\mathcal{H}}_{\mu\nu ij}^+ = (\mathcal{V}_{\Lambda ij} + \mathcal{V}_{ij}^\Sigma \mathcal{N}_{\Sigma\Lambda}) \mathcal{H}_{\mu\nu}^{+\Sigma} + 2i\mathcal{V}_{ij}^\Lambda \mathcal{O}_{\mu\nu\Lambda}^+, \quad (7.155)$$

$$\bar{\mathcal{H}}^- = (\bar{\mathcal{H}}^+)^{\dagger}. \quad (7.156)$$

また,

$$\delta_g \chi^{ijk} = -2g A_{2l}^{ijk} \epsilon^l, \quad (7.157a)$$

$$\delta_g \psi_\mu^i = \sqrt{2}g A_1^{ij} \gamma_\mu \epsilon_j. \quad (7.157b)$$

7.2.5 Vacuum 探査

Sp-Usp 混合表示の元で, スカラ場行列は, 勝手な点 P を基準とすると

$$\mathcal{V} = (\mathcal{V}_M^N) = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_\Lambda^{ij} & \mathcal{V}_{\Lambda kl} \\ \mathcal{V}^{\Sigma ij} & \mathcal{V}^{\Sigma kl} \end{pmatrix} = \mathcal{V}(P) \mathcal{S}, \quad (7.158a)$$

$$\mathcal{S} = \exp \begin{pmatrix} 2A \wedge \mathbf{1} & \phi \\ \bar{\phi} & 2\bar{A} \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (7.158b)$$

と表される。ここで,

$$\phi = (\phi_{ijkl}), \quad \bar{\phi} = \star\phi = (\phi^{ijkl}), \quad (7.159a)$$

$$(A \wedge \mathbf{1})_{kl}^{ij} = A_{[k}^{[i} \delta_{l]}^j]. \quad (7.159b)$$

このとき, ϕ は点 P 近傍での剰余類空間の局所座標系を与える。一般に, 56 次元 Usp 表示での $E_{7(7)}$ の Lie 代数の基底を \tilde{t}_α として,

$$\mathcal{S} = \exp(x^\alpha \tilde{t}_\alpha) \quad (7.160)$$

とおくと, $E_{7(7)}$ の局所座標系 (x^α) は $E_{7(7)}/\text{SU}(8)$ の局所座標系 (過剰系) を与える。この座標系を用いると,

$$\partial_\rho \mathcal{V} = \mathcal{V} \tilde{t}_\rho \quad (7.161)$$

となる。また, \mathcal{T}_{Usp} を用いて, Sp 表示に移ると,

$$\partial_\rho \mathcal{V} \mathcal{T}_{\text{Usp}} = L t_\rho; \quad (7.162a)$$

$$L = \mathcal{V} \mathcal{T}_{\text{Usp}}, \quad (7.162b)$$

$$t_\rho = \mathcal{T}_{\text{Usp}}^\dagger \tilde{t}_\rho \mathcal{T}_{\text{Usp}} \quad (7.162c)$$

となる.

一般に, ポテンシャルは,

$$X_{MN}{}^R = \Theta_M{}^\alpha (t_\alpha)_N{}^R, \quad (7.163)$$

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}_{MN}), \quad \mathcal{M}^{-1} = (M^{MN}) \quad (7.164)$$

を用いて,

$$P(\mathcal{V}) = \frac{g^2}{672} \{X_{MN}{}^R X_{PQ}{}^S \mathcal{M}^{MP} \mathcal{M}^{NQ} \mathcal{M}_{RS} + 7X_{MN}{}^Q X_{PQ}{}^N \mathcal{M}^{MP}\} \quad (7.165)$$

となる. ここで, \mathcal{M} は Sp-Usp 混合表示では

$$\mathcal{M} = \mathcal{V} \mathcal{V}^\dagger, \quad (7.166)$$

Sp-Sp 表示 $L = \mathcal{V} \mathcal{T}_{\text{Usp}}$ では

$$\mathcal{M} = L {}^T L \quad (7.167)$$

今点 P を固定して, P の近傍で上記の座標系を用いる. このとき,

$$\mathcal{V}(P) = L \mathcal{V}(O), \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}(P) \mathcal{S} \quad (7.168)$$

より,

$$\Theta'_{M^\alpha} t_\alpha = (L^{-1})_M{}^N \Theta_N{}^\alpha L^{-1} t_\alpha L, \quad (7.169)$$

すなわち

$$\Theta'_{M^\alpha} = (L^{-1})_M{}^N \Theta_N{}^\beta A_\beta{}^\alpha(L); \quad L^{-1} t_\alpha L = A_\alpha{}^\beta(L) t_\beta \quad (7.170)$$

とおくと, P でのポテンシャルの値は,

$$V(P) = \frac{g^2}{672} \Theta'_{M^\alpha} \tilde{\Theta}'_{M^\beta} (\delta_{\alpha\beta} + 7\eta_{\alpha\beta}). \quad (7.171)$$

ここで,

$$\text{Tr}(t_\alpha t_\beta^\dagger) = \delta_{\alpha\beta}, \quad \text{Tr}(t_\alpha t_\beta) = \eta_{\alpha\beta}. \quad (7.172)$$

次に,

$$\partial_\rho \mathcal{M} = \mathcal{V} (\tilde{t}_\rho + \tilde{t}_\rho^\dagger) \mathcal{V}^\dagger \Rightarrow L(t_\rho + {}^T t_\rho) {}^T L \quad (7.173)$$

より,

$$\begin{aligned}\partial_\rho V(P) &= \frac{g^2}{336} \left[(t_\rho)_M{}^N \Theta'_M{}^\alpha \Theta'_N{}^\beta (\delta_{\alpha\beta} + 7\eta_{\alpha\beta}) + \Theta'_M{}^\alpha \Theta'_M{}^\beta f_{\rho\alpha}{}^\gamma \delta_{\beta\gamma} \right] \\ &= \frac{g^2}{336} \left[(t_\rho)_M{}^N \text{Tr} ({}^T X'_M X'_N + 7X'_M X'_N) + \text{Tr} (t_\rho [X'_M, {}^T X'_M]) \right],\end{aligned}\quad (7.174)$$

ここで,

$$X'_M = (L^{-1})_M{}^N L^{-1} X_N L. \quad (7.175)$$

さらに,

$$\begin{aligned}\partial_\chi \partial_\rho \mathcal{M} &= \mathcal{V} (\tilde{t}_{(\chi} \tilde{t}_{\rho)} + \tilde{t}_\chi \tilde{t}_\rho^\dagger + \tilde{t}_\rho \tilde{t}_\chi^\dagger + \tilde{t}_{(\rho}^\dagger \tilde{t}_{\chi)}) \mathcal{V}^\dagger \\ &\Rightarrow L(t_{(\chi} t_{\rho)} + t_\rho \mathbb{T}_\chi + t_\chi \mathbb{T}_\rho + \mathbb{T}_{(\rho} \mathbb{T}_{\chi)}) \mathbb{T}L\end{aligned}\quad (7.176)$$

および

$$\begin{aligned}\partial_\chi \partial_\rho \mathcal{M}^{-1} &= -\mathcal{M}^{-1} \partial_{\chi\rho} \mathcal{M}^{-1} + 2\mathcal{M}^{-1} \partial_{(\rho} \mathcal{M} \mathcal{M}^{-1} \partial_{\chi)} \mathcal{M} \mathcal{M}^{-1} \\ &\Rightarrow L(t_{(\chi} t_{\rho)} + \mathbb{T}_{\rho} t_\chi + \mathbb{T}_\chi t_\rho + \mathbb{T}_{(\rho} \mathbb{T}_{\chi)}) \mathbb{T}L\end{aligned}\quad (7.177)$$

より,

$$\begin{aligned}\partial_\rho \partial_\chi V(P) &= \frac{g^2}{336} \left[(t_{(\rho} t_{\chi)} + \mathbb{T}_{(\rho} t_{\chi)})_M{}^N \Theta'_M{}^\alpha \Theta'_N{}^\beta (\delta_{\alpha\beta} + 7\eta_{\alpha\beta}) \right. \\ &\quad + 2(t_{\rho M}{}^N f_{\chi\alpha}{}^\gamma + t_{\chi M}{}^N f_{\rho\alpha}{}^\gamma) \delta_{\beta\gamma} \Theta'_M{}^{(\alpha} \Theta'_N{}^{\beta)} \\ &\quad \left. - \Theta'_M{}^\alpha \Theta'_M{}^\beta (\delta_{\alpha\delta} f_{\gamma(\rho}{}^\delta f_{\chi)\beta}{}^\gamma + \delta_{\gamma\delta} f_{\alpha(\rho}{}^\gamma f_{\chi)\beta}{}^\delta) \right]\end{aligned}\quad (7.178)$$

以上より, 点 P が $N = 8$ gauged Sugra 理論のポテンシャルの極点となる条件は,

$$\Theta'_M{}^\alpha \in \mathbf{912} \subset \mathbf{56} \times \mathbf{133} : E_{7(7)}, \quad (7.179a)$$

$$\Omega^{MN} \Theta'_M{}^\alpha \Theta'_N{}^\beta = 0, \quad (7.179b)$$

$$(t_\rho)_M{}^N \Theta'_M{}^\alpha \Theta'_N{}^\beta (\delta_{\alpha\beta} + 7\eta_{\alpha\beta}) + \Theta'_M{}^\alpha \Theta'_M{}^\beta f_{\rho\alpha}{}^\gamma \delta_{\beta\gamma} = 0, \quad (7.179c)$$

極点でのモジュライの質量行列は

$$\begin{aligned}(M^2)_{\rho\chi} &= \frac{g^2}{168} \left[(s_{(\rho} s_{\chi)})_M{}^N \text{Tr} (X'_M {}^T X'_N + 7X'_M X'_N) \right. \\ &\quad + 2(s_{(\rho})_M{}^N \text{Tr} (s_{\chi}) [X'_{(M}, {}^T X'_{N)}) \\ &\quad \left. - \text{Tr} ([s_{(\chi}, X'_M] [s_{\rho)}, {}^T X'_M]) \right].\end{aligned}\quad (7.180)$$

ここで,

$$s_\alpha := \frac{1}{2}(t_\alpha + \bar{t}_\alpha). \quad (7.181)$$

実際,

$$\partial_\rho \partial_\chi V = (M^2)_{\rho\chi} + \frac{1}{2}[\bar{t}_{(\rho}, t_{\chi)}]^\gamma \partial_\gamma V. \quad (7.182)$$

注) 基点の変更について 基点を O から P に変更するとき,

$$\mathcal{V}(P) = L\mathcal{V}(O), \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}(O)\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{V} = \mathcal{V}(P)\mathcal{S}' = L\mathcal{V}(O)\mathcal{S}' \quad (7.183)$$

より,

$$\mathcal{M} = L\mathcal{M}'\bar{L}, \quad \mathcal{M}' = \mathcal{V}(O)\mathcal{S}'^2\mathcal{V}(O)^\dagger. \quad (7.184)$$

よって,

$$X'_{MN}{}^L = (L^{-1})_M{}^P(L^{-1})_N{}^Q X_{PQ}{}^R L_R{}^L \quad (7.185)$$

と定義すると, V は $(\mathcal{S}, X_M) \rightarrow (\mathcal{S}', X'_M)$ の置き換えで不変となる. したがって, 基点の変更は, この X_M の変換と同等となる.

7.2.6 Electric SL_8 type

7.2.6.1 Embedding tensor に対する条件

一般に,

- 超対称条件

$$\Theta_M{}^\alpha \in \mathbf{912} \subset \mathbf{56} \times \mathbf{133}(E_{7(7)}) \quad (7.186)$$

- Lie 代数条件

$$\Omega^{MN}\Theta_M{}^\alpha\Theta_N{}^\beta = 0. \quad (7.187)$$

部分群 $SL(8, \mathbb{R}) \subset E_{7(7)}$ に対し,

$$E_{7(7)} \supset SL(8, \mathbb{R}) \quad (7.188a)$$

$$\mathbf{56} = \mathbf{28} + \mathbf{28}', \quad (7.188a)$$

$$\mathbf{133} = \mathbf{63} + \mathbf{70}, \quad (7.188b)$$

$$\mathbf{912} = \mathbf{36} + \mathbf{36}' + \mathbf{420} + \mathbf{420}' \quad (7.188c)$$

および

	28	28'
63	36 + 420	36' + 420'
70	420'	420

が成り立つ。よって,

$$\Theta_M^\alpha t_\alpha \in G \subset \text{SL}(8, \mathbb{R}) \Rightarrow \Theta_M^\alpha \in \mathbf{36} + \mathbf{36}'(\text{SL}(8, \mathbb{R})) \quad (7.189)$$

とくに,

$$\Theta_M^\alpha \in \mathbf{36}'(\text{SL}(8, \mathbb{R})) \quad (7.190)$$

の時,

$$\Theta_M^\alpha \in \mathbf{28}' \times \mathbf{63} \Rightarrow X_\Lambda \in \text{SL}(8, \mathbb{R}), \quad X^\Sigma = 0 \quad (7.191)$$

となり, Lie 代数条件も満たされる.

このとき,

$$X_{MN}{}^P : X_{[ab][cd]}{}^{[ef]} = \Theta_{ab}{}^{[e} \delta_{[c}^f]}, \quad X_{[ab]}{}^{[cd]}{}_{ef} = -\Theta_{ab}{}^{[c} \delta_{[e}^d]} \quad (7.192)$$

となるが, $\Theta_{abc}{}^d$ はさらに, 対称行列 θ_{ab} を用いて

$$\Theta_{ab}{}^c{}^d = \delta_{[a}^c \theta_{b]d} \quad (7.193)$$

と表される.

7.2.6.2 ゲージ群

ゲージ群 G の構造定数は $X_{MN}{}^P$ により決まる. その標準化に対しては任意の正則変換 $\Lambda_A{}^B$ を用いても良い:

$$X_{MN}{}^P \mapsto X'_{M'N'}{}^{P'} = \Lambda_{M'}{}^M \Lambda_{N'}{}^N X_{MN}{}^P \Lambda_P{}^{P'} \quad (7.194)$$

特に, $\Lambda_{[ab]}{}^{[cd]} = \Lambda_{[a}{}^{[c} \Lambda_b]{}^{d]}$ に対し,

$$\theta_{ab} \mapsto \Lambda_a{}^c \Lambda_b{}^d \theta_{cd} \quad (7.195)$$

これより, ゲージ群 G は実対称行列 (θ_{ab}) の固有値の正のもの, 負のもの, ゼロの数の組 $[p, q, r]$ ($p + q + r = 8$) のみで決まる.

$$\theta \simeq \mathbf{1}_p \oplus (-\mathbf{1})_q \oplus \mathbf{0}_r \Rightarrow G = \text{CSO}(p, q, r). \quad (7.196)$$

7.2.6.3 極点条件

点 P が極点となる条件は, Λ を $\mathfrak{sl}(8, \mathbb{R})$ の任意の行列として,

$$2\mathrm{Tr}(\Lambda\theta^2) - \mathrm{Tr}(\theta)\mathrm{Tr}(\Lambda\theta) = 0. \quad (7.197)$$

対応する極値は

$$V = \frac{g^2}{64} (2\mathrm{Tr}(\theta^2) - \mathrm{Tr}(\theta)^2). \quad (7.198)$$

[注: 規格化の違いで, この値は Dall'Aggata らのもの 1/8 倍]

極点条件は,

$$2\theta^2 - \mathrm{Tr}(\theta)\theta = 2vI_8 \quad (7.199)$$

と同等. θ の直交変換

$$\theta \mapsto U\theta U^T; \quad U \in \mathrm{SO}(8) \quad (7.200)$$

でポテンシャルは不変なので, ポテンシャルの値を保って θ を対角化できる. 対応する固有値 λ はすべて同じ方程式

$$\lambda^2 - a\lambda - v = 0, \quad a = \mathrm{Tr}(\theta) \quad (7.201)$$

を満たすので,

$$\theta = \lambda_1 I_n \oplus \lambda_2 I_{8-n}, \quad (7.202a)$$

$$(n-2)\lambda_1 + (6-n)\lambda_2 = 0, \quad (7.202b)$$

$$V = \frac{g^2}{4}v; \quad v = -\lambda_1\lambda_2. \quad (7.202c)$$

7.2.6.4 極点の分類

極点は, 表 16 の様に分類される.

7.2.6.5 接続

$X_{MN}{}^P$ が

$$X_{[ab][cd]}{}^{[ef]} = \delta_{[a}{}^{[e}\theta_{b][c}\delta_{d]}{}^{f]}, \quad X_{[ab]}{}^{[cd]}{}_{[ef]} = -\delta_{[a}{}^{[e}\theta_{b][e}\delta_{f]}{}^{d]} \quad (7.203a)$$

$$X^{[ab]}{}_N{}^P = 0 \quad (7.203b)$$

ゲージ群	タイプ	対称性	V	θ
SO(4, 4)	dS	SO(4) ²	$g^2/4$	$[1_{(4)}, -1_{(4)}]$
SO(5, 3)	dS	SO(5) \times SO(3)	$3g^2/16$	$[1_{(5)}, -3_{(3)}]$
CSO(2, 0, 6)	Mink	SO(2) \times SO(6)	0	$[1_{(2)}, 0_{(6)}]$
SO(8)	adS	SO(7)	$-5g^2/4$	$[1_{(7)}, 5_{(1)}]$
	adS	SO(8)	$-3g^2/4$	$[1_{(8)}]$

表 16: Vacua for electric SL₈ gauging

で与えられるとき, \mathcal{P}_{Mijkl} は

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{[ab]ijkl} &:= i\Omega^{NP}\mathcal{V}_{Nij}X_{[ab]P}{}^Q\mathcal{V}_{Qkl} \\ &= -i(\mathcal{V}_{[f[a]ij}\mathcal{V}^{[fc]}{}_{kl}\theta_{b]c} + ([ij] \leftrightarrow [kl])).\end{aligned}\quad (7.204)$$

特に, 原点において

$$\mathcal{V}_{[af]ij}\mathcal{V}^{[cf]}{}_{kl} = \mathcal{F}_{[af]ij}^\dagger \mathcal{F}^{\dagger[cf]}{}_{kl} = \frac{i}{32}(\Gamma^{ij}\Gamma^{kl})_{ac}$$

より,

$$\mathcal{P}_{[ab]ijkl}(O) = \frac{1}{16}((\Gamma^{ijkl})_{c[a}\theta_{b]c}).\quad (7.205)$$

ここで,

$$(\Gamma^{ijkl})_{ab} = \Gamma_{ac}^{[ij}\Gamma_{cb}^{kl]}.\quad (7.206)$$

同様に, $\mathcal{Q}_{Mi}{}^j$ は原点で,

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{[ab]ij}{}^{kl} &:= i\Omega^{NP}\mathcal{V}_{Nij}X_{[ab]P}{}^Q\mathcal{V}_Q{}^{kl} \\ &= -i\theta_{c[b}(\mathcal{V}_{[a]f]ij}\mathcal{V}^{[cf]kl} + \mathcal{V}_{[af]}{}^{kl}\mathcal{V}^{[cf]}{}_{ij}) \\ &= -\frac{1}{4}(\Gamma_{ac})_{[i}{}^{[k}\delta_{j]}^{l]}\theta_{bc}\end{aligned}\quad (7.207)$$

より,

$$\mathcal{Q}_{[ab]i}{}^j(O) = -\frac{1}{4}\theta_{c[b}(\Gamma_{a]c})^{ij}.\quad (7.208)$$

一般点では,

$$\mathcal{V} = \mathcal{F}^\dagger \mathcal{F}\quad (7.209)$$

とおくと,

$$\mathcal{R}_M = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_M & \mathcal{P}_M \\ \bar{\mathcal{P}}_M & \bar{\mathcal{Q}}_M \end{pmatrix} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{R}_M(O)\mathcal{F}.\quad (7.210)$$

Spinor 接続 Q_μ は原点で,

$$\begin{aligned} Q_{\mu i}{}^j &\equiv \frac{2}{3}(\mathcal{S}^{-1}\partial_\mu\mathcal{S})_{ik}{}^{jk} - gA_\mu^M \mathcal{Q}_{Mi}{}^j \\ &= \frac{g}{4}\sum_{a,b}\theta_a A_\mu^{ab}(\Gamma_{ab})_{ij}. \end{aligned} \quad (7.211)$$

また, P_μ は原点で

$$\begin{aligned} P_{\mu ijkl} &\equiv (\mathcal{S}^{-1}\partial_\mu\mathcal{S})_{ijkl} - gA_\mu^M \mathcal{P}_{Mijkl} \\ &= \partial_\mu\phi_{ijkl} - \frac{g}{16}(\lambda_1 - \lambda_2)\sum_{a\in S_1, b\in S_2} A_\mu^{ab}(\Gamma^{ijkl})_{ab}. \end{aligned} \quad (7.212)$$

ただし, S_1, S_2 は固有値 λ_1, λ_2 に対応する添え字. また,

$$\mathcal{S} = \exp\begin{pmatrix} 0 & \phi \\ \bar{\phi} & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.213)$$

7.2.6.6 モジュライ場の質量

s_α は

$$(s_\alpha)_{[ab]}{}^{[cd]} = -(s_\alpha)^{[cd]}{}_{[ab]} = 2(S_\alpha)_{[a}{}^{[c}\delta_{b]}^{d]}, \quad (7.214a)$$

$$(s_\alpha)_{[ab]}{}_{[cd]} = (s_\alpha)^{[ab]}{}^{[cd]} = (U_\alpha)_{abcd} \quad (7.214b)$$

で与えられる. ここで, 行列 S と 4 階テンソル U は条件

$${}^T S = S, \quad \text{Tr}(S) = 0, \quad S^* = S, \quad (7.215a)$$

$$U_{abcd} = U_{[abcd]}, \quad \star U = U, \quad U^* = U \quad (7.215b)$$

を満たし, それぞれ自由度 35.

これらの量で質量行列 $(M^2)_{\rho\chi}$ の各項を表すと,

$$\begin{aligned} & (s^2)_M{}^N \text{Tr}(X_M {}^T X_N + 7X_M X_N) \\ &= -21\text{Tr}(\theta)\text{Tr}(S^2\theta) - 21(\text{Tr}(S\theta))^2 + \frac{3}{2}\text{Tr}(\theta^2)\text{Tr}(S^2) \\ &+ 27\text{Tr}(S^2\theta^2) + 21\text{Tr}(S\theta S\theta) \\ &+ 3(U^2)_{a;b}(\theta^2)_{ab} - 21U_{[ac];[bd]}^2\theta_{ab}\theta_{cd}, \end{aligned} \quad (7.216a)$$

$$\begin{aligned} & 2s_M{}^N \text{Tr}(s[X_{(M}, {}^T X_{N)}]) \\ &= -3\text{Tr}(\theta^2)\text{Tr}(S^2) + 6\text{Tr}(S^2\theta^2) + 18\text{Tr}(S\theta S\theta), \end{aligned} \quad (7.216b)$$

$$\begin{aligned} & -\text{Tr}([s, X_M][s, {}^T X_M]) \\ &= \frac{3}{2}\text{Tr}(\theta^2)\text{Tr}(S^2) + 9\text{Tr}(S^2\theta^2) + 3\text{Tr}(S\theta S\theta) \\ &+ \frac{1}{2}U \cdot U \text{Tr}(\theta^2). \end{aligned} \quad (7.216c)$$

ここで,

$$(U^2)_{a;b} = U_{pqra}U_{pqrb}, \quad (U^2)_{[ab];[cd]} = U_{pqab}U_{pqcd}, \quad U \cdot U = U_{abcd}U_{abcd}. \quad (7.217)$$

また, U の自己双対性より,

$$(U^2)_{a;b} = \frac{1}{8}(U \cdot U)\delta_{ab}. \quad (7.218)$$

よって,

$$(M^2)_{\rho\chi} = \frac{g^2}{8} \{ (M_{(1)}^2)_{\rho\chi} + (M_{(2)}^2)_{\rho\chi} \}; \quad (7.219)$$

$$\begin{aligned} M_{(1)}^2(S, S) &= -\text{Tr}(\theta)\text{Tr}(S^2\theta) - (\text{Tr}(\theta S))^2 \\ &+ 2\text{Tr}(S^2\theta^2) + 2\text{Tr}(S\theta S\theta), \end{aligned} \quad (7.220)$$

$$M_{(2)}^2(U, U) = -U_{[ab];[cd]}^2\theta_{ac}\theta_{bd} + \frac{1}{24}(U \cdot U)\text{Tr}(\theta^2). \quad (7.221)$$

Goldstone ボゾンに対応する方向で質量がゼロとなることを確認する. まず, U_{sp} 表示で自発的に対称性が破れる方向は,

$$\delta U = \begin{pmatrix} 0 & \delta\phi_{ijkl} \\ \delta\phi_{ijkl}^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.222)$$

$$\delta\phi_{ijkl} = -g\Lambda^M \mathcal{P}_{Mijkl} = \frac{g}{16}\Lambda^{[ab]}(\Gamma^{ijkl})_{c[a}\theta_{b]c}. \quad (7.223)$$

これに対応する Sp 表示での行列は

$$s = \begin{pmatrix} 2S \wedge 1 & U \\ U & -2S \wedge 1 \end{pmatrix} \propto \mathcal{F}^\dagger \delta U \mathcal{F}, \quad (7.224)$$

$$\mathcal{F} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\Gamma_{ab}^{ij} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\Gamma_{cd}^{kl} \end{pmatrix} \quad (7.225)$$

より,

$$(2S \wedge 1 + iU)_{abcd} = \frac{1}{16}\Gamma_{ab}^{ij}\Gamma_{cd}^{kl}\delta\phi_{ijkl} \propto \frac{1}{16}\Gamma_{ab}^{ij}\Gamma_{cd}^{kl}(\Gamma^{ijkl})_{p[e\theta_f]p}\Lambda^{[ef]}. \quad (7.226)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab}^{ij}\Gamma_{cd}^{kl}\Gamma_{pq}^{ijkl} &= \frac{128}{3}(\delta_{p[a}\delta_{b][c}\delta_{d]q} + \delta_{q[a}\delta_{b][c}\delta_{d]p}) - \frac{2}{3}\text{Tr}(\Gamma_{ab}\Gamma_{rq}\Gamma_{cd}\Gamma_{pr}) \\ &= 128(\delta_{p[a}\delta_{b][c}\delta_{d]q} + \delta_{q[a}\delta_{b][c}\delta_{d]p}) + 32\delta_{a[c}\delta_{d]b}\delta_{pq} \end{aligned} \quad (7.227)$$

より

$$\frac{1}{16}\Gamma_{ab}^{ij}\Gamma_{cd}^{kl}(\Gamma^{ijkl})_{p[e\theta_f]p}\Lambda^{[ef]} = -9(\Lambda\theta - \theta\Lambda)^{[d}_{[a}\delta_{b]}^e]. \quad (7.228)$$

よって, ${}^T\Lambda = -\Lambda$ として, Goldstone ボゾンに対応する方向は

$$S \propto \Lambda\theta - \theta\Lambda, \quad U = 0. \quad (7.229)$$

この方向に対し, $\theta = \lambda_1 \mathbf{1}_p \oplus \lambda_2 \mathbf{1}_q$ のとき,

$$(M_{(1)}^2)_{\Lambda, \Lambda} = -(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_1 + \lambda_2)((p-2)\lambda_1 + (q-2)\lambda_2)\text{Tr}(\Lambda_{12} {}^T\Lambda_{12}). \quad (7.230)$$

ここで,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ -{}^T\Lambda_{12} & \Lambda_{22} \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{11} \in M(p), \quad \Lambda_{22} \in M(q) \quad (7.231)$$

とおいた. この質量行列が, 表?? のすべての場合についてゼロとなることは容易に確かめられる.

次に, 質量固有値を求める. まず, 対称な SL 行列 S を $p+q$ 分解すると

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^T B & D \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_p & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_q \end{pmatrix}. \quad (7.232)$$

さらに, $pq > 0$ のとき, 対称行列 A と D を単位行列に比例した部分と trace-free 部分に分離する:

$$A = \frac{1}{p}\text{Tr}(A)I_p + \hat{A}, \quad D = -\frac{1}{q}\text{Tr}(A)I_q + \hat{D}. \quad (7.233)$$

このとき, 質量 2 次式 $M_{(1)}^2$ は

$$M_{(1)}^2 = \frac{8}{g^2} \left[\frac{8}{pq} m_0^2 \text{Tr}(A)^2 + m_1^2 \text{Tr}(\hat{A}^2) + m_2^2 \text{Tr}(\hat{D}^2) + 2m_3^2 \text{Tr}(B^T B) \right], \quad (7.234)$$

と対角化される. 対応する固有値と重複度は

$$1 : m_0^2 = \frac{g^2}{64} \{2q(2-p)\lambda_1^2 + 2p(2-q)\lambda_2^2 - (p-q)^2\lambda_1\lambda_2\}, \quad (7.235a)$$

$$\frac{(p-1)(p+2)}{2} : m_1^2 = \frac{g^2}{8} \lambda_1 \{(4-p)\lambda_1 - q\lambda_2\}, \quad (7.235b)$$

$$\frac{(q-1)(q+2)}{2} : m_2^2 = \frac{g^2}{8} \lambda_2 \{(4-q)\lambda_2 - p\lambda_1\}, \quad (7.235c)$$

$$pq : m_3^2 = \frac{g^2}{16} (\lambda_1 + \lambda_2) \{(2-p)\lambda_1 + (2-q)\lambda_2\}. \quad (7.235d)$$

ただし, 最初の固有値は $pq > 0$ の時のみ, また, 第 2, 第 3 の固有値はそれぞれ $p \geq 2, q \geq 2$ の時のみ存在. ここで, 場の規格化は,

$$(2S \wedge 1 + iU)_{abcd} = \frac{1}{16} \Gamma_{ab}^{ij} \Gamma_{cd}^{kl} \delta\phi_{ijkl} \quad (7.236)$$

より

$$\frac{1}{12\kappa^2} P^{\mu ijkl} P^{\mu ijkl} = \frac{1}{12\kappa^2} (\partial_\mu \phi_{ijkl} + \dots)^2 \Rightarrow \frac{1}{2\kappa^2} \text{Tr}(S^2) + \frac{1}{12\kappa^2} U \cdot U \quad (7.237)$$

次に $M_{(2)}^2$ の固有値を求めるために, 8 個の添え字 $1, \dots, 8$ をそれぞれ p 個, q 個の 2 つのグループに分ける:

$$S_1 = \{1, \dots, p\}, \quad S_2 = \{p+1, \dots, p+q=8\}. \quad (7.238)$$

このとき, l を

$$0 \leq l \leq p, \quad 0 \leq 4-l \leq q \quad (7.239)$$

を満たす非負整数とすると, 4 階反対称テンソルの独立な基底は, S_1 に属する異なる l 個の添え字の組 I_l と S_2 に属する異なる $l' = 4-l$ 個の添え字

の組 I_2 によりラベル付けされる. また, 組 (I_1, I_2) に対応する基底 $Z^{(I_1, I_2)}$ の双対は $(S_1 - I_1, S_2 - I_2)$ に対応する基底と (符号を除いて) 一致する. このとき,

$$\theta_{[a}^r \theta_b^s Z_{cd]rs} = \frac{1}{12} \{l(l-1)\lambda_1^2 + 2l(4-l)\lambda_1\lambda_2 + (4-l)(3-l)\lambda_2^2\} Z_{abcd} \quad (7.240)$$

となるので, 結局, $M_{(2)}^2$ の固有ベクトルは, 条件

$$p \leq 2l \leq \min(2p, 8) \quad (7.241)$$

を満たす非負整数 l によりラベル付けられる:

$$\frac{1}{2}(1 + \star)\theta_{[a}^r \theta_b^s U_{cd]rs} = \mu_l U_{abcd}, \quad (7.242a)$$

$$\begin{aligned} \mu_l &= \frac{1}{24} \{l(l-1)\lambda_1^2 + 2l(4-l)\lambda_1\lambda_2 + (4-l)(3-l)\lambda_2^2\} \\ &\quad + \frac{1}{24} \{(p-l)(p-l-1)\lambda_1^2 + 2(p-l)(4-p+l)\lambda_1\lambda_2 \\ &\quad + (4-p+l)(3-p+l)\lambda_2^2\} \end{aligned} \quad (7.242b)$$

重複度は,

$$2l > p : {}_p C_l \times {}_{8-p} C_{4-l}, \quad (7.243a)$$

$$2l = p : \frac{1}{2} {}_p C_{p/2} \times {}_{8-p} C_{4-p/2}. \quad (7.243b)$$

また, $M_{(2)}^2$ に対応する質量固有値は, U の運動項の規格化を考慮すると

$$\begin{aligned} m_{(2)l}^2 &= \frac{g^2}{32} \left[\{p-l(l-1) - (p-l)(p-l-1)\} \lambda_1^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \{l(4-l) + (p-l)(4+l-p)\} \lambda_1\lambda_2 \right. \\ &\quad \left. + \{q - (4-l)(3-l) - (4+l-p)(3+l-p)\} \lambda_2^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.244)$$

7.2.6.7 ゲージ運動項

まず, $F_{\mu\nu}^M$ は

$$\begin{aligned} F^{ab} &= dA^{ab} + \frac{g}{2} X_{[cd][ef]}^{ab} A^{cd} \wedge A^{ef} \\ &= dA^{ab} + \frac{g}{2} \theta_{cd} A^{c[a} \wedge A^{b]d} \end{aligned} \quad (7.245)$$

ゲージ群	V	対称性	モジュライ質量 $\begin{matrix} \text{even} \\ \text{odd} \end{matrix}$
SO(4, 4)	1	SO(4) \times SO(4)	$-2_{(1)}, 2_{(9_s, 1)}, 2_{(1, 9_s)}, 0_{(4_v, 4_v)}$ $-2_{(1)}, 2_{(6_a, 6_a)^+}, 1_{(4_v, 4_v)}$
SO(5, 3)	3/4	SO(5) \times SO(3)	$-2_{(1)}, 4/3_{(14_s, 1)}, 4_{(1, 5_s)}, 0_{(5_v, 3_v)}$ $-2/3_{(5_v, 1)}, 2_{(10_a, 3_v)}$
CSO(2, 0, 6)	0	SO(2) \times SO(6)	$0_{(1)}, 2_{(2_s, 1)}, 0_{(1, 20_s)}, 0_{(2_v, 6_v)}$ $0_{(1, 15_a)}, 1/2_{(2_v, 20)^+}$
SO(8)	-5/4	SO(7)	$2_{(1)}, -4/5_{(27_s)}, 0_{(7_v)}$ $-2/5_{(35)}$
	-3/4	SO(8)	$-2/3_{(35_s)}$ $-2/3_{(35)}$

表 17: Moduli masses for vacua for electric SL_8 gauging

ゲージ運動項の係数 $\mathcal{N}_{[ab][cd]}$ は

$$\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma}\mathcal{V}^{\Sigma ij} = -\mathcal{V}_{\Lambda}^{ij}, \quad (7.246)$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{I}^{-1}\mathcal{S} \quad (7.247)$$

より,

$$\Gamma_{ab}^{kl}(\mathcal{S}_{kl}^{ij} - \mathcal{S}^{klij})\mathcal{N}_{[cd][ab]} = -i\Gamma_{cd}^{kl}(\mathcal{S}_{kl}^{ij} + \mathcal{S}^{klij}) \quad (7.248)$$

の解として決まる．特に，原点では

$$\mathcal{N}_{[ab][cd]} = -i\delta_{[c}^{[a}\delta_{d]}^{b]}. \quad (7.249)$$

一般点では、

$$\mathcal{S} = \exp \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ \bar{\phi} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{\phi\bar{\phi}}) & \phi \text{jh}(\sqrt{\phi\bar{\phi}}) \\ \bar{\phi} \text{jh}(\sqrt{\phi\bar{\phi}}) & \cosh(\sqrt{\phi\bar{\phi}}) \end{pmatrix} \quad (7.250)$$

より、

$$\mathcal{S}_{kl}^{ij} = (\cosh(\sqrt{\phi\bar{\phi}}))_{kl}^{ij}, \quad (7.251a)$$

$$\mathcal{S}^{klij} = \phi^{klhm}(\text{jh}(\sqrt{\phi\bar{\phi}}))_{hm}^{ij}. \quad (7.251b)$$

ここで,

$$\text{jh}(z) = \frac{\sinh(z)}{z}. \quad (7.252)$$

よって、 \mathcal{N} の方程式は、

$$\mathcal{N}_{[cd][ab]} \Gamma_{ab}^{kl} (\cosh(\sqrt{\phi\bar{\phi}}) - \bar{\phi} \text{jh}(\sqrt{\phi\bar{\phi}}))_{kl}{}^{ij} = -i \Gamma_{cd}^{kl} (\cosh(\sqrt{\phi\bar{\phi}}) + \bar{\phi} \text{jh}(\sqrt{\phi\bar{\phi}}))_{kl}{}^{ij}. \quad (7.253)$$

これを解くと、

$$i \mathcal{N}_{[ab][cd]} = \frac{1}{16} \Gamma_{ab}^{ij} \left[(1 + \bar{\phi} \text{tjh}(\sqrt{\phi\bar{\phi}})) (1 - \bar{\phi} \text{tjh}(\sqrt{\phi\bar{\phi}}))^{-1} \right]_{ijkl} \Gamma_{cd}^{kl}. \quad (7.254)$$

ここで,

$$\text{tjh}(z) = \frac{\tanh(z)}{z}. \quad (7.255)$$

また、 $\phi\bar{\phi}$ は正値エルミート行列、 $\bar{\phi}(\phi\bar{\phi})^{-1/2}$ はユニタリ一行列なので、

$$|(\bar{\phi}(\phi\bar{\phi})^{-1/2})^{ijkl}| < 1, \quad |(\tanh(\sqrt{\phi\bar{\phi}}))^{ijkl}| < 1. \quad (7.256)$$

また,

$$\det(1 + \bar{\phi} \text{tjh}(\sqrt{\phi\bar{\phi}})) = 0 \quad (7.257)$$

となるとすると,

$$\bar{\phi} \text{tjh}(\sqrt{\phi\bar{\phi}}) v = -v \quad (7.258)$$

となる固有ベクトル $v = (v_{[ij]})$ が存在. このとき,

$$v^\dagger v = v^\dagger \tanh^2(\sqrt{\phi\bar{\phi}}) v < v^\dagger v \quad (7.259)$$

となり矛盾. よって、 $i \mathcal{N}_{[ab][cd]}$ は至る所有界. ただし、一様有界ではない. $|\phi\bar{\phi}| \rightarrow \infty$ のとき、発散する可能性がある.

7.2.6.8 超対称性

原点で $\bar{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^{-ij}$ は

$$\bar{\mathcal{H}}_{\mu\nu}^{-ij} = (\mathcal{V}_{[ab]ij} + \mathcal{V}^{[cd]}_{ij} \mathcal{N}_{[cd][ab]})^* F_{\mu\nu}^{-ab} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \Gamma_{ij}^{ab} F_{\mu\nu}^{-ab} \quad (7.260)$$

また、原点で

$$A_1^{jk} = -\frac{i}{7}\Omega^{MN}\mathcal{Q}_{Ml}^j\mathcal{V}_N^{kl} = -i\frac{\sqrt{2}}{32}\mathrm{Tr}(\theta)\delta^{jk}, \quad (7.261a)$$

$$A_{2l}{}^{ijk} = -i\Omega^{MN}\mathcal{Q}_{Ml}{}^{[i}\mathcal{V}_N^{jk]} = -i\frac{1}{16\sqrt{2}}\theta_{ab}(\Gamma^{lijk})_{ab}. \quad (7.261b)$$

よって、スピノール場の背景値をゼロとして、原点で

$$\begin{aligned} \delta\psi_\mu^i &= 2\nabla_\mu\epsilon^i + \frac{g}{4}\sum_{a,b}(\theta_a + \theta_b)A_\mu^{ab}(\Gamma_{ab})^{ij}\epsilon^j \\ &\quad - \left(\frac{1}{32}F_{\rho\sigma}^{-ab}\Gamma_{ab}^{ij}\gamma^{\rho\sigma} + i\frac{g}{16}\mathrm{Tr}(\theta)\delta^{ij} \right) \gamma_\mu\epsilon_j, \end{aligned} \quad (7.262a)$$

$$\begin{aligned} \delta\chi^{ijk} &= 2\sqrt{2}\gamma^\mu\epsilon_l P_\mu{}^{lijk} - \frac{3}{4\sqrt{2}}F_{\mu\nu}^{-ab}\Gamma_{ab}^{[ij}\gamma^{\mu\nu}\epsilon^{k]} \\ &\quad - i\frac{\sqrt{2}}{16}g\theta_{ab}(\Gamma^{lijk})_{ab}\epsilon^l. \end{aligned} \quad (7.262b)$$

これより、 $P_{\mu ijkl} = 0$, $A_\mu^{ab} = 0$ とすると、超対称条件は、

$$\nabla_\mu\epsilon^i = i\frac{g}{32}\mathrm{Tr}(\theta)\gamma_\mu\epsilon^i, \quad (7.263a)$$

$$\theta_{ab}(\Gamma^{lijk})_{ab}\epsilon^l = 0. \quad (7.263b)$$

第1の条件より

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu]\epsilon^i &= \frac{1}{4}\gamma_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\epsilon^i \\ &= -\frac{g^2}{512}(\mathrm{Tr}\theta)^2\gamma_{\mu\nu}\epsilon^i. \end{aligned} \quad (7.264)$$

この条件は、

$$R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = \frac{2\Lambda}{3}\delta_{[\mu}^\alpha\delta_{\nu]}^\beta \quad (7.265)$$

より、

$$\Lambda = -\frac{3}{256}g^2(\mathrm{Tr}\theta)^2. \quad (7.266)$$

この条件は、 $P(\mathcal{V})$ の表式より、

$$A_{2i}{}^{jkl} = 0 \Leftrightarrow \theta_{ab}(\Gamma^{lijk})_{ab} = 0. \quad (7.267)$$

7.2.7 SO(4, 4)-gauging

7.2.7.1 Axion 型有効理論

極点は按点型 dS で，モジュライの質量行列 \mathcal{M}^2 は 2 つの $m^2 < 0$ 方向を持つ：

$$\delta\mathcal{S} \Leftrightarrow \frac{1}{16}\Gamma\phi\Gamma = xS \wedge \mathbf{1} + iyU \quad (7.268)$$

ここで，

$$S = [1_{(4)}, -1_{(4)}], \quad U = \frac{1}{2}(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6 \wedge e_7 \wedge e_8). \quad (7.269)$$

ϕ を

$$\mathbb{R}^8 \wedge \mathbb{R}^8 \cong \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_{12} \oplus \mathcal{L}_2; \quad (7.270a)$$

$$\mathcal{L}_1 = \mathbb{R}^4 \wedge \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^6 \ni X^{[ij]} : i, j = 1, \dots, 4, \quad (7.270b)$$

$$\mathcal{L}_2 = \mathbb{R}^4 \wedge \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^6 \ni X^{[ij]} : i, j = 5, \dots, 8, \quad (7.270c)$$

$$\mathcal{L}_{12} = \mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^{16} \ni X^{[ij]} : i = 1, \dots, 4, j = 5, \dots, 8. \quad (7.270d)$$

から自分自身への線形写像とみるとき，

$$S \wedge \mathbf{1} \cong \text{id} \oplus (-\text{id}) \oplus 0 \in \text{End}(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_{12}), \quad (7.271a)$$

$$U \cong \epsilon \oplus \epsilon \oplus 0 \in \text{End}(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_{12}) \quad (7.271b)$$

ここで，

$$(\epsilon X)^{[ij]} = \frac{1}{2}\epsilon^{ijkl} X_{kl}. \quad (7.272)$$

したがって， ϕ は $\text{End}(\mathbb{R}^4 \wedge \mathbb{R}^4)$ に属する 2 つの線形写像に帰着される。

このとき，

$$(S \wedge 1)(S \wedge 1) \cong \text{id} \oplus \text{id} \oplus 0, \quad (7.273a)$$

$$UU \cong \text{id} \oplus \text{id} \oplus 0 \quad (7.273b)$$

より，対応

$$xS \wedge 1 + iyU \mapsto (x + iy\epsilon)\mathbf{1}_6 \oplus (-x + iy\epsilon)\mathbf{1}_6 \oplus \mathbf{0}_{16} \quad (7.274)$$

により， ϕ の任意関数を具体的に計算することができる。

ゲージ場運動項 例えば, ゲージ場運動項

$$2\kappa^2 \mathcal{L}_F = -\text{Re}(i\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma})F^\Lambda \cdot F^\Sigma + \text{Im}(i\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma})F^\Lambda \cdot \tilde{F}^\Sigma, \quad (7.275a)$$

$$i\mathcal{N}_{[ab][cd]} = \frac{1}{16} \text{Tr} \left((\Gamma_{ab}(1 + \bar{\phi} \text{tjh} \sqrt{\phi \bar{\phi}})(1 - \bar{\phi} \text{tjh} \sqrt{\phi \bar{\phi}})^{-1} \Gamma_{cd}) \right) \quad (7.275b)$$

において, $z = x + iy$ とおくと,

$$\phi \cong (x + iy\epsilon) \oplus (-x + iy\epsilon) \oplus 0, \quad (7.276a)$$

$$\phi \bar{\phi} \cong |z|^2 (1 \oplus 1 \oplus 0), \quad (7.276b)$$

$$1 \pm \bar{\phi} \text{tjh} \sqrt{\phi \bar{\phi}} = \{1 \pm (x - iy\epsilon) \text{tjh}(|z|)\} \oplus \{1 \mp (x + iy\epsilon) \text{tjh}(|z|)\} \quad (7.276c)$$

よって, 残留ゲージ群 $\text{SO}(4) \times \text{SO}(4)$ を

$$\text{SO}(4) \times \text{SO}(4) \cong_{\text{loc}} \text{SU}(2)_{1+} \times \text{SU}(2)_{1-} \times \text{SU}(2)_{2+} \times \text{SU}(2)_{2-} \quad (7.277)$$

とカイラル分解すると, ゲージ場の運動項は,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F = & -\frac{e}{2\kappa^2} \text{Tr}(F_{12} \cdot F_{12}) \\ & -\frac{e}{2\kappa^2} \left[\frac{1}{f_1(z)} \text{Tr}(F_{1+}^2 + F_{1-}^2) + \frac{1}{f_2(z)} \text{Tr}(F_{2+}^2 + F_{2-}^2) \right] \\ & + \frac{e}{2\kappa^2} \frac{y}{|z|} \sinh(2|z|) \left[\frac{1}{f_1(z)} \text{Tr}(F_{1+} \cdot \tilde{F}_{1+} - F_{1-} \cdot \tilde{F}_{1-}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{f_2(z)} \text{Tr}(F_{2+} \cdot \tilde{F}_{2+} - F_{2-} \cdot \tilde{F}_{2-}) \right]. \end{aligned} \quad (7.278)$$

$$(7.279)$$

ここで

$$f_{1/2}(z) = \cosh(2|z|) \mp \frac{x}{|z|} \sinh(2|z|). \quad (7.280)$$

モジュライ運動項 同様にして,

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2 \oplus 1, \quad (7.281)$$

$$\mathcal{S}_1 = \begin{pmatrix} \cosh(|z|) & -(x + iy\epsilon) \text{jh}(|z|) \\ -(x - iy\epsilon) \text{jh}(|z|) & \cosh(|z|) \end{pmatrix}, \quad (7.282)$$

$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1(x \rightarrow -x) \quad (7.283)$$

より,

$$(\mathcal{S}_1^{-1} \partial \mathcal{S}_1)_{abcd} = -\partial \hat{z} \text{jh}(2|z|) - \frac{\hat{z}}{|z|} \partial |z| (1 - \text{jh}(2|z|)). \quad (7.284)$$

ここで,

$$(\hat{z})_{abcd} = x(1 \wedge 1)_{abcd} + iy \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} \Rightarrow \hat{z} \cdot \hat{z} = 6|z|^2. \quad (7.285)$$

よって, アクシオン型モジュライの運動項は

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{e}{12\kappa^2} P^2, \quad (7.286)$$

$$P^2 = 6 \{1 + \text{jh}^2(2|z|)\} |\partial z|^2 + \frac{6(1 - \text{jh}^2(2|z|))}{2|z|^2} \{ \bar{z}^2 (\partial z)^2 + z^2 (\partial \bar{z})^2 \}. \quad (7.287)$$

モジュライポテンシャル ポテンシャルの一般式において,

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}_{MN}) = \mathcal{T}^{-1} \mathcal{S} \mathcal{T} \cong M_1 \oplus M_2 \oplus 1, \quad (7.288a)$$

$$\mathcal{M}^{-1} = (\mathcal{M}^{MN}) = \mathcal{T}^{-1} \mathcal{S}^{-2} \mathcal{T} \cong M_1^{-1} \oplus M_2^{-1} \oplus 1, \quad (7.288b)$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cosh(2|z|) - 2x\text{jh}(2|z|) & -2y\text{jh}(2|z|)\epsilon \\ -2y\text{jh}(2|z|)\epsilon & \cosh(2|z|) + 2x\text{jh}(2|z|) \end{pmatrix} \quad (7.288c)$$

$$M_2 = M_1(x \rightarrow -x) \quad (7.288d)$$

また,

$$V = \frac{g^2}{672} (V_1 + 7V_2); \quad (7.289)$$

$$V_1 = (\mathcal{M}^{-1})^{[ab][cd]} \theta_{bc} \theta_{dp} (Y^{ep}_{ac} - Z^{eq}_{ac}), \quad (7.290)$$

$$V_2 = 3\theta^{ad} \theta^{bc} (\mathcal{M}^{-1})^{[ab][cd]}. \quad (7.291)$$

ここで,

$$Y^{ab}_{cd} = (\mathcal{M}^{-1})^{[ap][bq]} \mathcal{M}_{[cp][dq]} + (\mathcal{M} \leftrightarrow \mathcal{M}^{-1}), \quad (7.292a)$$

$$Z^{ab}_{cd} = (\mathcal{M}^{-1})^{[ap]}_{[dq]} \mathcal{M}_{[cp]}^{[bq]} + (\mathcal{M} \leftrightarrow \mathcal{M}^{-1}). \quad (7.292b)$$

今の場合、 Y と Z のゼロでない成分は、

$$Y^{a_1 b_1}_{c_1 d_1} = (2 + \cosh^2(2|z|) - 4x^2 \text{jh}^2(2|z|)) \delta^{a_1 b_1} \delta^{c_1 d_1} + \frac{1}{2} \{ \cosh^2(2|z|) - 4x^2 \text{jh}^2(2|z|) \} \delta^{a_1 c_1} \delta^{b_1 d_1} \quad (7.293a)$$

$$Y^{a_2 b_2}_{c_2 d_2} = (2 + \cosh^2(2|z|) - 4x^2 \text{jh}^2(2|z|)) \delta^{a_2 b_2} \delta^{c_2 d_2} + \frac{1}{2} \{ \cosh^2(2|z|) - 4x^2 \text{jh}^2(2|z|) \} \delta^{a_2 c_2} \delta^{b_2 d_2} \quad (7.293b)$$

$$Y^{a_1 b_1}_{c_2 d_2} = 3 (\cosh(2|z|) - 2x \text{jh}(2|z|)) \delta_{a_1 b_1} \delta_{c_2 d_2}, \quad (7.293c)$$

$$Y^{a_2 b_2}_{c_1 d_1} = 3 (\cosh(2|z|) + 2x \text{jh}(2|z|)) \delta_{a_2 b_2} \delta_{c_1 d_1}, \quad (7.293d)$$

$$Y^{a_1 b_2}_{c_1 d_2} = \frac{1}{2} \delta^{a_1 c_1} \delta_{b_2 d_2}, \quad (7.293e)$$

$$Y^{a_2 b_1}_{c_2 d_1} = \frac{1}{2} \delta^{a_2 c_2} \delta_{b_1 d_1}, \quad (7.293f)$$

$$Z^{a_1 b_1}_{c_1 d_1} = -8y^2 \delta^{a_1 [c_1} \delta^{b_1] d_1} \text{jh}^2(2|z|), \quad (7.293g)$$

$$Z^{a_2 b_2}_{c_2 d_2} = -8y^2 \delta^{a_2 [c_2} \delta^{b_2] d_2} \text{jh}^2(2|z|). \quad (7.293h)$$

これより、

$$V_1 = 84 \cosh(2|z|), \quad V_2 = -36 \cosh(2|z|) + 48. \quad (7.294)$$

よって、

$$V = \frac{g^2}{4} (2 - \cosh(2|z|)). \quad (7.295)$$

有効ラグランジアン $SU(2)$ ゲージ場を 1 成分のみ残すと、 $z = r \exp(i\theta)$ とおくと、

$$\begin{aligned} \kappa^2 \mathcal{L} = & - *dr \wedge dr - \frac{1}{4} \sinh^2(2r) *d\theta \wedge d\theta - V(r) *1 \\ & - \frac{1}{4f(r)} \text{Tr}(*F \wedge F) + \frac{\sinh(2r) \sin \theta}{4f(r)} \text{Tr}(F \wedge F), \end{aligned} \quad (7.296)$$

$$f(r) = \cosh(2r) \pm \sinh(2r) \cos \theta, \quad (7.297)$$

$$V(r) = \frac{1}{4} (2 - \cosh(2r)). \quad (7.298)$$

7.2.8 SL₈ Mixture type

Embedding tensor が $\mathbf{36}' + \mathbf{36}$ に属するとき,

$$X_{\Sigma N}{}^R : X_{[ab][cd]}{}^{[ef]} = \delta_{[a}^{[e} \theta_{b][c} \delta_{d]}^f], \quad (7.299a)$$

$$X_{[ab]}{}^{[cd]}{}_{[ef]} = -\delta_{[a}^{[c} \theta_{b][e} \delta_{f]}^d], \quad (7.299b)$$

$$X^{\Lambda}{}_{N}{}^R : X^{[ab]}{}_{[cd]}{}^{[ef]} = -\delta_{[c}^{[a} \xi^{b][e} \delta_{d]}^f], \quad (7.299c)$$

$$X^{[ab][cd]}{}_{[ef]} = \delta_{[e}^{[a} \xi^{b][c} \delta_{f]}^d]. \quad (7.299d)$$

このとき, 超対称条件は

$$\theta \xi = c I_8. \quad (7.300)$$

7.2.8.1 非退化型

$c \neq 0$ のとき c の値は, スケーリング $\theta \Rightarrow \pm |c|^{1/2} \theta, \xi \Rightarrow \pm |c|^{1/2} \xi$ により, g の値に吸収できるので, 以下 $c = 1$ とする. また, 原点での極値条件は

$$2(\theta^2 - \xi^2) - (\text{Tr}(\theta)\theta - \text{Tr}(\xi)\xi) = 2v I_8. \quad (7.301)$$

対応する極値は,

$$V = \frac{g^2}{64} [2\text{Tr}(\theta^2) - (\text{Tr}\theta)^2 + 2\text{Tr}(\xi^2) - (\text{Tr}\xi)^2] \quad (7.302)$$

ここで, 原点の取り替えに対応する $E_{7(7)}$ の作用は,...

θ が正則となる解は, $\xi = \theta^{-1}$ として, 次のように分類される:

dS 真空

- [5, 3] 型 ($G = \text{SO}(5, 3) \Rightarrow \text{SO}(5) \times \text{SO}(3)$)

$$\theta \cong (\lambda \mathbf{1}_5) \oplus \left(-\frac{s}{\lambda} \mathbf{1}_3 \right); \quad \lambda = \sqrt{\frac{s(3+s^2)}{1+3s^2}}, \quad (7.303a)$$

$$V = g^2 \frac{3(1+s^2)^3}{4s(1+3s^2)(3+s^2)} \quad (7.303b)$$

$\det \theta = \pm 1$ となるのは, $s = 1$ のみなので, s は理論の変形パラメータ.

- [4, 4] 型 ($G = \text{SO}(4, 4) \Rightarrow \text{SO}(4) \times \text{SO}(4)$)

$$\theta \cong (s\mathbf{1}_4) \oplus (-s\mathbf{1}_4), \quad (7.304a)$$

$$V = \frac{g^2}{4} \left(s^2 + \frac{1}{s^2} \right). \quad (7.304b)$$

これも, $\det \theta = \pm 1$ となるのは, $s = 1$ のみで, s はやはり理論の変形パラメーター.

Minkowski 真空

- [2, 2, 2, 2] 型 ($G = \text{SO}(6, 2) \Rightarrow \text{SO}(2)^4$)

$$\theta \cong (r\mathbf{1}_2) \oplus (s\mathbf{1}_2) \oplus (t\mathbf{1}_2) \oplus \left(-\frac{1}{rst}\mathbf{1}_2 \right), \quad (7.305a)$$

$$V = 0. \quad (7.305b)$$

常に $\det \theta = 1$ で, 3つの連続パラメーター (flat direction) をもち, 理論変形パラメーターはない.

- この型が退化したもの.

adS 真空

- [8] 型 ($G = \text{SO}(8)$)

$$\theta \cong s\mathbf{1}_8 \quad (s > 0), \quad (7.306a)$$

$$V = -\frac{3g^2}{4} \frac{1 + s^4}{s^2}. \quad (7.306b)$$

$\det \theta = \pm 1$ となるのは, $s = 1$ の時のみなので, s は理論の変形パラメーター.

- [7, 1] 型 ($G = \text{SO}(8), \text{SO}(7, 1)$)

$$\theta = (\lambda\mathbf{1}_7) \oplus \left(\frac{s}{\lambda}\mathbf{1}_1 \right); \quad \lambda = \sqrt{\frac{s(s^2 - 5)}{5s^2 - 1}}, \quad (7.307a)$$

$$\det \theta = \frac{s^4(s^2 - 5)^3}{(5s^2 - 1)^3}, \quad (7.307b)$$

$$V = -g^2 \frac{5(1 + s^2)^3}{4s(5s^2 - 1)(s^2 - 5)}. \quad (7.307c)$$

θ の固有値が同符号となるのは,

$$0 < s < 1/\sqrt{5}, \sqrt{5} < s \quad (7.308)$$

のときで, このとき, $G = \text{SO}(8) \Rightarrow \text{SO}(7)$. 特に, $\det \theta = 1$ となるのは

$$s = \sqrt{5} \pm 2 \Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{\sqrt{5} \mp 1}{2}}, \quad \frac{s}{\lambda} = \sqrt{\frac{13\sqrt{5} \pm 29}{2}}$$

$$V = -\frac{25\sqrt{5}}{32}g^2. \quad (7.309)$$

s は理論の変形パラメータで, 常に 2 個の異なる s が同じ $\det \theta$ を与える.

θ の固有値の符号が $[+^{(7)}, -^{(1)}]$ となるのは

$$-\sqrt{5} < s < -1/\sqrt{5} \quad (7.310)$$

のときで, このとき, $G = \text{SO}(7, 1) \Rightarrow \text{SO}(7)$. 特に, $\det \theta = -1$ となるのは,

$$s = -1 \Rightarrow \lambda = 1, \quad \frac{s}{\lambda} = -1, \quad V = -\frac{5}{2}. \quad (7.311)$$

このときも, s は理論の変形パラメータで, $\det \theta$ は s の単調減少関数.

- $[6, 1, 1]$ 型 $G = \text{SO}(8), \text{SO}(7, 1)$

$$\theta \cong (\lambda_1 \mathbf{1}_6) \oplus (\lambda_2 \mathbf{1}_1) \oplus (\lambda_3 \mathbf{1}_1); \quad (7.312a)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{2s(s + \sqrt{2})(-s + 2\sqrt{2})}{(4s + \sqrt{2})(-2s + \sqrt{2})}}, \quad \lambda_2 = \frac{s}{\lambda_1}, \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{2}s - 1}{s(s + \sqrt{2})}\lambda_1, \quad (7.312b)$$

$$\det \theta = -\frac{s^3(s + \sqrt{2})^2(-s + 2\sqrt{2})^3}{(2\sqrt{2}s + 1)^3(-\sqrt{2}s + 1)^2}, \quad (7.312c)$$

$$V = -g^2 \frac{3(1 + s^2)^3}{2s(s + \sqrt{2})(-s + 2\sqrt{2})(4s + \sqrt{2})(-2s + \sqrt{2})} \quad (7.312d)$$

変数を

$$t = -\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2s - 1}} \quad (7.313)$$

と変換すると,

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{t(t^2 - 2)}{2t^2 - 1}}, \quad \lambda_2, \lambda_3 = -\frac{3t}{(2t^2 - 1)\lambda_1} \pm \frac{\sqrt{2}(t^2 + 1)}{t(t^2 - 2)(2t^2 - 1)} \quad (7.314a)$$

$$\det \theta = -\frac{t^2(t^2 - 2)^3}{(2t^2 - 1)^3}, \quad (7.314b)$$

$$V = -\frac{g^2(t^2 + 1)^3}{4t(t^2 - 2)(2t^2 - 1)}. \quad (7.314c)$$

$\det \theta > 0$ となるのは

$$s > 2\sqrt{2} \quad (7.315)$$

のときで, このとき, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. よって, ゲージ群と残留対称性は $\text{SO}(8) \Rightarrow \text{SO}(6)$. $\det \theta$ は s の単調関数で理論の変形パラメータ. 例えば, $\det \theta = 1$ となるのは $s = 3 + 2\sqrt{2}$ のときで, 対応する固有値は

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3 + 2\sqrt{2}, \quad \lambda_3 = 3 - 2\sqrt{2}, \quad (7.316a)$$

$$V = -2g^2. \quad (7.316b)$$

一方, $\det \theta < 0$ となる s は 2 個で, $0 < s_2 < \sqrt{2}/2$ と $-\sqrt{2} < s_3 < -\sqrt{2}/4$ にある. $s = s_2$ に対して, $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$. また, $s = s_3$ に対しては, $\lambda_1, \lambda_3 > 0, \lambda_2 < 0$. いずれの場合も, 対称性は $\text{SO}(7, 1) \Rightarrow \text{SO}(6)$.

いずれの場合も, s は理論の変形パラメータ.

- $[5, 1, 1, 1]$ ($G = \text{SO}(7, 1) \Rightarrow \text{SO}(5)$)

$$\theta \cong (\lambda \mathbf{1}_5) \oplus \left(\frac{s}{\lambda} \right) \oplus (\sigma_+) \oplus (\sigma_-), \quad (7.317a)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{s(s^2 - 3)}{3s^2 - 1}}, \quad (7.317b)$$

$$\sigma_{\pm} = \mp \frac{\sqrt{3}(s^2 + 1) \pm 4s}{s(3s^2 - 1)(s^2 - 3)} \quad (7.317c)$$

$$V = -\frac{3}{2} \frac{(s^2 + 1)^3}{s(3s^2 - 1)(s^2 - 3)} \quad (7.317d)$$

ゲージ群	タイプ	対称性	V	θ	$\det \theta$
SO(4, 4)	dS	SO(4) ²	$\frac{1}{4}g^2(s^2 + s^{-2})$	$[s_{(4)}, (-s)_{(4)}]$	s^8
SO(5, 3)	dS	SO(5) \times SO(3)	$g^2 f_{3+}(s)$	$[\lambda_{(5)}, (-s/\lambda)_{(3)}]$	$\frac{s^4(3+s^2)^3}{(1+3s^2)^3}$
SO(6, 2)	Mink	SO(6) \times SO(2)	0	$[s_{(6)}, (-1/s^3)_{(2)}]$	1
	Mink	SO(4) \times SO(2) ²	0	$[s_{(4)}, t_{(2)}, (-1/(s^2t))_{(2)}]$	1
	Mink	SO(2) ⁴	0	$[s_{(2)}, t_{(2)}, u_{(2)}, (\frac{-1}{stu})_{(2)}]$	1
SO(7, 1)	adS	SO(7)	$-g^2 f_{5-}(s)$	$[\lambda_{(7)}, -s/\lambda]$	$-\frac{s^4(s^2-5)^3}{(5s^2-1)^3}$
	adS	SO(6)	$-\frac{g^2}{2} f_{2-}(s)$	$[\lambda_{(6)}, \sigma_+, \sigma_-]$	$-\frac{s^2(s^2-2)^3}{(2s^2-1)^3}$
	adS	SO(5)	$-2g^2 f_{s-}(s)$	$[\lambda_{(5)}, s/\lambda, \sigma_+, \sigma_-]$	$-\frac{s(s^2-3)^3}{(3s^2-1)^3}$
SO(8)	adS	SO(8)	$-\frac{3}{4}g^2(s^2 + s^{-2})$	$[s_{(8)}]$	s^8
	adS	SO(7)	$-g^2 f_{5-}$	$[\lambda_{(7)}, -s/\lambda]$	$-\frac{s^4(s^2-5)^3}{(5s^2-1)^3}$
	adS	SO(6)	$-\frac{g^2}{2} f_{2-}(s)$	$[\lambda_{(6)}, \sigma_+, \sigma_-]$	$-\frac{s^2(s^2-2)^3}{(2s^2-1)^3}$

表 18: Summary table: $\theta\xi = 1$ の場合.

$$f_{n+}(s) = \frac{n(1+s^2)^3}{4s(1+ns^2)(n+s^2)}, \quad f_{n-}(s) = \frac{n(1+s^2)^3}{4s(ns^2-1)(s^2-n)}.$$

$\det \theta < 0$ で。 $\det \theta = -1$ となるのは $s = -1, 2 \pm \sqrt{3}$ 。対応する θ は順序を入れ替えれば一致し、

$$[1, -1, 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}], \quad V = -3. \quad (7.318)$$

s は理論の変形パラメータ.

7.2.8.2 退化型

$\theta\xi = 0$ のとき、

$$\theta = [\theta_1, \dots, \theta_k, 0, \dots, 0] = [\tilde{\theta}, 0], \quad (7.319a)$$

$$\xi = [0, \dots, 0, \xi_{9-l}, \dots, \xi_8] = [0, \tilde{\xi}] \quad (7.319b)$$

という形に同時対角化でき ($k+1 \leq 8$)、極値条件は

$$2\tilde{\theta}^2 - (\text{Tr}\tilde{\theta})\tilde{\theta} = 2vI_k, \quad (7.320a)$$

$$2\tilde{\xi}^2 - (\text{Tr}\tilde{\xi})\tilde{\xi} = -2vI_l \quad (7.320b)$$

となる。これより、 $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ を

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(\theta)/2, \quad \lambda_1\lambda_2 = -v, \quad (7.321a)$$

$$\mu_1 + \mu_2 = \text{Tr}(\xi)/2, \quad \mu_1\mu_2 = v \quad (7.321b)$$

により決まる実数として,

$$\theta = \lambda_1 \mathbf{1}_{n_1} \oplus \lambda_2 \mathbf{1}_{n_2} \oplus \mathbf{0}_{8-n_1-n_2}, \quad (7.322a)$$

$$\xi = \mathbf{0}_{8-m_1-m_2} \oplus \mu_1 \mathbf{1}_{m_1} \oplus \mu_2 \mathbf{1}_{m_2} \quad (7.322b)$$

となる. よって, $\lambda_i, \mu_i, n_i, m_i$ の満たすべき条件は

$$(n_1 - 2)\lambda_1 + (n_2 - 2)\lambda_2 = 0, \quad (7.323a)$$

$$(m_1 - 2)\mu_1 + (m_2 - 2)\mu_2 = 0, \quad (7.323b)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 = 0, \quad (7.323c)$$

$$n_1 + n_2 + m_1 + m_2 \leq 8, \quad n_1, n_2, m_1, m_2 \geq 0 \quad (7.323d)$$

となる. 対応するポテンシャルの値は,

$$V = \frac{g^2}{32}(m_1 + m_2 - n_1 - n_2)\lambda_1 \lambda_2. \quad (7.324)$$

$\xi = 0$ ないし $\theta = 0$ となる場合は, Electric SL_8 型ですでに調べたので, 以下では $\theta \neq 0, \xi \neq 0$ とする.

Minkowski 真空 $n_1 + n_2 = m_1 + m_2 = 4$ のとき, 解は

$$(n_1, n_2; m_1, m_2) = (2, 2; 2, 2), \quad (7.325)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = -\mu_1 \mu_2 \quad (7.326)$$

と

$$(n_1, n_2; m_1, m_2) = (4, 0; 2, 2), (3, 1; 2, 2), \quad (7.327)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \mu_1 \mu_2 = -\lambda^2 \quad (7.328)$$

およびこれらで θ と ξ を入れ替えたもの. 後者は前者と同値. また, $(n_1, n_2; m_1, m_2) = (4, 0; 2, 2)$ は $(n_1, n_2; m_1, m_2) = (2, 2; 2, 2)$ の特別の場合. これ以外の時は, $v = 0$ で $\lambda_2 = \mu_2 = 0$. このとき解は $n_1 = m_1 = 2$.

よって, θ, ξ の同時スケーリングの自由度を考慮すると, 解は次のいずれかと同値 ($s, t > 0$):

$$\bullet \theta = [s^{(2)}, (1/s)^{(2)}, 0^{(4)}], \quad \xi = [0^{(4)}, t^{(2)}, (-1/t)^{(2)}]$$

このとき, $s \neq 1$ の時の対称性は

$$G = \mathrm{SO}(4) \times \mathrm{SO}(2, 2) \ltimes \mathbb{R}^{16} \Rightarrow \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2). \quad (7.329)$$

$s = 1$ の時は,

$$G = \mathrm{SO}(4) \times \mathrm{SO}(2, 2) \ltimes \mathbb{R}^{16} \Rightarrow \mathrm{SO}(4) \times \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2). \quad (7.330)$$

- $\theta = [1^{(2)}, 0^{(6)}], \quad \xi = [0^{(6)}, s^{(2)}].$

このとき, 対称性は

$$G = \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2) \ltimes \mathbb{R}^{20} (\times \mathbb{R}^6) \Rightarrow \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2) (\times \mathbb{R}^6). \quad (7.331)$$

adS 真空 $V \neq 0$ とすると, θ と ξ の入れ替えの対称性を考慮して, $n_1 + n_2 \leq 3, m_1 + m_2 \geq 5$ としてよい. このとき, $\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 = 0$ が実数で満たされるのは

$$\begin{aligned} (n_1, n_2; m_1, m_2) &= (1, 1; 6, 0); & \lambda_2 &= -\lambda_1, \mu_2 = 2\mu_1, 2\mu_1^2 = \lambda_1^2, \\ (n_1, n_2; m_1, m_2) &= (1, 1; 5, 1); & \lambda_2 &= -\lambda_1, \mu_2 = 3\mu_1, 3\mu_1^2 = \lambda_1^2, \\ (n_1, n_2; m_1, m_2) &= (1, 0; 7, 0); & 2\lambda_2 &= -\lambda_1, 2\mu_2 = 5\mu_1, 5\mu_1^2 = \lambda_1^2, \\ (n_1, n_2; m_1, m_2) &= (1, 0; 6, 1); & 2\lambda_2 &= -\lambda_1, \mu_2 = 4\mu_1, 8\mu_1^2 = \lambda_1^2. \end{aligned}$$

これらはいずれも adS 真空.

よって,

- $\theta = [1^{(1)}, (-1)^{(1)}, 0^{(6)}], \quad \xi = [0^{(2)}, (1/\sqrt{2})^{(6)}].$

ポテンシャルの値と対称性は

$$G = \mathrm{SO}(1, 1) \times \mathrm{SO}(6) \ltimes \mathbb{R}^{12} \Rightarrow \mathrm{SO}(6), \quad (7.332a)$$

$$V = -\frac{g^2}{8}. \quad (7.332b)$$

- $\theta = [1^{(1)}, (-1)^{(1)}, 0^{(6)}], \quad \xi = [0^{(2)}, (1/\sqrt{3})^{(5)}, \sqrt{3}^{(1)}].$

対称性は

$$G = \mathrm{SO}(1, 1) \times \mathrm{SO}(6) \ltimes \mathbb{R}^{12} \Rightarrow \mathrm{SO}(5) \quad (7.333a)$$

ゲージ群	タイプ	対称性	V	θ, ξ
$SO(4) \times SO(2, 2) \times \mathbb{R}^{16}$	Mink	$SO(2)^4$	0	$\theta = [s_{(2)}, 1/s_{(2)}, 0_{(4)}]$ $\xi = [0_{(4)}, t_{(2)}, 1/t_{(2)}]$
	Mink	$SO(4) \times SO(2)^2$	0	$s = 1$
$SO(2)^2 \times \mathbb{R}^{20}$	Mink	$SO(2)^2$	0	$\theta = [1_{(2)}, 0_{(6)}]$ $\xi = [0_{(6)}, s_{(2)}]$
$SO(6) \times SO(1, 1) \times \mathbb{R}^{12}$	adS	$SO(6)$	$-\frac{g^2}{4 \cdot 2^{1/8}}$	$\theta = [2^{-1/8}_{(6)}, 0_{(2)}]$ $\xi = [0_{(6)}, 2^{3/8}, -2^{3/8}]$
	adS	$SO(5)$	$-\frac{g^2 \sqrt{3}}{8}$	$\theta = [3^{-1/4}_{(5)}, 3^{3/4}, 0_{(2)}]$ $\xi = [0_{(6)}, 3^{1/4}, -3^{1/4}]$
$SO(7) \times \mathbb{R}^7$	adS	$SO(7)$	$-\frac{5^{7/8}}{16} g^2$	$\theta = [5^{-1/16}_{(7)}, 0]$ $\xi = [0_{(7)}, 5^{7/16}]$
	adS	$SO(6)$	$-\frac{3 \cdot 2^{1/16}}{16} g^2$	$\theta = [2^{-7/16}_{(6)}, 2^{25/16}, 0]$ $\xi = [0_{(7)}, 2^{17/16}]$

表 19: Summary table:退化型

- $\theta = [1^{(1)}, 0^{(7)}], \quad \xi = [0^{(1)}, (1/\sqrt{5})^{(7)}].$

対称性とポテンシャルは

$$G = SO(7) \times \mathbb{R}^7 \Rightarrow SO(7), \quad (7.334a)$$

$$V = -\frac{2}{32} g^2. \quad (7.334b)$$

- $\theta = [1^{(1)}, 0^{(7)}], \quad \xi = [0^{(1)}, (\sqrt{2})^{(1)}, \frac{1}{2\sqrt{2}}^{(6)}].$

対称性は

$$G = SO(7) \times \mathbb{R}^{12} \Rightarrow SO(6), \quad (7.335a)$$

$$V = -\frac{3}{32} g^2. \quad (7.335b)$$

7.2.8.3 モジュライ質量

$$(M^2)_{\rho_X} = \frac{g^2}{8} \{ (M_{(1)}^2)_{\rho_X} + (M_{(2)}^2)_{\rho_X} \}; \quad (7.336)$$

$$\begin{aligned} M_{(1)}^2(S, S) &= -\text{Tr}(\theta)\text{Tr}(S^2\theta) - (\text{Tr}(\theta S))^2 \\ &\quad + 2\text{Tr}(S^2\theta^2) + 2\text{Tr}(S\theta S\theta) \\ &\quad - \text{Tr}(\xi)\text{Tr}(S^2\xi) - (\text{Tr}(\xi S))^2 \\ &\quad + 2\text{Tr}(S^2\xi^2) + 2\text{Tr}(S\xi S\xi), \end{aligned} \quad (7.337)$$

$$\begin{aligned} M_{(2)}^2(U, U) &= -U_{[ab];[cd]}^2(\theta_{ac}\theta_{bd} + \xi_{ac}\xi_{bd}) \\ &\quad + \frac{1}{24}(U \cdot U)\text{Tr}(\theta^2 + \xi^2). \end{aligned} \quad (7.338)$$

まず, $M_{(1)}^2$ を対角化する. θ と ξ が対角化により

$$\theta = \bigoplus_{I=1}^m \lambda_I \mathbf{1}_{p_I} \quad (m \leq 4) \quad (7.339a)$$

$$\xi = \bigoplus_{I=1}^m \mu_I \mathbf{1}_{p_I} \quad (m \leq 4) \quad (7.339b)$$

と表されるとする. この固有空間分解に対応して, S を

$$S = (A_{IJ}) : I = 1, \dots, m, A_{IJ} \in M(p_I, p_J) \quad (7.340)$$

と部分ブロックに分解する. このとき,

$$A_{II} = a_I \mathbf{1}_{p_I} + \hat{A}_I; \quad {}^T \hat{A}_I = A_I, \text{Tr}(\hat{A}_I) = 0, \quad (7.341a)$$

$${}^T A_{IJ} = A_{JI}; \quad I \neq J. \quad (7.341b)$$

ただし, a_I は

$$\sum_I p_I a_I = 0 \quad (7.342)$$

を満たし, $p_I = 1$ のとき $\hat{A}_I = 0$.

この分解のもとで,

$$(M^2)_{(1)}(S, S) = \sum_{I,J} \nu_{IJ} a_I a_J + \sum_I m_I^2 \text{Tr}(\hat{A}_I^2) + \sum_{I < J} m_{IJ}^2 \text{Tr}(A_{IJ} {}^T A_{IJ}). \quad (7.343)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \nu_{IJ} = & \{4(\lambda_I^2 + \mu_I^2)p_I - \text{Tr}(\theta)\lambda_I p_I - \text{Tr}(\xi)\mu_I p_I\} \delta_{IJ} \\ & - p_I p_J (\lambda_I \lambda_J + \mu_I \mu_J), \end{aligned} \quad (7.344a)$$

$$m_I^2 = 4\lambda_I^2 + 4\mu_I^2 - \lambda_I \text{Tr}(\theta) - \mu_I \text{Tr}(\xi), \quad (7.344b)$$

$$m_{IJ}^2 = (\lambda_I + \lambda_J)(2\lambda_I + 2\lambda_J - \text{Tr}(\theta)) + (\mu_I + \mu_J)(2\mu_I + 2\mu_J - \text{Tr}(\xi)). \quad (7.344c)$$

次に, $M_{(2)}^2$ の対角化を行う. まず, 自己双対 4 形式 U_{ijkl} の基底を (θ, ξ) の固有値 $(\lambda_1, \mu_1), \dots, (\lambda_m, \mu_m)$ ($m \leq 4$) の重複度で分類する:

$$n := [n_1, \dots, n_m] \leq [p_1, \dots, p_m]; \quad n_1 + \dots + n_m = 4. \quad (7.345)$$

同じ n に分類される基底の数は,

$$\begin{aligned} p_1 C_{n_1} \times \dots \times p_m C_{n_m} : & \quad n_1 > p_1/2 \text{ or } n_1 = p_1/2, n_2 > p_2/2 \text{ or } \dots \\ & \quad \text{or } n_1 = p_1/2, \dots, n_{m-1} = p_{m-1}/2, n_m > p_m/2, \end{aligned} \quad (7.346a)$$

$$\frac{1}{2} p_1 C_{p_1/2} \times \dots \times p_m C_{p_m/2} : \quad n_1 = p_1/2, \dots, n_m = p_m/2. \quad (7.346b)$$

対応する質量固有値は

$$\begin{aligned} m_n^2 = & \frac{1}{24} \left[2 \sum_{l=1}^m p_l (\lambda_l^2 + \mu_l^2) - \left(\sum_{l=1}^m n_l \lambda_l \right)^2 - \left(\sum_{l=1}^m (p_l - n_l) \lambda_l \right)^2 \right. \\ & \left. - \left(\sum_{l=1}^m n_l \xi_l \right)^2 - \left(\sum_{l=1}^m (p_l - n_l) \xi_l \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (7.347)$$

モジュライ場の運動項は

$$\frac{1}{12\kappa^2} P_{\mu ijkl} P^{\mu ijkl} \Rightarrow \frac{1}{2\kappa^2} \left\{ \sum_I (p_I a_I^2 + \text{Tr}(\hat{A}_I^2)) + \sum_{I>J} 2\text{Tr}(A_{IJ} {}^T A_{IJ}) + \frac{1}{6} U \cdot U \right\}. \quad (7.348)$$

7.2.8.4 dS 真空

dS 真空 : $\text{SO}(4, 4) \Rightarrow \text{SO}(4) \times \text{SO}(4)$ θ と ξ は

$$\theta = [s^{(4)}, -s^{(4)}], \quad \xi = 1/\theta, \quad \det \theta = s^8 \quad (s > 0). \quad (7.349)$$

ポテンシャルの値は

$$V = g^2 \frac{s^4 + 1}{4s^2}. \quad (7.350)$$

モジュライの質量は, V を単位として (i.e. $m^2/V \Rightarrow m^2$),

- パリティ偶成分

$$m_d^2 = -2 : (\mathbf{1}, \mathbf{1}), \quad (7.351a)$$

$$m_0^2 = 2 : (\mathbf{9}, \mathbf{1}), \quad 2 : (\mathbf{1}, \mathbf{9}), \quad (7.351b)$$

$$m_1^2 = 0 : (\mathbf{4}, \mathbf{4}), \quad (7.351c)$$

$$(7.351d)$$

- パリティ奇成分 m_n^2 :

$$-2 : (\mathbf{1}, \mathbf{1}) = [4, 0]^+,$$

$$1 : (\mathbf{4}, \mathbf{4}) = [3, 1]^+,$$

$$2 : (\mathbf{6}, \mathbf{6})^+ = [2, 2]^+. \quad (7.352)$$

dS 真空 : $\mathbf{SO}(5, 3) \Rightarrow \mathbf{SO}(5) \times \mathbf{SO}(3)$ θ と ξ は

$$\theta = \left[\sqrt{\frac{s(3+s^2)}{1+3s^2}}^{(5)}, -\sqrt{\frac{s(1+3s^2)}{3+s^2}}^{(3)} \right], \quad \xi = 1/\theta, \quad \det \theta = -\frac{s^4(3+s^2)}{1+3s^2} \quad (s > 0). \quad (7.353)$$

ポテンシャルの値は

$$V = g^2 \frac{3(s^2 + 1)^3}{4s(1 + 3s^2)(3 + s^2)}. \quad (7.354)$$

モジュライの質量は, V を単位として (i.e. $m^2/V \Rightarrow m^2$),

- パリティ偶成分

$$m_d^2 = -2 : (\mathbf{1}, \mathbf{1}), \quad (7.355a)$$

$$m_0^2 = \frac{4}{3} : (\mathbf{14}, \mathbf{1}), \quad 4 : (\mathbf{1}, \mathbf{5}), \quad (7.355b)$$

$$m_1^2 = 0 : (\mathbf{5}, \mathbf{3}), \quad (7.355c)$$

$$(7.355d)$$

- パリティ奇成分 m_n^2 :

$$-\frac{2}{3} : (\mathbf{5}, \mathbf{1}) = [4, 0]^+,$$

$$2 : (\mathbf{10}, \mathbf{3}) = [3, 1]^+. \quad (7.356)$$

7.2.8.5 Minkowski 真空

Minkowski 真空 : $\mathbf{SO}(6, 2) \Rightarrow \mathbf{SO}(6) \times \mathbf{SO}(2)$ θ と ξ は

$$\theta = [s^{(6)}, -\frac{1}{s^3}^{(2)}], \quad \xi = 1/\theta, \quad \det \theta = 1 (s \neq 0). \quad (7.357)$$

ポテンシャルの値は

$$V = 0. \quad (7.358)$$

モジュライの質量は,

$$4g^2 \left(s^2 + \frac{1}{s^2} \right)^3 \quad (7.359)$$

を単位として,

- パリティ偶成分

$$m_d^2 = 0 : (\mathbf{1}, \mathbf{1}), \quad (7.360a)$$

$$m_0^2 = 0 : (\mathbf{20}, \mathbf{1}), \quad 4 : (\mathbf{1}, \mathbf{2}), \quad (7.360b)$$

$$m_1^2 = 0 : (\mathbf{6}, \mathbf{2}), \quad (7.360c)$$

$$(7.360d)$$

- パリティ奇成分 m_n^2 :

$$0 : (\mathbf{15}, \mathbf{1}) = [4, 0]^+,$$

$$1 : (\mathbf{20}, \mathbf{2})^+ = [3, 1]^+. \quad (7.361)$$

Minkowski 真空 : $\mathbf{SO}(6, 2) \Rightarrow \mathbf{SO}(4) \times \mathbf{SO}(2) \times \mathbf{SO}(2)$ θ と ξ は

$$\theta = [s^{(4)}, r^{(2)}, -\frac{1}{rs^2}^{(2)}], \quad \xi = 1/\theta, \quad \det \theta = 1 (sr \neq 0). \quad (7.362)$$

ポテンシャルの値は

$$V = 0. \quad (7.363)$$

モジュライの質量は,

$$g^2 \frac{1 + r^2 s^2}{16r^2 s^2} \quad (7.364)$$

を単位として,

- パリティ偶成分

$$m_d^2 = 0 : (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})^{(2)}, \quad (7.365a)$$

$$m_0^2 = 0 : (\mathbf{9}, \mathbf{1}, \mathbf{1}),$$

$$4(r-s)^2 : (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}),$$

$$\frac{4(1+rs^3)^2}{s^2} : (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}), \quad (7.365b)$$

$$m_1^2 = 0 : (\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1}) + (\mathbf{4}, \mathbf{1}, \mathbf{2}) + (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}), \quad (7.365c)$$

- パリティ奇成分 m_n^2 :

$$0 : (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) = [4, 0, 0]^+,$$

$$0 : (\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) = [2, 2, 0]^+,$$

$$(r-s)^2 : (\mathbf{4}, \mathbf{1}, \mathbf{2}) = [3, 0, 1]^+,$$

$$\frac{(1+rs^3)^2}{s^2} : (\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1}) = [3, 1, 0]^+,$$

$$\frac{(1+s^4)(1+r^2s^2)}{s^2} : (\mathbf{6}, \mathbf{2}, \mathbf{2})^+ = [2, 1, 1]^+. \quad (7.366)$$

Minkowski 真空 : $\mathbf{SO}(6, 2) \Rightarrow \mathbf{SO}(2) \times \mathbf{SO}(2) \times \mathbf{SO}(2) \times \mathbf{SO}(2)$ θ
と ξ は

$$\theta = [s^{(2)}, r^{(2)}, t^{(2)}, -\frac{1}{rst}^{(2)}], \quad \xi = 1/\theta, \quad \det \theta = 1 (srt \neq 0). \quad (7.367)$$

ポテンシャルの値は

$$V = 0. \quad (7.368)$$

モジュライの質量は,

$$\frac{g^2}{16s^2r^2t^2} \quad (7.369)$$

を単位として,

- パリティ偶成分

$$m_d^2 = 0 : (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})^{(3)}, \quad (7.370a)$$

$$\begin{aligned} m_0^2 &= 4rt(s-t)(s-r)(s^2rt+1) : (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}), \\ &\quad -4st(r-t)(s-r)(sr^2t+1) : (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1}), \\ &\quad 4sr(s-t)(r-t)(srt^2+1) : (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}), \\ &\quad 4(s^2rt+1)(sr^2t+1)(srt^2+1) : (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}), \end{aligned} \quad (7.370b)$$

$$m_1^2 = 0^{(24)} : (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + \dots, \quad (7.370c)$$

- パリティ奇成分 m_n^2 :

$$\begin{aligned} 0 &: (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})^{(3)} = [2, 2, 0, 0]^+, [2, 0, 2, 0]^+, [2, 0, 0, 2]^+, \\ t^2(r-s)^2(1+r^2s^2) &: (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) = [1, 1, 2, 0]^+, \\ r^2(s-t)^2(1+s^2t^2) &: (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}) = [1, 2, 1, 0]^+, \\ s^2(r-t)^2(1+r^2t^2) &: (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1}) = [2, 1, 1, 0]^+, \\ (1+r^2t^2)(1+s^2rt)^2 &: (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}) = [1, 2, 0, 1]^+, \\ (1+s^2r^2)(1+srt^2)^2 &: (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) = [2, 0, 1, 1]^+, \\ (1+s^2t^2)(1+sr^2t)^2 &: (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{2}) = [2, 1, 0, 1]^+, \\ (1+s^2t^2)(+r^2s^2)(1+t^2r^2) &: (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2})^+ = [1, 1, 1, 1]^+. \end{aligned} \quad (7.371)$$

Minkowski真空: $\mathbf{SO}(4) \times \mathbf{SO}(2, 2) \times \mathbb{R}^{16} \Rightarrow \mathbf{SO}(2) \times \mathbf{SO}(2) \times \mathbf{SO}(2) \times \mathbf{SO}(2)$
 θ と ξ は

$$\theta = [s^{(2)}, (1/s)^{(2)}, 0^{(4)}], \quad \xi = [0^{(4)}, t^{(2)}, (-1/t)^{(2)}] \quad (7.372)$$

($t, s > 0$) モジュライの質量は,

$$\frac{g^2}{16s^2t^2} \quad (7.373)$$

を単位として,

- パリティ偶成分

$$m_d^2 = 0^{(3)} : (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})^{(3)}, \quad (7.374a)$$

$$m_0^2 = 4s^2t^2(s^2 - 1)^{(2)} : (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}), \quad (7.374b)$$

$$4t^2(1 - s^2)^{(2)} : (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1}), \quad (7.374c)$$

$$4s^2t^2(t^2 + 1)^{(2)} : (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}), \quad (7.374d)$$

$$4s^2(t^2 + 1)^{(2)} : (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}), \quad (7.374e)$$

$$m_1^2 = 0^{(24)} : (\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1}) + (\mathbf{4}, \mathbf{1}, \mathbf{2}) + (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \quad (7.374f)$$

- パリティ奇成分 m_n^2 :

$$0^{(3)} : (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})^{(3)} = [2, 0, 0, 2]^+, [2, 0, 2, 0]^+, [2, 2, 0, 0]^+, \quad (7.375a)$$

$$t^2(s^2 - 1)^{2(4)} : (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) = [1, 1, 2, 0]^+, \quad (7.375b)$$

$$s^2(1 + s^2t^2)^{(4)} : (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}) = [1, 2, 0, 1]^+, \quad (7.375c)$$

$$s^2t^2(s^2 + t^2)^{(4)} : (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}) = [1, 2, 1, 0]^+, \quad (7.375d)$$

$$s^2(t^2 + 1)^{2(4)} : (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) = [2, 0, 1, 1]^+, \quad (7.375e)$$

$$(s^2 + t^2)^{(4)} : (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{2}) = [2, 1, 0, 1]^+, \quad (7.375f)$$

$$t^2(s^2t^2 + 1)^{(4)} : (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1})^+ = [2, 1, 1, 0]^+, \quad (7.375g)$$

$$(s^2 + t^2)(1 + s^2t^2)^{(8)} : (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2})^+ = [1, 1, 1, 1]^+. \quad (7.375h)$$

Minkowski 真空: $\mathbf{SO}(2) \times \mathbf{SO}(2) \times \mathbb{R}^{20} \Rightarrow \mathbf{SO}(2) \times \mathbf{SO}(2)$ θ と ξ は

$$\theta = [1^{(2)}, 0^{(6)}], \quad \xi = [0^{(6)}, s^{(2)}] \quad (7.376)$$

モジュライの質量は,

- パリティ偶成分

$$m_d^2 = [0]^{(2)} : (\mathbf{1}, \mathbf{1})^{(2)}, \quad (7.377a)$$

$$m_0^2 = \left[\frac{1}{4}\right]^{(2)} : (\mathbf{2}, \mathbf{1}), \quad (7.377b)$$

$$\left[\frac{s^2}{4}\right]^{(2)} : (\mathbf{1}, \mathbf{2}), \quad (7.377c)$$

$$[0]^{(9)} : (\mathbf{1}, \mathbf{1}), \quad (7.377d)$$

$$m_1^2 = [0]^{(20)} : (\mathbf{2}, \mathbf{1})^{(4)} + (\mathbf{1}, \mathbf{2})^{(4)} + (\mathbf{2}, \mathbf{2}) \quad (7.377e)$$

- パリティ奇成分 m_n^2 :

$$[0]^{(6)} : (\mathbf{1}, \mathbf{1})^{(6)} = [2, 0, 2]^+, \quad (7.378a)$$

$$\left[\frac{1}{16}\right]^{(8)} : (\mathbf{2}, \mathbf{1})^{(4)} = [1, 2, 1]^+, \quad (7.378b)$$

$$\left[\frac{s^2}{16}\right]^{(8)} : (\mathbf{1}, \mathbf{2})^{(4)} = [2, 1, 1]^+, \quad (7.378c)$$

$$[0]^{(1)} : (\mathbf{1}, \mathbf{1}) = [2, 2, 0]^+, \quad (7.378d)$$

$$\left[\frac{s^2+1}{16}\right]^{(12)} : (\mathbf{2}, \mathbf{2})^{+(6)} = [1, 1, 2]^+. \quad (7.378e)$$

7.2.8.6 adS 真空

adS 真空 : $\mathbf{SO}(8) \Rightarrow \mathbf{SO}(8)$ θ と ξ は

$$\theta = [s^{(8)}], \quad \xi = 1/\theta, \quad \det \theta = s^8 (s > 0). \quad (7.379)$$

ポテンシャルの値は

$$V = -\frac{3g^2}{4} \left(s^2 + \frac{1}{s^2} \right). \quad (7.380)$$

モジュライの質量は, V を単位として,

- パリティ偶成分

$$m_0^2 = -2/3 : \mathbf{35}. \quad (7.381)$$

- パリティ奇成分 m_n^2 :

$$-2/3 : \mathbf{35} = [4]^+ \quad (7.382)$$

adS 真空 : $\mathbf{SO}(8), \mathbf{SO}(7, 1) \Rightarrow \mathbf{SO}(7)$ θ と ξ は

$$\theta = \left[\sqrt{\frac{s(s^2-5)^{(7)}}{5s^2-1}}, \frac{5s^2-1}{s^2-5} \sqrt{\frac{s(s^2-5)^{(1)}}{5s^2-1}} \right], \quad \xi = 1/\theta, \quad \det \theta = \frac{s^4(s^2-5)^3}{(5s^2-1)^3}. \quad (7.383)$$

$\det \theta > 0$ のときは, ゲージ群は $\mathbf{SO}(8)$,

$$\mathbf{SO}(8) : 0 < s < 1/\sqrt{5}, \quad \sqrt{5} < s, \quad (7.384)$$

$\det \theta < 0$ のときは, ゲージ群は $\mathbf{SO}(7, 1)$ となる :

$$\mathbf{SO}(7, 1) : -\sqrt{5} < s < -1/\sqrt{5}. \quad (7.385)$$

ポテンシャルの値は

$$V = -g^2 \frac{5(s^2 + 1)^3}{4s(5s^2 - 1)(s^2 - 5)}. \quad (7.386)$$

モジュライの質量は, V を単位として,

- パリティ偶成分

$$m_d^2 = 2 : \mathbf{1}, \quad (7.387a)$$

$$m_0^2 = -4/5 : \mathbf{27}, \quad (7.387b)$$

$$m_1^2 = 0 : \mathbf{7}. \quad (7.387c)$$

- パリティ奇成分 m_n^2 :

$$-2/5 : \mathbf{35} = [4, 0]^+ \quad (7.388)$$

adS 真空 : $\mathbf{SO}(8), \mathbf{SO}(7, 1) \Rightarrow \mathbf{SO}(6)$ θ と ξ は

$$\theta = [\lambda_1, \frac{s}{\lambda_1}, \frac{2s - \sqrt{2}}{s(s + \sqrt{2})} \lambda_1], \quad \xi = 1/\theta, \quad (7.389a)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{s(s + \sqrt{2})(-s + 2\sqrt{2})}{(2\sqrt{2}s + 1)(-\sqrt{2}s + 1)}}, \quad (7.389b)$$

$$\det \theta = -\frac{s^3(s + \sqrt{2})^2(-s + 2\sqrt{2})^3}{(-\sqrt{2}s + 1)^2(2\sqrt{2}s + 1)^3}. \quad (7.389c)$$

s の値に応じて, ゲージ群は

$$\mathbf{SO}(8) : 2\sqrt{2} < s, \quad (7.390a)$$

$$\mathbf{SO}(7, 1) : 0 < s < \sqrt{2}/2 \ (\lambda_3 < 0), \quad -\sqrt{2} < s < -\sqrt{2}/4 \ (\lambda_2 < 0). \quad (7.390b)$$

ポテンシャルの値は

$$V = -g^2 \frac{3(1 + s^2)^3}{2s(s + \sqrt{2})(-s + 2\sqrt{2})(-2s + \sqrt{2})(4s + \sqrt{2})} \quad (7.391)$$

モジュライの質量は, V を単位として,

- パリティ偶成分

$$\bar{m}_d^2 = 2 : \mathbf{1}^{(2)} \quad (7.392a)$$

$$m_0^2 = -1 : \mathbf{20}, \quad (7.392b)$$

$$m_1^2 = 0 : \mathbf{6}^{(2)} + \mathbf{1}. \quad (7.392c)$$

- パリティ奇成分 m_n^2 :

$$-1/4 : \mathbf{20} = [3, 1, 0]^+, \quad (7.393a)$$

$$0 : \mathbf{15} = [4, 0, 0]^+. \quad (7.393b)$$

adS 真空 : $\text{SO}(7, 1) \Rightarrow \text{SO}(5)$ θ と ξ は

$$\theta = \left[\lambda_1, \frac{s}{\lambda_1}, \frac{(s - \sqrt{3})}{(\sqrt{3}s + 1)\lambda_1}, \frac{-(s + \sqrt{3})}{(\sqrt{3}s - 1)\lambda_1} \right], \quad \xi = 1/\theta, \quad (7.394a)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{s(s^2 - 3)}{3s^2 - 1}}, \quad (7.394b)$$

$$\det \theta = -\frac{s^2(s^2 - 3)^2}{(3s^2 - 1)^2}. \quad (7.394c)$$

負の固有値は常に 1 個で, ゲージ群は $\text{SO}(7, 1)$ であるが, どの固有値が負となるかは s に依存する:

$$\lambda_3 < 0 : 0 < s < 1/\sqrt{3}, \quad (7.395a)$$

$$\lambda_4 < 0 : \sqrt{3} < s, \quad (7.395b)$$

$$\lambda_2 < 0 : -\sqrt{3} < s < -1/\sqrt{3}. \quad (7.395c)$$

正の固有値の値が一致することはない.

ポテンシャルの値は

$$V = -g^2 \frac{3(1 + s^2)^3}{8s(s^2 - 3)(3s^2 - 1)}. \quad (7.396)$$

モジュライの質量は, V を単位として,

- パリティ偶成分

$$m_d^2 = 2 : \mathbf{1}^{(3)} \quad (7.397a)$$

$$m_0^2 = -4/3 : \mathbf{14}, \quad (7.397b)$$

$$m_1^2 = 0 : \mathbf{5}^{(3)} + \mathbf{1}^{(3)}. \quad (7.397c)$$

- パリティ奇成分 m_n^2 :

$$0 : \mathbf{10}^{(3)} = [3, 1, 0, 0]^+ + [3, 0, 1, 0]^+ + [3, 0, 0, 1]^+ \quad (7.398a)$$

$$2/3 : \mathbf{5} = [4, 0, 0, 0]^+. \quad (7.398b)$$

adS 真空 : $\mathbf{SO}(1, 1) \times \mathbf{SO}(6) \times \mathbb{R}^{12} \Rightarrow \mathbf{SO}(6)$ θ と ξ は

$$\theta = [1^{(1)}, -1^{(1)}, 0^{(6)}], \quad \xi = [0^{(2)}, (1/\sqrt{2})^{(6)}]. \quad (7.399a)$$

ポテンシャルの値は

$$V = -\frac{g^2}{8} \quad (7.400)$$

モジュライの質量は, V を単位として,

- パリティ偶成分

$$m_d^2 = 2^{(2)} : \mathbf{1}^{(2)} \quad (7.401a)$$

$$m_0^2 = -1^{(20)} : \mathbf{20}, \quad (7.401b)$$

$$m_1^2 = 0^{(13)} : \mathbf{1} + \mathbf{6}^{(2)}. \quad (7.401c)$$

- パリティ奇成分 m_n^2 :

$$0^{(15)} : \mathbf{15} = [1, 1, 2]^+, \quad (7.402a)$$

$$(-1/4)^{(20)} : \mathbf{20} = [1, 0, 3]^+. \quad (7.402b)$$

adS 真空 : $\mathbf{SO}(1, 1) \times \mathbf{SO}(6) \times \mathbb{R}^{12} \Rightarrow \mathbf{SO}(5)$ θ と ξ は

$$\theta = [1^{(1)}, -1^{(1)}, 0^{(6)}], \quad \xi = [0^{(2)}, (1/\sqrt{3})^{(5)}, \sqrt{3}^{(1)}]. \quad (7.403a)$$

ポテンシャルの値は

$$V = -\frac{g^2}{8} \quad (7.404)$$

モジュライの質量は, V を単位として,

- パリティ偶成分

$$m_d^2 = 2^{(3)} : \mathbf{1}^{(3)} \quad (7.405a)$$

$$m_0^2 = (-4/3)^{(14)} : \mathbf{14}, \quad (7.405b)$$

$$m_1^2 = 0^{(18)} : \mathbf{1}^{(3)} + \mathbf{5}^{(3)}. \quad (7.405c)$$

- パリティ奇成分 m_n^2 :

$$0^{(10)} : \mathbf{10} = [1, 0, 2, 1]^+, \quad (7.406a)$$

$$0^{(10)} : \mathbf{10} = [1, 0, 3, 0]^+, \quad (7.406b)$$

$$0^{(10)} : \mathbf{10} = [1, 1, 2, 0]^+, \quad (7.406c)$$

$$(2/3)^{(5)} : \mathbf{5} = [1, 1, 1, 1]^+. \quad (7.406d)$$

adS 真空 : $\mathbf{SO}(7) \times \mathbb{R}^7 \Rightarrow \mathbf{SO}(7)$ θ と ξ は

$$\theta = [1^{(1)}, 0^{(7)}], \quad \xi = [0^{(1)}, (1/\sqrt{5})^{(7)}]. \quad (7.407a)$$

ポテンシャルの値は

$$V = -\frac{3g^2}{32} \quad (7.408)$$

モジュライの質量は, V を単位として,

- パリティ偶成分

$$m_d^2 = 2^{(1)} : \mathbf{1}^{(1)} \quad (7.409a)$$

$$m_0^2 = (-4/5)^{(27)} : \mathbf{27}, \quad (7.409b)$$

$$m_1^2 = 0^{(7)} : \mathbf{7}. \quad (7.409c)$$

- パリティ奇成分 m_n^2 :

$$(-2/5)^{(35)} : \mathbf{35} = [1, 3]^+. \quad (7.410a)$$

adS 真空 : $\mathbf{SO}(7) \times \mathbb{R}^7 \Rightarrow \mathbf{SO}(6)$ θ と ξ は

$$\theta = [1^{(1)}, 0^{(7)}], \quad \xi = [0^{(1)}, \sqrt{2}^{(1)}, (1/2\sqrt{2})^{(6)}]. \quad (7.411a)$$

ポテンシャルの値は

$$V = -\frac{3g^2}{32} \quad (7.412)$$

モジュライの質量は, V を単位として,

- パリティ偶成分

$$m_d^2 = 2^{(2)} : \mathbf{1}^{(2)} \quad (7.413a)$$

$$m_0^2 = (-1)^{(20)} : \mathbf{20}, \quad (7.413b)$$

$$m_1^2 = 0^{(13)} : \mathbf{1} + \mathbf{6}^{(2)}. \quad (7.413c)$$

● パリティ奇成分 m_n^2 :

$$(-1/4)^{(20)} : \mathbf{20} = [1, 0, 3]^+, \quad (7.414a)$$

$$0^{(15)} : \mathbf{15} = [1, 1, 2]^+. \quad (7.414b)$$

7.2.8.7 モジュライ質量：まとめ

adS 真空

対称性	ゲージ群	P	モジュライの質量	パラメータ
SO(8)	SO(8)	+	$-2/3(35_s)$	(1, 0)
		-	$-2/3(35_{4a})$	
SO(7)	SO(8), SO(7, 1)	+	$2(1), -4/5(27_s)[, 0(7_v)]$	(1, 0)
	SO(7) \times \mathbb{R}^7	-	$-2/5(35_{3a})$	
SO(6)	SO(8), SO(7, 1)	+	$2(1^{(2)}), -1(20_s)[, 0(6_v^{(2)} + 1)]$	(1, 0)
	SO(7) \times \mathbb{R}^7	-	$-1/4(20_{3a+}), 0(15_{2a})$	(0, 0)
	SO(6) \times SO(1, 1) \times \mathbb{R}^{12}	-		(0, 0)
SO(5)	SO(7, 1)	+	$2(1^{(3)}), -4/3(14_s)[, 0(5_v^{(3)} + 1)]$	(1, 0)
	SO(6) \times SO(1, 1) \times \mathbb{R}^{12}	-	$2/3(5_v), 0(10_{2a}^{(3)})$	(0, 0)

Minkowski 真空

対称性	ゲージ群	P	モジュライの質量	パラメータ
SO(6) \times SO(2)	CSO(2, 0, 6)	+	$0((1, 1) + (20_s, 1)), 4(1, 2_v)[, 0(6, 2)]$	(0, 0)
	SO(6, 2)	-	$0(15_{2a}, 1), 1(20_{3a}, 2_v)^+$	(0, 1)
SO(4) \times SO(2) ²	SO(6, 2)	+	$0(1^{(2)} + (9, 1)), m_{(1,2,1)}^2, m_{(1,1,2)}^2[, 0(20)]$	(0, 2)
		-	$0(1 + (6, 1, 1)), m_{(4,1,2)}^2, m_{(4,2,1)}^2, m_{(6,2,2)}^2+$	
SO(2) ⁴	SO(6, 2)	+	$0(1^{(3)}), m_{(2,1,1,1)}^2, m_{(1,2,1,1)}^2,$ $m_{(1,1,2,1)}^2, m_{(1,1,1,2)}^2[, 0(24)]$	(0, 3) どれか一つ
	SO(4) \times SO(2, 2) \times \mathbb{R}^{16}	-	$0(1^{(3)}), m_{(2,2,1,1)}^2, m_{(2,1,2,1)}^2, m_{(1,2,2,1)}^2,$ $m_{(2,1,1,2)}^2, m_{(1,1,2,2)}^2, m_{(1,2,1,2)}^2, m_{(2,2,2,2)}^2+$	(0, 2)
SO(2) ²	SO(2) ² \times \mathbb{R}^{20}	+	$0(1^{(11)}), 1/4(2, 1), s^2/4(1, 2)[, 0(20)]$	(0, 1)
		-	$0(1^{(7)}), \frac{1}{16}((2, 1)^{(4)}), \frac{s^2}{16}((1, 2)^{(4)}),$ $\frac{s^2+1}{16}((2, 2)^{+(6)})$	

dS 真空

対称性	ゲージ群	P	モジュライの質量	パラメータ
SO(4) × SO(4)	SO(4, 4)	+	$-2(1), 2((9_s, 1) + (1, 9_s))[, 0(4_v, 4_v)]$	(1, 0)
		-	$-2(1), 2(6_{2a}, 6_{2a})^+, 1(4_v, 4_v)$	
SO(5) × SO(3)	SO(5, 3)	+	$-2(1), 4/3(14_s, 1), 4(5_v, 1)[, 0(5, 3)]$	(1, 0)
		-	$-2/3(5_v, 1), 2(10_{2a}, 3_v)$	

7.2.9 Dyonic gauging: Off-center behavior

7.2.9.1 Potential

Embedding tensor が SL_8 -dyonic のとき, 一般点 \mathcal{V} でのポテンシャルの値は

$$\begin{aligned}
V = \frac{g^2}{672} & \left[(\mathcal{M}^{-1})^{[ab][cd]} (\theta_{bp}\theta_{dq}W_{ac}^{pq} - 21\theta_{ac}\theta_{bd}) \right. \\
& + (\mathcal{M}^{-1})_{[ab][cd]} (\xi^{bp}\xi^{dq}W_{pq}^{ac} - 21\xi^{ac}\xi^{bd}) \\
& - (\mathcal{M}^{-1})^{[ab]}_{[cd]} (\theta_{bp}\xi^{dq}W_{aq}^{pc} + 21(\theta\xi)_a{}^c\delta_b^d) \\
& \left. - (\mathcal{M}^{-1})_{[cd]}^{[ab]} (\theta_{bp}\xi^{dq}W_{qa}^{cp} + 21(\theta\xi)_a{}^c\delta_b^d) \right] \quad (7.415)
\end{aligned}$$

ここで,

$$W_{ac}^{pq} = Y_{ac}^{pq} - Z_{ac}^{pq}, \quad (7.416a)$$

$$Y_{ac}^{pq} = (\mathcal{M}^{-1})^{[pj][qh]}\mathcal{M}_{[af][ch]} + (\mathcal{M} \leftrightarrow \mathcal{M}^{-1}), \quad (7.416b)$$

$$Z_{ac}^{pq} = (\mathcal{M}^{-1})^{[pj]}_{[ch]}\mathcal{M}_{[af]}^{[qh]} + (\mathcal{M} \leftrightarrow \mathcal{M}^{-1}), \quad (7.416c)$$

$$\mathcal{M}_{MN} = (\mathcal{V}\mathcal{V}^\dagger)_{MN}. \quad (7.416d)$$

後述の \mathcal{M} の性質を用いると,

$$W_{ac}^{bd} = 2\mathcal{M}^{[bf][dh]}\mathcal{M}_{[af][ch]} + 2\mathcal{M}^{[bf]}_{[ch]}\mathcal{M}_{[af]}^{[dh]}. \quad (7.417)$$

特に, 原点では

$$\mathcal{M}_{[ab][cd]} = \mathcal{M}^{[ab][cd]} = \delta_c^{[a}\delta_d^{b]}, \quad \mathcal{M}_{[ab]}^{[cd]} = \mathcal{M}^{[ab]}_{[cd]} = 0 \quad (7.418)$$

に対して,

$$Y_{ac}^{pq} = 3\delta_q^p\delta_a^c + \frac{1}{2}\delta_a^p\delta_q^c, \quad Z_{ac}^{pq} = 0 \quad (7.419)$$

より,

$$V = \frac{g^2}{64} [2\text{Tr}(\theta^2 + \xi^2) - \text{Tr}(\theta)^2 - \text{Tr}(\xi)^2]. \quad (7.420)$$

7.2.9.2 Mapping convention

$V \cong \mathbb{R}^n$ に対して,

$$x, y \in V \mapsto x \wedge y = x \otimes y - y \otimes x \in V \wedge V, \quad (7.421a)$$

$$f, g \in \text{End}(V) \mapsto f \wedge g \in \text{End}(V \wedge V) : (f \wedge g)(x \wedge y) = \frac{1}{2}(f(x) \wedge g(y) - f(y) \wedge g(x)) \quad (7.421b)$$

と定義する. このとき, $e_a (a = 1, \dots, n)$ を V の基底とすると,

$$\begin{aligned} f(e_a) &= e_b A^b{}_a, & g(e_a) &= e_b B^b{}_a, & X &= \frac{1}{2} X^{ab} e_a \wedge e_b \\ \Rightarrow f \wedge g &: X^{ab} \mapsto A^{[a}{}_{[c} B^{b]}{}_d] X^{cd}. \end{aligned} \quad (7.422)$$

また, $a, b, c, d \in V$ に対して,

$$(a \circ b) \wedge (c \circ d) = \frac{1}{4}(a \wedge c) \circ (b \wedge d), \quad (7.423)$$

$p, q, r, s \in \text{End}(V)$ に対して,

$$(p \wedge q) \circ (r \wedge s) = \frac{1}{2}((p \circ r) \wedge (q \circ s) + (p \circ s) \wedge (q \circ r)). \quad (7.424)$$

7.2.9.3 モジュライ行列

O を勝手な基準点として, モジュライ空間の一般点を

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(O)\mathcal{S} : \mathcal{S} \in \rho_{\text{Usp}}(E_{7(7)}) \subset \text{Usp}(56) \quad (7.425)$$

と表すとき,

$$\mathcal{S} = \exp \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ \bar{\phi} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{\phi\bar{\phi}}) & \phi \text{jh}(\sqrt{\phi\bar{\phi}}) \\ \bar{\phi} \text{jh}(\sqrt{\phi\bar{\phi}}) & \cosh(\sqrt{\phi\bar{\phi}}) \end{pmatrix} = \mathcal{S}^\dagger \quad (7.426)$$

より,

$$\mathcal{S}_{kl}{}^{ij} = (\cosh(\sqrt{\phi\bar{\phi}}))_{kl}{}^{ij}, \quad (7.427a)$$

$$\mathcal{S}{}^{kl}{}_{ij} = \phi^{klm} (\text{jh}(\sqrt{\phi\bar{\phi}}))_{hm}{}^{ij}. \quad (7.427b)$$

ここで,

$$\text{jh}(z) = \frac{\sinh(z)}{z}. \quad (7.428)$$

Usp 表現として,

$$\mathcal{T}_0^{-1} \mathcal{S} \mathcal{T}_0 \in \rho_{\text{Sp}}(E_{(7(7))}) \subset \text{Sp}(56, \mathbb{R}), \quad (7.429)$$

$$\mathcal{T}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (7.430)$$

となるものをとると,

$$\phi = S \wedge 1 + iU : \quad S \in \mathfrak{sl}(8, \mathbb{R})_{\text{sym}}, \quad \star U = U \quad (7.431)$$

モジュライ行列 \mathcal{M} は

$$\mathcal{M} = \mathcal{T}_0^{-1} \mathcal{S}^2 \mathcal{T}_0 = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{**} & \mathcal{M}_{*}^* \\ \mathcal{M}_{*}^* & \mathcal{M}_{**} \end{pmatrix} \quad (7.432)$$

より,

$$\mathcal{M}_{[ab][cd]} = \frac{1}{2} \{ (\mathcal{S}^2)_{[ab][cd]} + (\mathcal{S}^2)^{[ab][cd]} + (\mathcal{S}^2)_{[ab]}^{[cd]} + (\mathcal{S}^2)^{[ab]}_{[cd]} \} \quad (7.433a)$$

$$\mathcal{M}^{[ab][cd]} = \frac{1}{2} \{ (\mathcal{S}^2)_{[ab][cd]} + (\mathcal{S}^2)^{[ab][cd]} - (\mathcal{S}^2)_{[ab]}^{[cd]} - (\mathcal{S}^2)^{[ab]}_{[cd]} \} \quad (7.433b)$$

$$\mathcal{M}^{[ab]}_{[cd]} = \frac{i}{2} \{ -(\mathcal{S}^2)_{[ab][cd]} + (\mathcal{S}^2)^{[ab][cd]} - (\mathcal{S}^2)_{[ab]}^{[cd]} + (\mathcal{S}^2)^{[ab]}_{[cd]} \} \quad (7.433c)$$

$$\mathcal{M}_{[ab]}^{[cd]} = \frac{i}{2} \{ (\mathcal{S}^2)_{[ab][cd]} - (\mathcal{S}^2)^{[ab][cd]} - (\mathcal{S}^2)_{[ab]}^{[cd]} + (\mathcal{S}^2)^{[ab]}_{[cd]} \} \quad (7.433d)$$

また,

$$\mathcal{M}^{-1} = \begin{pmatrix} (\mathcal{M}^{-1})_{**} & (\mathcal{M}^{-1})_{*}^* \\ (\mathcal{M}^{-1})_{*}^* & (\mathcal{M}^{-1})_{**} \end{pmatrix} \quad (7.434)$$

は

$$(\mathcal{M}^{-1})^{[ab][cd]} = \mathcal{M}^{[ab][cd]}, \quad (7.435a)$$

$$(\mathcal{M}^{-1})_{[ab][cd]} = \mathcal{M}_{[ab][cd]}, \quad (7.435b)$$

$$(\mathcal{M}^{-1})^{[ab]}_{[cd]} = -\mathcal{M}^{[ab]}_{[cd]}, \quad (7.435c)$$

$$(\mathcal{M}^{-1})_{[ab]}^{[cd]} = -\mathcal{M}_{[ab]}^{[cd]}. \quad (7.435d)$$

一般に、 Λ を対角型固有値行列, U をユニタリ行列として

$$\mathcal{S} = \exp \begin{pmatrix} 0 & \Phi \\ \bar{\Phi} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{11} & \mathcal{S}_{12} \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{S}_{22} \end{pmatrix}, \quad (7.436)$$

$$\Phi = U \Lambda \mathcal{T} U; \quad U \in \text{U}(n), \quad \Lambda : \text{diagonal}, \quad (7.437)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{11} &= U \cosh \Lambda U^\dagger, & \mathcal{S}_{12} &= U \sinh \Lambda \mathcal{T} U, \\ \mathcal{S}_{21} &= \bar{U} \sinh \Lambda \mathcal{T} \bar{U}, & \mathcal{S}_{22} &= \bar{U} \cosh \Lambda \mathcal{T} \bar{U} \end{aligned} \quad (7.438)$$

これより、

$$\mathcal{M}_{DD} = \frac{1}{4} \{ (U + \bar{U})e^{2\Lambda} \mathcal{T}(U + \bar{U}) - (U - \bar{U})e^{-2\Lambda} \mathcal{T}(U - \bar{U}) \} \quad (7.439a)$$

$$\mathcal{M}_{UU} = \frac{1}{4} \{ (U + \bar{U})e^{-2\Lambda} \mathcal{T}(U + \bar{U}) - (U - \bar{U})e^{2\Lambda} \mathcal{T}(U - \bar{U}) \} \quad (7.439b)$$

$$\mathcal{M}_{DU} = \frac{i}{4} \{ (U - \bar{U})e^{-2\Lambda} \mathcal{T}(U + \bar{U}) - (U + \bar{U})e^{2\Lambda} \mathcal{T}(U - \bar{U}) \} \quad (7.439c)$$

$$\mathcal{M}_{UD} = \frac{i}{4} \{ (U + \bar{U})e^{-2\Lambda} \mathcal{T}(U - \bar{U}) - (U - \bar{U})e^{2\Lambda} \mathcal{T}(U + \bar{U}) \} \quad (7.439d)$$

(注) 一般点で $\Phi = U\Lambda \mathcal{T}U$ とかけることは、次のようにして示される。まず、行列の極分解 $\Phi = VH$ ($V \in U(28), H \in H(29)$) より

$$\Phi = U_1\Lambda \mathcal{T}U_2, \quad U_1, U_2 \in U(28) \quad (7.440)$$

と対角化できる (Λ は実対角行列)。このとき、

$$\Phi^\dagger\Phi = \bar{\Phi}\Phi = \bar{U}_2\Lambda^2 \mathcal{T}U_2, \quad (7.441a)$$

$$\Phi\Phi^\dagger = \Phi\bar{\Phi} = U_1\Lambda^2 U_1^\dagger. \quad (7.441b)$$

2式は複素共役なので、

$$U_2\Lambda^2 U_2^\dagger = U_1\Lambda^2 U_1^\dagger \Leftrightarrow (U_1^{-1}U_2)\Lambda^2 = \Lambda^2(U_1^{-1}U_2) \quad (7.442)$$

これより、 Λ^2 の対角成分がすべて異なるなら、 $U_1^{-1}U_2$ は対角行列。この行列はユニタリなので $\exp(i\Theta) = [e^{i\theta_1}, \dots]$ の形。よって、

$$U_1 = Ue^{-i\Theta/2}U, \quad U_2 = Ue^{i\Theta/2}; \quad U \in U(28) \quad (7.443)$$

と置くことができ、

$$\Phi = U\Lambda \mathcal{T}U. \quad (7.444)$$

7.2.9.4 Moduli への $E_{7(7)}$ 作用

$E_{7(7)}$ の Lie 代数を

$$\mathcal{L}(E_{7(7)}) = \mathcal{K} + \mathcal{N} : \quad \mathcal{K} \cong \mathfrak{su}(8) \quad (7.445)$$

と直和分化する。このとき、

$$[\mathcal{K}, \mathcal{K}] \subset \mathcal{K}, \quad [\mathcal{K}, \mathcal{N}] \subset \mathcal{N}, \quad [\mathcal{N}, \mathcal{N}] \subset \mathcal{K}. \quad (7.446)$$

この節では、Usp 表現を用いる。

モジュライ空間は $\exp(\mathcal{N})$ に対応し、 $SU(8)$ の作用は、 $X \in \mathcal{N}$ として、

$$\mathcal{S} = \exp(X) \mapsto g \exp(X) = \exp(\text{ad}(g)X) g \Rightarrow \mathcal{S}' = \exp(\text{ad}(g)X). \quad (7.447)$$

つぎに、 $Y \in \mathcal{N}$ に対して、

$$\mathcal{S} = e^X \mapsto e^{\epsilon Y} e^X = e^{X'(\epsilon)} \mathcal{W}(\epsilon), \quad \mathcal{W} \in SU(8), \quad X' \in \mathcal{N} \quad (7.448)$$

において、 ϵ の 1 次で

$$Y \mathcal{S} = \delta \mathcal{S} + \mathcal{S} \delta \mathcal{W}. \quad (7.449)$$

よって、 $\delta \mathcal{W}^\dagger = -\delta \mathcal{W}$ より、

$$(\mathcal{S}^{-1} Y \mathcal{S})_+ = (\mathcal{S}^{-1} \delta \mathcal{S})_+. \quad (7.450)$$

ここで、 $Q_+ = (Q + Q^\dagger)/2$.

$\mathcal{S} = \mathcal{U} \Gamma(\Lambda) \mathcal{U}^\dagger$ を代入すると、

$$(\Gamma^{-1} \mathcal{U}^\dagger Y \mathcal{U} \Gamma)_+ = (\Gamma^{-1} \mathcal{U}^\dagger \delta \mathcal{S} \mathcal{U})_+. \quad (7.451)$$

右辺は

$$2(\Gamma^{-1} \mathcal{U}^\dagger \delta \mathcal{S} \mathcal{U})_+ = \Gamma^{-1} \mathcal{U}^\dagger \delta \mathcal{U} \Gamma - \Gamma \mathcal{U}^\dagger \delta U \Gamma^{-1} + 2\Gamma^{-1} \delta \Gamma. \quad (7.452)$$

ここで、

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & \bar{U} \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \cosh(\Lambda) & \sinh(\Lambda) \\ \sinh(\Lambda) & \cosh(\Lambda) \end{pmatrix} \quad (7.453)$$

を用いると、 $Y = \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ \bar{\phi} & 0 \end{pmatrix}$ に対し、

$$\begin{aligned} & \delta \Lambda + \cosh \Lambda (\bar{U} \delta \bar{U}) \sinh \Lambda - \sinh \Lambda (U^\dagger \delta U) \cosh \Lambda \\ & = \cosh \Lambda (\bar{U} \delta \bar{U}) \cosh \Lambda - \sinh \Lambda (U^\dagger \delta U) \sinh \Lambda \end{aligned} \quad (7.454)$$

を得る。

7.2.9.5 Kinetic terms

Lagrangian におけるモジュライ場の運動項は、一般に

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{e}{12\kappa^2} P_{\mu ijkl} P^{\mu ijkl}; \quad (7.455)$$

$$P_{\mu ijkl} = (\mathcal{V}^{-1}(\partial_\mu - \mathcal{A}_\mu)\mathcal{V})_{ij;kl}, \quad (7.456)$$

$$\mathcal{A}_\mu = A_\mu^M \mathcal{X}_M \in M(56, \mathbb{R}). \quad (7.457)$$

ここで,

$$\mathcal{V} = \mathcal{F}_0^\dagger \mathcal{S}, \quad (7.458)$$

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & \bar{U} \end{pmatrix} \Gamma(\Lambda) \begin{pmatrix} U^\dagger & 0 \\ 0 & \mathcal{T}U \end{pmatrix}, \quad (7.459)$$

$$\Gamma(\Lambda) = \begin{pmatrix} \cosh(\Lambda) & \sinh(\Lambda) \\ \sinh(\Lambda) & \cosh(\Lambda) \end{pmatrix}, \quad (7.460)$$

$$\mathcal{X}_M = \begin{pmatrix} X_M & 0 \\ 0 & -{}^T X_M \end{pmatrix}. \quad (7.461)$$

P の具体的表式は,

$$P_{\mu ijkl} = -\frac{1}{16} \Gamma_{pq}^{ij} \Gamma_{rs}^{kl} (U K_\mu \mathcal{T}U)_{pq;rs}, \quad (7.462)$$

$$\begin{aligned} (K_\mu) &= \partial\Lambda - \sinh\Lambda \mathcal{T}U A_s U \sinh\Lambda + \cosh\Lambda U^\dagger A_s \bar{U} \cosh\Lambda \\ &\quad - \cosh\Lambda U^\dagger (A_a - \partial U U^\dagger) U \sinh\Lambda \\ &\quad + \sinh\Lambda \mathcal{T}U (A_a - \partial \bar{U} \mathcal{T}U) \bar{U} \cosh\Lambda. \end{aligned} \quad (7.463)$$

ここで

$$(A_s)_\mu = \frac{1}{2} A_\mu^M (X_M + {}^T X_M), \quad (A_a)_\mu = \frac{1}{2} A_\mu^M (X_M - {}^T X_M). \quad (7.464)$$

7.2.9.6 ゲージ結合関数

ゲージ結合関数 $\mathcal{N} = (\mathcal{N}_{\Lambda\Sigma})$ は、Moduli 行列 \mathcal{V} を用いて

$$\mathcal{N} = -\mathcal{V}_{11} \mathcal{V}_{21}^{-1} \quad (7.465)$$

と表される。ここで

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(O) \mathcal{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & -i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{S} \quad (7.466)$$

より,

$$\mathcal{V}_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} [-\mathcal{S}_{11} + \mathcal{S}_{21}], \quad (7.467a)$$

$$\mathcal{V}_{11} = -\frac{i}{\sqrt{2}} [\mathcal{S}_{11} + \mathcal{S}_{21}]. \quad (7.467b)$$

これに \mathcal{S} の表式を代入すると,

$$\mathcal{V}_{21} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (U_1 e^{-\Lambda} + iU_2 e^{\Lambda}) U^\dagger, \quad (7.468a)$$

$$\mathcal{V}_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} (U_2 e^{-\Lambda} - iU_1 e^{\Lambda}) U^\dagger. \quad (7.468b)$$

よって,

$$\mathcal{N} = [U_2 e^{-\Lambda} - iU_1 e^{\Lambda}] [U_1 e^{-\Lambda} + iU_2 e^{\Lambda}]^{-1}. \quad (7.469)$$

7.2.10 Electric frame

7.2.10.1 変換行列

Dyonic gauging での embedding テンソルは, $L \in \text{Sp}(56, \mathbb{R})$ による大域的左変換により, electric frame に変換することができる. 行列系 $X'_M (\in \rho_{56}(E_{7(7)}))$ を

$$X'_M = L_M{}^N X_N \quad (7.470)$$

L を決める条件はにより定義する (モジュライ空間への作用が定義されている通常の $E_{7(7)}$ 変換と異なり, $X_M = (X_{MP})^Q$ において M のみを変換し, P, Q については変換しない). このとき, electric frame への変換となる条件は,

$$X'^{[ab]} = L^{[ab]N} X_N = 0 \quad (7.471)$$

この条件は, $\text{SL}(8)$ 型の gauging

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} -(\theta A_e + A_m \xi) \wedge 1 & 0 \\ 0 & -(A_e \theta + \xi A_m) \wedge 1 \end{pmatrix} \quad (7.472)$$

に対しては,

$$\begin{aligned} & L^{[ab][cd]} X_{[cd]} + L^{[ab]}{}_{[cd]} X^{[cd]} = 0 \\ \Leftrightarrow & L^{[ab][d[g] \theta_{d[e} \delta_{f]}^h]} - L^{[ab]}{}_{d[e} \xi^{d[g] \delta_{f]}^h} = 0 \end{aligned} \quad (7.473)$$

$\theta\xi = c(\neq 0)$ のとき, この特殊解は (おそらく一般には一意的)

$$L_{22} = -\frac{1}{c}L_{21}\circ(\theta \wedge \theta). \quad (7.474)$$

一方, $L \in \text{Sp}(56, \mathbb{R})$ となる条件は,

$$L_{12} {}^T L_{11} = L_{11} {}^T L_{12}. \quad (7.475a)$$

$$L_{22} {}^T L_{21} = L_{21} {}^T L_{22}, \quad (7.475b)$$

$$L_{11} {}^T L_{22} - L_{12} {}^T L_{21} = 1. \quad (7.475c)$$

よって, $\omega \in \text{GL}(28, \mathbb{R}) : \mathbb{R}^8 \wedge \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^8 \wedge \mathbb{R}^8$ として,

$$L = \begin{pmatrix} S\circ\omega & -\frac{1}{c}\{({}^T\omega)^{-1} + S\circ\omega\circ(\theta \wedge \theta)\} \\ c\omega & -\omega\circ(\theta \wedge \theta) \end{pmatrix}. \quad (7.476)$$

ここで, $S \in S(28, \mathbb{R})$ は 28 次の任意の行列. この逆行列は,

$$\begin{aligned} L^{-1} &= -J {}^T L J \\ &= \begin{pmatrix} -(\theta \wedge \theta)\circ {}^T\omega & \frac{1}{c}\{(\omega)^{-1} + (\theta \wedge \theta)\circ {}^T\omega\circ S\} \\ -c {}^T\omega & {}^T\omega\circ S \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.477)$$

Electric frame での embedding tensor $X'_{[ab]}$ は

$$A' \cdot X' = A'^{[ab]} X'_{[ab]} = \begin{pmatrix} [(A'_e {}^T\omega^{-1})\theta^{-1}] \wedge 1 & 0 \\ 0 & [\theta^{-1}(\omega^{-1}A'_e)] \wedge 1 \end{pmatrix}. \quad (7.478)$$

とくに,

$$S = -{}^T\omega^{-1}\circ(\theta \wedge \theta)^{-1}\circ\omega^{-1} \quad (7.479)$$

と取ると,

$$L = \begin{pmatrix} -{}^T\omega^{-1}\circ(\theta \wedge \theta)^{-1} & 0 \\ c\omega & -\omega\circ(\theta \wedge \theta) \end{pmatrix}, \quad (7.480a)$$

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} -(\theta \wedge \theta)\circ {}^T\omega & 0 \\ -c {}^T\omega & -(\theta \wedge \theta)^{-1}\circ\omega^{-1} \end{pmatrix} \quad (7.480b)$$

7.2.10.2 Lagrangian in the electric frame

$L \in \text{Sp}(56, \mathbb{R})$ として, $\omega = -(\theta \wedge \theta)^{-1}$ に対応するものを取る :

$$L = \begin{pmatrix} 1 \wedge 1 & 0 \\ -c(\theta \wedge \theta)^{-1} & 1 \wedge 1 \end{pmatrix}, \quad (7.481a)$$

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \wedge 1 & 0 \\ c(\theta \wedge \theta)^{-1} & 1 \wedge 1 \end{pmatrix}. \quad (7.481b)$$

このとき, Electric frame で n ゲージ場は

$$\mathcal{A}' = A'^{[ab]} X'_{[ab]} = \begin{pmatrix} -\theta A'_e \wedge 1 & 0 \\ 0 & -A'_e \theta \wedge 1 \end{pmatrix}. \quad (7.482)$$

もとのゲージポテンシャルを A'_e, A'_m で表すと

$$\mathcal{A}^M = \mathcal{A}'^N L_N^M \quad (7.483)$$

より,

$$A^{[ab]} = A'^{[ab]} - c A'_{[ab]} (\theta \wedge \theta)^{-1}, \quad A_{[ab]} = A'_{[ab]}, \quad (7.484a)$$

$$\mathcal{A}^M X_M = \begin{pmatrix} -(\theta A'_e) \wedge 1 & 0 \\ 0 & -(A'_e \theta) \wedge 1 \end{pmatrix}. \quad (7.484b)$$

よって, moduli の運動項は

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{e}{12\kappa^2} K \cdot K, \quad (7.485)$$

において,

$$A_s = \frac{1}{2} (A'_e \theta - \theta A'_e) \wedge 1, \quad (7.486a)$$

$$A_a = -\frac{1}{2} (A'_e \theta + \theta A'_e) \wedge 1. \quad (7.486b)$$

つぎに, ゲージ場の結合関数行列 \mathcal{N} は

$$\begin{aligned} \mathcal{N}' &= [({}^T L^{-1})_{22} \mathcal{N} + ({}^T L^{-1})_{21}] [({}^T L^{-1})_{11} + ({}^T L^{-1})_{12} \mathcal{N}]^{-1} \\ &= \mathcal{N} [1 + c(\theta \wedge \theta)^{-1} \mathcal{N}]^{-1}. \end{aligned} \quad (7.487)$$

7.2.10.3 ゲージ粒子の質量

Lagrangian に含まれるゲージ場の 2 次の項は

$$\mathcal{L}_1^{(2)} = -\frac{1}{2} (i \mathcal{N}'_{\Lambda\Sigma} \mathcal{F}'^{\Lambda+} \cdot \mathcal{F}'^{\Sigma+} + \text{h.c.}) - P_\mu \cdot P^\mu. \quad (7.488)$$

ここで, $\mathcal{V} = \mathcal{T}^{-1} \tilde{L} = L \mathcal{T}^{-1} (\tilde{L} \in \rho_{\text{Usp}(\text{CJ})}(E_{7(7)}), L \in \rho_{\text{Sp}}(E_{7(7)}))$ とするとき, $P_\mu = (P_{\mu ijkl})$ は

$$\begin{aligned} P_{\mu ijkl} &= i (\mathcal{V}_{\Lambda ij} \partial_\mu \mathcal{V}^{\Lambda kl} - \mathcal{V}^{\Lambda ij} \partial_\mu \mathcal{V}_{\Lambda kl}) - ig \Omega^{NP} \mathcal{V}_{Nuh} \mathcal{A}_\mu^M X_{MP}{}^Q \mathcal{V}_{Qkl} \\ &= \Omega^{PQ} \tilde{L}_{Pij} \partial_\mu \tilde{L}_{Qkl} + g A_e{}^{ab} X_{ab;ijkl}. \end{aligned} \quad (7.489)$$

ここで,

$$\begin{aligned} X_{ab;ijkl} &\equiv \frac{1}{16} \left(\Gamma_{ij}^{ef} \Gamma_{kl}^{gh} + \Gamma_{kl}^{ef} \Gamma_{ij}^{gh} \right) \\ &\quad \times \theta_{bc} (L_{ad}{}^{ef} + i L_{adef}) (L^{cd}{}_{gh} - i L^{cdgh}). \end{aligned} \quad (7.490)$$

特に, 原点 $L = I_{58} = \tilde{L}$ では,

$$P_{\mu ijkl} = \partial_\mu \phi_{ijkl} - \frac{g}{8} A_e{}^{ab} (\Gamma_{ijkl})_{ac} \theta_{cb}. \quad (7.491)$$

対応するゲージ粒子の質量項は

$$\mathcal{L}_{1,mass} = -\frac{g^2}{2} \text{Tr} ((A_\mu \theta)_s (A^\mu \theta)_s). \quad (7.492)$$

ここで, M_s は行列 M の対称部分. よって, ゲージ場の 2 次の Lagrangian は

$$\mathcal{L}_1^{(2)} = \frac{1}{2} \text{Im} (N'_{\Lambda\Sigma}) * F^\Lambda \wedge F^\Sigma - \frac{1}{2} \text{Re} (N'_{\Lambda\Sigma}) F^\Lambda \wedge F^\Sigma - \frac{g^2}{2} \text{Tr} ((A_\mu \theta)_s (A^\mu \theta)_s) \quad (7.493)$$

7.2.11 フェルミ粒子の質量

7.2.11.1 T 行列

スピノール Usp 表示 (CJ 表示) で

$$\mathcal{V} = \mathcal{T}^{-1} \tilde{L}; \tilde{L} \in \rho_{\text{Usp}}(E_{7(7)}), \quad (7.494)$$

$$\mathcal{T} = \Gamma \mathcal{T}_0, \quad \Gamma = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \Gamma_{ab}^{ij} & 0 \\ 0 & \Gamma_{kl}^{cd} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (7.495)$$

とおくとき，スカラ多様体の一般点での T 行列 T_q^{klj} は

$$\begin{aligned} \delta_{[p}^{[k} T_q^{l]ij} &= T_u^{smn}(0)(\tilde{L}^{-1})^{[ij][mn]} \left(\tilde{L}^{[ts]}_{[pq]} \tilde{L}^{[kl]}_{[tu]} + \tilde{L}^{[tu]}_{[pq]} \tilde{L}^{[ts][kl]} \right) \\ &\quad - T_u^{smn}(0)(\tilde{L}^{-1})^{[ij]}_{[mn]} \left(\tilde{L}^{[ts]}_{[pq]} \tilde{L}^{[tu][kl]} + \tilde{L}^{[tu]}_{[pq]} \tilde{L}^{[ts][kl]} \right) \\ &\quad - T_n^{[stu]}(0)(\tilde{L}^{-1})^{[ij]r]n} \left(\tilde{L}^{[rs]}_{[pq]} \tilde{L}^{[kl]}_{[tu]} - \star(\tilde{L}^{**}_{[pq]} \tilde{L}^{**[kl]})_{rstu} \right) \\ &\quad + T_n^{[stu]}(0)(\tilde{L}^{-1})^{[ij]}_{r]n} \left(\tilde{L}^{[rs]}_{[pq]} \tilde{L}^{[tu][kl]} - \star(\tilde{L}^{**}_{[pq]} \tilde{L}^{**[kl]})_{rstu} \right) \end{aligned} \quad (7.496)$$

ここで， $T_u^{smn}(0)$ は原点での T 行列で，

$$\zeta = \theta + i\xi \quad (7.497)$$

を用いて，

$$T_i^{jkl}(0) = -i \frac{3\sqrt{2}}{128} \left[(\Gamma^{klj}_i)^{ab} + 2\delta_i^{[k} \delta^{l]j} \delta^{ab} \right] \bar{\zeta}_{ab} \quad (7.498)$$

と表される．対応する A_1 と A_2 は

$$A_1^{jk}(0) = -i \frac{\sqrt{2}}{32} \delta^{jk} \text{Tr}(\bar{\zeta}), \quad (7.499a)$$

$$A_{2i}{}^{jkl}(0) = -i \frac{\sqrt{2}}{32} (\Gamma_i{}^{jkl})^{ab} \bar{\zeta}_{ab}. \quad (7.499b)$$

7.2.11.2 運動方程式

スピノール場

$$\psi_\mu^i = \gamma_5 \psi_\mu^i, \quad \psi_{i\mu} = B(\psi_\mu^i)^*, \quad \bar{\psi}_{i\mu} = \overline{(\psi_\mu^i)}, \quad \bar{\psi}_\mu^i = \overline{(\psi_{i\mu})}, \quad (7.500a)$$

$$\chi^{ijk} = \gamma_5 \chi^{ijk}, \quad \chi_{ijk} = B(\chi^{ijk})^*, \quad \bar{\chi}_{ijk} = \overline{(\chi^{ijk})}, \quad \bar{\chi}^{ijk} = \overline{(\chi_{ijk})} \quad (7.500b)$$

に対する運動方程式は，ゲージ場がゼロの時

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \nabla_\rho \psi_\nu^i - ig\sqrt{2} A_1^{ij} \gamma^{\mu\nu} \psi_{j\nu} - \frac{g}{6} A_2^i{}_{jkl} \gamma^\mu \chi^{jkl} = 0, \quad (7.501a)$$

$$\gamma^\mu \nabla_\mu \chi^{ijk} - ig A_{2l}{}^{ijk} \gamma^\mu \psi_\mu^l + g \frac{\sqrt{2}}{12} \eta \epsilon^{ijkpqr} A_2^l{}_{pqr} \chi_{lmn} = 0 \quad (7.501b)$$

7.2.12 SO(8)-gauging

Embedding tensor のパラメータ行列 θ, ξ は

$$\theta = sI_8, \quad \xi = \theta^{-1}. \quad (7.502)$$

原点でのポテンシャルは

$$V_0 = \Lambda = -\frac{3}{4}g^2 \left(s^2 + \frac{1}{s^2} \right). \quad (7.503)$$

7.2.12.1 SO(8) 不変真空 (原点)

(i) スカラ場の質量

$$\mathcal{V} = \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}_0^{-1}\Gamma \quad (7.504)$$

より, $|V_0|$ 単位で

$$m_0^2 = \begin{cases} 0^+ : -2/3 \text{ (35)}, \\ 0^- : -2/3 \text{ (35)} \end{cases}. \quad (7.505)$$

(ii) ベクトル場の質量 ベクトル場の質量項は

$$-\frac{g^2}{2} \text{Tr} ((A_\mu \theta)_s (A^\mu \theta)_s) = 0 \quad (7.506)$$

なので, ベクトル場のすべての成分は質量ゼロ:

$$m_1^2 = 0 \quad (28). \quad (7.507)$$

また, ゲージ結合関数は

$$\mathcal{N} = -i1 \wedge 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}' = \mathcal{N} [1 + s^{-2} 1 \wedge 1 \mathcal{N}]^{-1} = \frac{-s^4 i + s^2}{s^4 + 1} 1 \wedge 1 \quad (7.508)$$

となるので, ゲージ場の2次のLagrangianは

$$\mathcal{L}_1^{(2)} = -\frac{s^4}{2(s^4 + 1)} *F^{[ab]} \wedge F_{[ab]} - \frac{s^2}{2(s^4 + 1)} F^{[ab]} \wedge F_{[ab]}. \quad (7.509)$$

(iii) スピノール場の質量 原点でのTテンソルは

$$A_1^{jk}(0) = -i \frac{\sqrt{2}}{32} \delta^{jk} \text{Tr}(\bar{\zeta}) = -i \frac{\sqrt{2}}{4} \left(s - \frac{i}{s} \right) \delta^{jk}, \quad (7.510a)$$

$$A_{2i}^{jkl}(0) = -i \frac{\sqrt{2}}{32} (\Gamma_i^{jkl})^{ab} \delta_{ab} \left(s - \frac{i}{s} \right) = 0. \quad (7.510b)$$

よって, 場の方程式は

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \nabla_\rho \psi_\nu^i - \mu \gamma^{\mu\nu} \psi_{i\nu} = 0, \quad (7.511a)$$

$$\gamma^\mu \nabla_\mu \chi^{ijk} = 0. \quad (7.511b)$$

ここで,

$$\mu \equiv \frac{1}{2} \left(s - \frac{i}{s} \right). \quad (7.512)$$

よって, 質量は

$$m_{3/2}^2 = |\mu|^2 / |V_0| = \frac{1}{3}, \quad (7.513a)$$

$$m_{1/2}^2 = 0. \quad (7.513b)$$

【公式 7.1 (グラヴィティーノ質量)】 スピン 3/2 場が方程式

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \partial_\rho \psi_\nu = \mu \gamma^{\mu\nu} (\psi^\mu)^c (= \mu \gamma^{\mu\nu} B \psi^{\mu*}) \quad (7.514)$$

(B は複素共役行列) に従うとき, その質量 m は

$$m^2 = |\mu|^2. \quad (7.515)$$

□

Proof. モード分解

$$\psi_\mu = \alpha_\mu e^{ip \cdot x} + \beta_\mu e^{-ip \cdot x} \quad (7.516)$$

を代入すると,

$$i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma p_\rho \alpha_\nu = \mu \gamma^{\mu\nu} B \beta_\nu^*, \quad (7.517a)$$

$$i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma p_\rho \beta_\nu = -\mu \gamma^{\mu\nu} B \alpha_\nu^* \quad (7.517b)$$

これらと p_μ の縮約により,

$$p_\mu \gamma^{\mu\nu} B \beta_\nu^* = 0, \quad p_\mu \gamma^{\mu\nu} B \alpha_\nu^* = 0. \quad (7.518)$$

また, γ_μ と縮約すると,

$$i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_{\mu\sigma} p_\rho \alpha_\nu = 3\mu \gamma^\nu B \beta_\nu^*, \quad (7.519a)$$

$$i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_{\mu\sigma} p_\rho \beta_\nu = -3\mu \gamma^\nu B \alpha_\nu^*. \quad (7.519b)$$

これらの式の左辺は,

$$*\gamma_{[2]} = -i\gamma_5 \gamma_{[2]} \quad (7.520)$$

を考慮すると, ゼロとなるので,

$$\gamma^\mu \alpha_\mu = \gamma^\mu \beta_\mu = 0 \Rightarrow p^\mu \alpha_\mu = p^\mu \beta_\mu = 0. \quad (7.521)$$

よって、最初の方方程式系は

$$i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\sigma p_\rho\alpha_\nu = -\mu B(\beta^\mu)^*, \quad (7.522a)$$

$$i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\sigma p_\rho\beta_\nu = \mu B(\alpha^\mu)^*. \quad (7.522b)$$

第1式を β_μ についてとき、

$$\bar{\mu}\beta^\mu = i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_\rho\gamma_\sigma B\alpha_\nu^* \quad (7.523)$$

第2式に代入すると、

$$(p^2 + |\mu|^2)\alpha^\mu = 0. \quad (7.524)$$

Q.E.D.

7.2.13 SO(4,4)-gauging

Embedding tensor のパラメータ行列 θ, ξ を

$$\theta = s[I_4, -I_4], \quad \xi = \theta^{-1} \quad (7.525)$$

と取る.

(注) 変換

$$g \rightarrow g/s \quad (7.526)$$

により、

$$\theta = [I_4, -I_4], \quad \xi = c\theta^{-1}; \quad c = 1/s^2 \quad (7.527)$$

と変換される.

7.2.13.1 Hull-Warner dS 臨界点

SO(4) \times SO(4) 対称性をもつ dS 臨界点 (HW dS 臨界点) は、埋め込みテンソルが上記のように表される表示のもとで、スカラ多様体の原点 $\mathcal{V} = \mathcal{T}^{-1}(L = 1)$ に対応する. 対応するポテンシャルの値は

$$V_0 = \frac{g^2}{4} \left(s^2 + \frac{1}{s^2} \right) = \frac{1}{4}(gs)^2 \left(1 + \frac{1}{s^4} \right). \quad (7.528)$$

(1) スカラ場の質量

$$m_{0+}^2 = \begin{cases} -2 & : (1, 1), \\ 2 & : (9, 1) + (1, 9), \\ 0 & : (4, 4) \text{ NGS boson.} \end{cases} \quad (7.529a)$$

$$m_{0-}^2 = \begin{cases} -2 & : (1, 1), \\ 2 & : (6, 6)^+, \\ 1 & : (4, 4). \end{cases} \quad (7.529b)$$

(2) ベクトル場の質量 原点に対応するので, dyonic gauging では $\mathcal{N} = -iI_{28}$. Electric frame に移ると

$$\mathcal{N}' = -i[1 - is^{-2}I_{4,4} \wedge I_{4,4}]^{-1}. \quad (7.530)$$

ここで,

$$(\mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{R}^4) \wedge (\mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{R}^4) \cong \mathbb{R}^6 \oplus \mathbb{R}^6 \oplus \mathbb{R}^{16} \quad (7.531)$$

における endmorphism として,

$$I_{4,4} \wedge I_{4,4} \cong I_6 \oplus I_6 \oplus (-I_{16}). \quad (7.532)$$

よって, 電氣的フレームでのゲージ結合関数は

$$\mathcal{N}' \cong \frac{-is^4 + s^2}{1 + s^4}(I_6 \oplus I_6) \oplus \frac{-is^4 - s^2}{1 + s^4}I_{16}. \quad (7.533)$$

次に, $\alpha, \beta, \dots \in [1, 2, 3, 4]$, $\alpha', \beta', \dots \in [5, 6, 7, 8]$ とするとき,

$$(\mathcal{A}\theta)_s = s \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{A}^{\alpha\beta'} \\ \mathcal{A}^{\alpha'\beta} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.534)$$

より,

$$\text{Tr} \{(A_\mu\theta)_s(A^\mu\theta)_s\} = 2s^2 \sum_{1 \leq \alpha \leq 4} \sum_{5 \leq \beta' \leq 8} A_\mu^{[\alpha\beta']} A^{\mu[\alpha\beta']}. \quad (7.535)$$

以上より, ゲージ場の 2 次までの Lagrangian は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{(2)} &= -\frac{1}{2} \frac{s^4}{1 + s^4} \sum_{a,b=1}^8 *F^{[ab]} \wedge F^{[ab]} - \frac{1}{2} \frac{s^2}{1 + s^4} \left(\sum_{a,b=1}^4 + \sum_{a,b=5}^8 \right) F^{[ab]} \wedge F^{[ab]} \\ &\quad + \frac{s^2}{1 + s^4} \sum_{a=1}^4 \sum_{b=5}^8 F^{[ab]} F^{[ab]} - g^2 s^2 *1 \sum_{a=1}^4 \sum_{b=5}^8 A_\mu^{[ab]} A^{\mu[ab]}. \end{aligned} \quad (7.536)$$

これより, $A_\mu^{[ab]}$ ($1 \leq a \leq 4, 5 \leq b \leq 8$) が NGS ボゾンを吸って質量を獲得. 場の方程式は

$$\frac{s^4}{1+s^4} \nabla_\nu F^\nu{}_\mu - g^2 s^2 A_\mu = 0 \quad (7.537)$$

となるので, 質量は

$$m_1^2 = \frac{1+s^4}{s^2} g^2 \Rightarrow \frac{m_1^2}{V_0} = 4. \quad (7.538)$$

スピノール場の質量 原点における T 行列は

$$A_1^{jk}(0) = -i \frac{\sqrt{2}}{32} \delta^{jk} \text{Tr}(\bar{\zeta}) = 0, \quad (7.539a)$$

$$A_{2i}{}^{jkl}(0) = -\frac{\sqrt{2}}{32} (\Gamma_i{}^{jkl})^{ab} \bar{\zeta}_{ab} = -\frac{\sqrt{2}}{32} \left(s - \frac{i}{s} \right) \hat{A}_{ijkl}. \quad (7.539b)$$

ここで, $\hat{\theta} = I_4 \oplus (-I_4)$ として,

$$\hat{A}_{ijkl} \equiv \text{Tr}(\Gamma_{ijkl} \hat{\theta}). \quad (7.540)$$

$\Gamma_{[4]}$ の (anti-)self-duallity

$$\star \Gamma_{[4]} = \eta \Gamma_{[4]} \quad (7.541)$$

を用いると,

$$\epsilon^{ijklmpqr} \Gamma_{pqr}^n \chi_{lmn} = 18 \eta \Gamma^{lm}{}_{[jk} \chi_{i]lm} \quad (7.542)$$

となるので, 場の方程式は

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma \nabla_\rho \psi_\nu^i - \frac{g}{6} A_{2i}{}^{jkl} \gamma^\mu \chi^{jkl} = 0, \quad (7.543a)$$

$$\gamma^\mu \nabla_\mu \chi^{ijk} = ig A_{2l}{}^{ijk} \gamma^\mu \psi_\mu^l + \frac{3g}{\sqrt{2}} A_{2m}{}^l{}_{[jk} \chi_{i]lm}. \quad (7.543b)$$

モード関数

$$\psi_\mu^i = \alpha_\mu^i e^{ip \cdot x} + \tilde{\alpha}_\mu^i e^{-ip \cdot x}, \quad (7.544a)$$

$$\chi_\mu^{ijk} = \beta_\mu^{ijk} e^{ip \cdot x} + \tilde{\beta}_\mu^{ijk} e^{-ip \cdot x} \quad (7.544b)$$

が解とすると,

$$iI_\gamma I_p \star \alpha - g \gamma \mathcal{P}(\beta) = 0, \quad (7.545a)$$

$$-iI_\gamma I_p \star \tilde{\alpha} - g \gamma \mathcal{P}(\tilde{\beta}) = 0, \quad (7.545b)$$

$$ip\beta - ig {}^T \mathcal{P}(\gamma \cdot \alpha) + g \mathcal{Q}(B\tilde{\beta}^*) = 0, \quad (7.545c)$$

$$-ip\tilde{\beta} - ig {}^T \mathcal{P}(\gamma \cdot \tilde{\alpha}) + g \mathcal{Q}(B\beta^*) = 0. \quad (7.545d)$$

ここで, B は複素共役変換行列. また,

$$\mathcal{P}(\chi^{[3]})^i \equiv \frac{1}{6} A_{2jkl}^i \chi^{jkl} = -\frac{\sqrt{2}}{6 \times 32} \left(s - \frac{i}{s} \right) \hat{A}_{ijkl} \chi^{jkl}, \quad (7.546a)$$

$${}^T\mathcal{P}(\psi^{[1]})^{ijk} \equiv A_{2l}^{ijk} \psi^l = -\frac{\sqrt{2}}{32} \left(s + \frac{i}{s} \right) \hat{A}_{lijk} \psi^l, \quad (7.546b)$$

$$\mathcal{Q}(\chi_{[3]})^{ijk} \equiv \frac{3}{\sqrt{2}} A_{2m[jk}^l \chi_{i]lm} = -\frac{3}{32} \left(s - \frac{i}{s} \right) \hat{A}_{lm[jk} \chi_{i]lm} \quad (7.546c)$$

これらの作用素は次の性質をもつ:

$$\mathcal{P} \circ \mathcal{Q} = 0, \quad (7.547a)$$

$$\mathcal{P} \circ {}^T\mathcal{P} = \frac{1}{8} \left(s^2 + \frac{1}{s^2} \right) I_8 \quad (7.547b)$$

第1式は次のようにして, 示される. まず,

$$\mathcal{P} \circ \mathcal{Q}(\chi^{[3]})^i = -\frac{\sqrt{2}}{2^{11}} \left(s - \frac{i}{s} \right)^2 \hat{A}_{kli[j} \hat{A}_{mn]kl} \chi_{jmn} \quad (7.548)$$

において,

$$\begin{aligned} \hat{A}_{ijkl} \hat{A}_{mnkl} &= (\Gamma_{ij})^{ap} (\Gamma_{kl})^{pb} \hat{\theta}_{ab} (\Gamma_{mn})^{cq} (\Gamma_{kl})^{qd} \hat{\theta}_{cd} \\ &= (\Gamma_{ij})^{ap} \hat{\theta}_{ab} (\Gamma_{mn})^{cq} \hat{\theta}_{cd} \times 16 \delta_{q[p} \delta_{b]d} \\ &= -8 \text{Tr}(\Gamma_{ij} \Gamma_{mn}) - 8 \text{Tr}(\Gamma_{ij} \hat{\theta} \Gamma_{mn} \hat{\theta}) \\ &= 64 \delta_{i[m} \delta_{n]j} - 8 \text{Tr}(\Gamma_{ij} \hat{\theta} \Gamma_{mn} \hat{\theta}). \end{aligned} \quad (7.549)$$

ところが, Maple による計算で

$$\text{Tr}(\Gamma_{k[j} \hat{\theta} \Gamma_{mn]} \hat{\theta}) = 0 \quad (7.550)$$

が示されるので, $\mathcal{P} \circ \mathcal{Q} = 0$ となる. つぎに, 上記の \hat{A}^2 の式より

$$\hat{A}_{iklm} \hat{A}_{jklm} = 8^2 \times 7 \delta_{ij} - 8 \text{Tr}(\Gamma_{il} \hat{\theta} \Gamma_{jl} \hat{\theta}) = 6 \times 8^2 \delta_{ij} \quad (7.551)$$

となるので, $\mathcal{P} \circ {}^T\mathcal{P}$ の式が導かれる.

さて, (7.545) の最初の2式に I_p を施すと,

$$p\mathcal{P}(\beta) = 0, \quad p\mathcal{P}(\tilde{\beta}) = 0. \quad (7.552)$$

よって、残り 2 式に \mathcal{P} を施すと、

$$\mathcal{P}_\circ^T \mathcal{P}(\gamma \cdot \alpha) = 0. \quad \mathcal{P}_\circ^T \mathcal{P}(\gamma \cdot \tilde{\alpha}) = 0 \quad (7.553)$$

より、

$$\gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \tilde{\alpha} = 0. \quad (7.554)$$

これは、 $\beta, \tilde{\beta}$ の固有値問題が $\alpha, \tilde{\alpha}$ と独立になることを意味する：

$$ip\beta + g\mathcal{Q}(B\tilde{\beta}^*) = 0, \quad (7.555a)$$

$$-ip\tilde{\beta} + g\mathcal{Q}(B\beta^*) = 0. \quad (7.555b)$$

つぎに、 I_γ を (7.545) の最初の 2 式に施すと

$$i * \gamma_{[2]} = \gamma_5 \gamma^{[2]} \quad (7.556)$$

より、

$$g\mathcal{P}(\beta) = -\frac{1}{2} p_\mu \gamma^{\mu\nu} \gamma_5 \alpha_\nu = \frac{1}{2} \gamma_5 p \cdot \alpha, \quad (7.557a)$$

$$g\mathcal{P}(\tilde{\beta}) = -\frac{1}{2} \gamma_5 p \cdot \tilde{\alpha} \quad (7.557b)$$

を得る。さらに、

$$i * \gamma_{[1]} = -\gamma_5 \gamma^{[3]} \quad (7.558)$$

を用いて、(7.545) の最初の 2 式を書き換えると、

$$p\alpha^\mu = \frac{1}{2} \gamma^\mu p \cdot \alpha, \quad p\tilde{\alpha}^\mu = \frac{1}{2} \gamma^\mu p \cdot \tilde{\alpha}, \quad (7.559)$$

を得る。

$p^2 = 0$ となるゼロ質量モードに対して、

$$p \cdot \alpha = p \cdot \tilde{\alpha} = 0 \Rightarrow \mathcal{P}(\beta) = 0, \quad \mathcal{P}(\tilde{\beta}) = 0.$$

よって、振幅 $\alpha, \tilde{\alpha}$ は、代数方程式系

$$p\alpha^\mu = p \cdot \alpha = \gamma \cdot \alpha = 0, \quad (7.560a)$$

$$p\tilde{\alpha}^\mu = p \cdot \tilde{\alpha} = \gamma \cdot \tilde{\alpha} = 0 \quad (7.560b)$$

の任意の解。一方、 β は (7.555) の $p^2 = 0$ に対応する固有解のなかで、 $\mathcal{P}(\beta) = \mathcal{P}(\tilde{\beta}) = 0$ を満たすものとなる。

次に $p^2 \neq 0$ とすると, (7.559) より,

$$p^2 \alpha^\mu - p^\mu (p \cdot \alpha) = 0, \quad p^2 \tilde{\alpha}^\mu - p^\mu (p \cdot \tilde{\alpha}) = 0 \quad (7.561)$$

を得るので,

$$\alpha^\mu = p^\mu \xi, \quad \tilde{\alpha}^\mu = p^\mu \tilde{\xi} \quad (7.562)$$

と表される. これを (7.559) に代入すると

$$p^\mu p \xi = \frac{1}{2} \gamma^\mu p^2 \xi \Rightarrow p^2 p \xi = 0 \Rightarrow \xi = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \quad (7.563)$$

を得る. 同様にして, $\tilde{\alpha} = 0$. これは, gravitino が massive モードを持たないことを意味する. さらに, これより, χ の固有関数に対して, ゼロ質量モードと同じく

$$\mathcal{P}(\beta) = 0, \quad \mathcal{P}(\tilde{\beta}) = 0 \quad (7.564)$$

の制限が得られるが, これは β の固有値方程式の解に対しては, $\mathcal{P} \circ \mathcal{Q} = 0$ より, 自動的に満たされる.

以上より, 質量スペクトルを求める問題は, $\beta, \tilde{\beta}$ に対する固有値方程式 (7.555) を解くことに帰着される. この方程式から $\tilde{\beta}$ を消去すると,

$$(p^2 + g^2 \mathcal{Q} \circ \mathcal{Q}^*) \beta = 0 \quad (7.565)$$

となるので, $m_{1/2}^2$ は $g^2 \mathcal{Q} \circ \mathcal{Q}^*$ の固有値と一致する:

$$\mathcal{Q} \circ \mathcal{Q}^*(\chi_{[3]})^{ijk} = \frac{1}{32^2} \left(s^2 + \frac{1}{s^2} \right) \hat{A}_{lm[jk} \hat{A}^{qr}_{lm} \chi_{i]qr}. \quad (7.566)$$

作用素 $\hat{\mathcal{Q}}$ を

$$\hat{\mathcal{Q}}(\chi^{[3]})^{ijk} = \hat{A}_{lm[jk} \chi_{i]lm} \quad (7.567)$$

により定義すると, 基底

$$e[p, q, r]^{ijk} = \delta_p^{[i} \delta_q^j \delta_r^k] \quad (7.568)$$

に関する行列表示のもとで, $\hat{\mathcal{Q}}$ は実対称行列となり, 固有値は

$$\hat{\mathcal{Q}} \cong \left[\frac{16}{3} I_{24}, -\frac{16}{3} I_{24}, O_8 \right]. \quad (7.569)$$

ゼロ固有値に対応する固有空間上では \mathcal{P} は 1 対 1 写像となることが確かめられるので, 条件 $\mathcal{P}(\beta) = 0$ より, このゼロモードは排除される. よって, 有質量成分は 48 個で, 質量は

$$m_{1/2}^2 = \frac{g^2}{4} \left(s^2 + \frac{1}{s^2} \right) \Rightarrow \frac{m_{1/2}^2}{V_0} = 1. \quad (7.570)$$

一方, スピン 3/2 場はゼロ質量で, 各成分 α_μ^i の解の (複素) 自由度は 1 :

$$m_{3/2} = 0 \quad (8). \quad (7.571)$$

7.2.13.2 SO(4) × SO(4) 不変方向

ϕ を

$$\phi = x\theta \wedge 1 + iyU_0; \quad (7.572a)$$

$$U_0 = \frac{1}{2} (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6 \wedge e_7 \wedge e_8) \quad (7.572b)$$

と取る. このとき,

$$\mathbb{R}^8 \wedge \mathbb{R}^8 \cong (\mathbb{R}^4 \wedge \mathbb{R}^4) \oplus (\mathbb{R}^4 \wedge \mathbb{R}^4) \oplus (\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4), \quad (7.573)$$

$$\mathcal{S}^2 \cong \mathcal{S}_1^2 \oplus \mathcal{S}_2^2 \oplus I_{16}; \quad (7.574)$$

$$\mathcal{S}_1^2 = \begin{pmatrix} \cosh(2r) & 2z \text{jh}(2r)\epsilon \\ 2\bar{z} \text{jh}(2r)\epsilon & \cosh(2r) \end{pmatrix}, \quad (7.575)$$

$$\mathcal{S}_2^2 = \mathcal{M}_1(x \rightarrow -x), \quad (7.576)$$

$$\mathcal{M} \cong M_1 \oplus M_2 \oplus I_{16}; \quad (7.577)$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cosh(2r) + 2x \text{jh}(2r) & 2y \text{jh}(2r)\epsilon \\ 2y \text{jh}(2r)\epsilon & \cosh(2r) - 2x \text{jh}(2r) \end{pmatrix}, \quad (7.578)$$

$$M_2 = M_1(x \rightarrow -x). \quad (7.579)$$

これよりモジュライの運動項とポテンシャルは,

$$\kappa^2 \mathcal{L}_s = -(\partial r)^2 - \frac{1}{4} \sinh^2(2r) (\partial \theta)^2, \quad (7.580)$$

$$V = \frac{1 + s^4}{4s^2} (2 - \cosh(2r)). \quad (7.581)$$

m^2	SO(4) × SO(4)	SO(3) × SO(3)	Singlet
-2	(1, 1)	(1, 1)	E_1
+2	(9, 1)	(1, 1) + (3, 1) + (5, 1)	E_3
	(1, 9)	(1, 1) + (1, 3) + (1, 5)	E_4
0	(4, 4)	(1, 1) + (1, 3) + (3, 1) + (3, 3)	E_5
-2	(1, 1) = [4, 0] ⁺	(1, 1)	E_2
+2	(3 ₊ , 3 ₊) + (3 ₋ , 3 ₋) = [2, 2] ⁺	(3, 3) + (3, 3)	
+1	(4, 4) = [3, 1] ⁺	(1, 1) + (1, 3) + (3, 1) + (3, 3)	E_6

表 20: SO(4) × SO(4) 表現の SO(3) × SO(3) 表現への分解

7.2.13.3 SO(3) × SO(3) 不変かつ \mathbb{Z}_2 不変な方向

SO(3) × SO(3) 不変方向

$$E_1 = S_1 \wedge 1 : \quad S_1 = \sum_{i=1}^4 e_i \circ e_i - \sum_{j=5}^8 e_j \circ e_j, \quad (7.582a)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} (e_{1234} + e_{5678}), \quad (7.582b)$$

$$E_3 = S_3 \wedge 1 : \quad S_3 = \sum_{i=1}^3 e_i \circ e_i - 3e_4 \circ e_4, \quad (7.582c)$$

$$E_4 = S_4 \wedge 1 : \quad S_4 = \sum_{i=5}^7 e_i \circ e_i - 3e_8 \circ e_8, \quad (7.582d)$$

$$E_5 = S_5 \wedge 1 : \quad S_5 = e_4 \circ e_8 + e_8 \circ e_4, \quad (7.582e)$$

$$E_6 = \frac{1}{2} (e_{1238} + e_{4567}). \quad (7.582f)$$

 \mathbb{Z}_2 作用 ϕ_1 を

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & -8 & 1 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \quad (7.583)$$

に対応する SO(9) 行列とすると、この行列による共役変換で θ と ξ は

$$\theta \rightarrow -\theta, \quad \xi \rightarrow -\xi \quad (7.584)$$

と変換するので理論の自己同型となっている。この変換で、上記の Lie 代数の元は次のように変換する：

$$E_1 \mapsto -E_1, \quad E_2 \mapsto -E_2, \quad E_3 \mapsto E_4, \quad E_4 \mapsto E_3, \quad E_5 \mapsto E_5, \quad E_6 \mapsto E_6. \quad (7.585)$$

よって、不変な元は

$$E_3 + E_4, \quad E_5, \quad E_6 \quad (7.586)$$

また

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -5 & -6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \quad (7.587)$$

に対応する $SO(9)$ 行列による共役変換では、 θ と ξ は不変で、 E_i は

$$E_1 \mapsto E_1, \quad E_2 \mapsto -E_2, \quad E_3 \mapsto E_3, \quad E_4 \mapsto E_4, \quad E_5 \mapsto -E_5, \quad E_6 \mapsto E_6. \quad (7.588)$$

と変換し、不変な元は

$$E_1, \quad E_3, \quad E_4, \quad E_6 \quad (7.589)$$

よって、両方で不変な元は

$$E_3 + E_4, \quad E_6 \quad (7.590)$$

モジュライポテンシャル ϕ を

$$\phi = xS_1 \wedge 1 + iyU_1; \quad (7.591)$$

$$S_1 = I_8 - 4(e_4 \circ e_4 + e_8 \circ e_8), \quad (7.592)$$

$$U_1 = \frac{1}{2}(e_{1238} + e_{4567}), \quad (7.593)$$

$$e_{ab\dots c} = e_a \wedge e_b \wedge \dots \wedge e_c, \quad (7.594)$$

と取る。このとき、

$$(a \circ b) \wedge (c \circ d) = \frac{1}{4}(a \wedge c) \circ (b \wedge d) \quad (7.595)$$

より、

$$S_1 \wedge 1 = 1 \wedge 1 - \sum_{i \neq 4,8} (e_{4i} \circ e_{4i} + e_{8i} \circ e_{8i}) - 2e_{48} \circ e_{48}. \quad (7.596)$$

よって、 \mathbb{R}^8 および $\mathbb{R}^8 \wedge \mathbb{R}^8$ を

$$\mathbb{R}^8 \cong V_{123} \oplus V_4 \oplus V_{567} \oplus V_8, \quad (7.597)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^8 \wedge \mathbb{R}^8 \cong & [(V_{123} \wedge V_{123}) \oplus (V_{123} \wedge V_8)] \oplus [(V_{567} \wedge V_{567}) \oplus (V_{567} \wedge V_4)] \\ & \oplus [(V_{123} \wedge V_{567}) \oplus (V_{123} \wedge V_4) \oplus (V_{567} \wedge V_8) \oplus (V_4 \wedge V_8)] \end{aligned} \quad (7.598)$$

と分解すると,

$$S_1 \wedge 1 \cong I_3 \otimes \sigma_3 \oplus I_3 \otimes \sigma_3 \oplus [I_9 \oplus (-I_3) \oplus (-I_3) \oplus (-3)] \quad (7.599a)$$

$$U_1 \cong I_3 \otimes \sigma_1 \oplus (-I_3) \otimes \sigma_1 \oplus 0_{16}. \quad (7.599b)$$

よって,

$$\phi \cong (x\sigma_3 + iy\sigma_1) \oplus (x\sigma_3 - iy\sigma_1) \oplus [xI_9, -xI_6, -3x]. \quad (7.600)$$

\mathcal{S} を

$$\mathcal{S} \cong \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2 \oplus \mathcal{S}_3 \quad (7.601)$$

と分解する. このとき, $r^2 = x^2 + y^2$ として,

$$(x\sigma_3 + iy\sigma_1)(x\sigma_3 - iy\sigma_1) = r^2 + 2xy\sigma_2, \quad (7.602a)$$

$$(x\sigma_3 - iy\sigma_1)(x\sigma_3 + iy\sigma_1) = r^2 - 2xy\sigma_2, \quad (7.602b)$$

$$(7.602c)$$

より,

$$\phi\bar{\phi} \cong (r^2 + 2xy\sigma_2) \oplus (r^2 - 2xy\sigma_2) \oplus [x^2I_{15}, 9x^2]. \quad (7.603)$$

ここで,

$$r^2 + 2xy\sigma_2 = P[(x+y)^2, (x-y)^2]P^{-1}, \quad (7.604)$$

$$P := \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}. \quad (7.605)$$

よって,

$$\mathcal{S}_1 = P \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \sigma_3\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y) & \sigma_1\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + i\sigma_2\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) \\ \sigma_1\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) - i\sigma_2\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) & \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) - \sigma_3\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y) \end{pmatrix} P^{-1}. \quad (7.606)$$

ここで,

$$P\sigma_1P^{-1} = \sigma_3, \quad P\sigma_2P^{-1} = \sigma_1, \quad P\sigma_3P^{-1} = \sigma_2 \quad (7.607)$$

を用いると,

$$\mathcal{S}_1^2 = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(2x)\operatorname{ch}(2y) + \sigma_2\operatorname{sh}(2x)\operatorname{sh}(2y) & \sigma_3\operatorname{sh}(2x)\operatorname{ch}(2y) + i\sigma_1\operatorname{ch}(2x)\operatorname{sh}(2y) \\ \sigma_3\operatorname{sh}(2x)\operatorname{ch}(2y) - i\sigma_1\operatorname{ch}(2x)\operatorname{sh}(2y) & \operatorname{ch}(2x)\operatorname{ch}(2y) - \sigma_2\operatorname{sh}(2x)\operatorname{sh}(2y) \end{pmatrix}, \quad (7.608)$$

$$\mathcal{S}_2^2 = \mathcal{S}_1^2(y \rightarrow -y), \quad (7.609)$$

$$\mathcal{S}_3^2 = \Gamma(2x)I_9 \oplus \Gamma(-2x)I_6 \oplus \Gamma(-6x). \quad (7.610)$$

ここで,

$$\Gamma(x) := \begin{pmatrix} \cosh(x) & \sinh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) \end{pmatrix}. \quad (7.611)$$

よって,

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{M}_3, \quad (7.612)$$

$$\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} \text{ch}(2y)(\text{ch}(2x) + \sigma_3 \text{sh}(2x)) & \text{sh}(2y)(i\sigma_2 \text{sh}(2x) - \sigma_1 \text{ch}(2x)) \\ \text{sh}(2y)(-i\sigma_2 \text{sh}(2x) - \sigma_1 \text{ch}(2x)) & \text{ch}(2y)(\text{ch}(2x) - \sigma_3 \text{sh}(2x)) \end{pmatrix}, \quad (7.613)$$

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1(y \rightarrow -y), \quad (7.614)$$

$$\mathcal{M}_3 = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{-2x} \end{pmatrix} I_9 \oplus \begin{pmatrix} e^{-2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} I_6 \oplus \begin{pmatrix} e^{-6x} & 0 \\ 0 & e^{6x} \end{pmatrix}. \quad (7.615)$$

以上より, 運動項は

$$\frac{1}{12}(\partial\phi^\dagger) \cdot (\partial\phi) = 3(\partial x)^2 + (\partial y)^2. \quad (7.616)$$

モジュライポテンシャルは

$$X = e^{-2x}, \quad Y = e^{2y} \quad (7.617)$$

を用いて,

$$V = \frac{g^2}{64s^2 X^3 Y} \left[(s^4 + X^6)(1 + Y)^2 + 3X^2 \{ 2(1 - Y)^2(s^4 + X^2) - (1 + s^4 X^2)(1 - 6Y + Y^2) \} \right] \quad (7.618)$$

臨界点 ポテンシャルの微係数は

$$\partial_X V = \frac{3g^2}{64s^2} (1 + X^2)^2 (X^2 - s^4) \left(Y + \frac{1}{Y} - G(X^2) \right), \quad (7.619a)$$

$$\partial_Y V = \frac{g^2}{64X^3 Y^2} (Y^2 - 1) F(X^2), \quad (7.619b)$$

$$(7.619c)$$

ここで,

$$F(t) = t^3 + 3(2 - s^4)t^2 + 3(2s^4 - 1)t + s^4, \quad (7.620a)$$

$$G(t) = -2 \frac{t^2 + 3(s^4 - 1)t - s^4}{(t + 1)(t - s^4)}. \quad (7.620b)$$

まず, $s^2 = 1$ のとき,

$$\partial_X V = \frac{3(Y+1)^2(1+X^2)^2(X^2-1)}{64X^4Y}, \quad (7.621a)$$

$$\partial_Y V = \frac{(Y^2-1)(X^2+1)^3}{64X^3Y^2}. \quad (7.621b)$$

よって, 本来の極点 $(X, Y) = (1, 1)$ のみ.

次に, $s^2 \neq 1$ のとき,

$$\partial_X V|_{X=s^2} = \frac{3(s^4-1)(s^4+1)^2(Y+1)^2}{64s^8Y} \neq 0 \quad (7.622)$$

より,

$$\partial_X V = 0 \Leftrightarrow Y + \frac{1}{Y} = G(X^2). \quad (7.623)$$

これが解をもつ必要十分条件は,

$$G(X^2) \geq 2 \Leftrightarrow 1 \leq X < s^2, \quad \text{or} \quad s^2 < X \leq 1. \quad (7.624)$$

この条件が満たされるとき, $\partial_Y V = 0$ が $0 < Y \neq 1$ となる解をもつ条件は,

$$s < (\sqrt{2}-1)^{1/2}, \quad \text{or} \quad s > (\sqrt{2}+1)^{1/2}. \quad (7.625)$$

このとき,

$$F(1)F(s^2) < 0 \quad (7.626)$$

より, $X = Y = 1$ 以外の V の極点は 2 個で, 次の条件を満たす X_*, Y_* を用いて (X_*, Y_*) および $(X_*, 1/Y_*)$ と表される:

$$F(X_*^2) = 0, \quad Y_* + \frac{1}{Y_*} = G(X_*^2). \quad (7.627)$$

η 行列 以下, $s > \sqrt{1+\sqrt{2}}$ を仮定する. $s < \sqrt{1+\sqrt{2}}$ の場合の結果は, 変換 $s \rightarrow 1/s, X \rightarrow 1/X$ により得られる.

臨界点 (X_*, Y_*) の s 依存性は, s を X_* の関数と見なすと容易に調べられる:

$$s^4 = \frac{X_*^2(X_*^4 + 6X_*^2 - 3)}{3X_*^4 - 6X_*^2 - 1} = \frac{X_*^2(X_*^2 + 3 + 2\sqrt{3})(X_*^2 + 3 - 2\sqrt{3})}{(3X_*^2 + 2\sqrt{3} - 3)(X_*^2 - 1 - 2\sqrt{3}/3)} \quad (7.628a)$$

$$Y_* = \frac{(2\sqrt{2} + 3)(X_*^2 - (\sqrt{2} - 1)^2)}{(1 + \sqrt{2})^2 - X_*^2}, \quad (7.628b)$$

$$V_* = \frac{3(X_*^2 - 1)(X_*^2 + 1)^3}{8s^2 X_* (3X_*^4 - 6X_*^2 - 1)}. \quad (7.628c)$$

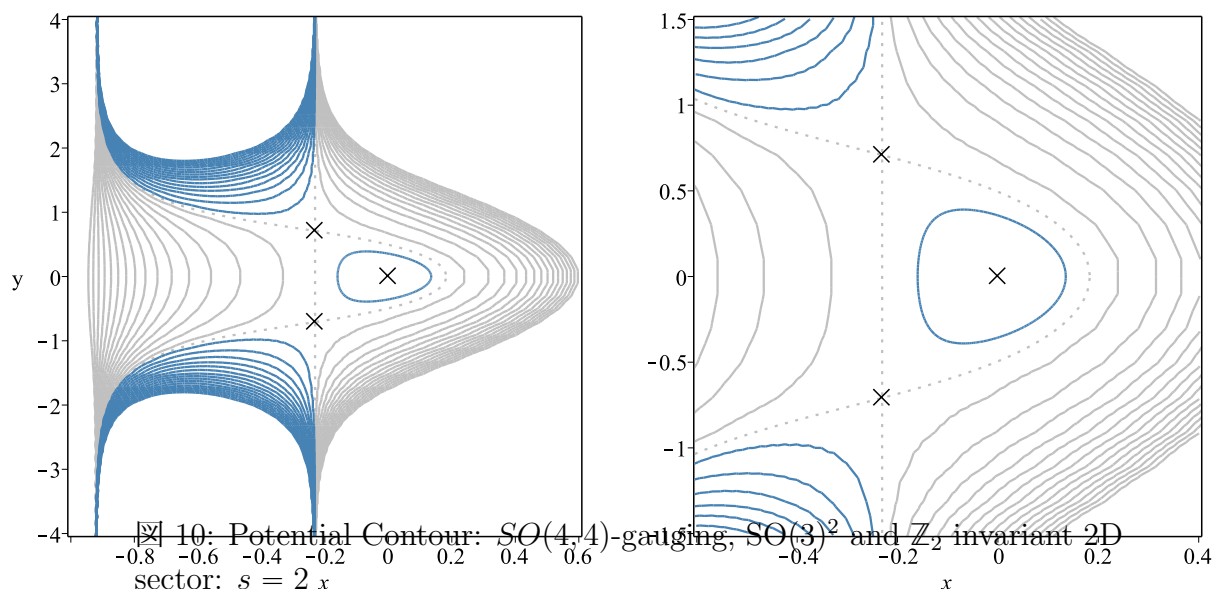


図 10: Potential Contour: $SO(4,4)$ -gaugeing, $SO(3)^2$ and Z_2 invariant 2D sector: $s = 2x$

これより,

$$\left(1 + 2\sqrt{3}/3\right)^{1/2} < X_* < 1 + \sqrt{2}. \quad (7.629)$$

この左の端点は, $s \rightarrow \infty$ に対応する. この極限で

$$s \rightarrow \infty : (x_*, y_*) \rightarrow (-0.1919129382 \dots, 0.5731079175 \dots). \quad (7.630)$$

x, y の運動項を正規化する行列を

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (7.631)$$

として, η 行列を

$$\eta = T^{-1} \begin{pmatrix} \partial_x^2 V/V & \partial_x \partial_y V/V \\ \partial_y \partial_x V/V & \partial_y^2 V/V \end{pmatrix} T^{-1} \quad (7.632)$$

により定義すると, その極点における値は

$$\eta_* = \begin{pmatrix} \frac{2(3X_*^4 - 2X_*^2 + 3)}{3(X_*^4 - 6X_*^2 + 1)} & 2\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 2\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.633)$$

固有値は,

$$\eta_*^\pm = \frac{-3X_*^4 + 2X_*^2 - 3 \pm \sqrt{K(X_*)}}{3(X_*^4 - 6X_*^2 + 1)}, \quad (7.634)$$

$$K(X) = 33X_*^8 - 300X_*^6 + 934X_*^4 - 300X_*^2 + 33. \quad (7.635)$$

$X_* \rightarrow 1 + \sqrt{2}$ ($s \rightarrow \sqrt{\sqrt{2} + 1}$) での振る舞いは,

$$\eta_*^- = 2(2 - \sqrt{2})dX + O(dX^2), \quad (7.636a)$$

$$\eta_*^+ = -\frac{4 + 2\sqrt{2}}{dX} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{3} + O(dX). \quad (7.636b)$$

ここで

$$dX = X_* - (1 + \sqrt{2}) < 0. \quad (7.637)$$

η_*^+ は常に正, η_*^- は常に負である. $s \rightarrow \infty$ の極限では,

$$(X_*, Y_*) \rightarrow \left(\sqrt{1 + 2/\sqrt{3}}, \sqrt{2} + \sqrt{3} \right), \quad (7.638a)$$

$$(x_*, y_*) \rightarrow (-0.1919129382 \dots, 0.5731079175 \dots), \quad (7.638b)$$

$$(\eta_*^-, \eta_*^+) \rightarrow (-2/\sqrt{3}, 4/\sqrt{3}). \quad (7.638c)$$

7.2.13.4 SO(3) × SO(3) 不変方向：一般

不変方向 Lie 基底の行列表示 SO(3) × SO(3) 不変方向に対応する無限小変換 $E_i (i = 1, \dots, 6)$ は, $\mathbb{R}^8 \wedge \mathbb{R}^8 \cong \mathbb{R}^{28}$ の変換としては

$$E_1 = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} e_{ij} \circ e_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{5 \leq i < j \leq 8} e_{ij} \circ e_{ij}, \quad (7.639a)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j, k \leq 3} \epsilon^{ijk} \{e_{ij} \circ e_{k4} + e_{k4} \circ e_{ij}\} + \frac{1}{2} \sum_{5 \leq i, j, k \leq 7} \epsilon^{ijk} \{e_{ij} \circ e_{k8} + e_{k8} \circ e_{ij}\}, \quad (7.639b)$$

$$E_3 + E_4 = 1 \wedge 1 - \sum_{i \neq 4, 8} e_{i4} \circ e_{i4} - 2e_{48} \circ e_{48} - \sum_{i \neq 4, 8} e_{i8} \circ e_{i8}, \quad (7.639c)$$

$$E_3 - E_4 = E_1 - \sum_{i \neq 4, 8} e_{i4} \circ e_{i4} + \sum_{i \neq 4, 8} e_{i8} \circ e_{i8}, \quad (7.639d)$$

$$E_5 = \frac{1}{4} \sum_{i \neq 4, 8} (e_{4i} \circ e_{8i} + e_{8i} \circ e_{4i}), \quad (7.639e)$$

$$E_6 = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j, k \leq 3} \epsilon^{ijk} \{e_{ij} \circ e_{k8} + e_{k8} \circ e_{ij}\} + \frac{1}{2} \sum_{5 \leq i, j, k \leq 7} \epsilon^{ijk} \{e_{ij} \circ e_{4k} + e_{4k} \circ e_{ij}\}. \quad (7.639f)$$

ここで,

$$e_{ij} := e_i \wedge e_j = e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i. \quad (7.640)$$

行列表示するため, $\mathbb{R}^8 \wedge \mathbb{R}^8 \cong \mathbb{R}^{28}$ を次のように直和分解する：

$$\mathcal{L} := \mathbb{R}^8 \wedge \mathbb{R}^8 = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_3; \quad (7.641)$$

$$\mathcal{L}_1 = \bigoplus_{i=1,2,3} \mathcal{L}_1^i \cong \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3; \quad (7.642)$$

$$\mathcal{L}_1^i = \Lambda_{ij} \oplus \Lambda_{k4} \oplus \Lambda_{k8}, \quad ([i, j, k] \cong [1, 2, 3]), \quad (7.643)$$

$$\mathcal{L}_2 = \bigoplus_{i=5,6,7} \mathcal{L}_2^i \cong \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3; \quad (7.644)$$

$$\mathcal{L}_2^i = \Lambda_{ij} \oplus \Lambda_{k8} \oplus \Lambda_{4k}, \quad ([i, j, k] \cong [5, 6, 7]), \quad (7.645)$$

$$\mathcal{L}_3 = \Lambda_{48} \oplus V_{123} \wedge V_{567} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^9. \quad (7.646)$$

ここで,

$$\Lambda_{ij} = V_i \wedge V_j = \mathbb{R}e_{ij} \cong \mathbb{R}, \quad V_{ijk} = V_i \oplus V_j \oplus V_k \cong \mathbb{R}^3. \quad (7.647)$$

このとき, E_i は次のように行列表示される.

$$E_1 \cong \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus [0_{(10)}], \quad (7.648a)$$

$$E_2 \cong \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus [0_{(10)}], \quad (7.648b)$$

$$E_3 + E_4 \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus [-3, I_9], \quad (7.648c)$$

$$E_3 - E_4 \cong \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus \begin{pmatrix} -\sigma_3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus [0_{(10)}], \quad (7.648d)$$

$$E_5 \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_1 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sigma_1 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus [0_{(10)}], \quad (7.648e)$$

$$E_6 \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus [0_{(10)}]. \quad (7.648f)$$

\mathcal{S} 行列 無限小変換 ϕ は以上の行列表示で

$$\begin{aligned} \phi &= x^1 E_1 + iy^1 E_2 + x^2 (E_3 + E_4) + iy^2 E_6 + w^1 (E_3 - E_4) + 2w^2 E_5 \\ &= \Phi_1 \otimes I_3 \oplus \Phi_2 \otimes I_3 \oplus [-3x_2] \oplus (x_2 I_9), \end{aligned} \quad (7.649)$$

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} x^1 + x^2 + w^1 & iy^1 & iy^2 \\ iy^1 & x^1 - x^2 - w^1 & w^2 \\ iy^2 & w^2 & -x^2 + 2w^1 \end{pmatrix}, \quad (7.650)$$

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} -x^1 + x^2 - w^1 & iy^1 & iy^2 \\ iy^1 & -x^1 - x^2 + w^1 & -w^2 \\ iy^2 & -w^2 & -x^2 - 2w^1 \end{pmatrix}. \quad (7.651)$$

対角化 一般に,

$$\Phi = \begin{pmatrix} a & iy & 0 \\ iy & b & w \\ 0 & w & c \end{pmatrix}, \quad a, b, c, w, y \in \mathbb{R} \quad (7.652)$$

となる場合を考える. Φ は対称行列なので,

$$\Phi = U \Delta \bar{U}, \quad U \in U(3) \quad (7.653)$$

と対角化できる。この対角化は、次の固有値問題に帰着される：

$$\Phi u = \lambda \bar{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (7.654)$$

複素ベクトル u を

$$u = X + iY \quad (7.655)$$

と実部と虚部に分解すると、

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & b - \lambda & w \\ 0 & w & c - \lambda \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & y & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y, \quad (7.656a)$$

$$\begin{pmatrix} a + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & b + \lambda & w \\ 0 & w & c + \lambda \end{pmatrix} Y = - \begin{pmatrix} 0 & y & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X. \quad (7.656b)$$

これらの第3成分より、

$$wX_2 + (c - \lambda)X_3 = 0, \quad wY_2 + (c + \lambda)Y_3 = 0. \quad (7.657)$$

よって、適当な X_4, Y_4 を用いて、

$$X_2 = (c - \lambda)X_4, \quad X_3 = -wX_4, \quad (7.658a)$$

$$Y_2 = (c + \lambda)Y_4, \quad Y_3 = -wY_4. \quad (7.658b)$$

固有値方程式を X_1, X_4, Y_1, Y_4 で書くと、

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & (b - \lambda)(c - \lambda) - w^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y(c + \lambda) \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_4 \end{pmatrix} \quad (7.659a)$$

$$\begin{pmatrix} a + \lambda & 0 \\ 0 & (b + \lambda)(c + \lambda) - w^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & y(c - \lambda) \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_4 \end{pmatrix} \quad (7.659b)$$

$\lambda = \pm c$ の場合、(一般的には) 解が無いことが容易に確かめられる。そこで、第1式を Y について解き、

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(b - \lambda)(c - \lambda) - w^2}{y} \\ \frac{a - \lambda}{y(c + \lambda)} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_4 \end{pmatrix} \quad (7.660)$$

これを第2式に代入すると、

$$P(\lambda)X_1 = 0, \quad P(-\lambda)X_4 = 0 \quad (7.661)$$

を得る。ここで,

$$P(\lambda) := \lambda^3 + (b+c-a)\lambda^2 - \{y^2 + a(b+c) + w^2 - bc\}\lambda + a(w^2 - bc) - cy^2. \quad (7.662)$$

固有値 λ は $\Phi^\dagger\Phi$ の固有値 (正) のルートになっている。実際,

$$\det(\Phi^\dagger\Phi - \lambda^2) \propto P(\lambda)P(-\lambda). \quad (7.663)$$

また, その符号の選択は最終的に \mathcal{M} 行列に影響しない。これより, モジユライの一般点では $P(\lambda) = 0$ の 3 個の解を採用することができる:

$$\Delta = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3], \quad P(\lambda_j) = 0 \quad (j = 1, 2, 3). \quad (7.664)$$

このとき, ユニタリ行列 U は

$$U = \begin{pmatrix} C_1 \bar{u}_1 & C_2 \bar{u}_2 & C_3 \bar{u}_3 \end{pmatrix}, \quad (7.665)$$

$$\bar{u}_j = \begin{pmatrix} y(c + \lambda_j) \\ -i(a - \lambda_j)(c + \lambda_j) \\ iw(a - \lambda_j) \end{pmatrix}, \quad (7.666)$$

$$C_j^{-2} = \{(c + \lambda_j)^2 + w^2\} \{(a - \lambda_j)^2 + y^2\} - y^2 w^2. \quad (7.667)$$

u_j が互いに直交すること, すなわち $u_j^\dagger u_k = 0$ ($j \neq k$) は, $P(\lambda) = 0$ より確かめられる。

これに 2-3 成分間での回転変換を施すと,

$$\begin{pmatrix} a & iy_1 & iy_2 \\ iy_1 & b & w \\ iy_2 & w & c \end{pmatrix} = U' \Delta \mathcal{U}', \quad (7.668a)$$

$$U' = (C'_1 u'_1 \quad C'_2 u'_2 \quad C'_3 u'_3), \quad (7.668b)$$

$$u'_j = \begin{pmatrix} (c + \lambda_j)y_1^2 + (b + \lambda_j)y_2^2 - 2wy_1y_2 \\ i(a - \lambda_j)\{-(\lambda_j + c)y_1 + wy_2\} \\ i(a - \lambda_j)\{-(\lambda_j + b)y_2 + wy_1\} \end{pmatrix}, \quad (7.668c)$$

$$C_j'^{-2} = (\lambda_j y^2 + cy_1^2 + by_2^2 - 2wy_1y_2)^2 + (a - \lambda_j)^2 \{(\lambda_j + c)^2 + w^2\} y_1^2 + \{(\lambda_j + b)^2 + w^2\} y_2^2 - 2(2\lambda_j + b + c)wy_1y_2. \quad (7.668d)$$

ここで, $y^2 = y_1^2 + y_2^2$. また, $b + c, w^2 - bc$ は回転で不変なので, $P(\lambda)$ の表式次の様になる:

$$P(\lambda) := \lambda^3 + (b+c-a)\lambda^2 - \{y_1^2 + y_2^2 + a(b+c) + w^2 - bc\}\lambda + a(w^2 - bc) - cy_1^2 - by_2^2 + 2wy_1y_2. \quad (7.669)$$

この対角化を Φ_1 と Φ_2 に適用すると, Φ_1 に対する固有値方程式は

$$\lambda = x_2 + \mu; \quad (7.670)$$

$$P_1(\mu + x_2) = Q(\mu) := \mu^3 - (x_1^2 + y^2 + 3w_1^2 + w_2^2)\mu + 2w_1^3 + w_1(-2x_1^2 - 2y_1^2 + y_2^2 + w_2^2) + x_1(w_2^2 - y_2^2) + 2w_1w_2y_1y_2 \quad (7.671)$$

ところが, Φ_2 は Φ_1 で $x_1 \rightarrow -x_1, w_1 \rightarrow -w_1, w_2 \rightarrow -w_2$ とおくことにより得られるので, Φ_2 に対する固有値方程式は

$$\lambda = x_2 - \mu; \quad (7.672)$$

$$P_2(-\mu + x_2) = -Q(\mu) = (-\mu)^3 - (x_1^2 + y^2 + 3w_1^2 + w_2^2)(-\mu) - 2w_1^3 - w_1(-2x_1^2 - 2y_1^2 + y_2^2 + w_2^2) - x_1(w_2^2 - y_2^2) - 2w_1w_2y_1y_2 \quad (7.673)$$

となる. すなわち, いずれの固有値も, $Q(\mu) = 0$ の根のみで表される. また, U 行列の規格化因子 C_j も

$$C^{-2} = \left\{ \mu y^2 + (x_1 - w_1)y_2^2 + 2w_1y_1^2 - 2w_2y_1y_2 \right\}^2 + (x_1 + w_1 - \mu)^2 \left[(\mu + 2w_1)^2 y_1^2 + (\mu + x_1 - w_1)^2 y_2^2 - 2(2\mu + x_1 + w_1)w_2y_1y_2 + w_2^2 y^2 \right] \quad (7.674)$$

とあわされるので, 変換 $x_1 \rightarrow -x_1, w_1 \rightarrow -w_1, w_2 \rightarrow -w_2, \mu \rightarrow -\mu$ で不変となる. したがって, Φ_1 と Φ_2 で U 行列の規格化因子は一致する.

Euler 角表示 行列 Φ_1 は

$$\Phi_1 = x_2 I_{1,2} + U \mu \bar{U}, \quad (7.675a)$$

$$U = U_1 + iU_2, \quad U_1, U_2 \in M(3, \mathbb{R}) \quad (7.675b)$$

と表される. ここで, μ は対角型固有値行列 $[\mu_1, \mu_2, \mu_3]$ である.

$$\bar{U}_1 U_2 = U_1 \bar{U}_2 = 0, \quad U \in U(3) \quad (7.676)$$

より,

$$O := U_1 + U_2 = (v_1 \quad v_2 \quad v_3); \quad (7.677a)$$

$$O_{1j} = \frac{1}{N_j} \left[(2w_1 + \mu_j)y_1^2 + (x_1 - w_1 + \mu_j)y_2^2 - 2w_2y_1y_2 \right] \quad (7.677b)$$

$$O_{2j} = \frac{1}{N_j} \left[(x_1 + w_1 - \mu_j) \{ -(\mu_j + 2w_1)y_1 + w_2y_2 \} \right], \quad (7.677c)$$

$$O_{3j} = \frac{1}{N_j} \left[(x_1 + w_1 - \mu_j) \{ -(\mu_j + x_1 - w_1)y_2 + w_2y_1 \} \right] \quad (7.677d)$$

とおくと, U の任意性 $U \rightarrow U[\pm 1, \pm 1, \pm 1]$ を用いて,

$$O \in \text{SO}(3) \quad (7.678)$$

とできる. したがって, Euler 角 α, β, γ を用いて,

$$\begin{aligned} O &= R_1(\beta)R_3(\alpha)R_1(\gamma) \\ &= \begin{pmatrix} c(\alpha) & -s(\alpha)c(\gamma) & s(\alpha)s(\gamma) \\ s(\alpha)c(\beta) & c(\alpha)c(\beta)c(\gamma) - s(\beta)s(\gamma) & -c(\alpha)c(\beta)s(\gamma) - s(\beta)c(\gamma) \\ s(\alpha)s(\beta) & c(\alpha)s(\beta)c(\gamma) + c(\beta)s(\gamma) & -c(\alpha)s(\beta)s(\gamma) + c(\beta)c(\gamma) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.679)$$

と表される. ここで, $c = \cos, s = \sin$.

ただし, $\det O$ を $x_1, y_1, y_2, w_1, w_2, \mu_j$ および N_j で表すと

$$\det O = \frac{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 - \mu_3)(\mu_3 - \mu_1)}{N_1 N_2 N_3} R_1 R_2, \quad (7.680)$$

$$R_1 = (x_1 + 3w_1)y_1^2 + 2x_1y_2^2 - 2w_2y_1y_2; \quad (7.681)$$

$$R_2 = w_2(y_1^2 - y_2^2) + (3w_1 - x_1)y_1y_2 \quad (7.682)$$

より,

$$R_1 = 0 \quad \text{or} \quad R_2 = 0 \quad (7.683)$$

のとき, NC_j に 1 つ以上がゼロとなる. これらの超曲面上での Euler 角を決めるには, 少しずれた点での値の極限を取る必要がある. また,

$$27 \{(w_1 + x_1)(2w_1^2 - 2w_1x_1 + w_2^2 + y_1^2 + y_2^2) - R_1\}^2 = 4(x_1^2 + y_1^2 + y_2^2 + 3w_1^2 + w_2^2)^3 \quad (7.684)$$

のとき, $Q(\mu)$ が重解をもち, $NC_j \neq 0$ でも列ベクトルが一次従属となるため, O は正則でなくなる. このような点では, 実は N_j もゼロとなる. 実際, この重解条件は, 変数の同時式なので,

$$x_1^2 + y_1^2 + y_2^2 + 3w_1^2 + w_2^2 = 1 \quad (7.685)$$

と規格化すると,

$$h^2 = \frac{4}{27}; \quad (7.686)$$

$$h := 2p(-p^2 + r^2) - 2w_1y_1^2 + (w_1 - x_1)y_2^2 + w_2y_1y_2, \quad (7.687)$$

$$p := \frac{x_1 + w_1}{2}, \quad q = \frac{3w_1 - x_1}{2}, \quad \gamma = (q^2 + w_2^2)^{1/2}. \quad (7.688)$$

y_1, y_2 を動かしたときの h の変動範囲は

$$|h - 2p(-p^2 + r^2)| \leq (-\alpha \pm \gamma)(1 - 3\alpha^2 - \gamma^2) \quad (7.689)$$

すなわち,

$$(p+r)\{(p+r)^2-1\} \leq h \leq (p-r)\{(p-r)^2-1\}; \quad 3p^2+r^2 \leq 1 \quad (7.690)$$

これより, h の最大値と最小値は $\pm 2/(3\sqrt{3})$ で,

$$h = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow (p, r) = \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right). \quad (7.691)$$

元の変数で表すと

$$x_1 = \pm \frac{1}{4} \left(\sqrt{3} - \epsilon \sqrt{3 - 4w_2^2} \right), \quad (7.692a)$$

$$w_1 = \pm \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \epsilon \sqrt{3 - 4w_2^2} \right), \quad (7.692b)$$

$$y_1 = y_2 = 0 \quad (7.692c)$$

(複合同順). ここで, $\epsilon = \pm 1$. 明らかに, これらの点で $R_1 = R_2 = 0$ となる.

座標変換則 もとの Gauss 座標系 $(x_1, y_1, y_2, w_1, w_2)$ と極座標 (μ, θ) の関係は次式で与えられる:

$$x_1 = \left\{ -\frac{1}{2}c_1^2(1+c_2^2)(1+c_3^2) - \frac{1}{2} + c_3^2 + \frac{1}{2}c_2^2(1+s_3^2) + c_1s_2c_2s_3c_3 \right\} \mu_2 \\ + \left\{ -\frac{1}{2}c_1^2(1+c_2^2)(1+s_3^2) - \frac{1}{2} + s_3^2 + \frac{1}{2}c_2^2(1+c_3^2) - c_1s_2c_2s_3c_3 \right\} \mu_3, \quad (7.693a)$$

$$y_1 = s_1 \left[\{-c_1c_2(1+c_3^2) + s_2s_3c_3\} \mu_2 + \{-c_1c_2(1+s_3^2) - s_2s_3c_3\} \mu_3 \right], \quad (7.693b)$$

$$y_2 = s_1 \left[-\{c_1s_2(1+c_3^2) + c_2s_3c_3\} \mu_2 - \{c_1s_2(1+s_3^2) - c_2s_3c_3\} \mu_3 \right], \quad (7.693c)$$

$$w_1 = \left\{ -\frac{1}{2}c_1^2s_2^2(c_3^2+1) + \frac{1}{2} - c_2^2 + \frac{1}{2}c_2^2c_3^2 - s_2s_3c_1c_2c_3 \right\} \mu_2 \\ + \left\{ -\frac{1}{2}c_1^2s_2^2(s_3^2+1) + \frac{1}{2} - c_2^2 + \frac{1}{2}c_2^2s_3^2 + s_2s_3c_1c_2c_3 \right\} \mu_3, \quad (7.693d)$$

$$w_2 = \left\{ s_2c_2(-c_1^2(c_3^2+1) + s_3^2 - 1) - c_1s_3c_3(2c_2^2 - 1) \right\} \mu_2 \\ + \left\{ s_2c_2(-c_1^2(s_3^2+1) + c_3^2 + 1) + c_1c_3s_3(2c_2^2 - 1) \right\} \mu_3. \quad (7.693e)$$

ここで

$$c_1 = \cos(\alpha), \quad s_1 = \sin(\alpha), \quad (7.694a)$$

$$c_2 = \cos(\beta), \quad s_2 = \sin(\beta), \quad (7.694b)$$

$$c_3 = \cos(\gamma), \quad s_3 = \sin(\gamma). \quad (7.694c)$$

上記の (7.693) は, つぎの 6 つの変換で不変となる.

$$T_1 : \gamma \rightarrow \gamma + \pi, \quad (7.695a)$$

$$T_2 : \alpha \rightarrow \alpha + \pi, \quad \gamma \rightarrow -\gamma, \quad (7.695b)$$

$$T_3 : \alpha \rightarrow -\alpha, \quad \beta \rightarrow \beta + \pi, \quad (7.695c)$$

$$T_4 : (\mu_2, \mu_3) \rightarrow (\mu_3, \mu_2), \quad \gamma \rightarrow \gamma + \frac{\pi}{2} \quad (7.696a)$$

$$\begin{aligned} T_5 : \mu_2 &\rightarrow -(\mu_2 + \mu_3), \\ (s_1, c_1) &\rightarrow (\pm\sqrt{1 - s_1^2 c_3^2}, -s_1 c_3), \\ (s_2, c_2) &\rightarrow N_1(c_1 s_2 c_3 + s_2 s_3, c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3), \\ (s_3, c_3) &\rightarrow N_2(s_1 s_3, c_1), \end{aligned} \quad (7.696b)$$

$$\begin{aligned} T_6 : \mu_3 &\rightarrow -(\mu_2 + \mu_3), \\ (s_1, c_1) &\rightarrow (\pm\sqrt{1 - s_1^2 s_3^2}, s_1 s_3), \\ (s_2, c_2) &\rightarrow N_1(-c_1 s_2 s_3 + c_2 c_3, -(c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3)), \\ (s_3, c_3) &\rightarrow N_2(-c_1, s_1 c_3) \end{aligned} \quad (7.696c)$$

これらのうち, T_1, T_2, T_3 により, Euler 角の範囲を

$$0 \leq \alpha < \pi, \quad 0 \leq \beta < \pi, \quad 0 \leq \gamma < \pi \quad (7.697)$$

に制限して良い. さらに, T_4, T_5, T_6 より, μ_2, μ_3 の範囲を

$$(\mu_2, \mu_3) = p(1, 1) + q(2, -1) = (p + 2q, p - q), \quad p, q \geq 0 \quad (7.698)$$

としてよい. さらに, T_3, T_4, T_5 により $\mu_1 = \mu_2, \mu_2 = \mu_3, \mu_1 = \mu_3$ は互いに移り変わるのので, これらは一本の軸 (3次元面) に対応し, (μ_2, μ_3) 面では, 上記の領域の境界線で表される.

いま,

$$\mu_2 = z + r, \quad \mu_3 = z - r \quad (7.699)$$

とおくと,

$$p = z - \frac{r}{3}, \quad q = \frac{2}{3}r \quad (7.700)$$

となるので, 領域条件は

$$r \geq 0, \quad z \geq \frac{r}{3} \quad (7.701)$$

となる. さらに,

$$u = r \cos(2\theta_3), \quad v = r \sin(2\theta_3) \quad (7.702)$$

により, 座標系 $\mathbf{x}_3 = (u, v, z, \theta_1, \theta_2)$ を導入すると, $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, y_2, w_1, w_2)$ との間に次の関係が成り立つ:

$$w_1 + x_1 = s_1^2 u + (1 - 3c_1^2)z, \quad (7.703a)$$

$$w_1 - x_1 = \{-2c_1 c_2 s_2 v + (c_1^2 c_2^2 - s_2^2)u\} + (1 - 3s_1^2 c_2^2)z, \quad (7.703b)$$

$$w_2 = c_1(1 - 2c_2^2)v - (1 + c_1^2)c_2 s_2 u + 3s_1^2 c_2 s_2 z, \quad (7.703c)$$

$$y_1 = s_1(s_2 v - c_1 c_2(u + 3z)), \quad (7.703d)$$

$$y_2 = s_1(-c_2 v - c_1 s_2(u + 3z)). \quad (7.703e)$$

この変換の Jacobi 行列式は

$$\left| \frac{D\mathbf{x}_1}{D\mathbf{x}_3} \right| = \sin(\alpha)(9z^2 - r^2). \quad (7.704)$$

Lagrangian の運動項 以上より,

$$\phi = \Phi_+ \otimes I_3 \oplus \Phi_- \otimes I_3 \oplus [-3x_2] \oplus (x_2 I_9), \quad (7.705)$$

$$\Phi_{\pm} = U(x_2 I_3 \pm \mu) {}^T U. \quad (7.706)$$

ゲージ場がゼロの時, これをモジュライの対する運動項の一般式

$$\begin{aligned} -\kappa^2 \mathcal{L}_s &= \frac{1}{12} \text{Tr}(\partial\Lambda)^2 - \sum_{\sigma=\pm} \text{Tr}(\cosh^2(\Lambda_\sigma)\Theta \sinh^2(\Lambda_\sigma)\Theta) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{\sigma=\pm} \text{Tr}(\sinh(2\Lambda_\sigma)\Theta \sinh(2\Lambda_\sigma)\Theta), \end{aligned} \quad (7.707)$$

$$\Theta = {}^T O dO \quad (7.708)$$

に代入すると次式を得る：

$$\begin{aligned}
-\kappa^2 \mathcal{L}_s &= 3dx_2^2 + \frac{1}{2} \sum_i d\mu_i^2 \\
&\quad + \sinh^2(\mu_2 - \mu_3)(d\gamma + \cos \alpha d\beta)^2 + \sinh^2(\mu_1 - \mu_2)(d\alpha^2 + \sin^2 \alpha d\beta^2) \\
&\quad + \{\sinh^2(\mu_1 - \mu_3) - \sinh^2(\mu_1 - \mu_2)\} (\sin \gamma d\alpha - \sin \alpha \cos \gamma d\beta)^2 \\
&= 3dx_2^2 + \frac{1}{2} \sum_i d\mu_i^2 \\
&\quad + \sinh^2(\mu_2 - \mu_3)\chi_1^2 + \sinh^2(\mu_1 - \mu_3)\chi_2^2 + \sinh^2(\mu_1 - \mu_2)\chi_3^2. \quad (7.709)
\end{aligned}$$

ここで、 χ_i は S^3 の不変基底：

$$\chi_1 = d\gamma + \cos \alpha d\beta, \quad \chi_2 = -\sin \gamma d\alpha + \cos \gamma \sin \alpha d\beta, \quad \chi_3 = \cos \gamma d\alpha + \sin \gamma \sin \alpha d\beta. \quad (7.710)$$

次に、ゲージ場がゼロでない場合を考える。一般のゲージ場が存在すると、今考えている6次元セクター $\mathcal{H} = \langle E_1, \dots, E_6 \rangle$ ではダイナミクスが閉じなくなる。そこで、まず、ダイナミクスが \mathcal{H} で閉じる条件を求める。一般に、 $E_{7(7)}$ の変換

$$e^\Lambda \in E_{7(7)} \Rightarrow \tilde{\Lambda} = \mathcal{T}_0 \Lambda \mathcal{T}_0^\dagger \in \rho_{\text{Usp}}(E_{7(7)}) \quad (7.711)$$

に対して、

$$\mathcal{V} = \mathcal{T}_0^\dagger \mathcal{S} \mapsto e^\Lambda \mathcal{T}_0^\dagger \mathcal{S} = \mathcal{T}_0^\dagger e^{\tilde{\Lambda}} \mathcal{S} = \mathcal{T}_0^\dagger \mathcal{S}' \mathcal{U}. \quad (7.712)$$

ここで、 $\mathcal{U} \in \text{SU}(8)$, $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in H(64) \cap \text{Usp}(56)$ 。いま、

$$\mathcal{S} = e^X = 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \dots; \quad X \in \mathcal{L}(H(64) \cap \text{Usp}(56)) \quad (7.713)$$

とおくと、

$$(e^{\tilde{\Lambda}} \mathcal{S})_+ = 1 + X + \tilde{\Lambda}_+ + \frac{1}{2}[\tilde{\Lambda}_-, X] + \frac{1}{2}(X + \tilde{\Lambda}_+)^2 + \dots \quad (7.714)$$

より、 X の無限小変換は

$$\delta X = \tilde{\Lambda}_+ + \frac{1}{2}[\tilde{\Lambda}_-, X]; \quad (7.715)$$

$$\tilde{\Lambda}_\pm = \frac{1}{2}(\tilde{\Lambda} \pm \tilde{\Lambda}^\dagger). \quad (7.716)$$

特に, $e^\Lambda \in \text{SL}(8)$ のとき,

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda} &= \begin{pmatrix} A \wedge 1 & S \wedge 1 \\ S \wedge 1 & A \wedge 1 \end{pmatrix} \in M(56); \quad A = -{}^T A, \quad S = {}^T S \in M(8, \mathbb{R}), \\ \tilde{\Lambda}_+ &= \begin{pmatrix} 0 & S \wedge 1 \\ S \wedge 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Lambda}_- = \begin{pmatrix} A \wedge 1 & 0 \\ 0 & A \wedge 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (7.717)$$

また,

$$\Lambda \in \mathfrak{so}(4, 4) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^T B & 0 \end{pmatrix}.\quad (7.718)$$

まず, $X = 0$ の場合の変換より, e^Λ が \mathcal{H} を不変にするためには, $\tilde{\Lambda}_+ \in \mathcal{H}$ が必要. したがって, $\tilde{\Lambda}_+ \propto E_5$. 次に, \mathcal{H} はモジュライ空間の原点での接ベクトルの中で, $\text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$ 不変なものを尽くしており, $\tilde{\Lambda}_-$ の属する $\text{SO}(4) \times \text{SO}(4)$ の真部分群で $\text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$ より大きいものは存在しない. したがって, $\tilde{\Lambda}_-$ の全体は $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$ と一致する. よって, \mathcal{H} への truncation で残るのは, 2つの $\text{SO}(3)$ ゲージ場と E_5 に対応するゲージ場 $A^{[4,8]}$ のみ. これらのうち, $\text{SO}(3)$ ゲージ場は $\text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$ 不変セクター \mathcal{H} とは直接結合しない.

また, E_5 が \mathcal{H} を不変にすることは次のようにして確かめられる. まず, $e^{uE_5} \mathcal{I}_0^\dagger \mathcal{I} = \mathcal{I}_0^\dagger e^{u\tilde{E}_5} \mathcal{I}$ において,

$$e^{u\tilde{E}_5} \mathcal{I} = \mathcal{I}' \mathcal{U} : \quad \mathcal{U} \in \text{SU}(8), \quad \mathcal{I}' \in H(56) \cap \text{Usp}(56).\quad (7.719)$$

この式の左辺は, $\mathcal{I} \in e^\mathcal{H}$ のとき $\text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$ 不変なので, $h \in \text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$ に対し,

$$\mathcal{I}' \mathcal{U} = (h \mathcal{I}' h^{-1})(h \mathcal{U} h^{-1})\quad (7.720)$$

よって, 岩沢分解の一意性より,

$$h \mathcal{I}' h^{-1} = \mathcal{I}', \quad h \mathcal{U} h^{-1} = \mathcal{U}\quad (7.721)$$

を得る. 第1式は, \mathcal{I}' がモジュライ空間の $\text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$ 不動点であることを意味するが, $e^\mathcal{H}$ は $\text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$ 不動点の全体なので, $\mathcal{I}' \in e^\mathcal{H}$ が得られる.

ゲージ場 $A^{[48]}$ とモジュライ場の結合に対する具体的な表式は,

$$A_a = 0, \quad A_s = A E_5\quad (7.722)$$

を (7.463) に代入することにより次のように与えられる :

$$\begin{aligned}
 -\kappa^2 \mathcal{L}_s &= 3dx_2^2 + \frac{1}{2} (d\mu_1 - gQ_{11}A)^2 + \frac{1}{2} (d\mu_2 - gQ_{22}A)^2 + \frac{1}{2} (d\mu_3 - gQ_{33}A)^2 \\
 &\quad + (\sinh(\mu_2 - \mu_3)\chi_1 - gQ_{23} \cosh(\mu_2 - \mu_3)A)^2 \\
 &\quad + (\sinh(\mu_1 - \mu_3)\chi_2 - gQ_{13} \cosh(\mu_1 - \mu_3)A)^2 \\
 &\quad + (\sinh(\mu_1 - \mu_2)\chi_3 - gQ_{12} \cosh(\mu_1 - \mu_2)A)^2.
 \end{aligned} \tag{7.723}$$

ここで, Q は 3 次対称行列

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{2} [\cosh(\lambda)({}^T O \hat{\sigma}_1 O) \cosh(\lambda) - \sinh(\lambda)({}^T O \hat{\sigma}_1 O) \sinh(\lambda)] \tag{7.724} \\
 \lambda &= [x_2 + \mu_1, x_2 + \mu_2, x_2 + \mu_3], \tag{7.725}
 \end{aligned}$$

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.726}$$

で, 具体的な成分は,

$$Q_{11} = \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \sin(2\beta), \tag{7.727a}$$

$$Q_{22} = \frac{1}{2} \{ \sin(2\beta)(-\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma \cos^2 \alpha) + \cos \alpha \sin(2\gamma) \cos(2\beta) \}, \tag{7.727b}$$

$$Q_{33} = \frac{1}{2} \{ \sin(2\beta)(-\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma \cos^2 \alpha) - \cos \alpha \sin(2\gamma) \cos(2\beta) \}, \tag{7.727c}$$

$$Q_{23} = -\frac{1}{4} \sin(2\beta) \sin(2\gamma)(1 + \cos^2 \alpha) + \frac{1}{2} \cos(2\beta) \cos(2\gamma) \cos \alpha, \tag{7.727d}$$

$$Q_{13} = \frac{1}{2} \sin \alpha (-\cos \alpha \sin(2\beta) \sin \gamma + \cos(2\beta) \cos \gamma), \tag{7.727e}$$

$$Q_{12} = \frac{1}{2} \sin \alpha (\cos \alpha \sin(2\beta) \cos \gamma + \cos(2\beta) \sin \gamma) \tag{7.727f}$$

一方, $\phi = wE_5$ に対応するゲージ変換は, (7.454) より

$$\delta\mu[i] = wQ_{ii} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{7.728a}$$

$$(\delta\gamma + \cos \alpha \delta\beta) \sinh(\mu_2 - \mu_3) = wQ_{23} \cosh(\mu_2 - \mu_3), \tag{7.728b}$$

$$(-\sin \gamma \delta\alpha + \cos \gamma \sin \alpha \delta\beta) \sinh(\mu_1 - \mu_3) = wQ_{13} \cosh(\mu_1 - \mu_3), \tag{7.728c}$$

$$(\cos \gamma \delta\alpha + \sin \gamma \sin \alpha \delta\beta) \sinh(\mu_1 - \mu_2) = wQ_{12} \cosh(\mu_1 - \mu_2). \tag{7.728d}$$

で与えられる.

ポテンシャルの表式 ポテンシャル V は, Euler 角 α, β, γ と

$$X = e^{-2x_2}, \quad Y = e^{2\mu_2}, \quad Z = e^{2\mu_3} \quad (7.729)$$

を用いて次のように表される.

$$\begin{aligned} V = & g^2 \left(\frac{X^3}{s^2} + \frac{s^2}{X^3} \right) \left[C_{321} \left(Y^2 Z + \frac{1}{Y^2 Z} \right) + C_{312} \left(Y Z^2 + \frac{1}{Y Z^2} \right) \right. \\ & \left. + C_{31-1} \left(\frac{Y}{Z} + \frac{Z}{Y} \right) + C_{300} \right] \\ & + \left(s^2 X + \frac{1}{s^2 X} \right) \left[C_{111} \left(Y Z + \frac{1}{Y Z} \right) + C_{110} \left(Y + \frac{1}{Y} \right) + C_{101} \left(Z + \frac{1}{Z} \right) + C_{100} \right] \\ & + \left(\frac{X}{s^2} + \frac{s^2}{X} \right) \left[C'_{111} \left(Y Z + \frac{1}{Y Z} \right) \right. \\ & \left. + C'_{110} \left(Y + \frac{1}{Y} \right) + C'_{101} \left(Z + \frac{1}{Z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.730)$$

ポテンシャルは次の不変性をもつ:

$$V(X \rightarrow X^{-1}, s \rightarrow s^{-1}) = V, \quad (7.731a)$$

$$V(Y \rightarrow Y^{-1}, Z \rightarrow Z^{-1}) = V, \quad (7.731b)$$

$$V(Y \leftrightarrow Z, \gamma \rightarrow \gamma - \pi/2) = V. \quad (7.731c)$$

係数 C_{ijk} は次の Euler 角の関数である ($p = \cos \alpha, q = \sin \alpha$):

$$C_{321} = \frac{1}{512} \left\{ 2q^4 \cos(4\beta) - 2q^4 \cos(2\gamma) - q^2(p-1)^2 \cos(-2\gamma + 4\beta) - q^2(p+1)^2 \cos(2\gamma + 4\beta) + 2q^2(p^2 + 1) \right\}, \quad (7.732a)$$

$$C_{312} = C_{321}(2\gamma \rightarrow 2\gamma + \pi), \quad (7.732b)$$

$$C_{31-1} = \frac{1}{2048} \left\{ -2q^4 \cos(4\beta) - 2q^4 \cos(4\gamma) + (p-1)^4 \cos(-4\gamma + 4\beta) + (p+1)^4 \cos(4\gamma + 4\beta) + 12p^2 + 2p^4 + 2 \right\} \quad (7.732c)$$

$$C_{300} = \frac{1}{1024} \left\{ -14q^4 \cos(4\beta) + 2q^4 \cos(4\gamma) - (p-1)^4 \cos(-4\gamma + 4\beta) - (p+1)^4 \cos(4\gamma + 4\beta) + 14p^4 - 12p^2 + 46 \right\}, \quad (7.732d)$$

$$C_{111} = -\frac{3p^2}{64}, \quad (7.732e)$$

$$C'_{111} = -\frac{3q^2}{32} \cos(2\beta), \quad (7.732f)$$

$$C_{110} = -\frac{3q^2}{64} \cos^2 \gamma, \quad (7.732g)$$

$$C'_{110} = \frac{1}{128} \left\{ 6q^2 \cos(2\beta) - 3(p-1)^2 \cos(2\beta - 2\gamma) - 3(p+1)^2 \cos(2\beta + 2\gamma) \right\}, \quad (7.732h)$$

$$C_{101} = -\frac{3q^2}{64} \sin^2 \gamma, \quad (7.732i)$$

$$C'_{101} = C'_{110}(2\gamma \rightarrow 2\gamma + \pi), \quad (7.732j)$$

$$C_{100} = \frac{9}{32}. \quad (7.732k)$$

原点でのチェック 原点でのポテンシャルの値は,

$$V_0 = \frac{s^4 + 1}{4s^2} g^2. \quad (7.733)$$

次に, 原点 $(X, Y, Z) = (1, 1, 1)$ で

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial Z} = 0 \quad (7.734)$$

となることと, U が変数 $(x_1, y_1, y_2, w_1, w_2)$ の 0 次の同次式あることより, 原点で $dV = 0$.

次に, 2階微分係数, すなわち質量固有値をチェックする. まず, 運動項は, 原点近傍で 2次まで取ると,

$$\kappa^2 e^{-1} \mathcal{L}_K = -(\partial x_1)^2 - (\partial y_1)^2 - 3(\partial x_2)^2 - (\partial y_2)^2 - 3(\partial w_1)^2 - (\partial w_2)^2. \quad (7.735)$$

SO(4)×SO(4) 不変セクターに対応する (E_1, E_2) 方向 $(x_1, y_1) = (r \cos(\phi), r \sin(\phi))$ では,

$$x_2 = 0, y_2 = 0, w_1 = 0, w_2 = 0 \Rightarrow \mu = 0, r, -r. \quad (7.736)$$

このセクターでは, $N_1 = 0$ となるので, $w_1 = w_2 = 0$ で $y_2 \neq 0$ ととり, y_2/r についての leading term を残すと

$$\mu_1 = -\frac{y_2^2}{r} \cos(\phi) \Rightarrow [O(j, 1)] = [0, 0, -1], \quad (7.737a)$$

$$\mu_2 = r \Rightarrow [O(j, 2)] = [\cos(\phi/2), \sin(\phi/2), 0], \quad (7.737b)$$

$$\mu_3 = -r \Rightarrow [O(j, 3)] = [-\sin(\phi/2), \cos(\phi/2), 0] \quad (7.737c)$$

よって,

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \frac{3\pi}{2}, \quad \gamma = -\frac{\phi}{2}. \quad (7.738)$$

ポテンシャルは,

$$V/V_0 = 2 - \cosh(2r) = -2r^2 + \dots \quad (7.739)$$

質量は $m^2 = -2V_0$.

次に, \mathbb{Z}_2 不変セクターに対応する $(E_3 + E_4, E_6)$ 方向 (x_2, y_2) では

$$x_1 = 0, y_1 = 0, w_1 = 0, w_2 = 0 \Rightarrow \mu = 0, y_2, -y_2. \quad (7.740)$$

やはり, $N_1 = 0$ となるので, $w_1 = x_1 = 0, w_2, y_1 \neq 0$ とおくと, $w_2/y_2, y_1/y_2$ について leading order で

$$\mu_1 = \frac{2w_2y_1}{y_2} \Rightarrow [O(j, 1)] = [0, 1, 0], \quad (7.741a)$$

$$\mu_2 = y_2 \Rightarrow [O(j, 2)] = [1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}], \quad (7.741b)$$

$$\mu_3 = -y_2 \Rightarrow [O(j, 3)] = [1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}]. \quad (7.741c)$$

よって,

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{3\pi}{4}. \quad (7.742)$$

ポテンシャルは

$$V/V_0 = \frac{g^2}{64s^2X^3Y} \left[(s^4 + X^6)(1 + Y)^2 + 3X^2 \{ 2(1 - Y)^2(s^4 + X^2) - (1 + s^4X^2)(1 - 6Y + Y^2) \} \right]. \quad (7.743)$$

ここで,

$$X = e^{2x_2}, \quad Y = e^{2y_2}, \quad Z = 1/Y. \quad (7.744)$$

これは Dall'Agata らの表式と一致し,

$$V/V_0 = 6x_2^2 + y_2^2 + \dots. \quad (7.745)$$

次に, $(E_3 - E_4)$ 方向 (w_1) に対して,

$$x_1 = 0, y_1 = 0, y_2 = 0, w_2 = 0 \Rightarrow \mu = -2w_1, w_1, w_1. \quad (7.746)$$

となり, 重解となる. $N_2 = N_3 = 0$ となるので, $x_1 = 0, w_2 = 0, y_1, y_2 \neq 0$ とおくと, $y_1/w_1, y_2/w_1$ について leading order で

$$\mu_1 = -2w_1 \Rightarrow [O(j, 1)] = [0, 0, 1], \quad (7.747a)$$

$$\mu_2 = w_1 + y_1 \Rightarrow [O(j, 2)] = [1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0], \quad (7.747b)$$

$$\mu_3 = w_1 - y_1 \Rightarrow [O(j, 3)] = [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0]. \quad (7.747c)$$

よって,

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma = \frac{5\pi}{4}. \quad (7.748)$$

ポテンシャルは

$$V/V_0 = 6w_1^2 + \dots. \quad (7.749)$$

よって, 質量は $m^2 = 2$.

最後に, (E_5) 方向 (w_2) に対して,

$$x_1 = 0, y_1 = 0, y_2 = 0, w_1 = 0 \Rightarrow \mu = 0, w_2, -w_2. \quad (7.750)$$

となり, $N_1 = 0$ となるので, $x_1 = 0, w_1 = 0, y_1, y_2 \neq 0$ とおくと, $y_1/w_2, y_2/w_2$ について leading order で

$$\mu_1 = \frac{2y_1y_2}{w_2} \Rightarrow [O(j, 1)] = [1, 0, 0], \quad (7.751a)$$

$$\mu_2 = w_2 \Rightarrow [O(j, 2)] = [0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}], \quad (7.751b)$$

$$\mu_3 = -w_2 \Rightarrow [O(j, 3)] = [0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]. \quad (7.751c)$$

よって,

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \frac{5\pi}{4}. \quad (7.752)$$

ポテンシャルは

$$V/V_0 = O(w_2^3). \quad (7.753)$$

よって, 質量は $m^2 = 0$.

7.2.13.5 Electric frame

まず, dyonic frame でのゲージ結合関数は

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_+ \otimes I_3 \oplus \mathcal{N}_- \otimes I_3 \oplus [-ie^{-6x_2}] \oplus (-ie^{2x_2} I_9). \quad (7.754)$$

また, Electric frame でのゲージ結合関数は

$$\theta \wedge \theta \cong [1, 1, -1] \otimes (I_3 \oplus I_3) \oplus [-1] \oplus (-I_9) \quad (7.755)$$

より,

$$\mathcal{N}' = \mathcal{N}'_+ \otimes I_3 \oplus \mathcal{N}'_- \otimes I_3 \oplus [f(-3x_2)] \oplus (f(x_2)I_9). \quad (7.756)$$

ここで,

$$f(\lambda) = \frac{-i}{e^{-2\lambda} + i}. \quad (7.757)$$

\mathcal{N}_\pm , \mathcal{N}'_\pm の表式は複雑であるが, (x_2, y_2) セクターでは次の様になる. まず, \mathcal{N}_\pm は

$$N_\pm = \begin{pmatrix} -i \frac{e^{2x_2}}{\cosh(2y_2)} & 0 & \mp \tanh(2y_2) \\ 0 & -ie^{-2x_2} & 0 \\ \mp \tanh(2y_2) & 0 & -i \frac{e^{-2x_2}}{\cosh(2y_2)} \end{pmatrix}. \quad (7.758)$$

つぎに, \mathcal{N}'_+ は

$$X = e^{2x_2}, \quad Y = e^{2y_2} \quad (7.759)$$

とおくと,

$$\text{Im } \mathcal{N}'_{+11} = -2XY(c^2 + X^2)(1 + Y^2)F^{-1}, \quad (7.760a)$$

$$\text{Im } \mathcal{N}'_{+33} = -2XY(1 + c^2X^2)(1 + Y^2)F^{-1}, \quad (7.760b)$$

$$\text{Im } \mathcal{N}'_{+13} = -2cXY(X^2 - 1)(Y^2 - 1)F^{-1}, \quad (7.760c)$$

$$\text{Im } \mathcal{N}'_{+21} = \text{Im } \mathcal{N}'_{+23} = 0, \quad (7.760d)$$

$$\text{Im } \mathcal{N}'_{+22} = -\frac{X}{c^2 + X^2}, \quad (7.760e)$$

および

$$\text{Re } \mathcal{N}'_{+11} = cX^2 \{(c^2 + 1)(1 + Y^4) + 2(c^2 - 1)Y^2 + 4X^2Y^2\} F^{-1}, \quad (7.761a)$$

$$\text{Re } \mathcal{N}'_{+33} = -\{c(c^2 + 1)X^2(1 + Y^4) - 4cY^2 - 2(c^2 - 1)X^4Y^4\} F^{-1}, \quad (7.761b)$$

$$\text{Re } \mathcal{N}'_{+13} = -(c^2 + 1)X^2(Y^4 - 1)F^{-1}, \quad (7.761c)$$

$$\text{Re } \mathcal{N}'_{+21} = \text{Re } \mathcal{N}'_{+23} = 0, \quad (7.761d)$$

$$\text{Re } \mathcal{N}'_{+22} = \frac{c}{c^2 + X^2}. \quad (7.761e)$$

ここで,

$$F = (1 + c^2)^2 X^2 (1 + Y^4) + 4c^2 Y^2 (1 + X^4) + 2(c^2 - 1)^2 X^2 Y^2. \quad (7.762)$$

また,

$$\mathcal{N}'_{-ab} = \mathcal{N}'_{+ab}(Y \rightarrow 1/Y). \quad (7.763)$$

7.2.13.6 $\text{SO}(3)^2$ 不変セクターへの裁断

一般に SL8 型 gauging の場合,

$$A \cdot X \mapsto -(\theta A_e + A_m \xi) \in \mathfrak{sl}(8) \quad (7.764)$$

より, 残すゲージ場は,

$$\text{SO}(3) \times 1 : A^{(+I)} = \frac{1}{2} \epsilon_{IJK} A^{[JK]} \quad (I, J, K = 1, 2, 3), \quad (7.765a)$$

$$1 \times \text{SO}(3) : A^{(-I)} = \frac{1}{2} \epsilon_{IJK} A^{[(J+4)(K+4)]} \quad (I, J, K = 1, 2, 3) \quad (7.765b)$$

$$E_5 : A^{(0)} = A^{[48]}. \quad (7.765c)$$

対応するゲージ場の強度は, 他のゲージ場成分=0 とおいて,

$$F^{(\pm I)} = dA^{(\pm I)} \pm \frac{1}{2} g \epsilon^{IJK} A^{(\pm)J} \wedge A^{(\pm)K}, \quad (7.766a)$$

$$F^{(0)} = dA^{(0)}. \quad (7.766b)$$

これらのうち $A^{(\pm)}$ はモジュライと結合せず, $A^{(0)}$ は (7.723) に従ってモジュライと結合.

ゲージ場の運動項は,

$$4\kappa^2 \mathcal{L}_F / e = \sum_{\epsilon=0, \pm} \text{Im}(N_\epsilon) F^{(\epsilon)} \cdot F^{(\epsilon)} - \text{Re}(N_\epsilon) F^{(\epsilon)} \cdot \tilde{F}^{(\epsilon)}. \quad (7.767)$$

ここで,

$$N_+ = \mathcal{N}^{[12][12]} = \mathcal{N}'_{+11}, \quad (7.768a)$$

$$N_- = \mathcal{N}^{[56][56]} = \mathcal{N}'_{-11}, \quad (7.768b)$$

$$N_0 = \mathcal{N}^{[48][48]} = \frac{-i}{e^{6x_2} + i}. \quad (7.768c)$$

N^+ のモジュライ

$$X = e^{-2x_2}, \quad Y = e^{2\mu_2}, \quad Z = e^{2\mu_3} \quad (7.769)$$

への依存性は,

$$\operatorname{Im}(N_+) = \frac{B}{A}, \quad \operatorname{Re}(N_+) = \frac{C}{A} \quad (7.770)$$

と置くとき,

$$\begin{aligned} A = & s^4 X^6 Y^2 Z^2 + X^4 (a_{442} Y^4 Z^2 + a_{433} Y^3 Z^3 + a_{424} Y^2 Z^4 + a_{421} Y^2 Z \\ & + a_{412} Y Z^2 + a_{400}) + X^2 (a_{244} Y^4 Z^4 + a_{232} Y^3 Z^2 + a_{223} Y^2 Z^3 \\ & + a_{220} Y^2 + a_{211} Y Z + a_{202} Z^2) + s^8 Y^2 Z^2, \end{aligned} \quad (7.771a)$$

$$\begin{aligned} B = & -s^4 X \left[X^4 (b_{423} Y^2 Z^3 + b_{432} Y^3 Z^2 + b_{411} Y Z) \right. \\ & + X^2 (b_{243} Y^4 Z^3 + b_{234} Y^3 Z^4 + b_{231} Y^3 Z + b_{222} Y^2 Z^2 \\ & + b_{213} Y Z^3 + b_{210} Y + b_{201} Z) \\ & \left. + b_{033} Y^3 Z^3 + b_{012} Y Z^2 + b_{021} Y^2 Z \right], \end{aligned} \quad (7.771b)$$

$$\begin{aligned} C = & s^2 \left[X^4 (c_{442} Y^4 Z^2 + c_{433} Y^3 Z^3 + c_{424} Y^2 Z^4 \right. \\ & + c_{421} Y^2 Z + c_{412} Y Z^2 + c_{400} \\ & + X^2 (c_{244} Y^4 Z^4 + c_{232} Y^3 Z^2 + c_{223} Y^2 Z^3 \\ & \left. + c_{220} Y^2 + c_{211} Y Z + c_{202} Z^2) + s^8 Y^2 Z^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.771c)$$

ただし, $a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}$ は角度変数 (α, β, γ) のみの関数. また, N_- は N_+ から $Y \rightarrow 1/Y, Z \rightarrow 1/Z$ の変換で得られる.

係数関数 $a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}$ の具体的な表式は,

$$c_1 = \cos(\alpha), \quad s_1 = \sin(\alpha), \quad (7.772a)$$

$$c_2 = \cos(\beta), \quad s_2 = \sin(\beta), \quad (7.772b)$$

$$c_3 = \cos(\gamma), \quad s_3 = \sin(\gamma) \quad (7.772c)$$

を用いて, 以下のように表される.

$$\begin{aligned}
a_{442} = & \{(-4c_1^4s_2^4 + 4c_1^4s_2^2 - 24c_1^2s_2^4 - c_1^4 + 24c_1^2s_2^2 - 4s_2^4 - 2c_1^2 + 4s_2^2 - 1)c_3^4 \\
& + 8c_1c_2s_2s_3(2c_2^2 - 1)(c_1^2 + 1)c_3^3 \\
& + (24c_1^2s_2^4 - 24c_1^2s_2^2 + 8s_2^4 + 2c_1^2 - 8s_2^2 + 2)c_3^2 \\
& - 8c_1c_2s_2s_3(2c_2^2 - 1)c_3 - (2s_2^2 - 1)^2\}s^8 \\
& + \{-2(2s_2^2 - 1)s_1^2(c_1^2 + 1)c_3^4 - 8c_1s_1^2s_2c_2s_3c_3^3 + 2c_3^2(2s_2^2 - 1)s_1^2\}s^4 \\
& - c_3^4s_1^4 \tag{7.773a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{433} = & \{(8c_1^4s_2^4 - 8c_1^4s_2^2 + 48c_1^2s_2^4 + 2c_1^4 - 48c_1^2s_2^2 + 8s_2^4 + 4c_1^2 - 8s_2^2 + 2)c_3^4 \\
& - 16c_1c_2s_2s_3(2c_2^2 - 1)(c_1^2 + 1)c_3^3 \\
& + (-8c_1^4s_2^4 + 8c_1^4s_2^2 - 48c_1^2s_2^4 - 2c_1^4 + 48c_1^2s_2^2 - 8s_2^4 - 4c_1^2 + 8s_2^2 - 2)c_3^2 \\
& + 8c_1c_2s_2s_3(2c_2^2 - 1)(c_1^2 + 1)c_3 - 8c_1^2s_2^2c_2^2\}s^8 \\
& + \{4(2s_2^2 - 1)s_1^2(c_1^2 + 1)c_3^4 + 16c_1s_1^2s_2c_2s_3c_3^3 \\
& + (-4s_1^2(2s_2^2 - 1))(c_1^2 + 1)c_3^2 - 8c_1s_1^2s_2c_2s_3c_3\}s^4 \\
& + 2c_3^4s_1^4 - 2s_1^4c_3^2 \tag{7.773b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{424} = & \{(-4c_1^4s_2^4 + 4c_1^4s_2^2 - 24c_1^2s_2^4 - c_1^4 + 24c_1^2s_2^2 - 4s_2^4 - 2c_1^2 + 4s_2^2 - 1)c_3^4 \\
& + 8c_1c_2s_2s_3(2c_2^2 - 1)(c_1^2 + 1)c_3^3 \\
& + 2c_1^2(4c_1^2s_2^4 - 4c_1^2s_2^2 + 12s_2^4 + c_1^2 - 12s_2^2 + 1)c_3^2 \\
& - 8s_2c_2c_1^3s_3(2c_2^2 - 1)c_3 - c_1^4(2s_2^2 - 1)^2\}s^8 \\
& + \{-2(2s_2^2 - 1)s_1^2(c_1^2 + 1)c_3^4 - 8s_1^2c_1s_2c_2s_3c_3^3 \\
& + 2(2s_2^2 - 1)s_1^2(2c_1^2 + 1)c_3^2 + 8c_1s_1^2s_2c_2s_3c_3 - 2c_1^2s_1^2(2s_2^2 - 1)\}s^4 \\
& - s_1^4s_3^4 \tag{7.773c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{421} = & s_1^2\{(-8c_1^2s_2^4 + 8c_1^2s_2^2 - 8s_2^4 - 2c_1^2 + 8s_2^2)c_3^2 \\
& + 8c_1c_2s_2s_3(2c_2^2 - 1)c_3 - 8s_2^2c_2^2\}s^8 \\
& + s_1^2\{4c_1^2(2s_2^2 - 1)c_3^2 + 8s_2c_2c_3c_1s_3\}s^4 \\
& - 2s_1^2c_1^2c_3^2, \tag{7.773d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{412} = & s_1^2\{(8c_1^2s_2^4 - 8c_1^2s_2^2 + 8s_2^4 + 2c_1^2 - 8s_2^2)c_3^2 \\
& - 8c_1c_2s_2s_3(2c_2^2 - 1)c_3 - 2c_1^2(2s_2^2 - 1)^2\}s^8 \\
& + s_1^2\{-4c_1^2(2s_2^2 - 1)c_3^2 - 8s_2c_2c_3c_1s_3 + 4c_1^2(2s_2^2 - 1)\}s^4 \\
& - 2c_1^2s_1^2s_3^2, \tag{7.773e}
\end{aligned}$$

$$a_{400} = -(2s_2^2 - 1)^2 s_1^4 s^8 - 2s_1^2 c_1^2 (2s_2^2 - 1) s^4 - c_1^4, \quad (7.773f)$$

$$a_{244} = -c_1^4 s^{12} - 2s_1^2 c_1^2 (2s_2^2 - 1) s^8 - (2s_2^2 - 1)^2 s_1^4 s^4, \quad (7.773g)$$

$$\begin{aligned} a_{232} = & -2s_1^2 c_1^2 s_3^2 s^{12} + s_1^2 \{-8s_2 c_2 c_3 c_1 s_3 + 4c_1^2 s_3^2 (2s_2^2 - 1)\} s^8 \\ & + s_1^2 \{(-8c_1^2 s_2^4 + 8c_1^2 s_2^2 - 8s_2^4 - 2c_1^2 + 8s_2^2) s_3^2 \\ & - 8c_1 c_2 s_2 s_3 (2c_2^2 - 1) c_3 - 8s_2^2 c_2^2\} s^4, \end{aligned} \quad (7.773h)$$

$$\begin{aligned} a_{223} = & -2s_1^2 c_1^2 c_3^2 s^{12} \\ & + s_1^2 \{-4c_1^2 s_3^2 (2s_2^2 - 1) + 8s_2 c_2 c_3 c_1 s_3 + 4c_1^2 (2s_2^2 - 1)\} s^8 \\ & + s_1^2 \{(8c_1^2 s_2^4 - 8c_1^2 s_2^2 + 8s_2^4 + 2c_1^2 - 8s_2^2) s_3^2 \\ & + 8c_1 c_2 s_2 s_3 (2c_2^2 - 1) c_3 - 2c_1^2 (2s_2^2 - 1)^2\} s^4, \end{aligned} \quad (7.773i)$$

$$\begin{aligned} a_{220} = & -s_1^4 s_3^4 s^{12} \\ & - s_1^2 \{(2(2s_2^2 - 1))(c_1^2 + 1) s_3^4 - (2(2s_2^2 - 1)) s_3^2 + 8s_1^2 c_1 c_3 s_2 s_3^3 c_2\} s^8 \\ & + \{(-4c_1^4 s_2^4 + 4c_1^4 s_2^2 - 24c_1^2 s_2^4 - c_1^4 + 24c_1^2 s_2^2 - 4s_2^4 - 2c_1^2 + 4s_2^2 - 1) s_3^4 \\ & + (24c_1^2 s_2^4 - 24c_1^2 s_2^2 + 8s_2^4 + 2c_1^2 - 8s_2^2 + 2) s_3^2 \\ & + 8s_2 c_2 c_3 c_1 (2c_2^2 - 1) (c_1^2 c_3^2 - c_1^2 + c_3^2) s_3 - (2s_2^2 - 1)^2\} s^4, \end{aligned} \quad (7.773j)$$

$$\begin{aligned} a_{211} = & -2s_1^4 c_3^2 s_3^2 s^{12} \\ & + s_1^2 \{-4(2c_2^2 - 1)(c_1^2 + 1) c_3^4 + 16c_1 s_2 c_2 s_3 c_3^3 \\ & + 4(2c_2^2 - 1)(c_1^2 + 1) c_3^2 - 8c_1 s_2 c_2 s_3 c_3\} s^8 \\ & + \{(8c_1^4 c_2^4 - 8c_1^4 c_2^2 + 48c_1^2 c_2^4 + 2c_1^4 - 48c_1^2 c_2^2 + 8c_2^4 + 4c_1^2 - 8c_2^2 + 2) c_3^4 \\ & - 16c_1 c_2 s_2 s_3 (2c_2^2 - 1) (c_1^2 + 1) c_3^3 \\ & + (-8c_1^4 c_2^4 + 8c_1^4 c_2^2 - 48c_1^2 c_2^4 - 2c_1^4 + 48c_1^2 c_2^2 - 8c_2^4 - 4c_1^2 + 8c_2^2 - 2) c_3^2 \\ & + 8c_1 c_2 s_2 s_3 (2c_2^2 - 1) (c_1^2 + 1) c_3 - 8c_2^2 c_1^2 s_2^2\} s^4, \end{aligned} \quad (7.773k)$$

$$\begin{aligned} a_{202} = & -s_1^4 c_3^4 s^{12} \\ & + s_1^2 \{-2(2s_2^2 - 1)(c_1^2 + 1) c_3^4 - 8c_1 s_2 c_2 s_3 c_3^3 + 2c_3^2 (2s_2^2 - 1)\} s^8 \\ & + \{(-4c_1^4 s_2^4 + 4c_1^4 s_2^2 - 24c_1^2 s_2^4 - c_1^4 + 24c_1^2 s_2^2 - 4s_2^4 - 2c_1^2 + 4s_2^2 - 1) c_3^4 \\ & + 8c_1 c_2 s_2 s_3 (2c_2^2 - 1) (c_1^2 + 1) c_3^3 + (24c_1^2 s_2^4 - 24c_1^2 s_2^2 + 8s_2^4 + 2c_1^2 - 8s_2^2 + 2) c_3^2 \\ & - 8c_1 c_2 s_2 s_3 (2c_2^2 - 1) c_3 - (2s_2^2 - 1)^2\} s^4. \end{aligned} \quad (7.773l)$$

$$b_{423} = -s_1^2 s_3^2, \quad (7.774a)$$

$$b_{432} = -s_1^2 c_3^2, \quad (7.774b)$$

$$b_{411} = -c_1^2, \quad (7.774c)$$

$$b_{243} = s_1^2 \{(-4c_1^2 s_2^2 c_2^2 - 4s_2^2 c_2^2 + 1)c_3^2 - 4c_1 c_2 s_2 s_3 (2c_2^2 - 1)c_3 - (2s_2^2 - 1)^2\} s^4. \quad (7.774d)$$

$$b_{234} = s_1^2 \{(4c_1^2 s_2^2 c_2^2 + 4s_2^2 c_2^2 - 1)c_3^2 + 4c_1 c_2 s_2 s_3 (2c_2^2 - 1)c_3 - 4c_1^2 s_2^2 c_2^2\} s^4, \quad (7.774e)$$

$$b_{231} = \{(4c_1^4 s_2^4 - 4c_1^4 s_2^2 + 24c_1^2 s_2^4 - 24c_1^2 s_2^2 + 4s_2^4 + 4c_1^2 - 4s_2^2)c_3^2 s_3^2 - 4c_1 c_2 s_2 s_3 (2c_2^2 - 1)(c_1^2 + 1)c_3(1 - 2c_3^2) - c_1^2(2s_2^2 - 1)^2\} s^4, \quad (7.774f)$$

$$b_{222} = \{(-8c_1^4 c_2^4 + 8c_1^4 c_2^2 - 48c_1^2 c_2^4 + 48c_1^2 c_2^2 - 8c_2^4 - 8c_1^2 + 8c_2^2)c_3^2 s_3^2 + 8c_1 c_2 s_2 s_3 (2c_2^2 - 1)(c_1^2 + 1)c_3(1 - 2c_3^2) + 8c_2^2(c_2 - 1)(c_2 + 1)(c_1^4 - c_1^2 + 1)\} s^4, \quad (7.774g)$$

$$b_{213} = \{(4c_1^4 s_2^4 - 4c_1^4 s_2^2 + 24c_1^2 s_2^4 - 24c_1^2 s_2^2 + 4s_2^4 + 4c_1^2 - 4s_2^2)c_3^2 s_3^2 - 4c_1 c_2 s_2 s_3 (2c_2^2 - 1)(c_1^2 + 1)c_3(1 - 2c_3^2) - c_1^2(2s_2^2 - 1)^2\} s^4. \quad (7.774h)$$

$$b_{210} = s_1^2 \{(4c_1^2 c_2^2 s_2^2 + 4c_2^2 s_2^2 - 1)c_3^2 + 4c_1 c_2 s_2 s_3 (2c_2^2 - 1)c_3 - 4c_2^2 c_1^2 s_2^2\} s^4, \quad (7.774i)$$

$$b_{201} = s_1^2 \{(-4c_1^2 c_2^2 s_2^2 - 4c_2^2 s_2^2 + 1)c_3^2 - 4c_1 c_2 s_2 s_3 (2c_2^2 - 1)c_3 - (2c_2^2 - 1)^2\} s^4, \quad (7.774j)$$

$$b_{033} = -c_1^2 s^8, \quad (7.774k)$$

$$b_{012} = -s_1^2 c_3^2 s^8, \quad (7.774l)$$

$$b_{021} = -s_1^2 s_3^2 s^8. \quad (7.774m)$$

$$c_{442} = s_1^2 \{(2c_2^2 - 1)(c_1^2 + 1)c_3^4 - 4c_1c_2s_2s_3c_3^3 + (-2c_2^2 + 1)c_3^2\}s^4 - s_1^4c_3^4, \quad (7.775a)$$

$$c_{433} = s_1^2 \{8c_1c_2s_2s_3c_3^3 + (2(2c_2^2 - 1))(c_1^2 + 1)c_3^2s_3^2 - 4s_2c_2c_3c_1s_3\}s^4 - 2c_3^2s_3^2s_1^4, \quad (7.775b)$$

$$c_{424} = s_1^2 \{-4c_1c_2s_2s_3c_3^3 - (2c_2^2 - 1)(2c_1^2 + 1)c_3^2s_3^2 + 4s_2c_2c_3c_1s_3 + c_1^2(2c_2^2 - 1)\}s^4 - s_1^4s_3^4, \quad (7.775c)$$

$$c_{421} = s_1^2 \{-2c_1^2(2c_2^2 - 1)c_3^2 + 4s_2c_2c_3c_1s_3\}s^4 - 2s_1^2c_1^2c_3^2, \quad (7.775d)$$

$$c_{412} = s_1^2 \{-4s_2c_2c_3c_1s_3 + 2c_1^2s_3^2(2s_2^2 - 1)\}s^4 - 2s_1^2c_1^2s_3^2, \quad (7.775e)$$

$$c_{400} = -s_1^2c_1^2(2s_2^2 - 1)s^4 - c_1^4, \quad (7.775f)$$

$$c_{244} = -s_1^2c_1^2(2s_2^2 - 1)s^8 - s_1^4(2s_2^2 - 1)^2s^4, \quad (7.775g)$$

$$c_{232} = s_1^2 \{-4s_2c_2c_3c_1s_3 + 2c_1^2(2s_2^2 - 1)s_3^2\}s^8 + s_1^2 \{(8c_1^2s_2^4 - 8c_1^2s_2^2 + 8s_2^4 + 2c_1^2 - 8s_2^2)c_3^2 - 8c_1c_2s_2s_3(2c_2^2 - 1)c_3 - 2c_1^2(2s_2^2 - 1)^2\}s^4, \quad (7.775h)$$

$$c_{223} = s_1^2 \{2c_1^2(2s_2^2 - 1)c_3^2 + 4s_2c_2c_3c_1s_3\}s^8 + s_1^2 \{(-8c_1^2s_2^4 + 8c_1^2s_2^2 - 8s_2^4 - 2c_1^2 + 8s_2^2)c_3^2 + 8c_1c_2s_2s_3(2c_2^2 - 1)c_3 + 8s_2^2(s_2 - 1)(s_2 + 1)\}s^4, \quad (7.775i)$$

$$c_{220} = s_1^2 \{(2c_2^2 - 1)(c_1^2 + 1)c_3^4 - 4c_1s_2c_2s_3c_3^3 - (2c_2^2 - 1)(2c_1^2 + 1)c_3^2 + 4c_1s_2c_2s_3c_3 + c_1^2(2c_2^2 - 1)\}s^8 + \{(-4c_1^4c_2^4 + 4c_1^4c_2^2 - 24c_1^2c_2^4 - c_1^4 + 24c_1^2c_2^2 - 4c_2^4 - 2c_1^2 + 4c_2^2 - 1)c_3^4 + 8c_1c_2s_2s_3(2c_2^2 - 1)(c_1^2 + 1)c_3^3 + 2c_1^2(4c_1^2c_2^4 - 4c_1^2c_2^2 + 12c_2^4 + c_1^2 - 12c_2^2 + 1)c_3^2 - 8s_2c_2c_1^3s_3(2c_2^2 - 1)c_3 - c_1^4(2c_2^2 - 1)^2\}s^4, \quad (7.775j)$$

$$c_{211} = s_1^2 \{8c_1c_2s_2s_3c_3^3 - 2(2s_2^2 - 1)(c_1^2 + 1)c_3^2s_3^2 - 4s_2c_2c_3c_1s_3\}s^8 + \{-16c_1c_2s_2s_3(2c_2^2 - 1)(c_1^2 + 1)c_3^3 + (-8c_1^4s_2^4 + 8c_1^4s_2^2 - 48c_1^2s_2^4 - 2c_1^4 + 48c_1^2s_2^2 - 8s_2^4 - 4c_1^2 + 8s_2^2 - 2)c_3^2s_3^2 + 8c_1c_2s_2s_3(2c_2^2 - 1)(c_1^2 + 1)c_3 - 8c_1^2s_2^2c_2^2\}s^4, \quad (7.775k)$$

$$c_{202} = s_1^2 \{-(2s_2^2 - 1)(c_1^2 + 1)c_3^4 - 4c_1c_2s_2s_3c_3^3 + (2s_2^2 - 1)c_3^2\}s^8 + \{(-4c_1^4s_2^4 + 4c_1^4s_2^2 - 24c_1^2s_2^4 - c_1^4 + 24c_1^2s_2^2 - 4s_2^4 - 2c_1^2 + 4s_2^2 - 1)c_3^4 + 8c_1c_2s_2s_3(2c_2^2 - 1)(c_1^2 + 1)c_3^3 + (24c_1^2s_2^4 - 24c_1^2s_2^2 + 8s_2^4 + 2c_1^2 - 8s_2^2 + 2)c_3^2 - 8c_1c_2s_2s_3(2c_2^2 - 1)c_3 - (2s_2^2 - 1)^2\}s^4. \quad (7.775l)$$

7.2.13.7 軸上で正則な座標系表示

軸 $\mu_2 = \mu_3$ のうち, 原点の除く部分の近傍で正則な座標系

$$\mathbf{x}_3 : u = r \cos(2\theta_3), \quad v = r \sin(2\theta_3), \quad z = \frac{\mu_2 + \mu_3}{2}, \quad \theta_1, \quad (7.776)$$

$$r = \frac{\mu_2 - \mu_3}{2} \geq 0; \quad r < 3z. \quad (7.777)$$

において, 6次元モジュライ \mathcal{H}_6 の運動項は

$$\begin{aligned} -\kappa^2 \mathcal{L}_K &= dx_2^2 + du^2 + dv^2 + 3dz^2 \\ &\quad + \frac{\text{jh}(2r)^2 - 1}{r^2} (udv - vdu)^2 \\ &\quad + 4\text{jh}(2r)^2 (udv - vdu + r^2 \cos(\theta_1) d\theta_2) \cos(\theta_1) d\theta_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (\cosh(6z) \cosh(2r) - 1) (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2) \\ &\quad + \text{jh}(2r) \sinh(6z) \{u(d\theta_1^2 - \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2) - 2v \sin \theta_1 d\theta_1 d\theta_2\}. \end{aligned} \quad (7.778)$$

モジュライポテンシャルは,

$$\begin{aligned} g^{-2}V &= \left(\frac{X^3}{s^2} + \frac{s^2}{X^3} \right) \left[D_{31} \cosh(6z) \cosh(2r) + \sinh(6z) \text{jh}(2r) (D_{32}u + D_{33}v) \right. \\ &\quad \left. + \text{jh}(2r)^2 (D_{34}u^2 + D_{35}uv + D_{36}v^2) + D_{37} \right] \\ &\quad + \frac{3}{32} \left(s^2 X + \frac{1}{s^2 X} \right) \left[-c_1^2 \cosh(4z) - s_1^2 \cosh(2z) \cosh(2r) \right. \\ &\quad \left. - s_1^2 \text{jh}(2r) \sinh(2z)u + 6 \right] \\ &\quad + \left(\frac{X}{s^2} + \frac{s^2}{X} \right) \left[\frac{3}{16} (-\cosh(4z) + \cosh(2z) \cosh(2r)) s_1^2 \cos(2\theta_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} \text{jh}(2r) \sinh(2z) \{-(1 + c_1^2) \cos(2\theta_2)u + 2c_1 \sin(2\theta_2)v\} \right]. \end{aligned} \quad (7.779)$$

ここで

$$D_{31} = \frac{s_1^2}{64} \{s_1^2 \cos(4\theta_2) - 1 - c_1^2\}, \quad (7.780a)$$

$$D_{32} = -\frac{s_1^2}{16} \{1 + (1 + c_1^2) \sin^2(2\theta_2)\}, \quad (7.780b)$$

$$D_{33} = \frac{s_1^2 c_1}{16} \sin(4\theta_2), \quad (7.780c)$$

$$D_{34} = \frac{1}{256} \{\cos(4\theta_1) + 28 \cos(2\theta_1) + 35\} \cos^2(2\theta_2) \\ - \cos(4\theta_1) + 4 \cos(2\theta_1) - 3\}, \quad (7.780d)$$

$$D_{35} = -\frac{1}{32} (7 \cos(\theta_1) + \cos(3\theta_1)) \sin(4\theta_2), \quad (7.780e)$$

$$D_{36} = \frac{1}{256} \{(\cos(4\theta_1) + 28 \cos(2\theta_1) + 35) \sin^2(2\theta_2)\}, \quad (7.780f)$$

$$D_{37} = \frac{1}{512} (-\cos(4\theta_1) + 4 \cos(2\theta_1) - 3) \cos(4\theta_2) \\ + \frac{1}{512} (\cos(4\theta_1) + 4 \cos(2\theta_1) + 27). \quad (7.780g)$$

7.2.14 SO(5, 3)-gauging

Embedding tensor のパラメータ行列 θ, ξ を

$$\theta = [\lambda_1 I_5, \lambda_2 I_3], \quad \xi = \theta^{-1}, \quad (7.781)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{s(3+s^2)}{1+3s^2}}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{s(1+3s^2)}{3+s^2}} \quad (7.782)$$

と取る.

7.2.14.1 SO(3) \times SO(3)-invariant directions

原点での各質量固有値に対応する SO(5) \times SO(3) の表現は, SO(2) \times SO(3) \times SO(3) に関して, 次のように分解される :

m^2	$\text{SO}(5) \times \text{SO}(3)$	$\text{SO}(2) \times \text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$	generators
-2	(1, 1)	(1, 1, 1)	E_1
4	(1, 5)	(1, 1, 5)	—
4/3	(14, 1)	(1, 1, 1) +(2, 1, 1) +(1, 5, 1) + (2, 3, 1)	E_2 E_3, E_4 —
0	(5, 3)	(1, 3, 3) + (2, 1, 3)	—
-2/3	$(5, 1) = [4, 0]^+$	(2, 1, 1) +(1, 3, 1)	E_5, E_6 —
2	$(10, 3) = [3, 1]^+$	(1, 1, 3) + (2, 3, 3) + (1, 3, 3)	—

表 21: $\text{SO}(5) \times \text{SO}(3)$ 表現の $\text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$ 表現への分解と singlets

- Even parity

$$(1, 1)[m^2 = -2] \Rightarrow (1, 1, 1) \Rightarrow E_1 \quad (7.783a)$$

$$(1, 5)[m^2 = 4] \Rightarrow (1, 1, 5) \Rightarrow \times \quad (7.783b)$$

$$(14, 1)[m^2 = 4/3] \Rightarrow (1, 5, 1) + (2, 3, 1) + (2, 1, 1) + (1, 1, 1) \\ \Rightarrow E_2, E_3, E_4 \quad (7.783c)$$

$$(5, 3)[m^2 = 0] \Rightarrow (1, 3, 3) + (2, 1, 3) \Rightarrow \times \quad (7.783d)$$

$$(7.783e)$$

- Odd parity

$$(5, 1) = [4, 0]^+[m^2 = -2/3] \Rightarrow (1, 3, 1) + (2, 1, 1) \Rightarrow E_5, E_6 \quad (7.784a)$$

$$(10, 3) = [3, 1]^+[m^2 = 2] \Rightarrow (1, 1, 3) + (2, 3, 3) + (1, 3, 3) \Rightarrow \times \quad (7.784b)$$

ここで,

$$E_1 = S_1 \wedge 1; \quad S_1 = 3 \sum_{a=1}^5 e_a \circ e_a - 5 \sum_{b=6}^8 e_b \circ e_b, \quad (7.785a)$$

$$E_2 = S_2 \wedge 1; \quad S_2 = 2 \sum_{a=1}^3 e_a \circ e_a - 3 \sum_{b=4}^5 e_b \circ e_b, \quad (7.785b)$$

$$E_3 = S_3 \wedge 1; \quad S_3 = e_4 \circ e_4 - e_5 \circ e_5, \quad (7.785c)$$

$$E_4 = S_4 \wedge 1; \quad S_4 = e_4 \circ e_5 + e_5 \circ e_4, \quad (7.785d)$$

$$E_5 = \frac{i}{2} (e_{1234} + e_{5678}), \quad (7.785e)$$

$$E_6 = \frac{i}{2} (e_{1235} - e_{4678}). \quad (7.785f)$$

$\mathbb{R}^8 \wedge \mathbb{R}^8 \cong \mathbb{R}^{28}$ を次のように分解する :

$$\mathbb{R}^8 \wedge \mathbb{R}^8 = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_3, \quad (7.786)$$

$$\mathcal{L}_1 = V_{123} \wedge V_{123} \oplus V_{123} \wedge V_4 \oplus V_{123} \wedge V_5 \cong \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3, \quad (7.787)$$

$$\mathcal{L}_2 = V_{678} \wedge V_{678} \oplus V_5 \wedge V_{678} \oplus V_{678} \wedge V_4 \cong \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3, \quad (7.788)$$

$$\mathcal{L}_3 = V_4 \wedge V_5 \oplus V_{123} \wedge V_{678} \cong \mathbb{R}^{10}. \quad (7.789)$$

対応して, 基底に対応する添え字セットを以下のように定義する :

$$\begin{aligned} \text{IST}_1 = & \quad [[1, 2], [3, 4], [3, 5]], \\ & \quad [[2, 3], [1, 4], [1, 5]], \\ & \quad [[3, 1], [2, 4], [2, 5]], \end{aligned} \quad (7.790a)$$

$$\begin{aligned} \text{IST}_2 = & \quad [[6, 7], [5, 8], [8, 4]], \\ & \quad [[7, 8], [5, 6], [6, 4]], \\ & \quad [[8, 6], [5, 7], [7, 4]], \end{aligned} \quad (7.790b)$$

$$\text{IST}_3 = [[4, 5], [1, 6], [2, 6], [3, 6], [1, 7], \dots, [3, 8]]. \quad (7.790c)$$

この分解の元で, $E_1 \sim E_6$ は次のように行列表示される :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus [3, -I_9], \quad (7.791a)$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus [-3, -I_9], \quad (7.791b)$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus [0_{10}], \quad (7.791c)$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus [0_{10}], \quad (7.791d)$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus [0_{10}], \quad (7.791e)$$

$$E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_3 \oplus [0_{10}], \quad (7.791f)$$

$$(7.791g)$$

よって,

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{i=1}^4 x_i E_i + \sum_{j=1}^2 y_j E_{4+j} \\ &= \Phi_1 \otimes I_3 \oplus \Phi_2 \otimes I_3 \oplus \Phi_3, \end{aligned} \quad (7.792)$$

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 & iy_1 & iy_2 \\ iy_1 & 3x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 & \frac{1}{2}x_4 \\ iy_2 & \frac{1}{2}x_4 & 3x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \end{pmatrix}, \quad (7.793)$$

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} -5x_1 & iy_1 & iy_2 \\ iy_1 & -x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 & -\frac{1}{2}x_4 \\ iy_2 & -\frac{1}{2}x_4 & -x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{pmatrix}, \quad (7.794)$$

$$\Phi_3 = (x_1 - x_2) \times [3, -I_9]. \quad (7.795)$$

これらのうち、 Φ_1 と Φ_2 は、

$$\Phi_1 = (-x_1 + x_2)I_{1,2} + \Phi_0, \quad (7.796a)$$

$$\Phi_2 = (-x_1 + x_2)I_{1,2} - \Phi_0^* \quad (7.796b)$$

と表される。ここで、

$$I_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (7.797)$$

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 4x_1 + x_2 & iy_1 & iy_2 \\ iy_1 & 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 & \frac{1}{2}x_4 \\ iy_2 & \frac{1}{2}x_4 & 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \end{pmatrix}. \quad (7.798)$$

一般に、 Φ_0 は次の様に対角化できる：

$$\Phi_0 = U \Delta \mathcal{U}, \quad (7.799)$$

$$U = U_1 + iU_2 \in \mathbf{U}(3), \quad U_1, U_2 \in M(3, \mathbb{R}), \quad (7.800)$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.801)$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}, \quad (7.802)$$

$$O = U_1 + U_2 \in \mathbf{SO}(3), \quad U_1 \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_1 U_2 = 0. \quad (7.803)$$

ここで、

$$\Delta = [\mu_1, \mu_2, \mu_3]. \quad (7.804)$$

特に、

$$U \mathcal{U} = I_{1,2}, \quad (7.805)$$

より、

$$\Phi_0 - \mu I_{1,2} = U(\Delta - \mu I_3) \mathcal{U}. \quad (7.806)$$

したがって、一般に、

$$\begin{aligned}
 Q(\mu) &= -\det \begin{pmatrix} a - \mu & iy_1 & iy_2 \\ iy_1 & b + \mu & w \\ iy_2 & w & c + \mu \end{pmatrix} \\
 &= \mu^3 + (b + c - a)\mu^2 - (ab - bc + ca + y_1^2 + y_2^2 + w^2)\mu \\
 &\quad - abc - by_2^2 - cy_1^2 + aw^2 + 2wy_1y_2 \quad (7.807)
 \end{aligned}$$

より、 μ_1, μ_2, μ_3 は次の方程式の解：

$$\begin{aligned}
 0 = Q(\mu) &:= \mu^3 - \left\{ \frac{3}{4}x^2 + y_1^2 + y_2^2 + w^2 + \frac{x_3^2}{4} \right\} \mu \\
 &\quad + xw^2 + 2wy_1y_2 - \frac{1}{2}x(y_1^2 + y_2^2) - \frac{x^3}{4} + \frac{x_3}{2}(y_1^2 - y_2^2) + \frac{1}{4}xx_3^2. \quad (7.808)
 \end{aligned}$$

ここで、 $x = 4x_1 + x_2$.

7.2.14.2 ポテンシャル

行列 Φ_0 の対角化

$$\Phi_0 = U[\mu_1, \mu_2, \mu_3]^T U, \quad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0 \quad (7.809)$$

より、

$$X = e^{2(x_1 - x_2)}, \quad Y = e^{-2\mu_2}, \quad Z = e^{-2\mu_3} \quad (7.810)$$

とおき、 $O = U_1 + U_2$ を

$$O = R_1(\beta)R_3(\alpha)R_1(\gamma) \quad (7.811)$$

と Euler 角を用いて表すと、ポテンシャルは次式で与えられる：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g^2}V &= \left(\frac{1+3s^2}{s(3+s^2)}X^3 + \frac{s(3+s^2)}{1+3s^2}\frac{1}{X^3} \right) \\
&\times \left[C_{321} \left(Y^2Z + \frac{1}{Y^2Z} \right) + C_{312} \left(YZ^2 + \frac{1}{YZ^2} \right) + C_{31-1} \left(\frac{Y}{Z} + \frac{Z}{Y} \right) + C_{300} \right] \\
&+ C_{111}XYZ + C'_{111}\frac{1}{XYZ} + C_{1-1-1}\frac{X}{YZ} + C'_{1-1-1}\frac{YZ}{X} \\
&+ C_{110}XY + C'_{110}\frac{1}{XY} + C_{1-10}\frac{X}{Y} + C'_{1-10}\frac{Y}{X} \\
&+ C_{101}XZ + C'_{101}\frac{1}{XZ} + C_{10-1}\frac{X}{Z} + C'_{10-1}\frac{Z}{X} \\
&+ \frac{9}{32} \left(sX + \frac{1}{sX} \right). \tag{7.812}
\end{aligned}$$

ここで

$$C_{321} = \frac{1}{64} \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma, \quad C_{312} = \frac{1}{64} \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma, \tag{7.813a}$$

$$C_{31-1} = \frac{1}{64} \cos^2 \alpha, \quad C_{300} = -\frac{1}{32}, \tag{7.813b}$$

$$C_{111} = -\frac{3s(1+3s^2)}{64(3+s^2)} \cos^2 \alpha + \frac{3}{32s} \sin^2 \alpha, \tag{7.813c}$$

$$C_{1-1-1} = -\frac{3s(3+s^2)}{64(1+3s^2)} \cos^2 \alpha - \frac{3(1+3s^2)}{32s(3+s^2)} \sin^2 \alpha, \tag{7.813d}$$

$$C_{110} = -\frac{3(1+3s^2)}{32s(3+s^2)} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma) - \frac{3s(3+s^2)}{64(1+3s^2)} \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma, \tag{7.813e}$$

$$C_{101} = -\frac{3(1+3s^2)}{32s(3+s^2)} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma) - \frac{3s(3+s^2)}{64(1+3s^2)} \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma, \tag{7.813f}$$

$$C_{1-10} = \frac{3}{32s} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma) - \frac{3s(1+3s^2)}{64(3+s^2)} \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma, \tag{7.813g}$$

$$C_{10-1} = \frac{3}{32s} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma) - \frac{3s(1+3s^2)}{64(3+s^2)} \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma. \tag{7.813h}$$

また,

$$C'_{1mn} = C_{1mn}(s \rightarrow 1/s). \tag{7.814}$$

このポテンシャルは次の対称性をもつ：

$$V(X \rightarrow 1/X, Y \rightarrow 1/Y, Z \rightarrow 1/Z, s \rightarrow 1/s) = V. \tag{7.815}$$

7.2.14.3 \mathbb{Z}_2 不変部分空間

$\mathrm{SO}(8) \cap \mathrm{Aut}(\mathrm{SO}(5, 3))$ の変換

$$J = [I_3, 1, -1, -I_3] \quad (7.816)$$

により,

$$E_i \rightarrow E_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad E_5 \rightarrow E_5, \quad (7.817a)$$

$$E_4 \rightarrow -E_4, \quad E_6 \rightarrow -E_6. \quad (7.817b)$$

よって, $x_4 = y_2 = 0$ は \mathbb{Z}_2 不変で, その上の部分空間内での極点は, モジュライ空間全体での極点.

このセクターでは, Φ_0 は

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} a & iy & 0 \\ iy & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad (7.818)$$

$$a = b + c = 4x_1 + x_2, \quad (7.819)$$

$$b = 2x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3), \quad (7.820)$$

$$c = 2x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_3), \quad (7.821)$$

$$y = y_1. \quad (7.822)$$

より, 固有値 μ に対する方程式は

$$Q(\mu) = \mu^3 - (ab + c^2 + y^2)\mu - c(ab + y^2). \quad (7.823)$$

よって,

$$\mu_1 = c/2 + v, \quad \mu_2 = c/2 - v, \quad \mu_3 = c, \quad (7.824)$$

$$v^2 = ab + c^2/4 + y^2. \quad (7.825)$$

これより,

$$z_1 = x_2 - x_1, \quad z_2 = x_1 + \frac{1}{4}(x_2 - x_3), \quad z_3 = 3x_1 + \frac{1}{4}(3x_2 + x_3), \quad v = \sqrt{z_3^2 + y_1^2} \quad (7.826)$$

とおくと,

$$X = e^{2z_1}, \quad L_1 = e^{2(z_2+v)}, \quad L_2 = e^{2(z_2-v)}, \quad L_3 = e^{-4z_2}. \quad (7.827)$$

X, Y, Z で表すと,

$$X = e^{2z_1}, \quad Y = e^{2(z_2-v)}, \quad Z = e^{-4z_2}. \quad (7.828)$$

また, Euler 角は

$$ve^{2i\alpha} = z_3 + iy_1, \quad \beta = \gamma = 0. \quad (7.829)$$

変数 X, Y, Z, α でポテンシャルを表すと,

$$V(Z \rightarrow 1/Z, \alpha \rightarrow \alpha + \pi/2) = V \quad (7.830)$$

の不変性をもつ.

7.2.15 $\text{SO}(2) \times \text{SO}(2) \times \mathbb{R}^{20}$ -gauging

Embedding tensor のパラメータ行列 θ, ξ は

$$\theta = [I_2, 0_6], \quad \xi = [0_2, sI_2, 0_4] \quad (7.831)$$

この節では, 添え字集合を次のように定義する:

$$\mathcal{S}_1 = \{1, 2\}, \quad \mathcal{S}_2 = \{3, 4\}, \quad \mathcal{S}_3 = \{5, 6, 7, 8\}. \quad (7.832)$$

7.2.15.1 Generators

原点は Minkowski 真空中で, 残留ゲージ対称性として $\text{SO}(2) \times \text{SO}(2)$ を, 大域的対称性として $\text{SO}(2) \times \text{SO}(2) \times \text{SO}(4)$ をもつ。この大域的対称性に関する表現で分類すると, モジュライ質量の固有方向となるモジュライ空間の接ベクトルは, Sp 表示で以下の通り:

- Even directions

$$m^2 = 0 : (1, 1, 1)$$

$$s_1 = S_1 \wedge 1 : \quad S_1 = 2 \sum_{i \in \mathcal{S}_1} e_i \circ e_i - \sum_{j \in \mathcal{S}_3} e_j \circ e_j \quad (7.833a)$$

$$s_2 = S_2 \wedge 1 : \quad S_2 = 2 \sum_{i \in \mathcal{S}_2} e_i \circ e_i - \sum_{j \in \mathcal{S}_3} e_j \circ e_j \quad (7.833b)$$

$$s_{3 \sim 11} = S \wedge 1 : \quad S = \sum_{i, j \in \mathcal{S}_3} t_{ij} e_i \circ e_j. \quad (7.833c)$$

ここで, (t_{ij}) は対称な $\mathfrak{sl}(4)$ 行列.

$m^2 = 0 : (2, 1, 4) + (1, 2, 4) + (2, 2, 1)$: (Goldstone directions)

$$s_{12\sim 27} = S \wedge 1 : S = \sum_{i \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2, j \in \mathcal{S}_3} t_{ij}(e_{i \circ e_j} + e_{j \circ e_i}) \quad (7.834a)$$

$$s_{28\sim 31} = S \wedge 1 : S = \sum_{i \in \mathcal{S}_1, j \in \mathcal{S}_2} t_{ij}(e_{i \circ e_j} + e_{j \circ e_i}) \quad (7.834b)$$

$m^2 = 1/4 : (2, 1, 1)$

$$s_{32} = S_{32} \wedge 1 : S_{32} = e_{1 \circ e_1} - e_{2 \circ e_2}, \quad (7.835a)$$

$$s_{33} = S_{33} \wedge 1 : S_{33} = e_{1 \circ e_2} + e_{2 \circ e_1}. \quad (7.835b)$$

$m^2 = s^2/4 : (1, 2, 1)$

$$s_{34} = S_{34} \wedge 1 : S_{34} = e_{3 \circ e_3} - e_{4 \circ e_4}, \quad (7.836a)$$

$$s_{35} = S_{35} \wedge 1 : S_{35} = e_{3 \circ e_4} + e_{4 \circ e_3}. \quad (7.836b)$$

- Odd directions

$m^2 = 0 : (1, 1, 6) = [2, 0, 2]^+, \quad (1, 1, 1) = [2, 2, 0]^+$

$$u_{1\sim 6} = \frac{1}{2}(e_{12ij} + e_{34kl}); [i, j, k, l] \cong [5, 6, 7, 8] \quad (7.837a)$$

$$u_7 = \frac{1}{2}(e_{1234} + e_{5678}). \quad (7.837b)$$

$m^2 = 1/16 : (2, 1, 4) = [1, 2, 1]^+$

$$u_{8\sim 15} = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{S}_1, j \in \mathcal{S}_3} a^{ij}(1 + \star)e_{i34j}. \quad (7.838)$$

$m^2 = s^2/16 : (1, 2, 4) = [2, 1, 1]^+$

$$u_{16\sim 23} = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{S}_2, j \in \mathcal{S}_3} a^{ij}(1 + \star)e_{12ij}. \quad (7.839)$$

$m^2 = (1 + s^2)/16 : (2, 2, 6)^+ = [1, 1, 2]^+$

$$u_{24\sim 35} = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{S}_2, j, k \in \mathcal{S}_3} a^{ijk}(1 + \star)e_{1ijk}. \quad (7.840)$$

7.2.15.2 ϕ の行列表示

$\mathbb{R}^8 \wedge \mathbb{R}^8 \cong \mathbb{R}^{28}$ を次のように分解する：

$$\mathbb{R}^8 \wedge \mathbb{R}^8 = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_3 \oplus \mathcal{L}_4 \oplus \mathcal{L}_5 \oplus \mathcal{L}_6; \quad (7.841)$$

$$\mathcal{L}_1 = V_{12} \wedge V_{12} \cong \mathbb{R}, \quad (7.842)$$

$$\mathcal{L}_2 = V_{34} \wedge V_{34} \cong \mathbb{R}, \quad (7.843)$$

$$\mathcal{L}_3 = V_{5678} \wedge V_{5678} \cong \mathbb{R}^6, \quad (7.844)$$

$$\mathcal{L}_4 = V_{12} \wedge V_{34} \cong \mathbb{R}^4, \quad (7.845)$$

$$\mathcal{L}_5 = V_{12} \wedge V_{5678} \cong \mathbb{R}^8, \quad (7.846)$$

$$\mathcal{L}_6 = V_{34} \wedge V_{5678} \cong \mathbb{R}^8. \quad (7.847)$$

このとき、Goldstone 方向以外の massless 方向に対応する generator は

$$\phi = \sum_{a=1}^2 x_a s_a + \sum_{a=5}^{13} t_a s_a + i \sum_{b=1}^6 y_b u_b + iz u_7. \quad (7.848)$$

行列表示でこれは

$$\phi = [\Phi_{123}, \Phi_4, \Phi_5, \Phi_6]. \quad (7.849)$$

ここで、

$$\Phi_{123} = \begin{pmatrix} 2x_1 & iz & iy \\ iz & 2x_2 & i \star y \\ iy & i \star y & -(x_1 + x_2)I_6 + \Psi \end{pmatrix} : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^8, \quad (7.850)$$

$$y_1 = y_{[5,6]}, y_2 = y_{[5,7]}, y_3 = y_{[5,8]}, y_4 = y_{[7,8]}, y_5 = y_{[8,6]}, y_6 = y_{[8,7]} \quad (7.851)$$

$$\star y_1 = y_4, \star y_2 = y_5, \star y_3 = y_6, \star \star y_a = y_a, \quad (7.852)$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} t_{55} + t_{66} & t_{67} & t_{68} & iz & t_{58} & -t_{57} \\ t_{67} & t_{55} + t_{77} & t_{78} & -t_{58} & iz & t_{56} \\ t_{68} & t_{78} & t_{55} + t_{88} & t_{57} & -t_{56} & iz \\ iz & -t_{58} & t_{57} & t_{77} + t_{88} & -t_{67} & -t_{68} \\ t_{58} & iz & -t_{56} & -t_{67} & t_{66} + t_{88} & -t_{78} \\ -t_{57} & t_{56} & iz & -t_{68} & -t_{78} & t_{66} + t_{77} \end{pmatrix} \quad (7.853)$$

$$\Phi_4 = (x_1 + x_2)I_4 - iz \epsilon \otimes \epsilon : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad (7.854)$$

$$\Phi_5 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)I_8 + \frac{1}{2}I_2 \otimes (t) - i\epsilon \otimes (y) : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^8, \quad (7.855)$$

$$\Phi_6 = -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)I_8 + \frac{1}{2}I_2 \otimes (t) - i\epsilon \otimes (y) : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^8. \quad (7.856)$$

7.2.15.3 対角化

 Φ_4

$$\begin{aligned}\Phi_4 &= (x_1 + x_2)I_4 - iz\epsilon \otimes \epsilon \\ &= U_4\Lambda_4{}^T U_4.\end{aligned}\quad (7.857)$$

ここで、

$$U_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.858a)$$

$$\Lambda_4 = [x_1 + x_2 - iz, x_1 + x_2 - iz, x_1 + x_2 + iz, x_1 + x_2 + iz]. \quad (7.858b)$$

 Φ_5, Φ_6

$$\Phi_5 = \left(\frac{1}{2}x_1 - x_2\right)I_8 + \frac{1}{2}I_2 \otimes (t) - 2i\epsilon \otimes (y), \quad (7.859a)$$

$$\Phi_6 = \left(\frac{1}{2}x_2 - x_1\right)I_8 + \frac{1}{2}I_2 \otimes (t) - 2i\epsilon \otimes (y) \quad (7.859b)$$

これらは行列表示で

$$\Phi = \begin{pmatrix} S & -iA \\ iA & S \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & X \\ T_X & 0 \end{pmatrix} T\mathcal{F}^{-1}; \quad S = {}^T S, A = -{}^T A, X = S - A \in M(4) \quad (7.860)$$

という構造をもつので、一般実行列の岩沢分解

$$X = O_1\Delta_X{}^T O_2; \quad O_1, O_2 \in \text{SO}(4), \quad \Delta_X : \text{diagonal} \quad (7.861)$$

により、

$$\Phi = U\Lambda{}^T U; \quad (7.862)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Delta_X & 0 \\ 0 & \Delta_X \end{pmatrix}, \quad (7.863)$$

$$U = \mathcal{F}^{-1} \begin{pmatrix} O_1 & 0 \\ 0 & O_2 \end{pmatrix} \mathcal{F} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (O_1 + O_2) & i(O_1 - O_2) \\ -i(O_1 - O_2) & O_1 + O_2 \end{pmatrix} \in \text{SU}(8) \quad (7.864)$$

を得る。

 Φ_5, Φ_6 に対応する (U, Λ) は次の対角化で決まる：

$$(U_5, \Lambda_5) : \left(\frac{1}{2}x_1 - x_2\right)I_4 + \frac{1}{2}(t_{ij}) - 2(y_{ij}) = O_1\Delta{}^T O_2, \quad (7.865a)$$

$$(U_6, \Lambda_6) : \left(\frac{1}{2}x_2 - x_1\right)I_4 + \frac{1}{2}(t_{ij}) - 2(y_{ij}) = O_1\Delta{}^T O_2. \quad (7.865b)$$

7.2.15.4 \mathcal{M} 行列

U_4 は実行列なので、(7.439) より、

$$\mathcal{M}_{(4)DD} = U_4 e^{-2\Lambda_4} \mathcal{T}U_4 = e^{-2(x_1+x_2)} [\cos(2z)I_4 + i \sin(2z)\epsilon \otimes \epsilon] \quad (7.866a)$$

$$\mathcal{M}_{(4)UU} = U_4 e^{2\Lambda_4} \mathcal{T}U_4 = e^{2(x_1+x_2)} [\cos(2z)I_4 - i \sin(2z)\epsilon \otimes \epsilon] \quad (7.866b)$$

$$\mathcal{M}_{(4)UD} = \mathcal{M}_{(4)DU} = 0. \quad (7.866c)$$

また Φ_5, Φ_6 に対応する $\mathcal{M}_{(5)} = \mathcal{M}_{[ai][bj]}(a, b \in \mathcal{S}_1, i, j \in \mathcal{S}_3)$, $\mathcal{M}_{(6)} = \mathcal{M}_{[ai][bj]}(a, b \in \mathcal{S}_2, i, j \in \mathcal{S}_3)$ は, $\alpha = 5, 6$ として、

- $\mathcal{M}_{(\alpha)DD}, \mathcal{M}_{(\alpha)UU}$: diagonal wrt. a, b
- $\mathcal{M}_{(\alpha)UD}, \mathcal{M}_{(\alpha)DU}$: off-diagonal wrt. a, b

具体的な構造は、

$$\mathcal{M}_{(\alpha)[ai][bj]} = \delta_b^a (M_{(\alpha)DD})_{ij}, \quad (7.867a)$$

$$\mathcal{M}_{(\alpha)}^{[ai][bj]} = \delta_b^a (M_{(\alpha)UU})^{ij}. \quad (7.867b)$$

$$\mathcal{M}_{(\alpha)[ai]}^{[bj]} = -\epsilon_{ab} (M_{(\alpha)DU})_i^j, \quad (7.867c)$$

$$\mathcal{M}_{(\alpha)}^{[ai]}_{[bj]} = \epsilon_{ab} (M_{(\alpha)UD})^i_j. \quad (7.867d)$$

ここで、

$$M_{DD} = O_+ e^{2\Delta} \mathcal{T}O_+ + O_- e^{-2\Delta} \mathcal{T}O_-, \quad (7.868a)$$

$$M_{UU} = O_+ e^{-2\Delta} \mathcal{T}O_+ + O_- e^{2\Delta} \mathcal{T}O_-, \quad (7.868b)$$

$$M_{DU} = O_- e^{-2\Delta} \mathcal{T}O_+ + O_+ e^{2\Delta} \mathcal{T}O_-, \quad (7.868c)$$

$$M_{UD} = \mathcal{T}M_{DU}. \quad (7.868d)$$

また、

$$O_{\pm} = \frac{1}{2}(O_1 \pm O_2). \quad (7.869)$$

以下、 $\mathcal{M}_{(123)}$ の部分行列を以下の様に表記する：

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(123)[12][12]} &= K_{11}, \mathcal{M}_{(123)}^{[12][12]} = K^{11}, \\ \mathcal{M}_{(123)[12]}^{[12]} &= K_1^1, \mathcal{M}_{(123)}^{[12]}_{[12]} = K^1_1, \end{aligned} \quad (7.870a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(123)[34][34]} &= K_{22}, \mathcal{M}_{(123)}^{[34][34]} = K^{22}, \\ \mathcal{M}_{(123)[34]}^{[34]} &= K_2^2, \mathcal{M}_{(123)}^{[34]}_{[34]} = K^2_2, \end{aligned} \quad (7.870b)$$

$$\mathcal{M}_{(123)[ab]}^{[12]} = (K_3^1)^{ab}, \quad \mathcal{M}_{(123)}^{[12]}_{[ab]} = (K^1_3)_{ab}, \quad (a, b \in \mathcal{S}_3), \quad (7.870c)$$

$$\mathcal{M}_{(123)}^{[ab]}_{[34]} = (K_2^3)^{ab}, \quad \mathcal{M}_{(123)[34]}^{[ab]} = (K^3_2)^{ab}, \quad (a, b \in \mathcal{S}_3), \quad (7.870d)$$

$$\mathcal{M}_{(123)[ab][cd]} = (K_{33})_{[ab][cd]}, \quad \mathcal{M}_{(123)}^{[ab][cd]} = (K^{33})^{[ab][cd]}, \quad a, b, c, d \in \mathcal{S}_3. \quad (7.870e)$$

7.2.15.5 ポテンシャル

ポテンシャル V は次の構造をもつ :

$$V = \frac{g^2}{672} (V_{22} + s^2 V_{11} + s V_{21} + s V_{12}). \quad (7.871)$$

ここで,

$$\begin{aligned} V_{22} &= \mathcal{M}^{[ab][cd]} (\theta_{bp} \theta_{dq} W_{ac}^{pq} - 21 \theta_{ac} \theta_{bd}) \\ &= K^{11} (-42 + W_{11}^{22} + W_{22}^{11} - W_{12}^{21} - W_{21}^{12}) \\ &\quad + e^{2(x_1+x_2)} \left[\cos(2z) \sum_{i \in \mathcal{S}_1, j \in \mathcal{S}_2} W_{jj}^{ii} - i \sin(2z) \sum_{i, j \in \mathcal{S}_1, k, l \in \mathcal{S}_2} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} W_{kl}^{ij} \right] \\ &\quad + \sum_{a, c \in \mathcal{S}_3} (M_{(5)}^{UU})^{ac} (W_{ac}^{11} + W_{ac}^{22}), \end{aligned} \quad (7.872a)$$

$$\begin{aligned} V_{11} &= s^{-2} \mathcal{M}_{[ab][cd]} (\xi^{bp} \xi^{dq} W_{pq}^{ac} - 21 \xi^{ac} \xi^{bd}) \\ &= K^{22} (-42 + W_{44}^{33} + W_{33}^{44} - W_{43}^{34} - W_{34}^{43}) \\ &\quad + e^{-2(x_1+x_2)} \left[\cos(2z) \sum_{i \in \mathcal{S}_1, j \in \mathcal{S}_2} W_{jj}^{ii} + i \sin(2z) \sum_{i, j \in \mathcal{S}_1, k, l \in \mathcal{S}_2} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} W_{kl}^{ij} \right] \\ &\quad + \sum_{a, c \in \mathcal{S}_3} (M_{(6)}^{DD})_{ac} (W_{33}^{ac} + W_{44}^{ac}), \end{aligned} \quad (7.872b)$$

$$\begin{aligned} V_{21} &= s^{-1} \mathcal{M}^{[ab]}_{[cd]} (\theta_{bp} \xi^{dq} W_{aq}^{pc} + 21 (\theta \xi)_a^c \delta_b^d) \\ &= K^1_2 (W_{14}^{23} - W_{24}^{13} - W_{13}^{24} + W_{23}^{14}), \end{aligned} \quad (7.872c)$$

$$\begin{aligned} V_{12} &= s^{-1} \mathcal{M}_{[ab]}^{[cd]} (\theta_{bp} \xi^{dq} W_{qa}^{cp} + 21 (\theta \xi)_a^c \delta_b^d) \\ &= K^1_2 (W_{41}^{32} - W_{42}^{31} - W_{31}^{42} + W_{32}^{41}). \end{aligned} \quad (7.872d)$$

まず,

$$\begin{aligned} W_{22}^{11} - W_{21}^{12} &= W_{11}^{22} - W_{12}^{21} \\ &= 4 + 2\text{Tr}(M_{(5)UU}M_{(5)DD} + M_{(5)UD}^2) = 12, \end{aligned} \quad (7.873)$$

$$\begin{aligned} W_{33}^{11} &= W_{33}^{22} = W_{44}^{11} = W_{44}^{22} \\ &= 2\cos(2z) (K^{11}e^{-2(x_1+x_2)} + K_2 2e^{2(x_1+x_2)}) + 2\text{Tr} {}^T M_{(5)UU} M_{(6)DD} \end{aligned} \quad (7.874)$$

$$\begin{aligned} W_{34}^{12} &= W_{43}^{21} = -W_{43}^{12} = -W_{34}^{21} \\ &= 2i\sin(2z) (K^{11}e^{-2(x_1+x_2)} - K_{22}e^{2(x_1+x_2)}), \end{aligned} \quad (7.875)$$

$$\begin{aligned} W_{ac}^{11} &= W_{ac}^{22} \quad (a, c \in \mathcal{S}_3) \\ &= 2K^{11}(M_{(5)DD})_{ac} + 4e^{2(x_1+x_2)}\cos(2z)(M_{(6)DD})_{ac} \\ &\quad - 2(K^1_3)_{[cf]}(M_{(5)DU})_a{}^f - 2(K_3^1)_{[af]}(M_{(5)UD})^f{}_c \\ &\quad + 2 \sum_{b,d \in \mathcal{S}_3} (K_{33})_{[ab][cd]}(M_{(5)UU})^{[bd]} \end{aligned} \quad (7.876)$$

より,

$$\begin{aligned} V_{22} &= K^{11} \{-10 + \text{Tr}(M_{(5)UU} {}^T M_{(5)DD})\} + 8\cos(4z)e^{4(x_1+x_2)}K_{22} \\ &\quad + 16\cos(2z)e^{2(x_1+x_2)}\text{Tr}({}^T M_{(5)UU} M_{(6)DD}) \\ &\quad - 4 \sum_{a,b \in \mathcal{S}_3} \{(K^1_3)_{ab}({}^T M_{(5)UU} M_{(5)DU})^{ab} + (K_3^1)_{ab}(M_{(5)UU} {}^T M_{(5)UD})_{ab}\} \\ &\quad + 4 \sum_{a,b,c,d \in \mathcal{S}_3} (K_{33})_{[ab][cd]}(M_{(5)UU})^{ac}(M_{(5)UU})^{bd}. \end{aligned} \quad (7.877)$$

次に,

$$\begin{aligned} W_{44}^{33} - W_{43}^{34} &= W_{33}^{44} - W_{34}^{43} \\ &= 4 + 2\text{Tr}(M_{(6)UU}M_{(6)DD} + M_{(6)UD}^2) = 12, \end{aligned} \quad (7.878)$$

$$\begin{aligned} W_{33}^{ac} &= W_{44}^{ac} \quad (a, c \in \mathcal{S}_3) \\ &= 2K_{22}(M_{(6)UU})^{ac} + 4e^{-2(x_1+x_2)}\cos(2z)(M_{(5)UU})^{ac} \\ &\quad + 2(K^3_2)^{[af]}(M_{(6)DU})_f{}^c + 2(K_2^3)^{[cf]}(M_{(6)UD})^a{}_f \\ &\quad + 2 \sum_{b,d \in \mathcal{S}_3} (K^{33})_{[ab][cd]}(M_{(6)DD})_{[bd]} \end{aligned} \quad (7.879)$$

より,

$$\begin{aligned}
V_{11} &= K_{22} \{-10 + \text{Tr}(M_{(6)DD} {}^T M_{(6)UU})\} + 8 \cos(4z) e^{-4(x_1+x_2)} K^{11} \\
&\quad + 16 \cos(2z) e^{-2(x_1+x_2)} \text{Tr}(M_{(5)UU} {}^T M_{(6)DD}) \\
&\quad + 4 \sum_{a,b \in \mathcal{S}_3} \{(K^3_3)^{ab} (M_{(6)DD} {}^T M_{(6)DU})^{ab} + (K^3_2)^{ab} ({}^T M_{(6)UD} M_{(6)DD})_{ab}\} \\
&\quad + 4 \sum_{a,b,c,d \in \mathcal{S}_3} (K^{33})^{[ab][cd]} (M_{(6)DD})_{ac} (M_{(6)DD})_{bd}. \tag{7.880}
\end{aligned}$$

また, 容易に

$$V_{12} = V_{21} = 0 \tag{7.881}$$

となることが確かめられる.

以上より,

$$\begin{aligned}
&V_{22} + s^2 V_{11} + s V_{12} + s V_{21} \\
&= 6K^{11} + 6s^2 K_{22} + 8 \cos(4z) (K_{22} e^{4(x_1+x_2)} + s^2 K^{11} e^{-4(x_1+x_2)}) \\
&\quad + 32 \cos(2z) (e^{2(x_1+x_2)} + s^2 e^{-2(x_1+x_2)}) \text{Tr}({}^T M_{(5)UU} M_{(6)DD}) \\
&\quad + V_5 + s^2 V_6. \tag{7.882}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
V_5 &= 4K^{11} \{-4 + \text{Tr}(M_{(5)UU} {}^T M_{(5)DD})\} \\
&\quad + 4 \text{Tr} [K^1_3 M_{(5)UU} {}^T M_{(5)UD} + K^1_3 {}^T M_{(5)UU} M_{(5)DU}] \\
&\quad + 4 \sum_{a,b,c,d \in \mathcal{S}_3} (K_{33})_{[ab][cd]} (M_{(5)UU})^{ac} (M_{(5)UU})^{bd}, \tag{7.883a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_6 &= 4K_{22} \{-4 + \text{Tr}(M_{(6)DD} {}^T M_{(6)UU})\} \\
&\quad - 4 \text{Tr} [K^3_2 M_{(6)DD} {}^T M_{(6)DU} + K^3_2 {}^T M_{(6)DD} M_{(6)UD}] \\
&\quad + 4 \sum_{a,b,c,d \in \mathcal{S}_3} (K^{33})^{[ab][cd]} (M_{(6)DD})_{ac} (M_{(6)DD})_{bd}. \tag{7.883b}
\end{aligned}$$

8 弦理論

Last update: 2017/11/13

8.1 Framework

String Model \Rightarrow Qn. Theory \Rightarrow Outputs

1. String model:

- Target space & background fields: $X : (\Sigma, g) \rightarrow (M, \Phi)$
- Action: $S = S_m(g, X; \Phi)$
- Field Equation: $F[X] = 0, T_{ab} = 0.$
- Boundary Conditions: $X|_{\partial\Sigma}$
- Invariances:
 - WS diffeomorphism invariance
 - WS Weyl invariance
 - WS supersymmetry
 - TS symmetries

2. Qn. Theory

- Gauge fixing \Rightarrow CFTs
- Regularization
- Free physical states と Vertex operators の構成 $\Rightarrow \mathcal{V}_\alpha$
- Construction of S-matrix

3. Outputs

- Particle spectrum
- S-matrix
- Low energy effective field theory

8.2 S 行列: Non-SUSY

S 行列は経路積分と vertex 作用素を用いて形式的に

$$S_{c_1 \dots c_n o_1 \dots o_m} = \sum_{\text{WStopologies}} \frac{1}{V_{\text{diff} \times \text{Weyl}}} \int [dX dg] e^{-S_m[X, g; \Phi] - \lambda \chi(\Sigma)} \\ \times \prod_{i=1}^n \int_{\Sigma} d^2 \sigma_i g(\sigma_i)^{1/2} \mathcal{V}_{c_i}(\sigma_i) \prod_{j=1}^m \int_{\partial \Sigma} ds_j \mathcal{V}_{o_j}(s_j) \quad (8.2.1)$$

と書かれる。

この式の右辺に正確な意味を与えるには、ゲージ固定が必要である。まず、 $W\Sigma$ の共形構造のモジュライ自由度を (t^1, \dots, t^μ) として、各モジュライ t に対応する計量の代表元を $\hat{g}_{ab}(t)$ 固定する。さらに、 $\hat{g}_{ab}(t)$ を不変に保つ $\text{diff} \times \text{Weyl}$ の自由度、すなわち CKF (共形 Killing ベクトル) の自由度を κ として、この自由度 (の一部) を vertex 作用素の κ 個の位置座標を $\sigma_i^a = \hat{\sigma}_i^a ((i, a) \in f_c)$, $s_j = \hat{s}_j (j \in f_o)$ と固定することにより取り除く。このとき、Fadeev-Popov 行列式 $\Delta_{FP}(g, \sigma, s)$ を

$$1 = \Delta_{FP}(g, \sigma, s) \int_F d^\mu t \int_{\text{diff} \times \text{Weyl}} [d\zeta] \delta(g - \hat{g}(t)^\zeta) \\ \prod_{(a,i) \in f_c} \delta(\sigma_i^a - \hat{\sigma}_i^{\zeta a}) \prod_{j \in f_o} \delta(s_j - \hat{s}_j^\zeta) \quad (8.2.2)$$

により定義すると、

$$S_{c_1 \dots c_n o_1 \dots o_m} = \sum_{\text{WStopologies}} \int_F d^\mu t \Delta_{FP}(\hat{g}(t), \hat{\sigma}, \hat{s}) \int [dX] \int \prod_{(a,i) \notin f_c} d\sigma_i^a \int \prod_{j \notin f_o} ds_j \\ \times e^{-S_m[X, \hat{g}; \Phi] - \lambda \chi(\Sigma)} \prod_{i=1}^n [g(\sigma_i)^{1/2} \mathcal{V}_{c_i}(\sigma_i)] \prod_{j=1}^m \mathcal{V}_{o_j}(s_j). \quad (8.2.3)$$

CKV および正則 2 次微分に対応する Grassmann 変数 c^a , b_{ab} を導入するとこの表式は

$$S_{c_1 \dots c_n o_1 \dots o_m} = \sum_{\text{WStopologies}} e^{-\lambda \chi(\Sigma)} \int_F \frac{d^\mu t}{n_R} \int \prod_{(a,i) \notin f_c} d\sigma_i^a \int \prod_{j \notin f_o} ds_j \\ \times \left\langle \prod_{k=1}^{\mu} \frac{1}{4\pi} (b, \partial_k \hat{g}) \prod_{(a,i) \in f_c} c^a(\hat{\sigma}_i) \prod_{j \in f_o} t_a(s_j) c^a(s_j) \right\rangle_{b,c} \\ \times \left\langle \prod_{i=1}^n [g(\sigma_i)^{1/2} \mathcal{V}_{c_i}(\sigma_i)] \prod_{j=1}^m \mathcal{V}_{o_j}(s_j) \right\rangle_X \quad (8.2.4)$$

と書き換えられる。ここで,

$$\langle O_1 \rangle_X = \int [dX] O_1[X] e^{-S_m}, \quad (8.2.5)$$

$$\langle O_2 \rangle_{b,c} = \int [db dc] O_2[b, c] e^{-S_g}, \quad (8.2.6)$$

$$S_g = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} d^2\sigma \hat{g}^{1/2} b^{ab} D_a c_b. \quad (8.2.7)$$

WS Σ の共形構造およびモジュライパラメータ t を, Σ の複素チャートの集合 $\{z_m\}$ およびそれらの間の変換則 $z_m = z_m(z_n, t)$ と見なし, 各 vertex 作用素にその位置を原点とする平坦複素チャートを対応させると, vertex 作用素の位置をモジュライパラメータに含めることができる。このとき, S-行列はコンパクトに

$$S(1; \dots; n) = \sum_{\text{WStopologies}} e^{-\lambda\chi} \int_F \frac{d^m t}{n_R} \left\langle \prod_{k=1}^m B_k \prod_{i=1}^n \hat{\psi}_i \right\rangle \quad (8.2.8)$$

と表される。ここで,

$$\hat{\psi} = \tilde{c}c \mathcal{V}_m \text{ (closed)}, \quad t_a c^a \mathcal{V}_m \text{ (open)}, \quad (8.2.9a)$$

$$B_k = \frac{1}{2\pi i} \sum_{(mn)} \left(dz_m \frac{\partial z_m}{\partial t^k} \Big|_{z_n} b_{z_m z_m} - d\bar{z}_m \frac{\partial \bar{z}_m}{\partial t^k} \Big|_{\bar{z}_n} b_{\bar{z}_m \bar{z}_m} \right) \quad (8.2.9b)$$

である。

注: 通常の場合の理論における S 行列と弦理論での S 行列との関係は, (4 元運動量を含む) 量子数に基づく物理 1 粒子状態の対応および各 1 粒子状態の規格化の対応により決まる。

8.3 CFT

Riemann 面 Σ 上の CFT は, 基本変数 X に対する共形不変な作用積分 S に基づいて, 各複素座標系 z ごとに, X から構成された局所作用素 $F(X)$ に以下の要請を満たす期待値 $\langle F(X) \rangle_z$ を対応させるルールである:

1. 任意の $F(X)$ に対して

$$\left\langle \frac{\delta F(X)}{\delta X(\sigma)} - \frac{\delta S}{\delta X(\sigma)} F(X) \right\rangle_z = 0. \quad (8.3.1)$$

2. 共形変換の生成作用素 $T(z)$, $\tilde{T}(\bar{z})$ が与えられ, 次の OPE を満たす:

$$T(z)T(0) \sim \frac{c}{2z^4} + \frac{2}{z^2}T(0) + \frac{1}{z}\partial T(0), \quad (8.3.2a)$$

$$\tilde{T}(\bar{z})\tilde{T}(0) \sim \frac{\tilde{c}}{2\bar{z}^4} + \frac{2}{\bar{z}^2}\tilde{T}(0) + \frac{1}{\bar{z}}\bar{\partial}\tilde{T}(0). \quad (8.3.2b)$$

3. 2つの複素座標系 z と z' が無限小共形変換

$$\delta z := z' - z = v(z) \quad (8.3.3)$$

で結ばれるとき,

$$\delta \langle F \rangle_z := \langle F \rangle_{z'} - \langle F \rangle_z = \langle \delta F \rangle_z. \quad (8.3.4)$$

ここで, 一般に, $\mathcal{A}(z, \bar{z})$ に対して,

$$\delta \mathcal{A}(z_0, \bar{z}_0) = -\text{Res}_{z \rightarrow z_0} v(z) T(z) \mathcal{A}(z_0, \bar{z}_0) - \overline{\text{Res}_{\bar{z} \rightarrow \bar{z}_0} v(\bar{z}) \tilde{T}(\bar{z}) \mathcal{A}(z_0, \bar{z}_0)}. \quad (8.3.5)$$

以下, 作用素 A が X の位置 $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ での値およびその微係数にのみ依存するとき, $\text{supp}(A)$ を集合 $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ により定義する. また,

$$A = 0 \Leftrightarrow \langle AF \rangle = 0 \quad \forall F \text{ s.t. } \text{supp}(A) \cap \text{supp}(F) = \emptyset \quad (8.3.6)$$

と定義する.

8.3.1 Ward Identity

カレントの定義: 変換 $X'(\sigma) = X(\sigma) + \delta_\epsilon X(\sigma)$ に対して

$$[dX'] \exp(-S[X']) = [dX] \exp(-S[X]) \quad (8.3.7)$$

が成り立つとする. このとき, 局所場 $j^a(\sigma)$ が存在して, 任意の関数 $\rho(\sigma)$ を用いて

$$X'(\sigma) = X(\sigma) + \rho(\sigma) \delta_\epsilon X(\sigma) \quad (8.3.8)$$

で定義される変換に対して

$$[dX'] \exp(-S[X']) = [dX] \exp(-S[X]) \left[1 + \frac{i\epsilon}{2\pi} \int d^2\sigma g^{1/2} j^a(\sigma) \partial_a \rho + O(\epsilon^2) \right] \quad (8.3.9)$$

が成り立つ.

Ward 恒等式および保存則: $\rho(\sigma)$ が $\sigma = \sigma_0$ 近傍でのみゼロでないとして, このカレントの定義式に $F(X'(\sigma_1)) = F(X(\sigma_1))(\sigma_1 \neq \sigma_0)$ を掛け経路積分を実行すると

$$\left\langle F(\sigma_1) \int d^2\sigma g^{1/2} D_a j^a(\sigma) \rho(\sigma) \right\rangle = 0 \quad (8.3.10)$$

を得る. よって, CFT の意味での保存則

$$D_a j^a = 0 \quad (8.3.11)$$

が得られる. また, $A(\sigma)$ の変換を $\delta_\epsilon A$ とすると, Ward 恒等式

$$\delta_\epsilon A(\sigma_0) + \frac{\epsilon}{2\pi i} \int_R d^2\sigma g^{1/2} D_a j^a(\sigma) A(\sigma_0) = 0 \quad (8.3.12)$$

が成り立つ. ここで, R は σ_0 を含む任意の領域である. 局所複素座標系において

$$j_a d\sigma^a = j dz + \tilde{j} d\bar{z} \quad (8.3.13)$$

とおくと, この恒等式は次のように書き換えられる:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\epsilon} \delta_\epsilon A(z_0, \bar{z}_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} (j dz - \tilde{j} d\bar{z}) A(z_0, \bar{z}_0) \\ &= \text{Res}_{z \rightarrow z_0} j(z) A(z_0, \bar{z}_0) + \overline{\text{Res}_{\bar{z} \rightarrow \bar{z}_0} \tilde{j}(\bar{z}) A(z_0, \bar{z})} \end{aligned} \quad (8.3.14)$$

ただし, 2 番目の等式は $j = j(z)$, $\tilde{j} = \tilde{j}(\bar{z})$ となる場合にのみ成立.

8.3.2 共形変換

8.3.2.1 共形ウエイト

複素座標の変換

$$z' = \zeta z \quad (8.3.15)$$

に対して局所作用素 $A(z, \bar{z})$ が

$$A'(z', \bar{z}') = \zeta^{-h} \bar{\zeta}^{-\tilde{h}} A(z, \bar{z}) \quad (8.3.16)$$

と変換するとき, (h, \tilde{h}) を A の共形ウエイトという. 共形ウエイト (h, \tilde{h}) をもつ作用素と $(T(z), \tilde{T}(\bar{z}))$ の間の OPE は次の構造をもつ:

$$T(z)A(0,0) = \dots + \frac{h}{z^2}A(0,0) + \frac{1}{z}\partial A(0,0) + \dots, \quad (8.3.17a)$$

$$\tilde{T}(\bar{z})A(0,0) = \dots + \frac{\tilde{h}}{\bar{z}^2}A(0,0) + \frac{1}{\bar{z}}\bar{\partial}A(0,0) + \dots. \quad (8.3.17b)$$

8.3.2.2 共形変換

一般に，無限小共形変換

$$z' = z + \epsilon v(z) \quad (8.3.18)$$

に対する保存カレントは

$$j = iv(z)T(z), \quad \tilde{j} = i\overline{v(z)}\tilde{T}(\bar{z}) \quad (8.3.19)$$

で与えられる．具体的には， $A(z, \bar{z})$ と $T(z)$, $\tilde{T}(\bar{z})$ との OPE が

$$T(z)A(z_0, \bar{z}_0) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} A^{(n)}(z_0, \bar{z}_0), \quad (8.3.20a)$$

$$\tilde{T}(\bar{z})A(z_0, \bar{z}_0) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\bar{z} - \bar{z}_0)^{n+1}} \tilde{A}^{(n)}(z_0, \bar{z}_0) \quad (8.3.20b)$$

で与えられるとき， A の共形変換は

$$\delta A(z, \bar{z}) = -\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\partial^n v(z) A^{(n)}(z, \bar{z}) + \bar{\partial}^n \overline{v(z)} \tilde{A}^{(n)}(z, \bar{z}) \right] \quad (8.3.21)$$

と表される．

8.3.2.3 Virasoro 代数

\mathbb{C} 上の CFT において， $T(z)$ は OPE

$$T(z)T(0) \sim \frac{c}{2z^4} + \frac{2}{z^2}T(0) + \frac{1}{z}\partial T(0) \quad (8.3.22)$$

に従い，無限小共形変換 $\delta z = \epsilon v(z)$ に対して，

$$\epsilon^{-1}\delta T(z) = -\frac{c}{12}\partial^3 v(z) - 2\partial v(z)T(z) - v(z)\partial T(z) \quad (8.3.23)$$

と変換する．ここで， c は CFT の中心電荷である． $\tilde{T}(\bar{z})$ も同様である．

$T(z), \tilde{T}(\bar{z})$ を $z = 0$ で Laurent 展開すると，

$$T(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{L_m}{z^{m+2}}, \quad \tilde{T}(\bar{z}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{L}_m}{\bar{z}^{m+2}}. \quad (8.3.24)$$

CFT の中心電荷を (c, \tilde{c}) とすると， L_n, \tilde{L}_n に対応する作用素は次の交換関係を満たす：

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m,-n}, \quad (8.3.25a)$$

$$[\tilde{L}_m, \tilde{L}_n] = (m - n)\tilde{L}_{m+n} + \frac{\tilde{c}}{12}(m^3 - m)\delta_{m,-n}. \quad (8.3.25b)$$

零点エネルギーについて エネルギースペクトルが

$$\omega = n - \nu, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.3.26)$$

で与えられる自由粒子に対し、正規化された1成分当たりの零点エネルギーは

$$E = \pm \frac{1}{2} \sum \omega = \pm \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{24} - \frac{(2\nu - 1)^2}{8} \right\} \quad (8.3.27)$$

ただし、符号は boson に対して +, fermion に対して -。これより、 L_0 の零点は、central charge を c として、

$$L_0 =: L_0 : + a_0; \quad a_0 = E_0 + \frac{c}{24}. \quad (8.3.28)$$

8.3.3 状態-作用素対応

円筒 $\Sigma \approx \mathbb{R} \times S^1$ 上の X を基本変数とし、作用積分が $S[X]$ で与えられる CFT を考える。適当な複素座標系 z のもとで、 Σ は複素平面から原点 $z = 0$ を除いた領域 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ と同一視される。今、 \mathbb{C} 上で定義された同じ作用積分 $S[X]$ をもつ CFT を考え、 $z = 0$ での局所作用素 $A(0, 0)$ に対して

$$\Psi_A[X_0; R] = \int_{X(R)=X_0} [dX] e^{-S[X]} A(0, 0) \quad (8.3.29)$$

が well-defined であるとする。このとき、

$$\Psi_A[X_0; R] = \int dX_1 \langle X_0 | (R/r)^{-\hat{H}} | X_1 \rangle \Psi_A[X_1; r] \quad (8.3.30)$$

より、 $\Psi_A[X; R]$ は、 $r = |z|$ を (Euclidean) 時間と見なした時の Σ 上の CFT に対する Schrödinger 表示での状態ベクトルを与える。逆に、Schrödinger 表示での状態ベクトル $\Psi[X; R]$ が与えられたとき、

$$\begin{aligned} \Psi[X_0; R] &= \int dX_1 \langle X_0 | (R/r)^{-\hat{H}} (R/r)^{\hat{H}} | X_1 \rangle \Psi[X_1; R] \\ &= \int dX_1 \int_{X(R)=X_0, X(r)=X_1} [dX] e^{-S[X]} \langle X_1 | (R/r)^{\hat{H}} | \Psi(R) \rangle \end{aligned} \quad (8.3.31)$$

において、適当な局所作用素 $A(0, 0)$ が存在して、... ?..., $\Psi = \Psi_A$ となる。

次に,

$$\Sigma = \Sigma_0 \cup \sum_i \Sigma_i; \quad (8.3.32)$$

$$\Sigma_i \approx \mathbb{R}_+ \times S^1, \quad (8.3.33)$$

$$\partial\Sigma_0 = \cup_i \partial\Sigma_i \quad (8.3.34)$$

と表される散乱振幅を $A(\Sigma)$ とする. ここで, Σ_i の部分が漸近的な自由粒子状態に対応するとすると,

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \prod_i \int_{\partial\Sigma_i} [dX_i] \Psi_i[X_i] \int_{\Sigma_0, X|_{\partial\Sigma_i=X_i}} [dX] e^{-S[X]}, \quad (8.3.35)$$

$$\Psi_i[X_i] = \int_{\Sigma'_i} e^{-S[X]} A_i. \quad (8.3.36)$$

ここで, Σ'_i は $\Sigma_i \cup \infty$ と共形的な複素平面の円盤. よって, Σ' を $\Sigma_0 \cup \sum_i \Sigma'_i$ と同相な Σ の共形的コンパクト Riemann 面とすると,

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_{\Sigma'} [dX] e^{-S[X]} \prod_i A_i. \quad (8.3.37)$$

8.3.4 CFT の例

8.3.4.1 X CFT (commuting)

作用積分:

$$S_X = \pm \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X \bar{\partial} X \quad (8.3.38)$$

場の方程式:

$$\partial \bar{\partial} X = 0. \quad (8.3.39)$$

Normal ordering:

$$X(z_1, \bar{z}_1) X(z_2, \bar{z}_2) = : X(z_1, \bar{z}_1) X(z_2, \bar{z}_2) : \mp \frac{\alpha'}{2} \ln |z_{12}|^2 \quad (8.3.40)$$

$T(z)$ と $\tilde{T}(\bar{z})$:

$$T(z) = \mp \frac{1}{\alpha'} : (\partial X(z))^2 :, \quad \tilde{T}(\bar{z}) = \mp \frac{1}{\alpha'} : (\bar{\partial} X(x))^2 :. \quad (8.3.41)$$

共形ウエイトと中心電荷：

$$(h_X, \tilde{h}_X) = (0, 0), \quad (8.3.42a)$$

$$c_X = 1, \quad \tilde{c}_X = 1. \quad (8.3.42b)$$

作用素の Fock 表現： \mathbb{C}^* 上で

$$X(z, \bar{z}) = x - i\frac{\alpha'}{2}p \ln |z|^2 + i \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \left(\frac{\alpha_m}{z^m} + \frac{\tilde{\alpha}_m}{\bar{z}^m} \right). \quad (8.3.43)$$

と展開すると、作用素形式で

$$[\alpha_m, \alpha_n] = [\tilde{\alpha}_m, \tilde{\alpha}_n] = \pm m \delta_{m, -n}, \quad (8.3.44a)$$

$$[x, p] = \pm i. \quad (8.3.44b)$$

対応する Fock 状態は

$$p|0, k\rangle = k|0, k\rangle, \quad \alpha_n|0, k\rangle = 0 \quad (n > 0), \quad (8.3.45a)$$

$$|N; k\rangle = \left[\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{-n}^{N_n}}{(n^{N_n} N_n!)^{1/2}} \right] |0; k\rangle. \quad (8.3.45b)$$

Virasoro 作用素：

$$L_m = \pm \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} : \alpha_{m-n} \alpha_n : + a^X \delta_{m,0}, \quad (8.3.46)$$

$$a^X = 0. \quad (8.3.47)$$

頂点作用素：

$$1 \mapsto |0; 0\rangle, \quad (8.3.48a)$$

$$: e^{ikX(0,0)} : \mapsto |0; k\rangle, \quad (8.3.48b)$$

$$: X(0,0)A : \mapsto x|A\rangle, \quad (8.3.48c)$$

$$: i \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \frac{1}{(m-1)!} \partial^m X(0)A : \mapsto \alpha_{-m}|A\rangle, \quad (8.3.48d)$$

$$: i \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \frac{1}{(m-1)!} \bar{\partial}^m X(0)A : \mapsto \tilde{\alpha}_{-m}|A\rangle, \quad (8.3.48e)$$

$$(8.3.48f)$$

8.3.4.2 bc CFT (anticommuting)

作用積分 :

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2z b \bar{\partial} c. \quad (8.3.49)$$

場の方程式 :

$$\bar{\partial} c = 0, \quad \bar{\partial} b = 0, \quad (8.3.50)$$

$$\bar{\partial} b(z) c(0) = 2\pi \delta^2(z, \bar{z}). \quad (8.3.51)$$

Normal ordering:

$$b(z_1) c(z_2) = ; b(z_1) c(z_2) : + \frac{1}{z_{12}}. \quad (8.3.52)$$

$T(z)$ と $\tilde{T}(\bar{z})$:

$$T(z) = : (\partial b) c : - \lambda \partial (: bc :), \quad (8.3.53a)$$

$$\tilde{T}(\bar{z}) = 0. \quad (8.3.53b)$$

共形ウェイトと中心電荷 :

$$(h_b, \tilde{h}_b) = (\lambda, 0), \quad (h_c, \tilde{h}_c) = (1 - \lambda, 0), \quad (8.3.54a)$$

$$c = -3(2\lambda - 1)^2 + 1, \quad \tilde{c} = 0. \quad (8.3.54b)$$

(注 : ボーズ的弦に対する ghost 場は $\lambda = 2$ に対応.)

ゴースト数: 変換

$$\delta b = -i\epsilon b, \quad \delta c = i\epsilon c \quad (8.3.55)$$

に対するカレントは

$$j = - : bc :, \quad (8.3.56)$$

OPE

$$T(z) j(0) \sim \frac{1 - 2\lambda}{z^3} + \frac{1}{z^2} j(0) + \frac{1}{z} \partial j(0) \quad (8.3.57)$$

より, j の無限小共形変換は

$$\epsilon^{-1} \delta j = -v \partial j - j \partial v + \frac{2\lambda - 1}{2} \partial^2 v, \quad (8.3.58)$$

有限変換は

$$(\partial_z z') j_{z'}(z') = j_z(z) + \frac{2\lambda - 1}{2} \frac{\partial_z^2 z'}{\partial_z z'} \quad (8.3.59)$$

で与えられる.

Fock 表現: \mathbb{C}^* 上で

$$b(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{b_m}{z^{m+\lambda}}, \quad c(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{c_m}{z^{m+1-\lambda}} \quad (8.3.60)$$

と展開すると, 作用素形式で

$$\{b_m, c_n\} = \delta_{m, -n}. \quad (8.3.61)$$

対応する Fock 状態は

$$b_0 | \downarrow \rangle = 0, \quad c_0 | \downarrow \rangle = | \uparrow \rangle, \quad \Rightarrow \quad b_0 | \uparrow \rangle = | \downarrow \rangle, \quad c_0 | \uparrow \rangle = 0 \quad (8.3.62a)$$

$$b_n | \downarrow \rangle = b_n | \uparrow \rangle = c_n | \downarrow \rangle = c_n | \uparrow \rangle = 0, \quad (n > 0) \quad (8.3.62b)$$

$$|N_b, N_c; \downarrow \rangle = \prod_{n=1}^{\infty} b_{-n}^{N_{bn}} \prod_{m=1}^{\infty} c_{-m}^{N_{cm}} | \downarrow \rangle, \quad (N_{bn}, N_{cm} = 0, 1) \quad (8.3.62c)$$

$$|N_b, N_c; \uparrow \rangle = \prod_{n=1}^{\infty} b_{-n}^{N_{bn}} \prod_{m=1}^{\infty} c_{-m}^{N_{cm}} | \uparrow \rangle, \quad (N_{bn}, N_{cm} = 0, 1). \quad (8.3.62d)$$

Virasoro 作用素:

$$L_m = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\lambda - n) : b_n c_{m-n} : + a^g \delta_{m,0}, \quad (8.3.63)$$

$$a^g = \frac{1}{2} \lambda (1 - \lambda). \quad (8.3.64)$$

頂点作用素:

$$1 \mapsto b_{-1} | \downarrow \rangle, \quad (8.3.65a)$$

$$\frac{1}{m!} \partial^m b(0) A \mapsto b_{-m-2} | A \rangle \quad (m \geq 0), \quad (8.3.65b)$$

$$\frac{1}{m!} \partial^m c(0) A \mapsto c_{-m+1} | A \rangle \quad (m \geq 0). \quad (8.3.65c)$$

8.3.4.3 ψ CFT (anticommuting)

作用積分 :

$$S = \pm \frac{1}{4\pi} \int d^2 z \psi \bar{\partial} \psi. \quad (8.3.66)$$

場の方程式 :

$$\bar{\partial} \psi = 0, \quad (8.3.67)$$

$$\bar{\partial} \psi(z) \psi(0) = \pm 2\pi \delta^2(z, \bar{z}). \quad (8.3.68)$$

Normal ordering:

$$\psi(z_1) \psi(z_2) = : \psi(z_1) \psi(z_2) : \pm \frac{1}{z_{12}}. \quad (8.3.69)$$

$T(z)$ と $\tilde{T}(\bar{z})$:

$$T(z) = \mp \frac{1}{2} : \psi \partial \psi : \quad (8.3.70a)$$

$$\tilde{T}(\bar{z}) = 0. \quad (8.3.70b)$$

共形ウェイトと中心電荷 :

$$(h_\psi, \tilde{h}_\psi) = (1/2, 0), \quad (8.3.71a)$$

$$c = 1/2, \quad \tilde{c} = 0. \quad (8.3.71b)$$

境界条件 : \mathbb{C}^* 上で

$$\psi(e^{2\pi i} z) = e^{\pi(1-2\nu)i} \psi(z). \quad (8.3.72)$$

ここで,

$$\text{Ramond field} : \nu = 0,$$

$$\text{Neveu-Schwarz field} : \nu = 1/2.$$

自由場に対する生成消滅演算子: \mathbb{C}^* 上で

$$\psi(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} \frac{\psi_r}{z^{r+1/2}} \quad (8.3.73)$$

とおくと, 作用素表示で

$$\{\psi_r, \psi_s\} = \pm \delta_{r,-s}. \quad (8.3.74)$$

Virasoro 演算子:

$$L_m = \pm \frac{1}{4} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} (2r - m) : \psi_{m-r} \psi_r : + a^\psi \delta_{m,0}, \quad (8.3.75)$$

$$a^R = \frac{1}{16}, \quad a^{\text{NS}} = 0. \quad (8.3.76)$$

8.3.4.4 $\beta\gamma$ CFT (commuting)

作用積分 :

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \beta \bar{\partial} \gamma. \quad (8.3.77)$$

場の方程式 :

$$\bar{\partial} \gamma = 0, \quad \bar{\partial} \beta = 0, \quad (8.3.78)$$

$$\bar{\partial} \beta(z) \gamma(0) = 2\pi \delta^2(z, \bar{z}). \quad (8.3.79)$$

Normal ordering:

$$\beta(z_1) \gamma(z_2) = : \beta(z_1) \gamma(z_2) : - \frac{1}{z_{12}}, \quad (8.3.80a)$$

$$\gamma(z_1) \beta(z_2) = : \gamma(z_1) \beta(z_2) : + \frac{1}{z_{12}}. \quad (8.3.80b)$$

$T(z)$ と $\tilde{T}(\bar{z})$:

$$T(z) = : (\partial \beta) \gamma : - \lambda \partial (: \beta \gamma :), \quad (8.3.81a)$$

$$\tilde{T}(\bar{z}) = 0. \quad (8.3.81b)$$

共形ウエイトと中心電荷 :

$$(h_\beta, \tilde{h}_\beta) = (\lambda, 0), \quad (h_\gamma, \tilde{h}_\gamma) = (1 - \lambda, 0), \quad (8.3.82a)$$

$$c = 3(2\lambda - 1)^2 - 1, \quad \tilde{c} = 0. \quad (8.3.82b)$$

(注 : superstring の superghost は $\lambda = 3/2$ に対応.)

8.4 SCFT

8.4.1 Superconformal 代数

中心電荷 c の SCFT に対して

$$T_B(z)T_B(0) \sim \frac{c}{2z^4} + \frac{2}{z^2}T_B(0) + \frac{1}{z}\partial T_B(0), \quad (8.4.1a)$$

$$T_B(z)T_F(0) \sim \frac{3}{2z^2}T_F(0) + \frac{1}{z}\partial T_F(0), \quad (8.4.1b)$$

$$T_F(z)T_F(0) \sim \frac{2c}{3z^3} + \frac{2}{z}T_B(0). \quad (8.4.1c)$$

8.4.2 SCFT の例

8.4.2.1 $X\psi$ SCFT ((N, \tilde{N}) = (1, 1) 型)

作用積分:

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(\frac{2}{\alpha'} \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \psi^\mu \bar{\partial} \psi_\mu + \tilde{\psi}^\mu \partial \tilde{\psi}_\mu \right). \quad (8.4.2)$$

ここで, 共形ウエイトは

$$h_X = \tilde{h}_X = 0, \quad (8.4.3a)$$

$$h_\psi = \frac{1}{2}, \quad \tilde{h}_\psi = 0, \quad (8.4.3b)$$

$$h_{\tilde{\psi}} = 0, \quad \tilde{h}_{\tilde{\psi}} = \frac{1}{2}. \quad (8.4.3c)$$

OPE:

$$X^\mu(z, \bar{z})X^\nu(0, 0) \sim -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu} \ln |z|^2, \quad (8.4.4a)$$

$$\psi^\mu(z)\psi^\nu(0) \sim \frac{\eta^{\mu\nu}}{z}, \quad (8.4.4b)$$

$$\tilde{\psi}^\mu(\bar{z})\tilde{\psi}^\nu(0) \sim \frac{\eta^{\mu\nu}}{\bar{z}}. \quad (8.4.4c)$$

Superconformal current:

$$T_B(z) = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X^\mu(z) \partial X_\mu(z) :, \quad (8.4.5a)$$

$$T_F(z) = i(2/\alpha')^{1/2} : \psi^\mu(z) \partial X_\mu(z) :, \quad (8.4.5b)$$

$$\tilde{T}_B(\bar{z}) = -\frac{1}{\alpha'} : \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) \bar{\partial} X_\mu(\bar{z}) :, \quad (8.4.5c)$$

$$\tilde{T}_F(\bar{z}) = i(2/\alpha')^{1/2} : \tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) \bar{\partial} X_\mu(\bar{z}) :. \quad (8.4.5d)$$

中心電荷は

$$c = \tilde{c} = \frac{3}{2}D. \quad (8.4.6)$$

Superconformal transformation Current

$$j^\eta(z) = \eta(z)T_F(z), \quad \tilde{j}^\eta(\bar{z}) = \bar{\eta}(\bar{z})^t T_F(\bar{z}) \quad (8.4.7)$$

の生成する無限小超共形変換は

$$\epsilon^{-1}(2/\alpha')^{1/2}\delta X^\mu(z, \bar{z}) = -\eta(z)\psi^\mu(z) - \eta(z)^*\tilde{\psi}^\mu(\bar{z}). \quad (8.4.8a)$$

$$\epsilon^{-1}(2/\alpha')^{1/2}\delta\psi^\mu(z) = \eta(z)\partial X^\mu(z), \quad (8.4.8b)$$

$$\epsilon^{-1}(2/\alpha')^{1/2}\delta\tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) = \eta(z)^*\bar{\partial}X^\mu(\bar{z}) \quad (8.4.8c)$$

Fock 表現: \mathbb{C}^* での展開

$$\partial X^\mu(z) = -i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{\alpha_m^\mu}{z^{m+1}}, \quad (8.4.9a)$$

$$\bar{\partial}X^\mu(\bar{z}) = -i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{\tilde{\alpha}_m^\mu}{\bar{z}^{m+1}}, \quad (8.4.9b)$$

$$\psi^\mu = \sum_{r\in\mathbb{Z}+\nu}\frac{\psi_r^\mu}{z^{r+1/2}}, \quad \tilde{\psi}^\mu = \sum_{r\in\mathbb{Z}+\bar{\nu}}\frac{\tilde{\psi}_r^\mu}{\bar{z}^{r+1/2}} \quad (8.4.9c)$$

に対して,

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu}\delta_{m,-n}, \quad (8.4.10a)$$

$$\{\psi_r^\mu, \psi_s^\nu\} = \{\tilde{\psi}_r^\mu, \tilde{\psi}_s^\nu\} = \eta^{\mu\nu}\delta_{r,-s}. \quad (8.4.10b)$$

左 NS 場に対する真空は

$$\psi_r^\mu|0\rangle_{\text{NS}} = 0, \quad r > 0. \quad (8.4.11)$$

右 NS 場についても同様. 一方, R 場についてはゼロモードが $E^{D-1,1}$ 上の Clifford 代数

$$\{\psi_0^\mu, \psi_0^\nu\} = \{\tilde{\psi}_0^\mu, \tilde{\psi}_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \quad (8.4.12)$$

を与えるので, 左 R 場および右 R 場に対する真空はそれぞれ, $\text{SO}(D-1, 1)$ のスピノール表現に従う縮退をもつ. 例えば, $D = 10$ のときこの表現は 3 2次元で, 左 R 場に対して

$$\psi_r^\mu|s_0, \dots, s_4\rangle_{\text{R}} = 0, \quad r > 0 \quad (8.4.13a)$$

$$\psi_0^\mu|s\rangle_{\text{R}} = 2^{-1/2}|s'\rangle_{\text{R}}\Gamma_{s's}^\mu. \quad (8.4.13b)$$

右 R 場も同様.

Super-Virasoro 演算子: 左モードに対して

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} : \alpha_{m-n}^\mu \alpha_{\mu n} : + \frac{1}{4} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} (2r - m) : \psi_{m-r}^\mu \psi_{\mu r} : + a^m \quad (8.4.14a)$$

$$G_r = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \psi_{\mu r-n} \quad (r \in \mathbb{Z} + \nu). \quad (8.4.14b)$$

ここで, a^m は

$$R (\nu = 0): a^m = \frac{D}{16}, \quad NS (\nu = 1/2): a^m = 0. \quad (8.4.15)$$

右モードに対しても同様. 特に,

$$L_0 = \frac{1}{2} \alpha_0 \cdot \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \sum_{r \in \mathbb{N} - \nu} r \psi_{-r} \cdot \psi_r + a^m. \quad (8.4.16)$$

ただし,

$$\alpha_0^\mu = (\alpha'/2)^{1/2} p^\mu \text{ (閉弦)}, \quad (2\alpha')^{1/2} p^\mu \text{ (開弦)}. \quad (8.4.17)$$

WS フェルミオン数: $D = 10$ のとき

$$S_a = i^{\delta_{a,0}} \Sigma^{2a, 2a+1}; \quad \Sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} [\psi_r^\mu, \psi_{-r}^\nu] \quad (8.4.18)$$

を用いて,

$$\exp(\pi i F); \quad F := \sum_{a=0}^4 S_a \quad (8.4.19)$$

により WS フェルミオン数を定義すると,

$$\{e^{\pi i F}, \psi^\mu(z)\} = 0. \quad (8.4.20)$$

8.4.2.2 $bc\beta\gamma$ SCFT $((N, \tilde{N}) = (1, 0)$ 型)

作用積分:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2 z (b\bar{\partial}c + \beta\bar{\partial}\gamma) \quad (8.4.21)$$

ここで, 共形ウエイトは

$$h_b = \lambda, \quad h_c = 1 - \lambda, \quad (8.4.22a)$$

$$h_\beta = \lambda - \frac{1}{2}, \quad h_\gamma = \frac{3}{2} - \lambda. \quad (8.4.22b)$$

OPE:

$$b(z)c(0) \sim \frac{1}{z}, \quad (8.4.23a)$$

$$\beta(z)\gamma(0) \sim -\frac{1}{z}. \quad (8.4.23b)$$

Superconformal current:

$$T_B(z) = :(\partial b)c: - \lambda \partial(:bc:) + :(\partial\beta)\gamma: - \frac{2\lambda - 1}{2} \partial(:\beta\gamma) \quad (8.4.24a)$$

$$T_F(z) = -\frac{1}{2} : \partial\beta c : + \frac{2\lambda - 1}{2} \partial(:\beta c:) - 2 : b\gamma : . \quad (8.4.24b)$$

中心電荷は

$$c = [-3(2\lambda - 1)^2 + 1] + [3(2\lambda - 2)^2 - 1] = 9 - 12\lambda. \quad (8.4.25)$$

Fock 表現: $\lambda = 2$ の場合, \mathbb{C}^* で左モードを

$$b(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{b_m}{z^{m+2}}, \quad c(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{c_m}{z^{m-1}}, \quad (8.4.26a)$$

$$\beta(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} \frac{\beta_r}{z^{r+3/2}}, \quad \gamma(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} \frac{\gamma_r}{z^{r-1/2}} \quad (8.4.26b)$$

と展開すると, 交換関係は

$$\{b_m, c_n\} = \delta_{n, -m}, \quad [\gamma_r, \beta_s] = \delta_{r, -s}. \quad (8.4.27)$$

これより, NS 場に対する真空は

$$b_m|0\rangle_{\text{NS}} = 0 \quad (m \geq 0), \quad c_m|0\rangle_{\text{NS}} = 0 \quad (m \geq 1), \quad (8.4.28a)$$

$$\beta_r|0\rangle_{\text{NS}} = 0 \quad (r \geq 1/2), \quad \gamma_r|0\rangle_{\text{NS}} = 0 \quad (r \geq 1/2), \quad (8.4.28b)$$

R 場に対する真空は

$$b_m|0\rangle_{\text{R}} = 0 \quad (m \geq 0), \quad c_m|0\rangle_{\text{R}} = 0 \quad (m \geq 1), \quad (8.4.29a)$$

$$\beta_r|0\rangle_{\text{R}} = 0 \quad (r \geq 0), \quad \gamma_r|0\rangle_{\text{R}} = 0 \quad (r \geq 0). \quad (8.4.29b)$$

Super-Virasoro 演算子： 左モードに対して

$$L_m^g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (m+n) : b_{m-n} c_n : + \sum_{r \in \mathbb{Z} + \nu} \frac{1}{2} (m+2r) : \beta_{m-r} \gamma_r : + a^g \delta_{m,0}, \quad (8.4.30a)$$

$$G_r^g = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\frac{1}{2} (2r+n) \beta_{r-n} c_n + 2b_n \gamma_{r-n} \right]. \quad (8.4.30b)$$

ここで,

$$a^g = -\frac{5}{8} (\text{R}), \quad -\frac{1}{2} (\text{NS}). \quad (8.4.31)$$

右モードも同様.

8.5 自由弦の量子化

古典論：

運動方程式 (+境界条件) : $\partial \bar{\partial} X = 0$.

拘束条件 : $L_n = 0 \ (n \in \mathbb{Z})$

Poisson bracket: $\{x, p\} = 1, \quad \{\alpha_n, \alpha_m\} = -in\delta_{n,-m}, \dots$

8.5.1 Old Covariant Quantization

定式化:

量子拘束条件 : L_n^m を ghost 以外の場に対する Virasoro 作用素として

$$\mathcal{H}_{\text{phys}} := \{ \psi \mid (L_n^m + A\delta_{n,0})\psi = 0, \ n \geq 0 \}. \quad (8.5.1)$$

Null 部分空間 :

$$\mathcal{H}_{\text{null}} := \{ \psi \in \mathcal{H}_{\text{phys}} \mid \langle \psi \mid \chi \rangle = 0 \ \forall \ \chi \in \mathcal{H}_{\text{phys}} \}. \quad (8.5.2)$$

物理的 Hilbert 空間 :

$$\mathcal{H}_{\text{OCQ}} := \mathcal{H}_{\text{phys}} / \mathcal{H}_{\text{null}}. \quad (8.5.3)$$

整合性： $E^{D-1,1}$ をターゲット時空とするボゾン弦理論について、

$\mathcal{H}_{\text{phys}}$ が負ノルム状態を含まない $\Rightarrow A \geq -1$.

スペクトルが光円錐量子化と一致 $\Rightarrow A = -1, D = 26$.

8.5.2 BRST 量子化

定式化： Ghost および Gauge 固定項を含む作用積分の BRST 不変性から決まる BRST 電荷を Q_B , ghost b 場のゼロモードを b_0 , $L_n = L_n^m + L_n^g$ として、

Reduced Hilbert 空間：

$$\hat{\mathcal{H}} := \{\psi \mid b_0\psi = 0, L_0\psi = 0\}. \quad (8.5.4)$$

拘束条件：

$$\mathcal{H}_{\text{BRST}} := \left\{ \psi \in \hat{\mathcal{H}} \mid Q_B\psi = 0 \right\}. \quad (8.5.5)$$

Null 状態：

$$\mathcal{H}_{\text{null}} := \left\{ \psi = Q_B\chi \mid \chi \in \hat{\mathcal{H}} \right\}. \quad (8.5.6)$$

物理状態：

$$\mathcal{H}_{\text{phys}} := \mathcal{H}_{\text{BRST}} / \mathcal{H}_{\text{null}}. \quad (8.5.7)$$

整合性：

$$Q_B^2 = 0. \quad (8.5.8)$$

- Bosonic string (中心電荷= $(c, 0)$):

$$Q_B = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n L_{-n}^{(m)} + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{m-n}{2} : c_m c_n b_{-m-n} : + a^B \quad (8.5.9)$$

$$Q_B^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(c-26) \frac{n^3-n}{12} - 2(a^B+1)n \right] c_{-n} c_n. \quad (8.5.10)$$

8.6 自由粒子のスペクトルと場

8.6.1 Bosonic string

8.6.1.1 $E^{25,1}$

ターゲット空間が $M = E^{25,1}$ ($D = 26$) として, $(L_0^m + A)|\Psi\rangle = 0$ において $A = -1$ と取る. このとき, 質量公式は

$$m^2 = m_0^2 \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} n N_n - 1 \right); \quad (8.6.1)$$

$$m_0^2 = 1/\alpha'(\text{open}), \quad 4/\alpha'(\text{closed}). \quad (8.6.2)$$

Type	m^2	states	polarization	fields
Open	$-\frac{1}{\alpha'}$ 0	$ 0; k\rangle$ $ a; k\rangle = a_\mu \alpha_{-1}^\mu 0; k\rangle$	$a_\mu \cong a_\mu + c k_\mu$ $a \cdot k = 0$	Tachyon A_μ
Closed	$-\frac{4}{\alpha'}$ 0	$ 0; k\rangle$ $ e; k\rangle = e_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu 0; k\rangle$	$k^\mu e_{\mu\nu} = k^\nu e_{\mu\nu} = 0$ $e_{\mu\nu} \cong e_{\mu\nu} + a_\mu k_\nu + k_\mu b_\nu$ $a \cdot k = b \cdot k = 0$	Tachyon $G_{\mu\nu}$ $B_{\mu\nu}$ Φ

8.6.2 Superstring

8.6.2.1 $E^{9,1}$

$M = E^{D-1,1}$ における (X^μ, ψ^μ) 系に対し, 開弦および閉弦の左ないし右モードに対する質量公式と WS フェルミ粒子数 F は

$$\begin{aligned} \text{NS セクター: } m^2 &= m_0^2 \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} n N_n^X + \sum_{r \in \mathbb{N}-1/2} r N_r^\psi - \frac{1}{2} \right), \\ e^{i\pi F} &= - \exp \left(i\pi \sum_r N_r^\psi \right), \end{aligned} \quad (8.6.3)$$

$$\begin{aligned} \text{R セクター: } m^2 &= m_0^2 \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} n N_n^X + \sum_{r \in \mathbb{N}} r N_r^\psi + \frac{D-10}{16} \right), \\ e^{i\pi F} &= \Gamma \exp \left(\sum_{r \in \mathbb{N}} N_r^\psi \right) \quad (D = 10). \end{aligned} \quad (8.6.4)$$

ここで,

$$m_0^2 = 1/\alpha'(\text{open}), \quad 4/\alpha'(\text{closed}). \quad (8.6.5)$$

開弦 $D = 10$ の時の開弦 (および閉弦の左モードないし右モードのみ) の $m^2 \leq 0$ 状態は次のようになる:

sector	m^2	$e^{i\pi F}$	SO(8) スピン	場
NS+	0	+1	$\mathbf{8}_v$	A_μ
NS-	$-1/(2\alpha')$	-1	$\mathbf{1}$	T
R+	0	+1	$\mathbf{8}$	χ
R-	0	-1	$\mathbf{8}'$	χ'

閉弦 $D = 10$ の時の閉弦の $m^2 = 0$ 状態は次のようになる:

sector	SO(8) スピン	tensors	dimensions
(NS+,NS+)	$\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_v$	= [0] + [2] + (2)	= $\mathbf{1} + \mathbf{28} + \mathbf{35}$
(R+,R+)	$\mathbf{8} \times \mathbf{8}$	= [0] + [2] + [4] ₊	= $\mathbf{1} + \mathbf{28} + \mathbf{35}_+$
(R+,R-)	$\mathbf{8} \times \mathbf{8}'$	= [1] + [3]	= $\mathbf{8}_v + \mathbf{56}_t$
(R-,R-)	$\mathbf{8}' \times \mathbf{8}'$	= [0] + [2] + [4] ₋	= $\mathbf{1} + \mathbf{28} + \mathbf{35}_-$
(NS+,R+)	$\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}$		= $\mathbf{8}' + \mathbf{56}$
(NS+,R-)	$\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}'$		= $\mathbf{8} + \mathbf{56}'$

II 型の整合性 要請:

- 1) 2つの頂点作用素の積が一価となる.
- 2) 頂点作用素の間の OPE が閉じる.
- 3) 1-ループ振幅がモジュラー不変性をもつ.

これらの要請を満たすものは

- IIA 型: (NS+, NS+) (R+, NS+) (NS+, R-) (R+, R-)
- IIA' 型: (NS+, NS+) (R-, NS+) (NS+, R+) (R-, R+)
- IIB 型: (NS+, NS+) (R+, NS+) (NS+, R+) (R+, R+)
- IIB' 型: (NS+, NS+) (R-, NS+) (NS+, R-) (R-, R-)

または,

- 0A: $(NS+, NS+) (NS-, NS-) (R+, R-), (R-, R+)$
- 0B: $(NS+, NS+) (NS-, NS-) (R+, R+), (R-, R-)$

IIA 型 $D = 10$ のとき、IIA 型理論のゼロ質量状態は $(NS + \oplus R+) \times (NS + \oplus R-)$ で与えられる :

	sector	dimensions	fields
Boson	$(NS+, NS+)$	$[0] + [2] + (2)$	$\Phi, B_{\mu\nu}, G_{\mu\nu}$
	$(R+, R-)$	$[1] + [3]$	C_1, C_3
Ferimon	$(NS+, R-)$	$\mathbf{8} + \mathbf{56}'$	$\chi, \tilde{\psi}_\mu,$
	$(R+, NS+)$	$\mathbf{8}' + \mathbf{56}$	$\tilde{\chi}, \psi_\mu,$

対応する SUGRA 作用のボゾン部分は

$$S_{IIA,B} = S_{NS} + S_R + S_{CS}; \quad (8.6.6)$$

$$2\kappa_{10}^2 S_{NS} = \int d^{10}x (-G)^{1/2} e^{-2\Phi} \left(R + 4(\partial\Phi)^2 - \frac{1}{2}|H_3|^2 \right), \quad (8.6.7)$$

$$2\kappa_{10}^2 S_R = -\frac{1}{2} \int d^{10}x (-G)^{1/2} \left(|F_2|^2 + |\tilde{F}_4|^2 \right), \quad (8.6.8)$$

$$2\kappa_{10}^2 S_{CS} = -\frac{1}{2} \int B_2 \wedge F_4 \wedge F_4. \quad (8.6.9)$$

ここで,

$$H_3 = dB_2, \quad (8.6.10)$$

$$F_p = dC_p, \quad (8.6.11)$$

$$\tilde{F}_4 = F_4 - A_1 \wedge F_3. \quad (8.6.12)$$

また,

$$|F_p|^2 = \frac{1}{p!} F_{\mu_1 \dots \mu_p} F^{\mu_1 \dots \mu_p}. \quad (8.6.13)$$

κ_{10} は閉弦との結合定数 g_c により次のように表される :

$$\kappa = \kappa_{10} e^\Phi = 2\pi g_c. \quad (8.6.14)$$

IIB 型 $D = 10$ のとき、IIB 型理論のゼロ質量状態は $(\text{NS} + \oplus\text{R}+) \times (\text{NS} + \oplus\text{R}+)$ で与えられる：

	sector	dimensions	fields
Boson	(NS+,NS+)	$[0] + [2] + (2)$	$\Phi, B_{\mu\nu}, G_{\mu\nu}$
	(R+,R+)	$[0] + [2] + [4]_+$	C_0, C_2, C_4
Fermion	(NS+,R+)	$\mathbf{8}' + \mathbf{56}$	$\chi^{(1)}, \psi_{\mu}^{(1)}$,
	(R+,NS+)	$\mathbf{8}' + \mathbf{56}$	$\chi^{(2)}, \psi_{\mu}^{(2)}$,

対応する SUGRA 作用のボゾン部分は

$$S_{II_{B,B}} = S_{\text{NS}} + S_{\text{R}} + S_{\text{CS}}; \quad (8.6.15)$$

$$2\kappa_{10}^2 S_{\text{NS}} = \int d^{10}x (-G)^{1/2} e^{-2\Phi} \left(R + 4(\partial\Phi)^2 - \frac{1}{2}|H_3|^2 \right) \quad (8.6.16)$$

$$2\kappa_{10}^2 S_{\text{R}} = -\frac{1}{2} \int d^{10}x (-G)^{1/2} \left(|F_1|^2 + |\tilde{F}_3|^2 + \frac{1}{2}|\tilde{F}_5|^2 \right), \quad (8.6.17)$$

$$2\kappa_{10}^2 S_{\text{CS}} = -\frac{1}{2} \int C_4 \wedge H_3 \wedge F_3. \quad (8.6.18)$$

ここで,

$$\tilde{F}_3 = F_3 - C_0 \wedge H_3, \quad (8.6.19)$$

$$\tilde{F}_5 = F_5 - \frac{1}{2}C_2 \wedge H_3 + \frac{1}{2}B_2 \wedge F_3. \quad (8.6.20)$$

I 型 要請

- 1) 散乱振幅 (open+open \rightarrow closed) において OPE が閉じる \Rightarrow I 型
ないし II 型閉弦と結合する開弦セクターは GSO 射影を受ける：

I: NS+, R+

$\tilde{\text{I}}$: NS-, R-

- 2) 超対称性の整合性 \Rightarrow unoriented closed string とのみ結合 \Rightarrow open string も unoriented \Rightarrow Chan-Paton 因子によるゲージ群は $\text{SO}(n)$ または $\text{Sp}(k)$.
- 3) one-loop の発散および超対称共形アノマリーがない \Rightarrow open string と結合しない unoriented closed string およびゲージ群が $\text{SO}(32)$ 以外の unoriented open+closed 理論は不可

- 4) ゲージアノマリーおよび Lorentz 不変性に対するアノマリーがない \Rightarrow unoriented open+closed string のゲージ群は $SO(32)$

以上より、 $D = 10$ のとき、I 型理論のゼロ質量状態は、開弦モード $NS + \oplus R+$ と向きのない閉弦モード $[(NS + \oplus R+) \times (NS + \oplus R+)]_{\Omega=1}$ で与えられる：

		sector	dimensions	fields
Open	boson	NS+	$\mathbf{8}_v \times \text{Adj}(SO(n) \text{ or } Sp(k))$	A_μ
	fermion	R+	$\mathbf{8} \times \text{Adj}(SO(n) \text{ or } Sp(k))$	λ
Closed	boson	$(NS+, NS+)_{\Omega=1}$	$[0] + (2)$	$\Phi, G_{\mu\nu}$
		$(R+, R+)_{\Omega=1}$	$[2]$	C_2
	ferimion	$(NS+, R+)_{\Omega=1}$	$\mathbf{8}' + \mathbf{56}$	χ, ψ_μ

対応する SUGRA 作用のボゾン部分は

$$S_{I,B} = S_c + S_o; \quad (8.6.21)$$

$$2\kappa_{10}^2 S_c = \int d^{10}x (-G)^{1/2} \left[e^{-2\Phi} (R + 4(\partial\Phi)^2) - \frac{1}{2} |\tilde{F}_3|^2 \right] \quad (8.6.22)$$

$$2g_{10}^2 S_o = - \int d^{10}x (-G)^{1/2} e^{-\Phi} \text{Tr}_v (|F_2|^2). \quad (8.6.23)$$

ここで、

$$\tilde{F}_3 = dC_2 - \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} \omega_3; \quad (8.6.24)$$

$$\omega_3 = \text{Tr}_v \left(A_1 \wedge dA_1 - \frac{2i}{3} A_1 \wedge A_1 \wedge A_1 \right). \quad (8.6.25)$$

また、 g_{10} と開弦結合定数 g_o との間には次の関係がある：

$$g_{YM} = g_{10} e^{\Phi/2} = g_o (2\alpha')^{-1/2}. \quad (8.6.26)$$

Hetero 型 つぎに, $D = 10$ の $(X^\mu, \lambda^A, \tilde{\psi}^\mu)$ 系 ($A = 1, \dots, 32$) において, 左モード $(\partial X^\mu, \lambda^A)$ に対する質量公式は, (λ^A) の境界条件に応じて,

$$\text{NS}_{32} : \quad m^2 = \frac{4}{\alpha'} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} n N_n^X + \sum_{r \in \mathbb{N}-1/2} r N_r^\lambda - 1 \right), \quad (8.6.27)$$

$$\text{R}_{32} : \quad m^2 = \frac{4}{\alpha'} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} n N_n^X + \sum_{r \in \mathbb{N}} r N_r^\lambda + 1 \right), \quad (8.6.28)$$

$$\begin{aligned} (\text{NS}_{16}, \text{NS}_{16}) : \quad m^2 = \frac{4}{\alpha'} \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} n N_n^X + \sum_{r_1 \in \mathbb{N}-1/2} r_1 N_{r_1}^{\lambda_1, NS} \right. \\ \left. + \sum_{r_2 \in \mathbb{N}-1/2} r_2 N_{r_2}^{\lambda_2, NS} - 1 \right], \quad (8.6.29) \end{aligned}$$

$$(\text{R}_{16}, \text{NS}_{16}) : \quad m^2 = \frac{4}{\alpha'} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} n N_n^X + \sum_{r \in \mathbb{N}} r N_r^{\lambda, R} + \sum_{r \in \mathbb{N}-1/2} r N_r^{\lambda, NS} \right) \quad (8.6.30)$$

$$(\text{R}_{16}, \text{R}_{16}) : \quad m^2 = \frac{4}{\alpha'} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} n N_n^X + \sum_{r_1 \in \mathbb{N}} r_1 N_{r_1}^{\lambda_1, R} + \sum_{r_2 \in \mathbb{N}} r_2 N_{r_2}^{\lambda_2, R} \right) \quad (8.6.31)$$

よって, low mass 状態は

sector	m^2	$\text{SO}(8)_{\text{spin}} \times (\text{SO}(32) \text{ or } \text{SO}(16) \times \text{SO}(16))$
NS ₃₂₊	$-4/\alpha'$	$\mathbf{1}$
	0	$(\mathbf{8}_v, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{496}_{\text{ad}})$
NS ₃₂₋	$-2/\alpha'$	$(\mathbf{1}, \mathbf{32}_v)$
	$2/\alpha'$	$(\mathbf{8}_v, \mathbf{32}_v) + (\mathbf{1}, [1] + [3])$
R ₃₂₊	$4/\alpha'$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}^{15})$
R ₃₂₋	$8/\alpha'$	$(\mathbf{8}_v, \mathbf{2}^{15}) + (\mathbf{1}, \mathbf{32}_v \times \mathbf{2}^{15})$
(NS ₁₆₊ , NS ₁₆₊)	$-4/\alpha'$	$\mathbf{1}$
	0	$(\mathbf{8}_v, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{120}_{\text{ad}}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{120}_{\text{ad}})$
(NS ₁₆₊ , NS ₁₆₋)	$-2/\alpha'$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{16}_v)$
	$2/\alpha'$	$(\mathbf{8}_v, \mathbf{1}, \mathbf{16}_v) + \dots$
(NS ₁₆₋ , NS ₁₆₋)	0	$(\mathbf{1}, \mathbf{16}_v, \mathbf{16}_v)$
(R ₁₆₊ , R ₁₆₊)	$4/\alpha'$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}^7, \mathbf{2}^7)$
(R ₁₆₊ , R ₁₆₋)	$8/\alpha'$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}^7, \mathbf{32}_v \times \mathbf{2}^7)$
(R ₁₆₋ , R ₁₆₋)	$12/\alpha'$	$(\mathbf{1}, \mathbf{32}_v \times \mathbf{2}^7, \mathbf{32}_v \times \mathbf{2}^7)$
(R ₁₆₊ , NS ₁₆₊)	0	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}^7, \mathbf{1})$
(R ₁₆₊ , NS ₁₆₋)	$2/\alpha'$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}^7, \mathbf{16}_v)$
(R ₁₆₋ , NS ₁₆₊)	$4/\alpha'$	$(\mathbf{1}, \mathbf{16}_v \times \mathbf{2}^7, \mathbf{1})$
(R ₁₆₋ , NS ₁₆₋)	$6/\alpha'$	$(\mathbf{1}, \mathbf{16}_v \times \mathbf{2}^7, \mathbf{16}_v)$

Hetero SO(32) (NS₃₂₊, NS₁₀₊ + \oplus R₁₀₊) セクターより, Hetero SO(32) が得られる :

	sector	$\text{SO}(8)_{\text{spin}} \times \text{SO}(32)$	fields
Boson	(NS ₃₂₊ , NS ₁₀₊)	$([0] + [2] + (2), \mathbf{1})$	$\Phi, B_{\mu\nu}, G_{\mu\nu}$
		$(\mathbf{8}_v, \mathbf{496}_{\text{ad}})$	A_μ
Fermion	(NS ₃₂₊ , R ₁₀₊)	$(\mathbf{8}' + \mathbf{56}, \mathbf{1})$	χ, ψ_μ
		$(\mathbf{8}, \mathbf{496}_{\text{ad}})$	λ

Hetero E₈ × E₈ ((NS₁₆₊, NS₁₆₊) + \oplus (NS₁₆₊, R₁₆₊) + \oplus (R₁₆₊, NS₁₆₊), NS₁₀₊ + \oplus R₁₀₊) セクターより, Hetero E₈ × E₈ が得られる :

	sector	$\text{SO}(8)_{\text{spin}} \times \text{SO}(16) \times \text{SO}(16)$	fields
Boson	$(\text{NS}_{16+}, \text{NS}_{16+}, \text{NS}_{10+})$	$([0] + [2] + (2), \mathbf{1})$ $(\mathbf{8}_v, \mathbf{120}_{\text{ad}}, \mathbf{1}) + (\mathbf{8}_v, \mathbf{1}, \mathbf{120}_{\text{ad}})$	$\Phi, B_{\mu\nu}, G_{\mu\nu}$ A_μ
	$(\text{R}_{16+}, \text{NS}_{16+}, \text{NS}_{10+})$	$(\mathbf{8}_v, \mathbf{2}^7, \mathbf{1})$	
	$(\text{NS}_{16+}, \text{R}_{16+}, \text{NS}_{10+})$	$(\mathbf{8}_v, \mathbf{1}, \mathbf{2}^7)$	
Fermion	$(\text{NS}_{16+}, \text{NS}_{16+}, \text{R}_{10+})$	$(\mathbf{8}' + \mathbf{56}, \mathbf{1})$ $(\mathbf{8}, \mathbf{120}_{\text{ad}}, \mathbf{1}) + (\mathbf{8}, \mathbf{1}, \mathbf{120}_{\text{ad}})$	χ, ψ_μ λ
	$(\text{R}_{16+}, \text{NS}_{16+}, \text{NS}_{R+})$	$(\mathbf{8}, \mathbf{2}^7, \mathbf{1})$	
	$(\text{NS}_{16+}, \text{R}_{16+}, \text{NS}_{R+})$	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, \mathbf{2}^7)$	

ここで,

$$(\mathbf{120}_{\text{ad}} + \mathbf{2}^7)[\text{SO}(16)] = \mathbf{248}_{\text{ad}}[E_8] \quad (8.6.32)$$

が成り立つ.

SUGRA の bosonic 部分は

$$S_{\text{Het}, B} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-G)^{1/2} e^{-2\Phi} \left[R + 4(\partial\Phi)^2 - \frac{1}{2} |\tilde{H}_3|^2 - \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} \text{Tr}_v (|F_2|^2) \right]. \quad (8.6.33)$$

ここで,

$$\tilde{H}_3 = dB_2 - \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} \omega_3. \quad (8.6.34)$$

また, κ_{11}, g_{11} と g_c の関係は

$$g_c = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{\alpha'^{1/2} g_{YM}}{4\pi}; \quad \kappa = \kappa_{10} e^\Phi, \quad g_{YM} = g_{10} e^\Phi. \quad (8.6.35)$$

8.7 背景場中の弦理論

8.7.1 基礎方程式

作用積分のボース部分は, Lorentzian で

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma (-g)^{1/2} [(g^{ab}G_{MN}(X) - \epsilon^{ab}B_{MN}(X)) \partial_a X^M \partial_b X^N] \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2\sigma (-g)^{1/2} R\Phi(X) + \int_{\partial\Sigma} d\sigma^a \partial_a X^M A_M(X). \quad (8.7.1)$$

ただし, $\epsilon^{01} = -1/\sqrt{-g}$. 運動方程式は

$$2G_{MN} (D^a D_a X^M + \Gamma_{LK}^M(X) D^a X^L D_a X^K) - \epsilon^{ab} H_{LMN} D_a X^M D_b X^L - \alpha' R \partial_N \Phi = 0. \quad (8.7.2)$$

$\partial\Sigma$ での境界条件 (D-brane 上) は,

- D-brane に垂直な座標成分: $\partial_{\perp} X^M = 0$.
- D-brane に平行な座標成分: $g_{NM} \partial_{\perp} X^N + (B_{NM} + 2\alpha' F_{NM}) \partial_{\parallel} X^N = 0$.

ここで, n^a を $\partial\Sigma$ の外向きの単位法ベクトル, t^a を (n^a, t^a) が正の向きとなる $\partial\Sigma$ の接ベクトルとして,

$$\partial_{\perp} = n^a \partial_a, \quad \partial_{\parallel} = t^a \partial_a. \quad (8.7.3)$$

Euclidean Action は, $iS = -S_E$, $it \rightarrow \tau$ として,

$$S_E = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma (g)^{1/2} [(g^{ab}G_{MN}(X) + i\epsilon^{ab}B_{MN}(X)) \partial_a X^M \partial_b X^N] \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2\sigma (g)^{1/2} R\Phi(X) - i \int_{\partial\Sigma} d\sigma^a \partial_a X^M A_M(X). \quad (8.7.4)$$

8.7.2 Weyl アノーマリー

背景場 (G_{MN}, B_{MN}, Φ) での弦理論に対するアノーマリーは

$$T_a^a = -\frac{1}{2\alpha'} \beta_{MN}^G g^{ab} \partial_a X^M \partial_b X^N - \frac{i}{2\alpha'} \beta_{MN}^B \epsilon^{ab} \partial_a X^M \partial_b X^N - \frac{1}{2} \beta^{\Phi} R. \quad (8.7.5)$$

ここで,

$$\beta_{MN}^G = \alpha' \left(R_{MN} + 2\nabla_M \nabla_N \Phi - \frac{1}{4} H_{MPQ} H_N{}^{PQ} \right) + O(\alpha'^2), \quad (8.7.6a)$$

$$\beta_{MN}^B = \alpha' \left(-\frac{1}{2} \nabla^P H_{PMN} + \nabla^P \Phi H_{PMN} \right) + O(\alpha'^2), \quad (8.7.6b)$$

$$\beta^\Phi = \frac{D-26}{6} + \alpha' \left(-\frac{1}{2} \nabla^2 \Phi + (\nabla \Phi)^2 - \frac{1}{4} H_{[3]} \cdot H_{[3]} \right) + O(\alpha'^2). \quad (8.7.6c)$$

8.7.3 作用積分

Weyl アノマリーがない条件 $\beta_{MN}^G = \beta_{MN}^B = \beta^\Phi = 0$ を再現する弦フレームでの作用積分は, α' の最低次で

$$S = \frac{1}{2\kappa_0^2} \int d^D x (-G)^{1/2} e^{-2\Phi} \left[-\frac{2(D-26)}{3\alpha'} + R - \frac{1}{2} H_{[3]}^2 + 4(\nabla \Phi)^2 + O(\alpha'^2) \right]. \quad (8.7.7)$$

変換

$$\kappa = \kappa_0 e^{\Phi_0}, \quad (8.7.8)$$

$$\tilde{\Phi} = \Phi - \Phi_0, \quad (\langle \tilde{\Phi} \rangle = 0) \quad (8.7.9)$$

$$\tilde{G}_{MN} = \exp \left(-\frac{4}{D-2} \tilde{\Phi} \right) G_{MN} \quad (8.7.10)$$

により Einstein フレームに移ると

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x (-\tilde{G})^{1/2} \left[-\frac{2(D-26)}{3\alpha'} e^{4\tilde{\Phi}/(D-2)} + \tilde{R} - \frac{1}{2} e^{-8\tilde{\Phi}/(D-2)} \tilde{H}_{[3]}^2 - \frac{4}{D-2} (\tilde{\nabla} \tilde{\Phi})^2 + O(\alpha'^2) \right] \quad (8.7.11)$$

8.8 S 行列

8.8.1 ボーズ弦理論

8.8.1.1 Tree レベル

一般式: WS の Euler 数を, モジュライ自由度を μ , 独立な CKV の数を κ とすると, Riemann-Roch の定理より,

$$\mu - \kappa = 3\chi \quad (8.8.1)$$

が成り立つ. Tree レベルで WS の位相は $S^2, D^2, \mathbb{R}P^2$ に限られるが, この公式よりいずれもモジュライ自由度を持たない:

- S^2 : $\mu = 0$, CKG = $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$.
- D^2 : $\mu = 0$, CKG = $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.
- $\mathbb{R}P^2$: $\mu = 0$, CKG = $\text{SO}(3)$.

S 行列への寄与は, WS Σ のみに依存する定数 C_Σ の自由度を除いて決まり, 次式で与えられる:

$$\begin{aligned} S_\Sigma(c_1, \dots, c_p; o_1, \dots, o_q) &= C_\Sigma \cdot i(2\pi)^D \delta^D(\sum k) \\ &\times g_c^p g_o^q A_\Sigma(c_1, \dots, c_p; o_1, \dots, o_q) \end{aligned} \quad (8.8.2)$$

ただし, 結合定数 g_o, g_c は粒子の種類により異なる.

開弦散乱振幅 : 開弦理論において, $\Sigma = D^2$ の場合の開弦タキオン ($m^2 = -1/\alpha'$) 散乱振幅は, Chan-Paton 波動関数を $\lambda^a = (\lambda_{ij}^a) \in M(n)$ で表すと, 3 タキオン振幅が

$$\begin{aligned} S_{D_2}(k_1, a_1; k_2, a_2; k_3, a_3) &= i g_o^3 C_{D_2} (2\pi)^{26} \delta^{26}(\sum k) \\ &\times \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} + \lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) \end{aligned} \quad (8.8.3)$$

4 タキオン振幅 (**Veneziano 振幅**) が

$$\begin{aligned} S_{D_2}(k_1, a_1; k_2, a_2; k_3, a_3; k_4, a_4) &= i g_o^4 C_{D_2} (2\pi)^{26} \delta^{26}(\sum k) \\ &\times [\text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} + \lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} \lambda^{a_2}) B(-\alpha_0(s), -\alpha_0(t)) \\ &+ \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2} \lambda^{a_4} + \lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4}) B(-\alpha_0(s), -\alpha_0(u)) \\ &+ \text{Tr}(\lambda^{a_1} \lambda^{a_2} \lambda^{a_3} \lambda^{a_4} + \lambda^{a_1} \lambda^{a_4} \lambda^{a_3} \lambda^{a_2}) B(-\alpha_0(t), -\alpha_0(u))] \end{aligned} \quad (8.8.4)$$

ここで,

$$\alpha_0(x) = \alpha'x + 1, \quad (8.8.5)$$

$$s = -(k_1 + k_2)^2, \quad t = -(k_1 + k_3)^2, \quad u = -(k_1 + k_4)^2, \quad (8.8.6)$$

$$s + t + u = -\frac{4}{\alpha'}. \quad (8.8.7)$$

ユニタリ性

$$S_{D_2}(k_1, k_2, k_3, k_4) = -i \int \frac{d^{26}k}{(2\pi)^{26}} \frac{S_{D_2}(k_1, k_2, k)S_{D_2}(k_3, k_4, -k)}{k^2 - 1/\alpha' - i\epsilon} \\ + \text{terms analytic at } k^2 = 1/\alpha'. \quad (8.8.8)$$

より, C_{D_2} は次のように決定される:

$$C_{D_2} = \frac{1}{\alpha'g_o^2}. \quad (8.8.9)$$

次に, 2つのタキオンと1つのゲージ粒子 ($m^2 = 0$) との散乱振幅は

$$S_{D_2}(k_1, a_1, e_1; k_2, a_2; k_3, a_3) \\ = -ig'_o g_o^2 \alpha' C_{D_2} e_1 \cdot k_{23} (2\pi)^{26} \delta^{26}(\sum k) \text{Tr}(\lambda^{a_1} [\lambda^{a_2} \lambda^{a_3}]) \quad (8.8.10)$$

したがって, 4タキオン振幅の表式とユニタリ性より

$$g'_o = (2\alpha')^{-1/2} g_o. \quad (8.8.11)$$

また, 3ゲージ粒子振幅は

$$S_{D_2}(k_1, a_1, e_1; k_2, a_2, e_2; k_3, a_3, e_3) \\ = -i(g'_o)^3 (\alpha')^2 C_{D_2} (2\pi)^{26} \delta^{26}(\sum k) \text{Tr}(\lambda^{a_1} [\lambda^{a_2} \lambda^{a_3}]) \\ \times (\epsilon^{ijk} e_i \cdot k_{jk} e_j \cdot e_k + \alpha' e_1 \cdot k_{23} e_2 \cdot k_{31} e_3 \cdot k_{12}) \quad (8.8.12)$$

以上の開弦タキオンおよびゲージ粒子の相互作用は, 低エネルギー極限で次の場の理論で記述される:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{g_o^2} \int d^{26}x \text{Tr} \left[-\frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} - \frac{1}{2} D\phi \cdot D\phi + \frac{1}{2\alpha'} \phi^2 + \frac{2^{1/2}}{3\alpha'^{1/2}} \phi^3 \right]. \quad (8.8.13)$$

よって

$$g_{\text{YM}} = g'_o = \frac{g_o}{\sqrt{2\alpha'}} \quad (8.8.14)$$

閉弦散乱振幅 : 閉弦理論において, $\Sigma = S^2$ の場合の 3 タキオン振幅は

$$S_{S_2}(k_1; k_2; k_3) = ig_c^3 C_{S_2} (2\pi)^{26} \delta^{26}(\sum k). \quad (8.8.15)$$

4 タキオン振幅 (**Virasoro-Shapiro** 振幅) は

$$S_{S_2}(k_1; k_2; k_3; k_4) = ig_c^4 C_{S_2} (2\pi)^{26} \delta^{26}(\sum k) C(-\alpha_c(t), -\alpha_c(u)). \quad (8.8.16)$$

ここで,

$$\alpha_c(x) = 1 + \frac{\alpha' x}{4}, \quad (8.8.17)$$

$$\begin{aligned} C(a, b) &= \int_{\mathbb{C}} d^2 z |z|^{2a-2} |1-z|^{2b-2} \\ &= \frac{2\pi \Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c)}{\Gamma(a+b) \Gamma(b+c) \Gamma(c+a)}, \quad a+b+c=1. \end{aligned} \quad (8.8.18)$$

したがって, ユニタリ性より

$$\boxed{C_{S_2} = \frac{8\pi}{\alpha' g_c^2}}. \quad (8.8.19)$$

また, 2 タキオン 1 重力子振幅は

$$S_{S_2}(k_1, e_1; k_2; k_3) = -\frac{i}{16} (\alpha')^2 g_c^2 g'_c C_{S_2} e_{1\mu\nu} k_{23}^\mu k_{23}^\nu (2\pi)^{26} \delta^{26}(\sum k) \quad (8.8.20)$$

よって, Virasoro-Shapiro 振幅とユニタリ性より

$$\boxed{g'_c = \frac{2}{\alpha'} g_c}. \quad (8.8.21)$$

この 2 タキオン 1 重力子振幅と同じ構造の散乱振幅を与えるタキオン場 T に対する共変的作用積分は

$$S_T = -\frac{1}{2} \int d^{26} x (-G)^{1/2} e^{-2\tilde{\Phi}} \left(G^{MN} \partial_M T \partial_N T - \frac{4}{\alpha'} T^2 \right). \quad (8.8.22)$$

($e^{-2\tilde{\Phi}}$ の部分は決まらない.) 一方, (8.7.11) の作用 S と S_T の和が低エネルギー有効理論を与えるとすると, (8.8.20) の規格化に対応する重力子の波動関数は

$$\tilde{G}_{MN} = \eta_{MN} + 2\kappa e_{MN} e^{ik \cdot x}, \quad e_L^L = 0, \quad k^L e_{ML} = 0. \quad (8.8.23)$$

これを S_T に代入し, (8.8.20) と比較すると,

$$\boxed{\kappa = \pi \alpha' g'_c = 2\pi g_c} \quad (8.8.24)$$

を得る.

8.9 Brane

8.9.1 分類

D 次元時空における p -brane は, C_{p+1} ポテンシャルと電氣的に, C_{D-p-3} ポテンシャルと磁氣的に結合する. すなわち, $dC_{D-p-3} = *dC_{p+1}$ として,

$$\text{Electric} : \mu_p \int_{Dp} C_{p+1}, \quad (8.9.1a)$$

$$\text{Magnetic} : \mu'_p \int_{Dp} \tilde{C}_{p+1}. \quad (8.9.1b)$$

フォーム場 F_{D-p-2} の磁荷ないし F_{p+2} の電荷を持ちうる :

$$\text{Electric charge} : \int_{S_{D-p-2}} *F_{p+2} = 2\kappa_{10}^2 \mu_p, \quad (8.9.2a)$$

$$\text{Magnetic charge} : \int_{S_{D-p-2}} F_{D-p-2} = 2\kappa_{10}^2 \mu'_p. \quad (8.9.2b)$$

	Potential	Flux	electric	magnetic
	Φ	$d\Phi$	—	NS7(?)
	B_2	H_3	F1	NS5
	C_1	F_2	D0	D6
IIA	C_3	F_4	D2	D4
	(C_5)	(F_6)	D4	D2
	(C_7)	(F_8)	D6	D0
	C_9	F_{10}	D8	—
	$C_{10}(?)$	0	D9(?)	—

	Potential	Flux	electric	magnetic
	Φ	$d\Phi$	—	NS7(?)
	B_2	H_3	F1	NS5
	C_0	F_1	D-1	D7
IIB	C_2	F_3	D1	D5
	$(C_4)_+$	$(F_5)_+$	D3	D3
	(C_6)	(F_7)	D5	D1
	(C_8)	(F_9)	D7	D-1
	C_{10}	0	D9	—

8.9.2 電荷の量子化

$D(D-p-4)$ ブレーンを囲む多様体 Σ_{p+2} 上を Dp が, Σ_{p+1} に沿って $D(D-p-4)$ の周りを一周する. Σ_{p+2} が Σ_{p+1} により分割されている 2つの領域のうち, 北極を含むものを N_{p+2} , 南極を含むものを S_{p+2} , フラックス F_{p+2} のそれぞれの領域でゲージポテンシャルを C_{p+1}^N, C_{p+1}^S とすると, Dp の波動関数のこの軌道に沿った運動による変化は, ポテンシャルの取り方によらないので

$$\exp\left(i\mu_p \int_{\Sigma_{p+1}} C_{p+1}^N\right) = \exp\left(i\mu_p \int_{\Sigma_{p+1}} C_{p+1}^S\right) \quad (8.9.3)$$

が成り立つ. これより,

$$\begin{aligned} 1 &= \exp\left(i\mu_p \int_{\Sigma_{p+1}} (C_{p+1}^N - C_{p+1}^S)\right) \\ &= \exp\left[i\mu_p \left(i\mu_p \int_{N_{p+2}} F_{p+2} + \int_{S_{p+2}} F_{p+2}\right)\right] \\ &= \exp\left(i\mu_p \int_{\Sigma_{p+2}} F_{p+2}\right) \end{aligned} \quad (8.9.4)$$

したがって, 次の Dirac 型量子化条件を得る :

$$2\kappa_{10}^2 \mu_p \mu'_{D-4-p} = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8.9.5)$$

8.9.3 D ブレーンの作用積分

References

- Anomaly cancelation, inflow and brane action
 - Izquierdo JM, Townsend PK: NPB 414:93 (1994), “ Axionic defect anomalies and their cancellation ”
 - Green MB, Harvey JA, Moore G: CQG14:47(1997), “ I-brane inflow and anomalous couplings on D-branes ”
 - Cheung YK, Yin Z: NPB 517:67 (1998) “ Anomalies, branes, and currents ”

- Minasian R, Moore GW: JHEP9711:002 (1997) “K-theory and Ramond-Ramond charge
- Extension to the non-Abelian case (N D p -branes with $N > 1$)
 - Myers RC: jhep9912, 022 (1999)
 - ”Dielectric-branes”

8.9.3.1 Abelian case

DBI 作用積分 1枚の D p ブレーンに対する DBI 作用積分は, F をその上の U(1) ゲージ場フラックスとして, [160]

$$S_{\text{DBI, Dp}} = -\mu_p \int_{B^{p+1}} d^{p+1}\xi e^{-\Phi(X)} \sqrt{-\det(g_{ab}(X) + 2\pi\alpha' \mathcal{F}_{ab}(X))}. \quad (8.9.6)$$

ここで,

$$2\pi\alpha' \mathcal{F} = 2\pi\alpha' F + B, \quad (8.9.7)$$

$$\mu_p = \frac{2\pi}{(2\pi\ell_s)^{p+1}} \times \begin{cases} 1 & \text{for type II} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{for type I} \end{cases}, \quad \alpha' = \ell_s^2 \quad (8.9.8)$$

Chern-Simons 作用積分 $C = \sum_q C_q / \ell_s^q$ として, D p ブレーン B^{p+1} と RR 場との結合は

$$S_{\text{CS}} = 2\pi \int_{B^{p+1}} C \wedge \text{Tr} e^{\frac{B}{\ell_s^2} + \frac{F}{2\pi}} \frac{\sqrt{\hat{A}(TB)}}{\sqrt{\hat{A}(NB)}} \quad (8.9.9)$$

ここで $\hat{A}(TB)$ と $\hat{A}(NB)$ は, それぞれブレーンの接バンドル, 法バンドルの \hat{A} -特性類. ただし, ゲージ場はエルミートな行列に値を取るものを取る.

また, O_p 面に対する DBI 作用積分は

$$S_{\text{CS}} = -2^{p-4} 2\pi \int_{B^{p+1}} C \wedge \frac{\sqrt{L(\mathcal{R}_T/4)}}{\sqrt{L(\mathcal{R}_N/4)}} \quad (8.9.10)$$

ここで, L は Hirzebruch 特性類, $\mathcal{R}_T, \mathcal{R}_N$ は O_p 面の接バンドルおよび法バンドルの曲率形式 (ℓ_s のべきで無次元化されたもの).

8.9.3.2 Non-abelian case

N 枚重なったブレーン上には, $SU(N)$ ゲージ場 A_M とその adjoint 表現で変換する N 次エルミート行列に値をもつ非可換スカラー場 $\Phi^i (i = 1, \dots, 9-p)$ が現れる. 以下

$$\lambda = 2\pi\ell_s^2 = 2\pi\alpha', \quad T_p = \mu_p = \frac{2\pi}{g_s(2\pi\ell_s)^{p+1}}. \quad (8.9.11)$$

DBI 作用積分

$$S_{\text{DBI}} = -T_p \int d^{p+1}\sigma \text{Tr} \left(e^{-\phi} \sqrt{-(\det P + \lambda F) \det Q} \right). \quad (8.9.12)$$

ここで

$$E_{MN} = g_{MN} + B_{MN}, \quad (8.9.13a)$$

$$P_{ab} = E_{ab} + E_{ai}(Q^{-1} - \delta)^{ij}E_{jb}, \quad (8.9.13b)$$

$$Q^i_j = \delta^i_j + i\lambda[\Phi^i, \Phi^j]E_{k,j} \quad (8.9.13c)$$

λ が小さいとき

$$\sqrt{\det Q} = 1 - \frac{\lambda^2}{4}[\Phi^i, \Phi^j][\Phi^i, \Phi^j] + \dots \quad (8.9.14)$$

CS 作用積分

$$S_{\text{CS}} = \mu_p \int \text{Tr} \left(\mathcal{P} \left[e^{i\lambda I_\Phi I_\Phi} C e^{B/\ell_s^2} \right] e^{\lambda F} \right). \quad (8.9.15)$$

ここで,

$$I_\Phi I_\Phi B = B_{ij}\Phi^i\Phi^j = \frac{1}{2}B_{ij}[\Phi^i, \Phi^j]. \quad (8.9.16)$$

ヒグス場 Φ がゼロのとき, 重力場との結合も含めたうえで, 場について展開すると,

$$S_{\text{CS}} = \mu_p \left[\int_{B_{p+1}} C_{p+1} + (2\pi\alpha') \int_{B_{p+1}} C_{p-1} \wedge \text{tr} F + \frac{(2\pi\alpha')^2}{2} \int_{B_{p+1}} C_{p-3} \wedge \text{tr} F^2 - \frac{1}{24(8\pi^2)} \int_{B_{p+1}} C_{p-3} \wedge \text{tr} R^2 \right] \quad (8.9.17)$$

8.9.4 D ブレーン間の力*

8.9.5 D ブレーンスタックによる $U(n)$ ゲージ場*8.9.5.1 $U(1)$ ゲージアノマリー*

8.9.5.2 一般化された Green-Schwarz 機構*

8.9.6 D インスタントン*

8.9.7 交差 D ブレーン

References

- Berkooz M, Douglas MR, Leigh RG: NPB 480: 265 (1996) “Branes intersecting at angles ”
- Blumenhagen R, Korsb B, Lusta D, Stieberger S: PLC445:1-193 (2007) ” Four-dimensional string compactifications with
- D-branes orientifolds and fluxes ”
- Cvetič M, Halverson J: arXiv:1101.2907, “ TASI Lectures: Particle Physics from Perturbative and Non-perturbative Effects in D-braneworlds ”

8.9.7.1 2次元での交差

$p+2$ 次元時空に含まれる2枚の Dp ブレーン D_1, D_2 が p 次元線形空間 \mathcal{L} で交わるとし, その直交補空間を (x^1, x^2) とする. この補空間内での D_1 ブレーンの配位を $x^2 = 0$ とし, D_2 は原点で D_1 と角度 ϕ で交わるとする. このとき, D_1 と D_2 を結ぶ開弦の配位を複素座標

$$Z(\sigma, t) = X^1(\sigma, t) + iX^2(\sigma, t), \quad (8.9.18a)$$

$$\Psi(\sigma, t) = \psi^1(\sigma, t) + i\psi^2(\sigma, t), \quad \tilde{\Psi}(\sigma, t) = \tilde{\psi}^1(\sigma, t) + i\tilde{\psi}^2(\sigma, t) \quad (8.9.18b)$$

で表すと, 開弦の境界条件は

$$\sigma = 0 : \operatorname{Re} \partial_\sigma Z = 0, \quad \operatorname{Im} Z = 0, \quad \tilde{\Psi} = \Psi, \quad (8.9.19a)$$

$$\sigma = \pi : \operatorname{Re} e^{-i\phi\pi} \partial_\sigma Z = 0, \quad \operatorname{Im} e^{-i\phi\pi} Z = 0, \quad \tilde{\Psi} = e^{-2i(\phi+\pi)\nu} \Psi \quad (8.9.19b)$$

で与えられる. ($\nu = 0$ (R), $\nu = 1/2$ (NS))

この節では $\alpha' = 2$ とおくと，開弦の作用積分は

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int dt \int_0^\pi d\sigma \left(\partial_u Z \partial_{\tilde{u}} \bar{Z} + i\Psi \partial_{\tilde{u}} \bar{\Psi} - i\tilde{\Psi} \partial_u \Psi \right). \quad (8.9.20)$$

ただし，

$$u = \sigma - t, \quad \tilde{u} = \sigma + t \quad (8.9.21)$$

運動方程式は

$$\partial_u \partial_{\tilde{u}} Z = 0, \quad (8.9.22a)$$

$$\partial_{\tilde{u}} \Psi = 0, \quad \partial_u \tilde{\Psi} = 0. \quad (8.9.22b)$$

(1) 開弦の Z に対する一般解 一般解は形式的に

$$Z = \sum_r \frac{1}{r} (x_r e^{iru} + \tilde{x}_r e^{-ir\tilde{u}}) \quad (8.9.23)$$

$\sigma = 0$ で

$$\partial_\sigma Z = i \sum_r (x_r - \tilde{x}_r) e^{-irt}, \quad (8.9.24a)$$

$$\partial_t Z = -i \sum_r (x_r + \tilde{x}_r) e^{-irt}, \quad (8.9.24b)$$

より，境界条件 (8.9.19a) は

$$\sum_r (x_{-r} - \tilde{x}_{-r} - x_r^* + \tilde{x}_r^*) e^{irt} = 0, \quad (8.9.25a)$$

$$\sum_r (x_{-r} + \tilde{x}_{-r} + x_r^* + \tilde{x}_r^*) e^{irt} = 0, \quad (8.9.25b)$$

すなわち，

$$\tilde{x}_r = -x_{-r}^*. \quad (8.9.26)$$

次に， $\sigma = \pi$ で

$$\partial_\sigma Z = i \sum_r (x_r e^{ir\pi} - \tilde{x}_r e^{-ir\pi}) e^{-irt}, \quad (8.9.27a)$$

$$\partial_t Z = -i \sum_r (x_r e^{ir\pi} + \tilde{x}_r e^{-ir\pi}) e^{-irt}, \quad (8.9.27b)$$

より, 境界条件 (8.9.19b) は

$$x_r e^{i\pi(r-\phi)} + \tilde{x}_{-r}^* e^{-i\pi(r-\phi)} + \tilde{x}_r e^{-i\pi(r+\phi)} + x_{-r}^* e^{i\pi(r+\phi)} = \text{(8.9.28a)}$$

$$x_r e^{i\pi(r-\phi)} + \tilde{x}_{-r}^* e^{-i\pi(r-\phi)} - \tilde{x}_r e^{-i\pi(r+\phi)} - x_{-r}^* e^{i\pi(r+\phi)} = \text{(8.9.28b)}$$

すなわち,

$$x_r : e^{2i\pi(r-\phi)} = 1, \quad \text{(8.9.29a)}$$

$$\tilde{x}_r : e^{2i\pi(r+\phi)} = 1. \quad \text{(8.9.29b)}$$

よって,

$$\alpha_r = -ix_r \quad \text{(8.9.30)}$$

とおくとき,

$$Z = \sum_{r=\phi+Z} \frac{i}{r} (\alpha_r e^{iru} - \alpha_r^* e^{ir\bar{u}}). \quad \text{(8.9.31)}$$

Z の u および \bar{u} に関する導関数は

$$\partial_u Z = -\sum_r \alpha_r e^{iru}, \quad \partial_{\bar{u}} \bar{Z} = \sum_r \alpha_r e^{-ir\bar{u}} \quad \text{(8.9.32)}$$

となるので,

$$\alpha_r = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\sigma (\partial_u Z e^{-iru} - \partial_{\bar{u}} \bar{Z} e^{ir\bar{u}}). \quad \text{(8.9.33)}$$

(2) 正準量子化 作用積分より,

$$\frac{\delta S}{\delta \partial_t Z} = \frac{1}{8\pi} \partial_t \bar{Z}, \quad \frac{\delta S}{\delta \partial_t \bar{Z}} = \frac{1}{8\pi} \partial_t Z, \quad \text{(8.9.34)}$$

なので, 正準交換関係は

$$[Z(\sigma_1), \partial_t \bar{Z}(\sigma_2)] = 8\pi i \delta(\sigma_1 - \sigma_2), \quad [Z, Z] = [Z, \bar{Z}] = 0. \quad \text{(8.9.35)}$$

これより,

$$[\partial_u Z_1, \partial_{\bar{u}} Z_2^\dagger] = 0, \quad \text{(8.9.36a)}$$

$$[\partial_u Z_1, \partial_u Z_2^\dagger] = -4\pi i \delta'(\sigma_1 - \sigma_2), \quad \text{(8.9.36b)}$$

$$[\partial_{\bar{u}} Z_1, \partial_{\bar{u}} Z_2^\dagger] = 4\pi i \delta'(\sigma_1 - \sigma_2). \quad \text{(8.9.36c)}$$

よって,

$$[\alpha_r, \alpha_s] = 0, \quad [\alpha_r, \alpha_s^\dagger] = 2r \delta_{r,s} \quad \text{(8.9.37)}$$

(3) Virasoro 代数 T_{ab} は

$$T_{ab} = -\frac{1}{4} [\partial_a Z \partial_b \bar{Z} + \partial_b Z \partial_a \bar{Z} - (\partial Z \cdot \partial \bar{Z}) g_{ab}] \quad (8.9.38)$$

なので,

$$T_{uu} = -\frac{1}{2} \partial_u Z \partial_u \bar{Z}, \quad T_{\tilde{u}\tilde{u}} = -\frac{1}{2} \partial_{\tilde{u}} Z \partial_{\tilde{u}} \bar{Z}. \quad (8.9.39)$$

これより, 共形変換

$$\delta u = v(u), \quad \delta \tilde{u} = \tilde{v}(\tilde{u}) \quad (8.9.40)$$

の生成作用素は

$$Q[v, \tilde{v}] = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi (v \partial_u Z \partial_u \bar{Z} - \tilde{v} \partial_{\tilde{u}} Z \partial_{\tilde{u}} \bar{Z}). \quad (8.9.41)$$

特に,

$$v = e^{-im\sigma}, \quad \tilde{v} = -e^{im\sigma} \Rightarrow L_m \quad (8.9.42)$$

したがって,

$$\partial_u Z \partial_u Z^\dagger = \sum_{r,s} \alpha_r \alpha_s^\dagger e^{i(r-s)u}, \quad (8.9.43a)$$

$$\partial_{\tilde{u}} Z \partial_{\tilde{u}} Z^\dagger = \sum_{r,s} \alpha_r^\dagger \alpha_s e^{i(r-s)\tilde{u}} \quad (8.9.43b)$$

より,

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_r \alpha_r \alpha_{r-m}^\dagger, \quad (m \neq 0) \quad (8.9.44a)$$

$$L_0 = \frac{1}{2} \left(\sum_{r>0} \alpha_r^\dagger \alpha_r + \sum_{r<0} \alpha_r \alpha_r^\dagger \right) + a_0. \quad (8.9.44b)$$

交換関係を計算すると, $|\phi| \leq 1/2$ として,

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}, \quad n+m \neq 0, \quad (8.9.45a)$$

$$[L_m, L_{-m}] = 2m(L_0 - a_0) + \frac{m}{6}(m^2 - 1) - m|\phi|(|\phi| - 1) \quad (8.9.45b)$$

よって,

$$a_0 = \frac{1}{2} |\phi| (1 - |\phi|), \quad c = 2. \quad (8.9.46)$$

(4)WS スピノール WS スピノール Ψ に対しても同様に、一般解は

$$\Psi = \sum_{r=\nu+\phi+Z} \psi_r e^{iru}, \quad \tilde{\Psi} = \sum_{r=\nu+\phi+Z} \psi_r e^{-ir\bar{u}}. \quad (8.9.47)$$

ただし、R セクターで $\nu = 0$ 、NS セクターで $\nu = 1/2$. 交換関係は、

$$\{\psi_r, \psi_s^\dagger\} = 2\delta_{r,s}, \quad \{\psi_r, \psi_s\} = 0. \quad (8.9.48)$$

Energy-momentum テンソルは

$$T_{uu} = \frac{i}{4} (\Psi \partial_u \Psi^\dagger - \partial_u \Psi \Psi^\dagger), \quad (8.9.49a)$$

$$T_{\bar{u}\bar{u}} = \frac{i}{4} (\tilde{\Psi} \partial_{\bar{u}} \tilde{\Psi}^\dagger - \partial_{\bar{u}} \tilde{\Psi} \tilde{\Psi}^\dagger). \quad (8.9.49b)$$

これより、Virasoro 生成子は

$$L_m = \frac{1}{4} \sum_r (2r - m) : \psi_{r-m}^\dagger \psi_r : + a^m \delta_{m,0}, \quad (8.9.50)$$

$$a^m = \frac{1}{8} (2|\phi| + 2\nu - 1)^2. \quad (8.9.51)$$

全系に対する a の値は

$$\text{NS} : a = \left(\frac{12}{24} - \frac{8}{24} - \frac{8}{48} \right) + \left(\frac{1}{2} |\phi| (1 - |\phi|) + \frac{\phi^2}{2} \right) - \frac{1}{2} = \frac{|\phi| - 1}{2}, \quad (8.9.52a)$$

$$\text{R} : a = \left(\frac{12}{24} - \frac{8}{24} - \frac{8}{24} \right) + \left(\frac{1}{2} |\phi| (1 - |\phi|) + \frac{(2|\phi| - 1)^2}{8} \right) - \frac{5}{8} = 0. \quad (8.9.52b)$$

ここで、それぞれ、最初の部分は 8 次元分の寄与、第 2 の部分は交差している 2 次元部分の寄与、最後は ghost の寄与である。

8.10 双対性

8.10.1 Hetero↔IIA

Hetero Hetro 型理論の T^4 コンパクト化により得られる 6 次元理論. 作用積分はストリングフレームで

$$S_h = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{M_6} e^{-2\phi_h} \left[\left(R(g_h) + 4g_h(d\phi_h, d\phi_h) - \frac{1}{2}g_h(H_h, H_h) \right) *_h 1 - \frac{\alpha'}{4} *_h F \wedge F \right] \quad (8.10.1)$$

ここで,

$$H_h = dB_h - \frac{\alpha'}{4} A \wedge dF, \quad (8.10.2a)$$

$$F = dA \quad (8.10.2b)$$

F および H_h に対する方程式は

$$dF = 0, \quad (8.10.3a)$$

$$d(e^{-2\phi_h} *_h F) + e^{-2\phi_h} *_h H_h \wedge F = 0, \quad (8.10.3b)$$

$$dH_h = -\frac{\alpha'}{4} F \wedge F, \quad (8.10.3c)$$

$$d(e^{-2\phi_h} *_h H_h) = 0. \quad (8.10.3d)$$

変換 この作用積分は, H_h の定義に相当する条件を Lagrange multiplier 2-form B を用いて作用積分に加えたもの

$$S' = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{M_6} \left[e^{-2\phi_h} \left(R(g_h) + 4g_h(d\phi_h, d\phi_h) - \frac{1}{2}g_h(H, H) \right) *_h 1 - e^{-2\phi_h} \frac{\alpha'}{4} *_h F \wedge F - B \wedge \left(dH + \frac{\alpha'}{4} F \wedge F \right) \right] \quad (8.10.4)$$

と同等. 実際, この方程式を A および H に関して変分すると

$$e^{-2\phi_h} *_h H = dB, \quad (8.10.5a)$$

$$d(e^{-2\phi_h} *_h F) + d(B \wedge F) = 0 \quad (8.10.5b)$$

を得る.

IIA この中間作用積分から H を消去すると

$$S'' = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{M_6} \left[e^{-2\phi_h} \left(R(g_h) + 4g_h(d\phi_h, d\phi_h) - e^{4\phi_h} \frac{1}{2} g_h(H_{\text{II}}, H_{\text{II}}) \right) *_h 1 - \frac{\alpha'}{4} *_h F \wedge F - \frac{\alpha'}{4} B \wedge F \wedge F \right] \quad (8.10.6)$$

ここで,

$$H_{\text{II}} = dB. \quad (8.10.7)$$

さらに,

$$g_{\text{II}} = e^{-2\phi_h} g_h, \quad \phi_{\text{II}} = -\phi_h, \quad B_{\text{II}} = B \quad (8.10.8)$$

とおくと, IIA 型理論のコンパクト化による 6 次元理論が得られる :

$$S_{\text{IIA}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{M_6} \left[e^{-2\phi_{\text{II}}} \left(R(g_{\text{II}}) + 4g_{\text{II}}(d\phi_{\text{II}}, d\phi_{\text{II}}) - \frac{1}{2} g_{\text{II}}(H_{\text{II}}, H_{\text{II}}) \right) *_{\text{II}} 1 - \frac{\alpha'}{4} *_{\text{II}} F \wedge F - \frac{\alpha'}{4} B_{\text{II}} \wedge F \wedge F \right] \quad (8.10.9)$$

9 M理論

Last update: 2023 年 10 月 17 日

9.1 Notation

	全時空 M^D	低次元時空 X^m	余剰次元 Y^n
座標系の添え字	M, N, \dots	μ, ν, \dots	m, n, \dots
内部添え字	A, B, \dots	α, β, \dots	a, b, \dots
計量	\tilde{g}_{MN}	$g_{\mu\nu}$	\hat{g}_{mn}
ベクトル基底	\tilde{e}_A	e_α	\hat{e}_a
1形式基底	$\tilde{\theta}^A$	θ^α	$\hat{\theta}^a$
共変微分	$\tilde{\nabla}$	∇	$\hat{\nabla}$
曲率テンソル	$\tilde{R}^M{}_{NLP}$	$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}$	$\hat{R}^m{}_{nlp}$
スカラ曲率	\tilde{R}_s	$R_s = R_s(X)$	$\hat{R}_s = R_s(Y)$
Γ 行列	Γ^A	γ^α	$\hat{\gamma}^a$
	$\Gamma^M = \Gamma^A \tilde{e}_A^M$	$\gamma^\mu = \gamma^\alpha e_\alpha^\mu$	$\hat{\gamma}^m = \hat{\gamma}^a \hat{e}_a^m$

9.2 Formulation

T3_i作用積分

作用積分 完全な作用積分は

$$\begin{aligned}
2\kappa^2 S = & \int d^{11}x |\theta| \left[e_A^M e_B^N \mathcal{R}^{AB}{}_{MN}(\omega) - \frac{1}{2} |F_4|^2 + \frac{1}{6} * (F_4 \wedge F_4 \wedge A_3) \right. \\
& - i \bar{\Psi}_M \Gamma^{MNP} D_N \left[\frac{1}{2} (\omega + \tilde{\omega}) \right] \Psi_P \\
& \left. + \frac{i}{192} [\bar{\Psi}_M \Gamma^{MNWXYZ} \Psi_N + 12 \bar{\Psi}^W \Gamma^{XY} \Psi^Z] (F_{WXYZ} + \tilde{F}_{WXYZ}) \right].
\end{aligned}
\tag{9.2.1}$$

ここで,

$$\omega_{ABM} = \omega_{ABM}(e) + K_{MAB}, \quad (9.2.2a)$$

$$K_{MAB} = \frac{i}{8} [\bar{\Psi}_N \Gamma_{MAB}{}^{NP} \Psi_P + 4\bar{\Psi}_M \Gamma_{[A} \Psi_{B]} - 2\bar{\Psi}_B \Gamma_M \Psi_A], \quad (9.2.2b)$$

$$\tilde{\omega}_{ABM} = \omega_{ABM} - \frac{i}{8} \bar{\Psi}_N \Gamma_{MAB}{}^{NP} \Psi_P, \quad (9.2.2c)$$

$$D_M(\omega) = \partial_M + \frac{1}{4} \omega^{AB} \Gamma_{AB}, \quad (9.2.2d)$$

$$F = dA, \quad (9.2.2e)$$

$$\tilde{F}_{MNPQ} = F_{MNPQ} + \frac{3i}{2} \bar{\Psi}_{[M} \Gamma_{NP} \Psi_{Q]}. \quad (9.2.2f)$$

基本場の次元は

$$[\kappa] = L^{9/2}, \quad [e_A^M] = L^0, \quad [A_{MNP}] = L^0, \quad [\Psi_M] = L^{-1/2}. \quad (9.2.3)$$

場の方程式:

$$R_{MN}(\tilde{\omega}) - \frac{1}{2} g_{MN} R(\tilde{\omega}) = \frac{1}{12} \tilde{F}_{MPQR} \tilde{F}_N{}^{PQR} - \frac{1}{4} g_{MN} |F_4|^2 \quad (9.2.4a)$$

$$\Gamma^{MNP} \tilde{D}_N(\tilde{\omega}) \Psi_P = 0, \quad (9.2.4b)$$

$$d * \tilde{F} + \frac{1}{2} \tilde{F} \wedge \tilde{F} = 0. \quad (9.2.4c)$$

ここで,

$$\tilde{D}_M(\tilde{\omega}) = D_M(\tilde{\omega}) + T_M{}^{PQRS} \tilde{F}_{PQRS}, \quad (9.2.5)$$

$$T_M{}^{PQRS} = \frac{1}{288} \left(\Gamma_M{}^{PQRS} - 8\delta_M^{[P} \Gamma^{QRS]} \right). \quad (9.2.6)$$

対称性:

a) 一般共変性:

$$\delta\theta_M^A = (\mathcal{L}_\xi \theta^A)_M \equiv \theta_N^A \partial_M \xi^N + \xi^N \partial_N \theta_M^A, \quad (9.2.7a)$$

$$\delta\Psi_M = \Psi_N \partial_M \xi^N + \xi^N \partial_N \Psi_M, \quad (9.2.7b)$$

$$\delta A_{MNP} = (\mathcal{L}_\xi A_3)_{MNP} \equiv 3A_{Q[MN} \xi_{P]} \xi^Q + \xi^Q \partial_Q A_{MNP} \quad (9.2.7c)$$

b) 局所 SO(10, 1) 変換 :

$$\delta\theta_M^A = -\theta_M^B \alpha_B^A, \quad (9.2.8a)$$

$$\delta\Psi_M = \frac{1}{4}\alpha_{AB}\Gamma^{AB}\Psi_M, \quad (9.2.8b)$$

$$\delta A_{MNP} = 0. \quad (9.2.8c)$$

c) $N = 1$ SUSY:

$$\delta\theta_M^A = \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\Gamma^A\Psi_M, \quad (9.2.9a)$$

$$\delta\Psi_M = \tilde{D}_M(\tilde{\omega})\epsilon, \quad (9.2.9b)$$

$$\delta A_{MNP} = -\frac{3i}{2}\bar{\epsilon}\Gamma_{[MN}\Psi_{P]}. \quad (9.2.9c)$$

d) A_3 のゲージ変換 :

$$\delta\theta_M^A = 0, \quad (9.2.10a)$$

$$\delta\Psi_M = 0, \quad (9.2.10b)$$

$$\delta A = d\Lambda. \quad (9.2.10c)$$

e) T/P 変換 : 空間ないし時間座標の奇数個の反転と

$$A_{MNP} \rightarrow -A_{MNP}. \quad (9.2.11)$$

Bosonic part: $\Psi_M = 0$ とおくと, 作用積分は

$$2\kappa^2 S = \int d^{11}x (-g)^{1/2} \left(R - \frac{1}{2}|F_4|^2 \right) - \frac{1}{6} \int A_3 \wedge F_4 \wedge F_4. \quad (9.2.12)$$

場の方程式は

$$d * F_4 + \frac{1}{2} F_4 \wedge F_4 = 0. \quad (9.2.13)$$

また, エネルギー運動量テンソルは

$$\kappa^2 T_{MN} = \frac{1}{12} F_{MABC} F_N^{ABC} - \frac{1}{4} |F_4|^2 g_{MN}. \quad (9.2.14)$$

よって,

$$R_{MN} = \frac{1}{12} F_{MABC} F_N^{ABC} - \frac{1}{6} |F_4|^2 g_{MN}. \quad (9.2.15)$$

9.3 Torsion and connection

ω_{AB} に関する変分 作用積分のスカラ曲率の項は

$$\begin{aligned}\Omega_{11} e_A^M e_B^N R^{AB}{}_{MN} &= *(\theta^A \wedge \theta^B) \wedge \mathcal{R}_{AB} \\ &= -d(*(\theta^A \wedge \theta^B) \wedge \omega_{AB} + (d*(\theta^A \wedge \theta^B)) \wedge \omega^{AB} \\ &\quad + *(\theta^A \wedge \theta^B) \wedge \omega_{AC} \wedge \omega^C{}_B). \quad (9.3.1)\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}*(\theta_C \wedge \theta_B) \wedge \omega^C{}_A &= -\Omega^C{}_{AD} \theta^D \wedge *(\theta_C \wedge \theta_B) \\ &= \omega^C{}_{AD} *(I_{e^D}(\theta_C \wedge \theta_B)) \\ &= \omega^C{}_{AC} *\theta_B - \omega^C{}_{AB} *\theta_C. \quad (9.3.2)\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}2\kappa^2 \delta_\omega S &= \int \left[d*(\theta^A \wedge \theta^B) + 2\omega^C{}_C \theta^B - 2\omega_C{}^{AB} *\theta_C \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{4} (\bar{\Psi}_N \Gamma^{NM}{}_C \Gamma^{AB} \Psi_M) *\theta^C \right] \wedge \delta\omega_{AB}. \quad (9.3.3)\end{aligned}$$

関係式

$$\Gamma^{C_1 C_2 C_3} \Gamma_{AB} = \Gamma^{C_1 C_2 C_3}{}_{AB} + 6\delta_{[A}^{C_1} \Gamma^{C_2 C_3]}{}_B - 6\delta_A^{[C_1} \delta_B^{C_2} \Gamma^{C_3]} \quad (9.3.4)$$

および

$$\bar{\Psi}_M \Gamma_{[1]} \Psi_N = -\bar{\Psi}_N \Gamma_{[1]} \Psi_M, \quad (9.3.5a)$$

$$\bar{\Psi}_M \Gamma_{[3]} \Psi_N = \bar{\Psi}_N \Gamma_{[3]} \Psi_M, \quad (9.3.5b)$$

$$\bar{\Psi}_M \Gamma_{[5]} \Psi_N = -\bar{\Psi}_N \Gamma_{[5]} \Psi_M \quad (9.3.5c)$$

より,

$$2\kappa^2 \delta_\omega S = \int \{ d*(\theta^A \wedge \theta^B) + 2*(\theta^C \wedge \theta^B) \wedge (\omega_C{}^A - K_C{}^A) \} \wedge \delta\omega_{AB}. \quad (9.3.6)$$

ここで,

$$\begin{aligned}K_{AB} &= K_{ABM} dx^M; \\ K_{ABM} &= \frac{i}{8} [\bar{\Psi}_N \Gamma_{MAB}{}^{NP} \Psi_P + 4\bar{\Psi}_M \Gamma_{[A} \Psi_{B]} - 2\bar{\Psi}_B \Gamma_M \Psi_A] \quad (9.3.7)\end{aligned}$$

また,

$$*(\theta^A \wedge \theta^B) = \frac{1}{9!} \epsilon^{AB C_1 \dots C_9} \theta^{C_1} \wedge \dots \wedge \theta^{C_9} \quad (9.3.8)$$

より,

$$d*(\theta^A \wedge \theta^B) = D\theta^C \wedge *(\theta^A \wedge \theta^B \wedge \theta_C) - 2*(\theta^C \wedge \theta^B) \wedge \omega_C^A. \quad (9.3.9)$$

よって, $D\theta^A = 0 \Leftrightarrow \omega = \omega(e)$ より,

$$2\kappa^2 \delta_\omega S = \int 2*(\theta^C \wedge \theta^B) \wedge (\omega_C^A - \omega_C^A(e) - K_C^A) \wedge \delta\omega_{AB}. \quad (9.3.10)$$

特に,

$$\delta_\omega S = 0 \Leftrightarrow \omega_{AB} = \omega_{AB}(e) + K_{AB}. \quad (9.3.11)$$

以上より,

$$\omega_{AB} = \omega_{AB}(e) + K_{AB} \quad (9.3.12)$$

を作用積分に代入し, K について展開すると

$$S = S_B + S_F; \quad (9.3.13)$$

$$2\kappa^2 S_B = \int *1R_s(e) - \frac{1}{2} *F_4 \wedge F_4 - \frac{1}{6} A_3 \wedge F_4 \wedge F_4, \quad (9.3.14)$$

$$\begin{aligned} 2\kappa^2 S_F = & \int \Omega_{11} \left[-i\bar{\Psi}_M \Gamma^{MNP} D_N(\omega(e)) \Psi_P \right. \\ & + \frac{i}{96} (\bar{\Psi}_M \Gamma^{MNP_1 \dots P_4} \Psi_N + 12\bar{\Psi}^{P_1} \Gamma^{P_2 P_3} \Psi^{P_4}) F_{P_1 \dots P_4} \\ & \left. + (\Psi^4 \text{terms}) \right]. \end{aligned} \quad (9.3.15)$$

9.4 Cremmer-Julia Torus Compactification

Reference

- Cremmer E, Julia B: NPB159(1979)141-212, “The SO(8) Supergravity”

notation

- 11次元時空：内部添え字 A, B, \dots ；時空座標添え字 M, N, \dots ；11次元の物理量には \sim をつける。
- 4次元時空：内部添え字 α, β, \dots ；時空座標添え字 μ, ν, \dots ；
- 7次元トーラス：内部添え字 a, b, \dots ；時空座標添え字 m, n, \dots

9.4.1 Bosonic part

Gauge conditions

- $\tilde{\theta}_M^A$: $\tilde{\theta}_m^\alpha = 0 \Leftrightarrow \tilde{e}_a^\mu = 0$, i.e., $e_a \parallel T^7$
- $\partial_m Q = 0, \forall Q$, i.e., T^7 方向に一様。

誘導 4次元場

- **Tensor:** 1

$$\theta_\mu^\alpha = \Delta^{1/4} \tilde{\theta}_\mu^\alpha, \quad \sqrt{\Delta} = \det(\tilde{\theta}_m^a) \quad (9.4.1)$$

- **Vector:** $7 + 21 = 28$

$$B_{[1]}^m = \tilde{e}_a^m \tilde{\theta}_\mu^a dx^\mu \Rightarrow G_{[2]}^m = dB^m \quad (9.4.2a)$$

$$A_{mn} = A_{\alpha mn} \tilde{\theta}^\alpha \Rightarrow F_{mn} = dA_{mn} + G^l A_{mnl} \quad (9.4.2b)$$

- **Scalar:** $28 + 35 + 7 = 70$

$$g_{mn} = \eta_{ab} \tilde{\theta}_m^a \tilde{\theta}_n^b, \quad (9.4.3a)$$

$$A_{lmn}, \quad (9.4.3b)$$

$$A_{m[2]} = \frac{1}{2} A_{\alpha\beta m} \tilde{\theta}^\alpha \wedge \tilde{\theta}^\beta \Rightarrow F_{m[3]} = dA_m + B^n \wedge A_{mn} \quad (9.4.3c)$$

- **Constants:** 1

$$A_{\mu\nu\lambda} \Rightarrow F_{\mu\nu\lambda\sigma} = C \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \quad (9.4.4)$$

Bosonic action

$$\begin{aligned}
2\kappa^2 S_{4B} = & *R - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}g_{mn} *G^m \wedge G^n - \frac{1}{4}\sqrt{\Delta} *F_{mn} \wedge F^{mn} \\
& - \frac{1}{8} *d(\ln \Delta) \wedge d(\ln \Delta) + \frac{1}{4} *dg_{mn} \wedge dg^{mn} \\
& + 2\Delta^{-1/2}C^2 *1 + \frac{1}{2}\Delta g^{mn} *F_m \wedge F_n \\
& - \frac{1}{12}g^{lp}g^{mq}g^{nr} *dA_{lmn} \wedge dA_{pqr} \\
& - \frac{1}{24} \star A^{lmnp} [2F_l \wedge dA_{mnp} - 3F_{lm} \wedge (F_{np} - G^r \wedge A_{rnp}) \\
& \quad - G^q \wedge G^r A_{qlm} A_{rmp}]. \tag{9.4.5}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\star A^{lmnp} := \frac{1}{6}\epsilon^{lmnpqrs} A_{qrs}. \tag{9.4.6}$$

双対変換 3-form 場 F^m および 2-form 場 F^{mn} から, 次の変換によりスカラー場 ϕ^m および 1-form 場 B^{mn} を導入することができる:

$$- *F^m = d\phi^m - \frac{1}{12}\sqrt{\Delta} \star A^{mpqr} dA_{pqr}, \tag{9.4.7a}$$

$$-\frac{\sqrt{\Delta}}{4} * \left\{ F^{mn} + \frac{1}{2} \star A^{mnpq} *F_{pq} \right\} = dB^{mn} + \frac{\sqrt{\Delta}}{32} \star A^{mnpq} A_{pqr} G^r \tag{9.4.7b}$$

この変換により, Lagrangian 密度は次のようになる:

$$2\kappa^2 S_{4B} = R *1 + 2\kappa^2 S_V + 2\kappa^2 S_S. \tag{9.4.8}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
2\kappa^2 S_S = & -\frac{1}{2\Delta}g_{mn} * \left(d\phi^m - \frac{\sqrt{\Delta}}{12} \star A^{mpqr} dA_{pqr} \right) \wedge \left(d\phi^n - \frac{\sqrt{\Delta}}{12} \star A^{nstu} dA_{stu} \right) \\
& + \frac{1}{4} *dg^{mn} \wedge dg_{mn} - \frac{1}{8} *d(\ln \Delta) \wedge d(\ln \Delta) \\
& - \frac{1}{12}g^{lp}g^{mq}g^{nr} *dA_{lmn} \wedge dA_{pqr}, \tag{9.4.9a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\kappa^2 S_V = & -\frac{\sqrt{\Delta}}{2} *G^m \wedge G_m - \frac{1}{24} \star A^{lmnp} A_{lmq} A_{npr} G^p \wedge G^r + A_{lmn} G^{lm} \wedge G^n \\
& - \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \mathcal{M}_{mn,pq} \left\{ G^{mn} + \frac{1}{8} \star A^{lmnr} A_{nrs} G^s + \frac{1}{2}(\phi^m G^n - \phi^n G^m) \right\} \\
& \wedge \left\{ G^{pq} + \frac{1}{8} \star A^{pqtu} A_{tuv} G^v + \frac{1}{2}(\phi^p G^q - \phi^q G^p) \right\} \tag{9.4.9b}
\end{aligned}$$

ここで

$$G^{mn} = dB^{mn}, \quad (9.4.10)$$

$$\mathcal{M}_{mn,pq} = \left[g^{mn,pq} - \frac{1}{2} \star A^{mnpq} \star \right]^{-1}, \quad (9.4.11)$$

$$g^{mn,pq} = \frac{1}{2} (g^{mp} g^{nq} - g^{mq} g^{np}). \quad (9.4.12)$$

E_7 対称表現：スカラ部分 8次元の計量テンソル $S^{m'n'}$ を

$$(S^{m'n'}) = \Delta^{-3/4} \begin{pmatrix} \Delta g^{mn} + \phi^m \phi^n & -\phi^n \\ -\phi^m & 1 \end{pmatrix} \quad (9.4.13)$$

により定義する。このとき、

$$\det S = 1 \quad (9.4.14)$$

この計量に対応する正規直交基底を $v_{a'}^{m'}$ とする：

$$S^{m'n'} = \delta^{a'b'} v_{a'}^{m'} v_{b'}^{n'}. \quad (9.4.15)$$

この正規直交基底を用いて、 $\mathcal{V}_+ \in \text{GL}(56, \mathbb{R})$ を

$$\mathcal{V}_+ = \begin{pmatrix} (\mathcal{V}_+)^{a'b'}{}_{m'n'} & 0 \\ 0 & (\mathcal{V}_+)^{a'b'}{}_{m'n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{[m'}^{[a'} v_{n']}^{b']} & 0 \\ 0 & v_{[a'}^{[m'} v_{b']}^{n']} \end{pmatrix} \quad (9.4.16)$$

により定義する。ただし、 $\mathbb{R}^{56} \cong \mathbb{R}^8 \wedge \mathbb{R}^8 \oplus \mathbb{R}^8 \wedge \mathbb{R}^8$ と見なしている。明らかに、行列 \mathcal{V}_+ はスカラモジュライ (ϕ^m, g^{mn}) を完全に決定する。

次に、擬スカラモジュライ A_{lmn} より、 $\mathcal{V}_- \in \text{GL}(56, \mathbb{R})$ を

$$\mathcal{V}_- = \exp \begin{pmatrix} 0 & \star A^{a'b'c'd'} \\ A_{a'b'c'd'} & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.4.17)$$

$$A_{a'b'c'd'} = 4A_{[a'b'c'} \delta_{d']}^{\sharp}, \quad A_{ab\sharp} = 0 \quad (9.4.18)$$

により定義する。このとき、

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_- \mathcal{V}_+ = \begin{pmatrix} \mathcal{V}^{a'b'}{}_{m'n'} & \mathcal{V}^{a'b'}{}_{m'n'} \\ \mathcal{V}_{a'b'}{}_{m'n'} & \mathcal{V}_{a'b'}{}_{m'n'} \end{pmatrix}, \quad (9.4.19a)$$

$$\mathcal{R} = \text{Tr} \mathcal{V} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}^{m'n'}{}_{p'q'} & \mathcal{R}^{m'n'}{}_{p'q'} \\ \mathcal{R}^{m'n'}{}_{p'q'} & \mathcal{R}^{m'n'}{}_{p'q'} \end{pmatrix} \quad (9.4.19b)$$

とおくと, \mathcal{V} は E_7 の 56 次元基本表現に属し, \mathcal{R} は $E_7/(SU(8)/\mathbb{Z}_2)$ の径数表示を与える.

スカラ+擬スカラの Lagrangian 密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_s &= -\frac{e}{48\kappa^2} \text{Tr} [\nabla_\mu \mathcal{V} \nabla^\mu \mathcal{V}^{-1} + {}^T \mathcal{V} \nabla_\mu \mathcal{V} \mathcal{V}^{-1} \nabla^\mu ({}^T \mathcal{V}^{-1})] \\ &= -\frac{e}{24\kappa^2} \text{Tr} [D_\mu \mathcal{V} \mathcal{V}^{-1}]^2\end{aligned}\quad (9.4.20)$$

と陽に E_7 不変な非線形 σ モデルの形に書き換えられる. ここで,

$$D_\mu \mathcal{V} = \partial_\mu \mathcal{V} - U_\mu \mathcal{V} \quad (9.4.21)$$

は $SU(8)$ 接続 U_μ に関する共変微分で, 作用積分の変分より

$$2U_\mu = \partial_\mu \mathcal{V} \mathcal{V}^{-1} - ({}^T \mathcal{V}^{-1}) \partial_\mu {}^T \mathcal{V} \quad (9.4.22)$$

となる.

E_7 対称形式: ベクトル部分 2-形式フラックス G^m および G^{mn} を

$$G^{m\sharp} = -G^{\sharp m} = -\frac{1}{2} G^m \quad (m = 4, \dots, 10) \quad (9.4.23)$$

により形式的に 8 次元交代テンソル $G^{m'n'}$ にまとめ, さらに

$$G^{a'b'} = v_{m'}^{a'} v_{n'}^{b'} G^{m'n'} \quad (9.4.24)$$

とおく. このとき, ベクトル場に対する Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}_v = -\frac{e}{4\kappa^2} G_{\mu\nu}^{a'b'} G_{\rho\sigma}^{c'd'} \mathcal{N}_{a'b',c'd'}^{\mu\nu,\rho\sigma} = -\frac{e}{4\kappa^2} G^{a'b'} \cdot \mathcal{N}_{a'b',c'd'} G^{c'd'}. \quad (9.4.25)$$

ここで, \mathcal{N} は $\mathbb{R}^4 \wedge \mathbb{R}^4$ の 1 次元変換 $[\rho\sigma] \rightarrow [\mu\nu]$ を

$$\mathbf{1} = (g^{\rho[\mu} g^{\nu]\sigma}), \quad \mathbf{j} = \frac{1}{2e} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (9.4.26)$$

とおくとき,

$$\mathcal{N}_{ab,cd} = (\eta^{a[c} \eta^{d]b} \mathbf{1} + \star A^{abcd} \mathbf{j})^{-1}, \quad (9.4.27a)$$

$$\mathcal{N}_{ab,c\sharp} = -A_{abc} \mathbf{j} - \frac{1}{2} \mathcal{N}_{ab,de} \star A^{defg} A_{fgc} \mathbf{1}, \quad (9.4.27b)$$

$$\mathcal{N}_{a\sharp,bc} = \mathcal{N}_{bc,a\sharp}, \quad (9.4.27c)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{a\sharp,b\sharp} &= \frac{1}{2} \delta_{ab} + \frac{1}{3} A_{ade} \star A^{defg} A_{fgb} \mathbf{j} \\ &\quad + \frac{1}{4} A_{ade} (\star A \mathcal{N} \star A)^{defg} A_{fgb}\end{aligned}\quad (9.4.27d)$$

28次元行列表示のもとで、この表式は

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \left(1 - \frac{1}{2}A(\star A)\right) \left\{ \mathcal{M} - \left(A + \frac{2}{3}A(\star A)A\right) \mathbf{j} \right\} \left(1 - \frac{1}{2}(\star A)A\right) \\ \mathcal{M} &= (1 + (\star A)\mathbf{j})^{-1} = (1 + (\star A)^2)^{-1}(1 - (\star A)\mathbf{j})\end{aligned}\quad (9.4.28b)$$

と行列表示される。ここで、

$$(\star A)A(\star A) = 0 \quad (9.4.29)$$

となることに注意。

ベクトル場に対する拡張されたフラックステンソルを

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} G^{a'b'} \\ H_{a'b'} \end{pmatrix}, \quad (9.4.30)$$

$$\star H_{a'b'} = -(\mathcal{N}G)_{a'b'} \quad (9.4.31)$$

により定義すると、場の方程式は E_7 不変な形に書き換えられる：

$$d\mathcal{F} = 0. \quad (9.4.32a)$$

$$\Omega\mathcal{V} \star \mathcal{F} = \mathcal{V}\mathcal{F} \quad (9.4.32b)$$

ここで、

$$\Omega := \begin{pmatrix} 0 & -I_{28} \\ I_{28} & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}(56, \mathbb{R}), \quad (9.4.33)$$

$${}^T X \Omega X = \Omega, \quad \forall X \in E_{7(+7)} \subset \text{GL}(56, \mathbb{R}). \quad (9.4.34)$$

すなわち、

$$E_{7(+7)} \subset \text{Sp}(56, \mathbb{R}) \quad (9.4.35)$$

9.4.2 Fermionic part

4次元場 11D理論でのスピノール場 $\Psi_M = (\psi_M^A) (A = 1, \dots, 8)$ は、2つのように8個の4次元 Rarita-Schwinger 場 ψ_μ^A と56個の4次元スピノール場 $\lambda_{ABC} (A, B, C = 1, \dots, 8; \text{完全反対称})$ に分解される：

$$\psi_\mu^A = (i\gamma_5)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \theta_\mu^\alpha \Delta^{-1/8} \left(\tilde{e}_\alpha^M + \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma_\alpha \Gamma^a \tilde{e}_a^M \right) \psi_M^A. \quad (9.4.36a)$$

$$\lambda_{ABC} = -i(i\gamma_5)^{1/2} \frac{3}{2} \Gamma_{[AB}^a (\psi_M)_{C]} \tilde{e}_a^M. \quad (9.4.36b)$$

Fermion について 2 次の作用積分 これらの場を用いると, Lagrangian の fermion について 2 次の部分は

$$\mathcal{L}_F^2 = \mathcal{L}_F^{\text{kin}} + \mathcal{L}_F^0 + \mathcal{L}_F^1; \quad (9.4.37)$$

$$\kappa^2 \mathcal{L}_F^{\text{kin}} = -ie\bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} \nabla_\nu \psi_\rho + \frac{i}{6} e \bar{\lambda}_{ABC} \gamma^\mu \nabla_\mu \lambda_{ABC}, \quad (9.4.38)$$

$$\begin{aligned} \kappa^2 \mathcal{L}_F^0 &= e\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu^A \gamma_\sigma \gamma_5 (Q_\nu)_A{}^B \psi_\rho^B + \frac{i}{6} e \bar{\lambda}_{ABC} \gamma_\mu \mathfrak{z} (Q^\mu)_A{}^D \lambda_{DBC} \\ &\quad + \frac{i\sqrt{2}}{3} e \bar{\psi}_{\mu D} \gamma^\nu \gamma^\mu \bar{P}_\nu^{ABCD} \lambda_{ABC}, \end{aligned} \quad (9.4.39)$$

$$\begin{aligned} \kappa^2 \mathcal{L}_F^1 &= -\frac{i}{2\sqrt{2}} e \bar{\psi}_\mu^A \gamma^{[\nu} \mathcal{F}_{AB} \gamma^{\mu]} \psi_\nu^B + \frac{i}{4} e \bar{\psi}_\mu^C \mathcal{F}_{AB} \gamma^\mu \lambda_{ABC} \\ &\quad - \frac{i}{144\sqrt{2}} e \eta \epsilon^{ABCDEFGH} \bar{\lambda}_{ABC} \mathcal{F}_{DE} \lambda_{FGH}. \end{aligned} \quad (9.4.40)$$

ここで,

$$\begin{aligned} Q_\nu &= -\frac{1}{4} e_a^m \partial_\nu \theta_{bm} \Gamma^{ab} + \frac{i}{4} \Phi_{a\nu} \Gamma^a \\ &\quad + \frac{1}{12} \gamma_5 e_a^l e_b^m e_c^n \partial_\nu A_{lmn} \Gamma^{abc}, \end{aligned} \quad (9.4.41a)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_\nu^{ABCD} &= \frac{i}{8} e_a^m \partial_\nu \theta_{bm} \Gamma_{[AB}^{ac} (\Gamma^b)_c]_{CD} + \frac{i}{8} \Phi_{a\nu} \Gamma_{[AB}^{ac} (\Gamma^b)_c]_{CD} \\ &\quad + \frac{1}{4} \gamma_5 e_a^l e_b^m e_c^n \partial_\nu A_{lmn} \Gamma_{[AB}^{ab} \Gamma^c]_{CD}, \end{aligned} \quad (9.4.41b)$$

$$\Phi_{a\nu} = \theta_{am} \left(\Delta^{-1/2} \partial_\nu \phi^m - \frac{1}{3} \star A^{mlnp} \partial_\nu A_{lnp} \right), \quad (9.4.41c)$$

および

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{AB} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \gamma^{\rho\sigma} \left\{ -i G_{\rho\sigma}^m \theta_{am} \Gamma_{AB}^a \Delta^{1/4} + \Delta^{-1/4} \bar{\mathcal{M}}_{mnpq} e_a^m e_b^n \Gamma_{AB}^{ab} \right. \\ &\quad \left. \times \left(G_{\rho\sigma}^{pq} + \phi^p G_{\rho\sigma}^q + \frac{\sqrt{\Delta}}{8} \star A^{pqmn} A_{mnl} G_{\rho\sigma}^l \right) \right\} \end{aligned} \quad (9.4.42)$$

9.4.3 ($E_{7(+7)}$, $SU(8)$) 形式

スカラ場

$$\mathcal{V} \in \rho^{56}(E_{7(+7)}) \triangleright \mathbb{C}^{56}$$

- 表示 1 : $\mathcal{V} \in \text{Sp}(56, \mathbb{R})$ となる表示.

$$\mathcal{V} = \exp \begin{pmatrix} \Lambda \wedge \mathbf{1} & \star \Sigma \\ \Sigma & -{}^T \Lambda \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix};$$

$$\Lambda \in \mathfrak{sl}(8, \mathbb{R}), \quad \Sigma \in \bigwedge^4 \mathbb{R}^8 \quad (9.4.43)$$

- 表示 2 : $\text{SU}(8) \subset E_{7(+7)}$ が簡単となる表示.

$$\mathcal{V}' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \mathcal{V} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} A + iV & S + iU \\ S - iU & A - iV \end{pmatrix};$$

$$A = -{}^T A, S = {}^T S \in \mathfrak{sl}(8, \mathbb{R}), \quad U = \star U, V = -\star V \in \bigwedge^4 \mathbb{R}^8 \quad (9.4.44)$$

特に,

$$\mathcal{V}' \in \text{SU}(8) \Leftrightarrow \mathcal{V}' = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & \bar{W} \end{pmatrix}. \quad (9.4.45)$$

- 表示 3 : スピノール表示.

$$\mathcal{V}'' = \exp \begin{pmatrix} \Lambda \wedge \mathbf{1} & \Sigma \\ \bar{\Sigma} & \bar{\Lambda} \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{AB}{}^{MN} & V_{ABMN} \\ \bar{V}{}^{ABMN} & \bar{U}{}^{AB}{}_{MN} \end{pmatrix};$$

$$\Lambda = (\Lambda_A{}^B) \in \mathfrak{su}(8), \Sigma = (\Sigma_{ABCD}) = \eta \star \bar{\Sigma}. \quad (9.4.46)$$

\mathcal{V}' との関係は

$$\mathcal{V}''_{ABCD} = -\frac{1}{16} \Gamma_{AB}{}^{a'b'} \Gamma_{CD}{}^{c'd'} (\mathcal{V}')_{a'b'c'd'}. \quad (9.4.47)$$

ただし, $A, B, \dots = 1, 2, \dots, 8, a', b', \dots = 4, 5, \dots, \sharp$ で,

$$\Gamma^{a\sharp} = -\Gamma^{\sharp a} = -i\Gamma^a \quad (a = 4, \dots, 10) \quad (9.4.48)$$

ベクトル場

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^F \in \mathbb{C}^{56}$$

- 表示 1 : E_7 -ベクトル表示

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^F = \begin{pmatrix} G_{\mu\nu}{}^{m'n'} \\ H_{\mu\nu m'n'}^F \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{56}; \quad (9.4.49a)$$

$$\star H_{\mu\nu m'n'}^F = -\frac{2\kappa^2}{e} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta G_{\mu\nu}{}^{m'n'}} \quad (9.4.49b)$$

- 表示 3 : E_7 不変表示

$$\mathcal{F}'_{AB} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\Gamma_{a'b'AB} \quad i\gamma_5 \Gamma_{AB}^{a'b'} \right) \mathcal{V} \mathcal{F}_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} = \mathcal{F}'_{AB\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} \quad (9.4.50)$$

フェルミオン場

$$\psi_\mu^A, \quad \lambda_{ABC} \in \mathbb{C}^4 \quad (A, B, C = 1, \dots, 8)$$

対称性

- 大域的 E_7 対称性: $E_{7(+7)}$ はスカラ場とベクトル場のみに作用.

$$\begin{aligned} T \in E_{7(+7)} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V} T^{-1}, \quad \mathcal{F}^F \rightarrow T \mathcal{F}^F, \\ (\psi_\mu^A, \lambda_{ABC}) &\rightarrow (\psi_\mu^A, \lambda_{ABC}). \end{aligned} \quad (9.4.51)$$

これより, $\mathcal{V} \mathcal{F}$ は E_7 不変.

- 局所 $SU(8)$ 対称性: 局所 $SU(8)$ 変換は, スカラ場とスピノール場のみに作用.

$$\begin{aligned} U \in SU(8) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V}'' &\rightarrow \begin{pmatrix} U \wedge \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \bar{U} \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix} \mathcal{V}'', \\ \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F}, \\ \psi_\mu^A &\rightarrow U^A_B \psi_\mu^B, \quad \lambda^{ABC} \rightarrow 3U^{[A}_D \lambda^{BC]D} \end{aligned} \quad (9.4.52a)$$

いま,

$$\partial_\mu \mathcal{V}'' \mathcal{V}''^{-1} = \begin{pmatrix} Q_\mu \wedge \mathbf{1} & P_\mu \\ \bar{P}_\mu & \bar{Q}_\mu \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (9.4.53)$$

とおくと, 無限小 $SU(8)$ 変換 $\delta U = \Lambda$ に対し,

$$\delta Q_\mu = \Lambda Q_\mu + Q_\mu \Lambda^\dagger + \partial_\mu \Lambda, \quad (9.4.54a)$$

$$\delta P_\mu^{ABCD} = 4\Lambda^{[D}_E P_\mu^{ABCE]} \quad (9.4.54b)$$

より, スカラおよびスピノールに対する共変微分が次のように定義される:

$$D_\mu \mathcal{V}'' \mathcal{V}''^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & P_\mu \\ \bar{P}_\mu & 0 \end{pmatrix} = \partial_\mu \mathcal{V}'' \mathcal{V}''^{-1} - \begin{pmatrix} Q_\mu \wedge \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_\mu \wedge \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (9.4.55a)$$

$$D_\mu \psi_\nu^A = \partial_\mu \psi_\nu^A - (Q_\mu)^A_B \psi_\nu^B, \quad (9.4.55b)$$

$$D_\mu \lambda^{ABC} = \partial_\mu \lambda^{ABC} - 3(Q_\mu)^{[A}_D \lambda^{BC]D} \quad (9.4.55c)$$

Lagrangian

$$\begin{aligned}
2\kappa^2 \mathcal{L}^{\text{total}} = & eR(\omega, e) - \frac{e}{6} P_{\mu ABCD} \bar{P}^{\mu ABCD} + \frac{e}{2} G_{\mu\nu}^{m'n'}(B) * H^{F\mu\nu}_{m'n'}(B, \mathcal{V}, \psi, \lambda) \\
& - 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_{\mu A} \gamma_\sigma \gamma_5 D_\nu(\omega, Q) \psi_\rho^A - \frac{i}{3} \bar{\lambda}_{ABC} \gamma^\mu D_\mu(\omega, Q) \lambda_{ABC} \\
& - i \frac{\sqrt{2}}{3} e \bar{\psi}_{\mu A} \gamma^\nu \gamma^\mu \left(\bar{P}_\nu^{ABCD} + \hat{P}_\nu^{ABCD} \right) \lambda_{BCD} \\
& - \frac{i}{2\sqrt{2}} e \left(\bar{\psi}_{\mu A} \gamma^\nu \hat{\mathcal{F}}'_{AB} \gamma^\mu \psi_{\nu B} - \sqrt{12} \bar{\psi}_{\mu C} \hat{\mathcal{F}}'_{AB} \gamma^\mu \lambda_{ABC} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{72} \eta \epsilon^{ABCDEFGH} \bar{\lambda}_{ABC} \hat{\mathcal{F}}'_{DE} \lambda_{FGH} \right) \quad (9.4.56)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\hat{P}_\mu = P_\mu + i \frac{\sqrt{2}}{3} \bar{\psi}_\mu^{(L)} \wedge \lambda^{(R)} + i \frac{\eta}{4} \star (\bar{\psi}_\mu^{(R)} \wedge \lambda^{(L)}), \quad (9.4.57a)$$

$$\hat{\mathcal{F}}'_{AB} = \gamma^{\mu\nu} \hat{\mathcal{F}}'_{AB\mu\nu}, \quad (9.4.57b)$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{F}}'_{\mu\nu} = & \mathcal{F}'_{\mu\nu} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_\mu^{(R)} \wedge \psi_\nu^{(L)} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_{[\mu}^{(L)} \cdot \gamma_{\nu]} \lambda^{(R)} \\
& + \frac{1}{8} \star (\bar{\lambda}^{(L)} \wedge \gamma_{\mu\nu} \lambda^{(R)}) / \quad (9.4.57c)
\end{aligned}$$

超対称変換 $\epsilon_A \in \mathbb{R}^4$ ($A = 1, \dots, 8$) を局所超対称変換を生成する Majorana スピノールの組として,

$$\delta_S e_\mu^\alpha = i \bar{\epsilon}_A \gamma^\alpha \psi_\mu^A, \quad (9.4.58a)$$

$$(\delta_S \mathcal{V} \mathcal{V}^{-1})'' = -2\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & P_{ABCD} \\ \bar{P}^{ABCD} & 0 \end{pmatrix};$$

$$P = \frac{i}{4} \{ \bar{\epsilon}^{(L)} \wedge \lambda^{(R)} + \eta \star (\bar{\epsilon}^{(R)} \wedge \lambda^{(L)}) \}, \quad (9.4.58b)$$

$$\delta_S \begin{pmatrix} B_\mu^{m'n'} + i C_{\mu m'n'} \\ B_\mu^{m'n'} - i C_{\mu m'n'} \end{pmatrix} = -2\sqrt{2} \mathcal{V}'^{-1} \begin{pmatrix} X_{\mu AB} \\ \bar{X}_\mu^{AB} \end{pmatrix};$$

$$X_{\mu AB} = i \bar{\epsilon}_{[A}^{(L)} \psi_{\mu B]}^{(R)} + \frac{i}{2\sqrt{2}} \bar{\epsilon}^{(R)C} \gamma_\mu \lambda_{ABC}^{(L)}, \quad (9.4.58c)$$

$$\begin{aligned}
\delta_S \psi_{\mu A}^{(R)} = & D_\mu(\omega, Q) \epsilon_A^{(R)} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \hat{\mathcal{F}}'_{AB} \gamma_\mu \epsilon^{(L)B} \\
& + \frac{i}{4} (\bar{\lambda}_{ABC} \gamma^\alpha \lambda_{(L)}^{DBC}) \gamma_\alpha \gamma_\mu \epsilon_D^{(R)} - \frac{i}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_\mu^{(R)B} \gamma^\alpha \lambda_{ABC}^{(R)}) \gamma_\alpha \epsilon^{(L)C} \quad (9.4.58d)
\end{aligned}$$

$$\delta_S \lambda_{ABC}^{(R)} = \sqrt{2} \hat{P}_{\mu ABCD} \gamma^\mu \epsilon^{(L)D} + \frac{3}{4} \hat{\mathcal{F}}'_{[AB} \epsilon_{C]}^{(R)}. \quad (9.4.58e)$$

9.5 $SU(8)$ -invariant form of the $D = 11$ supergravity

References

- de Wit B, Nicolai H: NPB284, 363 (1986)
“ $d = 11$ supergravity with local $SU(8)$ invariance”
- de Wit B, Nicolai H: NPB281, 211 (1987)
“The consistency of the S^7 truncation in $d = 11$ supergravity”
- Nicolai H, Pilch K: JHEP1203, 099 (2012)
“Consistent truncation of $d = 11$ supergravity on $\text{adS}_4 \times S^7$ ”

局所 $SO(10, 1)$ 自由度の部分的ゲージ固定 11次元時空が $M^{11} = X_4 \times Y_7$ と局所的に積にて表されるとして、そのフレーム場を次のように選ぶ：

$$\Theta^A = (\Theta_M{}^A) = \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_\mu{}^\alpha & \theta_\mu{}^a = B_\mu^m \theta_m{}^a \\ \theta_m{}^\alpha = 0 & \theta_m{}^a \end{pmatrix}, \quad (9.5.1a)$$

$$E_A = (E_A{}^M) = \begin{pmatrix} \tilde{e}_\alpha{}^\mu & e_\alpha{}^m = -e_\alpha{}^\mu B_\mu^m \\ e_a{}^\mu = 0 & e_a{}^m \end{pmatrix}. \quad (9.5.1b)$$

一様等方な背景計量と Killing spinor Y_7 の基準となる計量を

$$\overset{\circ}{g}_{mn} = \delta_{ab} \overset{\circ}{\theta}_m{}^a \overset{\circ}{\theta}_n{}^b \quad (9.5.2)$$

とする。この標準計量のフレームに関する接続係数を $\overset{\circ}{\omega}_m{}^a{}_b$ 、対応する共変微分を $\overset{\circ}{D}_m$ と表す。

スピノール表現と Gamma 行列 11次元時空のスピノール表現（32次元）は、4次元時空のスピノール表現（4次元）と7次元空間のスピール表現（8次元）のテンソル積となる。このテンソル積表現の元で、11次元時空のガンマ行列 $\tilde{\Gamma}^A$ は、4次元時空のガンマ行列 γ^α と7次元空間のガンマ行列 Γ を用いて

$$\tilde{\Gamma}^\alpha = \gamma^\alpha \otimes 1, \quad \tilde{\Gamma}^a = \gamma_5 \otimes \Gamma^a \quad (9.5.3)$$

と表される。ここで,

$$\gamma_5 = \gamma_{(4)} = -i\gamma^{0123}, \quad \Gamma_{(7)} = i\Gamma^{45678910} \quad (9.5.4)$$

とおくとき,

$$\tilde{\Gamma}_{(11)} = \tilde{\Gamma}^0 \cdots \tilde{\Gamma}^{10} = 1 \otimes \Gamma_{(7)} (= \pm 1). \quad (9.5.5)$$

9.5.1 場の再定義

(1) フレーム場

$$\Theta_M^A \Rightarrow \tilde{\theta}_\mu^\alpha, \theta_m^a, B_\mu^m \Rightarrow \theta_\mu^\alpha, S_b^a, B_\mu^m. \quad (9.5.6)$$

ここで

$$\tilde{\theta}_\mu^\alpha(x, y) = \Delta(x, y)^{-1/2} \theta_\mu^\alpha. \quad (9.5.7a)$$

$$\theta_m^a(x, y) = \overset{o}{\theta}_m^b(y) S_b^a(x, y), \quad (9.5.7b)$$

$$\Delta(x, y) = \det S(x, y). \quad (9.5.7c)$$

(2) スピノール場

$$\Psi_M \Rightarrow \Psi_\mu(x, y), \Psi_m(x, y) \Rightarrow (\psi_\mu^A; \psi_{\mu A}), (\chi^{ABC}, \chi_{ABC}) \quad (9.5.8)$$

ここで,

$$\psi_\mu^A \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2} e^{-i\pi/4} \Delta^{-1/4} \theta_\mu^\alpha (\Psi_\alpha - \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma_\alpha \Gamma^a \Psi_a), \quad (9.5.9a)$$

$$\psi_{\mu A} \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2} e^{i\pi/4} \Delta^{-1/4} \theta_\mu^\alpha (\Psi_\alpha - \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma_\alpha \Gamma^a \Psi_a), \quad (9.5.9b)$$

$$\chi^{ABC} \equiv (1 + \gamma_5) \frac{3\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{4} \Delta^{-1/4} \Gamma_{[AB}^a \Psi_{|a|C]}, \quad (9.5.9c)$$

$$\chi_{ABC} \equiv (1 - \gamma_5) \frac{3\sqrt{2}e^{3i\pi/4}}{4} \Delta^{-1/4} \Gamma_{[AB}^a \Psi_{|a|C]} \quad (9.5.9d)$$

これらと対応して, 11次元における局所超対称変換のスピノールパラメータ $\tilde{\epsilon}$ に対して

$$\epsilon^A(x, y) \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2} e^{-i\pi/4} \Delta^{1/4} \tilde{\epsilon}^A(x, y), \quad (9.5.10a)$$

$$\epsilon_A(x, y) \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2} e^{i\pi/4} \Delta^{1/4} \tilde{\epsilon}^A(x, y), \quad (9.5.10b)$$

$$(9.5.10c)$$

により定義する.

(3) 一般化されたフレーム場 Φ を $SU(8)$ の任意の行列として,

$$\psi_\mu^A \rightarrow \Phi^A_B \psi_\mu^B, \quad (9.5.11a)$$

$$\chi^{ABC} \rightarrow \Phi^A_D \Phi^B_E \Phi^C_F \chi^{DEF}, \quad (9.5.11b)$$

$$\epsilon^A \rightarrow \Phi^A_B \epsilon^B \quad (9.5.11c)$$

の置き換えの後, 一般化されたフレーム場を

$$e_{AB}^m \equiv -\Delta^{-1/2} e_a^m (\Phi \Gamma^a \Phi)_{AB}, \quad (9.5.12)$$

により定義する. すると, Φ は Lagrangian および局所超対称変換の式から姿を消し, 同時に, 理論は局所 $SU(8)$ 変換

$$e_\alpha^\mu \rightarrow e_\alpha^\mu, \quad B_\mu^m \rightarrow B_\mu^m, \quad (9.5.13a)$$

$$e_{AB}^m \rightarrow e_{CD}^m (U^{-1})^C_A (U^{-1})^D_B, \quad (9.5.13b)$$

$$\psi_\mu^A \rightarrow U^A_B \psi_\mu^B, \quad \epsilon^A \rightarrow U^A_B \epsilon^B, \quad (9.5.13c)$$

$$\chi^{ABC} \rightarrow U^A_D U^B_E U^C_F \chi^{DEF} \quad (9.5.13d)$$

に対して不変となる.

9.5.2 局所超対称変換

本節での notation では, 11 次元場の局所超対称変換は,

$$\delta_{\text{SUSY}} \tilde{\theta}_M^A = \frac{i}{2} \tilde{\epsilon} \tilde{\Gamma}^A \Psi_M, \quad (9.5.14a)$$

$$\delta_{\text{SUSY}} \Psi_M = \tilde{D}_M(\omega) \epsilon, \quad (9.5.14b)$$

$$\delta_{\text{SUSY}} A_{MNP} = -\frac{3i}{2} \tilde{\epsilon} \tilde{\Gamma}_{[MN} \Psi_{P]}. \quad (9.5.14c)$$

フレーム場に対するゲージ条件 $\tilde{\theta}_m^\alpha = 0$ を保つようにするため, 11 次元での超対称変換のうち, フレーム場に対する変換を, 次のような局所超対称変換と無限小局所 $SO(10, 1)$ 変換の結合に置き換える:

$$\delta'_s = \delta_{\text{SUSY}} + \delta_\Omega(SO(10, 1)) : \quad (9.5.15)$$

$$\delta'_s \tilde{\theta}_m^\alpha = \frac{i}{2} \tilde{\epsilon} \tilde{\Gamma}^\alpha \Psi_m + \tilde{\theta}_m^\beta \Omega_{\beta}^\alpha + \tilde{\theta}_m^a \Omega_a^\alpha = 0 \quad (9.5.16)$$

$$\Rightarrow \Omega_{AB}; \left\{ \begin{array}{l} \Omega_{a\alpha} = -\Omega_{\alpha a} = -\frac{i}{2} \tilde{\epsilon} \tilde{\Gamma}^\alpha \Psi_a, \\ \Omega_{ab} = 0. \end{array} \right. \quad (9.5.17)$$

このとき、

$$\delta'_s \tilde{\theta}_\mu^\alpha = \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \gamma^\alpha \Psi_\beta \tilde{\theta}_\mu^\beta + \tilde{\theta}_\mu^\beta \Omega_{\beta}^\alpha, \quad (9.5.18a)$$

$$\delta'_s \tilde{\theta}_\mu^a = \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \left(\gamma_5 \Gamma^a \Psi_\mu + \tilde{\theta}_\mu^\alpha \gamma_\alpha \Psi^a \right), \quad (9.5.18b)$$

$$\delta'_s \tilde{\theta}_m^a = \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \gamma_5 \Gamma^a \Psi_m. \quad (9.5.18c)$$

これらより、

$$\Delta^{-1} \delta'_s \Delta = e_a^m \delta'_s \theta_m^a = \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \gamma_5 \Gamma^a \Psi_a. \quad (9.5.19)$$

よって、

$$\begin{aligned} \delta'_s \theta_\mu^\alpha &= \delta'_s (\Delta^{1/2} \tilde{\theta}_\mu^\alpha) \\ &= \frac{i}{2} \bar{\epsilon} \gamma^\alpha \left(\Psi_\beta - \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma_\beta \Gamma^a \Psi_a \right) \theta_\mu^\beta + \left(\Omega_{\beta}^\alpha - \frac{i}{4} \bar{\epsilon} \gamma_5 \gamma^{\alpha\beta} \Gamma^a \Psi_a \right) \theta_\mu^\beta \end{aligned} \quad (9.5.20)$$

そこで、

$$\Omega_{\alpha\beta} = -\frac{i}{4} \bar{\epsilon} \gamma_5 \gamma_{\alpha\beta} \Gamma^a \Psi_a \quad (9.5.21)$$

と選ぶと、

$$\delta'_s \theta_\mu^\alpha = \frac{i}{2} \bar{\epsilon}^A \gamma^\alpha \psi_{\mu A} + \text{h.c.}, \quad (9.5.22a)$$

$$\begin{aligned} \delta'_s \psi_\mu^A &= \left(D_\mu(\hat{\omega}, \mathcal{B}) - \frac{1}{4} \overset{\circ}{D}_m B_\mu^m \right) \epsilon^A - i \gamma^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{\alpha\beta}^{-[AB]} \epsilon_B \\ &\quad + \frac{i}{2} e^{mAB} D_m(\gamma_\mu \epsilon_B) - \frac{i}{4} e_{CD}^m \mathcal{A}_m^{ABCD} \gamma_\mu \epsilon_B, \end{aligned} \quad (9.5.22b)$$

$$\delta'_s B_\mu^m = \frac{\sqrt{2}}{8} e_{AB}^m \left(2\sqrt{2} \bar{\epsilon}^A \psi_\mu^B + i \bar{\epsilon}_C \gamma_\mu \chi^{ABC} \right) + \text{h.c.}, \quad (9.5.22c)$$

$$\begin{aligned} \delta'_s \chi^{ABC} &= 3\sqrt{2} \mathcal{G}_{\alpha\beta}^{-[AB} \gamma^{|\alpha\beta|} \epsilon^{C]} - \sqrt{2} i \gamma^\mu \mathcal{A}_\mu^{ABCD} \epsilon_D \\ &\quad + \frac{3}{\sqrt{2}} e^{m[AB]} D_m \epsilon^{C]} - \frac{3}{2\sqrt{2}} e_{DE}^m \mathcal{A}_m^{DE[AB} \epsilon^{C]} - \sqrt{2} \mathcal{A}_m^{ABCD} \epsilon_D \end{aligned} \quad (9.5.22d)$$

$$\delta'_s e_{AB}^m = -\sqrt{2} \Sigma_{ABCDE} e^{mCD}. \quad (9.5.22e)$$

ここで、

$$\Sigma_{ABCD} \equiv ((1 + \star) \bar{\epsilon}_{[*\chi***]})_{ABCD} \quad (9.5.23)$$

また、様々な共変微分の定義は

$$D_\mu \epsilon^A \equiv \mathcal{D}_\mu \epsilon^A + \frac{1}{4} \hat{\omega}_\mu^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} \epsilon^A + \frac{1}{2} \mathcal{B}_\mu^A{}_B \epsilon^B; \quad (9.5.24a)$$

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu - B_\mu^m \overset{\circ}{D}_m, \quad (9.5.24b)$$

$$\hat{\omega}_\mu^{\alpha\beta} = \omega_\mu^{\alpha\beta}(\theta) - \theta_\mu^{[\alpha} e^{\beta]\nu} \overset{\circ}{D}_m B_\nu^m, \quad (9.5.24c)$$

$$D_m \epsilon^A \equiv \overset{\circ}{D}_m \epsilon^A + \frac{1}{2} \mathcal{B}_m^A{}_B \epsilon^B. \quad (9.5.24d)$$

$\mathcal{B}_M^A{}_B$ および \mathcal{A}_M^{ABCD} は一般に、次の関係式の解から選ばれる：

$$\mathcal{D}_\mu e_{AB}^m + \frac{1}{2} \partial_n B_\mu^n e_{AB}^m + \partial_n B_\mu^m e_{AB}^n + \mathcal{B}_\mu^C{}_{[A} e_{B]C}^m = 0, \quad (9.5.25a)$$

$$\overset{\circ}{D}_m e_{AB}^n + \mathcal{B}_m^C{}_{[A} e_{B]C}^n + \mathcal{A}_{mABCD} e^{nCD} = 0. \quad (9.5.25b)$$

ただし、

$$\mathcal{A}_M^{ABCD} = \frac{1}{24} \epsilon^{ABCDEFGH} \mathcal{A}_{M EFGH}. \quad (9.5.26)$$

具体的な表式は、

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\mu^A{}_B &= \frac{1}{2} \left\{ e_a^m (\overset{\circ}{D}_m B_\mu^n) \theta_{nb} - (S^{-1} \mathcal{D}_\mu S)^{ab} \right\} \Gamma_{AB}^{ab} \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{12} i \theta_\mu^\alpha \Delta^{-1/2} \left\{ F_{\alpha abc} \Gamma_{AB}^{abc} + \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\beta\gamma\delta a} \Gamma_{AB}^a \right\}, \end{aligned} \quad (9.5.27a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu^{ABCD} &= \frac{\sqrt{2}}{48} i \Delta^{-1/2} \theta_\mu^\alpha \left\{ \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta\gamma\delta} \Gamma_{[AB}^b \Gamma_{CD]}^{ab} - 6 F_{abc\alpha} \Gamma_{[AB}^a \Gamma_{CD]}^{bc} \right\} \\ &- \frac{3}{4} \left\{ e_a^m (\overset{\circ}{D}_m B_\mu^n) \theta_{nb} - (S^{-1} \mathcal{D}_\mu S)_{ab} \right\} \Gamma_{[AB}^a \Gamma_{CD]}^b, \end{aligned} \quad (9.5.27b)$$

$$\mathcal{B}_m^A{}_B = -\frac{1}{2} (S^{-1} \overset{\circ}{D}_m S)_{ab} \Gamma_{AB}^{ab} - \frac{\sqrt{2}}{14} i f \theta_m^a \Gamma_{AB}^a, \quad (9.5.27c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m^{ABCD} &= \frac{3}{4} (S^{-1} \overset{\circ}{D}_m S)_{ab} \Gamma_{[AB}^a \Gamma_{CD]}^b + \frac{\sqrt{2}}{56} i \theta_{ma} f \Gamma_{[AB}^{ab} \Gamma_{CD]}^b \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{32} i \theta_m^a F_{abcd} \Gamma_{[AB}^b \Gamma_{CD]}^{cd}. \end{aligned} \quad (9.5.27d)$$

ここで、

$$f = -\frac{1}{24} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (9.5.28)$$

また、

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta AB}^{(+)} = \left[\left(\frac{i}{16} \Delta^{1/2} \omega_{\alpha\beta a} + \frac{i}{8} \Delta^{-1/2} e_a^m e_{[\alpha}^\mu \partial_m \theta_{\beta]\mu} \right) \Gamma_{AB}^a - \frac{\sqrt{2}}{32} i \Delta^{-1/2} F_{\alpha\beta ab} \Gamma_{AB}^{ab} \right]^{(+)}. \quad (9.5.29)$$

9.6 S^7 de Wit-Nicolai compactification

9.6.1 Killing spinor and Killing vector

de Wit-Nicolai による S^7 コンパクト化では, round sphere の計量 g が基準計量として用いられる. この計量は次の Killing スピノール方程式を満たす 8 個の Killing スピノール $\eta^i = (\eta_A^i)$ をもつ:

$$\overset{\circ}{D}_m \eta^j \equiv \left(\overset{\circ}{\nabla}_m + \frac{i}{2} m_7 \overset{\circ}{\Gamma}_m \right) \eta^j = 0; \quad (9.6.1)$$

$$\bar{\eta}^i \eta^j = \delta^{ij}. \quad (9.6.2)$$

Round S^7 の 28 個の Killing ベクトルは, これらの Killing スピノールを用いて,

$$K^{mij} = i \overset{\circ}{e}_a^m \bar{\eta}^i \Gamma^a \eta^j. \quad (9.6.3)$$

9.6.2 4次元 de Wit-Nicolai 理論の 11次元への埋め込み

Bosonic sector ゲージ場として electric potential のみをもつ 4次元極大超重力理論の bosonic sector の基本場は

$$g_{\mu\nu}(\theta_\mu^\alpha), \quad A_\mu^{IJ}, \quad \mathcal{V} = L\mathcal{V}(0)(L \in E_{7(7)} \subset \text{Sp}(56)) \quad (9.6.4)$$

これを $SU(8)$ ゲージ不変形式での $D = 11$ 超重力理論に次のように埋め込む:

$$\theta_\mu^\alpha(x, y) = \theta_\mu^\alpha(x), \quad (9.6.5a)$$

$$B_\mu^m(x, y) = A_\mu^{ij} K_{ij}^m, \quad (9.6.5b)$$

$$e_{ij}^m(x, y) = K^{mIJ}(y)((\mathcal{V}_{11})_{ij}{}^{IJ}(x) + (\mathcal{V}_{12})_{ijIJ}). \quad (9.6.5c)$$

9.7 General perturbation equations

9.7.1 Bosonic part

作用積分のボゾン部分

$$2\kappa^2 S_B = \int *1 R_s - \frac{1}{2} *F_4 \wedge F_4 - \frac{1}{6} A_3 \wedge F_4 \wedge F_4 \quad (9.7.1)$$

の摂動に対する2次の項を求める.

まず,

$$\delta g_{MN} = h_{MN}, \quad \delta C_{[3]} = C_{[3]}^{(1)}, \quad \delta F_{[4]} = F_{[4]}^{(1)} \quad (9.7.2)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \delta_2 \int -\frac{1}{2} *F \wedge F &= \int -\frac{1}{2 \times 4!} \left[(\delta F)_{****} (\delta F)^{****} \right. \\ &\quad - \left(8h^{MN} - \frac{1}{2} hg^{MN} \right) F_{M****} (\delta F)_N^{***} \\ &\quad + (6h^{MN} h^{PQ} + 4h^{MR} h_R^N g^{PQ}) F_{MP**} F_{NQ}^{**} \\ &\quad \left. - 2hh^{MN} F_{M****} F_N^{***} + (3h^2 - 6h^{MN} h_{MN}) |F|^2 \right]. \end{aligned} \quad (9.7.3)$$

$$\delta_2 \int -\frac{1}{6} A \wedge F \wedge F = \int -\frac{1}{2} A^{(1)} \wedge F^{(1)} \wedge F. \quad (9.7.4)$$

$$\begin{aligned} \delta_2 \int *1 R_s &= *1 \left[\frac{1}{4} h^{MN} \square h_{MN} - \frac{1}{2} h^{MN} \nabla_P \nabla_M h_N^P \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} h \nabla_M \nabla_N h^{MN} - \frac{1}{4} h \square h + h_P^M h^{NP} R_{MN} \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} h h^{MN} R_{MN} - \frac{1}{4} h^{MN} h_{MN} R + \frac{R}{8} h^2 \right]. \end{aligned} \quad (9.7.5)$$

以上より, 摂動方程式は

$$\mathcal{F} := d* \left(F^{(1)} - 4h \circ F + \frac{1}{2} h F \right) + F \wedge F^{(1)} = 0, \quad (9.7.6a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{MN} &:= \triangle_L \psi_{MN} + 2\nabla_{(M} \nabla_P \psi_{N)}^P - \nabla_P \nabla_Q \psi^{PQ} g_{MN} \\ &\quad - R_s \psi_{MN} + R_{PQ} \psi^{PQ} g_{MN}, \\ &= 2\kappa^2 \delta T_{MN} \equiv \kappa^2 \mathcal{T}_{MN}. \end{aligned} \quad (9.7.6b)$$

ここで,

$$\psi_{MN} = h_{MN} - \frac{1}{2}hg_{MN}, \quad (9.7.7)$$

$$\Delta_L \psi_{MN} = -\square \psi_{MN} + 2R_{P(M} \psi_{N)}^P - 2R_{MPNQ} \psi^{PQ}, \quad (9.7.8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{MN} = & \frac{1}{3} F_{(M}{}^{***} \delta F_{N)***} - g_{MN} F \cdot \delta F \\ & - \frac{1}{2} \psi^{PQ} F_{MP**} F_{NQ}{}^{**} - \frac{1}{3} \psi_{MN} |F|^2 + \frac{1}{18} F_{M***} F_N{}^{***} \end{aligned} \quad (9.7.9)$$

9.8 Killing スピノール

$D = 11$ 超重力理論における Killing スピノールの方程式は, 一般に,

$$\tilde{D}_M \tilde{\epsilon} \equiv \tilde{\nabla}_M \tilde{\epsilon} + \frac{1}{288} \left(\tilde{\Gamma}_M^{****} - 8\delta_M^* \tilde{\Gamma}^{****} \right) F_{****} \tilde{\epsilon} = 0. \quad (9.8.1)$$

9.8.1 Freund-Rubin 型コンパクト化

時空計量とフラックスは

$$\tilde{g}(M^{11}) = W^2(y)g(X_4) + W^{2p}(y)\hat{g}(Y_7), \quad (9.8.2a)$$

$$F_{[4]} = c\Omega(X_4) + \hat{F}_{[4]}(y). \quad (9.8.2b)$$

(4 + 7) 分解 M の正規直交基底

$$\tilde{\theta}^A : \quad \tilde{\theta}^\alpha = W(y)\theta^\alpha(x), \quad \tilde{\theta}^a = W^p(y)\hat{\theta}^a(y), \quad (9.8.3)$$

に対する接続形式は

$$\tilde{\omega}^A_B : \quad \tilde{\omega}^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta, \quad (9.8.4a)$$

$$\tilde{\omega}^\alpha_a = \frac{1}{W^p} \hat{\nabla}_a W \theta^\alpha, \quad (9.8.4b)$$

$$\tilde{\omega}^a_b = \hat{\omega}^a_b + \frac{p}{W} \left(\hat{\nabla}_b W \hat{\theta}^a - \hat{\nabla}^a W \hat{\theta}_b \right) \quad (9.8.4c)$$

と分解される. また, Γ 行列は, 4次元 Gamma 行列 γ^α と 7次元 Euclidean Gamma 行列 $\hat{\gamma}^a$ を用いて,

$$\Gamma^\alpha = \gamma^\alpha \otimes 1, \quad \Gamma^a = \gamma_5 \otimes \hat{\gamma}^a. \quad (9.8.5)$$

ここで,

$$\gamma_5 = -i\gamma^{0\dots 3}, \quad \hat{\gamma}_{(7)} = i\hat{\gamma}^{1\dots 7}. \quad (9.8.6)$$

座標基底に関する $\tilde{\Gamma}^M$ は

$$\tilde{\Gamma}^\mu = W^{-1}\gamma^\mu \otimes 1, \quad \tilde{\Gamma}_\mu = W\gamma_\mu \otimes 1, \quad (9.8.7a)$$

$$\tilde{\Gamma}^m = W^{-p}\gamma_5 \otimes \hat{\gamma}^m, \quad \tilde{\Gamma}_m = W^p\gamma_5 \otimes \hat{\gamma}_m. \quad (9.8.7b)$$

特に,

$$\Gamma_{(11)} = \Gamma^{0\dots 10} = 1 \otimes \hat{\gamma}_{(7)} \quad (9.8.8)$$

より,

$$\Gamma_{(11)} = 1 \Rightarrow \hat{\gamma}_{(7)} = 1. \quad (9.8.9)$$

また, Majorana 条件は

$$\tilde{\epsilon}^* = \tilde{B}\tilde{\epsilon}; \quad (9.8.10)$$

$$\tilde{B} = -i\Gamma^{3579} = \gamma^3\gamma_5 \otimes (-i)\hat{\gamma}^{246} = B_{(4)} \otimes \hat{B}_{(7)}. \quad (9.8.11)$$

以上より,

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\epsilon} = \nabla_\mu \tilde{\epsilon} + \frac{1}{2W^p} \gamma_\mu \gamma_5 \otimes \hat{\gamma}^m \partial_m W \tilde{\epsilon}, \quad (9.8.12a)$$

$$\tilde{\nabla}_m \tilde{\epsilon} = \hat{\nabla}_m \tilde{\epsilon} - \frac{p}{2W} \partial_m W \tilde{\epsilon} + \frac{p}{2W} 1 \otimes (\hat{\gamma}_m \hat{\gamma}^n \partial_n W) \tilde{\epsilon}. \quad (9.8.12b)$$

また,

$$\gamma^{\mu\nu\lambda} = -i\gamma_5 \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \gamma_\sigma, \quad (9.8.13a)$$

$$\hat{\gamma}_{mnpq} = \frac{i}{3!} \epsilon_{mnpqrst} \hat{\gamma}^{rst} \hat{\gamma}_{(7)} \quad (9.8.13b)$$

より

$$\tilde{D}_\mu = \tilde{\nabla}_\mu + \frac{ic}{6W^3} (\gamma_5 \gamma_\mu) \otimes 1 + \frac{W^{1-4p}}{288} \gamma_\mu \otimes \hat{\gamma}^{m_1 \dots m_4} \hat{F}_{m_1 \dots m_4}, \quad (9.8.14a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_m &= \tilde{\nabla}_m + \frac{ic}{12W^{4-p}} 1 \otimes \hat{\gamma}_m \\ &+ \frac{1}{288W^{3p}} \gamma_5 \otimes \left\{ 12i\hat{\gamma}_{(7)} \hat{\gamma}^{pq} ({}^* \hat{F})_{pqm} - 8\hat{\gamma}^{n_1 n_2 n_3} \hat{F}_{m n_1 n_2 n_3} \right\} \end{aligned} \quad (9.8.14b)$$

よって,

$$\begin{aligned} \tilde{D}_\mu &= \nabla_\mu + (\gamma_\mu \gamma_5) \otimes \frac{1}{2W^p} \left(\hat{\gamma}^m \partial_m W - \frac{ic}{3W^{3-p}} \right) \\ &+ \frac{1}{288W^{4p-1}} \gamma_\mu \otimes \hat{\gamma}^{n_1 \dots n_4} \hat{F}_{\nu_1 \dots \nu_4}, \end{aligned} \quad (9.8.15a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_m &= \hat{\nabla}_m - \frac{p}{2W} \partial_m W + 1 \otimes \frac{1}{4W} \hat{\gamma}_m \left(2p\hat{\gamma}^n \partial_n W + \frac{ic}{3W^{3-p}} \right) \\ &+ \frac{1}{72W^{3p}} \gamma_5 \otimes \left\{ 3i\hat{\gamma}^{pq} ({}^* \hat{F})_{pqm} - 2\hat{\gamma}^{npq} \hat{F}_{mnpq} \right\}. \end{aligned} \quad (9.8.15b)$$

特に,

$$\tilde{\epsilon} = W^{p/2} (\epsilon_+(x) \otimes \eta_+(y) + \epsilon_-(x) \otimes \eta_-(y)); \quad \gamma_5 \epsilon_\pm = \pm \epsilon_\pm \quad (9.8.16)$$

と分解できるときには, $\tilde{D}_\mu \tilde{\epsilon} = 0$ より,

$$\nabla_\mu \epsilon_\pm \otimes \eta_\pm = -\gamma_\mu \epsilon_\mp \otimes \left\{ \mp \frac{1}{2W^p} \left(\hat{\nabla} W - \frac{ic}{3W^{3-p}} \right) + \frac{\hat{F}}{12W^{4p-1}} \right\} \eta_\mp. \quad (9.8.17)$$

よって,

$$\nabla_\mu \epsilon_\pm = -\lambda_\mp \gamma_\mu \epsilon_\mp, \quad (9.8.18a)$$

$$\left\{ \pm \frac{1}{2W^p} \left(\hat{\nabla} W - \frac{ic}{3W^{3-p}} \right) + \frac{\hat{F}}{12W^{4p-1}} \right\} \eta_\pm = \lambda_\pm \eta_\mp \quad (9.8.18b)$$

ここで, λ_\pm は定数. $\tilde{\epsilon}$ の Majorana 条件は

$$\epsilon_\pm^* = B \epsilon_\mp, \quad \eta_\pm^* = \hat{B}_7 \eta_\mp \quad (9.8.19)$$

となるが, この条件は

$$\lambda_- = \lambda_+^* \quad (9.8.20)$$

のとき, 上の方程式の複合と整合的となり, この条件下で複合の片方が成り立てばもう一方も成り立つ ($\hat{B}_7 \hat{\gamma}^a \hat{B}_7^{-1} = -\gamma^{a*}$ に注意). また, η_\pm の位相変換により, 常に $\lambda_+ = \lambda_- = \lambda \geq 0$ とできるので, 以下 \pm をつけない. このとき, η_\pm の関係式が解をもつための必要十分条件は,

$$\left[\frac{1}{4W^{2p}} \left(i \hat{\nabla} W + \frac{c}{3W^{3-p}} \right)^2 + \frac{\hat{F}^2}{144W^{8p-2}} \right] \eta = \lambda^2 \eta \quad (9.8.21)$$

が解を持つこと.

一方, $\tilde{D}_m \tilde{\epsilon} = 0$ は

$$D_m \eta_\pm \equiv \hat{\nabla}_m \eta_\pm + \frac{1}{4W} \hat{\gamma}_m \left(2p \hat{\nabla} W + \frac{ic}{3W^{3-p}} \right) \eta_\pm \\ \pm \frac{1}{72W^{3p}} \left\{ 3i \hat{\gamma}^{pq} ({}^* Y \hat{F})_{pqm} - 2 \hat{\gamma}^{npq} \hat{F}_{mnpq} \right\} \eta_\pm = 0. \quad (9.8.22)$$

($\eta_+^* = \hat{B}_7 \eta_-$ より複合の片方が成り立てば残りも成り立つ). 整合性条件は

$$[D_m, D_n] = \frac{1}{4} \hat{R}_{mnab} \hat{\gamma}^{ab} + \hat{\nabla}_m \hat{T}_n - \hat{\nabla}_n \hat{T}_m + [\hat{T}_m, \hat{T}_n]. \quad (9.8.23)$$

ここで,

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}_m \hat{T}_n &= -\frac{\partial_m W}{4W^2} \hat{\gamma}_n \left(2p \hat{\nabla} W + \frac{i(4-p)c}{3W^{3-p}} \right) + \frac{p}{2W} \hat{\gamma}_n \hat{\nabla}_m \hat{\nabla} W \\ &\pm \frac{1}{72W^{3p}} \left(\hat{\nabla}_m - 3p \frac{\partial_m W}{W} \right) \left(3i \hat{\gamma}^{pq} ({}^* \hat{F})_{pqn} - 2 \hat{\gamma}^{pqr} \hat{F}_{pqr} \right) \quad (9.8.24)\end{aligned}$$

(9.8.25)

$$\begin{aligned}[\hat{T}_m, \hat{T}_n] &= -\left(p^2 \frac{(\hat{\nabla} W)^2}{2W^2} + \frac{c^2}{72W^{8-2p}} \right) \hat{\gamma}_{mn} \\ &\quad - \frac{p^2}{W^2} \hat{\gamma}_{[m} \hat{\nabla}_{n]} W \hat{\nabla}^l W + \frac{ipc}{6W^{5-p}} \hat{\gamma}_{[m} \partial_{n]} W \\ &\quad \pm \frac{p}{6W^{3p+1}} \left\{ i \left(\hat{\gamma}_{[m}^q \hat{\nabla}^p W + \delta_{[m}^p \hat{\gamma}^{ql} \hat{\nabla}_l W \right) ({}^* \hat{F})_{n]pq} \right. \\ &\quad \quad \left. - \left(\hat{\nabla}^p W \hat{\gamma}^{qr}{}_{[m} - \delta_{[m}^p \hat{\gamma}^{qr} \hat{\nabla}_l W \right) \hat{F}_{n]pqr} \right\} \\ &\quad \pm \frac{ic}{36W^{4+2p}} \left\{ 3i \hat{\gamma}^q ({}^* \hat{F})_{nmq} - \hat{\gamma}_{[m}^{pqr} \hat{F}_{n]pqr} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{72W^{6p}} \left\{ - ({}^* \hat{F})_{lpm} ({}^* \hat{F})^l{}_{qn} \hat{\gamma}^{pq} \right. \\ &\quad \quad \left. - 2 |{}^* \hat{F}|^2 \hat{\gamma}_{mn} - 2 ({}^* \hat{F})_q{}^{rs} ({}^* \hat{F})_{rs[n} \hat{\gamma}_{m]}^q \right. \\ &\quad \quad \left. + 2i ({}^* \hat{F})^l{}_{p[m} \hat{F}_{n]lqr} \hat{\gamma}^{pqr} - 2i \hat{F}_{mnpq} ({}^* \hat{F})^{pqr} \hat{\gamma}_{[n} \right\} \quad (9.8.26)\end{aligned}$$

特に, $\hat{F} = 0$ のときには,

$$\begin{aligned}[D_m, D_n] &= \left\{ \frac{1}{4} \hat{R}_{mn}{}^{ab} - \frac{p(p+1)}{W^2} \delta_{[m}^b \partial_{n]} W \hat{\nabla}^a W - \hat{\nabla}_{[m} \hat{\nabla}^a W \delta_{n]}^b \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{p^2}{2} \frac{(\hat{\nabla} W)^2}{W^2} + \frac{c^2}{72W^{8-2p}} \right) \delta_m^a \delta_n^b \right\} \hat{\gamma}_{ab} \\ &\quad - \frac{2ic}{3W^{5-p}} \partial_{[m} W \hat{\gamma}_{n]}.\end{aligned} \quad (9.8.27)$$

極大超対称性をもつ条件 $[D_m, D_n] = 0$ において, $\hat{\gamma}^a$ の 1 次の項は

$$-\frac{2ic}{3W^{5-p}} \partial_{[m} W \delta_{n]}^a + \frac{c}{12W^4} ({}^* \hat{F})_{nm}{}^a - \frac{i}{36W^{6p}} \hat{F}_{mnpq} ({}^* \hat{F})^{pqa} = 0. \quad (9.8.28)$$

この式の虚部を a と n について縮約して

$$4c \frac{\partial_m W}{W^{5-p}} = \frac{1}{36W^{6p}} \hat{F}_{mnpq} ({}^* \hat{F})^{pqn} \equiv 0. \quad (9.8.29)$$

よって, $c \neq 0$ のとき, $dW = 0$. このとき,

$$(*_Y \hat{F})_{mn}{}^a = 0 \quad (9.8.30)$$

より, $\hat{F}_{[4]} = 0$. したがって,

$$D_m = \hat{\nabla}_m + \frac{ic}{12} \hat{\gamma}_m \quad (9.8.31)$$

となり, 整合性条件は

$$[D_m, D_n] = 0 \Rightarrow \hat{R}_{mn}{}^{pq} = \frac{c^2}{36} \delta_{mn}^{pq} \quad (9.8.32)$$

となり, Y_7 は round sphere S^7 .

一方, $c = 0$ のとき, $[D_m, D_n] = 0$ となるための必要十分条件は,

$$\hat{F}_{mnpq} (*_Y \hat{F})^{pqr} = 0, \quad (9.8.33a)$$

$$\hat{\nabla}_{[m} \hat{F}_{n]pqr} = 0, \quad (9.8.33b)$$

$$(*_Y \hat{F})^{l[p} \hat{F}_{n]l}{}^{qr} = 0, \quad (9.8.33c)$$

$$\hat{\nabla}_{[m} (*_Y \hat{F})_{n]pq} = 0, \quad (9.8.33d)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{mnpq} = & -\frac{1}{18} (*_Y \hat{F})_{lp[m} (*_Y \hat{F})^l{}_{n]q} + \frac{1}{9} |*_Y \hat{F}|^2 \delta_{p[m} \delta_{n]q} \\ & + \frac{1}{9} (*_Y \hat{F})^{rs}{}_{[q} \delta_{p][m} (*_Y \hat{F})_{n]rs}. \end{aligned} \quad (9.8.33e)$$

9.8.2 スピノール接続に対する Gauss-Weingarten 公式

スピン多様体 M^{2n} の超曲面を Σ^{2n-1} とする:

$$i: \Sigma^{2n-1} \hookrightarrow M^{2n} \quad (9.8.34)$$

M のスピンバンドルを $\text{Spin}(M)$, 有向フレームバンドルを $\text{SO}(M)$ と表す. Σ の有向フレームバンドル $\text{SO}(\Sigma)$ は Σ の M における単位法ベクトル場 Ω を付加することにより, Σ じょうでは自然に $\text{SO}(M)$ の部分バンドルとなる.

$$\begin{array}{ccc} \text{SO}(M) \ni (e_1, \dots, e_n) & \xleftarrow{p} & \text{Spin}(M) \ni (\chi_1, \dots, \chi_{2N}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ i_* \text{SO}(\Sigma) \ni (e_1, \dots, e_{n-1}, \Omega) & \xleftarrow{} & i_* \text{Spin}(\Sigma) \ni (\xi_1^+, \dots, \xi_N^+; \xi_1^-, \dots, \xi_N^-) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{SO}(\Sigma) \ni (e_1, \dots, e_{n-1}) & \xleftarrow{} & \text{Spin}(\Sigma) \ni (\xi_1, \dots, \xi_N) \end{array} \quad (9.8.35)$$

M 上のスピノール場に対する射影作用 \mathcal{P}_\pm を Σ の単位法ベクトル場 Ω を用いて

$$\mathcal{P}_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm i\Gamma_{(2n)}\tilde{\Gamma}_\mu\Omega^\mu) \quad (9.8.36)$$

により定義する. このとき, $\text{Spin}(2n-1)$ の表現として

$$\mathcal{S}_{2n}^\pm = \mathcal{P}_\pm \mathcal{S}_{2n} \cong \mathcal{S}_{2n-1}. \quad (9.8.37)$$

よって, ψ 上のスピノール \mathcal{S}_{2n-1} に値を取るスピノール場と, \mathcal{S}_{2n}^+ に値をとるスピノール場 $\tilde{\psi}$ で

$$\mathcal{P}_+\tilde{\psi} = \tilde{\psi} \quad (9.8.38)$$

を満たすものとの 1 対 1 対応が存在. 以下, この対応を一つ選び固定することにより, ψ と $\tilde{\psi}$ を同一視する.

以上の準備のもと, Σ 上のベクトル場 X とスピノール場 ψ に対し, その M の計量に関する共変微分 $\tilde{\nabla}\tilde{\psi}$ を

$$\tilde{\nabla}_X\tilde{\psi} = \mathcal{P}_+\tilde{\nabla}_X\tilde{\psi}; \quad (9.8.39)$$

$$\mathcal{P}_+\tilde{\nabla}_X\tilde{\psi} = \widetilde{\nabla}_X\tilde{\psi}, \quad (9.8.40)$$

$$\mathcal{P}_-\tilde{\nabla}_X\tilde{\psi} = i\Gamma_{(2n)}\tilde{\Gamma}_M K^M(X)\tilde{\psi} \quad (9.8.41)$$

このとき, $\nabla_X\psi$ は Σ の共変微分と整合的なスピン接続を与える. また, $K^M(X) // \Sigma$ は Σ の外部曲率テンソルとなる.

これは次の様にして示される. まず,

$$\mathcal{P}_+\tilde{\nabla}_X\tilde{\psi} = \left(\partial_X + \frac{1}{4}\tilde{\omega}_{ab}(X)\tilde{\Gamma}^{ab} \right) \tilde{\psi} \quad (9.8.42)$$

が示される. また, 定義より,

$$\omega^a{}_b(X) = \tilde{\omega}^a{}_b(X) \quad (9.8.43)$$

さらに, Σ の正規直交基底 $(e_\alpha) = (e_1, \dots, e_{n-1})$ を用いて $\Gamma^\mu = e_\alpha^\mu \Gamma^\alpha$ と定義するとき, M の正規直交基底 $(e_A) = (e_1, \dots, e_{n-1}, \Omega)$ に関する $\tilde{\Gamma}^M = e_A^M \tilde{\Gamma}^A$ により, $\Gamma^\mu = \tilde{\Gamma}^\mu$ となる. 以上より,

$$\nabla_X\Gamma^\mu = \mathcal{P}_+\tilde{\nabla}_X\tilde{\Gamma}^\mu\mathcal{P}_+ = 0 \quad (9.8.44)$$

が導かれる. これは, ∇_X が Σ のスピン接続となっていることを意味する.

9.8.3 S^{2n-1} 上の Killing スピノール場

単位球面 S^{2n-1} を E^{2n} に標準的に埋め込むことにより, S^{2n-1} に自然に計量と整合的なスピン構造が誘導される. このとき, E^{2n} のスピノール場に対する射影作用を

$$\mathcal{P}_\pm = \frac{1}{2} \left(1 \pm i\Gamma_{(2n)}\tilde{\Gamma}_M\Omega^M \right) : \mathcal{S}_{2n} \rightarrow \mathcal{S}_{2n}^\pm \quad (9.8.45)$$

により, 1対1対応

$$\mathcal{S}_{2n-1} \ni \psi \mapsto \tilde{\psi} \in \mathcal{S}_{2n}^+ : \quad (9.8.46)$$

が定義される.

いま, Ψ_0 を E^{2n} の定数スピノールとすると,

$$\tilde{\psi} = \mathcal{P}_+\Psi_0 \quad (9.8.47)$$

により S^{2n-1} 上のスピノール場 ψ を定義する. このとき, $X \in T(S^{2n-1})$ に対して,

$$\mathcal{P}_+\nabla_X\mathcal{P}_+\Psi_0 = \mathcal{P}_+\partial_X(\mathcal{P}_+\Psi_0) = -\frac{i}{2}\tilde{\Gamma}_MX^M\mathcal{P}_+\Gamma_{(2n)}\Psi_0. \quad (9.8.48)$$

よって,

$$\tilde{\psi}_\pm = \mathcal{P}_+(1 \pm \Gamma_{(2n)})\Psi_0 \quad (9.8.49)$$

とおくと,

$$\nabla_X\psi_\pm = \mp\frac{i}{2}\Gamma_\mu X^\mu\psi_\pm. \quad (9.8.50)$$

9.8.4 丸い S^7 上の Killing スピノール

$D = 11$ 超重力理論の $X_4 \times S^7$ コンパクト化において, S^7 方向の Killing スピノール方程式は, $F_{[4]} = f\Omega(X_4)$ のとき,

$$D_m\eta = 0; \quad D_m \equiv \nabla_m + \frac{ic}{2}\gamma_m \quad (c = f/6) \quad (9.8.51)$$

と表される. この方程式の整合性条件は

$$[D_m, D_n]\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\ell^2} - c^2 \right) \gamma_{mn}\eta = 0 \quad (9.8.52)$$

より,

$$c = \pm \frac{1}{\ell}. \quad (9.8.53)$$

ここで, ℓ は丸い S^7 の半径. このとき, 8 個の 1 次独立な Killing Majorana スピノール $\eta_I (I = 1, \dots)$ が存在:

$$\bar{\eta}_I \eta_J = \delta_{IJ} \quad (9.8.54)$$

(1) K_{IJ}, Ω_{IJ} : S^7 上のベクトル場の組 $K_{IJ} (I, J = 1, \dots, 8)$ を

$$K_{II}^m \equiv i \bar{\eta}_I \gamma^m \eta_J \quad (9.8.55)$$

により定義すると,

$$K_{IJ} = -K_{JI}. \quad (9.8.56)$$

Killing 方程式より,

$$\nabla_n K_{IJm} = c \bar{\eta}_I \gamma_{mn} \eta_J. \quad (9.8.57)$$

特に,

$$\nabla_n K_{IJm} + \nabla_m K_{IJn} = 0. \quad (9.8.58)$$

すなわち, K_{IJ} は S^7 の 28 個の Killing ベクトル.

さらに, 2 形式の系 $\Omega_{IJ} (I, J = 1, \dots, 8)$ を

$$\Omega_{IJmn} = \bar{\eta}_I \gamma_{mn} \eta_J \quad (9.8.59)$$

により定義すると,

$$\Omega_{IJ} = -\Omega_{JI} \quad (9.8.60)$$

で, 上式より

$$dK_{IJ} = -2c \Omega_{IJ}. \quad (9.8.61)$$

また,

$$\nabla_l \Omega_{IJmn} = -2c K_{IJ[m} g_{n]l}. \quad (9.8.62)$$

(2) S_{IJ} つぎに,

$$S_{IJmnl} \equiv i \bar{\eta}_I \gamma_{mnl} \eta_J \quad (9.8.63)$$

とおくと,

$$S_{IJ} = S_{JI} \quad (9.8.64)$$

で, その微分は

$$\nabla_p S_{IJmnl} = c (*S_{IJ})_{mnlp}. \quad (9.8.65)$$

特に,

$$dS_{IJ} = -4c *S_{IJ}. \quad (9.8.66)$$

9.9 4 次元的に一様等方なコンパクト化

仮定

- 時空計量

$$ds^2(M^{11}) = W^2(y)ds^2(X_m) + ds^2(Y_n) \quad (9.9.1)$$

ここで, $m + n = 11$.

- フラックス

$$F_4 = \Omega(X_m) \wedge c_{4-m}(y) + \hat{F}_4(y). \quad (9.9.2)$$

帰結 F_4 に対する Bianchi 恒等式は,

$$dF = \Omega(X) \wedge dc + d\hat{F} = 0 \Rightarrow dc = 0, \quad d\hat{F} = 0. \quad (9.9.3)$$

F_4 に対する場の方程式

$$*(W^m \Omega(X_m)) = (-1)^{mn} \Omega(Y_n), \quad (9.9.4a)$$

$$*\hat{F} = W^m \Omega(X_m) \wedge *_Y \hat{F}, \quad (9.9.4b)$$

$$*(\Omega(X_m) \wedge c) = (-1)^{m+1} W^{-m} *_Y c \quad (9.9.4c)$$

より

$$*F = (-1)^{m+1} d(W^{-m} *_Y c) + \Omega(X_m) \wedge d(W^m *_Y \hat{F}), \quad (9.9.5a)$$

$$F \wedge F = 2\Omega(X_m) \wedge c \wedge \hat{F} + \hat{F} \wedge \hat{F}. \quad (9.9.5b)$$

よって, 場の方程式

$$d*F + \frac{1}{2}F \wedge F = 0 \quad (9.9.6)$$

は,

$$d(W^m *_Y \hat{F}) + c \wedge \hat{F} = 0, \quad (9.9.7a)$$

$$(-1)^{m+1} d(W^{-m} *_Y c) + \frac{1}{2}\hat{F} \wedge \hat{F} = 0 \quad (m \leq 3). \quad (9.9.7b)$$

Einstein 方程式

$$R_{MN} = \frac{1}{12}F_{M***}F_N^{***} - \frac{1}{6}|F_4|^2 g_{MN} \quad (9.9.8)$$

は

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}(M) &= R_{\mu\nu}(X) - \frac{\Delta_Y W^m}{mW^{m-2}} g_{\mu\nu}(X) \\ &= -\frac{1}{6} \left(2|c|^2 W^{-2m} + |\hat{F}|^2 \right) W^2 g_{\mu\nu}(X), \end{aligned} \quad (9.9.9a)$$

$$\begin{aligned} R_{pq}(M) &= R_{pq}(Y) - m \frac{D_p D_q W}{W} \\ &= \frac{1}{12} \hat{F}_{p***} \hat{F}_q^{***} - \frac{1}{2(3-m)!} c_{p***} c_q^{***} W^{-2m} \\ &\quad - \frac{1}{6} \left(-|c|^2 W^{-2m} + |\hat{F}|^2 \right) g_{pq}(Y). \end{aligned} \quad (9.9.9b)$$

第1式は

$$\Delta_Y W^m - \frac{m}{6} \left(2|c|^2 W^{-m} + |\hat{F}|^2 W^m \right) = m\lambda W^{m-2}, \quad (9.9.10a)$$

$$R_{\mu\nu}(X) = \lambda g_{\mu\nu}(X) \quad (9.9.10b)$$

と同等. よって, Y がコンパクト閉で, W が至る所正則で $W > 0$ なら,

$$\lambda \leq 0 \quad (9.9.11)$$

で,

$$\lambda = 0 \Rightarrow c = \hat{F} = 0 \Rightarrow G = 0 \Rightarrow R_{pq}(Y) = 0. \quad (9.9.12)$$

9.9.1 Λ 4D 真空 \times Einstein 空間

Y_7 上の3形式 $S_{[3]}$ で方程式

$$dS = -f *_Y S \quad (9.9.13)$$

を満たすものが存在するとする. S は次の固有値方程式を満たす:

$$\left(\hat{\nabla} \cdot \hat{\nabla} - \hat{R}_b^a \hat{\theta}^b \wedge I_{\hat{e}_a} + \hat{\mathcal{R}}_{ab} \wedge I_{\hat{e}_b} I_{\hat{e}_a} \right) S = -f^2 S. \quad (9.9.14)$$

(Y_n が定曲率時空のとき, 左辺は $(\hat{\nabla}^2 - 3(n-1)K)S$.)

単純直積型時空

$$ds^2 = g(X_4) + g(Y_7) \quad (9.9.15)$$

($W = 1$) において,

$$F = f\Omega(X_4) + \hat{F}; \quad \hat{F} = dS \quad (9.9.16)$$

とおくと, F はゲージ場の方程式を満たす. さらに, S が方程式

$$S_{mpq}S_n{}^{pq} = s^2 g_{mn} \quad (9.9.17)$$

を満たすとすると,

$$\hat{F}_{m***}\hat{F}_n{}^{***} = 4f^2 s^2 g_{mn} \quad (9.9.18)$$

より, Einstein 方程式は

$$\text{Ric}(X_4) = \Lambda g(X_4), \quad \text{Ric}(Y_7) = 6K g(Y_7) \quad (9.9.19)$$

に帰着する. ここで,

$$\Lambda = -\frac{f^2}{3} \left(1 + \frac{7}{12}s^2 \right), \quad (9.9.20a)$$

$$K = \frac{f^2}{36} \left(1 + \frac{5}{6}s^2 \right). \quad (9.9.20b)$$

【注 9.1】 $f = 4\sqrt{K} = 4/\ell$ (すなわち, $s^2 = 3/2$) のとき, が丸い球面 S^7 上の Killing スピノールから定義されるテンソル S_{IJabc} が上記の条件を満たす. また, $\tilde{\omega}^a{}_b = \tilde{\omega}[g]^a{}_b - \theta^m S_m{}^a{}_b$ が平坦接続となる. —□

9.9.2 CCST₄ × S^p × S^q × ℝ

1 次元時空が, $\text{SO}(4, 1) \times \text{SO}(p+1) \times \text{SO}(q+1)$ ($p+q=6$) で不変とすると,

$$g(M^{11}) = W^2(y)g(X_4) + g(Y_7), \quad (9.9.21a)$$

$$g(Y_7) = N(y)^2 dy^2 + r_1(y)^2 g(S^p) + r_2(y)^2 g(S^q), \quad (9.9.21b)$$

$$F_4 = c\Omega(X_4) + \hat{F}_4(y). \quad (9.9.21c)$$

ここで,

$$dc = 0, \quad d\hat{F}_4 = 0. \quad (9.9.22)$$

$\text{Ric}(M^{11})$ の X_4 方向成分より,

$$R_{\mu\nu}(X) = \lambda g_{\mu\nu}(X), \quad (9.9.23a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{4}{NW} \left(\frac{W'}{N} \right)' + 12 \frac{(W')^2}{N^2 W^2} + 4p \frac{r'_1 W'}{N^2 r_1 W} + 4q \frac{r'_2 W'}{N^2 r_2 W} \\ &= \frac{4c^2}{3W^8} + \frac{2}{3} |\hat{F}|^2 + \frac{4\lambda}{W^2}. \end{aligned} \quad (9.9.23b)$$

(y, y) 成分より,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{NW} \left(\frac{W'}{N} \right)' + \frac{p}{Nr_1} \left(\frac{r'_1}{N} \right)' + \frac{q}{Nr_2} \left(\frac{r'_2}{N} \right)' \\ &= -\frac{b_0^2}{12} + \frac{1}{6} |\hat{F}|^2 - \frac{c^2}{6W^8}. \end{aligned} \quad (9.9.23c)$$

S^p および S^q 方向成分より,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Nr_1} \left(\frac{r'_1}{N} \right)' + (p-1) \frac{(r'_1)^2}{N^2 r_1^2} + q \frac{r'_1 r'_2}{N^2 r_1 r_2} + 4 \frac{r'_1 W'}{N^2 r_1 W} \\ &= \frac{p-1}{r_1^2} - \frac{b_1^2}{12} + \frac{|\hat{F}|^2}{6} - \frac{c^2}{6W^8}, \end{aligned} \quad (9.9.23d)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Nr_2} \left(\frac{r'_2}{N} \right)' + (q-1) \frac{(r'_2)^2}{N^2 r_2^2} + p \frac{r'_1 r'_2}{N^2 r_1 r_2} + 4 \frac{r'_2 W'}{N^2 r_2 W} \\ &= \frac{q-1}{r_2^2} - \frac{b_2^2}{12} + \frac{|\hat{F}|^2}{6} - \frac{c^2}{6W^8}. \end{aligned} \quad (9.9.23e)$$

ここで,

$$\hat{F}_{y^{***}} \hat{F}_y^{***} = b_0^2 N^2, \quad (9.9.24a)$$

$$\hat{F}_{i_1^{***}} \hat{F}_{j_1}^{***} = b_1^2 r_1^2 g_{i_1 j_1}(S^p), \quad (9.9.24b)$$

$$\hat{F}_{i_2^{***}} \hat{F}_{j_2}^{***} = b_2^2 r_2^2 g_{i_2 j_2}(S^q). \quad (9.9.24c)$$

これらの方程式より 2 階微分の項を消去すると (Einstein 方程式の (y, y) 成分に対応), 次の拘束条件が得られる:

$$\begin{aligned} & 12 \left(\frac{W'}{NW} \right)^2 + \frac{p(p-1)}{N^2 r_1^2} (r'_1)^2 + \frac{q(q-1)}{N^2 r_2^2} (r'_2)^2 + 2pq \frac{r'_1 r'_2}{N^2 r_1 r_2} \\ & + 8 \frac{W}{NW'} \left(p \frac{r'_1}{Nr_1} + q \frac{r'_2}{Nr_2} \right) - \frac{p(p-1)}{r_1^2} - \frac{q(q-1)}{r_2^2} \\ & = \frac{b_0^2 - pb_1^2 - qb_2^2}{12} + \frac{3}{2} |\hat{F}|^2 + \frac{c^2}{2W^8} + \frac{4\lambda}{W^2}. \end{aligned} \quad (9.9.25)$$

9.9.3 $dS^4 \times S^3 \times S^3 \times \mathbb{R}$

前節において, $p = q = 3$ の場合,

$$\hat{F} = a_1 dy \wedge dV(S_1^3) + a_2 dy \wedge dV(S_2^3) \quad (9.9.26)$$

より,

$$|\hat{F}|^2 = \frac{1}{N^2} \left(\frac{a_1^2}{r_1^6} + \frac{a_2^2}{r_2^6} \right). \quad (9.9.27a)$$

$$\hat{F}_{y***} \hat{F}_y^{***} = 3! N^2 |\hat{F}|^2, \quad (9.9.27b)$$

$$\hat{F}_{i_1***} \hat{F}_{j_1}^{***} = \frac{6a_1^2}{N^2 r_1^4} g_{i_1 j_1}(S_1^3), \quad (9.9.27c)$$

$$\hat{F}_{i_2***} \hat{F}_{j_2}^{***} = \frac{6a_2^2}{N^2 r_2^4} g_{i_2 j_2}(S_2^3). \quad (9.9.27d)$$

すなわち,

$$b_0^2 = 6|\hat{F}|^2 = b_1^2 + b_2^2, \quad b_i^2 = \frac{6a_i^2}{N^2 r_i^6} \quad (i = 1, 2). \quad (9.9.28)$$

よって, Einstein 方程式は, $D = (1/N)d/dy$ と置くととき,

$$\begin{aligned} \frac{D^2 W}{W} + 3 \frac{(DW)^2}{W^2} + 3 \left(\frac{Dr_1}{r_1} + \frac{Dr_2}{r_2} \right) \frac{DW}{W} \\ = \frac{c^2}{3W^8} + \frac{1}{6N^2} \left(\frac{a_1^2}{r_1^6} + \frac{a_2^2}{r_2^6} \right) + \frac{\lambda}{W^2}, \end{aligned} \quad (9.9.29a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} D^2 r_1 + 2 \frac{(Dr_1)^2}{r_1^2} + 3 \frac{Dr_1 Dr_2}{r_1 r_2} + 4 \frac{Dr_1 DW}{r_1 W} + \frac{c^2}{6W^8} \\ = \frac{2}{r_1^2} + \frac{1}{2N^2} \left(\frac{a_1^2}{r_1^6} + 2 \frac{a_2^2}{r_2^6} \right), \end{aligned} \quad (9.9.29b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_2} D^2 r_2 + 2 \frac{(Dr_2)^2}{r_2^2} + 3 \frac{Dr_1 Dr_2}{r_1 r_2} + 4 \frac{Dr_2 DW}{r_2 W} + \frac{c^2}{6W^8} \\ = \frac{2}{r_2^2} + \frac{1}{2N^2} \left(\frac{a_2^2}{r_2^6} + 2 \frac{a_1^2}{r_1^6} \right), \end{aligned} \quad (9.9.29c)$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{(DW)^2}{W^2} + \frac{(Dr_1)^2}{r_1^2} + \frac{(Dr_2)^2}{r_2^2} + 3 \frac{Dr_1 Dr_2}{r_1 r_2} \\ + 4 \frac{DW}{W} \left(\frac{Dr_1}{r_1} + \frac{Dr_2}{r_2} \right) - \frac{6}{r_1^2} - \frac{6}{r_2^2} \\ = \frac{1}{2N^2} \left(\frac{a_1^2}{r_1^6} + \frac{a_2^2}{r_2^6} \right) + \frac{c^2}{2W^8} + \frac{4\lambda}{W^2}. \end{aligned} \quad (9.9.29d)$$

SO(4, 4)-gauging の HW dS 真空に対応する解

$$c = \frac{9}{8}k^3, \quad a_1 = a_2 = 0, \quad \lambda = 3, \quad (9.9.30a)$$

$$W = \frac{\sqrt{3}}{2}N, \quad N = k \cosh^{1/3}(2y), \quad (9.9.30b)$$

$$r_1 = \frac{k \cosh(y)}{\cosh^{1/6}(2y)}, \quad r_2 = \frac{k \sinh(y)}{\cosh^{1/6}(2y)}. \quad (9.9.30c)$$

この解は, $X_4 = dS^4$ の計量のリスケールにより次のように変換される :

$$ds^2 = \forall \cosh^{2/3}(2\psi)g(dS^4(\Lambda)) + \ell^2 \cosh^{-1/3}(2\psi)g(\Sigma_{4,4}^E) \quad (9.9.31a)$$

$$F = c\Omega(dS^4(\Lambda)), \quad (9.9.31b)$$

$$\Lambda = \frac{4}{\ell^2}, \quad c = \frac{2}{\ell}. \quad (9.9.31c)$$

ただし, $k \rightarrow \ell, y \rightarrow \psi$ と記号を変えた.

9.10 非コンパクト多様体 $\Sigma_{4,4}^E$ によるコンパクト化

9.10.1 $\Sigma_{4,4}^E$ 多様体

E^8 に対する $SO(4, 4)$ の標準的な作用に対して不変な 2 次曲面

$$\Sigma_{4,4}^E : (X^1)^2 + \cdots (X^4)^2 - (X^5)^2 - \cdots (X^8)^2 = 1 \quad (9.10.1)$$

は,

$$(X^1, \dots, X^4) = \cosh(\psi)\Omega_{(1)}; \quad \Omega_{(1)} \cdot \Omega_{(1)} = 1, \quad (9.10.2a)$$

$$(X^5, \dots, X^8) = \sinh(\psi)\Omega_{(2)}; \quad \Omega_{(2)} \cdot \Omega_{(2)} = 1 \quad (9.10.2b)$$

とパラメーター付けできる. この座標系の元で, E^8 の超曲面としての $\Sigma_{4,4}^E$ の計量は,

$$\begin{aligned} g(\Sigma_{4,4}^E) &= (dX^1)^2 + \cdots + (dX^8)^2 \\ &= \cosh(2\psi)d\psi^2 + \cosh^2(\psi)g(S_1^3) + \sinh^2(\psi)g(S_2^2) \end{aligned} \quad (9.10.3)$$

4 次元極大超重重力理論の $SO(4, 4)$ -dyonic gauging で得られる理論の Hull-Warner dS 真空の M 理論へのアップリフトに対応する 11 次元計量は

$$g(M^{11}) = a^2 \cosh^{2/3}(2\psi)g(dS^4) + b^2 \cosh^{-1/3}(2\psi)g(\Sigma_{4,4}^E). \quad (9.10.4)$$

特に,

$$\sqrt{\det g(M^{11})} = \frac{1}{8} a^4 b^7 \cosh^{2/3}(2\psi) \sinh^3(2\psi) \sqrt{\det g(dS^4) \det g(S_1^3) \det g(S_2^2)}. \quad (9.10.5)$$

よって, M^{11} の d'Lambertian は

$$\square_{11} = \frac{1}{b^2} \cosh^{2/3}(2\psi) \left[\frac{b^2}{a^2} \square_{dS^4} - 4\mathcal{L}_{4,4}^{HW} \right]. \quad (9.10.6)$$

ここで,

$$\mathcal{L}_{4,4}^{HW} = -\frac{1}{\sinh^3 y} \partial_y (\sinh^3 y \partial_y) - \frac{\cosh(y)}{2(\cosh(y) + 1)} \Delta_{S_1^3} - \frac{\cosh(y)}{2(\cosh(y) - 1)} \Delta_{S_2^3} \quad (9.10.7)$$

ここで, $y = 2\psi$. これより, スカラ場の 4 次元質量 m は固有値問題

$$\mathcal{L}_{4,4}^{HW} u = \lambda u \Rightarrow m^2 = \frac{4a^2}{b^2} \lambda \quad (9.10.8)$$

により決まる. すなわち, L が自己共役作用素なら, その固有値と固有関数の完全系 (λ_j, u_j) を用いて,

$$\square_{11}\phi = 0 \Rightarrow \phi = \sum_j \phi_j(x)u_j(y); \quad (\square_{\text{dS}^4} - m_j^2)\phi_j = 0. \quad (9.10.9)$$

9.10.2 作用素 $\mathcal{L}_{4,4}^{\text{HW}}$ のスペクトル

S_1^3 および S_2^3 について調和関数展開し, $z = \cosh y$ とおくと

$$\mathcal{L}_{4,4}^{\text{HW}} = L = -\frac{1}{z^2-1} \frac{d}{dz} \left((z^2-1)^2 \frac{d}{dz} \right) + \ell_1(\ell_1+2) \frac{z}{2(z+1)} + \ell_2(\ell_2+2) \frac{z}{2(z-1)}. \quad (9.10.10)$$

したがって, 固有関数 u の方程式は

$$(z^2-1) \frac{d^2 u}{dz^2} + 4z \frac{du}{dz} + \left\{ \lambda - \frac{\ell_1(\ell_1+2) + \ell_2(\ell_2+2)}{2} + \frac{\ell_1(\ell_1+2)}{2(z+1)} - \frac{\ell_2(\ell_2+2)}{2(z-1)} \right\} u = 0. \quad (9.10.11)$$

この一般解は

$$\begin{aligned} u = & C_- (z+1)^{(\ell_2-1)/2-\alpha} (z-1)^{-\ell_2/2-1} \\ & \times F \left(-\frac{\ell_1+\ell_2+1}{2} + \alpha, \frac{\ell_1-\ell_2+1}{2} + \alpha, 1+2\alpha; \frac{2}{z+1} \right) \\ & + C_+ (z+1)^{(\ell_2-1)/2+\alpha} (z-1)^{-\ell_2/2-1} \\ & F \left(-\frac{\ell_1+\ell_2+1}{2} - \alpha, \frac{\ell_1-\ell_2+1}{2} - \alpha, 1-2\alpha; \frac{2}{z+1} \right) \end{aligned} \quad (9.10.12)$$

ここで,

$$\alpha = \sqrt{\frac{9}{4} - A}; \quad A = \lambda - \frac{\ell_1(\ell_1+2) + \ell_2(\ell_2+2)}{2}. \quad (9.10.13)$$

$z \rightarrow \infty$ では

$$u \sim C_- z^{-3/2-\alpha} + C_+ z^{-3/2+\alpha} \quad (9.10.14)$$

いま, L が自己共役とすると, 対応する u のノルムは

$$\|u\|^2 = \int_1^\infty dz (z^2-1) |u(z)|^2. \quad (9.10.15)$$

このノルムに関して, スペクトルは次のようになる.

スペクトル

- 連続スペクトル： $A > 9/4$, すなわち $\alpha = i|\alpha|$. このとき, C_{\pm} によらず $u(z)$ は至る所正則で, $z^{3/2}u \sim \exp(\pm\alpha \log z)$.

$$\lambda \geq \frac{\ell_1(\ell_1 + 2) + \ell_2(\ell_2 + 2)}{2} + \frac{9}{4}. \quad (9.10.16)$$

- 離散スペクトル： $A < 9/4$, すなわち $\alpha > 0$. このとき, $\|u\| < +\infty$ より, $C_+ = 0$ で, $u \sim C_- z^{-3/2-\alpha} (z \sim \infty)$. また, $z = 1$ で

$$F\left(-\frac{\ell_1 + \ell_2 + 1}{2} + \alpha, \frac{\ell_1 - \ell_2 + 1}{2} + \alpha, 1 + 2\alpha; 1\right) = \frac{\Gamma(1 + 2\alpha)\Gamma(\ell_2 + 1)}{\Gamma\left(\frac{\ell_1 + \ell_2 + 3}{2} + \alpha\right)\Gamma\left(\frac{-\ell_1 + \ell_2 + 1}{2} + \alpha\right)} \quad (9.10.17)$$

より, $z = 1$ で $u(z)$ は正則となるためには,

$$\frac{-\ell_1 + \ell_2 + 1}{2} + \alpha = -n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (9.10.18)$$

よって, 離散固有値は,

$$\alpha = \frac{\ell_1 - \ell_2 - 1}{2} - n > 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (9.10.19)$$

より,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\ell_1(\ell_1 + 2) + \ell_2(\ell_2 + 2)}{2} + \frac{9}{4} - \alpha^2 \\ &= \frac{(\ell_1 + \ell_2)^2}{4} + \ell_1 \left(n + \frac{3}{2}\right) - \ell_2 \left(n - \frac{1}{2}\right) - (n-1)(n) \end{aligned} \quad (9.10.20)$$

ただし,

$$\ell_1 > \ell_2 + 1 \quad (9.10.21)$$

でのみ離散スペクトルは存在.

最小値：この条件を満たす離散スペクトルの最小値は

$$\ell_1 = 2, \ell_2 = 0, n = 0 \Rightarrow \lambda = 6 \Leftrightarrow \ell^2 m^2 = 18 \quad (9.10.22)$$

一方, dS^4 での通常のゼロ質量にあたる固有値は, $\lambda = 0$. この固有値に対応する解は, $\ell_1 = \ell_2 = 0$ のとき,

$$u = C_1 + C_2 \left(\ln \frac{z+1}{z-1} - \frac{2z}{z^2-1} \right). \quad (9.10.23)$$

よって、正則なものは $u = \text{const}$ だが、この解のノルムは発散する。一般に、 $\lambda = 0$ とすると、 $\alpha > 3/2$ のとき、 $z = \infty$ で有界となるためには $C_+ = 0$ 。 $\lambda = 0$ だと、 $\alpha > (\ell_1 + \ell_2)/2 + 1$ より、 $u(z)$ は必ず $z = 1$ で発散。よって、 $\lambda = 0$ に対する有界で正則な解は、 $\ell_1 = \ell_2 = 0$ に対応する $u = \text{const}$ のみ。

拡張スペクトル 解を規格化可能なものから有界正則なものに緩めると、上記の連続スペクトル $\lambda \geq \lambda_0 + 9/4$ と離散スペクトル以外に次の値が λ として許されるようになる。ここで、

$$\lambda_0 = \frac{\ell_1(\ell_1 + 2) + \ell_2(\ell_2 + 2)}{2}. \quad (9.10.24)$$

- $\ell_1 = \ell_2$ のとき： $[\lambda_0, \lambda_0 + 5/4) \cup (\lambda_0 + 5/4, \lambda_0 + 9/4)$. 離散スペクトルは無し。
- $|\ell_1 - \ell_2| = 1$ のとき： $(\lambda_0, \lambda_0 + 2) \cup (\lambda_0 + 2, \lambda_0 + 9/4)$. 離散スペクトルは無し。
- $\ell_1 - \ell_2 = 2$ のとき： $[\lambda_0, \lambda_0 + 5/4) \cup (\lambda_0 + 5/4, \lambda_0 + 2) \cup (\lambda_0 + 2, \lambda_0 + 9/4)$. 離散スペクトルは一個で、 $\lambda = \lambda_0 + 2$.
- $\ell_2 - \ell_1 = 2$ のとき： $[\lambda_0, \lambda_0 + 5/4) \cup (\lambda_0 + 5/4, \lambda_0 + 2) \cup (\lambda_0 + 2, \lambda_0 + 9/4)$. 離散スペクトルはなし。
- $\ell_2 - \ell_1 \geq 3$ のとき： $(\lambda_0, \lambda_0 + 5/4) \cup (\lambda_0 + 5/4, \lambda_0 + 2) \cup (\lambda_0 + 2, \lambda_0 + 9/4)$. 離散スペクトルはなし。
- $\ell_1 - \ell_2 \geq 3$ のとき： $(\lambda_0, \lambda_0 + 5/4) \cup (\lambda_0 + 5/4, \lambda_0 + 2) \cup (\lambda_0 + 2, \lambda_0 + 9/4)$. 離散スペクトルは、1個以上で、 $(0, \lambda_0)$ に含まれる。最小離散固有値は

$$\lambda = \frac{(\ell_1 + \ell_2)^2}{4} + \frac{3}{2}\ell_1 + \frac{1}{2}\ell_2 + 2 \geq \ell_2^2 + 5\ell_2 + \frac{35}{4}. \quad (9.10.25)$$

9.11 Perturbations around a Warped Compactification

9.11.1 Background

Geometry

$$\tilde{g}(M_{11}) = W(y)^2 g(X_n) + \hat{g}(Y_m) \quad (9.11.1)$$

ここで、 X_n は Einstein 時空 $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$. Riemann 曲率テンソルは、

$$\tilde{R}^\mu{}_{\nu\lambda\sigma} = R^\mu{}_{\nu\lambda\sigma} - (DW)^2(\delta_\lambda^\mu g_{\nu\sigma} - \delta_\sigma^\mu g_{\nu\lambda}), \quad (9.11.2a)$$

$$\tilde{R}^m{}_{\mu n\nu} = -\frac{D^m D_n W}{W} \tilde{g}_{\mu\nu}. \quad (9.11.2b)$$

$$\tilde{R}^m{}_{npq} = \hat{R}^m{}_{npq}. \quad (9.11.2c)$$

Ricci 曲率テンソルは

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = (\Lambda - W\Delta W - (n-1)(DW)^2) g_{\mu\nu}, \quad (9.11.3a)$$

$$\tilde{R}_{\mu m} = 0, \quad (9.11.3b)$$

$$\tilde{R}_{mn} = \hat{R}_{mn} - n\frac{D_m D_n W}{W}, \quad (9.11.3c)$$

$$\tilde{R}_s = \hat{R}_s + \frac{n\Lambda}{W^2} - 2n\frac{\Delta W}{W} - n(n-1)\frac{(DW)^2}{W^2}, \quad (9.11.3d)$$

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = -\frac{n-2}{2}\tilde{\Lambda}\tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (9.11.3e)$$

$$\tilde{G}_{\mu m} = 0, \quad (9.11.3f)$$

$$\tilde{G}_{mn} = \hat{R}_{mn} - \frac{1}{2}\tilde{R}_s g_{mn} - n\frac{D_m D_n W}{W} \quad (9.11.3g)$$

ここで、

$$\tilde{\Lambda} \equiv \frac{\Lambda}{W^2} + \frac{1}{n-2}\hat{R}_s - \frac{2(n-1)\Delta W}{n-2} - (n-1)\frac{(DW)^2}{W^2}. \quad (9.11.4)$$

Flux

$$\tilde{F} = f\Omega(X_4) + \hat{F}(y). \quad (9.11.5)$$

ゲージ場の方程式は

$$d(W^4 *_Y \hat{F}) + f\hat{F} = 0. \quad (9.11.6)$$

\tilde{T}_{MN} は、

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = -\rho_F \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (9.11.7a)$$

$$\tilde{T}_{\mu m} = 0, \quad (9.11.7b)$$

$$\tilde{T}_{mn} = \frac{1}{12}\hat{F}_{m***}\hat{F}_n^{***} - \frac{1}{4}g_{mn}|\tilde{F}|^2 \quad (9.11.7c)$$

ここで、

$$\rho_F \equiv \frac{1}{4}\left(\frac{f^2}{W^8} + |\hat{F}|^2\right), \quad (9.11.8a)$$

$$|\tilde{F}|^2 = -\frac{f^2}{W^8} + |\hat{F}|^2. \quad (9.11.8b)$$

Einstein equations ($n = 4, m = 7$)

$$\frac{\Lambda}{W^2} + \frac{1}{2}\hat{R}_s - 3\frac{\Delta W}{W} - 3\frac{(DW)^2}{W^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{f^2}{W^2} + |\hat{F}|^2\right), \quad (9.11.9a)$$

$$\hat{R}_{mn} - \frac{1}{2}\tilde{R}_s g_{mn} - 4\frac{D_m D_n W}{W} = \frac{1}{12}\hat{F}_{n***}\hat{F}_m^{***} - \frac{1}{4}\hat{g}_{mn}|\tilde{F}|^2, \quad (9.11.9b)$$

9.11.2 Metric perturbations

以下、

$$\psi_\nu^\mu = \tilde{\psi}_\nu^\mu, \quad \psi_\mu^m = \tilde{\psi}_\mu^m, \quad \psi_n^m = \tilde{\psi}_n^m \quad (9.11.10)$$

とおき、 \sim のついていない ψ_N^M については、添え字 μ, ν, \dots は $g_{\mu\nu}$ で、 m, n, \dots は $\tilde{g}_{mn} = g_{mn}$ で上げ下げをするものとする。

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{MN} &:= \Delta_L \psi_{MN} + 2\nabla_{(M} \nabla_P \psi_{N)}^P - \nabla_P \nabla_Q \psi^{PQ} g_{MN} \\ &\quad - R_s \psi_{MN} + R_{PQ} \psi^{PQ} g_{MN}, \\ &= 2\kappa^2 \delta T_{MN} \equiv \kappa^2 \mathcal{T}_{MN}. \end{aligned} \quad (9.11.11)$$

1) $\tilde{\Delta}_L \tilde{\psi}_{\mu\nu}$ の計算 まず、

$$\begin{aligned} \tilde{\square} \tilde{\psi}_{\mu\nu} &= \square \psi_{\mu\nu} + W^2 \left(\hat{\Delta} + \frac{n}{W} DW \cdot D - 2\frac{(DW)^2}{W^2} \right) \psi_{\mu\nu} \\ &\quad + 4\frac{D_m W}{W} \nabla_{(\mu} \psi_{\nu)}^m + 2D_m W D_n W \psi^{mn} g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (9.11.12)$$

また、Lichnerowicz 作用素の中で曲率に比例する項は

$$\tilde{R}_{(\mu}^L \tilde{\psi}_{\nu)L} = \left\{ \Lambda - W \hat{\Delta} W - (n-1)(DW)^2 \right\} \psi_{\mu\nu}, \quad (9.11.13a)$$

$$\tilde{R}_{\mu P \nu Q} \tilde{\psi}^{PQ} = R^\alpha_{\mu}{}^\beta{}_\nu \psi_{\alpha\beta} + (DW)^2 (\psi_{\mu\nu} - \psi_\alpha^\alpha g_{\mu\nu}) - W D^p D^q W \psi_{pq} g_{\mu\nu}. \quad (9.11.13b)$$

よって、Lichnerowicz 作用素の (μ, ν) 成分は

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_L \tilde{\psi}_{\mu\nu} &= \Delta_L \psi_{\mu\nu} - W^2 \left\{ \hat{\Delta} + \frac{n}{W} DW \cdot D + 2\frac{\hat{\Delta} W}{W} + 2(n-1)\frac{(DW)^2}{W^2} \right\} \psi_{\mu\nu} \\ &\quad - 4\frac{D_m W}{W} \nabla_{(\mu} \psi_{\nu)}^m + 2 \left((DW)^2 \psi_\alpha^\alpha + W^2 D^p D^q (\ln W) \psi_{pq} \right) g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (9.11.14)$$

2) $\tilde{\Delta}_L \tilde{\psi}_\mu^m$ の計算 D'Alembertian は

$$\begin{aligned} \tilde{\square} \psi_\mu^m &= 2 \frac{D^n W}{W} \nabla_\mu \psi_n^m \\ &+ \frac{1}{W^2} \square \psi_\mu^m + \left[\hat{\Delta} + \frac{n-2}{W} DW \cdot D - (n-1) \frac{(DW)^2}{W^2} - \frac{\hat{\Delta} W}{W} \right] \psi_n^m \\ &- \frac{n+2}{W^2} D^m W D^n W \psi_\mu^n - 2 \frac{D^m W}{W} \nabla_\nu \psi_\mu^\nu. \end{aligned} \quad (9.11.15)$$

曲率項は

$$\begin{aligned} \tilde{R}_\nu^L \tilde{\psi}_L^m + \tilde{R}_L^m \tilde{\psi}_\mu^L &= \left\{ \frac{\Lambda}{W^2} - \frac{\hat{\Delta} W}{W} - (n-1) \frac{(DW)^2}{W^2} \right\} \psi_\mu^m + \left(\hat{R}_n^m - \frac{n}{W} D^m D_n W \right) \psi_\mu^n \\ \tilde{R}_{\mu P}{}^{mQ} \tilde{\psi}_Q^P &= \frac{D^m D_n W}{W} \psi_\mu^n. \end{aligned} \quad (9.11.16b)$$

よって,

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_L \tilde{\psi}_\mu^m &= -2 \frac{D^n W}{W} \nabla_\mu \psi_n^m \\ &- \frac{1}{W^2} (\square - \Lambda) \psi_\mu^m - \left(\hat{\Delta} + \frac{n-2}{W} DW \cdot D \right) \psi_\mu^m + \hat{R}_n^m \psi_\mu^n \\ &+ \frac{2}{W} D^m W \nabla_\nu \psi_\mu^\nu. \end{aligned} \quad (9.11.17)$$

3) $\tilde{\Delta}_L \tilde{\psi}_{mn}$ の計算 D'Alembertian は

$$\begin{aligned} \tilde{\square} \psi_n^m &= \frac{1}{W^2} \square \psi_n^m + \left(\hat{\Delta} + \frac{n}{W} DW \cdot D \right) \tilde{\psi}_n^m \\ &- \frac{n}{W^2} (D^m W D_p W \psi_n^p + D_n W D^p W \psi_p^m) \\ &- 2 \frac{D^m W}{W^3} \nabla^\alpha \psi_{\alpha n} - 2 \frac{D_n W}{W^3} \nabla^\alpha \psi_\alpha^m + 2 \frac{D^m W D_n W}{W^2} \psi_\alpha^\alpha \end{aligned} \quad (9.11.18)$$

曲率項は

$$\tilde{R}^{mL} \tilde{\psi}_{nL} + \tilde{R}_n^L \tilde{\psi}_L^m = \left(\hat{R}_i^m - n \frac{D^m D_i W}{W} \right) \psi_n^i + \left(\hat{R}_n^l - n \frac{D_n D^l W}{W} \right) \psi_l^m, \quad (9.11.19a)$$

$$\tilde{R}^m{}_{PnQ} \tilde{\psi}^{PQ} = \hat{R}^m{}_{pnq} \psi^{pq} - \frac{D^m D_n W}{W} \psi_\alpha^\alpha. \quad (9.11.19b)$$

よって,

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_L \tilde{\psi}_{mn} &= -\frac{1}{W^2} \square \psi_{mn} - \left(-\hat{\Delta}_L + \frac{n}{W} DW \cdot D \right) \psi_{mn} - 2n D_{(m} D^l (\ln W) \psi_{n)l} \\ &\quad + \frac{4}{W^3} D_{(m} W \nabla^\alpha \psi_{n)\alpha} + 2D_m D_n (\ln W) \psi_\alpha^\alpha.\end{aligned}\quad (9.11.20)$$

4) $\tilde{\nabla}_M \tilde{\nabla}_P \tilde{\psi}_N^P$ の計算 まず, $\tilde{\nabla}_P \tilde{\psi}_M^P$ は

$$\tilde{\nabla}_P \tilde{\psi}_\mu^P = \nabla_\alpha \psi_\mu^\alpha + n \frac{D_m W}{W} \psi_\mu^m + D_m \psi_\mu^m, \quad (9.11.21a)$$

$$\tilde{\nabla}_P \tilde{\psi}_m^P = \frac{1}{W^2} \nabla_\alpha \psi_m^\alpha + D_p \psi_m^p + n \frac{D_p W}{W} \psi_m^p - \frac{D_m W}{W} \psi_m^m \quad (9.11.21b)$$

次に,

$$\tilde{\nabla}_\mu V_\nu = \nabla_\mu V_\nu + W D^m W g_{\mu\nu} V_m, \quad (9.11.22a)$$

$$\tilde{\nabla}_\mu V^\nu = \nabla_\mu V^\nu + \frac{D_m W}{W} V^m \delta_\mu^\nu, \quad (9.11.22b)$$

$$\tilde{\nabla}_\mu V_m = \nabla_\mu V_m - \frac{D_m W}{W} V_\mu, \quad (9.11.22c)$$

$$\tilde{\nabla}_\mu V^m = \nabla_\mu V^m - \frac{D^m W}{W} V_\mu, \quad (9.11.22d)$$

$$\tilde{\nabla}_m V_\mu = D_m V_\mu - \frac{D_m W}{W} V_\mu, \quad (9.11.22e)$$

$$\tilde{\nabla}_m V^\mu = D_m V^\mu + \frac{D_m W}{W} V^\mu, \quad (9.11.22f)$$

$$\tilde{\nabla}_m V_n = D_m V_n, \quad (9.11.22g)$$

$$\tilde{\nabla}_m V^n = D_m V^n. \quad (9.11.22h)$$

これを $v_M = \nabla_P \tilde{\psi}_M^P$ に適用して,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\mu(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\psi})_\nu &= \nabla_\mu \nabla_\alpha \psi_\nu^\alpha + \left(D_m + n \frac{D_m W}{W} \right) \nabla_\mu \psi_\nu^m \\ &\quad + \left\{ \frac{D^m W}{W} \nabla_\alpha \psi_m^\alpha + W D^m W \left(D_p + n \frac{D_p W}{W} \right) \psi_m^p - (DW)^2 \right\} \psi_\nu^\alpha, \end{aligned} \quad (9.11.23a)$$

$$\tilde{\nabla}_m(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\psi})_n = D^m \left\{ \frac{1}{W^2} \nabla_\alpha \psi_n^\alpha + \left(D_p + n \frac{D_p W}{W} \right) \psi_n^p - \frac{D_n W}{W} \psi_\alpha^\alpha \right\}, \quad (9.11.23b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\mu(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\psi})_m &= \nabla_\mu \left\{ \frac{1}{W^2} \nabla_\alpha \psi_m^\alpha + \left(D_p + n \frac{D_p W}{W} \right) \psi_m^p - \frac{D_m W}{W} \psi_\alpha^\alpha \right\} \\ &\quad - \frac{D^m W}{W} \left\{ \nabla_\alpha \psi_\mu^\alpha + \left(D_p + n \frac{D_p W}{W} \right) \psi_\mu^p \right\}, \end{aligned} \quad (9.11.23c)$$

$$\tilde{\nabla}_m(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\psi})_\mu = \left(D_m - \frac{D_m W}{W} \right) \left\{ \nabla_\alpha \psi_\mu^\alpha + \left(D_p + n \frac{D_p W}{W} \right) \psi_\mu^p \right\}. \quad (9.11.23d)$$

これらより,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}^P \tilde{\nabla}^Q \tilde{\psi}_{PQ} &= \frac{1}{W^2} \nabla_\alpha \nabla^\beta \psi_\beta^\alpha - \left(\frac{1}{W} DW \cdot D + \hat{\Delta}(\ln W) + n \frac{(DW)^2}{W^2} \right) \psi_\alpha^\alpha \\ &\quad + \frac{2}{W^2} \left(D_p + (n-1) \frac{D_p W}{W} \right) \nabla^\alpha \psi_\alpha^p \\ &\quad + \left(D_p + n \frac{D_p W}{W} \right) \left(D_q + n \frac{D_q W}{W} \right) \psi^{pq}. \end{aligned} \quad (9.11.24)$$

5) \mathcal{E}_{MN} の計算

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\mu\nu} &= (\Delta_L - n\Lambda)\psi_{\mu\nu} \\
&\quad - W^2 \left\{ \hat{\Delta} + \frac{n}{W}DW \cdot D - 2(n-1)\frac{\hat{\Delta}W}{W} - (n-1)(n-2)\frac{(DW)^2}{W^2} + \hat{R}_s \right\} \psi_{\mu\nu} \\
&\quad + 2\nabla_{(\mu}\nabla^\alpha\psi_{\nu)\alpha} + 2\left(D_p + (n-2)\frac{D_pW}{W}\right)\nabla_{(\mu}\psi_{\nu)}^m \\
&\quad + \left[(WDW \cdot D + \Lambda)\psi_\alpha^\alpha - \nabla_\alpha\nabla_\beta\psi^{\alpha\beta}\right. \\
&\quad - 2\left(D_p + (n-2)\frac{D_pW}{W}\right)\nabla^\alpha\psi_\alpha^p - W^2D_pD_q\psi^{pq} - 2(n-1)WD_pWD_q\psi^{pq} \\
&\quad \left. + W^2\left\{\hat{R}_{pq} - 2(n-1)\frac{D_pD_qW}{W} - (n-1)(n-2)\frac{D_pWD_qW}{W}\right\}\psi^{pq}\right]g_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{9.11.25a}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\mu^m &= \nabla_\mu \left\{ \frac{1}{W^2}\nabla_\alpha\psi_m^\alpha + \left(D_p + (n-2)\frac{D_pW}{W}\right)\psi_m^p - \frac{D_mW}{W}\psi_\alpha^\alpha \right\} + D_m\nabla_\alpha\psi_\mu^\alpha \\
&\quad - \left(\frac{\square + (n-1)\Lambda}{W^2} + \hat{\Delta} + \frac{n-2}{W}DW \cdot D + \hat{R}_s - 2n\frac{\hat{\Delta}W}{W} - n(n-1)\frac{(DW)^2}{W^2} \right) \psi_\mu^m \\
&\quad + \left(D^m - 2\frac{D^mW}{W}\right)\left(D_p + n\frac{D_pW}{W}\right)\psi_\mu^p + \hat{R}_p^m\psi_\mu^p,
\end{aligned} \tag{9.11.25b}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{mn} &= \left[\left(\frac{1}{W}DW \cdot D + \frac{\Lambda}{W^2}\right)\psi_\alpha^\alpha - \frac{1}{W^2}\nabla_\alpha\nabla_\beta\psi^{\alpha\beta}\right. \\
&\quad - \frac{2}{W^2}\left(D_p + (n-1)\frac{D_pW}{W}\right)\nabla^\alpha\psi_\alpha^p - D_pD_q\psi^{pq} - \frac{2n}{W}D_qWD_p\psi^{pq} \\
&\quad \left. + \left(\hat{R}_{pq} - \frac{2n}{W}D_pD_qW - \frac{n(n-1)}{W^2}D_pWD_qW\right)\psi^{pq}\right]g_{mn} \\
&\quad - \left(\frac{\square + n\Lambda}{W^2} - \hat{\Delta}_L + \frac{n}{W}DW \cdot D + \hat{R}_s - 2n\frac{\hat{\Delta}W}{W} - n(n-1)\frac{(DW)^2}{W^2} \right) \psi_{mn} \\
&\quad + \frac{2}{W^4}D_{(m}(W^2\nabla^\alpha\psi_{n)\alpha}) + 2D_{(m}D^p\psi_{n)p} - \frac{2}{W}D_{(m}WD_n)\psi_\alpha^\alpha.
\end{aligned} \tag{9.11.25c}$$

9.11.3 Source perturbation

1) 一般式 エネルギー運動量テンソルの摂動は

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{MN} = & \frac{1}{3} \tilde{F}_{(M}{}^{***} \delta \tilde{F}_{N)***} - \tilde{g}_{MN} \tilde{F} \cdot \delta \tilde{F} \\ & - \frac{1}{2} \tilde{\psi}^{PQ} \tilde{F}_{MP**} \tilde{F}_{NQ**} - \frac{1}{2} \tilde{\psi}_{MN} |\tilde{F}|^2 + \frac{1}{12} \tilde{g}_{MN} \tilde{\psi}^{PQ} \tilde{F}_{P***} \tilde{F}_{Q***} \\ & + \frac{1}{18} \left(\tilde{F}_{M***} \tilde{F}_{N***} - 3 \tilde{g}_{MN} |\tilde{F}|^2 \right) \tilde{\psi}. \end{aligned} \quad (9.11.26)$$

2) δF の計算 ゲージポテンシャルの摂動は一般に

$$\delta A = a_{[3]} + a_{[2]m} \wedge dy^m + \frac{1}{2} a_{[1]mn} \wedge dy^m \wedge dy^n + \hat{a}_{[3]} \quad (9.11.27a)$$

$$a_{[3]} = \frac{1}{3!} a_{\mu\nu\lambda} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda, \quad (9.11.27b)$$

$$a_{[2]m} = \frac{1}{2!} a_{\mu\nu m} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (9.11.27c)$$

$$a_{[1]mn} = a_{\mu mn} dx^\mu, \quad (9.11.27d)$$

$$\hat{a}_{[3]} = \frac{1}{3!} a_{mnl} dy^m \wedge dy^n \wedge dy^l \quad (9.11.27e)$$

表される。対応するフラックステンソルは

$$\begin{aligned} \delta F &= d\delta A \\ &= d'a_{[3]} \\ &\quad + (-\partial_m a_{[3]} + d'a_{[2]m}) \wedge dy^m \\ &\quad + \frac{1}{2} (-2\partial_n a_{[2]m} + d'a_{[1]mn}) dy^m \wedge dy^n \\ &\quad + \frac{1}{3!} (-3\partial_l a_{[1]mn} + d'a_{mnl}) \wedge dy^m \wedge dy^n \wedge dy^l \\ &\quad + \hat{d}\hat{a}_{[3]}. \end{aligned} \quad (9.11.28)$$

ここで,

$$d' = dx^\mu \wedge \partial_\mu, \quad \hat{d} = dy^m \wedge \partial_m. \quad (9.11.29)$$

特に, 背景フラックスが

$$\tilde{F} = f\Omega(X_4) + \hat{F} \quad (9.11.30)$$

で与えられるとき,

$$\tilde{F} \cdot \delta \tilde{F} = \frac{f}{W^8} \nabla^\mu ({}^*X a_{[3]})_\mu + \frac{1}{3!} \hat{F}^{mnpq} D_m \hat{a}_{npq}. \quad (9.11.31)$$

3) \mathcal{T}_{MN} の計算 まず,

$$\tilde{F}_\mu^{***} \delta \tilde{F}_{\nu^{***}} = \frac{f}{W^6} \epsilon_\mu^{\alpha\beta\gamma} (d' a_{[3]})_{\nu\alpha\beta\gamma} = \frac{6f}{W^6} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha b^\alpha \quad (9.11.32)$$

より,

$$\mathcal{T}_\nu^\mu|_{\delta A} = \left(\frac{f}{W^8} \nabla \cdot b - \hat{F} \cdot \hat{d} \hat{a}_{[3]} \right) \delta_\nu^\mu. \quad (9.11.33)$$

ここで,

$$b_{[1]} = *_X a_{[3]}, \quad a_{[3]} = *_X b_{[1]}. \quad (9.11.34)$$

また,

$$\mathcal{T}_\nu^\mu|_{\delta\psi} = \frac{f^2}{W^8} \left(\frac{2}{3} \tilde{\psi} \delta_\nu^\mu - \tilde{\psi}_\nu^\mu \right) - \frac{1}{3} \tilde{\psi}_\nu^\mu |\tilde{F}|^2. \quad (9.11.35)$$

ここで,

$$|\tilde{F}|^2 = -\frac{f^2}{W^8} + |\hat{F}|^2. \quad (9.11.36)$$

よって,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\nu^\mu &= -2\rho_F \tilde{\psi}_\nu^\mu \\ &- \left[-\frac{f}{W^8} \nabla \cdot b + \hat{F} \cdot \hat{d} \hat{a}_{[3]} + \frac{1}{6} \left(\frac{2f^2}{W^8} - |\hat{F}|^2 \right) \tilde{\psi}_\alpha^\alpha - \frac{2}{3} \rho_F \tilde{\psi}_p^p - \frac{1}{12} \psi^{pq} \hat{F}_{p^{***}} \hat{F}_q^{***} \right] \delta_\nu^\mu. \end{aligned} \quad (9.11.37)$$

ここで

$$\rho_F = \frac{1}{4} \left(\frac{f^2}{W^8} + |\hat{F}|^2 \right).$$

次に,

$$\begin{aligned} &\tilde{F}_\mu^{***} \delta \tilde{F}_{m^{***}} + \tilde{F}_m^{***} \delta \tilde{F}_{\mu^{***}} \\ &= \frac{f}{W^6} (6\partial_m b_\mu - 3!(*_X d' a_{[2]m})) \\ &\quad + \hat{F}_m^{pqr} (-3\partial_p a_{\mu qr} + \partial_\mu a_{pqr}) \end{aligned} \quad (9.11.38)$$

および

$$\tilde{F}_{\mu P^{**}} \tilde{F}_{m Q^{**}} = \tilde{F}_{\mu^{***}} \tilde{F}_m^{***} = 0 \quad (9.11.39)$$

より,

$$\mathcal{T}_\mu^m = \frac{f}{W^6} \{ D_m b_\mu - (*_X d' a_{[2]m})_\mu \} - \frac{1}{2} \psi_\mu^m \left(-\frac{f^2}{W^8} + |\hat{F}|^2 \right). \quad (9.11.40)$$

最後に,

$$\tilde{F}_m^{***} \delta \tilde{F}_{n^{***}} = \hat{F}_m^{pqr} \delta \hat{F}_{npqr} \quad (9.11.41)$$

より

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{mn} = & \frac{1}{6} \left(\hat{F}_m^{pqr} (\hat{d}\hat{a}_{[3]})_{npqr} + \hat{F}_n^{pqr} (\hat{d}\hat{a}_{[3]})_{mpqr} \right) - \left(\frac{f}{W^8} \nabla \cdot b + \hat{F} \cdot (\hat{d}\hat{a}_{[3]}) \right) g_{mn} \\ & - \frac{1}{2} \psi^{pq} \hat{F}_{mp^{**}} \hat{F}_{nq}^{**} - \frac{1}{2} \psi_{mn} \left(-\frac{f^2}{W^2} + |\hat{F}|^2 \right) + \frac{1}{12} g_{mn} \hat{F}_{p^{***}} \hat{F}_q^{***} \psi^{pq} \\ & - \frac{1}{18} \left\{ \hat{F}_{m^{***}} \hat{F}_n^{***} - 3g_{mn} \left(-\frac{f^2}{W^8} + |\hat{F}|^2 \right) \right\} \tilde{\psi}. \end{aligned} \quad (9.11.42)$$

4) ゲージ場摂動のゲージ変換 ゲージ場 $A_{[3]}$ のゲージ変換は

$$\delta_C A = dC; \quad (9.11.43a)$$

$$C = c_{[2]} + c_{[1]m} \wedge dy^m + \hat{c}_{[2]} \quad (9.11.43b)$$

より,

$$\delta_C a_{[3]} = d'c_{[2]}, \quad (9.11.44a)$$

$$\delta_C a_{[2]m} = \partial_m c_{[2]} + d'c_{[1]m}, \quad (9.11.44b)$$

$$\delta_C a_{[1]mn} = \partial_m c_{[1]n} + \frac{1}{2} d' \hat{c}_{mn}, \quad (9.11.44c)$$

$$\delta_C \hat{a}_{[3]} = \hat{d} \hat{c}_{[2]}. \quad (9.11.44d)$$

これより, \mathcal{T}_N^M のゲージ不変性が直接確認できる.

9.11.4 Coordinate-Gauge transformation

要点 ゲージ変換

$$\delta x^M = \tilde{\xi}^M = (\tilde{\xi}^\mu, \tilde{\xi}^m) \quad (9.11.45)$$

に対する摂動変数のゲージ変換則とそれに基づくゲージ不変量の構成.

1) Scalar

$$\delta_g \phi = \mathcal{L}_{\tilde{\xi}} \phi = \tilde{\xi}^\mu \nabla_\mu \phi + \tilde{\xi}^m D_m \phi. \quad (9.11.46)$$

2) **Vector** 一般に反変ベクトル $v^M = \delta V^M$ のゲージ変換は

$$\delta_g \tilde{v}^M = \mathcal{L}_{\tilde{\xi}} \tilde{V}^M = \tilde{\xi}^N \tilde{\nabla}_N \tilde{V}^M - \tilde{V}^N \tilde{\nabla}_N \tilde{\xi}^M \quad (9.11.47)$$

$(n+m)$ 分解すると,

$$\delta_g \tilde{v}^\mu = \tilde{\xi}^\nu \nabla_\nu \tilde{V}^\mu - \tilde{V}^\nu \nabla_\nu \tilde{\xi}^\mu + \tilde{\xi}^m D_m \tilde{V}^\mu - \tilde{V}^m D_m \tilde{\xi}^\mu, \quad (9.11.48a)$$

$$\delta_g \tilde{v}^m = \tilde{\xi}^\mu \nabla_\mu \tilde{V}^m - \tilde{V}^\mu \nabla_\mu \tilde{\xi}^m + \tilde{\xi}^n D_n \tilde{V}^m - \tilde{V}^n D_n \tilde{\xi}^m. \quad (9.11.48b)$$

同様に, 共変ベクトルに対して

$$\delta_g \tilde{v}_M = \mathcal{L}_{\tilde{\xi}} \tilde{V}_M = \tilde{\xi}^N \tilde{\nabla}_N \tilde{V}_M + \tilde{V}_N \tilde{\nabla}_M \tilde{\xi}^N \quad (9.11.49)$$

は

$$\delta_g \tilde{v}_\mu = \tilde{\xi}^\nu \nabla_\nu \tilde{V}_\mu + \tilde{V}_\nu \nabla_\mu \tilde{\xi}^\nu + \tilde{\xi}^m D_m \tilde{V}_\mu + \tilde{V}_m \nabla_\mu \tilde{\xi}^m, \quad (9.11.50a)$$

$$\delta_g \tilde{v}_m = \tilde{\xi}^\nu \nabla_\nu \tilde{V}_m + \tilde{V}_\nu D_m \tilde{\xi}^\nu + \tilde{\xi}^n D_n \tilde{V}_m + \tilde{V}_n D_m \tilde{\xi}^m. \quad (9.11.50b)$$

特に, 背景場が

$$\tilde{V}_\mu = 0, \quad \tilde{V}_m = \hat{V}_m(y) \quad (9.11.51)$$

の時,

$$\delta_g \tilde{v}^\mu = -\tilde{V}^m(y) D_m \tilde{\xi}^\mu, \quad (9.11.52a)$$

$$\delta_g \tilde{v}^m = \mathcal{L}_{\tilde{\xi}} \hat{V}^m, \quad (9.11.52b)$$

$$\delta_g \tilde{v}_\mu = \nabla_\mu (\tilde{V}_m(y) \tilde{\xi}^m), \quad (9.11.53a)$$

$$\delta_g \tilde{v}_m = \mathcal{L}_{\tilde{\xi}} \hat{V}_m. \quad (9.11.53b)$$

これより, 分解

$$\tilde{v}_\mu = \nabla_\mu v^{(0)} + v_\mu^{(1)}; \quad \nabla^\mu v_\mu^{(1)} = 0 \quad (9.11.54)$$

に対して,

$$\delta_g v^{(0)} = \hat{V} \cdot \hat{\xi}, \quad \delta_g v_\mu^{(1)} = 0. \quad (9.11.55)$$

〔注〕 $V^{(0)}$ は mod 調和関数 Y で定義されるので, $v_\mu^{(1)}$ には $\nabla_\mu Y$ の不定性がある.

3) **Tensor** 対称テンソル型摂動 $\tilde{t}_{MN} = \delta\tilde{T}_{MN}$ のゲージ変換は

$$\delta_g \tilde{t}_{MN} = \mathcal{L}_{\tilde{\xi}} \tilde{T}_{MN} = \tilde{\xi}^L \tilde{\nabla}_L \tilde{T}_{MN} + \tilde{T}_{LN} \tilde{\nabla}_M \tilde{\xi}^L + \tilde{T}_{ML} \tilde{\nabla}_N \tilde{\xi}^L. \quad (9.11.56)$$

$X \times Y$ 分解すると,

$$\delta_g \tilde{t}_{\mu\nu} = \tilde{\xi}^\lambda \nabla_\lambda \tilde{T}_{\mu\nu} + \tilde{\xi}^m D_m \tilde{T}_{\mu\nu} + 2\tilde{T}_{\lambda(\mu} \nabla_{\nu)} \tilde{\xi}^\lambda + 2\tilde{T}_{m(\mu} \nabla_{\nu)} \tilde{\xi}^m, \quad (9.11.57a)$$

$$\begin{aligned} \delta_g \tilde{t}_{\mu m} &= \tilde{\xi}^\nu \nabla_\nu \tilde{T}_{\mu m} + \tilde{\xi}^n D_n \tilde{T}_{\mu m} + \tilde{T}_{\nu m} \nabla_\mu \tilde{\xi}^\nu + \tilde{T}_{nm} \nabla_\mu \tilde{\xi}^n \\ &\quad + \tilde{T}_{\nu\mu} D_m \tilde{\xi}^\nu + \tilde{T}_{n\mu} D_m \tilde{\xi}^n, \end{aligned} \quad (9.11.57b)$$

$$\delta_g \tilde{t}_{mn} = \tilde{\xi}^\mu \nabla_\mu \tilde{T}_{mn} + \tilde{\xi}^l D_l \tilde{T}_{mn} + 2\tilde{T}_{\mu(m} D_{n)} \tilde{\xi}^\mu + 2\tilde{T}_{l(m} D_{n)} \tilde{\xi}^l. \quad (9.11.57c)$$

特に, 背景場が

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{n} T(y) g_{\mu\nu}(x), \quad \tilde{T}_{\mu m} = 0, \quad \tilde{T}_{mn} = \hat{T}_{mn}(y) \quad (9.11.58)$$

という構造を持つとき,

$$\delta_g \tilde{t}_{\mu\nu} = \frac{1}{n} D_\xi T(y) g_{\mu\nu} + \frac{2}{n} T(y) \nabla_{(\mu} \xi_{\nu)}, \quad (9.11.59a)$$

$$\delta_g \tilde{t}_{\mu m} = \frac{1}{n} T(y) D_m \xi_\mu + \hat{T}_{mn}(y) \nabla_\mu \hat{\xi}^n, \quad (9.11.59b)$$

$$\delta_g \tilde{t}_{mn} = \mathcal{L}_{\hat{\xi}} \hat{T}_{mn}. \quad (9.11.59c)$$

ここで,

$$\xi_\mu = g_{\mu\nu} \xi^\nu = g_{\mu\nu} \tilde{\xi}^\nu. \quad (9.11.60)$$

よって, $\tilde{t}_{\mu\nu}$ を

$$\tilde{t}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} t + \nabla_\mu \nabla_\nu s - \frac{1}{n} g_{\mu\nu} \square s + \nabla_\mu t_\nu^{(1)} + \nabla_\nu t_\mu^{(1)} + t_{\mu\nu}^{(2)} \quad (9.11.61)$$

と分解すると,

$$\delta_g t = \frac{1}{n} D_\xi T(y) + \frac{2}{n^2} T(y) \square \xi^{(0)}, \quad (9.11.62a)$$

$$\delta_g s = \frac{2}{n} T(y) \xi^{(0)}, \quad (9.11.62b)$$

$$\delta_g t_\mu^{(1)} = \frac{1}{n} T(y) \xi_\mu^{(1)}, \quad (9.11.62c)$$

$$\delta_g t_{\mu\nu}^{(2)} = 0. \quad (9.11.62d)$$

また, $\tilde{T}_{\mu m}$ を

$$\tilde{t}_{\mu m} = \nabla_\mu t_m + t_{\mu m}^{(1)} \quad (9.11.63)$$

と分解すると、ゲージ変換は

$$\delta_g t_m = \frac{1}{n} T(y) D_m \xi^{(0)} + \hat{T}_{mn}(y) \hat{\xi}^n, \quad (9.11.64a)$$

$$\delta_g t_{\mu m}^{(1)} = \frac{1}{n} T(y) D_m \xi_{\mu}^{(1)}. \quad (9.11.64b)$$

4) 計量テンソルの摂動に対するゲージ不変量 計量テンソルの摂動 \tilde{h}_{MN} を

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = t g_{\mu\nu} + \left(\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - \frac{1}{4} \square g_{\mu\nu} \right) s + 2 \nabla_{(\mu} h_{\nu)(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)}, \quad (9.11.65a)$$

$$\tilde{h}_{\mu m} = \nabla_{\mu} h_m + h_{\mu m}^{(1)}, \quad (9.11.65b)$$

$$\tilde{h}_{mn} = \hat{h}_{mn} \quad (9.11.65c)$$

と分解すると、 $T(y) = nW^2$ より、成分のゲージ変換は

$$\delta_g t = \frac{2}{n} W^2 \square \xi^{(0)} + 2W D_{\xi} W, \quad \delta_g s = 2W^2 \xi^{(0)}, \quad (9.11.66a)$$

$$\delta_g h_{\mu}^{(1)} = W^2 \xi_{\mu}^{(1)}, \quad \delta_g h_{\mu\nu}^{(2)} = 0, \quad (9.11.66b)$$

$$\delta_g h_m = W^2 D_m \xi^{(0)} + \hat{\xi}_m, \quad \delta_g h_{\mu m}^{(1)} = W^2 D_m \xi_{\mu}^{(1)}, \quad (9.11.66c)$$

$$\delta_g \hat{h}_{mn} = \mathcal{L}_{\hat{\xi}} \hat{g}_{mn} = D_m \hat{\xi}_n + D_n \hat{\xi}_m. \quad (9.11.66d)$$

\tilde{h}_{MN} の分解を $\tilde{\psi}_{MN}$ の定義に代入すると、

$$\psi_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\lambda} \tilde{\psi}_{\nu}^{\lambda} = \psi^{(t)} g_{\mu\nu} + \left(\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - \frac{1}{n} g_{\mu\nu} \square \right) \psi^{(s)} + 2 \nabla_{(\mu} \psi_{\nu)}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)}, \quad (9.11.67a)$$

$$\tilde{\psi}_{\mu m} = \tilde{h}_{\mu m} = \nabla_{\mu} h_m + h_{\mu m}^{(1)}, \quad (9.11.67b)$$

$$\tilde{\psi}_{mn} = \hat{\psi}_{mn} = \hat{h}_{mn} - \left(\frac{nt}{2W^2} + \frac{\hat{h}}{2} \right) \hat{g}_{mn} \quad (9.11.67c)$$

を得る。ここで、

$$\psi^{(t)} = -\frac{n-2}{2W^2} t - \frac{1}{2} \hat{h}, \quad \psi^{(s)} = \frac{s}{W^2}, \quad \psi_{\mu}^{(1)} = \frac{1}{W^2} h_{\mu}^{(1)}, \quad \psi^{(2)} = \frac{1}{W^2} h^{(2)}. \quad (9.11.68)$$

これら成分のゲージ変換は

$$\delta_g \psi^{(t)} = -\frac{n-2}{n} \square \xi^{(0)} - \frac{n-2}{W} D_\xi W - D \cdot \hat{\xi}, \quad (9.11.69a)$$

$$\delta_g \psi^{(s)} = 2\xi^{(0)}, \quad (9.11.69b)$$

$$\delta_g \psi_\mu^{(1)} = \xi_\mu^{(1)}, \quad (9.11.69c)$$

$$\delta_g \psi_{\mu\nu}^{(2)} = 0, \quad (9.11.69d)$$

$$\delta_g \psi_m = W^2 D_m \xi^{(0)} + \hat{\xi}_m. \quad (9.11.69e)$$

$$\delta_g \psi_{\mu m}^{(1)} = W^2 D_m \xi_\mu^{(1)}, \quad (9.11.69f)$$

$$\delta_g \psi_{mn} = \mathcal{L}_\xi g_{mn} - \left(D \cdot \hat{\xi} + \square \xi^{(0)} + \frac{n}{W} D_\xi W \right) g_{mn} \quad (9.11.69g)$$

以上より、次の諸量を基本ゲージ不変量として用いることができる。

1. Scalar 型

$$\Phi \equiv \psi^{(t)} + \frac{n-2}{2n} \square \psi^{(s)} + D^m X_m + \frac{n-2}{W} D_X W, \quad (9.11.70a)$$

$$\Phi_{mn} \equiv \psi_{mn} - 2D_{(m} X_{n)} + \left(D \cdot X + \frac{n}{W} D_X W + \frac{1}{2} \square \psi^{(s)} \right) g_{mn} \quad (9.11.70b)$$

ここで、

$$X_m \equiv \psi_m - \frac{1}{2} W^2 D_m \psi^{(s)}, \quad (9.11.71)$$

$$\delta_g X_m = \hat{\xi}_m. \quad (9.11.72)$$

2. Vector 型

$$H_{\mu m} \equiv \psi_{\mu m}^{(1)} - W^2 D_m \psi_\mu^{(1)}. \quad (9.11.73)$$

3. Tensor 型

$$H_{\mu\nu} \equiv \psi_{\mu\nu}^{(2)}. \quad (9.11.74)$$

5) \mathcal{E}_N^M テンソル 一般論より、まず、

$$\delta_g \tilde{\mathcal{E}}_{\mu\nu} = -4\tilde{\Lambda} \nabla_{(\mu} \tilde{\xi}_{\nu)} - 2D(W^2 \tilde{\Lambda}) g_{\mu\nu}. \quad (9.11.75)$$

テンソル分解すると、

$$\delta_g (\tilde{\mathcal{E}}_X^X)^{(t)} = -2W^2 D_\xi \tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda} \square \xi^{(0)}, \quad (9.11.76a)$$

$$\delta_g (\tilde{\mathcal{E}}_X^X)^{(s)} = -4\tilde{\Lambda} \xi^{(0)}, \quad (9.11.76b)$$

$$\delta_g (\tilde{\mathcal{E}}_X^X)_\mu^{(1)} = -2\tilde{\Lambda} \xi_\mu^{(1)}, \quad (9.11.76c)$$

$$\delta_g (\tilde{\mathcal{E}}_X^X)_{\mu\nu}^{(2)} = 0. \quad (9.11.76d)$$

つぎに、

$$\delta_g^t \mathcal{E}_{\mu m} = -2\tilde{\Lambda} D_m \xi_\mu + \tilde{G}_{mn} \nabla_\mu \hat{\xi}^n. \quad (9.11.77)$$

このテンソル分解は、

$$\delta_g(\tilde{\mathcal{E}}_X^Y)^m = -2\tilde{\Lambda} D^m \xi^{(0)} + \tilde{G}_n^m \hat{\xi}^n, \quad (9.11.78a)$$

$$\delta_g(\tilde{\mathcal{E}}_X^Y)_{\mu}^{m(1)} = -2\tilde{\Lambda} D_m \xi_\mu^{(1)}. \quad (9.11.78b)$$

最後に、

$$\delta_g \tilde{\mathcal{E}}_{mn} = \mathcal{L}_\xi \tilde{G}_{mn}. \quad (9.11.79)$$

9.11.5 \mathcal{E}_N^M のテンソル分解

X_4 が Einstein 時空であることを仮定する:

$$R_{\mu\nu}(X) = \Lambda' g_{\mu\nu}(X). \quad (9.11.80)$$

$\psi = (\psi_{\mu\nu})$ に対して、

$$(\Delta_L \psi)^{(t)} = -\square \psi^{(t)}, \quad (\Delta_L \psi)^{(s)} = -\square \psi^{(s)}, \quad (9.11.81a)$$

$$(\Delta_L \psi)_\mu^{(1)} = \Delta_{[1]} \psi_\mu^{(1)} = (-\square + \Lambda') \psi_\mu^{(1)}, \quad (9.11.81b)$$

$$(\Delta_L \psi)^{(2)}_{\mu\nu} = \Delta_L \psi_{\mu\nu}^{(2)}. \quad (9.11.81c)$$

また、

$$(\nabla \cdot \psi)^{(0)} = \psi^{(t)} + \left(\frac{n-1}{n} \square + \Lambda' \right) \psi^{(s)}, \quad (9.11.82a)$$

$$(\nabla \cdot \psi)_\mu^{(1)} = (\square + \Lambda') \psi_\mu^{(1)}. \quad (9.11.82b)$$

これより、

$$\nabla_\mu \nabla_\alpha \psi_\nu^\alpha = \nabla_\mu \nabla_\nu \left[\psi^{(t)} + \left(\frac{n-1}{n} \square + \Lambda' \right) \psi^{(s)} \right] + \nabla_\mu (\square + \Lambda') \psi_\nu^{(1)}. \quad (9.11.83)$$

すなわち、

$$(2\nabla_{(*)}(\nabla \cdot \psi)_{(*)})^{(t)} = \frac{2}{n} \square \left[\psi^{(t)} + \left(\frac{n-1}{n} \square + \Lambda' \right) \psi^{(s)} \right] \quad (9.11.84a)$$

$$(2\nabla_{(*)}(\nabla \cdot \psi)_{(*)})^{(s)} = 2 \left\{ \psi^{(t)} + \left(\frac{n-1}{n} \square + \Lambda' \right) \psi^{(s)} \right\} \quad (9.11.84b)$$

$$(2\nabla_{(*)}(\nabla \cdot \psi)_{(*)})_\mu^{(1)} = (\square + \Lambda') \psi_\mu^{(1)}, \quad (9.11.84c)$$

$$(2\nabla_{(*)}(\nabla \cdot \psi)_{(*)})_{\mu\nu}^{(2)} = 0. \quad (9.11.84d)$$

また,

$$2\nabla_{(\mu}\psi_{\nu)}^m = 2\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\psi^m + 2\nabla_{(\mu}\psi_{\nu)}^{(1)m} \quad (9.11.85)$$

より,

$$(2\nabla_{(*}\psi_{*}^m)^{(t)} = \frac{2}{n}\square\psi^m, \quad (9.11.86a)$$

$$(2\nabla_{(*}\psi_{*}^m)^{(s)} = 2\psi^m, \quad (9.11.86b)$$

$$(2\nabla_{(*}\psi_{*}^m)_{\mu}^{(1)} = \psi_{\mu}^{(1)m}. \quad (9.11.86c)$$

これらを \mathcal{E}_{ν}^{μ} の表式に代入すると,

$$(\mathcal{E}_{XX})_{\mu\nu}^{(2)} = \left(\Delta_L - n\Lambda' - W^2\hat{\mathcal{L}}_2\right) H_{\mu\nu}, \quad (9.11.87a)$$

$$(\mathcal{E}_{XX})_{\mu}^{(1)} = \left(D_p + \frac{n-2}{W}D_pW\right) H_{\mu}^p - (n-2)\tilde{\Lambda}\psi_{\mu}^{(1)}, \quad (9.11.87b)$$

$$(\mathcal{E}_{XX})^{(s)} = 2\Phi - (n-2)\tilde{\Lambda}\psi^{(s)}. \quad (9.11.87c)$$

ここで,

$$\hat{\mathcal{L}}_2 \equiv \hat{\Delta} + \frac{n}{W}DW \cdot D - 2(n-1)\frac{\hat{\Delta}W}{W} - (n-1)(n-2)\frac{(DW)^2}{W^2}, \quad (9.11.88a)$$

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda' - \frac{2(n-1)}{n-2}\hat{\Delta}W - (n-1)(DW)^2 + \frac{1}{n-2}W^2\hat{R}_s. \quad (9.11.88b)$$

また,

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_X^X)^{(t)} &= -\left(\frac{3}{2W^2}\square + \hat{\Delta} + 6\hat{\Delta}(\ln W) + 24\frac{(DW)^2}{W^2}\right)\Phi \\ &\quad - \left\{D^mD^n - \frac{6}{W}D^mWD^n + 2D^mD^n(\ln W) + 24\frac{D^mWD^nW}{W^2}\right\}\Phi_{mn} \\ &\quad + \square\left[\frac{1}{4}\hat{\mathcal{L}}_2 - \frac{\Lambda}{2W^2} - \frac{9}{2W}DW \cdot D + \frac{\hat{\Delta}W}{W}\right]\psi^{(s)} \\ &\quad + \left\{\frac{5}{2W^2}\square - 2\hat{\Delta} - \frac{4}{W}DW \cdot D + 4\hat{\Delta}(\ln W) + 24\frac{(DW)^2}{W^2}\right\}D \cdot X \\ &\quad - \frac{D^mW}{W}\left(5\frac{\square}{W^2} + 6\hat{\Delta}\right)X_m - \left(4D^mD^n(\ln W) + 2\hat{R}^{mn}\right)D_mX_n \\ &\quad - \left(D^m\hat{R}_s + \frac{6}{W}D^nW\hat{R}_n^m\right)X_m. \end{aligned} \quad (9.11.89)$$

次に, \mathcal{E}_μ^m は

$$\begin{aligned}
(\mathcal{E}_X^Y)^m &= \left(D^m - 4 \frac{D^m W}{W} \right) \Phi + \left(D_p + 2 \frac{D_p W}{W} \right) \Phi^{pm} \\
&+ D^m \left(-\frac{1}{2} \hat{\Delta} + \frac{1}{W} DW \cdot D \right) (W^2 \psi^{(s)}) + \frac{\Lambda}{W} D_m W \psi^{(s)} \\
&- \left(4 \frac{D^m W D_n W}{W^2} + 2 D^m D_n (\ln W) \right) D^n (W^2 \psi^{(s)}) \\
&+ \left(-D^m + 2 \frac{D^m W}{W} \right) (D \cdot X) + \frac{\Lambda}{W^2} X^m \\
&+ \left(\frac{6}{W} D_n W D^m - 2 D^m D_n (\ln W) - 8 \frac{D^m W D_n W}{W^2} + 2 \hat{R}_n^m \right) \quad (\text{XI1.90a}) \\
(\mathcal{E}_X^Y)_\mu^{(1)m} &= \left(-\frac{1}{W^2} \square - \hat{\Delta} + \frac{2}{W} DW \cdot D + \frac{\Lambda}{W^2} \right) H_\mu^m \\
&+ \left(\frac{4}{W} D_n W D^m - 2 D^m D_n (\ln W) - \frac{D^m W D_n W}{W^2} + \hat{R}_n^m \right) H_\mu^n \\
&- 2 \frac{\Lambda}{W} D^m W \psi_\mu^{(1)} - 2 \frac{D^m W}{W} \square \psi_\mu^{(1)} - D_m \left(\hat{\Delta} + \frac{2}{W} DW \cdot D \right) (W^2 \psi_\mu^{(1)}) \\
&+ 4 \frac{D_n W}{W} D^m D^n (W^2 \psi_\mu^{(1)}) - \frac{D^m W D_n W}{W^2} D^n (W^2 \psi_\mu^{(1)}). \quad (9.11.90b)
\end{aligned}$$

最後に、

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_n^m &= - \left(\frac{1}{W^2} \square - \hat{\Delta}_L + \frac{4}{W} DW \cdot D \right) \Phi_n^m \\
&+ D^m D_p \Phi_n^p + D_n D_p \Phi^{pm} + 4 \frac{D_l W}{W} (D^m \Phi_n^l + D_b \Phi^{lm}) \\
&+ \left(- \frac{D^m W}{W} D_n - \frac{D_n W}{W} D^m + 2 \frac{D^m D_n W}{W} \right) \square \psi^{(s)} \\
&- \frac{2}{W^3} (D^m W \square X_n + D_n W \square X^m) \\
&+ 4 \frac{D_l W}{W} (D^m D_n + D_n D^m) X^l + 8 \frac{D_l W}{W} \hat{R}^{m(l n p)} X_p \\
&+ 2(D^p \hat{R}_{mn} + \hat{R}_{np} D^m + \hat{R}_p^m D_n) X^p - \frac{4}{W} (D_n W D^m + D^m W D_n) (D \cdot X) \\
&+ A \delta_n^m, \tag{9.11.91}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= - \frac{1}{W^2} \Phi - \frac{1}{W^4} \left(D^p D^q + 16 \frac{D^p W D^q W}{W^2} \right) (W^4 \Phi_{pq}) \\
&+ \left(\frac{1}{W^2} \square + \frac{4}{W} DW \cdot D + 4 \hat{\Delta} W + 32 \frac{(DW)^2}{W^2} \right) (D \cdot X) \\
&- 8 \frac{D^p W}{W} \left(\frac{\square}{W^2} + \hat{\Delta} \right) X_p - 2 \hat{R}^{pq} D_p X_q - D^p \hat{R}_s X_p \\
&- \frac{8}{W} \hat{R}^{pq} D_p W X_q - 8 \left(D^p D^q (\ln W) + 8 \frac{D^p W D^q W}{W^2} \right) D_p X_q \\
&+ \left(- \frac{\Lambda}{W^2} + \frac{1}{2} \hat{\Delta} + \frac{3}{W} DW \cdot D - 7 \hat{\Delta} (\ln W) - \frac{50}{W^2} (DW)^2 \right) \square \psi^{(s)}. \tag{9.11.92}
\end{aligned}$$

9.11.6 Tensor Perturbations

dS^4 に関してテンソル型摂動, すなわち重力波に対しては,

$$\begin{aligned}
(\delta T_\nu^\mu)^{(2)} &= \tilde{g}^{\mu\alpha} \delta T_{\alpha\nu} - \tilde{h}^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu} \\
&= -\rho_F h_\nu^{(2)\mu} + \rho_F h_\nu^\mu = 0. \tag{9.11.93}
\end{aligned}$$

よって, Einstein 方程式は

$$\left[\Delta_L - 2\Lambda - W^2 \left\{ \hat{\Delta} + \frac{4}{W} DW \cdot D \right\} \right] H_{\mu\nu} = 0 \tag{9.11.94}$$

ここで, dS^4 では,

$$\begin{aligned}\Delta_L H_{\mu\nu} &= -\square H_{\mu\nu} + 2\Lambda H_{\mu\nu} - \frac{2\Lambda}{3}(g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - \delta_\mu^\alpha\delta_\nu^\beta)H_{\alpha\beta} \\ &= -\square H_{\mu\nu} + \frac{8\Lambda}{3}H_{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (9.11.95)$$

adS 時空の場合と同じ定義をすると, 質量作用素は

$$\hat{M}_2^2 \equiv -\Delta_L + 2\Lambda = -W^2\hat{\Delta} - 4WDW \cdot D. \quad (9.11.96)$$

$Y_7 = \Sigma_{4,4}^E$ の場合には, この作用素は $\mathcal{L}_{4,4}^E$ と一致する.

9.11.7 Vector Perturbations

計量のベクトル型摂動は

$$\tilde{h}_\mu^\mu = \nabla^\mu h_\nu^{(1)} + \nabla_\mu h^{(1)\mu}, \quad \tilde{h}_{m\mu} = h_{m\mu}^{(1)}, \quad \tilde{h}_{mn} = 0. \quad (9.11.97)$$

Kodama-Ishibasi-Seto でのゲージ不変量に対する記法との対応は

$$\begin{aligned}F_a &\mapsto \frac{h_{m\mu}^{(1)}}{W} + WD_m \left(\frac{\nabla^\nu h_{\mu\nu}}{k^2 - \Lambda} \right) \\ &= \frac{1}{W} (h_{m\mu}^{(1)} - W^2 D_m h_\mu^{(1)}) \equiv \frac{1}{W} H_{m\mu},\end{aligned}\quad (9.11.98)$$

$$F_{ab}^{(1)} \mapsto W [D_m (W^{-2} h_{n\mu}^{(1)}) - D_n (W^{-2} h_{m\mu}^{(1)})] \quad (9.11.99)$$

一方, δT_μ^m は

$$\begin{aligned}\delta\tilde{T}_\mu^m &= \tilde{g}^{mn}\delta\tilde{T}_{n\mu} + \delta\tilde{g}^{m\nu}\tilde{T}_{\nu\mu} \\ &= -\frac{f}{2W^6}(*_X F_{[3]m}^{(1)})_\mu - \frac{1}{4}\psi_\mu^m \left(-\frac{f^2}{W^8} + |\hat{F}|^2 \right) + \psi_\mu^m \rho_F \\ &= -\frac{f}{2W^6}(*_X F_{[3]m}^{(1)})_\mu + \frac{f^2}{2W^8}h_\mu^m.\end{aligned}\quad (9.11.100)$$

ここで,

$$*_X F_{[3]m}^{(1)} = *_X d'a_{[2]m} - D_m b^{(1)}. \quad (9.11.101)$$

よって,

$$\kappa^2 \tau_\mu^m \equiv \frac{1}{W} (\delta\tilde{T}_X^Y)_\mu^{(1)m} = \frac{f^2}{2W^9} H_\mu^m + \frac{f}{2W^7} B_\mu^m. \quad (9.11.102)$$

ここで,

$$B_{m\mu} \equiv -(*_X F_{[3]m}^{(1)})_\mu + f D_m \psi_\mu^{(1)} \quad (9.11.103)$$

は摂動ゲージ不変量.

以上より, ベクトル型摂動に対する Einstein 方程式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{W^2} D^p \left[W^6 \left\{ D_m \left(\frac{H_{p\mu}}{W^2} \right) - D_p \left(\frac{H_{m\mu}}{W^2} \right) \right\} \right] + \left(\square + \Lambda + \frac{f^2}{W^6} \right) H_{m\mu} \\ = -\frac{f}{W^4} B_{m\mu}, \end{aligned} \quad (9.11.104a)$$

$$D_m (W^2 H^m{}_\mu) = 0. \quad (9.11.104b)$$

10 高次元統一理論

Last update: 2023 年 10 月 17 日

10.1 Reviews and Books

10.1.1 Review articles

10.1.2 Books

10.2 Kaluza-Klein コンパクト化

10.2.1 歴史

1919 Kaluza-Klein モデル (Kaluza Th 1921; Klein O 1926)

1963 内部空間の等長変換群に基づく非可換ゲージ場の導出 (DeWitt BS 1963[115])

10.2.2 時空計量

基本仮定

1. Lie 群 G が時空 M_D に作用しており, その軌道は n 次元空間となる.
2. G の軌道空間 M_D/G を $X_d (d+n=D)$, 各軌道を $Y_x (x \in X)$, G を生成する無限小変換の基底を $\xi_a (a=1, \dots, \dim(G))$ とするとき, G 作用は各軌道 Y_x 上で等長で, 計量は次の形に書ける:

$$ds^2(M_D) = ds^2(X_d) + \Phi_{pq}(x, y) \nu^p \nu^q, \quad (10.2.1)$$

$$ds^2(X_d) = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \quad (10.2.2)$$

$$\nu^p = dy^p - \xi_a^p(y) A_\mu^a(x) dx^\mu. \quad (10.2.3)$$

行列形では

$$(g_{MN}) = \begin{pmatrix} \Phi_{pq} & -\xi_{ap} A_\nu^a(x) \\ -\xi_{aq} A_\mu^a(x) & g_{\mu\nu}(x) + \xi_{ap} \xi_b^p A_\mu^a(x) A_\nu^b(x) \end{pmatrix} \quad (10.2.4)$$

ここで, $\xi_{ap} = \Phi_{pq} \xi_a^q$. G 作用が各軌道 Y_x 上で等長となる条件は,

$$\xi_a^r \partial_r \Phi_{pq} + 2\Phi_{r(p} \partial_q) \xi_a^r = 0 \quad (10.2.5)$$

ゲージ変換 上記の計量の形は，明らかに変換 $x'^{\mu} = a^{\mu}(x), y'^p = b^p(y)$ により保たれる．また，無限小変換

$$\delta y^p = \eta^p = \epsilon^a(x) \xi_a^p(y) \quad (10.2.6)$$

に対して，

$$\mathcal{L}_{\eta} \nu^p = \nu^q \epsilon^a \partial_q \xi_a^p + \xi_a^p (d\epsilon^a - C^a_{cb} \epsilon^c A^b) \quad (10.2.7)$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\eta}(\Phi_{pq} \nu^p \nu^q) &= \eta^r \partial_r \Phi_{pq} \nu^p \nu^q + 2\Phi_{pq} \mathcal{L}_{\eta} \nu^p \nu^q \\ &= \epsilon^a (\xi_a^r \partial_r \Phi_{pq} + 2\Phi_{r(p} \partial_q) \xi_a^r) \nu^p \nu^q \\ &\quad + 2\Phi_{pq} \xi_a^p (d\epsilon^a - C^a_{bc} \epsilon^b A^c) \nu^q. \end{aligned} \quad (10.2.8)$$

したがって， Φ_{pq} に対する条件より，この無限小変換も上記の計量の形を保ち， A^a は

$$\delta A^a = -C^a_{cb} \epsilon^c A^b + d\epsilon^a \Leftrightarrow \delta A = -[\epsilon, A] + d\epsilon, \quad \epsilon = \epsilon^a T_a \quad (10.2.9)$$

と変換される．これは， G に対する（非可換）ゲージ場の変換則と一致する．

Ricci テンソル

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{pq} &= \hat{R}_{pq} + \frac{1}{4} F_{pIJ} F_q^{IJ} \\ &\quad - \frac{1}{2} \Delta \Phi_{pq} - \frac{1}{4} \Phi^{rs} D \Phi_{pq} \cdot D \Phi_{rs} + \frac{1}{2} \Phi^{rs} D \Phi_{pr} \cdot D \Phi_{qs}, \end{aligned} \quad (10.2.10a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{pI} &= \frac{1}{2} \hat{D}^q D_I \Phi_{pq} - \frac{1}{2} \Phi^{qr} \hat{D}_p D_I \Phi_{qr} \\ &\quad + \frac{1}{2} \tilde{D}_J F_p^J{}_I - \frac{1}{4} \Phi^{rs} D_K \Phi_{rs} F_{pI}^K, \end{aligned} \quad (10.2.10b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{IJ} &= R_{IJ} - \frac{1}{2} F_{pIK} F^p{}_J{}^K \\ &\quad - \frac{1}{2} \Phi^{pq} D_I D_J \Phi_{pq} + \frac{1}{4} \Phi^{pq} \Phi^{cd} D_I \Phi_{pr} D_J \Phi_{qs}, \end{aligned} \quad (10.2.10c)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \hat{R} + R - \frac{1}{4} F_{pIJ} F^{pIJ} - D(\Phi^{pq} D \Phi_{pq}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \Phi^{pq} \Phi^{rs} (D \Phi_{pq} \cdot D \Phi_{rs} + D \Phi_{pr} \cdot D \Phi_{qs}). \end{aligned} \quad (10.2.10d)$$

ここで， D は $g_{\mu\nu}$ に関する X_d 上の共変微分， \hat{D} は各軌道 Y_x 上での y に関する共変微分，

$$F = dA + A \wedge A, \quad \tilde{D}F = DF + [A, F]. \quad (10.2.11)$$

作用積分 Einstein-Hilbert 作用積分

$$S = \int d^m x d^n y |g|^{1/2} |\Phi|^{1/2} \tilde{R} \quad (10.2.12)$$

は次の X_m 上の有効作用積分を与える：

$$S = \int d^m x |g|^{1/2} \left[e^\sigma R - \frac{1}{2} G^{AB} D\phi_A D\phi_B - \frac{1}{2} \gamma_{ab} F^a \cdot F^b + C \right]. \quad (10.2.13)$$

ここで,

$$\Phi_{pq} = \phi_A(x) \Phi_{pq}^A(y), \quad (10.2.14a)$$

$$e^\sigma = \int d^n y |\Phi|^{1/2}, \quad (10.2.14b)$$

$$G^{AB} = \int d^n y |\Phi|^{1/2} (\Phi^{pr} \Phi^{qs} - \Phi^{pq} \Phi^{rs}) \Phi_{pq}^A \Phi_{rs}^B, \quad (10.2.14c)$$

$$\gamma_{ab} = \int d^n y |\Phi|^{1/2} \xi_a^p \xi_b^q \Phi_{pq}, \quad (10.2.14d)$$

$$C = \int d^n y |\Phi|^{1/2} \hat{R}(\Phi). \quad (10.2.14e)$$

ここで,

$$g_{\mu\nu} \rightarrow e^{-\frac{2}{m-2}\sigma} g_{\mu\nu}, \quad (10.2.15a)$$

$$\Phi_{pq} = e^{\frac{2\sigma}{n}} \bar{\Phi}_{pq}, \quad \phi_A = e^{\frac{2\sigma}{n}} \bar{\phi}_A \quad (10.2.15b)$$

とおくと, Einstein フレームでの作用積分が得られる.

$$S = \int d^m x \sqrt{g} \left[R - \alpha (D\sigma)^2 - \frac{1}{2} \bar{G}^{AB} D\bar{\phi}_A D\bar{\phi}_B + e^{-2\alpha\sigma} \bar{C} - \frac{1}{2} e^{2\alpha\sigma} \bar{\gamma}_{ab} F^a \cdot F^b \right]. \quad (10.2.16)$$

ここで,

$$\alpha = \frac{1}{m-2} + \frac{1}{n}, \quad (10.2.17a)$$

$$1 = \int d^n y |\bar{\Phi}|^{1/2}, \quad (10.2.17b)$$

$$\bar{G}^{AB} = \frac{1}{2} (\bar{\Phi}^{pr} \bar{\Phi}^{qs} - \bar{\Phi}^{pq} \bar{\Phi}^{rs}) \bar{\Phi}_{pq}^A \bar{\Phi}_{rs}^B, \quad (10.2.17c)$$

$$\bar{C} = \hat{R}(\bar{\Phi}), \quad (10.2.17d)$$

$$\bar{\gamma}_{ab} = \xi_a^p \xi_b^q \bar{\Phi}_{pq}. \quad (10.2.17e)$$

以上より, M/G 上の G をゲージ群とする (非可換) ゲージ場 A , 中性スカラ場 ϕ_A および重力場からなる理論が得られる. H を等方群とすると, G/H が内部空間となる. 荷電スカラ場を得るには, 内部空間方向に非一様な摂動を考える必要がある.

10.2.3 ゲージ場

10.2.3.1 S^1 コンパクト化

ゲージ群 G に対応する $n+1$ 次元時空 M_{n+1} 上のゲージ場を \tilde{A} とする:

$$\tilde{D}_M = \partial_M - \tilde{A}_M, \quad \tilde{A}_M^\dagger = -\tilde{A}_M \quad (10.2.18a)$$

$$\delta \tilde{A} = \tilde{D}\lambda = d\lambda - [\tilde{A}, \lambda], \quad (10.2.18b)$$

$$\tilde{F} = d\tilde{A} - \frac{1}{2}[\tilde{A}, \tilde{A}]. \quad (10.2.18c)$$

この時空を $M_{n+1} = X_n \times S^1$ とコンパクト化し,

$$ds^2(M) = ds^2(X) + dy^2, \quad (10.2.19)$$

ゲージ場 \tilde{A} を次のように y に関して Fourier 展開する ($0 \leq y < 2\pi R$):

$$\tilde{A}_\mu(x, y) = A_\mu(x) + \sum_{l \neq 0} W_\mu^{(l)}(x) e^{ily/R} \quad (\mu = 0, \dots, n) \quad (10.2.20a)$$

$$\tilde{A}_n(x, y) = i\phi(x) + i \sum_{l \neq 0} \Phi^{(l)}(x) e^{ily/R}. \quad (10.2.20b)$$

ただし,

$$A_\mu^\dagger = -A_\mu, \quad W_\mu^{(l)\dagger} = -W_\mu^{(-l)}, \quad \phi^* = \phi, \quad \Phi^{(l)*} = \Phi^{(-l)}. \quad (10.2.21)$$

この展開で得られる場のゲージ変換は,

$$\tilde{\lambda}(x, y) = \lambda(x) + \sum_{l \neq 0} \lambda^{(l)}(x) e^{ily/R} \quad (10.2.22)$$

に対し,

$$\delta A_\mu = D_\mu \lambda + \sum_{l \neq 0} [\lambda^{(l)\dagger}, W_\mu^{(l)}], \quad (10.2.23a)$$

$$\delta \phi = [\lambda, \phi] - \sum_{l \neq 0} [\lambda^{(l)\dagger}, \Phi^{(l)}], \quad (10.2.23b)$$

$$\delta W_\mu^{(k)} = [\lambda, W_\mu^{(k)}] + D_\mu \lambda^{(k)} - \sum_{l \neq 0, k} [W_\mu^{(l)}, \lambda^{(k-l)}], \quad (10.2.23c)$$

$$\delta \Phi^{(k)} = [\lambda, \Phi^{(k)}] + \frac{k}{R} \lambda^{(k)} - \sum_{l \neq 0, k} [\Phi^{(l)}, \lambda^{(k-l)}]. \quad (10.2.23d)$$

Lagrangian 密度は

$$-\frac{1}{4} \tilde{F}_{\mu\nu}^\dagger F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu}^\dagger \cdot \hat{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \hat{W}_{\mu\nu}^{(k)\dagger} \cdot \hat{W}^{(k)\mu\nu}, \quad (10.2.24a)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \tilde{F}_{n\mu}^\dagger \tilde{F}^{m\mu} &= -\frac{1}{2} \left| \partial \phi + \sum_{l=1}^{\infty} ([W^l, \Phi^{(l)\dagger}] + [W^{(l)\dagger}, \Phi^{(l)}]) \right|^2 \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left| m_k W^{(k)} - D\Phi^{(k)} + [\phi, W^k] + \sum_{l \neq 0, k} [\Phi^{(l)}, W^{(k-l)}] \right|^2 \end{aligned} \quad (10.2.24b)$$

ここで,

$$\hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \sum_{l=1}^{\infty} ([W_\mu^{(k)}, W_\nu^{(k)\dagger}] + [W_\mu^{(k)\dagger}, W_\nu^{(k)}]), \quad (10.2.25a)$$

$$\hat{W}_{\mu\nu}^{(k)} = D_\mu W_\nu^{(k)} - D_\nu W_\mu^{(k)} - \sum_{l \neq 0, k} [W_\mu^{(l)}, W_\nu^{(k-l)}] \quad (10.2.25b)$$


10.2.4 高次元場の4次元分解


Creation: 2021/1/2


10.2.4.1 11次元場のトーラスコンパクト化による4次元分解

3階テンソル場 11次元の3階テンソル場は, $SL(11)$ の変換に関して次のように既約分解される:

$$\mathbf{11}_v \times \mathbf{11}_v \times \mathbf{11}_v = \mathbf{286} [30^{(9)}] + 2 \times \mathbf{440} [110^{(8)}] + \mathbf{165} [0010^{(7)}]$$







(10.2.26)

(i) (2, 1) 型テンソル場 符号数が (2, 1) の Young 図に対応する 3階テンソル場の $SO(10, 1)$ に関する既約分解は

$$\begin{array}{ccc}
 SL(11) & \rightarrow & SO(10, 1) \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} : \mathbf{440} [110^{(8)}] & \rightarrow & \mathbf{429} [11000] + \mathbf{11}_v [10000]
 \end{array} \quad (10.2.27)$$

これらのうち, $\mathbf{11}_v$ 表現は

$$\begin{array}{ccc}
 SO(10, 1) & \rightarrow & SO(3, 1) \\
 \mathbf{11}_v & \rightarrow & \mathbf{4}_v + \mathbf{1} \times 7
 \end{array} \quad (10.2.28)$$

と分解する. すなわち, ゼロ質量場なら, 4次元では, 1個のゲージ場と7個のスカラー場に分解される. 一方, $\mathbf{429}$ は

$$\begin{aligned}
 SO(10, 1) & \rightarrow SO(3, 1) \\
 \mathbf{429} [11000] & \rightarrow \mathbf{9} ([2], [2]) \times 7 + \mathbf{8}^* ([3], [1]) + \mathbf{8} ([1], [3]) \\
 & \quad + \mathbf{4} ([1], [1]) \times 49 + \mathbf{3}^* ([2], [0]) \times 7 + \mathbf{3} ([0], [2]) \times 7 \\
 & \quad + \mathbf{1} \times 112
 \end{aligned}$$

と分解する. すなわち,

- $h_{ab}^{(i)}$: 7個の2階対称, trace-free テンソル場
- $K_{[bc]}^a (K_{ap}^p = 0, K_{[a,bc]} = 0)$: helicity ± 2 の複素テンソル場
- $A_a^{(j)}$: 49個のベクトル場

[目次へ](#)

- $B_{[ab]}^{(k)}$: 7個の2階反対称テンソル場
- $\phi^{(l)}$: 112個のスカラー場

に分解される.

10.3 高次元超重力理論

- 11次元理論
 - 32 local susy (低エネルギー極限は一意的)
 - 重力超組のみ
- 10次元理論
 - I型 16 local susy : 重力超組+任意のゲージ超組
 - II型 16+16 local susy : 重力超組のみ
 - (Massive)IIA型 (non-chiral)/IIB型 (chiral)

10.3.1 11次元超重力理論

10.3.1.1 定式化

Reference

- Cremmer E, Julia B, Scherk J 1978[93].

基本場: 基本的な場は

$$\text{フレーム場: } e_A = (e_A^M); \quad g^{MN} = \eta^{AB} e_A^M e_B^N, \quad \theta^A(e_B) \quad (10.3.1a)$$

$$3 \text{ 形式場: } A_3 = \frac{1}{3!} A_{MPQ} dx^M \wedge dx^P \wedge dx^Q, \quad (10.3.1b)$$

$$\text{Majorana 3/2 場: } \Psi_M; \quad \bar{\Psi} = {}^T \Psi C^{-1}. \quad (10.3.1c)$$

ここで, C はつぎの条件により定義される荷電共役変換行列:

$$C^{-1} \Gamma_A C = -{}^T \Gamma_A, \quad {}^T C = -C. \quad (10.3.2)$$

作用積分 完全な作用積分は

$$2\kappa^2 S = \int d^{11}x |\theta| \left[e_A^M e_B^N \mathcal{R}^{AB}{}_{MN}(\omega) - \frac{1}{2} |F_4|^2 + \frac{1}{6} * (F_4 \wedge F_4 \wedge A_3) \right. \\ \left. + i \bar{\Psi}_M \Gamma^{MNP} D_N \left[\frac{1}{2} (\omega + \tilde{\omega}) \right] \Psi_P \right. \\ \left. + \frac{i}{192} [\bar{\Psi}_M \Gamma^{MNWXYZ} \Psi_N + 12 \bar{\Psi}^W \Gamma^{XY} \Psi^Z] (F_{WXYZ} + \tilde{F}_{WXYZ}) \right]$$

ここで,

$$\omega_{ABM} = \omega_{ABM}(e) + K_{MAB}, \quad (10.3.4a)$$

$$K_{MAB} = \frac{i}{8} \left[-\bar{\Psi}_N \Gamma_{MAB}{}^{NP} \Psi_P - 4\bar{\Psi}_M \Gamma_{[A} \Psi_{B]} + 2\bar{\Psi}_B \Gamma_M \Psi_A \right], \quad (10.3.4b)$$

$$\tilde{\omega}_{ABM} = \omega_{ABM} + \frac{i}{8} \bar{\Psi}_N \Gamma_{MAB}{}^{NP} \Psi_P, \quad (10.3.4c)$$

$$\Gamma_{A_1 \dots A_p} = \Gamma_{[A_1 \dots A_p]}, \quad (10.3.4d)$$

$$D_M(\omega) = \partial_M + \frac{1}{4} \omega^{AB} \Gamma_{AB}, \quad (10.3.4e)$$

$$F = dA, \quad (10.3.4f)$$

$$\tilde{F}_{MNPQ} = F_{MNPQ} + \frac{3i}{2} \bar{\Psi}_{[M} \Gamma_{NP} \Psi_{Q]}. \quad (10.3.4g)$$

基本場の次元は

$$[\kappa] = L^{9/2}, \quad [e_A^M] = L^0, \quad [A_{MNP}] = L^0, \quad [\Psi_M] = L^{-1/2}. \quad (10.3.5)$$

場の方程式:

$$R_{MN}(\tilde{\omega}) - \frac{1}{2} g_{MN} R(\tilde{\omega}) = \frac{1}{12} \tilde{F}_{MPQR} \tilde{F}_N{}^{PQR} - \frac{1}{4} g_{MN} |F_4|^2, \quad (10.3.6a)$$

$$\Gamma^{MNP} \tilde{D}_N(\tilde{\omega}) \Psi_P = 0, \quad (10.3.6b)$$

$$d * \tilde{F} + \frac{1}{2} \tilde{F} \wedge \tilde{F} = 0. \quad (10.3.6c)$$

ここで,

$$\tilde{D}_M(\tilde{\omega}) = D_M(\tilde{\omega}) + T_M{}^{PQRS} \tilde{F}_{PQRS}, \quad (10.3.7)$$

$$T_M{}^{PQRS} = \frac{1}{288} \left(\Gamma_M{}^{PQRS} - 8\delta_M^{[P} \Gamma^{QRS]} \right). \quad (10.3.8)$$

超対称性: $\mathcal{N} = 1$ SUSY

$$\delta\theta_M^A = -\frac{i}{2} \bar{\epsilon} \Gamma^A \Psi_M, \quad (10.3.9a)$$

$$\delta\Psi_M = \tilde{D}_M(\tilde{\omega}) \epsilon, \quad (10.3.9b)$$

$$\delta A_{MNP} = \frac{3i}{2} \bar{\epsilon} \Gamma_{[MN} \Psi_{P]}. \quad (10.3.9c)$$

Bosonic part: $\Psi_M = 0$ とおくと、作用積分は

$$2\kappa^2 S = \int d^{11}x (-g)^{1/2} \left(R - \frac{1}{2} |F_4|^2 \right) - \frac{1}{6} \int A_3 \wedge F_4 \wedge F_4. \quad (10.3.10)$$

場の方程式は

$$d * F_4 + \frac{1}{2} F_4 \wedge F_4 = 0. \quad (10.3.11)$$

また、エネルギー運動量テンソルは

$$\kappa^2 T_{MN} = \frac{1}{12} F_{MABC} F_N{}^{ABC} - \frac{1}{4} |F_4|^2 g_{MN}. \quad (10.3.12)$$

よって、

$$R_{MN} = \frac{1}{12} F_{MABC} F_N{}^{ABC} - \frac{1}{6} |F_4|^2 g_{MN}. \quad (10.3.13)$$

10.3.1.2 問題点

- 発散の問題（繰り込み不可能性）

Cf. M 理論

- 標準宇宙モデルの起源

- 次元低下・コンパクト化の問題
- モジュライ問題，ディラトン安定化問題
- Inflation 問題，宇宙項問題

Cf. 11次元理論の低エネルギー極限の一意性

- 素粒子標準モデルの起源

- Chirality の起源
- Cf. Heterotic M 理論
- 低エネルギーゲージ群の起源（と対称性の破れ）
- SUSY breaking mechanism

10.3.1.3 Kaluza-Klein SUGRA GUT

11次元極小SUGRA理論のコンパクト化 $M = X_4 \times Y_7$ とKK還元により, 低エネルギーで標準モデルが導かれる可能性の分析 (Witten E(1981)[387]).

- ゲージ群 : $G \supset G_{\text{SM}} = \text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times U(1)$?

このような G により $Y \supset G/H$ となるとすると, $H_1 = H \cap G_{\text{SM}}$ として $Y \supset G_{\text{SM}}/H_1$ で, G が有効に作用することより, $H_1 \subset \text{SU}(2) \times U(1) \times U(1) \subset G_{\text{SM}}$. これより, $\dim Y \geq (8+3+1) - (3+1+1) = 7$. 特に, $\dim Y = 7$ のとき, $H_1 = \text{SU}(2) \times U(1) \times U(1)$ となり, Y は次のいずれかと一致する.

- $Y = M(0,0) = \mathbb{C}P^2 \times S^2 \times S^1$.
- $Y = M(m,n)$: $\mathbb{C}P^2 \times S^2$ 上の $U(1)$ バンドル. $\text{gcd}(m,n) = r$ として, $\pi_1(Y) = \mathbb{Z}_r$. また, $U(1)$ バンドルの第1障害類 ($c_1(\mathbb{C}P^2 \times S^2)$) は, $\pm m[\mathbb{C}P^1]^* \pm n[S^2]^*$.
- ただし,

$$M(1,0) = S^5 \times S^2 = \text{O}(6) \times \text{SU}(2)/\text{O}(5) \times U(1),$$

$$M(0,1) = \mathbb{C}P^2 \times S^3 = \text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{SU}(2)/\text{SU}(2) \times U(1) \times \text{SU}(2)$$

を除いて, $M(m,n)$ の等長変換群は $\text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times U(1)$ と一致.

- $M(m,n)$ は一般に, $\text{SO}(6) \times \text{SO}(4)$ の適当な部分群 $U(1)$ を用いて,

$$M(m,n) \cong (S^5 \times S^3)/(U(1) \times \mathbb{Z}_r) \quad (10.3.14)$$

と表される.

- 次の向き付け不可能な空間 :

$$M(0,0)/\mathbb{Z}_2 : \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{R}P^2 \times S^1, \quad \mathbb{C}P^2 \times (S^2 \times S^1)/\mathbb{Z}_2,$$

$$M(1,0)/\mathbb{Z}_2 : S^5 \times \mathbb{R}P^2, \quad (S^5 \times S^2)/\mathbb{Z}_2,$$

$$M(r,0)/\mathbb{Z}_2 : (S^5/\mathbb{Z}_r) \times \mathbb{R}P^2, \quad ((S^5/\mathbb{Z}_r) \times S^2)/\mathbb{Z}_2.$$

- 標準モデルに登場する質量ゼロのレプトンとクォークは得られるか? 例えば, 11次元の質量ゼロのスピンール場 Ψ に対して, γ 行列と

スピノールの 4 + 7 分解

$$\begin{aligned}\Psi &= e^{-i\pi\gamma_5/4}\psi \otimes \chi, \\ \Gamma^a &= \gamma^a \otimes 1 \quad (a = 0, \dots, 3), \quad \Gamma^{p+3} = \gamma_5 \otimes \hat{\gamma}^p \quad (p = 1, \dots, 7)\end{aligned}$$

に対応して, 11 次元の Dirac 方程式は次のように分解される :

$$\Gamma \cdot \nabla \Psi = 0 \Rightarrow (\gamma \cdot D\psi) \otimes \chi + \psi \otimes (\hat{\gamma} \cdot \hat{D}\chi) = 0.$$

したがって, χ を 7 次元空間 Y_7 上の調和スピノール

$$\hat{\gamma} \cdot \hat{D}\chi = im\chi,$$

にとると, 4 次元上の質量 m の Dirac スピノールを得る :

$$(i\gamma \cdot D - m)\psi = 0$$

- Rarita-Schwinger 場 Ψ_N の Y 成分 Ψ_a の Y 上でのゼロモードより得られるだろう.
- これらのゼロモードが G の表現に関して可約なら, 世代の重複も得られる可能性がある.
- しかし, $D = 11$ SUGRA ではこのようにして得られる質量ゼロのフェルミ粒子はゲージ変換に関して LR 対称で, chiral でない (Y_7 のスピノール接続は変換 $\hat{\gamma}^p \rightarrow -\hat{\gamma}^p$ に対して不変). これは, このモデルの最大の困難. ただし, 接続に torsion があれば解決される可能性がある (例えば, $F_{[4]} \neq 0$).

● SUSY の破れ

独立な SUSY 変換の数 N は (4 次元 Majorana スピノール単位で) Y 上の Killing スピノール $\bar{D}_a\epsilon = 0$ の数と一致. ただし, \bar{D} は重力以外の場の寄与を含む. フラックスがゼロの時には,

$$[D_a, D_b]\epsilon = \frac{1}{4}R_{abcd}\Gamma^{cd}\epsilon = 0 \Rightarrow R_{ab}(Y) = 0 \quad (10.3.15)$$

となるので, $N = 0$. したがって, $N \geq 1$ となるためには, フラックス (またはフェルミオンの縮退が必要). また, $N \geq 2$ のとき SUSY 多重項においてフェルミ粒子は LR 対称となるので, chiral な表現をえるには $N = 1$ となる必要がある.

- P, CP, C の破れ
 $\langle F_{0123} \rangle \neq 0$ なら P が, $\langle F_{abcd} \rangle \neq 0$ なら C と CP が破れる (C 変換は, 方程式の複素共役変換と電荷の符号を変える変換の合成. 後者は, 今の場合, $A^a \Rightarrow -A^a$ と同等で, これは $\xi_a \rightarrow -\xi_a \Leftrightarrow y^p \rightarrow -y^p$ と対応するので, $A_{pqr} \neq 0$ なら不変性が破れる). また, tree level では $\theta = 0$.
- ゲージ対称性の自発的破れ
 モジュライ場の摂動および $A_{[3]}$ より質量ゼロの荷電 Higgs が得られる可能性あり. 特に, $N = 1$ SUSY があり, 質量ゼロの荷電フェルミ粒子が存在すれば, 超対称性より質量ゼロの荷電スカラ場が必然的に存在.
- $E^{3,1} \times M(m, n)$ は理論の解か?
 $D = 11$ SUGRA の古典解ではあり得ない (宇宙項問題). ただし, Witten は量子論的な意味で解となる可能性があるかと主張.
- 真空の安定性
 $D = 11$ SUGRA の古典解は一般に, 量子トンネル効果により不安定化する可能性があるが, SUSY が破れていなければ安定である (可能性が高い) と主張.

10.3.1.4 直積型解

M_{11} が 4 次元定曲率時空 $X_4 = \text{CCST}(4, k)$ との直積 $M_{11} = X_4 \times Y_7$ で, 全体として $\text{CCST}(4, k)$ の等長変換群 $\text{MIG}(4, k)$ で不変であるとする, 計量と F_4 は

$$ds^2 = ds^2(X_4) + ds^2(Y_7), \quad (10.3.16a)$$

$$F_4 = m\Omega(X_4) + \hat{F}_4 \quad (10.3.16b)$$

と表される. ここで, \hat{F}_4 は Y_6 上の 4 形式. このとき, Einstein 方程式は

$$R_{\mu\nu} = 3kg_{\mu\nu}(X) = - \left(\frac{m^2}{12} + \frac{\hat{F}^2}{6} \right) g_{\mu\nu}(X), \quad (10.3.17a)$$

$$R_{pq} = R_{pq}(Y) = \frac{1}{12} \hat{F}_{p\dots q} \hat{F}_q \dots - \frac{1}{6} (-m^2 + \hat{F}^2) g_{pq}(Y) \quad (10.3.17b)$$

第1式より, $k \leq 0$. 特に, $k = 0$ のとき, $m = \hat{F}_4 = 0$ となるので, $R_{pq}(Y) = 0$. これは, Bochner の定理より $M(m, n)$ では実現されない ($b_1(Y) = 1$ より, 調和1形式の数は明らかに Killing ベクトルの数より少ない). 11次元超重力理論では宇宙項を加えることができないので, 宇宙項により $k = 0$ とすることはできない.

つぎに, $k < 0$ のときは,

$$k = -\frac{1}{36}(m^2 + 2\hat{F}^2). \quad (10.3.18)$$

また,

$$*F_4 = -m\Omega(Y_7) + \Omega(X_4) \wedge *_y\hat{F} \quad (10.3.19)$$

より, 場の方程式は

$$d\hat{F} = 0, \quad d(*_Y\hat{F}) + m\hat{F} = 0. \quad (10.3.20)$$

特に, $\hat{F} = 0$ は解 $\text{AdS}_4 \times Y_6$ (Y_6 は正 Ricci 曲率 Einstein) を与える (Fruend-Rubin 解).

【定理 10.1 (Bochner)】 コンパクト Riemann 多様体が Ricci 平坦なら, Killing ベクトルと調和1形式は平行である. □

10.3.2 10次元超重力理論

10.3.2.1 IIA 型理論

11次元超重力理論の S^1 コンパクト化： $y = x^\sharp (\sharp = 10)$

- 計量

$$ds^2 = e^{-2\phi/3} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{4\phi/3} (dy + C_1)^2. \quad (10.3.21)$$

- 3形式ポテンシャル

$$A_{\mu\nu\lambda} = C_{\mu\nu\lambda}(x), \quad A_{\mu\nu\sharp} = B_{\mu\nu}(x) \quad (10.3.22)$$

- Rarita-Schwinger 場

$$\Psi_\mu = (\psi_\mu, \psi'_\mu), \quad \Psi_\sharp = (\lambda, \lambda'). \quad (10.3.23)$$

基本場

- ボーズ場

– NS 場： $g_{MN}, \phi, B_{[2]}$

– R 場： $C_{[1]}, C_{[3]}$

- フェルミ場

– Chirality の異なる Majorana 1/2 場： λ, λ'

– Chirality の異なる Majorana 3/2 場： ψ_M, ψ'_M

作用積分 (String フレーム) IIA 理論のストリングフレームでの Bosonic part の作用積分は

$$S_{\text{IIA,B}} = S_{\text{NS}} + S_{\text{R}} + S_{\text{CS}}; \quad (10.3.24)$$

$$S_{\text{NS}} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-\tilde{g})^{1/2} e^{-2\phi} \left(\tilde{R} + 4(\tilde{\nabla}\phi)^2 - \frac{1}{2} H_3 \cdot H_3 \right); \quad (10.3.25)$$

$$S_{\text{R}} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-\tilde{g})^{1/2} \left(\tilde{F}_2 \cdot \tilde{F}_2 + \tilde{F}_4 \cdot \tilde{F}_4 \right), \quad (10.3.26)$$

$$S_{\text{CS}} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int B_2 \wedge F_4 \wedge F_4. \quad (10.3.27)$$

ここで,

$$H_3 = dB_2, \quad F_2 = dC_1, \quad F_4 = dC_3, \quad \tilde{F}_4 = F_4 - C_1 \wedge H_3. \quad (10.3.28)$$

10.3.2.2 IIB 型理論

基本場

- ボーズ場
 - NS 場 : $g_{MN}, \phi, B_{[2]}$
 - R 場 : $C_{[0]}, C_{[2]}, C_{[4]}$
- フェルミ場
 - 同じ Chirality の Majorana 1/2 場 :
 $\lambda = \lambda^{(1)} + i\lambda^{(2)}; \quad \Gamma_{11}\lambda = \mp\lambda$
 - 同じ Chirality の Majorana 3/2 場 :
 $\psi_M = \psi_M^{(1)} + i\psi_M^{(2)}; \quad \Gamma_{11}\psi_M = \pm\psi_M$

場の方程式: τ, G_3, \tilde{F}_5 を

$$\tau = C_0 + ie^{-\phi}, \quad (10.3.29)$$

$$G_3 := \tau H_3 - F_3, \quad \tilde{G}_3 = \tau_2^{-1/2} G_3, \quad (10.3.30)$$

$$\tilde{F}_5 = dC_4 - \frac{1}{2}C_2 \wedge H_3 + \frac{1}{2}B_2 \wedge F_3 \quad (10.3.31)$$

により定義すると,

$$\square\tau + i\frac{(\nabla\tau)^2}{\tau_2} = -\frac{i}{2}G_3 \cdot G_3, \quad (10.3.32a)$$

$$\nabla \cdot G_3 = -\frac{i\nabla\tau}{2\tau_2}(G_3 + G_3^*) - i\tilde{F}_5 \cdot G_3, \quad (10.3.32b)$$

$$dG_3 = -\frac{i}{2\tau_2}d\tau \wedge (G_3 - G_3^*), \quad (10.3.32c)$$

$$d\tilde{F}_5 = \frac{i}{2\tau_2}G_3 \wedge G_3^*, \quad (10.3.32d)$$

$$*\tilde{F}_5 = \pm\tilde{F}_5, \quad (10.3.32e)$$

$$\begin{aligned} R_{MN} = & \frac{1}{4\tau_2^2} (\nabla_M\tau\nabla_N\tau^* + \nabla_M\tau^*\nabla_N\tau) \\ & + \frac{1}{8\tau_2} \left[G_{MPQ}G_N^{*PQ} + G_{MPQ}^*G_N^{PQ} \right] - \frac{1}{8\tau_2} G_3 \cdot G_3^* g_{MN} \\ & + \frac{1}{96} \tilde{F}_{MP_1\dots P_4} \tilde{F}_N{}^{P_1\dots P_4}. \end{aligned} \quad (10.3.32f)$$

作用積分 (String frame): IIB 理論のストリングフレームでの Bosonic part の作用積分は

$$S_{\text{IIB}} = S_{\text{NS}} + S_{\text{R}} + S_{\text{CS}}; \quad (10.3.33\text{a})$$

$$S_{\text{NS}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int dx^{10} (-\tilde{g})^{1/2} e^{-2\phi} \left(\tilde{R} + 4(\tilde{\nabla}\phi)^2 - \frac{1}{2} H_3 \cdot H_3 \right) \quad (10.3.33\text{b})$$

$$S_{\text{R}} = -\frac{1}{4\kappa^2} \int dx^{10} (-\tilde{g})^{1/2} \left(F_1 \cdot F_1 + \tilde{F}_3 \cdot \tilde{F}_3 + \frac{1}{2} \tilde{F}_5 \cdot \tilde{F}_5 \right) \quad (10.3.33\text{c})$$

$$S_{\text{CS}} = \pm \frac{1}{4\kappa^2} \int C_4 \wedge H_3 \wedge F_3. \quad (10.3.33\text{d})$$

ここで,

$$F_1 := dC_0, \quad \tilde{F}_3 := F_3 - C_0 \wedge H_3. \quad (10.3.34)$$

作用積分 (Einstein frame): String frame での計量 $g = g_s$ を Einstein frame での計量 $g = g_E = e^{-\phi/2} g_s$ に直すと,

$$2\kappa^2 S_{\text{IIB}} = \int \Omega \left[R - \frac{\nabla\tau \cdot \nabla\bar{\tau}}{2(\text{Im}\tau)^2} \right] - \frac{1}{2\text{Im}\tau} *G_3 \wedge \bar{G}_3 - \frac{1}{4} *\tilde{F}_5 \wedge \tilde{F}_5 \pm \frac{i}{4\text{Im}\tau} C_4 \wedge G_3 \wedge \bar{G}_3. \quad (10.3.35)$$

10.3.2.3 I 型理論

基本場

- 重力超組

- ボーズ場 : $g_{MN}, \phi, B_{[2]}$

- Majorana 3/2 場 ψ_M , 1/2 場 λ : $\Gamma_{11}\psi_M = \pm\psi_M$, $\Gamma_{11}\lambda = \mp\lambda$

- ゲージ超組

- ゲージ場 A_1 (ゲージ群 G は任意)

- G の随伴表現に従う Majorana 1/2 場 χ

作用積分 ストリングフレームでの Bosonic part の作用積分は

$$S_{\text{Het},B} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-g)^{1/2} e^{-2\phi} \left[R + 4(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} |\tilde{H}_3|^2 - \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} \text{Tr}_v (|F_2|^2) \right]. \quad (10.3.36)$$

ここで,

$$\tilde{H}_3 = dB_2 - \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} \omega_3, \quad (10.3.37)$$

$$\omega_3 = \text{Tr}_v \left(A_1 \wedge dA_1 - \frac{2i}{3} A_1 \wedge A_1 \wedge A_1 \right). \quad (10.3.38)$$

Einstein フレームでの作用積分は,

$$g_{MN} \rightarrow e^{\phi/2} g_{MN} \quad (10.3.39)$$

とにおいて,

$$S_{\text{Het},B} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-g)^{1/2} \left[R - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} e^\phi |\tilde{H}_3|^2 - \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} e^{-\phi/2} \text{Tr}_v (|F_2|^2) \right]. \quad (10.3.40)$$

場の方程式 デイラトンおよびゲージ場の方程式は

$$\square\phi - \frac{1}{2} e^\phi \tilde{H}_3 \cdot \tilde{H}_3 + \frac{\kappa_{10}^2}{2g_{10}^2} e^{-\phi/2} \text{Tr} F_2 \cdot F_2 = 0, \quad (10.3.41a)$$

$$d\tilde{H}_3 = -\frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} \text{Tr} F_2 \wedge F_2, \quad (10.3.41b)$$

$$d(e^\phi * \tilde{H}_3) = 0, \quad (10.3.41c)$$

$$DF_2 := dF_2 - iA_1 \wedge F_2 + iF_2 \wedge A_1 = 0, \quad (10.3.41d)$$

$$d(e^{-\phi/2} * F_2) + e^\phi F_2 \wedge * \tilde{H}_3 = 0. \quad (10.3.41e)$$

また,

$$\begin{aligned} \kappa_{10}^2 T_{MN} = & \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial_N \phi - \frac{1}{4} (\nabla\phi)^2 g_{MN} \\ & + \frac{1}{4} e^\phi \left(\tilde{H}_{MPQ} \tilde{H}_N{}^{PQ} - |\tilde{H}_3|^2 g_{MN} \right) \\ & + \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} e^{-\phi/2} \left(\text{Tr}_v (F_{MP} F_N{}^P) - \frac{1}{2} \text{Tr}_v (|F_2|^2) g_{MN} \right) \end{aligned} \quad (10.3.42)$$

より, Einstein 方程式は

$$\begin{aligned}
 R_{MN} = & \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial_N \phi \\
 & + e^\phi \left(\frac{1}{4} \tilde{H}_{MPQ} \tilde{H}_N{}^{PQ} - \frac{1}{8} |\tilde{H}_3|^2 g_{MN} \right) \\
 & + \frac{\kappa_{10}^2}{g_{10}^2} e^{-\phi/2} \left(\text{Tr}_v(F_{MP} F_N{}^P) - \frac{1}{8} \text{Tr}_v(|F_2|^2) g_{MN} \right) \quad (10.3.43)
 \end{aligned}$$

10.3.2.4 問題点

- 発散の問題 (繰り込み不可能性)

Cf. 弦理論

- ゲージセクターの非一意性 (I 型)

Cf. Anomaly cancelation

- 標準宇宙モデルの起源

- 次元低下・コンパクト化の問題
- モジュライ問題, ディラトン安定化問題
- Inflation 問題, 宇宙項問題

Cf. Massive IIA, 9-brane

- 素粒子標準モデルの起源

- Chirality の起源 (IIA 型)

Cf. T-duality

- 低エネルギーゲージ群の起源 (と対称性の破れ) (II 型)

Cf. branes

- SUSY breaking mechanism

10.3.2.5 アノーマリー

一般的構造 アノーマリーはカイラルな場の量子効果によってのみ生成され、 d 次元時空では、一般に次の構造をもつ：

$$\delta \ln Z = \frac{-i}{(2\pi)^5} \int \hat{I}^d(F_2, R_2), \quad (10.3.44)$$

$$\hat{I}^{d+2} \Rightarrow \hat{I}^d : \quad \hat{I}^{d+2} = d\hat{I}^{d+1}, \quad \delta\hat{I}^{d+1} = d\hat{I}^d. \quad (10.3.45)$$

10次元超重力理論に登場するカイラル場と対応する I^{12} は

- dilatino: $\mathbf{8}, \mathbf{8}'$

$$\begin{aligned} \hat{I}_{\mathbf{8}}(F_2, R_2) = & -\frac{\text{Tr}(F_2^6)}{1440} \\ & + \frac{\text{Tr}(F_2^4)\text{tr}(R_2^2)}{2304} - \frac{\text{Tr}(F_2^2)\text{tr}(R_2^4)}{23040} - \frac{\text{Tr}(F_2^2)[\text{tr}(R_2^2)]^2}{18432} \\ & + \dim(G) \left(\frac{\text{tr}(R_2^6)}{725760} + \frac{\text{tr}(R_2^4)\text{tr}(R_2^2)}{552960} + \frac{[\text{tr}(R_2^2)]^3}{1327104} \right). \end{aligned} \quad (10.3.46)$$

ここで、 tr は $R_2 = (\mathcal{R}^a_b)$ の接空間添え字 a, b に関するトレース、 Tr はフェルミ粒子のゲージ群 G の表現に関するトレース。

- gravitino: $\mathbf{56}, \mathbf{56}'$

$$\hat{I}_{\mathbf{56}}(R_2) = -495 \frac{\text{tr}(R_2^6)}{725760} + 225 \frac{\text{tr}(R_2^4)\text{tr}(R_2^2)}{552960} - 63 \frac{[\text{tr}(R_2^2)]^3}{1327104}. \quad (10.3.47)$$

- 5-form flux (IIB): $[5]_+, [5]_-$

$$\hat{I}_{\text{SD}}(R_2) = +992 \frac{\text{tr}(R_2^6)}{725760} - 448 \frac{\text{tr}(R_2^4)\text{tr}(R_2^2)}{552960} + 128 \frac{[\text{tr}(R_2^2)]^3}{1327104}. \quad (10.3.48)$$

II型理論 IIA型理論はカイラルでないので、アノーマリーは自明にキャンセルする。また、IIB型理論でも、アノーマリーはキャンセルする：

$$\hat{I}_{\text{IIB}}(R_2) = -2\hat{I}_{\mathbf{8}}(R_2) + 2\hat{I}_{\mathbf{56}}(R_2) + \hat{I}_{\text{SD}}(R_2) = 0. \quad (10.3.49)$$

I 型理論 I 型理論のアノーマリーは

$$\begin{aligned}\hat{I}_1 &= \hat{I}_{56}(R_2) - \hat{I}_8(R_2) + \hat{I}_8(F_2, R_2) \\ &= \frac{Y_4 X_8}{768} + \frac{1}{1440} \left\{ -\text{Tr}_a(F_2^6) + \frac{1}{48} \text{Tr}_a(F_2^2) \text{Tr}_a(F_2^4) - \frac{1}{14400} [\text{Tr}_a(F_2^2)]^3 \right\} \\ &\quad + (\dim(G) - 496) \left\{ \frac{\text{tr}(R_2^6)}{725760} + \frac{\text{tr}(R_2^4) \text{tr}(R_2^2)}{552960} + \frac{[\text{tr}(R_2^2)]^3}{1327104} \right\} \quad (10.3.50)\end{aligned}$$

ここで,

$$Y_4 = \text{tr}(R_2^2) - \frac{1}{30} \text{Tr}_a(F_2^2), \quad (10.3.51a)$$

$$X_8 = \text{tr}(R_2^4) + \frac{[\text{tr}(R_2^2)]^2}{4} - \frac{\text{Tr}_a(F_2^2) \text{tr}(R_2^2)}{30} + \frac{\text{Tr}_a(F_2^4)}{3} - \frac{[\text{Tr}_a(F_2^2)]^2}{900} \quad (10.3.51b)$$

まず, $G = \text{SO}(n)$ のとき, 任意の生成元 $t \in \mathfrak{so}(n)$ に対し,

$$\text{Tr}_a(t^2) = (n-2) \text{Tr}_v(t^2), \quad (10.3.52a)$$

$$\text{Tr}_a(t^4) = (n-8) \text{Tr}_v(t^4) + 3[\text{Tr}_v(t^2)]^2, \quad (10.3.52b)$$

$$\text{Tr}_a(t^6) = (n-32) \text{Tr}_v(t^6) + 15 \text{Tr}_v(t^2) \text{Tr}_v(t^4), \quad (10.3.52c)$$

より, 第 2 項は

$$\frac{32-n}{1440} \left\{ \text{Tr}_v(F_2^6) - \frac{n+22}{48} \text{Tr}_v(F_2^2) \text{Tr}_v(F_2^4) + \frac{(n-2)(n+28)}{14400} [\text{Tr}_v(F_2^2)]^3 \right\} \quad (10.3.53)$$

より, $n = 32$ のときのみゼロとなる. 同様に, $G = E_8$ に対して,

$$\text{Tr}_a(t^4) = \frac{1}{100} [\text{Tr}_a(t^2)]^2, \quad \text{Tr}_a(t^6) = \frac{1}{7200} [\text{Tr}_a(t^2)]^3 \quad (10.3.54)$$

より, 第 2 項は $G = E_8 \times E_8, E_8 \times \text{U}(1)^m$ のときゼロ. 第 3 項は, $G = \text{SO}(32), E_8 \times E_8, E_8 \times \text{U}(1)^{248} \cdot \text{U}(1)^{496}$ に対してゼロ.

次に, (ヘテロ表示での) 作用積分において, \tilde{H}_3 の定義を

$$\tilde{H}_3 = dB_2 - c\omega_{3Y} - c'\omega_{3L}; \quad (10.3.55)$$

$$\omega_{3Y} = \text{Tr} \left(A_1 \wedge dA_1 - \frac{2i}{3} A_1 \wedge A_1 \wedge A_1 \right), \quad (10.3.56)$$

$$\omega_{3L} = \text{tr} \left(\omega_1 \wedge d\omega_1 + \frac{2}{3} \omega_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_1 \right) \quad (10.3.57)$$

に置き換え，ゲージ変換を

$$\delta A_1 = d\lambda - i[A_1, \lambda], \quad (10.3.58a)$$

$$\delta \omega_1 = d\Theta + [\omega_1, \Theta], \quad (10.3.58b)$$

$$\delta B_2 = c\text{Tr}(\lambda dA_1) + c'\text{tr}(\Theta d\omega_1) \quad (10.3.58c)$$

と定義すると，Chern-Simons 型繰り込み項

$$\mathbf{S}' = \int B_2 X_8(F_2, R_2) \quad (10.3.59)$$

は，ゲージ変換に補正

$$\delta \mathbf{S}' = \int \delta B_2 X_8 \quad (10.3.60)$$

を与える．これは，アノーマリー換算で

$$\begin{aligned} \hat{I}'_{10} &= [c\text{Tr}_a(\lambda dA_1) + c'\text{tr}(\Theta d\omega_1)]X_8 \\ \Rightarrow \hat{I}'_{12} &= [c\text{Tr}_a(F_2^2) + c'\text{tr}(R_2^2)]X_2 \end{aligned} \quad (10.3.61)$$

となる．よって，

$$c' = -\frac{c}{30} \quad (10.3.62)$$

ととれば，第 1 項と相殺する（**Green-Schwarz 機構**）．このとき，

$$d\tilde{H}_3 = \frac{\alpha'}{4} \left[\text{tr}(R_2^2) - \frac{1}{30} \text{Tr}_a(F_2^2) \right]; \quad 4\kappa_{10}^2 = \alpha' g_{10}^2. \quad (10.3.63)$$

以上より，I 型理論では， $G = \text{SO}(32), E_8 \times E_8, E_8 \times \text{U}(1)^{248} \cdot \text{U}(1)^{496}$ に対して，アノーマリーは相殺する．

10.4 No-flux コンパクト化 (一般論)

仮定

- 全時空 M^D の計量は

$$ds^2 = W(y)^2 ds^2(X_m) + ds^2(Y_n) \quad (10.4.1)$$

Y_n はコンパクト滑らかで, ワープ因子は正で有界かつ滑らか.

- Flux はすべてゼロ
- Dilaton は, 存在する場合, $\Phi = \Phi(y)$ で Y 上の滑らかな関数.

結論

- Dilaton: $\Phi = 0$

$$\square\Phi = 0 \Rightarrow \Delta_Y\Phi = 0 \Rightarrow \Phi = \text{const.} \quad (10.4.2)$$

- No warp $W = \text{const}$ で X_m は Ricci 平坦

$$R_{\mu\nu}(M) = R_{\mu\nu}(X) - (W\Delta_Y W + (m-1)(D_Y W)^2)g_{\mu\nu}(X) = \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi = 0 \quad (10.4.3)$$

は

$$\Delta_Y W^m = \lambda W^{m-2}, \quad (10.4.4a)$$

$$R_{\mu\nu}(X) = \lambda g_{\mu\nu}(X) \quad (10.4.4b)$$

と同等. 第1式より, $\lambda = 0, W = \text{const}$ が得られる.

- Y_n も Ricci 平坦.

$$R_{pq}(M) = R_{pq}(Y) = \frac{1}{2}\partial_p\Phi\partial_q\Phi = 0. \quad (10.4.5)$$

10.5 10次元理論の直積型コンパクト化 (RR/ゲージフラックスなし)

10.5.1 共通セクター

基本場

- ボーズ場
 - 計量/フレーム場: g_{MN} (e_M^A)
 - 2形式場: $B = \frac{1}{2}B_{MN}dx^M \wedge dx^N \Rightarrow H$
 - デイラトン: ϕ
- フェルミ場
 - スピン 3/2 場: ψ_M
 - デイラティーノ: λ

作用積分 ストリングフレームでの Bosonic part の作用積分は

$$S_B = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-g)^{1/2} e^{-2\phi} \left[R + 4(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}|H|^2 \right] \quad (10.5.1)$$

ここで,

$$H = dB \quad (10.5.2)$$

超対称変換 String frame で

$$\delta\psi_M = \mathcal{D}_M\epsilon; \quad \mathcal{D}_M \equiv \nabla_M^{(+)} \equiv \nabla_M(e) - \frac{1}{4}\hat{H}_M, \quad (10.5.3a)$$

$$\delta\lambda = \mathcal{O}\epsilon; \quad \mathcal{O} \equiv \Gamma^M \partial_M \phi - \frac{1}{2}\hat{H}. \quad (10.5.3b)$$

ここで

$$\hat{H}_M := \frac{1}{2}H_{MPQ}\Gamma^{PQ}, \quad (10.5.4a)$$

$$\hat{H} := \frac{1}{6}H_{MNP}\Gamma^{MNP}. \quad (10.5.4b)$$

場の方程式 ストリングフレームで

$$\mathcal{E}_{MN} := R_{MN} + 2\nabla_M \nabla_N \phi - \frac{1}{4} H_{MPQ} H_N{}^{PQ}, \quad (10.5.5a)$$

$$\mathcal{E}_\phi := R - 4(\nabla\phi)^2 + 4\Box\phi - \frac{1}{2}|H|^2, \quad (10.5.5b)$$

$$\mathcal{J}_{MN} := e^{2\phi} \nabla_P (e^{-2\phi} H^P{}_{MN}) = 0. \quad (10.5.5c)$$

最後の式は

$$d(e^{-2\phi} *H) = 0 \quad (10.5.6)$$

と同等.

縮約 Bianchi 恒等式

$$\nabla^N R_{MN} = \frac{1}{2} \nabla_M R \quad (10.5.7)$$

より

$$\begin{aligned} \nabla^N \mathcal{E}_{MN} &= \frac{1}{2} \nabla_M \mathcal{E}_\phi + 2\mathcal{E}_{MN} \nabla^N \phi - \frac{1}{4} \mathcal{J}^{PQ} H_{MPQ} \\ &\quad + \frac{1}{12} H^{NPQ} (dH)_{MNPQ} \end{aligned} \quad (10.5.8)$$

\mathcal{E}_M^M と \mathcal{E}_ϕ より, 曲率を含まない次の式を得る:

$$\mathcal{E}'_\phi := e^{2\phi} \Box e^{-2\phi} - |H|^2 = 0. \quad (10.5.9)$$

Killing スピノール 方程式

$$\mathcal{D}_M \epsilon = 0, \quad \mathcal{O} \epsilon = 0 \quad (10.5.10)$$

を満たす (c 数) スピノールを **Killing スピノール** と呼ぶ.

【定理 10.2 (Killing スピノールと超対称解)】 キリングスピノール ϵ が存在し, 対応するキリングベクトル $\bar{\epsilon} \Gamma^M \epsilon$ が時間的ベクトルなら, 場の方程式が自動的に満たされる. □

Proof. 関係式

$$[\nabla_M, \nabla_N] = \frac{1}{4} R_{MNPQ} \Gamma^{PQ} \equiv \frac{1}{2} \hat{R}_{MN} \quad (10.5.11)$$

および

$$[\Gamma^{PQ}, \Gamma^R] = 2\eta^{QR} \Gamma^P - 2\eta^{PR} \Gamma^Q \quad (10.5.12)$$

より,

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_N] &= \frac{1}{4} R_{ABMN}^{(+)} \Gamma^{AB} \\ &= \frac{1}{2} \hat{R}_{MN} - \frac{1}{2} \nabla_{[M} \hat{H}_{N]} - \frac{1}{8} H_{MPS} H_{NQ}{}^S \Gamma^{PQ} \end{aligned} \quad (10.5.13)$$

ここで,

$$R_{MNPQ} \Gamma^N \Gamma^{PQ} = R_{MNPQ} (2\eta^{NP} \Gamma^Q + \Gamma^{NPQ}) = -2R_{MP} \Gamma^P \quad (10.5.14)$$

および

$$\begin{aligned} (dH)_{MNPQ} \Gamma^{NPQ} &= (\nabla_M H_{NPQ} - 3\nabla_N H_{MPQ}) \Gamma^{NPQ} \\ &= -12\nabla_M \hat{H} + 6\nabla_{[M} H_{N]PQ} \Gamma^{NPQ} \end{aligned} \quad (10.5.15)$$

を用いると,

$$\Gamma^N [\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_N] = [\mathcal{D}_M, \mathcal{O}] - \frac{1}{2} \mathcal{E}_{MP} \Gamma^P - \frac{1}{4} \mathcal{J}_{MP} \Gamma^P - \frac{1}{24} (dH)_{MNPQ} \Gamma^{NPQ}, \quad (10.5.16)$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_M, \mathcal{O}] &= \Gamma^N \nabla_N \nabla_M \phi - \frac{1}{2} \nabla_M \hat{H} - \frac{1}{2} H_{MPN} \Gamma^P \nabla^N \phi \\ &\quad + \frac{1}{8} H_{SMP} H^S{}_{QR} \Gamma^{PQR}. \end{aligned} \quad (10.5.17)$$

を得る. さらに,

$$\hat{H}^2 = -|H|^2 + \frac{1}{4} H_{PQ} H_{RS} \Gamma^{PQRS} \quad (10.5.18)$$

を用いると,

$$\Gamma^M [\mathcal{D}_M, \mathcal{O}] = -\frac{1}{2} \mathcal{E}'_\phi - \frac{1}{2} d\hat{H} + 2\mathcal{O}^2 - \frac{1}{4} \mathcal{J}_{PQ} \Gamma^{PQ} \quad (10.5.19)$$

を得る.

以上より, Killing スピノール ϵ が存在し, H に対する Bianchi 恒等式 $dH = 0$ が満たされれば,

$$(2\mathcal{E}_{MN} + \mathcal{J}_{MN}) \Gamma^N \epsilon = 0, \quad (10.5.20a)$$

$$\left(\mathcal{E}'_\phi - \frac{1}{4} \mathcal{J}_{PQ} \Gamma^{PQ} \right) \epsilon = 0, \quad (10.5.20b)$$

$$(10.5.20c)$$

が成り立つ。これより

$$K^M = \bar{\epsilon} \Gamma^M \epsilon \quad (10.5.21)$$

とおくと

$$(2\mathcal{E}_{MN} + \mathcal{I}_{MN})(2\mathcal{E}^{MN} + \mathcal{I}^{MN}) = 0, \quad (10.5.22a)$$

$$(2\mathcal{E}_{MN} + \mathcal{I}_{MN})K^N = 0 \quad (10.5.22b)$$

が成り立つ。 K^M は常に時間的ないし光的ベクトル Killing であるが、時間的ならこれらより

$$\mathcal{E}_{MN} = \mathcal{I}_{MN} = 0 \quad (10.5.23)$$

が導かれる。一方、 K^M が光的な場合には、 $L_M K^M \neq 0$ となる適当なベクトルに対して、さらに

$$(2\mathcal{E}_{MN} + \mathcal{I}_{MN})L^M L^N = 0 \quad (10.5.24)$$

が成り立てば同じ結論が得られる。さらに、整合性条件より

$$\mathcal{E}'_\phi = 0 \quad (10.5.25)$$

が導かれる。したがって、すべての場の方程式は満たされる。

Q.E.D.

10.5.2 Calabi-Yau コンパクト化

Ansatz 10次元時空解が4次元 Mink/adS/dS に対応する等長変換群で不変とすると,

$$ds^2 = \tilde{g}_{MN} dz^M dz^N = h^{1/2}(y) ds^2(X_4) + ds^2(Y_6), \quad (10.5.26a)$$

$$\phi = \phi(y), \quad (10.5.26b)$$

$$H = H_{pqr}(y) dy^p \wedge dy^q \wedge dy^r, \quad (10.5.26c)$$

$$\Gamma^a = \gamma^a \otimes 1, \quad \Gamma^p = \gamma^5 \otimes \hat{\gamma}^p. \quad (10.5.26d)$$

接続係数と曲率 $\tilde{\theta}^A$ を正規直交基底として

$$\begin{aligned} d\tilde{\theta}^a &= h^{1/4} d\theta^a + \frac{1}{4} h^{-3/4} dh \wedge \theta^a \\ &= -h^{1/4} \omega^a{}_b \wedge \theta^b + \frac{1}{4h} dh \wedge \tilde{\theta}^a \\ &= -\omega^a{}_b \wedge \tilde{\theta}^b + \frac{1}{4h} (dh)_p \theta^p \wedge \tilde{\theta}^a \\ &= -\tilde{\omega}^a{}_b \wedge \tilde{\theta}^b - \tilde{\omega}^a{}_p \theta^p \end{aligned} \quad (10.5.27)$$

より,

$$\tilde{\omega}^a{}_b = \omega^a{}_b(X), \quad \tilde{\omega}^a{}_p = \theta^a (dA)_p, \quad \tilde{\omega}^p{}_q = \omega^p{}_q(Y). \quad (10.5.28)$$

Ricci テンソルは

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}(X) - \frac{1}{4} h^{-1/2} \Delta_Y h g_{\mu\nu}(X), \quad (10.5.29a)$$

$$\tilde{R}_{\mu m} = 0, \quad (10.5.29b)$$

$$\tilde{R}_{mn} = R_{mn}(Y) - 4h^{-1/4} D_m D_n (h^{1/4}). \quad (10.5.29c)$$

これより,

$$\tilde{\nabla}_\mu = \nabla_\mu + \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_5 \otimes \hat{\gamma}^p \partial_p h^{1/4}, \quad (10.5.30a)$$

$$\tilde{\nabla}_p = \nabla_p. \quad (10.5.30b)$$

また,

$$*H = \Omega(X) \wedge h *_Y H. \quad (10.5.31)$$

超対称条件 以上より，超対称条件は

$$\mathcal{D}_\mu \epsilon = \left(\nabla_\mu + \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_5 \hat{\gamma}^m \partial_m (h^{1/4}) \right) \epsilon = 0, \quad (10.5.32a)$$

$$\mathcal{D}_m \epsilon = \left(\nabla_m - \frac{1}{8} \hat{H}_m \right) \epsilon = 0, \quad (10.5.32b)$$

$$\mathcal{O} \epsilon = \gamma_5 \left(\hat{\partial} \phi - \frac{1}{12} \hat{H} \right) \epsilon = 0. \quad (10.5.32c)$$

今，

$$\epsilon = \xi_+(x) \eta_\pm(y) + \xi_-(x) \eta_\mp(y) \quad (10.5.33)$$

とにおいて， Y_6 上の微分形式 J, Ω を

$$J^{pq} = i \eta_+^\dagger \gamma^{pq} \eta_+, \quad \Omega^{pqr} = \eta_-^\dagger \gamma^{pqr} \eta_+ \quad (10.5.34)$$

により定義すると，次の代数関係式が成り立つ：

$$J_{pq} = -J_{qp}, \quad J^p{}_q J^q{}_r = -\delta_r^p, \quad (10.5.35a)$$

$$J \wedge \Omega = 0, \quad (10.5.35b)$$

$$J \wedge J \wedge J = 3i\Omega \wedge \bar{\Omega} = 6\Omega(Y_6). \quad (10.5.35c)$$

これらの最初の条件は， J が概複素構造を定義し，計量が J に関してエルミートである（すなわち Y_6 が概エルミート多様体である）ことを意味している．これにより， Y_6 の接バンドルの構造群は $U(3)$ に簡約される（ $U(3)$ 構造）．また，2番目の式は， Ω がこの概複素構造に関して， $(3,0)$ 型となることを意味している．この Ω を用いるとさらに，接バンドルの構造群は $SU(3)$ に簡約される（ $SU(3)$ 構造）．

さらに，トーションをもつ共変微分 $\hat{\nabla}$ を

$$\hat{\nabla}_m V^p = \nabla_m V^p - \frac{1}{2} H^p{}_{qm} V^q \quad (10.5.36)$$

により定義すると，Killing スピノール方程式より

$$\hat{\nabla}_m \epsilon = 0. \quad (10.5.37)$$

となる．これより，微分関係式

$$\hat{\nabla} J = 0, \quad \hat{\nabla} \Omega = 0 \quad (10.5.38)$$

が得られる．これは， $\hat{\nabla}$ が $SU(3)$ 構造をたもつ接続であることを意味する．

また，整合性条件より

$$0 = [\hat{\nabla}_m, \hat{\nabla}_n]\epsilon = \frac{1}{4}\hat{R}_{mnpq}\hat{\gamma}^{pq}\epsilon \Rightarrow \hat{R}_{mn} = 0 \quad (10.5.39)$$

より， Y_6 は $\hat{\nabla}$ に関して Ricci 平坦となる．しかし，

$$\nabla_l J_{mn} = H l^p {}_{[m} J_{n]p}, \quad (10.5.40a)$$

$$\nabla_l \Omega_{mnp} = \frac{3}{2} H l^p {}_{[m} \Omega_{np]q} \quad (10.5.40b)$$

より， Y_6 は Kahler でない．実際， Y_6 が Kahler となることと $H = 0$ となることが同等であることが容易に示される．

No-Go 定理 Dilaton に対する場の方程式より，

$$\Delta_Y e^{-2\phi} = e^{-2\phi} |H|_Y^2. \quad (10.5.41)$$

Y がコンパクト閉で滑らか，かつ ϕ が有界とすると，これより

$$\int_Y \Omega(Y) e^{-2\phi} |H|_Y^2 = 0 \Rightarrow H = 0, \quad \phi = \text{const} \quad (10.5.42)$$

となる．

$H = 0$ の場合 Killing スピノール ϵ が存在すると，

$$\nabla_\mu \epsilon = -\frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma^5 \otimes \hat{\gamma}^p \partial_p h^{1/4} \epsilon, \quad (10.5.43a)$$

$$\nabla_p \epsilon = 0, \quad (10.5.43b)$$

$$\hat{\gamma}_p \partial_p \phi \epsilon = 0. \quad (10.5.43c)$$

- $\phi = 0$: $\delta\lambda = \mathcal{O}\epsilon = 0$ より，

$$\hat{\gamma}^m \nabla_m \phi \epsilon = 0 \Rightarrow (\nabla\phi)^2 = 0 \Rightarrow \phi = \text{const}. \quad (10.5.44)$$

- **No warp & 4D 平坦性** : $\delta\psi_\mu = 0$ の整合性より

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] &= \frac{1}{2} (\nabla h^{1/4})^2 \gamma_{\mu\nu} \epsilon \\ &= \frac{1}{4} R_{\mu\nu ab} (X) \gamma^{ab} = \frac{1}{2} k \gamma_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (10.5.45)$$

よって,

$$(\nabla_m h^{1/4})(\nabla^m h^{1/4}) = k. \quad (10.5.46)$$

また, $\delta\psi_\mu = 0$ と $\delta\psi_m = 0$ の整合性より

$$\hat{\gamma}^m \partial_n \partial_m h^{1/4} \epsilon = 0 \Rightarrow \Delta_Y h^{1/4} = 0. \quad (10.5.47)$$

よって, Y がコンパクト閉で滑らか, h が正で有界とすると,

$$h = \text{const} \Rightarrow k = 0. \quad (10.5.48)$$

となる.

- Y の Ricci 平坦性: $\delta\psi_m = 0$ の整合性条件

$$0 = [\nabla_m, \nabla_n] \epsilon = \frac{1}{4} R_{mnrs}(Y) \hat{\gamma}^{rs} \epsilon \quad (10.5.49)$$

より,

$$R_{mn}(Y) \hat{\gamma}^n \epsilon = 0 \Rightarrow R_p^m(Y) R_{mn}(Y) \hat{\gamma}^p \hat{\gamma}^n \epsilon = 0 \Rightarrow R_n^m(Y) R_m^n(Y) = 0, \quad (10.5.50)$$

すなわち $R_{mn}(Y) = 0$ という条件が得られる.

- Y の Kähler 性: ϵ の X_4 上のカイラルスピノール ξ_\pm と Y_6 上のカイラルスピノール η_\pm への分解

$$\epsilon = \xi_+ \otimes \eta_\pm + \xi_- \otimes \eta_\mp \quad (10.5.51)$$

を用いて, Y_6 上の実行列行列 $J = (J_p^q)$ を

$$J_p^q = \pm i \eta_\pm^+ \gamma_p^q \hat{\gamma}_\tau \eta_\pm \quad (10.5.52)$$

により定義すると,

$$J^2 = -1, \quad (10.5.53a)$$

$$J_p^r J_q^s g_{rs} = g_{pq} \Leftrightarrow g(Ju, Jv) = g(u, v), \quad (10.5.53b)$$

$$\nabla_p J_{qr} = 0. \quad (10.5.53c)$$

これより, 特に, Nijenhuis テンソルは

$$N_{pq}{}^r \equiv J_p^s J_{[q;s]}^r - J_q^s J_{[p;s]}^r = 0. \quad (10.5.54)$$

よって, J は複素構造を定義し, $g_{pq}(Y)$ は J に関して Kähler 計量となる.

【注 10.3 (SU(3) ホロノミー)】 3次元コンパクト複素多様体に対して,

- Kähler $\Leftrightarrow \nabla J = 0 \Leftrightarrow U(3)$ ホロノミー

- 複素接空間

$$T(M)^{\mathbb{C}} = T'(M) + T''(M) :$$

$$JV' = iV' \ (V' \in T'(M)), \quad JV'' = -iV'' \ (V'' \in T''(M)),$$

$$h(V, V) = g(\bar{V}, V), \quad g(V, V) = g(\bar{V}, \bar{V}) = 0 \ (V \in T'(M))$$

において, $\nabla J = 0$ より, 共変微分 ∇ による接続は複素接空間の接続を誘導し, しかもエルミート計量を保つ.

- 特殊ホロノミー多様体

- 実 $2m$ 次元 Calabi-Yau $\Leftrightarrow SU(m)$ ホロノミー

- 実 $4m$ 次元 Hyper-Kähler $\Leftrightarrow Sp(m) = USp(2m)$ ホロノミー

- $SU(m)/Sp(m)$ ホロノミー \Rightarrow Kähler, Ricci 平坦, 既約, 有限基本群

- コンパクト, Ricci 平坦, Kähler のとき: 標準線バンドルが自明 $\Leftrightarrow \text{Hol}(g) \subset SU(3)$

- Kähler 多様体の接続 ∇ は, 標準線バンドル $K(M) = \wedge^3 T'(M)$ の $U(1)$ 接続を誘導し, その曲率は ∇ の Ricci 形式 $\rho_{ij} = J_j^k R_{ij}$ と対応する. したがって, この接続が平坦なら, M が単連結な時 $K(M)$ は大域的な切断をもち, $T'(M)$ バンドルの構造群が $U(3)$ から $SU(3)$ に簡約される.

- $K(M)$ の大域的切断は, 3形式

$$\Omega^{pqr} = -2i\eta_- \gamma^{pqr} \eta_+ \quad (10.5.55)$$

により与えられる. 実際, Ω は次の性質をもつ:

$$J_p^q \Omega_{qrs} = -i\Omega_{prs}, \quad (10.5.56a)$$

$$\Omega \wedge \bar{\Omega} = -6i\boldsymbol{\nu}(Y_6), \quad (10.5.56b)$$

$$\nabla \Omega = 0. \quad (10.5.56c)$$

□

【注 10.4】

- $\phi = \text{const}$, $H = 0$, X_4 :Minkowski, Y_6 :Ricci 平坦という結論は, 最初の一般的仮定, Y_6 がコンパクト閉で滑らか, h が有界, 滑らかで正という要請と場の方程式のみから導かれ, 超対称性は必要ない.
- Y_6 が複素多様体で Kähler という性質は, 超対称性からの帰結である.

□

【定義 10.5 (Calabi-Yau 多様体)】 ホロノミー群が $\text{Hol}(g) = \text{SU}(m)$ となる複素 m 次元コンパクト Kähler 多様体 (M, J, g) を (非特異) Calabi-Yau 多様体という. □

【命題 10.6 (ホロノミーによる特徴付け)】 (M, J, g) を単連結, 既約, コンパクト, Ricci 平坦な複素 m 次元 Kähler 多様体とする. このとき, $m \geq 2$ かつ $\text{Hol}(g) = \text{SU}(m)$, または m が偶数かつ $\text{Hol}(g) = \text{Sp}(m/2)$ となる. 逆に, (M, J, g) が複素 m 次元コンパクト Kähler 多様体で $\text{Hol}(g)$ が $\text{SU}(m)$ か $\text{Sp}(m/2)$ と一致すれば, g は Ricci 平坦, 既約でその基本群は有限群となる. (Joyce DD 2000[267]) □

10.6 10次元I型理論の Calabi-Yau コンパクト化

10.6.1 アノーマリー相殺条件 (ゲージバンドルの標準 SU(3) 埋め込みの場合)

- アノーマリー

アノーマリー相殺より, I型 $SO(32)$ ・ヘテロ型 $SO(32)/E_8 \times E_8$ に対して,

$$d\tilde{H}_3 = \frac{\alpha'}{4} \left[\text{tr}(R_2^2) - \frac{1}{30} \text{Tr}_a(F_2^2) \right]; \quad 4\kappa_{10}^2 = \alpha' g_{10}^2. \quad (10.6.1)$$

よって, $\tilde{H}_3 = 0$ より,

$$\text{tr}(R_2 \wedge R_2) = \frac{1}{30} \text{Tr}_a(F_2 \wedge F_2) \quad (10.6.2)$$

- 追加超対称条件

ヘテロ型では超対称性条件として新たに

$$\delta\chi = \frac{1}{2} F_{pq} \gamma^{pq} \eta = 0 \quad (10.6.3)$$

が加わる.

- Holonomy への埋め込み

これらの条件は, ゲージ接続としてホロノミー群 $SU(3)$ のゲージ群への埋め込みによりスピン接続から誘導されたものを取れば満たされる:

$$A = \omega: \quad SU(3) \hookrightarrow G \quad (10.6.4)$$

- $SO(32)$ の場合: このとき, 条件を満たす埋め込みは標準的な包含写像 $SU(3) \subset SO(6) \subset SO(32)$ のみ. この埋め込みに対して, ゲージ対称性は $U(1) \times O(26)$ に低下するが, $H = O(26)$ に関して $SO(32)$ の随伴表現は実 (ベクトルの) 表現のみに分解するので, カイラルフェルミ粒子は得られない.

- $E_8 \times E_8$ の場合: このとき, 対称性は $E_6 \times E_8$ に落ち, E_8 の随伴表現は, $SU(3) \times E_6 \subset E_8$ に関して,

$$248 = (8, 1) + (3, 27) + (3^*, 27^*) + (1, 78) \quad (10.6.5)$$

と分解する.

10.6.2 モジュライ

直積型コンパクト化に得られる超対称古典解の周りの摂動は，内部空間 Y で調和モード展開することにより，適当な超重力理論で記述される 4次元時空上の場と見なすことができる．特に，ゼロモードに対する摂動は4次元では質量ゼロの場を与え，なかでもスカラ型のモードはモジュライと呼ばれる．

重力セクター (NS セクター) 重力セクターの摂動 g_{MN} , b_{MN} , ϕ および ψ_M, λ から得られるゼロモードは次のようになる．

- $\phi, b_{\mu\nu}, \lambda \Rightarrow$ Dilaton-axion カイラル超場
 - $b_{\mu\nu} \Rightarrow *db = da: (\phi + ai, \lambda)$
- $g_{\mu\nu}, \psi_\mu \Rightarrow$ 4次元重力超組
 - $(g_{\mu\nu}, \psi_\mu^{2+2*})$
- $g_{\mu i}, b_{\mu i}, \psi_\mu^{6+6*}, \psi_i^{2+2*} \Rightarrow$ no massless field
 - $g_{\mu i}, b_{\mu i} \in \mathcal{H}^{1,0}: h^{1,0} = 0.$
- $g_{ij}, b_{ij}, \psi_{i,j} \& \text{cc} \Rightarrow$ Complex moduli カイラル超場 $\times h^{2,1}$
 - $g_{ij} \Rightarrow g_{i\bar{k}\bar{l}} = \bar{z}^k (\bar{\chi}_k)_{i\bar{k}\bar{l}} = g_{ij} G^{j\bar{m}} \Omega_{\bar{m}\bar{k}\bar{l}} \in \mathcal{H}^{1,2}$
 - $b_{ij} \in \mathcal{H}^{2,0}: h^{2,0} = 0.$
- $g_{i\bar{j}}, b_{i\bar{j}}, \psi_{i,\bar{j}} \Rightarrow$ Kähler moduli カイラル超場 $\times h^{1,1}$
 - $g_{i\bar{j}}, b_{i\bar{j}} \in \mathcal{H}^{1,1} \Rightarrow ig_{i\bar{j}} + b_{i\bar{j}} = t^a \omega_a$

ゲージセクター E_8 の随伴表現の $SU(3) \times E_6$ に関する上記の分解に対応する $E_8 \times E_8$ の随伴表現の $SU(3) \times E_6 \times E_8$ に関する分解を次のような添え字で表す：

$$a : (\mathbf{1}, \mathbf{78}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{248}), \quad (10.6.6a)$$

$$ix : (\mathbf{3}, \mathbf{27}, \mathbf{1}), \quad \bar{i}\bar{x} : (\mathbf{3}^*, \mathbf{27}^*, \mathbf{1}), \quad i\bar{j} : (\mathbf{8}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \quad (10.6.6b)$$

また，コンパクト化により

$$SO(9,1) \supset SO(3,1) \times SO(6) \quad (10.6.7)$$

に対応して、10次元スピノールは

$$16 = (2, 1) + (2^*, 1) + (2, 3) + (2, 3^*) \quad (10.6.8)$$

と分解する。これより、ゲージセクターの摂動

$$\begin{aligned} a_{M,X} (M = \mu, i, \bar{i}; X = a, ix, \bar{i}\bar{x}, i\bar{j}), \\ \partial_\mu \partial^\mu a = -\mathcal{D}_p \mathcal{D}^p a; \quad \mathcal{D}_p = \nabla_p - i[A_p, *] \end{aligned}$$

のゼロモード

$$\mathcal{D}_p \mathcal{D}^p a = 0$$

は次のようになる：

- $a_{\mu,X}, \chi \Rightarrow$ ゲージ超場
 - $a_{\mu,a}$: X_4 上の $E_6 \times E_8$ ゲージ場
 - $a_{\mu,X}$ ($X \neq a$): no massless mode
- $a_{i,X}, \chi \Rightarrow$ カイラル超場
 - $a_{i,a} \in \mathcal{H}^{1,0}$: $h^{1,0} = 0$
 - $a_{i,jx} \Rightarrow a_{i\bar{i}\bar{m}x} = a_{i,jx} G^{j\bar{k}} \Omega_{\bar{k}\bar{l}\bar{m}} \in \mathcal{H}^{1,2}$: $h^{2,1} \times \mathbf{27}(E_6)$.
 - $a_{i,\bar{j}\bar{x}} \in \mathcal{H}^{1,1}$: $h^{1,1} \times \mathbf{27}^*(E_6)$.
 - $a_{i,j\bar{k}} \in H^1(\text{End } T)$: $\dim(H^1(\text{End } T))$ (E_6 singlet).
- $a_{\bar{i},\bar{X}} \Rightarrow a_{i,X}$ の複素共役

世代数 以上の質量ゼロモードの解析より、ゲージ場と結合する質量ゼロフェルミオンの世代数 $N_g = |N_{\mathbf{27}} - N_{\mathbf{27}^*}|$ は

$$N_g = |h^{2,1} - h^{1,1}| = \frac{1}{2} \chi(Y_6) \quad (10.6.9)$$

となる。

Cohomology group	basis
$H^{(1,1)}$	$w_a \quad a = 1, \dots, h^{(1,1)}$
$H^{(0)} \oplus H^{(1,1)}$	$w_A = (1, w_a) \quad A = 0, \dots, h^{(1,1)}$
$H^{(2,2)}$	$\tilde{w}^a \quad a = 1, \dots, h^{(1,1)}$
$H^{(2,1)}$	$\chi_k \quad k = 1, \dots, h^{(2,1)}$
$H^{(3)}$	$(\alpha_K, \beta^K) \quad K = 0, \dots, h^{(2,1)}$

表 22: Basis of harmonic forms in a Calabi–Yau manifold.

10.7 10次元超重力理論の4次元有効理論：直積型 Calabi-Yau コンパクト化

10.7.1 モジュライ自由度

10次元超重力論・超弦理論に含まれるゼロ質量ボゾン場は、次の2つに分類される。

- 1) 重力セクター： g_{MN}, B_{MN}, Φ （すべてに共通）
- 2) ゲージセクター：
 - i) I型理論：非可換ゲージ場 A_M
 - ii) II型理論： $\{C_p\}$ (RR-form 場)

これらのうち、重力セクターはすべての理論に共通で、CY コンパクト化におけるゼロモードは次の2種類のモジュライを生み出す (Candelas, Horowitz, Strominger, Witten 1985[67]; Candelas P, de la Ossa XC 1991[65])。

- 1) 複素モジュライ + dilaton-axion： $h^{2,1} + 1$ コの chiral 場
- 2) Kähler モジュライ： $h^{1,1}$ コの chiral 場

一方、ゲージセクターから得られるモジュライの構造は、I型とII型で大きく異なり、また、4次元超重力理論における超組とこれらモジュライの対応も異なる。

10.7.2 複素モジュライ

複素構造の変形 複素構造の変形は, \dot{J} により記述され, 次の条件を満たす:

$$\dot{J}J + J\dot{J} = 0, \quad N'_J(\dot{J}) = 0. \quad (10.7.1)$$

これらの条件は次のように書き換えられる:

$$\dot{J} = I + \bar{I}; \quad I = I^a_{\bar{b}} \partial_a \otimes d\bar{z}^b \in \mathcal{T}^{1,0} \otimes \mathcal{A}^{0,1}, \quad (10.7.2a)$$

$$(i + J)\bar{\partial}I = 0. \quad (10.7.2b)$$

また, 無限小変換 $X = (Z + \bar{Z})/2$ ($Z \in \mathcal{T}^{1,0}(M)$) に対して,

$$\mathcal{L}_X J = 2i(\bar{\partial}Z - \partial\bar{Z}) \Leftrightarrow \delta_X I = 2i\bar{\partial}Z. \quad (10.7.3)$$

以上より, 正則ベクトル場の層 Θ の散布層分解

$$0 \rightarrow \Theta \rightarrow \mathcal{T}^{1,0} \rightarrow \mathcal{T}^{1,0} \otimes \mathcal{A}^{0,1} \rightarrow \mathcal{T}^{1,0} \otimes \mathcal{A}^{0,2} \rightarrow \dots \quad (10.7.4)$$

において, 複素構造の変形自由度は1次の Dolbeault コホモロジー群 $H^1_{\bar{\partial}}(M, \mathcal{T}^{1,0})$ と一致する. これは Dolbeault の定理より, 層係数コホモロジー群 $H^1(M, \Theta)$ と同型となる.

Calabi-Yau 多様体では, 標準線バンドルの大域断面 Ω を用いると, 同型対応

$$X = X^a \partial_a \in \Gamma_U(\Theta) \mapsto \omega = X^a \Omega_{abc} dz^b \wedge dz^c \in \Gamma_U(\Omega^2) \quad (10.7.5)$$

が存在するので,

$$H^1(M, \Theta) \cong H^1(M, \Omega^2) \cong H^{2,1}_{\bar{\partial}}(M) \quad (10.7.6)$$

となる.

Kähler ポテンシャル CY_6 の複素構造を \hat{J} , 対応する Kähler 形式を J , \hat{J} から決まる正則3形式を $\Omega(\hat{J})$, 複素モジュライのパラメーターを z^a とすると, 次の小平の公式が成り立つ:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z^a} = k_a(z) \Omega + \chi_a \in \mathcal{H}^{3,0} \oplus \mathcal{H}^{2,1}. \quad (10.7.7)$$

ここで, χ_a は複素構造の変形と

$$\chi_{aij\bar{k}} = -\frac{1}{2} \Omega_{ij} \bar{l} \frac{\partial g_{\bar{k}l}}{\partial z^a} \quad (10.7.8)$$

の関係にある。これより、モジュライ空間の計量

$$\begin{aligned} G_{a\bar{b}}\delta z^a\delta z^{\bar{b}} &:= \frac{1}{4V}\int_Y d\text{vol}(Y)g^{i\bar{j}}g^{k\bar{l}}\delta g_{ik}\delta g_{j\bar{l}} \\ &= -\frac{i}{V\|\Omega\|^2}\delta z^a\delta z^{\bar{b}}\int_Y \chi_a\wedge\bar{\chi}_{\bar{b}} \end{aligned} \quad (10.7.9)$$

は

$$G_{a\bar{b}} = -\frac{\int_Y \chi_a\wedge\bar{\chi}_{\bar{b}}}{\int_Y \Omega\wedge\bar{\Omega}} = \partial_a\bar{\partial}_{\bar{b}}\mathcal{K}(z,\bar{z}) \quad (10.7.10)$$

となる。ここで、

$$\mathcal{K} = -\log\left(i\int_Y \Omega\wedge\bar{\Omega}\right) \quad (10.7.11)$$

は複素モジュライに対する Kähler ポテンシャルである。

つぎに、 (A^a, B_b) ($a, b = 0, \dots, h^{2,1}$) を $H_3(Y, \mathbb{Z})$ の基底、 (α_a, β^b) をその双対基底とする：

$$\int_{A^b} \alpha_a = \int_Y \alpha_a\wedge\beta^b = \delta_a^b, \quad \int_{B_a} \beta_b = \int_Y \beta^b\wedge\alpha_a = -\delta_a^b. \quad (10.7.12)$$

いま、

$$z^a := \int_{A^a} \Omega, \quad \mathcal{G}_a := \int_{B_a} \Omega \quad (10.7.13)$$

とおくと、 z^a は複素構造モジュライ空間の (済次) 複素座標となり、 \mathcal{G}_a は \hat{J} で決まる z^a の関数となる：

$$\Omega = z^a\alpha_a - \mathcal{G}_a(z)\beta^a. \quad (10.7.14)$$

小平の関係式より、 \mathcal{G}_a は 2 次の済次正則関数を用いて

$$\mathcal{G}_a = \partial_a\mathcal{G}, \quad \mathcal{G}(\lambda z) = \lambda^2\mathcal{G}(z) \quad (10.7.15)$$

と書けることが示される。

$$e^{-\mathcal{K}} = -i(z^a\bar{\partial}_a\bar{\mathcal{G}} - \bar{z}^a\partial_a\mathcal{G}) \quad (10.7.16)$$

が導かれる。

超ポテンシャル フラックスがない場合、II型理論ではこのポテンシャルは存在しない。

一方、ヘテロ型理論の場合、ゲージ超組のゼロモード $a_{\bar{i},\bar{j}\bar{x}}(x, y)$, $\lambda_{\bar{i},\bar{j}\bar{x}}(x, y)$ を $\mathcal{H}^{2,1}(Y)$ の基底 $\chi_a(y)$ で

$$a_{\bar{i},\bar{j}\bar{x}}(x, y) = \frac{1}{2} \sigma_{\bar{x}}^a(x) \chi_{a\,k\bar{l}\bar{i}}(y) \bar{\Omega}_{\bar{j}}^{kl}(y), \quad (10.7.17a)$$

$$\lambda_{\bar{i},\bar{j}\bar{x}}(x, y) = \frac{1}{2} \lambda_{\bar{x}}^a(x) \chi_{a\,k\bar{l}\bar{i}}(y) \bar{\Omega}_{\bar{j}}^{kl}(y), \quad (10.7.17b)$$

$$(10.7.17c)$$

と展開し、10次元理論の湯川結合項

$$\int d^6y \operatorname{Tr}_v (\bar{\lambda} \Gamma^m [A_m, \lambda]) \quad (10.7.18)$$

に代入すると、

$$d^{\bar{x}\bar{y}\bar{z}} \bar{\lambda}_{\bar{x}}^a \lambda_{\bar{y}}^b \sigma_{\bar{z}}^c \kappa_{abc}, \quad (10.7.19)$$

$$\kappa_{abc} = - \int_Y \Omega \wedge \chi_a^i \wedge \chi_b^j \wedge \chi_c^k \Omega_{ijk} \quad (10.7.20)$$

を得る (Strominger A, Witten E 1985[360])。ここで、

$$\chi_a^i = \frac{1}{2\|\Omega\|^2} \bar{\Omega}^{ijk} \chi_{aj\bar{k}\bar{l}} dx^{\bar{l}} = \chi_{a\bar{j}}^i dx^{\bar{j}}. \quad (10.7.21)$$

この湯川結合係数は、うえの前ポテンシャル \mathcal{G} を用いて

$$\kappa_{abc} = -\partial_a \partial_b \partial_c \mathcal{G} \quad (10.7.22)$$

と表される。したがって、 $\mathcal{H}^{2,1}$ セクターの超ポテンシャルは

$$W(z, \sigma) = \frac{\sigma^a \sigma^b \sigma^c}{3!} \partial_a \partial_b \partial_c \mathcal{G}(z) \quad (10.7.23)$$

10.7.3 Kähler モジュライ

Kähler 変形 Einstein 計量の変形は、次の条件をみたす2階対称テンソル $h = \delta g$ により記述される (全体的なスケールを含む共形変形を除く) :

$$\nabla^2 h_{mn} + 2R_m^p n^q h_{pq} = 0, \quad \nabla^m h_{mn} = 0, \quad h_m^m = 0. \quad (10.7.24)$$

一方, 特に h が Kähler 計量の変形するとき, h は

$$h = {}^T J h J \quad (10.7.25)$$

を満たし,

$$\psi_{mn} = h_{ml} J^l{}_n \quad (10.7.26)$$

とおくと,

$$\psi_{mn} = -\psi_{nm} \in \mathcal{A}^{1,1}(Y), \quad J^{mn} \psi_{mn} = 0 \quad (10.7.27)$$

すなわち primitive (1,1) 形式となる. これを上記の条件に代入すると, Kähler 多様体に対して

$$\nabla J = 0, \quad (10.7.28)$$

$$R_{abpd} J^p{}_c = -R_{abc p} J^p{}_d \quad (10.7.29)$$

が成り立つことより,

$$\begin{aligned} \Delta \psi_{mn} &= (\Delta h_{np}) J^p{}_n = -2R_{mrps} h^{rs} J^p{}_n = 2R_{mrnp} h^{rs} J^p{}_s \\ &= -2R_m{}^r{}_n{}^p \psi_{rp} = -R_{mn}{}^{pq} \psi_{pq}. \end{aligned} \quad (10.7.30)$$

よって,

$$(d\delta + \delta d)\psi = -\Delta \psi - \frac{1}{2} \mathcal{R} \psi + \frac{2s}{n} \psi = \frac{2s}{n} \psi. \quad (10.7.31)$$

を得る. ここで s はスカラー曲率, n は実次元である. したがって, 特に, Calabi-Yau 多様体に対しては, 変形の自由度は, 調和的 primitive (1,1) 形式の自由度となる. Hodge 理論よりこれは, $h^{1,1} - 1$ と一致する (全体のスケール変形を加えると $h^{1,1}$).

Kähler ポテンシャル $\rho, \sigma, \tau \in \mathcal{H}^{1,1}$ に対して,

$$G(\rho, \sigma) := \frac{1}{2V} \int_Y \rho \wedge * \sigma, \quad (10.7.32a)$$

$$\kappa(\rho, \sigma, \tau) := \int_Y \rho \wedge \sigma \wedge \tau \quad (10.7.32b)$$

とおく. さらに, $e_A (A = 1, \dots, h^{1,1})$ を $H^2(Y, \mathbb{Z})$ の基底として,

$$J + iB = w^A e_A; \quad w^A = v^A + i b^A \quad (10.7.33)$$

により Kähler モジュライ空間の複素座標 w^A を導入する. このとき, Y の位相構造のみで決まる w の正則関数

$$P(w) = \frac{1}{3!} \kappa_{ABC} w^A w^B w^C : \quad \kappa_{ABC} = \kappa(e_A, e_B, e_C) \quad (10.7.34)$$

を用いて, モジュライ空間の Kähler 計量は

$$G_{A\bar{B}} = \partial_A \bar{\partial}_{\bar{B}} \mathcal{K}'(w, \bar{w}), \quad (10.7.35)$$

$$\mathcal{K}' = -\log(\kappa(J, J, J)) = -\log P(w) \quad (10.7.36)$$

と表される.

注:

- 値としては, $\kappa(J, J, J) = 3V$ である.
- $\{e_A\}$ の Poincare 双対にあたる $H_4(Y, \mathbb{Z})$ の基底を $\{C_A\}$ とおくと,

$$\kappa(e_A, e_B, e_C) = \#(C_A, C_B, C_C) : \text{intersection number} \quad (10.7.37)$$

が成り立つ.

超ポテンシャル: 一般に, 超ポテンシャル (F 項) は Kähler モジュライに依存しない. また, ゼロフラックスの II 型理論では, 超ポテンシャルはゼロとなる.

一方, ヘテロ型理論の場合, ゲージ超組のゼロモード $a_{i, \bar{j}\bar{x}}(x, y)$, $\lambda_{i, \bar{j}\bar{x}}(x, y)$ を $\mathcal{H}^{1,1}(Y)$ の基底 $e_{A\bar{i}\bar{j}}(y)$ で

$$a_{i, \bar{j}\bar{x}}(x, y) = \phi_{\bar{x}}^A(x) e_{A\bar{i}\bar{j}}(y), \quad (10.7.38a)$$

$$\lambda_{i, \bar{j}\bar{x}}(x, y) = \lambda_{\bar{x}}^A(x) e_{A\bar{i}\bar{j}}(y), \quad (10.7.38b)$$

と展開し, 10次元理論の湯川結合項

$$\int d^6 y \text{Tr}_v (\bar{\lambda} \Gamma^m [A_m, \lambda]) \quad (10.7.39)$$

に代入すると,

$$d^{\bar{x}\bar{y}\bar{z}} \bar{\lambda}_{\bar{x}}^A \lambda_{\bar{y}}^B \sigma_{\bar{z}}^C \kappa_{ABC} \quad (10.7.40)$$

を得る. したがって, ゲージセクターでの超ポテンシャル $W(\phi)$ は,

$$W(\phi) = d^{\bar{x}\bar{y}\bar{z}} \phi_{\bar{x}}^A \phi_{\bar{y}}^B \phi_{\bar{z}}^C \kappa_{ABC} \quad (10.7.41)$$

で与えられる. このポテンシャルはゲージ群と Y の位相のみにより決まり, 複素構造や Kähler モジュライに依存しない.

非線り込み定理: 超ポテンシャルは, 摂動論の範囲では, σ -モデル量子補正を受けない (Witten E 1986 [389]).

10.7.4 IIA 理論

- RR セクター

$$C_{[1]}(x, y) = C_{[1]}^0(x), \quad (10.7.42a)$$

$$C_{[3]}(x, y) = C_{[1]}^a(x)\omega_a(y) + \xi^K(x)\alpha_K(y) - \tilde{\xi}_K(x)\beta^K(y). \quad (10.7.42b)$$

- 超組

- 重力超組: $(g_{\mu\nu}, \psi_\mu^{(+)}, \psi_\mu^{(-)}, C_{[1]}^0)$
- ベクトル超組 (Kahler モジュライ): $(C_{[1]}^a, \psi^{a(-)}, \psi^{a(+)}, w^a = b^a + iv^a) (a = 1, \dots, h^{1,1})$
- ハイパー超組 (複素モジュライ): $(\psi^{k(+)}, z^k, \psi^{k(-)}, \xi^k + i\tilde{\xi}_k) (k = 1, \dots, h^{2,1})$
- テンソル超組: $(\lambda^{(-)}, \phi + ia, \lambda^{(+)}, \xi^0 + i\tilde{\xi}_0) (*db = da)$

gravity multiplet	1	$(g_{\mu\nu}, C_1^0)$
vector multiplets	$h^{(1,1)}$	(C_1^a, v^a, b^a)
hypermultiplets	$h^{(2,1)}$	$(z^k, \xi^k, \tilde{\xi}_k)$
tensor multiplet	1	$(B_2, \phi, \xi^0, \tilde{\xi}_0)$

10.7.5 IIB 型理論

- RR セクター

$$C_{[0]}(x, y) = C_{[0]}(x), \quad (10.7.43a)$$

$$C_{[2]}(x, y) = C_{[2]}(x) + c^a(x)\omega_a(y), \quad (10.7.43b)$$

$$C_{[4]}(x, y) = V_{[1]}^K(x)\alpha_K(y) + \rho_a(x)\tilde{\omega}^a(y). \quad (10.7.43c)$$

- IIB 型理論

- 重力超組: $(g_{\mu\nu}, \psi_\mu^{(1)}, \psi_\mu^{(2)}, V_{[1]}^0)$

目次へ

- ベクトル超組 (複素モジュライ) : $(V_{[1]}^k, \psi^{k(2)}, \psi^{k(1)}, z^k)$ ($k = 1, \dots, h^{2,1}$)
- ハイパー超組 (Kählerモジュライ) : $(\psi^{a(1)}, w^a = b^a + iv^a, \psi^{a(2)}, c^a + i\rho^a)$ ($a = 1, \dots, h^{1,1}$)
- テンソル超組 : $(\lambda^{(1)}, \phi + ia, \lambda^{(2)}, C_0 + ic)$ ($*dC_2 = dc, *db = da$)

gravity multiplet	1	$(g_{\mu\nu}, V_1^0)$
vector multiplets	$h^{(2,1)}$	(V_1^k, z^k)
hypermultiplets	$h^{(1,1)}$	(v^a, b^a, c^a, ρ_a)
tensor multiplet	1	(B_2, C_2, ϕ, C_0)

注 $N = 2$ SUSY での massless 超組は

- hypermultiplet : $(-\frac{1}{2}, 0^2, \frac{1}{2})$
- vector multiplet : $(-1, -\frac{1}{2}^2, 0) + (0, \frac{1}{2}^2, 1)$
- supergravity multiplet : $(-2, -\frac{3}{2}^2, -1) + (1, \frac{3}{2}^2, 2)$

[目次へ](#)

10.8 *10次元 IIA 理論のオービフォールドコンパクト化

[目次へ](#)

10.9 10次元 IIB 理論のフラックスコンパクト化

10.9.1 IIB 理論での解

基本場

$$g_{\mu\nu}, \quad \tau = C_0 + ie^{-\phi}, \quad H_3, \quad (10.9.1)$$

$$F_1 = dC_0, \quad F_3 = dC_2 - C_0 H_3, \quad F_5 = *F_5 = dC_4 - H_3 \wedge C_2, \quad (10.9.2)$$

$$\Gamma^{11}\lambda = -\lambda, \quad \Gamma^{11}\psi_M = \psi_M \quad (10.9.3)$$

以下、

$$G_3 := \tau H_3 - dC_2 = ie^{-\phi} H_3 - F_3 \quad (10.9.4)$$

とおく。

超対称変換

$$\delta\lambda = \left[\not{\partial}\phi - \frac{1}{2}\sigma_3 \left(\not{H} - ie^\phi \not{F}_{[3]}\sigma_2 \right) - e^\phi \not{F}_{[1]}i\sigma_2 \right] \epsilon, \quad (10.9.5a)$$

$$\begin{aligned} \delta\psi_M &= \nabla_M \epsilon - \frac{1}{4} \not{H}_M \sigma_3 \epsilon + \frac{e^\phi}{8} \not{F}_{[3]} \Gamma_M \sigma_1 \epsilon \\ &\quad + e^\phi \left(\frac{1}{8} \not{F}_{[1]} + \frac{1}{16} \not{F}_{[5]} \right) \Gamma_M i\sigma_2 \epsilon. \end{aligned} \quad (10.9.5b)$$

ここで、

$$\nabla_M = \partial_M + \frac{1}{4} \omega_{ABM} \Gamma^{AB}, \quad \not{F}_{[n]} = \frac{1}{n} F_{M_1 \dots M_n} \Gamma^{M_1 \dots M_n}. \quad (10.9.6)$$

【定理 10.7 (IIB 理論の超対称 CCY フラックスコンパクト化解)】 G を 4次元極大対称時空 X_4 , すなわち $E^{3,1}$, dS^4 , adS^4 のいずれかの等長変換群とする. このとき, G で不変な IIB 理論のコンパクト化 $M = X_4 \times Y_6$ に対応する配位は, 次のように表される:

- 計量とディラトン

$$ds^2 = A(y)^2 ds_2(X_4) + B(y)^2 ds_2(Y_6), \quad (10.9.7)$$

$$\phi = \phi(y). \quad (10.9.8)$$

- フラックス

$$C_0 = C_0(y), \quad G_{[3]} = \frac{1}{3!} G_{lmn}(y) dy^l \wedge dy^m \wedge dy^n \quad (10.9.9a)$$

$$\tilde{F}_{[5]} = \left(\frac{A}{B}\right)^4 (1 + *)V_m(y) dy^m \wedge \mathbf{v}(X_4) \quad (10.9.9b)$$

この条件に加えて, $G_{[3]}$ フラックスに対する ISD 条件

$$*_Y G_{[3]} = iG_{[3]} \Leftrightarrow *_Y H = -e^\phi F_3, \quad *_Y F_3 = e^{-\phi} H \quad (10.9.10)$$

を満たす超対称解が存在するための必要十分条件は,

- X_4 が Minkowski 時空, Y_6 が Calabi-Yau 多様体
- $\phi = C_0 = \text{const}$
- Y_6 の $SU(3)$ 構造に関して,

$$H^{(1)} \equiv -\frac{i}{36} H^{ijk} \Omega_{ijk} = 0, \quad H_i^{(3)} \equiv \frac{1}{4} H_{imn} J^{mn} = 0. \quad (10.9.11)$$

このとき,

$$A(y) = h(y)^{-1/4}, \quad B(y) = h(y)^{1/4}, \quad V_m(y) = -\partial_m h(y) \quad (10.9.12)$$

$$\Delta_Y h = -\frac{g_s}{2} (G_3 \cdot \bar{G}_3)_Y. \quad (10.9.13)$$

解を不変にする独立な超対称変換の数は, $H \neq 0$ のとき 4 個 ($N = 1$), $H = F = 0$ のとき 8 個 ($N = 2$) となる. □

Proof. まず,

$$\mathbb{H} = B^{-3}\hat{\mathbb{H}}, \quad \mathbb{F}_3 = -i\hat{\gamma}_7 e^{-\phi} B^{-3}\hat{\mathbb{H}}. \quad (10.9.14)$$

より,

$$\delta\lambda = B^{-1}\hat{\gamma}^m (\partial_m\phi - e^\phi\partial_m C_0 i\sigma_2\hat{\gamma}_7)\epsilon - \frac{1}{2B^3}\hat{\gamma}_7\hat{\mathbb{H}}\sigma_3(1 - \hat{\gamma}_7\sigma_2)\epsilon. \quad (10.9.15)$$

ここで,

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{k!}\hat{\gamma}^{m_1\cdots m_k}Q_{m_1\cdots m_k}. \quad (10.9.16)$$

次に, $A = A(y), B = B(y)$ として,

$$\tilde{\omega}_{ab} = \omega_{ab}(X) + 2A^{-1}D_{[b}A\theta_{a]}, \quad (10.9.17a)$$

$$\tilde{\omega}^a{}_p = B^{-1}\hat{D}_p A\theta^a - A^{-1}D^a B\theta_p, \quad (10.9.17b)$$

$$\tilde{\omega}_{pq} = \omega^p{}_q(Y) + 2B^{-1}D_{[q}B\theta_{p]} \quad (10.9.17c)$$

および

$$\mathbb{F}_5 = \frac{i}{B^5}V_m\hat{\gamma}^m(1 - \Gamma_{11}) \quad (10.9.18)$$

より

$$\begin{aligned} \delta\psi_\mu &= \nabla_\mu^X\epsilon + \frac{1}{2B}\hat{\gamma}^m\gamma_\mu \left(\partial_m A\gamma_5 + \frac{e^\phi A}{4}\partial_\mu C_0 i\sigma_2 - e^\phi \frac{A}{4B^4}V_m\sigma_2 \right)\epsilon \\ &\quad + \frac{A}{8B^3}\gamma_5\gamma_\mu\hat{\mathbb{F}}_3\sigma_1\epsilon, \end{aligned} \quad (10.9.19a)$$

$$\begin{aligned} \delta\psi_m &= B^{-1/2}\nabla_m^Y(B^{1/2}\epsilon) + \frac{e^\phi}{8}\hat{\rho}C_0\hat{\gamma}_m i\sigma_2\epsilon - \frac{1}{2B} \left(\partial_n B + \frac{e^\phi}{4B^3}V_m\sigma_2\hat{\gamma}_7 \right)\hat{\gamma}^n\hat{\gamma}_m\epsilon \\ &\quad + \frac{1}{8B^2}\sigma^3 \left[\hat{\mathbb{H}}\hat{\gamma}_m(\sigma_2\hat{\gamma}_7 - 1) - 2\hat{\mathbb{H}}_m + \hat{\mathbb{H}}\hat{\gamma}_m \right]\epsilon. \end{aligned} \quad (10.9.19b)$$

ここで,

$$\hat{\mathbb{H}}\hat{\gamma}_m + \hat{\gamma}_m\hat{\mathbb{H}} = 2\hat{\mathbb{H}}_m \Rightarrow -2\hat{\mathbb{H}}_m + \hat{\mathbb{H}}\hat{\gamma}_m = -\hat{\gamma}_m\hat{\mathbb{H}}. \quad (10.9.20)$$

より,

$$A = h^{-1/4}(y), \quad B = h^{1/4}(y), \quad V_m = -\partial_m h(y), \quad (10.9.21a)$$

$$C_0 = \phi = 0 \quad (10.9.21b)$$

と取れば(この仮定は, 場の方程式を考慮すると定理の仮定より導かれる),

Killing スピノール方程式は

$$\delta\lambda = -\frac{1}{2h^{3/4}}\hat{\gamma}_7\sigma_3(1 + \hat{\gamma}_7\sigma_2)\hat{H}\epsilon = 0, \quad (10.9.22a)$$

$$\delta\psi_\mu = \nabla_\mu^X\epsilon + \frac{1}{8h}\gamma_5\gamma_\mu\hat{F}_3\sigma_1\epsilon = 0, \quad (10.9.22b)$$

$$\delta\psi_m = h^{-1/8}\nabla_m^Y(h^{1/8}\epsilon) + \frac{1}{8\sqrt{h}}\left[\hat{H}\hat{\gamma}_m(\sigma_2\hat{\gamma}_7 - 1) - \hat{\gamma}_m\hat{H}\right]\epsilon = 0. \quad (10.9.22c)$$

ここで、一般に、解に対する対称性の要請より、Killing スピノールは

$$\epsilon = T(\epsilon_1, \epsilon_2) \quad \epsilon_i = \zeta_+^{(i)}(x) \otimes \eta_+^{(i)}(y) + \zeta_-^{(i)}(x) \otimes \eta_-^{(i)}(y) \quad (10.9.23)$$

の形をしていると仮定して良い。ここで、 $\zeta_-^{(i)} = (\zeta_+^{(i)})^c$, $\eta_-^{(i)} = (\eta_+^{(i)})^c$ 。これを第2式に代入すると、

$$\nabla_\mu^X\zeta_+^{(1)} \otimes \eta_+^{(1)}(y) + \frac{1}{8h}\gamma_\mu\zeta_-^{(2)}(x) \otimes \hat{F}_3\eta_-^{(2)} = 0 \quad (10.9.24)$$

および、この式で (1) \leftrightarrow (2) と入れ替えた式が得られる。これらの式が恒等的に成り立つための必要十分条件は、

$$\nabla_\mu^X\zeta_+^{(1)} = p\gamma_\mu\zeta_-^{(2)}, \quad \nabla_\mu^X\zeta_+^{(2)} = q\gamma_\mu\zeta_-^{(1)}, \quad (10.9.25a)$$

$$p\eta_+^{(1)} + \frac{1}{8h}\hat{F}_3\eta_-^{(2)} = 0, \quad q\eta_+^{(2)} + \frac{1}{8h}\hat{F}_3\eta_-^{(1)} = 0 \quad (10.9.25b)$$

となる。特に、最初の式の整合性条件より、

$$[\nabla_\mu^X, \nabla_\nu^X]\zeta_+^{(1)} = -2pq^*\gamma_{\mu\nu}\zeta_+^{(1)} = \frac{1}{4}R_{\mu\nu ab}\gamma^{ab}\zeta_+^{(1)} \quad (10.9.26)$$

および、この式で (1) \leftrightarrow (2)、 $p \leftrightarrow q$ と入れ替えた式が得られる。

$p = 0, q \neq 0$ とすると、 $\hat{H}\eta^{(2)} = 0, \hat{H}\eta^{(1)} \neq 0$ となるが、これは $\delta\lambda = 0$ の式と整合的でない。同様に、 $p \neq 0, q = 0$ も許されない。したがって、 (p, q) の値として、次の2つのケースが考えられる。

- 1) $pq^* \neq 0$: このとき、 $\hat{H}\eta_{\pm}^{(i)} \neq 0$ となるので、 $\delta\lambda = 0$ より、 $\zeta_+^{(2)} \propto \zeta_+^{(1)}$ が得られる。このとき、 $\eta^{(i)}$ の rescaling により、 $\zeta^{(1)} = \zeta^{(2)} = \zeta$ 、 $q = p$ とおくことができる。すると、 $\delta\lambda = 0$ は

$$\hat{H}(1 - \hat{\gamma}_7\sigma_2)\epsilon = 0 \Leftrightarrow \hat{H}(\eta_+^{(1)} + i\eta_+^{(2)}) = 0 \quad (10.9.27)$$

と同値。このとき、(10.9.25b) より

$$p(\eta_+^{(1)} + i\eta_+^{(2)}) = -\frac{1}{8h}\hat{F}_3(i\eta_-^{(1)} + \eta_-^{(2)}) \propto \hat{H}(\eta_+^{(1)} + i\eta_+^{(2)})^c = 0. \quad (10.9.28)$$

よって、 $\eta^{(1)} = -i\eta^{(2)} = \eta$ とおくことができる。このとき、(10.9.25b) および $\delta\psi_m = 0$ は、 $\tilde{\eta} = h^{1/4}\eta$ として、

$$p\eta_+ = \frac{i}{8h}\hat{F}_3\eta_- = \frac{1}{8h}e^{-\phi}\hat{H}\eta_-, \quad (10.9.29a)$$

$$\nabla_m^Y \tilde{\eta}_+ = p \frac{e^\phi}{8\sqrt{h}} \hat{\gamma}_m \tilde{\eta}_- \equiv f \hat{\gamma}_m \tilde{\eta}_-. \quad (10.9.29b)$$

p は常に正の実数に変換できる。この第2式の整合性より、

$$[\nabla_m^Y, \nabla_n^Y] \tilde{\eta}_+ = 2f^2 \hat{\gamma}_{mn} \tilde{\eta}_+ + 2\nabla_{[m}^Y f \hat{\gamma}_{n]} \tilde{\eta}_- = \frac{1}{4} \hat{R}_{mnpq} \hat{\gamma}^{pq} \tilde{\eta}_+ \quad (10.9.30)$$

が要求されるが、これが成り立つのは、 $\nabla_m f = 0$ 、すなわち h が定数のときのみ。これは $A = B = \text{const}$ および $H = F_3 = 0$ を要求するので、フラックスの存在する場合の解とはならない。

2) $p = q = 0$: このとき、 $\delta\psi_\mu = 0$ は

$$\nabla_\mu^X \zeta^{(i)} = 0, \quad \hat{H}\eta^{(i)} = 0 \quad (10.9.31)$$

で、 $\delta\lambda = 0$ は自動的に成り立つ。さらに $\hat{H}\hat{\gamma}_m\eta^{(i)} = 0$ が成り立つと $H = 0$ となるので、 $H \neq 0$ のとき、残る方程式 $\delta\psi_m = 0$ は、

$$\zeta^{(1)} = \zeta^{(2)} = \zeta, \quad (10.9.32a)$$

$$\nabla_m^Y(\eta_+^{(1)} + i\eta_+^{(2)}) = \frac{1}{4\sqrt{h}}\hat{H}\hat{\gamma}_m(\eta_+^{(1)} + i\eta_+^{(2)}), \quad (10.9.32b)$$

$$\nabla_m^Y(\eta_+^{(1)} - i\eta_+^{(2)}) = 0 \quad (10.9.32c)$$

と同値。いま、 $\eta^{(1)} - i\eta^{(2)} = 2\eta$ とおくと、 η は Y に積分可能な $SU(3)$ 構造 $(\hat{g}_{mn}(y), J, \Omega)$ を与え、 Y_6 は Calabi-Yau となる。特に、第 3 の方程式の整合性より、

$$\hat{H}\eta = 0, \quad R_{mnpq}\hat{\gamma}^{pq}\eta_+ = 0 \Rightarrow R_{mn} = 0, \quad \text{Im}(H^{(1)}) = H^{(3)} = 0. \quad (10.9.33)$$

また、 $\eta^{(1)} + i\eta^{(2)} = 2\eta'$ とおくと、

$$\hat{H}\eta' = 0 \Rightarrow \eta'_+ = s\eta_+ + t_i\hat{\gamma}^i\eta_-, \quad H_{ij}^{(6)}q^j = 0. \quad (10.9.34)$$

さらに、 $\nabla_m^Y\eta'$ に対する式より、 $\nabla_m s = 0$ かつ

$$\nabla_j t_i = \frac{is}{16\sqrt{h}}H_{ji}^{(6)}, \quad \nabla_{\bar{j}} t_i = -\frac{1}{64\sqrt{h}}t^{\bar{k}}\bar{\Omega}_{\bar{j}\bar{k}}{}^l H_{li}^{(6)}. \quad (10.9.35)$$

一般には、これらの方程式は解を持たない。このとき、 $\eta' = 0$ 。すなわち、 $(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}) = (1, i)\eta$ が解になる。 η は定数倍を除いて一意的なので、Killing スピノールの数は 4 個、すなわち $N = 1$ SUSY.

なお、 $H = F = 0$ なら一般には条件が $\nabla_m\eta^{(i)} = 0$ のみとなるので、Killing スピノールの数は $4 \times 2 = 8$ 個、すなわち $N = 2$ SUSY.. Q.E.D.

10.9.2 ワープ

仮定

• 計量

$$ds^2(M) = A(x, y)^2 ds^2(X_4) + B(x, y)^2 ds^2(Y_6), \quad (10.9.36)$$

• 場

$$\tau \equiv C_0 + i e^{-\Phi} = i g_s^{-1} (= \text{const}), \quad (10.9.37a)$$

$$G_3 \equiv i g_s^{-1} H_3 - F_3 = \frac{1}{3!} G_{pqr}(y) dy^p \wedge dy^q \wedge dy^r, \quad (10.9.37b)$$

$$*_Y G_3 = \epsilon i G_3 \quad (\epsilon = \pm 1), \quad (10.9.37c)$$

$$\tilde{F}_5 = (1 \pm *) V_p dy^p \wedge \mathbf{v}(X_4) = V \wedge \mathbf{v}(X_4) \mp A^{-4} B^4 \mathbf{v}(Y_6). \quad (10.9.37d)$$

場の方程式 自明でない方程式は

$$dG_3 = 0, \quad (10.9.38a)$$

$$\nabla \cdot G_3 = *d * G_3 = -i G_3 \cdot \tilde{F}_5, \quad (10.9.38b)$$

$$d\tilde{F}_5 = H_3 \wedge F_3, \quad (10.9.38c)$$

$$R_{MN} = \frac{g_s}{4} \left[\text{Re}(G_{MPQ} G_N^{*PQ}) - \frac{1}{2} G_3 \cdot G_3^* g_{MN} \right] + \frac{1}{96} \tilde{F}_{NP_1 \dots P_4} \tilde{F}_{MQ_1 \dots Q_4} \quad (10.9.38d)$$

一般解 G_3 は Y_6 上の閉 ISD 3 形式なので, y にのみ依存し, (10.9.38b) は

$$(V \mp \epsilon d_y(A^4)) \cdot G_3 = 0 \quad (10.9.39)$$

を与える. ここで, $d_y = dy^p \partial_p$. これより, $G_3 \neq 0$ なら

$$V = \pm \epsilon d_y(A^4), \quad (10.9.40)$$

したがって, (10.9.38c) は次の 2 式と同値となる.

$$\partial_\mu (A^{-4} B^4 \partial_p(A^4)) = 0, \quad (10.9.41a)$$

$$(\hat{D} \cdot (A^{-4} B^4 \hat{D}(A^4)))_Y = -\frac{g_s}{2} (G_3 \cdot \bar{G}_3)_Y, \quad (10.9.41b)$$

次に, これらの第 1 式と Einstein 方程式の \tilde{R}_{ap} 成分

$$0 = AB \tilde{R}_{ap} = 3 \left[-\frac{D_a \hat{D}_p A}{A} + \frac{\hat{D}_p A D_a(AB)}{A^2 B} \right] + 5 \left[-\frac{\hat{D}_p D_a B}{B} + \frac{D_a B \hat{D}_p(AB)}{AB^2} \right] \quad (10.9.42)$$

より, $D_a \hat{D}_p \ln(AB) = 0$ が得られるので, $g(X_4) \rightarrow a(x)g(X_4)$, $g(Y_6) \rightarrow b(y)g(Y_6)$ により

$$A = h(x, y)^{-1/4}, \quad B = h(x, y)^{1/4} \quad (10.9.43)$$

と置くことができる。対応して, \tilde{F}_5 と (10.9.41b) は

$$\tilde{F}_5 = \pm \epsilon (1 \pm *) d(h^{-1}) \wedge \mathbf{v}(X_4), \quad (10.9.44)$$

$$\Delta_Y h = -\frac{g_s}{2} (G_3 \cdot \bar{G}_3)_Y. \quad (10.9.45)$$

よって, Einstein 方程式は

$$h R_{\mu\nu}(X_4) - D_\mu D_\nu h + \frac{1}{4} g_{\mu\nu}(X_4) \Delta_X h = 0, \quad (10.9.46a)$$

$$\partial_\mu \partial_p h = 0, \quad (10.9.46b)$$

$$R_{pq}(Y_6) - \frac{1}{4} g_{pq}(Y_6) \Delta_X h = 0. \quad (10.9.46c)$$

この第2式より直ちに,

$$h(x, y) = h_0(x) + h_1(y). \quad (10.9.47)$$

さらに, $h_1 \neq 0$ とすると, 残りの方程式は

$$R_{\mu\nu}(X_4) = 0, \quad (10.9.48a)$$

$$D_\mu D_\nu h_0 = \lambda g_{\mu\nu}(X_4), \quad (10.9.48b)$$

$$R_{pq}(Y_6) = \lambda g_{pq}(Y_6). \quad (10.9.48c)$$

ここで, $(Dh_0)^2 \neq 0$ なら X_4 が局所平坦となることが示される。

以上より, 任意の Ricci 平坦な 4 次元空間 X_4 , 任意のコンパクト Einstein 空間 Y_6 とその上の実調和 3 形式が与えられると, (一般に超対称な) IIB 型超重力理論の CY フラックスコンパクト化解が得られる。ただし, この解は $G_3 \neq 0$ なら必ずワープしており, しかもワープ因子 h は必ず特異点をもつ。また, X_4 が平坦な場合には, この任意の解 $h = h_1(y)$ に対し, $h = h_1(y) + a_\mu x^\mu$ 型の解が存在する [Kodama H, Uzawa K 2006[284]]。

References

- Kodama H, Uzawa K : jhep 0507, 061 (2005)

目次へ

” Moduli Instability in Warped Compactifications of the Type IIB Supergravity”

- Kodama H, Uzawa K: jhep 0603m 053 (2006)

”Comments on the four-dimensional effective theory for warped compactification”

10.9.3 Conifold 型解

References

- Candelas P, de la Ossa XC: NPB342, 246-268 (1990)
” Comments on conifolds”

(1) $\text{adS}^5 \times S^5$

【例 10.8 ($\text{adS}^5 \times S^5$)】

$$\begin{aligned} ds^2(M) &= ds^2(\text{adS}^5) + L^2 ds^2(S^5) \\ &= h^{-1/2} ds^2(E^{3,1}) + h^{1/2} (dr^2 + r^2 ds^2(S^5)), \end{aligned} \quad (10.9.49a)$$

$$h = \frac{L^4}{r^4}, \quad (10.9.49b)$$

$$F_5 = \frac{4}{L^4} (1 + *) r^3 dr \wedge \boldsymbol{\nu}(E^{3,1}), \quad (10.9.49c)$$

$$H_3 = F_3 = 0, \quad \phi = C_0 = 0. \quad (10.9.49d)$$

超対称性: 16kis _____ □

【演習問題 10.9 ($E^{1,3} \times E^6$ へのワープしたコンパクト化と見なしたときの、超対称性カウント)】 $\text{adS}^5 \times S^5$ が 16 個の Killing スピノールを持つことを示せ。 _____ □

Answer. Killing 方程式は、

$$\delta\lambda = 0, \quad (10.9.50a)$$

$$\delta\psi_M = \nabla_M \epsilon + \frac{1}{6} F_5 \Gamma_M i \sigma_2 \epsilon = 0. \quad (10.9.50b)$$

ここで、 $h = e^{-4A}$ とおき、10次元のガンマ行列を、 $E^{3,1}$ のガンマ行列 γ^μ と E^6 のガンマ行列 $\hat{\gamma}^m$ を用いて、

$$\Gamma^\mu = e^{-A} \gamma^\mu \otimes 1 \quad (\mu = 0, \dots, 3), \quad \Gamma^m = e^A \gamma_5 \otimes \hat{\gamma}^m \quad (10.9.51)$$

と表すと、

$$F_5 = - * F_5 \Gamma_* = 4ie^A \hat{\partial} A (1 - \Gamma_*) \quad (10.9.52)$$

よって、

$$\delta\psi_\mu = \partial_\mu\epsilon + \frac{1}{2}e^{2A}\gamma_\mu\hat{\rho}A(\gamma_5 - \sigma_2)\epsilon, \quad (10.9.53a)$$

$$\delta\psi_m = e^{A/2}\partial_m(e^{-A/2}\epsilon) + \frac{1}{2}\hat{\rho}A\hat{\gamma}_m(1 - \gamma_5\sigma_2)\epsilon \quad (10.9.53b)$$

Killing スピノールは、 $\Gamma_*\epsilon = \epsilon$ より、 $E^{3,1}$ のスピノール $\zeta_\pm^{(i)}(x)$ および E^6 のスピノール $\eta_\pm^{(i)}(y)$ を用いて

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \zeta_+^{(1)}(x) \otimes \eta_+^{(1)}(y) + \text{cc} \\ \zeta_+^{(2)}(x) \otimes \eta_+^{(2)}(y) + \text{cc} \end{pmatrix} \quad (10.9.54)$$

と表される。このとき、

$$(\delta\psi_\mu)^{(1)} = \partial_\mu\zeta_+^{(1)} \otimes \eta_+^{(1)} + \frac{1}{2}e^{2A}(-\gamma_\mu\zeta_-^{(1)} \otimes \hat{\rho}A\eta_-^{(1)} + i\gamma_\mu\zeta_-^{(2)} \otimes \hat{\rho}A\eta_-^{(2)}) + \text{cc} \quad (10.9.55)$$

より、 p, q を定数として、

$$\partial_\mu\zeta_+^{(1)} = p\gamma_\mu\zeta_-^{(1)} + q\gamma_\mu\zeta_-^{(2)} \quad (10.9.56)$$

これを $\delta\psi_\mu^{(1)}$ に代入すると、

$$\gamma_\mu\zeta_-^{(1)} \otimes \left(p\eta_+^{(1)} - \frac{1}{2}e^{2A}\hat{\rho}A\eta_-^{(1)} \right) + \gamma_\mu\zeta_-^{(2)} \otimes \left(q\eta_+^{(1)} - \frac{i}{2}e^{2A}\hat{\rho}A\eta_-^{(2)} \right) = 0 \quad (10.9.57)$$

よって、 $\zeta_-^{(2)} \propto \zeta_-^{(1)}$ 。これより、 $\eta_\pm^{(i)}$ のスケール変換により、 $\zeta_+^{(1)} = \zeta_+^{(2)} = \zeta_+$ 、 $p + q \Rightarrow p$ とおいて良い。すると、

$$p\eta_+^{(1)} = \frac{1}{2}e^{2A}\hat{\rho}A(\eta_-^{(1)} + i\eta_-^{(2)}). \quad (10.9.58)$$

$$\partial_\mu\zeta_+ = p\gamma_\mu\zeta_-, \quad \partial_\mu\zeta_- = \bar{p}\gamma_\mu\zeta_+. \quad (10.9.59)$$

この2番目の式より、

$$0 = [\partial_\mu, \partial_\nu]\zeta_+ = -2|p|^2\gamma_{\mu\nu}\zeta_- \Rightarrow p = 0. \quad (10.9.60)$$

よって、

$$\delta\psi_\mu = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu\epsilon = 0, \quad (\gamma_5\sigma_2 - 1)\epsilon = 0, \quad (10.9.61a)$$

$$\delta\psi_m = 0 \Leftrightarrow \partial_m(e^{-A/2}\epsilon) = 0. \quad (10.9.61b)$$

目次へ

ここで、

$$(\gamma_5 \sigma_2 - 1)\epsilon = 0 \Leftrightarrow \eta_+^{(2)} = i\eta_+^{(1)}. \quad (10.9.62)$$

よって、Killing 方程式の一般解は、

$$\epsilon = \zeta_+^0 \otimes \eta_+^0 e^{A/2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \text{cc}. \quad (10.9.63)$$

ここで、 ζ_+^0 と η_+^0 は、それぞれ、 $E^{3,1}$ および E^6 の定数左巻きスピノール。
よって、独立な Killing スピノールの数は 16 個。 Q.E.D.

(2) Conifold 解

【例 10.10 (Conifold)】 (Candelas P, de la Ossa XC 1990[66]) 代数多様体

$$\sum_{A=1}^4 w_A^2 = 0 \quad (10.9.64)$$

は $S^2 \times S^3$ 上のコーンの構造をもつ。これに Kahler 計量を入れた 6 次元空間である, Einstein 空間 $T^{11} (\cong S^2 \times S^3)$ 上のコーン空間へのコンパクト化.

$$ds^2(M) = h^{-1/2} ds^2(E^{3,1}) + h^{1/2} (dr^2 + r^2 ds^2(\mathbb{T}^{11})), \quad (10.9.65a)$$

$$ds^2(\mathbb{T}^{11}) = \frac{1}{9} \left(d\psi + \sum_{i=1}^2 \cos \theta_i d\phi_i \right)^2 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^2 (d\theta_i^2 + \sin^2 \theta_i d\phi_i^2) \quad (10.9.65b)$$

$$h = \frac{9g_s M^2}{8r^4} \left[\ln \left(\frac{r}{r_0} \right) + \frac{1}{4} \right] + \frac{C}{r^4}, \quad (10.9.65c)$$

$$F_5 = (1 + *)d(h^{-1}) \wedge \mathbf{v}(E^{3,1}), \quad (10.9.65d)$$

$$H_3 = -g_s *_Y F_3 = \frac{3g_s M}{2r} dr \wedge [\mathbf{v}(S_1^2) - \mathbf{v}(S_2^2)], \quad (10.9.65e)$$

$$\phi = C_0 = 0. \quad (10.9.65f)$$

超対称性は $N = 1$. _____ □

【演習問題 10.11 (Conifold の $SU(3)$ 構造)】 Conifold に対する (J, Ω) を具体的に決定し、 $H^{(1)} = H^{(3)} = 0$ となることを示せ。 _____ □

Answer. 1) 位相構造:

$$Y : w \cdot w \equiv w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = 0 \quad (10.9.66)$$

において、

$$w^A = x^A + iy^A \quad (10.9.67)$$

とおくと、

$$\Sigma(\rho) := Y \cap S^7 = \{w \in \mathbb{C}^4 \mid w \cdot \bar{w} = \rho^2\} \quad (10.9.68)$$

は

$$\Sigma(\rho) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \mid x \cdot x = y \cdot y = \rho^2/2, \quad x \cdot y = 0\} \quad (10.9.69)$$

よって、 $\Sigma(\rho)$ は S^3 の単位接ベクトルバンドルと同型。 S^3 は平行化可能なので、

$$\Sigma(\rho) \cong UT(S^3) \cong S^3 \times S^2. \quad (10.9.70)$$

対応して、 Y_6 は $S^3 \times S^2$ 上の錐体。

- 2) **Ricci 曲率:** 計量 g_{mn} が、適当な r の関数 $r(\rho)$ と $\Sigma = \Sigma(1)$ の計量 $g(\Sigma)$ を用いて

$$g(Y) = dr^2 + r^2g(\Sigma) \quad (10.9.71)$$

と表されるとすると、Ricci 曲率は

$$R_{ij}(Y) = R_{ij}(\Sigma) - 4g_{ij}(\Sigma), \quad R_{rm}(Y) = 0 \quad (m = r, i). \quad (10.9.72)$$

よって、 Y が Ricci 平坦となるための必要十分条件は

$$R_{mn}(Y) = 0 \Leftrightarrow R_{ij}(\Sigma) = 4g_{ij}(\Sigma). \quad (10.9.73)$$

- 3) **Einstein 空間 $T^{p,q}$:** S^3 を $SU(2)$ と同一視し、

$$S^3 \times S^3 \ni (L, R), \quad L = U(\theta_1, \phi_1, \psi_1), R = U(\theta_2, \phi_2, \psi_2) \in SU(2) \quad (10.9.74)$$

により、座標付けする。ここで、

$$U(\theta, \phi, \psi) = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2); \quad (10.9.75)$$

$$a = \cos \frac{\theta}{2} e^{i(\psi+\phi)/2}, \quad b = \sin \frac{\theta}{2} e^{i(\psi-\phi)/2} \quad (10.9.76)$$

いま、 p, q を互いに素な正の整数として、 $U(1) \ni \Theta = [e^{i\lambda}, e^{-i\lambda}]$ の $S^3 \times S^3$ への自由な作用を

$$(L, R) \rightarrow (L\Theta^q, R\Theta^{-p}) \quad (10.9.77)$$

により定義する。 k, l を $kp + lq = 1$ となる整数の組として、 ψ_1, ψ_2 の代わりに、新たな座標 ψ, χ を

$$\psi_1 = k\psi - q\chi, \quad \psi_2 = l\psi + p\chi \quad (10.9.78)$$

により導入すると、 $U(1)$ 作用は、

$$\psi \rightarrow \psi, \quad \chi \rightarrow \chi - \lambda \quad (10.9.79)$$

で与えられる。

この作用による商空間を $T^{p,q} = (S^3 \times S^3)/U(1)_{p,q}$ と表記すると、一般に、

$$\begin{aligned} \alpha^2(d\psi_1 + \cos\theta_1 d\phi_1)^2 + \frac{1}{\alpha^2}(d\psi_2 + \cos\theta_2 d\phi_2)^2 &= \left(\frac{p^2}{\alpha^2} + q^2\alpha^2 \right) \\ &\left[d\chi + \frac{(-\alpha^2 kq + lp/\alpha^2)d\psi - q\cos\theta_1 d\psi_1 + p\cos\theta_2 d\phi_2}{p^2/\alpha^2 + q^2\alpha^2} \right]^2 \\ &+ \frac{1}{p^2/\alpha^2 + q^2\alpha^2} (d\psi + p\cos\theta_1 d\phi_1 + q\cos\theta_2 d\phi_2)^2. \end{aligned} \quad (10.9.80)$$

より、 A, B, C を任意の正定数とし、 $T^{1,1}$ 上に自然な計量

$$ds^2 = A^2 ds^2(S_1^2) + B^2 ds^2(S_2^2) + C^2 (d\psi + p\cos\theta_1 d\phi_1 + q\cos\theta_2 d\phi_2)^2 \quad (10.9.81)$$

が誘導される。ここで、 $ds^2(S_i^2) = d\theta_i^2 + \sin^2\theta_i d\phi_i^2$ 。この5次元多様体が Einstein 空間となるための必要十分条件は

$$\frac{2A^2 - p^2 C^2}{2A^4} = \frac{2B^2 - q^2 C^2}{2B^4} = \frac{C^2(q^2 A^4 + p^2 B^4)}{2A^4 B^4} = \lambda \Rightarrow R_n^m = \lambda \delta_n^m. \quad (10.9.82)$$

4) **Conifold** $\cong C(T^{1,1})$: 複素座標 w_A から $M(2, \mathbb{C})$ への写像を

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{A=1}^4 w_A \sigma_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} w_3 + iw_4 & w_1 - iw_2 \\ w_1 + iw_2 & -w_3 + iw_4 \end{pmatrix} \quad (10.9.83)$$

$$(\sigma_A) = (\sigma_i, i\text{id}_2) \quad (10.9.84)$$

により定義すると、

$$\det W = 0, \quad \text{Tr}(W^\dagger W) = w \cdot \bar{w} = \rho^2 \quad (10.9.85)$$

が成り立つ。

いま、

$$Z \equiv W/\rho: \quad \det Z = 0, \quad \text{Tr}(Z^\dagger Z) = 1 \Leftrightarrow Z \in \Sigma \quad (10.9.86)$$

において、

$$Z = LZ_0R^\dagger; \quad L, R \in \text{SU}(2), \quad Z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.9.87)$$

は、 $S^3 \times S^3$ から Σ への全射を与え、 $Z = Z_0$ の逆像は $U(1)$ と一致：

$$LZ_0R^\dagger = Z_0 \Leftrightarrow L = R = \Theta = \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda} \end{pmatrix} \quad (10.9.88)$$

これより、conifold は $T^{1,1}$ 上の錐と同相：

$$\text{Conifold} \cong C(S^3 \times S^3 / U(1)_{1,1}) = C(T^{1,1}). \quad (10.9.89)$$

特に、適当な動径座標 $r = r(\rho)$ を用いて

$$ds^2 = dr^2 + r^2 g(T^{1,1}) \quad (10.9.90)$$

により定義される計量が conifold の Ricci 平坦計量を与える。ここで、

$$g(T^{1,1}) = \frac{1}{9} (d\psi + \cos \theta_1 d\phi_1 + \cos \theta_2 d\phi_2)^2 + \frac{1}{6} (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\phi_1^2) + \frac{1}{6} (d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_2 d\phi_2^2) \quad (10.9.91)$$

$$R_n^m(T^{1,1}) = 4\delta_n^m. \quad (10.9.92)$$

- 5) ケーラー構造: つぎに、この計量が $r(\rho)$ を適当に選ぶとケーラー計量となることを示す。この計量は $SU(2) \times SU(2)$ 不変なので、ケーラーポテンシャル K も同じ対称性を持つとすると、 $K = K(\rho^2)$. 対応するケーラー計量は

$$g_{i\bar{j}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} K = (\partial_i \partial_{\bar{j}} (\rho^2)) K' + \partial_i (\rho^2) \partial_{\bar{j}} (\rho^2) K''. \quad (10.9.93)$$

ρ^2 が

$$\rho^2 = \text{Tr}(W^\dagger W) \quad (10.9.94)$$

で与えられることを用いて、 $g_{i\bar{j}}$ を計算すると、

$$\sqrt{g} = \det(g_{i\bar{j}}) = \frac{(\gamma^3)'}{3\rho^2 |w_4|^2}; \quad \gamma = \rho^2 K'. \quad (10.9.95)$$

ケーラー多様体の Ricci 曲率は

$$R_{i\bar{j}} = -\partial_i \partial_{\bar{j}} \ln \sqrt{g} \quad (10.9.96)$$

で与えられるので、Ricci 平坦となる条件は

$$R_{i\bar{j}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{g} = f(z) \overline{f(z)} \Leftrightarrow (\gamma^3)' = 2c^3 \rho^2. \quad (10.9.97)$$

目次へ

この解は

$$K = \frac{3}{2}c\rho^{4/3} = \frac{1}{2}r^2. \quad (10.9.98)$$

対応する計量は、

$$\begin{aligned} ds^2 &= 2K' \sum_A dw_A d\bar{w}_A + 2K'' \left| \sum_A \bar{w}_A dw_A \right|^2 \\ &= \frac{4}{3}c\rho^{-2/3} d\rho^2 + 2c\rho^{4/3} \left\{ \text{Tr}(dZ^\dagger dZ) - \frac{1}{3} |\text{Tr}(Z^\dagger dZ)|^2 \right\} \\ &= dr^2 + r^2 g(T^{1,1}). \end{aligned} \quad (10.9.99)$$

6) SU(3) 構造: ケーラー形式 $\omega = J_*$ は

$$\begin{aligned}
 J_* &= i\partial\bar{\partial}K \\
 &= K' \sum_A dw_A \wedge d\bar{w}_A + K'' \left(\sum_A \bar{w}_A dw_A \right) \wedge \left(\sum_A w_A d\bar{w}_A \right) \\
 &= \frac{1}{3} r dr \wedge (d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2) - \frac{\rho^2}{6} (\mathbf{v}(S_1^2) + \mathbf{v}(S_2^2)).
 \end{aligned} \tag{10.9.100}$$

これより、 $dJ_* = 0$.

正則 3 形式 Ω は

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \sqrt{\frac{2}{3}} (2c)^{3/2} \frac{1}{w_4} dw_1 \wedge dw_2 \wedge dw_3 \\
 &= -\frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{3}} (2c)^{2/3} r^2 e^{i\psi} \left(2\frac{dr}{r} + i f_1 \right) \wedge (d\theta_1 - i \sin\theta_1 d\phi_1) \wedge (d\theta_2 - i \sin\theta_2 d\phi_2).
 \end{aligned} \tag{10.9.101}$$

ここで、

$$f_1 = d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2. \tag{10.9.102}$$

この 3 形式は $d\Omega = 0$ を満たす。

7) フラックス条件: conifold 解の H フラックスは、 $N = 1$ SUSY のための条件

$$H^{(1)} = -\frac{i}{6} H \cdot \Omega = 0, \quad H^{(3)} = \frac{1}{2} H \cdot J = 0 \tag{10.9.103}$$

を満たす。

Q.E.D.

(3) Klebanov-Strasser 解 (deformed conifold)

【例 10.12 (KS 解)】 (Klebanov IR, Strassler MJ 2000[282]) 変形コニフォールド

$$x^2 + y^2 + v^2 + w^2 = \epsilon^2 \quad (10.9.104)$$

へのコンパクト化.

$$ds^2(M) = h^{-1/2} ds^2(E^{3,1}) + h^{1/2} ds^2(Y_6), \quad (10.9.105a)$$

$$ds^2(Y_6) = \frac{1}{2} \epsilon^{4/3} K(\tau) \left[\frac{1}{3K^3(\tau)} \{d\tau^2 + (g^5)^2\} + \sinh^2\left(\frac{\tau}{2}\right) \{(g^1)^2 + (g^2)^2\} + \cosh^2\left(\frac{\tau}{2}\right) \{(g^3)^2 + (g^4)^2\} \right], \quad (10.9.105b)$$

$$h(x, \tau) = h_0(x) + g_s M^2 \frac{3^{2/3}}{\epsilon^{8/3}} \int_{\tau}^{\infty} du \frac{u \coth u - 1}{\sinh^2 u} \{\sinh(2u) - 2u\}^{1/3}, \quad (10.9.105c)$$

$$F_5 = (1 + *)d(h^{-1}) \wedge \mathbf{v}(E^{3,1}), \quad (10.9.105d)$$

$$B_2 = Mg_s [(1 - F) \tanh^2(\tau/2) g^1 \wedge g^2 + F \coth^2(\tau/2) g^3 \wedge g^4], \quad (10.9.105e)$$

$$H_3 = g_s *_Y F_3 = dB_2, \quad (10.9.105f)$$

$$\phi = C_0 = 0. \quad (10.9.105g)$$

ここで

$$K(\tau) = \frac{[\sinh(2\tau) - 2\tau]^{1/3}}{2^{1/3} \sinh(\tau)}, \quad F = \frac{\sinh \tau - \tau}{2 \sinh \tau}. \quad (10.9.106)$$

また, 基底 $g^1 \sim g^5$ は

$$g^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1 - e^3), \quad g^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^2 - e^4), \quad g^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1 + e^3), \quad (10.9.107)$$

$$g^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^2 + e^4), \quad g^5 = e^5, \quad (10.9.108)$$

$$e^1 \equiv -\sin \theta_1 d\phi_1, \quad e^2 \equiv d\theta_1, \quad e^3 \equiv \cos \psi \sin \theta_2 d\phi_2 - \sin \psi d\theta_2$$

$$e^4 \equiv \sin \psi \sin \theta_2 d\phi_2 + \cos \psi d\theta_2, \quad e^5 \equiv d\psi + \cos \theta_1 d\phi_1 + \cos \theta_2 d\phi_2.$$

この解は $N = 1$ 超対称性をもち, $\tau \rightarrow \infty$ で漸近的に conifold 解に近づく:

$$ds^2(Y_6) \rightarrow dr^2 + r^2 g(\mathbb{T}^{1,1}), \quad r \rightarrow \frac{3^{1/2}}{25^{5/6}} \epsilon^{2/3} e^{\tau/3}. \quad (10.9.109)$$

[目次へ](#)

また、至る所滑らかで、コーン型突起の頂点では

$$ds^2 \simeq \frac{\epsilon^{4/3}}{12^{1/3}} \left[\frac{1}{2}(d\tau^2 + \tau^2 g(S^2)) + g(S^3) \right] \quad (10.9.110)$$

□

[目次へ](#)

10.9.4 超ポテンシャル

II 型超重力理論では, RR フォームフラックスが存在しない直積型コンパクト化はモジュライに対する超ポテンシャルを生み出さない. しかし, フラックス存在すると, 有限なポテンシャルが生じる. (Gukov S, Vafa C, Witten E 2000[232]; Giddings SB, Kachru S, Polchinski J 2002[196])

IIB 型理論において, 計量が

$$ds^2 = e^{-4\phi(x)} ds^2(X_4) + e^{4\phi(x)} ds_2^2(Y_6) \quad (10.9.111)$$

の形をしていて, モジュライ場が次の構成 (対応する $N = 1$ 超組) を持つとする:

- 重力場: $g_{\mu\nu}$
- dilaton-axion 場: $\tau = C_0 + ie^{-\Phi}$
- サイズモジュラス: $\rho = b/\sqrt{2} + ie^{4u}$. ここで,

$$C_{[4]} = a_{[2]} \wedge J \Rightarrow da_{[2]} = e^{-8u} *_X db \quad (10.9.112)$$

- 複素モジュライ: $z^a, a = 1, \dots, h^{2,1}$

このとき, 10 次元作用積分より, τ, ρ に対する作用積分は

$$S = \frac{1}{2\kappa_4^2} \int_X d\text{vol}(X) \left(R(X) - 2 \frac{\nabla\tau \cdot \nabla\bar{\tau}}{|\tau - \bar{\tau}|^2} - 6 \frac{\nabla\rho \cdot \nabla\bar{\rho}}{|\rho - \bar{\rho}|^2} \right) \quad (10.9.113)$$

ここで,

$$\kappa_4^2 = \frac{\kappa_{10}^2}{\text{vol}(Y)} \quad (10.9.114)$$

これは, 次の Kähler ポテンシャルに対応する:

$$\mathcal{K}_1 = -\ln[-i(\tau - \bar{\tau})] - 3\ln[-i(\rho - \bar{\rho})] \quad (10.9.115)$$

超ポテンシャルはゼロである.

一方, 複素構造モジュライに対する Kähler ポテンシャルは, 一般論より,

$$\mathcal{K}_2 = -\ln \left(-i \int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega} \right) \quad (10.9.116)$$

で与えられる。ポテンシャルを求めるため、上記のモジュライ場による表式を10次元作用積分に代入すると、 $G_{[3]}$ を含む項

$$S_G = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_X d\text{vol}(X) \int_Y \frac{1}{\text{Im } \tau} *_Y G_{[3]} \wedge \bar{G}_{[3]} \quad (10.9.117)$$

が残る。ここで、 $G_{[3]}$ をカイラル分解する：

$$G_{[3]} = G_{[3]}^+ + G_{[3]}^-; \quad *_Y G_{[3]}^\pm = \mp i G_{[3]}^\pm, \quad (10.9.118)$$

すると、

$$\alpha_3^+ \wedge \beta_3^+ = 0, \quad \alpha_3^- \wedge \beta_3^- = 0 \quad (10.9.119)$$

より

$$\begin{aligned} *_Y G \wedge \bar{G} &= i(-G^+ + G^-) \wedge (\bar{G}^+ + \bar{G}^-) = -2iG^+ \wedge \bar{G}^+ + iG \wedge \bar{G} \\ &= -2iG^+ \wedge \bar{G}^+ + 2(\text{Im } \tau)H_{[3]} \wedge F_{[3]} \end{aligned} \quad (10.9.120)$$

よって、 S_G は

$$S_G = \int_X d\text{vol}(X) \left[-\mathcal{V} - \int_Y H_{[3]} \wedge F_{[3]} \right] \quad (10.9.121)$$

ここで、第2項は $H_{[3]}$ および $F_{[3]}$ のコホモロジー類のみで決まる位相的項。一方、 \mathcal{V} は

$$\mathcal{V} = -\frac{i}{2\kappa_{10}^2 \text{Im } \tau} \int_Y G_{[3]}^+ \wedge \bar{G}_{[3]}^+ \quad (10.9.122)$$

($\text{Im } \tau = 1/g_s = \text{const}$ を仮定)。

このポテンシャルは、次の超ポテンシャル

$$W = \int_Y G_{[3]} \wedge \Omega \quad (10.9.123)$$

から導かれることを示す。まず、調和3形式が

$$*_Y \Omega = -i\Omega, \quad *_Y \chi_a = i\chi_a \quad (10.9.124)$$

となることに注意する。これより、

$$G_{[3]}^+ = w_0 \Omega + \bar{w}^{\bar{a}} \bar{\chi}_{\bar{a}}; \quad w_0 = \frac{\int_Y G_{[3]} \wedge \bar{\Omega}}{\int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega}}, \quad \bar{w}^{\bar{a}} = G^{\bar{a}b} \frac{\int_Y G_{[3]} \wedge \chi_b}{\int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega}}. \quad (10.9.125)$$

よって,

$$\mathcal{V} = \frac{\int_Y G_{[3]} \wedge \bar{\Omega} \int_Y \bar{G}_{[3]} \wedge \Omega + G^{ab} \int_Y G_{[3]} \wedge \chi_a \int_Y \bar{G}_{[3]} \wedge \bar{\chi}_b}{2(\text{Im } \tau) \kappa_{10}^2 (-i) \int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega}}. \quad (10.9.126)$$

一方, 小平の関係式を考慮すると,

$$\mathcal{K} = -\ln[-i(\tau - \bar{\tau})] - 3\ln[-i(\rho - \bar{\rho})] - \ln[-i \int \Omega \wedge \bar{\Omega}] \quad (10.9.127)$$

に対して,

$$\partial_{\bar{\tau}} \mathcal{K} = \frac{1}{\bar{\tau} - \tau}, \quad \partial_{\bar{\rho}} \mathcal{K} = \frac{3}{\bar{\rho} - \rho}, \quad \partial_a \mathcal{K} = -k_a, \quad (10.9.128)$$

$$G_{\tau\bar{\tau}} = \frac{1}{|\bar{\tau} - \tau|^2}, \quad G_{\rho\bar{\rho}} = \frac{3}{|\bar{\rho} - \rho|^2} \quad (10.9.129)$$

これより,

$$\mathcal{D}_{\bar{\tau}} W = \frac{1}{\bar{\tau} - \tau} \int_Y \bar{G} \wedge \Omega, \quad (10.9.130a)$$

$$\mathcal{D}_{\bar{\rho}} W = \frac{3}{\bar{\rho} - \rho} W, \quad (10.9.130b)$$

$$\mathcal{D}_a W = \int_Y G \wedge \chi_a. \quad (10.9.130c)$$

よって, 超ポテンシャルとポテンシャルの関係式は

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{e^{\mathcal{K}}}{\kappa^2} \left[G^{i\bar{j}} \mathcal{D}_i W \overline{\mathcal{D}_j W} - 3|W|^2 \right] \\ &= \frac{e^{\mathcal{K}}}{\kappa^2} \left[|\bar{\tau} - \tau|^2 |\mathcal{D}_{\bar{\tau}} W|^2 + G^{ab} \mathcal{D}_a W \overline{\mathcal{D}_b W} \right] \\ &= \frac{\int_Y G_{[3]} \wedge \bar{\Omega} \int_Y \bar{G}_{[3]} \wedge \Omega + G^{ab} \int_Y G_{[3]} \wedge \chi_a \int_Y \bar{G}_{[3]} \wedge \bar{\chi}_b}{2(\text{Im } \tau)(2\text{Im } \rho)^3 \kappa^2 (-i) \int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega}} \end{aligned} \quad (10.9.131)$$

10.9.5 基底状態の性質

基底状態では $\mathcal{V} = 0$ より, $G_{[3]}$ は ISD(imaginary self-dual) となる:

$$\mathcal{D}_{\bar{\tau}} W = \mathcal{D}_a W = 0 \Rightarrow G_{[3]}^+ = 0 \Rightarrow *_Y G_{[3]} = iG_{[3]} \text{ ISD} \quad (10.9.132)$$

この条件は,

$$G_{[3]} \in \mathcal{H}^{2,1} \oplus \mathcal{H}^{0,3} \quad (10.9.133)$$

と同等で、複素構造モジュライ (+ dilaton-axion) に対する $h^{2,1} + 1$ 個の拘束条件となるので、一般にそれらの値を完全に決定する。

ただし、超対称性はより強い条件 $\mathcal{D}_i W = 0$ (任意の i) を要求する。今のモデルでは、この条件は、 $\mathcal{D}_\rho W = 0 \Rightarrow W = 0$, したがって、

$$G_{[3]} \in \mathcal{H}^{2,1} \quad (10.9.134)$$

を要求する。

また、この基底状態は、フラックス $G_{[3]}$ に依存するが、超ポテンシャルの形より、正確には $G_{[3]}$ のコホモロジー類にのみ依存する：

$$\int_{A_j} F_3 = 4\pi^2 \alpha' M_j, \quad \int_{B_j} H_3 = -4\pi^2 \alpha' K_j \quad (10.9.135)$$

さらに、弦理論においては、これらの (M_j, K_j) は整数に量子化される。

10.9.6 量子効果

摂動論の範囲では、Kähler モジュライの超ポテンシャルはゼロであるが、非摂動論的效果を考慮すると自明でないポテンシャルが生成される可能性がある。例えば、IIB モデルの F 理論的記述において、1 2次元の時空が 8次元 CY_8 により 4次元にコンパクト化される際に、 CY_8 が算術種数 1 の divisor D を含む場合 ($\chi(D, \mathcal{O}_D) = 1$)、超ポテンシャルにサイズモジュラスに依存した項が加わる：(Witten E 1996 [390])

$$W = W_0(z) + b(z)e^{2\pi i \rho}. \quad (10.9.136)$$

このとき、対応するポテンシャル $V(\rho)$ は、 $\sigma = e^{4u} = \text{Im } \rho$ に関して最小点 ρ_m を持つようになる。この最小点は、 $V(\rho_m) < 0$ より AdS^4 時空を与える (KKLT[272])。また、この基底状態は $N = 1$ 超対称性を保つ。

ここで、真空はフラックスを特徴づける整数値の組 (M_j, N_j) ごとに決まり、宇宙項の値が準連続となる無限個の超対称な真空の集合を与える (ランドスケープ問題)。

10.9.7 FluxComp の問題点

10.9.7.1 ブレーンモデルの問題

- II 型理論では本来、重力セクターしかなく、通常物質場は D ブレーン上にしか存在できない。このため、我々はブレーン上に住む

ことになる.

- 重力を考慮すると, 余次元が3以上のブレーンは特異点となる.
- 特に, ブレーンと反ブレーンが共存すると, 裸の特異点が生じる可能性がある (量子効果?). 例えば, D3-反D3系では

$$h = h_0 + \frac{Q_1}{r^4} - \frac{Q_2}{r^4} \quad (10.9.137)$$

- これらの点を無視しても, 弦理論に基づく高次元モデルで整合的なブレーンワールドモデルは作られていない.
- II型理論では, Kahler モジュライの安定化に非摂動論的量子効果が本質的な役割を果たすが, その高次元における記述が存在しない. また, この安定化を実際実現するモデルは少ない.

10.9.7.2 4次元有効理論

- KKLT系のモデルでは, フラックスによるワープが正確に取り入れられていない.
- 特に, ワープが存在する場合に, 従来の4次元有効理論はそのまま使えない可能性が大きい (Kodama H, Uzawa K 2006[284]).

例えば, IIB型フラックスコンパクト化において

$$ds^2(M) = h^{-1/2}(x, y) ds^2(X_4) + h^{1/2}(x, y) ds^2(Y_6), \quad (10.9.138)$$

$$h = h_0(x) + h_1(y) \quad (10.9.139)$$

型の解が存在するので, $h_0(x)$ に対する有効理論をつくることができる.

$$S_{\text{IIB}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{X_4} d\Omega(X_4) [HR(X_4) + 6\lambda]. \quad (10.9.140)$$

ここで,

$$H(x) = h_0(x) + c; \quad c := V_6^{-1} \int_{Y_6} d\Omega(Y_6) h_1. \quad (10.9.141)$$

これより得られる場の方程式は,

$$R_{\mu\nu}(X_4) = H^{-1} [D_\mu D_\nu H - \lambda g_{\mu\nu}(X_4)], \quad (10.9.142a)$$

$$\Delta_X H = 4\lambda. \quad (10.9.142b)$$

目次へ

この方程式は一般に X の Ricci 平坦性を要求しないので、元の 10 次元理論より弱い理論となっている。すなわち、10 次元理論に対応物のない解を持っている。また、 $\lambda = 0$ のとき、 $ds^2(X_4) = H^{-1}ds^2(\bar{X}_4)$ で定義される計量を用いて、作用積分は

$$S_{\text{IIB}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\bar{X}_4} d\Omega(\bar{X}_4) \left[R(\bar{X}_4) - \frac{3}{2}(\bar{D} \ln H)^2 \right], \quad (10.9.143)$$

と書ける。この作用積分は明らかに変換 $H \rightarrow k/H$ で不変となっている。この不変性も元の 10 次元理論では破れている。

10.10 SU(3) 構造

参考文献

- Gurrieri S, Louis J, Micu A, Waldram D: NPB 654, 61-113 (2003)
“Mirror symmetry in generalized Calabi-Yau compactifications”
- Frey AR, Grana M: prd63 106002 (2003)
“Type IIB solutions with interpolating supersymmetries”
- Grana M, Minasian R, Petrini M, Tomasiello A: jhep0408, 046 (2004)
“Supersymmetric backgrounds from generalized Calabi-Yau manifolds”
- Fianza S, Minasian R, Tomasiello A : cmp254, 40-23 (2005)
“Mirror symmetric SU(3) structure manifolds with NS fluxes”

10.10.1 SU(3) 構造の基本的性質

一般に、6次元多様体 Y 上の SU(3) 構造は次の性質をもつ 2 形式 J と 3 形式 Ω により指定される：

$$J_{pq} = -J_{qp}, \quad J^p{}_q J^q{}_r = -\delta_r^p, \quad (10.10.1a)$$

$$J \wedge \Omega = 0, \quad (10.10.1b)$$

$$J \wedge J \wedge J = \frac{3}{4} i \Omega \wedge \bar{\Omega} = -6\mathbf{v}(Y) \quad (10.10.1c)$$

これらは、さらに次の関係式を満たす：

$$\langle \Omega, \bar{\Omega} \rangle = 8, \quad \langle J, J \rangle = 3, \quad (10.10.2a)$$

$$*\Omega = -i\Omega, \quad *J = -\frac{1}{2} J \wedge J \quad (10.10.2b)$$

10.10.2 固有トーシオン

SU(3) 構造の積分可能性 (Calabi-Yau とのずれ) は, これらと整合的な接続 $\hat{\nabla}$ のトーシオン $T_{mn}{}^r$ を用いて

$$(dJ)_{mnp} = 3T_{[mn}{}^r J_{r|p]}, \quad (10.10.3a)$$

$$(d\Omega)_{mnpq} = 6T_{[mn}{}^r \Omega_{r|pq]} \quad (10.10.3b)$$

と表される.

SU(3) 構造と整合的な別の接続 ∇' に対応するトーシオンを $T'_{mn}{}^r$ に置き換えても, (10.10.3) の左辺は変化しないので, 右辺は, SU(3) 構造と整合的な接続の取り方によらない成分である固有トーシオン T^0 のみが残る:

$$(dJ)_{mnp} = 3T_{[mn}^0{}^r J_{r|p]}, \quad (10.10.4a)$$

$$(d\Omega)_{mnpq} = 6T_{[mn}^0{}^r \Omega_{r|pq]} \quad (10.10.4b)$$

そこで, dJ と $d\Omega$ を次のように分解する. まず, dJ の $(3,0) + (0,3)$ 成分は, dJ が実形式なので, Ω と $\bar{\Omega}$ の実線形和で表される. また, V を実 1 形式として, $(V \wedge J \wedge J)_{abcde} J^{de} J^{bc} = 16V_a$. これより, dJ の $(2,1) + (1,2)$ 成分の primitive な成分を \mathscr{W}_3 とおくと, dJ は

$$dJ = -\frac{3}{2} \text{Im}(\mathscr{W}_1 \bar{\Omega}) + \mathscr{W}_4 \wedge J + \mathscr{W}_3 \quad (10.10.5)$$

と表される. つぎに, $d\Omega$ は一般に, $(3,1) + (2,2)$ という成分をもつが, そのうち $(3,1) = (0,1) \wedge (3,0) = (0,1) \wedge \Omega$. また, $J^2 \wedge J \alpha \Omega \wedge \bar{\Omega}$ より, $(2,2)$ 成分は J^2 に比例する項と primitive な $(2,2)$ 形式 χ_4 の和となるが, χ_4 は適当な $(1,1)$ 形式 \mathscr{W}_2 を用いて $\chi_4 = \mathscr{W}_2 \wedge J$ と表されることが示される. これより, $d\Omega$ は次のように表される:

$$d\Omega = \mathscr{W}_1 J^2 + \mathscr{W}_2 \wedge J + \bar{\mathscr{W}}_5 \wedge \Omega \quad (10.10.6)$$

が得られる. ここで,

- \mathscr{W}_1 : 関数
- \mathscr{W}_2 : 複素 primitive(1,1) 形式
- \mathscr{W}_3 : 実 primitive(2,1) \oplus (1,2) 形式
- $\mathscr{W}_4 = \mathscr{W}_4^{(3)} + \mathscr{W}_4^{(3)}$: 実 1 形式

- \mathcal{W}_5 : 複素 (1, 0) 形式

である [235, 212, 155].

SU(3) 構造はこれらの振る舞いにより次のように特徴付けられる [208, 209] :

- $\mathcal{W}_1 = 0 = \mathcal{W}_2 \Leftrightarrow J$ が複素構造を与える [345, ?].
- $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_4 = 0 \Leftrightarrow dJ = 0$ (シンプレクティック)
- $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_4 = 0 \Leftrightarrow$ Kahler.
- $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_4 = \mathcal{W}_5 = 0 \Leftrightarrow$ Calabi-Yau.

10.10.3 Killing スピノール

SU(3) 構造 (g, J, Ω) が与えられると、SU(3) 不変な Majorana スピノール $\eta = \eta_+ + \eta_-$ ($\gamma_* \eta_{\pm} = \pm \eta_{\pm}, \eta_- = \eta_+^c$) がスケールの自由度を除いて一意的に存在し、

$$\eta^\dagger \eta = 1 \quad (10.10.7)$$

と規格化すると、

$$J_{mn} = -i\eta^\dagger \gamma_{mn} \gamma_* \eta = \mp 2i\eta_{\pm}^\dagger \gamma_{mn} \eta_{\pm}, \quad (10.10.8a)$$

$$\Omega_{mnp} = -u\eta^\dagger \gamma_{mnp} (1 + \gamma_*) \eta = -2i\eta_-^\dagger \gamma_{mnp} \eta_+ \quad (10.10.8b)$$

を満足する。また、Fierz 恒等式より、次の関係が成り立つ :

$$\eta_{\pm} \otimes \eta_{\pm}^\dagger = \frac{1}{8} e^{\mp J}, \quad \eta_+ \otimes \eta_-^\dagger = -\frac{i}{8} \Omega, \quad \eta_- \otimes \eta_+^\dagger = -\frac{i}{8} \bar{\Omega}. \quad (10.10.9)$$

一般に、 $\eta, i\gamma_* \eta, i\gamma_m \eta$ は、6次元多様体の 8次元 Majorana スピノール空間の基底となる。したがって、 η の Levi-Civita 接続に関する共変微分 $D_m \eta$ は、

$$D_m \eta = (\tilde{q}_m + iq_m \gamma_* + iq_{mn} \gamma^n) \eta, \quad \tilde{q}_m, q_m, q_{mn} \in \mathbb{R} \quad (10.10.10)$$

と表される。ここで、 $\eta^\dagger \eta = 1$ より、 $\tilde{q}_m = 0$ となる。これより、概複素構造 J に対応する複素接空間 $T'(Y)$ のエルミート直交基底を ϕ^i とするとき、

$$dJ_* = -iq^l \Omega - \frac{i}{2} \Omega_{ijk} q_l^k \phi^i \wedge \phi^j \wedge \bar{\phi}^l + \text{cc}, \quad (10.10.11a)$$

$$d\Omega = 2iq_{[1} \wedge \Omega - 8iq^{(2,0)} \wedge J_* + 4iq_{\bar{j}i} \phi^i \wedge \bar{\phi}^{\bar{j}} \wedge J_* \quad (10.10.11b)$$

が得られる。これを固有トーシヨンの定義式と比較することにより、

$$q_{ij} = -\frac{i}{8}W_{3,ij} - \frac{1}{8}\Omega_{ijk}\bar{W}_4^k, \quad (10.10.12a)$$

$$q_{i\bar{j}} = -\frac{i}{4}\bar{W}_{2,i\bar{j}} + \frac{1}{4}\bar{W}_1q_{i\bar{j}}, \quad (10.10.12b)$$

$$q_i = \frac{i}{2}(W_5 - W_4)_i \quad (10.10.12c)$$

が得られる。ここで、

$$W_{3,mn} = \frac{1}{2}W_{3,mpq}\Omega^{pq}{}_m. \quad (10.10.13)$$

[右辺の赤字の係数 1/2 は、Grana M et al (2004) の結果と異なる。要チェック]

以上より、 $D_m\eta$ は固有トーシヨンにより表される。

10.11 II型理論での4次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称コンパクト化解の分類

References

- Grana M, Minasianb R, Petrini M, Tomasiello A: jhep0408, 046 (2004)
“Supersymmetric backgrounds from generalized Calabi-Yau manifolds”
- Grana M: PLC 423, 91-158 (2006)
“Flux compactifications in string theory: A comprehensive review”

仮定

- 計量 X_4 を4次元定曲率空間として、

$$ds^2 = e^{2A(y)} ds^2(X_4) + ds^2(Y_6) \quad (10.11.1)$$

- 対称性 すべての場が、 X_4 の等長変換群に作用に対して不変。
- 超対称性 4次元時空 X_4 から見て、 $\mathcal{N} = 1$ 超対称性をもつ。

10.11.1 IIA型

フラックスの構造

$$\begin{aligned} H &= \hat{H}(y), \quad F_0 = \hat{F}_0(y), \quad F_2 = \hat{F}_2(y), \\ F_4 &= -(*_Y \hat{F}_6(y)) e^{4A} \mathbf{v}(X) + \hat{F}_4(y), \quad F_6 = -e^{4A} \mathbf{v}(X) *_Y \hat{F}_4(y) + \hat{F}_6(y), \\ F_8 &= e^{4A} \mathbf{v}(X) \wedge *_Y \hat{F}_2(y), \quad F_{10} = -\hat{F}_0(y) e^{4A} \mathbf{v}(X) \wedge \mathbf{v}(Y). \end{aligned} \quad (10.11.2a)$$

これらのフラックスは、 $SU(3)$ 変換に対する変換性により次のように分解される。まず、 H フラックスは

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\frac{3}{2} \text{Im}(H^{(1)} \bar{\Omega}) + H^{(3)} \wedge J + H^{(6)}, \quad (10.11.3) \\ H^{(1)} &= -\frac{i}{36} H^{ijk} \Omega_{ijk}, \quad H_i^{(3)} = \frac{1}{4} H_{imn} J^{mn}, \quad H_{ij}^{(6)} = H^{kl} \Omega_{kl} \wedge \Omega_{ij} \quad (10.11.4) \end{aligned}$$

つぎに、RR フラックスは

$$F_2^{(1)} = \hat{F}_2 \cdot J, \quad F_{2,k}^{(3)} = \frac{1}{8} \hat{F}^{ij} \Omega_{ijk}, \quad F_4^{(1)} = \frac{1}{8} \hat{F}^{mnpq} J_{mn} J_{pq}, \quad F_6^{(1)} = \frac{1}{6} \hat{F}_6 \cdot J \wedge J \wedge J \quad (10.11.5)$$

とおくと、

$$\hat{F}_2 = \frac{1}{3} F_2^{(1)} J + \text{Re}(F_2^{(3)} \cdot \bar{\Omega}) + F_2^{(8)}, \quad (10.11.6a)$$

$$\hat{F}_4 = \frac{1}{6} F_4^{(1)} J \wedge J + \text{Re}(F_4^{(3)} \wedge \bar{\Omega}) + F_4^{(8)}, \quad (10.11.6b)$$

$$\hat{F}_6 = \frac{1}{6} F_6^{(1)} J \wedge J \wedge J. \quad (10.11.6c)$$

Killing スピノール方程式 ϵ を局所超対称性変換のパラメータ $\epsilon = \mathcal{Q}(\epsilon_1, \epsilon_2)$ として、Killing スピノール方程式は

$$\delta\psi_\mu = \left[D_\mu^X + \frac{1}{2} e^A \hat{\rho} A \gamma_\mu \gamma_5 + \frac{1}{8} e^A e^\phi \hat{F}_{\text{IIA}} \gamma_\mu \sigma_1 \right] \epsilon, \quad (10.11.7a)$$

$$\delta\psi_m = \left[\hat{D}_m + \frac{1}{4} \hat{H}_m \Gamma_{11} + \frac{1}{8} e^\phi \hat{F}_{\text{IIA}} \hat{\gamma}_m \gamma_5 \sigma_1 \right] \epsilon, \quad (10.11.7b)$$

$$\Gamma^M \delta\psi_M - \delta\lambda = \left(\mathcal{D} - \hat{\rho} \phi + \frac{1}{4} \hat{H} \Gamma_{11} \right) \epsilon. \quad (10.11.7c)$$

ここで、 $\hat{\cdot}$ のついた量は Y_6 上の量で、

$$\hat{F}_{\text{IIA}} = \hat{F}_0 - \hat{F}_2 \Gamma_{11} + \hat{F}_4 - \hat{F}_6 \Gamma_{11}. \quad (10.11.8)$$

解に対する対称性の要請より、 $\mathcal{N} = 1$ の場合、Killing スピノールは

$$\epsilon = \zeta_+(x) \otimes \begin{pmatrix} a\eta_+ \\ \bar{b}\eta_- \end{pmatrix} + \zeta_-(x) \otimes \begin{pmatrix} \bar{a}\eta_- \\ b\eta_+ \end{pmatrix} \quad (10.11.9)$$

という構造を持つとしてよい。ここで、 a, b は Y 上の複素関数、 $\zeta_-(x) = \zeta_+(x)^c$ 、 $\eta_-(y) = \eta_+(y)^c$ である。この表式を上記の Killing 方程式に代入すると、 ζ_\pm に対して

$$D_\mu^X \zeta_+ = \frac{p}{2} \gamma_\mu \zeta_- \quad (\bar{p} = p) \quad (10.11.10)$$

これより、

$$[D_\mu^X, D_\nu^X] \zeta_+ = \frac{1}{4} R_{\mu\nu ab} \gamma^{ab} \zeta_+ = -\frac{p^2}{2} \gamma_{\mu\nu} \zeta_+ \quad (10.11.11)$$

よって、

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = -p^2(g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}). \quad (10.11.12)$$

また、 η_{\pm} に対して、

$$\alpha\hat{\rho}A\eta_+ + \frac{i}{4}e^{\phi}F_{A1}\eta_- = -pe^{-A}\alpha^*\eta_-, \quad (10.11.13a)$$

$$\alpha D_m\eta_+ + \left(\partial_m\alpha + \frac{1}{4}\beta\hat{H}_m\right)\eta_+ + \frac{i}{8}e^{\phi}F_{A1}\hat{\gamma}_m\eta_- = 0, \quad (10.11.13b)$$

$$\alpha\hat{D}\eta_+ + \left\{\alpha\hat{\rho}(2A - \phi + \ln\alpha) + \frac{1}{4}\beta\hat{H}\right\}\eta_+ = -\frac{p}{2}e^{-A}\hat{\rho}\eta_-. \quad (10.11.13c)$$

および、これらの方程式で $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha, F_{A1} \rightarrow F_{A2}$ と置き換えた 3 式が得られる。ここで、 α と β は Y_6 上の関数

$$\alpha = a(y) + ib(y), \quad \beta = a(y) - ib(y), \quad (10.11.14)$$

$F_{A1,2}$ は

$$-F_{A1} = \beta^*(\hat{F}_0 + \hat{F}_4) + \alpha^*(\hat{F}_2 + \hat{F}_6), \quad (10.11.15a)$$

$$F_{A12} = \alpha^*(\hat{F}_0 + \hat{F}_4) + \beta^*(\hat{F}_2 + \hat{F}_6) \quad (10.11.15b)$$

以上の式は、 $D_m\eta$ を固有トーシオンにより表し、Weyl スピノール基底 $\eta_{\pm}, \gamma^m\eta_{\pm}$ で展開すると、フラックスおよび固有トーシオンに対する次の代数的方程式系を与える：

$$\delta\psi_m : i(Q_m + R_m)\eta_+ + i(Q_{mn} + R_{mn})\gamma^n\eta_- = 0, \quad (10.11.16a)$$

$$\delta\psi_{\mu} : S\eta_- + (S_m + A_m)\gamma^m\eta_+ = 0, \quad (10.11.16b)$$

$$\delta\lambda : T\eta_- + T_m\gamma^m\eta_+ = 0. \quad (10.11.16c)$$

ここで、 A, Q, T は幾何学と H フラックスのみを含む量、 R と S は RR-flux のみを含む量で、 $p = 0$ 、すなわち X_4 が Minkowski 時空の時、次式で与

えられる :

$$S = \frac{i}{4} e^\phi (\mathbb{F}_{A1} e^{ij})_0 \quad (10.11.17a)$$

$$T = \frac{3}{2} (i\alpha W_1 - \beta H^{(1)}), \quad (10.11.17b)$$

$$A_m = \alpha \partial_m A, \quad (10.11.17c)$$

$$S_m = \frac{1}{4} e^\phi \text{Re} [(\mathbb{F}_{A1} \bar{\mathcal{Q}})_m], \quad (10.11.17d)$$

$$T_m = \alpha \partial_m (2A - \phi + \log \alpha) + \alpha \left[W_{4,m} + \frac{i}{2} J_m^n (W_5 - W_3)_n \right] \\ + \frac{1}{2} \beta J_m^n H_n^{(3)}, \quad (10.11.17e)$$

$$Q_m = -i \partial_m \alpha + \frac{1}{2} \alpha J_m^n (W_5 - W_4)_n + \frac{1}{2} \beta H_m^{(3)}, \quad (10.11.17f)$$

$$R_m = -\frac{i}{8} e^\phi (\bar{\mathcal{Q}} \mathbb{F}_{A1})_m, \quad (10.11.17g)$$

$$Q_{mn} = \text{Re} \left[\frac{1}{2} (\alpha W_1 + 3i\beta H^{(1)}) \bar{P}_{mn} - \frac{1}{4} \Omega_{mnp} (\alpha W_4 + i\beta H^{(3)})^p \right. \\ \left. - \frac{i}{8} (\alpha W_3 + i\beta H^{(6)})_{mn} + \frac{i}{2} \bar{P}_m^p \alpha W_{2,pn} \right], \quad (10.11.17h)$$

$$R_{mn} = \frac{1}{4} e^\phi \text{Re} \left[-(\mathbb{F}_{A1m} e^{ij})_n + (\mathbb{F}_{A1} e^{ij})_{mn} + \frac{1}{2} (\mathbb{F}_{A1} e^{ij})_{(mn)} \right] \quad (10.11.17i)$$

ただし、

$$P_n^m = \frac{1}{2} (\delta_n^m - i J_n^m), \quad (10.11.18a)$$

$$(\mathbb{F}_{A1} e^{ij})_0 = \beta^* (-F_0 + F_4^{(1)}) + i\alpha^* (F_2^{(1)} - F_6^{(1)}), \quad (10.11.18b)$$

$$(\mathbb{F}_{A1} \mathcal{Q})_m = 4\bar{P}_m^n \left(\alpha^* F_2^{(3)} + \beta^* F_4^{(3)} \right)_n, \quad (10.11.18c)$$

$$(\mathcal{Q} \mathbb{F}_{A1})_m = -4\bar{P}_m^n \left(\alpha^* F_2^{(3)} - \beta^* F_4^{(3)} \right)_n, \quad (10.11.18d)$$

$$R_{ij} = -\frac{1}{8} e^\phi \left(g_{ij} \bar{S} - \frac{8}{3} g_{ij} \left(\beta F_4^{(1)} - \alpha^* F_6^{(1)} \right) - 2\alpha^* F_{2,\bar{i}\bar{j}}^{(8)} - 2i\beta \left(\mathbb{F}_{A1}^{(8)} \right)_{ij} \right), \quad (10.11.18e)$$

$$R_{ij} = 0. \quad (10.11.18f)$$

解の分類

A $ab = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{1} & : \mathcal{W}_1 = H_3^{(1)} = 0, \\
& \quad F_0^{(1)} = \mp F_2^{(1)} = F_4^{(1)} = \mp F_6^{(1)}, \\
\mathbf{8} & : \mathcal{W}_2 = F_2^{(8)} = F_4^{(8)} = 0, \\
\mathbf{6} & : \mathcal{W}_3 = \mp *_Y H_3^{(6)}, \\
\mathbf{3} & : \bar{\mathcal{W}}_5 = 2\mathcal{W}_4^{(\bar{3})} = \mp 2iH_3^{(\bar{3})} = \bar{\partial}\phi, \\
& \quad \bar{\partial}A = \bar{\partial}a = \bar{\partial}b = 0
\end{aligned}$$

B $a = be^{i\theta}$ ($e^{i\theta} \neq 1$)

$$\begin{aligned}
\mathbf{1} & : \mathcal{W}_1 = H_3^{(1)} = 0, F_{2n}^{(1)} = 0, \\
\mathbf{8} & : \mathcal{W}_2^+ = e^\phi F_2^{(8)}, \quad \mathcal{W}_2^- = 0, \\
\mathbf{6} & : \mathcal{W}_3 = H_3^{(6)} = 0, \\
\mathbf{3} & : \mathcal{W}_4 = 0, \\
& \quad 2i\bar{\mathcal{W}}_5 = F_2^{(\bar{3})} = -2i\bar{\partial}A = \frac{2i}{3}\bar{\partial}\phi.
\end{aligned}$$

B₀ $a = b$

$$\begin{aligned}
\mathbf{1} & : \mathcal{W}_1 = H_3^{(1)} = 0, F_{2n}^{(1)} = 0, \\
\mathbf{8} & : \mathcal{W}_2^+ = e^\phi(F_2^{(8)} + F_4^{(8)}), \quad \mathcal{W}_2^- = 0, \\
\mathbf{6} & : \mathcal{W}_3 = H_3^{(6)} = 0, \\
\mathbf{3} & : \mathcal{W}_4 = 0, \\
& \quad 2i\bar{\mathcal{W}}_5 = F_2^{(\bar{3})} = -2i\bar{\partial}A = \frac{2i}{3}\bar{\partial}\phi.
\end{aligned}$$

10.11.2 IIB 型

フラックスの構造

$$H = \hat{H}(y), \quad F_1 = \hat{F}_1(y), \quad F_3 = \hat{F}_3(y), \quad (10.11.19)$$

$$\begin{aligned}
F_5 & = -(1 + *) (e^{4A} \mathbf{v}(X_4) \hat{V}(y)) \\
& = -e^{4A} \mathbf{v}(X) \hat{V}(y) + *_Y \hat{V}(y) \\
& = -2e^{4A} \mathbf{v}(X) F_5^{(3)} \cdot J + F_5^{(3)} \wedge J \wedge J.
\end{aligned} \quad (10.11.20)$$

$$\hat{F}_5 = F_5^{(3)} \wedge J \wedge J \Leftrightarrow F_{5i}^{(3)} = \frac{1}{16} F_i^{mnpq} J_{mn} J_{pq}. \quad (10.11.21)$$

また、 \hat{F}_3 フラックスは、 H フラックスと同様に、 $SU(3)$ の既約表現に分解される：

$$\hat{F}_3 = -\frac{3}{2} \text{Im} (F_3^{(1)} \bar{\Omega}) + F_3^{(3)} \wedge J + F_3^{(6)}, \quad (10.11.22)$$

$$F_3^{(1)} = -\frac{i}{36} \hat{F}^{ijk} \Omega_{ijk}, \quad F_{3,i}^{(3)} = \frac{1}{4} \hat{F}_{imn} J^{mn}, \quad F_{3,ij}^{(6)} = \hat{F}_3^{kl} (\Omega)_{kl}. \quad (10.11.23)$$

Killing スピノール方程式 ϵ を局所超対称性変換のパラメータ $\epsilon = {}^T(\epsilon_1, \epsilon_2)$ として、Killing スピノール方程式は

$$\delta\psi_\mu = \left(D_\mu^X + \frac{1}{2} e^A \hat{\rho} A \gamma_\mu \gamma_5 + \frac{1}{8} e^A e^\phi \hat{F}_{\text{IIB}} \gamma_5 \gamma_\mu \right) \epsilon, \quad (10.11.24a)$$

$$\delta\psi_m = \left(\hat{D}_m + \frac{1}{4} \hat{H}_m \sigma^3 + \frac{1}{8} e^\phi \hat{F}_{\text{IIB}} \hat{\gamma}_m \gamma_5 \right) \epsilon, \quad (10.11.24b)$$

$$\Gamma^M \delta\psi_M - \delta\lambda = \left(\not{D} - \not{\rho} \phi - \frac{1}{4} \hat{H} \sigma_3 \right) \epsilon. \quad (10.11.24c)$$

ここで、 $\hat{\cdot}$ のついた量は Y_6 上の量で、

$$\hat{F}_{\text{IIB}} = \hat{F}_1(i\sigma_2) + \hat{F}_3 + \frac{1}{2} \hat{F}_5(i\sigma_2). \quad (10.11.25)$$

解に対する対称性の要請より、 $\mathcal{N} = 1$ の場合、Killing スピノールは

$$\epsilon = \zeta_+(x) \otimes \eta_+(y) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \zeta_-(x) \otimes \eta_-(y) \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix} \quad (10.11.26)$$

という構造を持つとしてよい。ここで、 a, b は Y 上の複素関数、 $\zeta_-(x) = \zeta_+(x)^c$ 、 $\eta_-(y) = \eta_+(y)^c$ である。この表式を上記の Killing 方程式に代入すると、 ζ_\pm に対して

$$D_\mu^X \zeta_+ = \frac{p}{2} \gamma_\mu \zeta_- \quad (\bar{p} = p) \quad (10.11.27)$$

これより、

$$[D_\mu^X, D_\nu^X] \zeta_+ = \frac{1}{4} R_{\mu\nu ab} \gamma^{ab} \zeta_+ = -\frac{p^2}{2} \gamma_{\mu\nu} \zeta_+ \quad (10.11.28)$$

よって、

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = -p^2 (g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda}). \quad (10.11.29)$$

また、 η_{\pm} に対して、

$$\left(\alpha\hat{\phi}A + \frac{i}{4}e^{\phi}\hat{F}_{B1}\right)\eta_+ = -pe^{-A}\beta^*\eta_-, \quad (10.11.30a)$$

$$\alpha D_m\eta_- + \left(\partial_m\alpha - \frac{1}{4}\beta\hat{H}_m - \frac{i}{8}e^{\phi}\hat{F}_{B1}\hat{\gamma}_m\right)\eta_+ = 0, \quad (10.11.30b)$$

$$\alpha\hat{D}\eta_+ + \left\{\alpha\hat{\phi}(2A - \phi + \ln\alpha) - \frac{1}{4}\beta\hat{H}\right\}\eta_+ = -\frac{p}{2}e^{-A}\beta^*\eta_-. \quad (10.11.30c)$$

および、これらの方程式で $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha, F_{B1} \rightarrow F_{B2}$ と置き換えた 3 式が得られる。ここで、 α と β は Y_6 上の関数

$$\alpha = a(y) + ib(y), \quad \beta = a(y) - ib(y), \quad (10.11.31)$$

$F_{B1,2}$ は

$$\hat{F}_{B1} = \alpha\hat{F}_1 - \beta\hat{F}_3 + \alpha\hat{F}_5, \quad (10.11.32a)$$

$$-\hat{F}_{B2} = \beta\hat{F}_1 - \alpha\hat{F}_3 + \beta\hat{F}_5. \quad (10.11.32b)$$

以上の式は、 $D_m\eta$ を固有トーシオンにより表し、Weyl スピノール基底 $\eta_{\pm}, \gamma^m\eta_{\pm}$ で展開すると、フラックスおよび固有トーシオンに対する次の代数的方程式系を与える：

$$\delta\psi_m : i(Q_m + R_m)\eta_+ + i(Q_{mn} + R_{mn})\gamma^n\eta_- = 0, \quad (10.11.33a)$$

$$\delta\psi_{\mu} : S\eta_- + (S_m + A_m)\gamma^m\eta_+ = 0, \quad (10.11.33b)$$

$$\delta\lambda : T\eta_- + T_m\gamma^m\eta_+ = 0. \quad (10.11.33c)$$

ここで、 A, Q, T は幾何学と H フラックスのみを含む量、 R と S は RR-flux のみを含む量で、 $p = 0$ 、すなわち X_4 が Minkowski 時空の時、次式で与

えられる :

$$S = \frac{1}{4}e^\phi (\mathcal{F}_{B1}\mathcal{Q})_0 \quad (10.11.34a)$$

$$T = \frac{3}{2}(\alpha iW_1 + \beta H^{(1)}), \quad (10.11.34b)$$

$$A_m = \alpha \partial_m A, \quad (10.11.34c)$$

$$S_m = \frac{1}{4}e^\phi \text{Re}[(\mathcal{F}_{B1}e^{-iJ})_m], \quad (10.11.34d)$$

$$T_m = \alpha \partial_m (2A - \phi + \log \alpha) + \alpha \left[W_{4,m} + \frac{i}{2}J_m{}^n (W_5 - W_3)_n \right] \\ + \frac{1}{2}\beta J_m{}^n H_n^{(3)}, \quad (10.11.34e)$$

$$Q_m = -i\partial_m \alpha + \frac{1}{2}\alpha J_m{}^n (W_5 - W_4)_n - \frac{1}{2}\beta H_m^{(3)}, \quad (10.11.34f)$$

$$R_m = -\frac{1}{8}e^\phi (e^{-iJ}\mathcal{F}_{B1})_m, \quad (10.11.34g)$$

$$Q_{mn} = \text{Re} \left[\frac{1}{2}(\alpha W_1 - 3i\beta H^{(1)})\bar{P}_{mn} - \frac{1}{4}\Omega_{mnp}(\alpha W_4 - i\beta H^{(3)})^p \right. \\ \left. - \frac{i}{8}(\alpha W_3 - i\beta H^{(6)})_{mn} - \frac{i}{2}\bar{P}_m{}^p \alpha W_{2,pn} \right], \quad (10.11.34h)$$

$$R_{mn} = \frac{1}{4}e^\phi \text{Re} \left[i(\mathcal{F}_{B1m}\mathcal{Q})_n - (\mathcal{F}_{B1}\mathcal{Q})_{mn} - \frac{i}{2}(\mathcal{F}_{B1}\mathcal{Q})_0 g_{mn} \right] \quad (10.11.34i)$$

ただし、

$$P_n{}^m = \frac{1}{2}(\delta_n^m - iJ_n{}^m), \quad (10.11.35a)$$

$$(\mathcal{F}_{B1}\mathcal{Q})_0 = 6i\beta F_3^{(1)}, \quad (10.11.35b)$$

$$(\mathcal{F}_{B1}e^{-iJ})_m = 2\bar{P}_m{}^n \left(\alpha F_1^{(3)} - 2i\beta F_3^{(3)} - 2\alpha F_5^{(3)} \right)_n \quad (10.11.35c)$$

$$(e^{-iJ}\mathcal{F}_{B1})_m = 2iP_m{}^n \left(\alpha F_1^{(3)} - 2i\beta F_3^{(3)} - 2\alpha F_5^{(3)} \right)_n \quad (10.11.35d)$$

$$R_{ij} = -\frac{i}{16}e^\phi \left(\alpha F_1^{(3)k} \Omega_{ijk} - \beta F_{3,ij}^{(6)} + 2\alpha F_5^{(3)k} \Omega_{ijk} \right) \quad (10.11.35e)$$

$$R_{i\bar{j}} = 0. \quad (10.11.35f)$$

解の分類

A $ab = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{1} & : \mathcal{W}_1 = F_3^{(1)} = H_3^{(1)} = 0, \\
\mathbf{8} & : \mathcal{W}_2 = 0, \\
\mathbf{6} & : \mathcal{W}_3 = \pm *_Y H_3^{(6)}, \quad F_3^{(6)} = 0, \\
\mathbf{3} & : \mathcal{W}_5 = 2\mathcal{W}_4^{(\bar{3})} = \mp 2iH_3^{(\bar{3})} = 2\bar{\partial}\phi, \\
& \quad \bar{\partial}A = \bar{\partial}a = \bar{\partial}b = 0
\end{aligned}$$

B $a = \pm ib$

$$\begin{aligned}
\mathbf{1} & : \mathcal{W}_1 = F_3^{(1)} = H_3^{(1)} = 0, \\
\mathbf{8} & : \mathcal{W}_2 = 0, \\
\mathbf{6} & : \mathcal{W}_3 = 0, \quad e^\phi F_3^{(6)} = \mp *_Y H_3^{(6)}, \\
\mathbf{3} & : e^\phi F_5^{(\bar{3})} = \frac{2i}{3}\bar{\mathcal{W}}_5 = i\mathcal{W}_4^{(\bar{3})} = -2i\bar{\partial}A = -4i\bar{\partial}\log a, \\
& \quad \bar{\partial}\phi = 0.
\end{aligned}$$

注：この解において、 $G_3 = F_3 - ie^{-\phi}H$ は ISD で primitive (2, 1) 形式となる：

$$*_Y G_3 = iG_3, \quad G_{(0,3)} = 0. \quad (10.11.36)$$

さらに、 Y_6 の共形変換

$$g_{mn}(y) = e^{-2A}\hat{g}_{mn}(y) \quad (10.11.37)$$

に対して、

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{W}}_1 & = e^{-A}\mathcal{W}_1, \quad \hat{\mathcal{W}}_2 = e^A\mathcal{W}_2, \quad \hat{\mathcal{W}}_3 = e^{2A}\mathcal{W}_3, \\
\hat{\mathcal{W}}_4 & = \mathcal{W}_4 + 2dA, \quad \hat{\mathcal{W}}_5 = \mathcal{W}_5 + 3\bar{\partial}A
\end{aligned} \quad (10.11.38)$$

より、 $\hat{\mathcal{W}}_u = 0$ ($u = 1, 2, 3, 4, 5$) となるので、 Y_6 は conformally CY となる。

F $a = \pm ib$

$$\begin{aligned}
\mathbf{1} & : \mathcal{W}_1 = F_3^{(1)} = H_3^{(1)} = 0, \\
\mathbf{8} & : \mathcal{W}_2 = 0, \\
\mathbf{6} & : \mathcal{W}_3 = 0, \quad e^\phi F_3^{(6)} = \mp *_Y H_3^{(6)}, \\
\mathbf{3} & : e^\phi F_1^{(\bar{3})} = 2e^\phi F_5^{(\bar{3})} = i\bar{\mathcal{W}}_5 = i\mathcal{W}_4^{(\bar{3})} = i\bar{\partial}\phi.
\end{aligned}$$

注：この解では， Y_6 は複素多様体となるが conformally CY ではない．

C $a = \pm b$

$$\begin{aligned}
\mathbf{1} & : \mathcal{W}_1 = F_3^{(1)} = H_3^{(1)} = 0, \\
\mathbf{8} & : \mathcal{W}_2 = 0, \\
\mathbf{6} & : \mathcal{W}_3 = \pm e^\phi *_Y F_3^{(6)}, \quad H_3^{(6)} = 0, \\
\mathbf{3} & : \pm e^\phi F_3^{(\bar{3})} = 2i\bar{\mathcal{W}}_5 = -2i\bar{\partial}A = -4i\bar{\partial} \log a = -i\bar{\partial}\phi.
\end{aligned}$$

ABC $|a|^2 + |b|^2 = e^A$

$$\begin{aligned}
\mathbf{1} & : \mathcal{W}_1 = F_3^{(1)} = H_3^{(1)} = 0, \\
\mathbf{8} & : \mathcal{W}_2 = 0, \\
\mathbf{6} & : 2ab\mathcal{W}_3 = e^\phi (a^2 + b^2) *_Y F_3^{(6)}, \\
& \quad 2abH_3^{(6)} = -e^\phi (a^2 - b^2) F_3^{(6)}, \\
\mathbf{3} & : e^\phi F_3^{(\bar{3})} = \frac{-4iab(a^2 + b^2)}{a^4 - 2ia^3b + 2iab^3 + b^4} \bar{\partial}a, \\
& \quad e^\phi F_5^{(\bar{3})} = \frac{-4ab(a^2 - b^2)}{a^4 - 2ia^3b + 2iab^3 + b^4} \bar{\partial}a, \\
& \quad H_3^{(\bar{3})} = \frac{-2i(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)}{a^4 - 2ia^3b + 2iab^3 + b^4} \bar{\partial}a, \\
& \quad \mathcal{W}_4^{(\bar{3})} = \frac{2(a^2 - b^2)^2}{a^4 - 2ia^3b + 2iab^3 + b^4} \bar{\partial}a, \\
& \quad \bar{\mathcal{W}}_5 = \frac{2(a^4 - 4a^2b^2 + b^4)}{a^4 - 2ia^3b + 2iab^3 + b^4} \bar{\partial}a, \\
& \quad \bar{\partial}A = \frac{-4(ab)^2}{a^4 - 2ia^3b + 2iab^3 + b^4} \bar{\partial}a, \\
& \quad \bar{\partial}\phi = \frac{2(a^2 + b^2)^2}{a^4 - 2ia^3b + 2iab^3 + b^4} \bar{\partial}a.
\end{aligned}$$

IIB での例

- Maldacena-Nunez 解 [295]：タイプ A 非コンパクト正則解． $N = 1$ 超対称性をもち，2 サイクルに巻き付いた NS5 ブレーンに対応．S 双対解はタイプ C の解となる．

[目次へ](#)

- Klebanov-Strassler 解 [282] : タイプ B 非コンパクト正則解. Y_6 は conifold CY に共形. この解は O3 プレーンを加えることによりコンパクト化できる.

10.12 ヘテロ型理論の Torsion コンパクト化

10.12.1 SU(3) 構造

一般に, SU(3) 構造は次の性質をもつ 2 形式 J と 3 形式 Ω により指定される:

$$J_{pq} = -J_{qp}, \quad J^p{}_q J^q{}_r = -\delta_r^p, \quad (10.12.1a)$$

$$J \wedge \Omega = 0, \quad (10.12.1b)$$

$$J \wedge J \wedge J = 3i\Omega \wedge \bar{\Omega}. \quad (10.12.1c)$$

これらの積分可能性 (Calabi-Yau とのずれ) は, これらと整合的な接続 $\hat{\nabla}$ のトーシオン $T_{mn}{}^r$ を用いて

$$dJ_{mnp} = 6T_{[mn}{}^r J_{r|p]}, \quad (10.12.2a)$$

$$d\Omega_{mnpq} = 13T_{[mn}{}^r \Omega_{r|pq]} \quad (10.12.2b)$$

と表される.

いま, \mathfrak{g} を Lie 代数 $\mathfrak{su}(3) \subset \mathfrak{so}(6)$ として, T を

$$T_{mn}{}^p = T_{mn}{}^g{}^p + T_{mn}{}^0{}^p \in \bigwedge^1 \otimes (\mathfrak{g} + \mathfrak{g}^\perp) = \bigwedge^1 \otimes \mathfrak{so}(6) \quad (10.12.3)$$

と分解すると, J, Ω は SU(3) 不変なので, $dJ, d\Omega$ には固有トーシオン T^0 のみが残る:

$$dJ_{mnp} = 6T_{[mn}{}^r J_{r|p]}, \quad (10.12.4a)$$

$$d\Omega_{mnpq} = 13T_{[mn}{}^r \Omega_{r|pq]} \quad (10.12.4b)$$

そこで, T^0 を

$$\begin{aligned} \bigwedge^1 \otimes \mathfrak{su}(3)^\perp &= (\mathbf{3} \oplus \mathbf{3}^*) \otimes (\mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{3}^*) \\ &= (\mathbf{1} \oplus \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{8} \oplus \mathbf{8}) \oplus (\mathbf{6} \oplus \mathbf{6}^*) \oplus (\mathbf{3} \oplus \mathbf{3}^*) \oplus (\mathbf{3} \oplus \mathbf{3}^*)' \\ &= \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 \oplus \mathcal{W}_5 \end{aligned} \quad (10.12.5)$$

と分解すると,

$$dJ = -\frac{3}{2} \text{Im}(\mathcal{W}_1 \bar{\Omega}) + \mathcal{W}_4 \wedge J + \mathcal{W}_3, \quad (10.12.6a)$$

$$d\Omega = \mathcal{W}_1 J^2 + \mathcal{W}_2 \wedge J + \mathcal{W}_5 \wedge \Omega \quad (10.12.6b)$$

が得られる. ここで,

- \mathcal{W}_1 : 関数
- \mathcal{W}_2 : 複素 primitive 2 形式
- \mathcal{W}_3 : 実 primitive(2, 1) \oplus (1, 2) 形式
- \mathcal{W}_4 : 実 1 形式
- \mathcal{W}_5 : 複素 (1, 0) 形式

である [235, 212, 155].

SU(3) 構造はこれらの振る舞いにより次のように特徴付けられる [208, 209] :

- $\mathcal{W}_1 = 0 = \mathcal{W}_2 \Leftrightarrow J$ が複素構造を与える [345, 82].
- $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_4 = 0 \Leftrightarrow dJ = 0$ (シンプレクティック)
- $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_4 = 0 \Leftrightarrow$ Kahler.
- $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_4 = \mathcal{W}_5 = 0 \Leftrightarrow$ Calabi-Yau.

10.12.2 ヘテロ型理論

10.12.2.1 基本場

- 重力セクター
 - ボーズ場
 - * 計量/フレーム場: $g_{MN} (e_M^A)$
 - * 2 形式場: $B = \frac{1}{2} B_{MN} dx^M \wedge dx^N \Rightarrow \tilde{H}$
 - * デイラトン: ϕ
 - フェルミ場
 - * スピン 3/2 場: ψ_M
 - * デイラティーノ: λ
- ゲージセクター
 - ゲージ場: $A = (A^a_{bM} dx^M) \in \text{Ad}(G)$
 - ゲージノ: $\chi \in \text{Ad}(G)$

10.12.2.2 作用積分

ストリングフレームでの Bosonic part の作用積分は

$$S_{\text{Het},B} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x (-g)^{1/2} e^{-2\phi} \left[R + 4(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}|H|^2 + \frac{\alpha'}{4} \text{tr} ((|F|^2 - |\mathcal{R}^{(-)}|^2)) \right]. \quad (10.12.7)$$

ここで,

$$H = dB + \frac{\alpha'}{4}\Omega_G - \frac{\alpha'}{4}\Omega_L, \quad (10.12.8)$$

$$F = dA + A \wedge A, \quad (10.12.9)$$

$$\Omega_G = \text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right), \quad (10.12.10)$$

$$\Omega_L = \text{tr} \left(\omega^{(-)} \wedge d\omega^{(-)} + \frac{2}{3} \omega^{(-)} \wedge \omega^{(-)} \wedge \omega^{(-)} \right), \quad (10.12.11)$$

$$\mathcal{R}^{(-)} = \mathcal{R}(\omega^{(-)}), \quad (10.12.12)$$

$$\omega^{(\pm)A}{}_{BM} = \omega(e)^A{}_{BM} \pm \frac{1}{2} H^A{}_{MB}. \quad (10.12.13)$$

文献

- $O(\alpha')$ までの高次補正 :
Bergshoeff EA, de Roo M 1989[36].
- Anomaly 相殺条件での接続の任意性 :
Sen A 1986[349]

10.12.2.3 超対称変換

String frame で

$$\delta\psi_M = \mathcal{D}_M\epsilon; \quad \mathcal{D}_M = \nabla_M^{(+)} \equiv \nabla_M(e) - \frac{1}{4}\hat{H}_M, \quad (10.12.14a)$$

$$\delta\lambda = \mathcal{O}\epsilon; \quad \mathcal{O} \equiv \Gamma^M \partial_M \phi - \frac{1}{2}\hat{H}, \quad (10.12.14b)$$

$$\delta\chi = \hat{F}\epsilon. \quad (10.12.14c)$$

ここで

$$\hat{H}_M := \frac{1}{2} H_{MPQ} \Gamma^{PQ}, \quad (10.12.15a)$$

$$\hat{H} := \frac{1}{6} H_{MNP} \Gamma^{MNP}, \quad (10.12.15b)$$

$$\hat{F} := \frac{1}{2} F_{MN} \Gamma^{MN}. \quad (10.12.15c)$$

10.12.2.4 場の方程式

ストリングフレームで

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{MN} &:= R_{MN} + 2\nabla_M \nabla_N \phi - \frac{1}{4} H_{MPQ} H_N{}^{PQ} \\ &\quad + \frac{\alpha'}{4} \left[\text{tr}(F_{MP} F_N{}^P) - \text{tr}(\mathcal{R}_{MP}^{(-)} \mathcal{R}_N^{(-)P}) \right] = 0 \end{aligned} \quad (10.12.16a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\phi &:= R - 4(\nabla\phi)^2 + 4\Box\phi - \frac{1}{2}|H|^2 \\ &\quad + \frac{\alpha'}{4} \left[\text{tr}(|F|^2) - \text{tr}(|\mathcal{R}^{(-)}|^2) \right] = 0, \end{aligned} \quad (10.12.16b)$$

$$\mathcal{I}_{MN} := e^{2\phi} \nabla_P (e^{-2\phi} H^P{}_{MN}) = 0, \quad (10.12.16c)$$

$$\mathcal{I}_M := e^{2\phi} D_N (e^{-2\phi} F^N{}_M) + \frac{1}{2} H_{MNP} F^{NP} = 0. \quad (10.12.16d)$$

最後の2つの式は

$$d(e^{-2\phi} *H) = 0, \quad (10.12.17a)$$

$$D(e^{-2\phi} *F) + \frac{1}{2} e^{-2\phi} *H \wedge F = 0 \quad (10.12.17b)$$

と同等.

ここで, H の定義より,

$$\mathcal{A} := dH - \frac{\alpha'}{4} \left[\text{tr}(F \wedge F) - \text{tr}(\mathcal{R}^{(-)} \wedge \mathcal{R}^{(-)}) \right] = 0. \quad (10.12.18)$$

また, 縮約 Bianchi 恒等式

$$\nabla^N R_{MN} = \frac{1}{2} \nabla_M R \quad (10.12.19)$$

より

$$\begin{aligned}
\nabla^N \mathcal{E}_{MN} &= \frac{1}{2} \nabla_M \mathcal{E}_\phi + 2 \mathcal{E}_{MN} \nabla^N \phi - \frac{1}{4} \mathcal{J}^{PQ} H_{MPQ} + \frac{\alpha'}{4} \text{tr}(\mathcal{J}^P F_{MP}) \\
&\quad + \frac{1}{12} H^{NPQ} \mathcal{A}_{MNPQ} - \frac{\alpha'}{8} \text{tr}(F^{PQ} (DF)_{MPQ}) \\
&\quad + \frac{\alpha'}{8} \text{tr}[(\mathcal{D}^{(-)} \mathcal{R}^{(-)})_{MNP} \mathcal{R}^{(-)NP}] \\
&\quad - \frac{\alpha'}{4} \text{tr}[\mathcal{R}_{MP}^{(-)} e^{2\phi} \nabla^{(-)N} (e^{-2\phi} \mathcal{R}^{(-)N^P})]. \tag{10.12.20}
\end{aligned}$$

\mathcal{E}_M^M と \mathcal{E}_ϕ より, 曲率を含まない次の式を得る:

$$\mathcal{E}'_\phi := e^{2\phi} \square e^{-2\phi} - |H|^2 + \frac{\alpha'}{4} [\text{tr}(|F|^2) - \text{tr}(|\mathcal{R}^{(-)}|^2)] = 0. \tag{10.12.21}$$

10.12.2.5 整合性条件

関係式

$$[\nabla_M, \nabla_N] = \frac{1}{4} R_{MNPQ} \Gamma^{PQ} \equiv \frac{1}{2} \hat{R}_{MN} \tag{10.12.22}$$

および

$$[\Gamma^{PQ}, \Gamma^R] = 2\eta^{QR} \Gamma^P - 2\eta^{PR} \Gamma^Q \tag{10.12.23}$$

より,

$$\begin{aligned}
[\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_N] &= \frac{1}{4} R_{ABMN}^{(+)} \Gamma^{AB} \\
&= \frac{1}{2} \hat{R}_{MN} - \frac{1}{2} \nabla_{[M} \hat{H}_{N]} - \frac{1}{8} H_{MPS} H_{NQ}{}^S \Gamma^{PQ} \tag{10.12.24}
\end{aligned}$$

ここで,

$$4\nabla_{[M} H_{NAB]} = 2\nabla_{[M} H_{N]AB} + 2\nabla_{[A} H_{B]MN} \tag{10.12.25}$$

より,

$$R_{MNPQ}^{(+)} = R_{ABMN}^{(-)} - \frac{1}{2} (dH)_{MNPQ}. \tag{10.12.26}$$

よって,

$$[\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_N] = \frac{1}{2} (\hat{\mathcal{R}}^{(-)})_{MN} - \frac{1}{8} (dH)_{MNPQ} \Gamma^{PQ}. \tag{10.12.27}$$

さらに,

$$R_{MNPQ}\Gamma^N\Gamma^{PQ} = R_{MNPQ}(2\eta^{NP}\Gamma^Q + \Gamma^{NPQ}) = -2R_{MP}\Gamma^P \quad (10.12.28)$$

および

$$\begin{aligned} (dH)_{MNPQ}\Gamma^{NPQ} &= (\nabla_M H_{NPQ} - 3\nabla_N H_{MPQ})\Gamma^{NPQ} \\ &= -12\nabla_M \hat{H} + 6\nabla_{[M} H_{N]PQ}\Gamma^{NPQ} \end{aligned} \quad (10.12.29)$$

を用いると,

$$\begin{aligned} \Gamma^N[\mathcal{D}_M, \mathcal{D}_N] &= [\mathcal{D}_M, \mathcal{O}] - \frac{1}{2}\mathcal{E}_{MP}\Gamma^P - \frac{1}{4}\mathcal{J}_{MP}\Gamma^P - \frac{1}{24}\mathcal{A}_{MNPQ}\Gamma^{NPQ} \\ &\quad - \frac{\alpha'}{8}\text{tr}(F_{MN}\Gamma^N \hat{F} - \mathcal{R}_{MN}^{(-)}\Gamma^N \hat{\mathcal{R}}^{(-)}), \end{aligned} \quad (10.12.30)$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_M, \mathcal{O}] &= \Gamma^N \nabla_N \nabla_M \phi - \frac{1}{2}\nabla_M \hat{H} - \frac{1}{2}H_{MPN}\Gamma^P \nabla^N \phi \\ &\quad + \frac{1}{8}H_{SMP}H^S_{QR}\Gamma^{PQR}. \end{aligned} \quad (10.12.31)$$

を得る.

ここで,

$$\text{tr}(\hat{F}^2) = -\text{tr}(|F|^2) + \frac{1}{4}\text{tr}(F_{PQ}F_{RS})\Gamma^{PQRS} \quad (10.12.32)$$

および

$$\hat{H}^2 = -|H|^2 + \frac{1}{4}H_{PQ}H_{RS}\Gamma^{PQRS} \quad (10.12.33)$$

を用いると,

$$\begin{aligned} \Gamma^M[\mathcal{D}_M, \mathcal{O}] &= -\frac{1}{2}\mathcal{E}'_\phi - \frac{1}{2}\hat{\mathcal{A}} + 2\mathcal{O}^2 - \frac{1}{4}\mathcal{J}_{PQ}\Gamma^{PQ} \\ &\quad - \frac{\alpha'}{8}\text{tr}(\hat{F}^2 - (\hat{\mathcal{R}}^{(-)})^2) \end{aligned} \quad (10.12.34)$$

を得る.

また

$$[\mathcal{D}_M, \hat{F}] = \frac{1}{2}(D_M F_{PQ} + H_{MPS}F_Q^S)\Gamma^{PQ} \quad (10.12.35)$$

より,

$$\Gamma^M[\mathcal{D}_M, \hat{F}] = [\mathcal{O}, \hat{F}] + \frac{1}{2}D_M F_{PQ}\Gamma^{MPQ} + \mathcal{J}_Q\Gamma^Q. \quad (10.12.36)$$

以上より, Killing スピノール ϵ が存在し, H_3 に対する Bianchi 恒等式 $\mathcal{A} = 0$ が満たされれば,

$$(2\mathcal{E}_{MN} + \mathcal{J}_{MN})\Gamma^N \epsilon = 0, \quad (10.12.37a)$$

$$\left(\mathcal{E}'_\phi - \frac{1}{4} \mathcal{J}_{PQ} \Gamma^{PQ} \right) \epsilon = 0, \quad (10.12.37b)$$

$$\mathcal{J}_M \Gamma^M \epsilon = 0. \quad (10.12.37c)$$

が α' について 1 次までの精度で成り立つ. これより

$$K^M = \bar{\epsilon} \Gamma^M \epsilon \quad (10.12.38)$$

とおくと

$$(2\mathcal{E}_{MN} + \mathcal{J}_{MN})(2\mathcal{E}^{MN} + \mathcal{J}^{MN}) = 0, \quad (10.12.39a)$$

$$(2\mathcal{E}_{MN} + \mathcal{J}_{MN})K^N = 0, \quad (10.12.39b)$$

$$\mathcal{J}_M \mathcal{J}^M = 0, \quad (10.12.39c)$$

$$\mathcal{J}_M K^M = 0 \quad (10.12.39d)$$

が成り立つ. K^M は常に時間的ないし光的ベクトル Killing であるが, 時間的ならこれらより

$$\mathcal{E}_{MN} = \mathcal{J}_{MN} = \mathcal{J}_M = 0 \quad (10.12.40)$$

が導かれる. 一方, K^M が光的な場合には, $L_M K^M \neq 0$ となる適当なベクトルに対して, さらに

$$(2\mathcal{E}_{MN} + \mathcal{J}_{MN})L^M L^N = 0, \quad \mathcal{J}_M L^M = 0 \quad (10.12.41)$$

が成り立てば同じ結論が得られる. このとき, 整合性条件より

$$\mathcal{E}'_\phi = 0 \quad (10.12.42)$$

が導かれる. したがって, すべての場の方程式は満たされる.

10.12.3 Smoot Model with Flux

10.12.3.1 BBFTY 解

References

- Becker K, Becker M, Fu JX, Tseng LS, Yau ST 2006[28]

基礎方程式

- Killing スピノール方程式

$$\delta\psi_M = \left(\nabla_M(e) - \frac{1}{4}\hat{H}_M \right) \epsilon = 0, \quad (10.12.43a)$$

$$\delta\lambda = \left(\Gamma^M \partial_M \phi - \frac{1}{2}\hat{H} \right) \epsilon = 0, \quad (10.12.43b)$$

$$\delta\chi = \hat{F}\epsilon = 0. \quad (10.12.43c)$$

- Anomaly 相殺条件

$$dH = \frac{\alpha'}{4} \left[\text{tr}(\hat{\mathcal{R}} \wedge \hat{\mathcal{R}}) - \text{tr}(F \wedge F) \right]. \quad (10.12.44)$$

- 時空計量

$$ds_{\text{string}}^2 = ds^2(E^{3,1}) + ds^2(Y_6). \quad (10.12.45)$$

超対称性の帰結

- Y_6 は複素エルミート多様体. ($J_{a\bar{b}} = ig_{a\bar{b}}$)

- $\hat{\nabla}$ で平行な $(3,0)$ 形式 Ω の存在.

$$\|\Omega\| = e^{-2\phi}. \quad (10.12.46)$$

- トーション H_3 の表式 :

$$H = d^c J = i(\bar{\partial} - \partial)J. \quad (10.12.47)$$

- Conformally balanced 条件

$$d(e^{-2\phi} J \wedge J) = 0. \quad (10.12.48)$$

- ゲージバンドル E はエルミート YM:

$$F^{(2,0)} = F^{(0,2)} = F_{mn} J^{mn} = 0. \quad (10.12.49)$$

幾何学的仮定

- Y_6 は4次元底空間 S 上の T^2 バンドルで, 計量

$$ds^2 = e^{2\phi} ds^2(S) + |\theta|^2. \quad (10.12.50)$$

ここで, θ は S 上の複素1形式 α と T^2 の複素座標 z を用いて

$$\theta = dz + \alpha. \quad (10.12.51)$$

- $\omega = d\alpha$ は primitive:

$$\omega \wedge J_S = 0. \quad (10.12.52)$$

また, $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ として,

$$\tilde{\omega}_i = \frac{\omega_i}{2\pi\sqrt{\alpha'}} \in H^2(S, \mathbb{Z}). \quad (10.12.53)$$

このとき, J は

$$J = e^{2\phi} J_S + \frac{i}{2} \theta \wedge \bar{\theta}. \quad (10.12.54)$$

となり, conformally balanced 条件が満たされることが示される. また, Ω は

$$\Omega = \Omega_S \wedge \theta. \quad (10.12.55)$$

ゲージバンドル 条件より, S 上の安定バンドル \mathcal{F}^S と Y_6 上の正則線バンドル \mathcal{F}^L を用いて,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^S \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{F}^L. \quad (10.12.56)$$

Anomaly 相殺条件 Anomaly 相殺条件は, dilaton ϕ に対する次の方程式に帰着される:

$$\begin{aligned} & \frac{2i}{\alpha'} \partial \bar{\partial} e^{2\phi} \wedge J_S - \frac{1}{2} \partial \bar{\partial} [e^{-2\phi} \text{tr}(\bar{\partial} \mathcal{B} \wedge \partial \mathcal{B}^\dagger g_S^{-1})] \\ & - 4\partial \bar{\partial} \phi \wedge \partial \bar{\partial} \phi + \psi J_S^2 / 2 = 0. \end{aligned} \quad (10.12.57)$$

ここで,

$$\psi J_S^2 = \frac{1}{\alpha'} \|\omega\| J_S^2 - \frac{1}{2} (\text{tr} \mathcal{R}_S \wedge \mathcal{R}_S - \text{tr} \mathcal{F} \wedge \mathcal{F}), \quad (10.12.58a)$$

$$\bar{\partial}(\mathcal{B}_1 dz^1 + \mathcal{B}_2 dz^2) = \omega_A = \frac{1}{2} (\omega - *_S \omega). \quad (10.12.58b)$$

この方程式は，位相的整合条件

$$-p_1(E) + \int_S \|\tilde{\omega}\|^2 J_S \wedge J_S = 48 \quad (10.12.59)$$

および仮定

$$\frac{4}{\alpha'} e^{2\phi} J_S - ie^{-2\phi} \text{tr}(\bar{\partial}\mathcal{B} \wedge \partial\mathcal{B}^\dagger g_S^{-1}) + 8i\partial\bar{\partial}\phi > 0 \quad (10.12.60)$$

の元で，解を持つことが示される．

以上より，(10.12.59) を満たす $K3$ 上の T^2 バンドルが存在すれば解となる．

10.12.4 文献ノート

References

- Torsional compactification
 - 1986 初期の解析 [Strominger A 1986[358]; Hull CM 1986[257]; Bars I 1986[23]; Bars I, Nemeschansky D, Yankielowicz S 1986[24]; de Wit B, Smit DJ, Hari Dass ND 1987[112]]
 - 1996 M理論のフラックスコンパクト化 [Becker K, Becker M 1996[26]]
 - 1999 M理論のフラックスコンパクト化に基づく考察 [Dasgupta K, Rajesh G, Sethi S 1999[102]]
 - 2002 M理論のフラックスコンパクト化に基づく8次元 non-Kähler モデルの構成 (オービフォールドタイプ) [Becker K, Dasgupta K 2002[30]]
 - 2003 SO(32) ヘテロ型理論の non-Kähler 複素多様体へのコンパクト化に基づく現象論 [Becker K, Becker M, Dasgupta K, Green PS 2003[27]]
- Compact smooth models
 - 2006 $K3$ 上の T^2 バンドルによるコンパクトスムーズモデルの構成 [Becker K, Becker M, Fu JX, Tseng LS, Yau ST 2006[28]; Fu JX, Yau ST 2006[169]]
 - 2007 ヘテロ型理論の超対称な non-Kähler フラックスコンパクト化の条件を求め, モジュライ自由度を線形解析 [Becker M, Tseng LS, Tau ST 2007[31]]
 - 2008 コンパクト nil 多様体によるスムーズモデルの具体的構成 [Fernandez M, Ivanov S, Ugarte L, Villacampa R 2008[144]]

10.13 ヘテロ型理論の滑らかな CY コンパクト化による素粒子モデル構成

文献

- Seung-Joo Lee: "Combinatorics in $N = 1$ Heterotic Vacua", arXiv:1105.3462.
- L.B. Anderson, Y-H. He, A. Lukas: "Monad bundles in heterotic string compactifications", JHEP0807: 104 (2008).
- Lara B. Anderson, James Gray, Andre Lukas, Burt Ovrut: "Stabilizing All Geometric Moduli in Heterotic Calabi-Yau Vacua", arXiv:1102.0011.

10.13.1 強結合問題

10.13.1.1 弱結合 HetSST

10次元での有効相互作用は

$$S_{10} = \int d^{10}x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \left(\frac{4}{(\alpha')^4} R - \frac{1}{(\alpha')^3} \text{tr} F^2 + \dots \right). \quad (10.13.1)$$

4次元に CY コンパクト化すると, CY の体積を V として,

$$S_4 = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-2\phi} V \left(\frac{4}{(\alpha')^4} R - \frac{1}{(\alpha')^3} \text{tr} F^2 + \dots \right) \quad (10.13.2)$$

よって,

$$G_N = \frac{e^{2\phi} (\alpha')^4}{64\pi V}, \quad \alpha_{\text{GUT}} = \frac{e^{2\phi} (\alpha')^3}{16\pi V}. \quad (10.13.3)$$

よって,

$$G_N = \alpha_{\text{GUT}} \frac{\alpha'}{4}. \quad (10.13.4)$$

弱結合 $e^{2\phi} \lesssim 1$ を要請すると,

$$V \sim M_{\text{GUT}}^{-6} \lesssim \frac{(\alpha')^3}{\alpha_{\text{GUT}}} \Rightarrow G_N \gtrsim \frac{\alpha_{\text{GUT}}^{4/3}}{M_{\text{GUT}}^2} \simeq 10^4 \left(\frac{\alpha_{\text{GUT}}}{1/27} \right)^{4/3} \left(\frac{10^{16} \text{GeV}}{M_{\text{GUT}}} \right)^2 \frac{1}{M_{\text{pl}}^2}. \quad (10.13.5)$$

10.13.1.2 弱結合タイプ I SO(32) SST

10次元有効作用は

$$S_{10} = \int d^{10}x \sqrt{-g_I} \left(e^{-2\phi_I} \frac{4}{(\alpha')^4} R_I - e^{-\phi_I} \frac{1}{(\alpha')^3} \text{tr} F^2 + \dots \right). \quad (10.13.6)$$

4次元に CY コンパクト化すると, CY の体積を V_I として,

$$S_4 = \int d^4x \sqrt{-g_I} V \left(\frac{4e^{-2\phi_I}}{(\alpha')^4} R_I - \frac{e^{-\phi_I}}{(\alpha')^3} \text{tr} F^2 + \dots \right) \quad (10.13.7)$$

よって,

$$G_N = \frac{e^{2\phi_I} (\alpha')^4}{64\pi V_I}, \quad \alpha_{\text{GUT}} = \frac{e^{\phi_I} (\alpha')^3}{16\pi V_I}. \quad (10.13.8)$$

よって,

$$G_N = e^{\phi_I} \alpha_{\text{GUT}} \frac{\alpha'}{4}. \quad (10.13.9)$$

このタイプ I SO(3) SST は次の対応により Het SO(3) SST と双対:

$$g_I = e^{-\phi_h} g_h, \quad \phi_I = -\phi_h, \quad (10.13.10a)$$

$$F_{I3} = H_{h3}, \quad A_{I1} = A_{h1}. \quad (10.13.10b)$$

10.13.1.3 Heterotic M

11次元有効作用は

$$S_{11} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{M^{11}} d^{11}x \sqrt{-g} R - \sum_i \frac{1}{8\pi(4\pi\kappa^2)^{2/3}} \int_{M_i^{10}} d^{10}x \sqrt{-g} \text{tr} F_i^2. \quad (10.13.11)$$

これより, $S^1/\mathbb{Z}_2 \times \text{CY}$ により 4次元にコンパクト化すると, S^1 の長さを $2\pi\rho$ として,

$$G_N = \frac{\kappa^2}{16\pi^2 V \rho}, \quad \alpha_{\text{GUT}} = \frac{(4\pi\kappa^2)^{2/3}}{2V}. \quad (10.13.12)$$

よって,

$$4\pi\kappa^2 \approx \frac{\alpha_{\text{GUT}}^{3/2}}{M_{\text{GUT}}^9} \Rightarrow G_N \approx \frac{\alpha_{\text{GUT}}^{3/2}}{23\pi^3 \rho M_{\text{GUT}}^2}. \quad (10.13.13)$$

$G \times H$	Breaking Pattern: $248 \rightarrow$	Particle Spectrum
$SU(3) \times E_6$	$(1, 78) \oplus (3, 27) \oplus (\bar{3}, \bar{27}) \oplus (8, 1)$	$n_{27} = h^1(X, V)$ $n_{\bar{27}} = h^1(X, V^*) = h^2(X, V)$ $n_1 = h^1(X, V \otimes V^*)$
$SU(4) \times SO(10)$	$(1, 45) \oplus (4, 16) \oplus (\bar{4}, \bar{16}) \oplus (6, 10) \oplus (15, 1)$	$n_{16} = h^1(X, V)$ $n_{\bar{16}} = h^1(X, V^*) = h^2(X, V)$ $n_{10} = h^1(X, \wedge^2 V)$ $n_1 = h^1(X, V \otimes V^*)$
$SU(5) \times SU(5)$	$(1, 24) \oplus (5, 10) \oplus (\bar{5}, \bar{10}) \oplus (10, \bar{5}) \oplus (\bar{10}, 5) \oplus (24, 1)$	$n_{10} = h^1(X, V)$ $n_{\bar{10}} = h^1(X, V^*) = h^2(V)$ $n_5 = h^1(X, \wedge^2 V^*)$ $n_{\bar{5}} = h^1(X, \wedge^2 V)$ $n_1 = h^1(X, V \otimes V^*)$

Table 1: A vector bundle V with structure group G can break the E_8 gauge group of the heterotic string into a GUT group H . The low-energy representation are found from the branching of the 248 adjoint of E_8 under $G \times H$ and the low-energy spectrum is obtained by computing the indicated bundle cohomology groups.

10.13.2 超対称コンパクト化

要請

1. 4次元的な Poincare 不変性
2. $N = 1$ 超対称性
3. アノマリー相殺条件: $dH_3 = \text{Tr} \mathcal{R} \wedge \mathcal{R} - \text{Tr} \mathcal{F} \wedge \mathcal{F} - [C]$ (C は H_3 の磁荷を持つ NS5 ブレーンが巻き付く CY の正則複素曲線).
4. $E_8 \times E_8 \Rightarrow$ GUT ゲージ群 $\mathcal{H} = SO(10)$ または $SU(5) \Rightarrow SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)$
5. 3世代のレプトンとクォーク

1 と 2 の帰結

1. Torsion の補正を摂動的に扱うとき, 最低次で直積型コンパクト化:

$$ds^2 = ds^2(M_4) + ds^2(X_6) \quad (10.13.14a)$$

$$d\phi = 0 \quad (10.13.14b)$$

X_6 は Calabi-Yau 多様体: 複素構造 J , Ricci flat Kahler 計量 $g_{\alpha\bar{\beta}}$

2. 背景ゲージ場 $\mathcal{F} \in \mathcal{G} = \text{SU}(4), \text{SU}(5)$:

$$F_{\alpha\beta} = F_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0, \quad g^{\alpha\bar{\beta}} F_{\alpha\bar{\beta}} = 0. \quad (10.13.15)$$

正則 (poly) 安定バンドルに対して, このようなゲージ接続が一意的に存在. [Donaldson SK (1985); Uhlenbeck K, Yau ST (1986)]

以上より, コンパクト化モデルを構成するには, CY 多様体とその上の正則安定バンドルの組 (Y, V) を与え, それが要請 3 ~ 5 を満たすかどうか確かめることになる.

3 の帰結

1. $c_1(V) = c_1(\tilde{V}) = 0$ のとき, 要請 3 は

$$c_2(X) - c_2(V) - c_2(\tilde{V}) = W = [C] \quad (10.13.16)$$

2. W が 5-brane を決める正則曲線 C に対応するためには, W は $H_2(X, \mathbb{Z})$ の有効な元でないといけない.

4 の帰結

1. $\mathcal{G} = \text{SU}(n) (n = 3, 4, 5)$ とすると, $c_1(V) = 0$.

2. $c_1(V) = 0$ なら,

$$H^0(X, \wedge^q V) = 0, \quad q = 1, \dots, \text{rank}(V) - 1. \quad (10.13.17)$$

5 の帰結

1. GUT 群を SM 群に落とすためには, $\pi_1(X) = G \neq 0$ が必要で, 一般には単連結な CY \tilde{X} から離散変換群 G を用いて $X = \tilde{X}/G$ としないといけない. これは, $\chi(X)$ が $|G|$ の倍数であることを要求する.

2. V の指数 $\text{ind}(V)$ を

$$\text{ind}(V) := h^0(X, V) - h^1(X, V) + h^2(X, V) - h^3(X, V) \quad (10.13.18)$$

により定義すると, 安定バンドルに対して,

$$\text{ind}(V) = -h^1(X, V) + h^2(X, V). \quad (10.13.19)$$

これは, フレーバーの数と一致し, Atiyah-Singer の指数定理より,

$$-N_f|G| = \text{ind}(V) = \frac{1}{2} \int_X c_3(V). \quad (10.13.20)$$

3. $H^0(X, \wedge^2 V) = H^0(X, \wedge^2 V^*) = 0$ と $\wedge^2 V$ に対する指数定理より,

$$(n-4)\text{ind}(V) = -h^1(X, \wedge^2 V) + h^2(X, \wedge^2 V). \quad (10.13.21)$$

これは, $H = \text{SU}(5)$ ($n=5$) のとき, $\mathbf{10}$ と $\bar{\mathbf{5}}$ が同じファミリー数をもつことを保証する.

諸定義

【定義 10.13 (安定正則ベクトルバンドル)】 Kahler 多様体 (X, J, ω) 上の正則ベクトルバンドル V に対して, その傾き (slope) $\mu(V)$ を次式で定義する:

$$\mu(V) = \frac{1}{\text{rank}(V)} \int_X c_1(V) \wedge \omega \wedge \omega. \quad (10.13.22)$$

$\text{rank}(\mathcal{F}) < \text{rank}(V)$ となる $\mathcal{O}(V)$ の任意の接続部分層 \mathcal{F} に対して $\mu(\mathcal{F}) < \mu(V)$ ($\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(V)$) が成り立つとき, V は Mumford-竹本の意味で安定 (stable) (半安定 semi-stable) であるという. さらに, V が同じスロープをもつベクトルバンドルの直和となるとき (これは一般に半安定), 多重安定 (poly-stable) であるという. □

【定義 10.14 (複素ベクトルバンドルのエルミート計量と標準接続)】

- i) 複素ベクトル束 E の **Hermite 計量** (Hermitian metric) とは各ファイバーの X の点に可微分に依存するような Hermite 計量のことである.

- ii) Hermite 計量 h が与えられると E の切断 s, t に対して Hermite 内積 $h(s, t)$ が定義される. E の接続 D が h 接続 (あるいは計量接続 (metric connection)) とは条件 $d(h(s, t)) = h(Ds, t) + h(s, Dt)$ を満たすことをいう.
- iii) 正則ベクトル束 E の接続 D が $(1, 0)$ 型接続であるとは D の $(0, 1)$ 部分が $\bar{\partial}$ に一致することをいう. Hermite 計量 h が与えられた正則ベクトル束 (E, h) には $(1, 0)$ 型 h 接続が一意的に存在する. これを (E, h) の標準接続 (canonical connection) という.
- iv) 標準接続 D_h の $(1, 0)$ と $(0, 1)$ 部分への分解を $D = \partial_h + \bar{\partial}$ と書く. 正則 Hermite ベクトル束の標準接続 D_h の曲率 $F_h = D_h^2$ は $(1, 1)$ 次である. したがって $\partial_h^2 = 0, \bar{\partial}^2 = 0, \partial_h \bar{\partial} + \bar{\partial} \partial_h = F_h$ である.

□

【定義 10.15 (正則ベクトルバンドルのエルミート YM 接続)】 正則ベクトルバンドル E の Hermite 計量 h に対し, その標準接続 D_h の曲率テンソル F_h は $(1, 1)$ 次微分形式となる. $A^0(\text{End}(E))$ の元 $\Lambda F_h := (*F_h \wedge \omega)$ が id_E の定数倍になるとき, h は **Einstein-Hermite 計量** (Einstein-Hermitian metric) であるといわれ, その標準接続は **Hermite Yang-Mills 接続** (Hermitian Yang-Mills connection) と呼ばれる. この時, Bogomolov 不等式

$$(2rc_2(E) - (r-1)c_1(E)^2) \cup |\omega|^{n-2}[X] \geq 0, \quad r = \text{rank}(E) \quad (10.13.23)$$

が成り立つ. 等号は E が射影的平坦なときに限る. □

【定理 10.16 (小林- Hitchin 対応)】 正則ベクトル束 E が Einstein-Hermitian 計量を持つための必要十分条件は E が Mumford-竹本の意味で多重安定であることである. □

10.13.3 構成法

CY 構成

- Toric 構成

- \mathbb{R}^4 の反射的 polytope Δ が与えられると, 対応する 4次元トーリック多様体とその超曲面としての CY が決まる.
- これまでに, 473,800,776 個の反射的 polytope とその CY 超曲面が分類され, そのうち 124 個のみがなめらかとなることが知られている.

- CICY 構成

- 射影空間の積空間ないの超曲面の交わりとして CY を構成することができる.

$$\left[\begin{array}{c|cccc} \mathbb{C}P^{n_1} & q_1^1 & q_2^1 & \cdots & q_K^1 \\ \mathbb{C}P^{n_2} & q_1^2 & q_2^2 & \cdots & q_K^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \mathbb{C}P^{n_m} & q_1^m & q_2^m & \cdots & q_K^m \end{array} \right] \quad (10.13.24)$$

$$\sum_{r=1}^m n_r - K = 3, \quad (10.13.25)$$

$$\sum_{j=1}^K q_j^r = n_r + 1, \quad r = 1, \dots, m \quad (10.13.26)$$

- この方法で 7890 個程度の CY が構成されている. ただし, 同型なものを含む.

ベクトルバンドルの monad 構成

- ベクトルバンドル V が層の exact sequence として

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(V) \longrightarrow B \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0 \quad (10.13.27)$$

$$B = \bigoplus_{i=1}^{r_b} \mathcal{O}_X(\mathbf{b}_i), \quad C = \bigoplus_{j=1}^{r_c} \mathcal{O}_X(\mathbf{c}_j) \quad (10.13.28)$$

と分解されるとき, monad バンドルという. ここで, 各 $\mathbf{b}_i, \mathbf{c}_j$ は c_1 を表す $h^{1,1}(X)$ 個の整数の組である. ただし, Fulton-Lazarsfeld の定理 (1981) より, 次の条件を満たす層 $\mathcal{O}_X(V)$ がベクトルバンドル V の層となる:

- 任意の i, j に対して, $c_j \geq b_j$.

ii) f が十分一般的である.

- このとき, 次の関係式が成り立つ.

$$\text{rank}(V) = r_b - r_c = n, \quad (10.13.29a)$$

$$c_1(V) = \left(\sum_{i=1}^{r_b} b_i^r - \sum_{j=1}^{r_c} c_j^r \right) J_r = 0, \quad (10.13.29b)$$

$$c_2(V) = \frac{1}{2} d_{rst} \left(\sum_{j=1}^{r_c} c_j^s c_j^t - \sum_{i=1}^{r_b} b_i^s b_i^t \right) \nu^r \leq 2c_2(T(X), 13.29c)$$

$$c_3(V) = \frac{1}{3} d_{rst} \left(\sum_{i=1}^{r_b} b_i^r b_i^s b_i^t - \sum_{j=1}^{r_c} c_j^r c_j^s c_j^t \right) = -18c_3(T(X), 13.29d)$$

ここで, J_r は $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ の基底, ν^r はその双対となる $H^{2,2}(X, \mathbb{R})$ の基底, d_{rst} は,

$$d_{rst} = \int_X J_r \wedge J_s \wedge J_t. \quad (10.13.30)$$

- CICY 構成では, 最初の 3 つの要請を満たす 7118 の positive monad バンドルが構成されている. その大部分は 36 個の CICY に基づく. 世代数の要請をさらに課すと, 559 個のモデルが残る. さらに $|G| < 14$ を課すと, 21 個に減る.

10.13.4 安定化されたモデルの例

10.13.4.1 基本アイデア

- ゲージセクターでの有効ポテンシャル

$$S = -\frac{\alpha'}{4\kappa_{10}^2} \int_{M_{10}} \text{tr}(*F \wedge F) - \text{tr}(*R \wedge R) + \dots \quad (10.13.31)$$

アノーマリー相殺条件を考慮すると

$$S = -\frac{\alpha'}{2\kappa_{10}^2} \int_{M_{10}} *1 \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr}(g^{a\bar{b}} F_{a\bar{b}})^2 + \text{tr} g^{a\bar{a}} g^{b\bar{b}} F_{ab} F_{\bar{a}\bar{b}} \right\} + \dots \quad (10.13.32)$$

これらは超対称性が破れたときポテンシャルと生み出す:

$$- \operatorname{tr} g^{a\bar{a}} g^{b\bar{b}} F_{ab} F_{\bar{a}\bar{b}} \Rightarrow \text{F-term}$$

$$- \operatorname{tr} (g^{a\bar{b}} F_{\bar{a}\bar{b}})^2 \Rightarrow \text{D-term}$$

- Hidden sector: $E_8 \times E_8$ を破るためのベクトルバンドル, (V, \tilde{V}) において,

Stage 1 (複素構造の F 項安定化) \tilde{V} の一部を, 複素モジュライ空間の中の孤立点 P においてのみ正則なバンドルを選ぶ.

Stage 2 (dilaton と Kahler モジュライの一部の D 項安定化) \tilde{V} の残りを P において正則となる様を選び, さらに, ベクトルバンドルを dilaton と Kahler モジュライの一部の値でのみ傾斜 0 で多重安定となるよう選ぶ.

Stage 3 (非摂動論効果による残りのモジュライの安定化) D-term 安定化と整合的な anomalous $U(1)$ たちと整合的な非摂動論効果を利用.

10.14 宇宙の加速膨張に対する No-Go 定理

10.14.1 Strong Energy Condition

一般に、 $(n+1)$ 次元時空における時間的測地線束（単位接ベクトル V ）の体積膨張率 $\theta \equiv \nabla \cdot V$ に対して、Raychaudhuri 方程式

$$\dot{\theta} + \frac{1}{n}\theta^2 = -\text{Ric}(V, V) - 2\sigma^2 + 2\omega^2 \quad (10.14.1)$$

が成り立つ。ここで、

$$2\sigma^2 = \nabla_\mu V_\nu \nabla^{(\mu} V^{\nu)}, \quad 2\omega^2 = \nabla_\mu V_\nu \nabla^{[\mu} V^{\nu]}. \quad (10.14.2)$$

この方程式を一様膨張宇宙に適用する。、宇宙時間一定面にたいする単位法ベクトル V は測地的で非回転的 ($\omega^2 = 0$) となるので、スケール因子 a を

$$\theta = n \frac{\dot{a}}{a} = nH \quad (10.14.3)$$

により定義すると、Raychaudhuri 方程式は

$$n \frac{\ddot{a}}{a} = -\text{Ric}(V, V) - 2\sigma^2 \quad (10.14.4)$$

となる。したがって、時間的収束条件（＝時間的きょうエネルギー条件） $\text{Ric}(V, V) \geq 0$ が成り立つと、宇宙膨張は非加速的となる。

10.14.2 Gibbons の定理

【定理 10.17】 高次元（統一）理論が次の条件を満たしているとする：

1. 時空が次の構造をもつ：

$$ds^2(M_{n+4}) = W(y)^{1/2} ds^2(X_4) + ds^2(Y_n) \quad (10.14.5)$$

2. 内部空間 Y_n は境界のないコンパクトな多様体で、計量は静的である。
3. ワープ因子 $W(y)$ は至る所、有界正則である。
4. 高次元理論が強エネルギー条件 $R_{00}(M_{n+4}) \geq 0$ を満たしている。

このとき、4次元時空 X_4 でも強エネルギー条件 $R_{00}(X_4) \geq 0$ が満たされる。 □

Proof. 仮定より, 任意の時間的ベクトル V に対して,

$$R_{VV}(X) = R_{VV} - \frac{1}{4W} \Delta_Y W \quad (10.14.6)$$

が成り立つ. これを Y 上で積分すると

$$R_{VV}(X) \int_Y d\Omega(Y) W = \int_Y d\Omega(Y) \left[W R_{VV} - \frac{1}{4} \Delta_Y W \right] \quad (10.14.7)$$

を得る. $R_{VV} \geq 0$ で W が有界正則なら, この式の右辺は ≥ 0 となり, $R_{VV}(X) \geq 0$ を得る. Q.E.D.

Raychaudhuri 方程式

$$\frac{3}{a} \dot{a} = -R_{VV} - 2\sigma^2 + 2\omega^2; \quad \nabla \cdot V = 3 \frac{\dot{a}}{a} \quad (10.14.8)$$

より, この定理は宇宙の加速膨張を禁止する.

10.14.3 $D = 10/11$ 超重力理論における SEC

M-theory ($D = 11$)

$$\begin{aligned} R_{MN} &= \frac{1}{12} F_{M\dots} F_N{}^{\dots} - \frac{1}{6} |F_4|^2 g_{MN} \\ R_{00} &= \frac{1}{18} F_{0ijk} F_0{}^{ijk} + \frac{1}{144} F_{ijkl} F^{ijkl} \end{aligned} \quad (10.14.9a)$$

$D = 10$ Type IIB Supergravity

$$\begin{aligned} R_{MN} &= \frac{1}{2\tau_2^2} \nabla_{(M} \tau \nabla_{N)} \bar{\tau} + \frac{1}{4\tau_2} \left(G_{** (M} \bar{G}_{N)}^{**} - \frac{1}{2} |G_3|^2 g_{MN} \right) + \frac{1}{96} \tilde{F}_{M*****} \tilde{F}_N{}^{*****} \\ R_{00} &= \frac{1}{2\tau_2^2} |\nabla_0 \tau|^2 + \frac{3}{16\tau_2} G_{0ij} \bar{G}_0{}^{ij} + \frac{1}{48\tau_2} G_{ijk} \bar{G}^{ijk} + \frac{1}{96} \tilde{F}_{0ijkl} \tilde{F}_0{}^{ijkl} \end{aligned} \quad (10.14.10a)$$

$D = 10$ Type IIA Supergravity

$$\begin{aligned}
R_{MN} &= \frac{1}{2}\partial_M\phi\partial_N\phi + e^{-\phi}\left(\frac{1}{4}H_{M**}H_N^{**} - \frac{1}{8}|H_3|^2g_{MN}\right) \\
&+ e^{\phi/2}\left(\frac{1}{12}\tilde{F}_{M***}\tilde{F}_N^{***} - \frac{3}{16}|\tilde{F}_4|^2g_{MN}\right) \\
&+ e^{3\phi/2}\left(\frac{1}{2}\tilde{F}_M^*\tilde{F}_N^* - \frac{1}{16}|\tilde{F}_2|^2g_{MN}\right) + \frac{m_0^2}{16}e^{5\phi/2}g_{MN}. \quad (10.14.11a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + e^{-\phi}\left(\frac{3}{16}H_{0ij}H_0^{ij} + \frac{1}{48}H_{ijk}H^{ijk}\right) \\
&+ e^{\phi/2}\left(\frac{5}{96}\tilde{F}_0ijk\tilde{F}_0^{ijk} + \frac{1}{128}\tilde{F}_{ijkl}\tilde{F}^{ijkl}\right) \\
&+ e^{3\phi/2}\left(\frac{7}{16}\tilde{F}_{0i}\tilde{F}_0^i + \frac{1}{32}\tilde{F}_{ij}\tilde{F}^{ij}\right) - \frac{m_0^2}{16}e^{5\phi/2}. \quad (10.14.11b)
\end{aligned}$$

 $D = 10$ Type I Supergravity

$$\begin{aligned}
R_{MN} &= \frac{1}{2}\partial_M\phi\partial_N\phi + e^{-\phi}\left(\frac{1}{4}\tilde{H}_{M**}\tilde{H}_N^{**} - \frac{1}{8}|\tilde{H}_3|^2g_{MN}\right) \\
&+ \frac{\alpha'}{4}e^{-\phi/2}\text{Tr}\left(F_{M*}F_N^* - \frac{1}{8}|F_2|^2g_{MN}\right) \\
R_{00} &= \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{e^{-\phi}}{48}\left(9\tilde{H}_{0ij}\tilde{H}_0^{ij} + \tilde{H}_{ijk}\tilde{H}^{ijk}\right) + \frac{\alpha'}{64}e^{-\phi/2}\text{Tr}\left(14F_{0i}F_0^i + F_{ij}F^{ij}\right) \\
&\hspace{15em} (10.14.12a)
\end{aligned}$$

10.14.4 ブレーン

一般に, Einstein 方程式より

$$R_{MN} = \kappa^2 \left(T_{MN} - \frac{T}{D-2} g_{MN} \right). \quad (10.14.13)$$

特に, $D = 10$ では

$$R_{00} = \frac{\kappa^2}{8} (7T_{00} + T_I^I). \quad (10.14.14)$$

いま, エネルギー運動量が

$$T_b^a = \begin{cases} -\tau \delta_b^a \delta^{p+1}(\Sigma) & (0 \leq a, b \leq p) \\ 0 & (p < a, b) \end{cases} \quad (10.14.15)$$

で与えら得るテンション τ の p -ブレーンを考えると,

$$7T_{00} + T_I^I = (7-p)\tau \delta^{p+1}(\Sigma). \quad (10.14.16)$$

よって,

- **D-brane** $\tau > 0 \Rightarrow$ 8-brane ないし 9-brane のみが R_{00} に負の寄与を与える.
- **O-brane** $\tau < 0 \Rightarrow$ p -brane ($p < 7$) が R_{00} に負の寄与を与える.

[Giddings SB, Kachru S, Polchinski J 2002[196]]

ただし, O-brane は内部空間で平均して初めて宇宙を加速する効果を持ち, 高次元でどのように機能するか不明である.

10.14.5 tadpole 条件

フラックスの定義より一般に,

$$dF_n = H_3 \wedge F_{n-2} + (2\pi\sqrt{\alpha'})^{n-1} \rho_{8-n}^{\text{loc}} \quad (10.14.17)$$

ここで, ρ_{8-n}^{loc} は F_n に対する磁氣的ブレーンソースである.

IIB 型理論では, CY の 2 サイクル Σ_2 に巻き付いている D5 ブレーンに対して,

$$N_{D5}(\Sigma_2) - N_{O5}(\Sigma_2) + \frac{1}{(2\pi)^2 \alpha'} \int_{\Sigma_4} H_3 \wedge F_1 = 0. \quad (10.14.18)$$

同様に, CY の D3 ブレーンに対して,

$$N_{D3} + N_{\text{flux}} = \frac{1}{4} N_{O3}. \quad (10.14.19)$$

ここで,

$$N_{\text{flux}} = \frac{1}{(2\pi)^4 \alpha'^2} \int_{Y_6} H_3 \wedge F_3 = e_K m_{RR}^K - m^K e_{KRR} \quad (10.14.20)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2 \alpha'} \int_{A_K/B_K} H_3 = m^K / e_K, \quad K = 1, \dots, h^3/2, \quad (10.14.21)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2 \alpha'} \int_{A_K/B_K} F_3 = m_{RR}^K / e_{KRR}, \quad K = 1, \dots, h^3/2 \quad (10.14.22)$$

Dilaton-axion 場を楕円ファイバーのモジュライと見なすことによる IIB 理論の CY コンパクト化 (F 理論) では, 対応する CY_4 はファイバーが特異となる点と D7 が対応する. このときの tadpole 条件は

$$N_{D3} + N_{\text{flux}} = \frac{\chi(CY_4)}{24}. \quad (10.14.23)$$

加速膨張を実現するための必要条件 以下のいずれかの条件を破る必要がある:

1. 内部空間の古典的記述
2. ワープしたコンパクト化の枠組み: $ds^2(M_D) = W(y)^2 g(X_4) + g(Y_n)$
3. Y_n : 定常、コンパクト、閉多様体。
4. ワープ因子 $W(y)$ が有界で滑らかな非ゼロ関数。
5. 出発点となる高次元理論が強エネルギー条件を満たす。

10.14.6 Maldacena-Nunez の No-Go 定理

【定理 10.18 (Maldacena-Nunez 2001)】 For a compactification $M_D = X_d \times Y_n$ of a higher dimensional theory by a classical solution satisfying the following conditions, X_d cannot be de Sitter spacetime:

1. The spacetime metric has the structure

$$g(M_D) = \Omega(y)^2 [g(X_d) + \hat{g}(Y_n)].$$

2. The Newton constant in X_d is finite:

$$\int_Y d\mu_{\hat{g}} \Omega^{D-2} < \infty.$$

3. Near the boundary of Y_n or singularities of Ω , Ω decreases monotonically toward them.

4. In the original higher-dimensional theory, the potential is non-positive and all massless bosonic fields have positive kinetic terms.

□

Reference

- Maldacena JM, Nunez G (2001): IJMPA16, 822

【注 10.19】 A stronger result can be obtained for the massive IIA supergravity. _____ □

Proof. In the Einstein equations

$$\text{Ric}(M) = \mathbb{T}(M) - \frac{1}{D-2} T_s g(M) \quad (10.14.24)$$

$\text{Ric}(M)$ can be written

$$\text{Ric}(M) = \text{Ric}(X) - \left(\hat{\nabla}^2 \ln \Omega + (D-2)(\hat{\nabla} \ln \Omega)^2 \right) g(X) \quad (10.14.25)$$

Hence, the contraction of the Einstein equations with $g(X) - 1$ gives

$$\frac{d}{D-2} \hat{\Delta}(\Omega^{D-2}) = \Omega^{D-2} R_s(X) + \Omega^D \tilde{T}; \quad \tilde{T} = -T_\mu^\mu + \frac{d}{D-2} T_M^M \quad (10.14.26)$$

If X is Mink or dS, massless form field strength F_p should have the form

$$F_p = \Omega_d(X) \wedge \alpha_{p-d}(Y) + \beta_p(Y) \quad (10.14.27)$$

Then, from the condition 4

$$\tilde{T} = -\frac{2d}{D-2} V + \sum_p \frac{d}{D-2} ((D-p-1)\alpha \cdot \alpha + (p-1)\beta \cdot \beta) \geq 0 \quad (10.14.28)$$

Hence,

$$0 \geq \frac{d}{D-2} \int_{\partial Y} d\sigma_{\hat{g}} \nabla_{\perp}(\Omega^{D-2}) = \int_Y d\mu_{\hat{g}} \left(d(d-1)\Lambda\Omega^{D-2} + \Omega^D \tilde{T} \right) \geq 0$$

(10.14.29)
Q.E.D.

10.14.7 ブレーンを含む IIB 理論における No-Go 定理

【定理 10.20 (Dasgupta et al 2014; Giddings, Kachru, Polchinski 2002)

For a compactification $M_{10} = X_4 \times Y_6$ of 10D IIB string theory by a classical solution satisfying the following conditions, X_4 cannot be de Sitter spacetime:

1. The spacetime metric has the structure

$$g(M_{10}) = e^{2A(y)} [g(X_4) + e^{-2A(y)} \hat{g}(Y_6)].$$

2. The internal space is a smooth, compact closed manifold, and the warp factor is smooth.
3. All fields are invariant under the maximal symmetry of X_4 .
4. Flux, non-trivial dilaton, **smearred D -brane/ \bar{D} -brane are allowed**, but O -planes/ \bar{O} -planes or higher-order corrections/quantum corrections are not includes.

□

References

- Dasgupta K et al (2014): JHEP 1407, 054
- Giddings SB, Kachru S, Polchinski J (2002): PRD66, 106006

【注 10.21】 The inclusion of curvature corrections, D-instanton corrections, loop-corrections may lead to a de Sitter solution. —————□

Proof. 1. From the Einstein equations, the scalar curvature of X_4 can be written

$$\hat{\Delta}e^{4A} = R_s(X) - \frac{\kappa_{10}^2}{2}e^{2A} [T_\mu^\mu - T_m^m]. \quad (10.14.30)$$

Integrating this yields

$$R_s(X) \int_Y d\mu(Y) = \frac{\kappa_{10}^2}{2} \int_Y d\mu(Y) e^{2A} [T_\mu^\mu - T_m^m] \quad (10.14.31)$$

2. The D-brane and O-plane actions read

$$S_{D_p} = - \int_{\Sigma_{p+1}} d^{p+1}x T_p e^{\frac{p+1}{4}\phi} \sqrt{-\det(g + F + B)} + \mu_p \int_{\Sigma_{p+1}} C \wedge e^{F+B}, \quad (10.14.32a)$$

$$S_{O_p} = - \int_{\Sigma_{p+1}} d^{p+1}x T_{O_p} e^{\frac{p+1}{4}\phi} \sqrt{-\det(g)} + \mu_{O_p} \int_{\Sigma_{p+1}} C. \quad (10.14.32b)$$

where $T_p > 0$, $T_{O_p} < 0$.

3. Their EM tensors are given by

$$T_\mu^\mu [D_p/\bar{D}_p] = -4T_p e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu [D_p/\bar{D}_p], \quad (10.14.33a)$$

$$T_m^m [D_p/\bar{D}_p] = -(p-3)T_p e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu [D_p/\bar{D}_p], \quad (10.14.33b)$$

$$T_\mu^\mu [O_p/\bar{O}_p] = 4|T_{O_p}| e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu [O_p/\bar{O}_p], \quad (10.14.33c)$$

$$T_m^m [O_p/\bar{O}_p] = (p-3)|T_{O_p}| e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu [O_p/\bar{O}_p] \quad (10.14.33d)$$

Hence, D-brane does not help to realise dS:

$$T_\mu^\mu [D_p/\bar{D}_p] - T_m^m [D_p/\bar{D}_p] = -(12-p)T_p e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu [D_p/\bar{D}_p] < 0 \quad (10.14.34)$$

In contrast, O-planes have negative energy and may help to realise dS:

$$T_\mu^\mu [O_p/\bar{O}_p] - T_m^m [O_p/\bar{O}_p] = (12-p)|T_{O_p}| e^{\frac{p+1}{4}\phi} d\mu [O_p/\bar{O}_p] > 0 \quad (10.14.35)$$

However, they cannot be smoothed out, so its back reaction produces singularity.

Q.E.D.

【注 10.22 (Argument based on SEC)] The strong energy condition gives slightly different conditions:

$$(10.14.36)$$

- D_p -brane ($\tau > 0$): only 8-brane or 9-brane provides a negative contribution to R_{00}
- O_p -plane ($\tau < 0$): p -brane ($p < 7$) provide a negative contribution to R_{00} .

□

【注 10.23】

- The tadpole condition requires the existence of an O_p -plane if D_p -branes exist, and if the internal space is closed.
- An O_p -plane produces naked singularities classically.

□

【注 10.24 (Tadpole condition)] By integrating the field equation with the brane source

$$dF_n = H_3 \wedge F_{n-2} + (2\pi\sqrt{\alpha'})^{n-1} \rho_{8-n}^{\text{loc}} \quad (10.14.37)$$

for $n = 5$ over the internal space Y , we obtain the constraint

$$N_{\text{D3}} + N_{\text{flux}} = \frac{1}{4} N_{\text{O3}} \quad (10.14.38)$$

where

$$N_{\text{flux}} = \frac{1}{(2\pi)^4 \alpha'^2} \int_{Y_6} H_3 \wedge F_3 = e_K m_{\text{RR}}^K - m^K e_{K\text{RR}} \quad (10.14.39)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2 \alpha'} \int_{A_K/B_K} H_3 = m^K / e_K, \quad K = 1, \dots, h^3/2, \quad (10.14.40)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2 \alpha'} \int_{A_K/B_K} F_3 = m_{\text{RR}}^K / e_{K\text{RR}}, \quad K = 1, \dots, h^3/2 \quad (10.14.41)$$

Hence, if the flux does not match the number of D3 branes, an appropriate number of O3 planes are required.

For example, for the flux CY compactification of IIB, the 3-form fluxes are imaginary self-dual and satisfies the condition $*_Y F_3 = e^{-\phi} H_3$. Hence,

$$N_{\text{flux}} = \frac{1}{(2\pi)^4 \alpha'^2} \int_Y e^{-\phi} *_Y F_3 \wedge F_3 = \frac{1}{(2\pi)^4 \alpha'^2} \int_Y d\mu(Y) e^{-\phi} |F_3|^2 \geq 0. \quad (10.14.42)$$

□

10.14.8 ブレーンを含む IIA 理論における No-Go 定理

【定理 10.25 (Hertzberg MP, Kachru S, Taylor W, Tegmark M (2007))】

For a CY compactification of $M_{10} = X_4 \times Y_6$ of 10D IIA string theory by a classical solution satisfying the following conditions, X_4 cannot be de Sitter spacetime:

1. The spacetime metric has the structure

$$g(M_{10}) = g(X_4) + \hat{g}(Y_6). \quad (10.14.43)$$

2. The internal space is a Calabi-Yau manifold.
3. All fields are invariant under the maximal symmetry of X_4 .
4. H_3 -flux, RR-flux, non-trivial dilaton, smeared D6-branes and O6-planes are allowed,

Further, if one of the RR-fluxes does not vanish, X_4 cannot be the Minkowski spacetime. _____ □

References

- Hertzberg MP, Kachru S, Taylor W, Tegmark M: jhep 12, 095 (2007)

”Inflationary constraints on type IIA string theory”

Proof. モジュライ変数 ρ, τ を

$$\rho = (\text{Vol}(Y_6))^{1/3}, \quad \tau = e^{-\phi}(\text{Vol}(Y_6))^{1/2} \quad (10.14.44)$$

おくと, Einstein frame

$$g_{\mu\nu}^E = \frac{\tau^2}{m_{\text{pl}}^2 \kappa_{10}^2} g_{\mu\nu}(X) \quad (10.14.45)$$

において, これらの運動項は

$$\mathcal{L}_K = -\frac{1}{2} \{(\partial\hat{\rho})^2 + (\partial\hat{\tau})^2\}; \quad (10.14.46)$$

$$\hat{\rho} = \sqrt{\frac{3}{2}} m_{\text{pl}} \ln \rho, \quad \hat{\tau} = \sqrt{2} m_{\text{pl}} \ln \tau. \quad (10.14.47)$$

Flux の量子化

$$\int_{\Sigma^p} F_p \propto f_{\Sigma} \in \mathbb{Z} \quad (10.14.48)$$

より, フラックスのポテンシャルへの寄与は

$$H_3 \Rightarrow V_3^{\text{NS}} \propto \rho^{-3} \tau^{-2}, \quad (10.14.49a)$$

$$F_p \Rightarrow V_p \propto \rho^{3-p} \tau^{-4}. \quad (10.14.49b)$$

また, ブレーンの寄与は

$$D6 : V_{D6} \propto \tau^{-3}, \quad (10.14.50a)$$

$$O6 : V_{O6} \propto -\tau^{-3}. \quad (10.14.50b)$$

よって, ψ を ρ, τ 以外のモジュライ変数として,

$$\begin{aligned} V &= V_3^{\text{NS}} + \sum_p V_p + V_{D6} + V_{O6} \\ &= \frac{A_3^{\text{NS}}(\psi)}{\rho^3 \tau^2} + \sum_p \frac{A_p(\psi)}{\rho^{p-3} \tau^4} + \frac{A_{D6}(\psi) - A_{O6}(\psi)}{\tau^3}. \end{aligned} \quad (10.14.51)$$

これより,

$$-\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} - 3\tau \frac{\partial V}{\partial \tau} = 9V + \sum_p p V_p \geq 9V. \quad (10.14.52)$$

Q.E.D.

【注 10.26 (No-Go 定理を克服する可能性)】

- Geometrical/NG flux $T : H_{abc} \rightarrow f^a{}_{bc} \rightarrow Q_c^{ab} \rightarrow R^{abc}$

$$V_f \propto \pm \rho^{-1} \tau^{-2} \Rightarrow -(\rho \partial_\rho + 3\tau \partial_\tau) V_f = 9V_f - 2V_Q \quad (10.14.53a)$$

$$V_Q \propto \pm \rho \tau^{-2} \Rightarrow -(\rho \partial_\rho + 3\tau \partial_\tau) V_Q = 9V_Q - 4V_f \quad (10.14.53b)$$

$$V_R \propto \pm \rho^3 \tau^{-2} \Rightarrow -(\rho \partial_\rho + 3\tau \partial_\tau) V_R = 9V_R - 6V_f \quad (10.14.53c)$$

- NS5 ブレーン

$$V_{NS5} \propto \pm \rho^{-2} \tau^{-2} \Rightarrow -(\rho \partial_\rho + 3\tau \partial_\tau) V_{NS5} = 9V_{NS5} - V_{NS5} \quad (10.14.54)$$

□

10.14.9 α' 補正を含む 10D ヘテロ型超重力理論

Field contents

- Boson: $g_{MN}, \phi, B_{MN}; A_M \in \text{ad}(G)$
ここで、 $G = \text{Spin}(32)/\mathbb{Z}_2$ or $E_8 \times E_8$
- Fermion: Majorana-Weyl spinors $\psi_M, \lambda; \chi \in \text{ad}(G)$

Action with $O(\alpha'^2)$ corrections

$$S = \int_M e^{-2\phi} \left[R_s(\omega_+) + 4|\nabla\phi|^2 - \frac{1}{2}|T|^2 - \frac{\alpha'}{4} (\text{tr}|F|^2 - \text{tr}|\mathcal{R}(\omega_+)|^2 + 2\text{tr}(\bar{\chi}\mathcal{D}\chi)) + \dots \right] \quad (10.14.55)$$

where

$$\omega_\pm^{AB} = \omega^{AB} \pm \frac{1}{2} H^{AB}{}_M dx^M + O(\alpha'^2), \quad (10.14.56a)$$

$$T = H_3 + \frac{\alpha'}{8} \text{tr}(\bar{\chi}\Gamma_{[3]}\chi), \quad (10.14.56b)$$

$$H_3 = dB_2 + \frac{\alpha'}{4} [\text{CS}(\omega_+) - \text{CS}(A)], \quad (10.14.56c)$$

$$\text{CS}(A) = \text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right). \quad (10.14.56d)$$

This α' -correction is consistent with the anomaly cancellation condition

$$dH = \frac{\alpha'}{4} [\text{tr}(\mathcal{R}_+ \wedge \mathcal{R}_+) - \text{tr}(F \wedge F)] \quad (10.14.57)$$

10.14.10 α' を考慮した 10D 超重力理論における No-Go 定理

【定理 10.27 (Gautason, Junghans, Zagermann 2012)】 10D HET supergravity with the full α corrections does not allow a compactification $M = \text{dS}^4 \times Y_6$ or $M = \text{adS}^4 \times Y_6$ under the following conditions:

1. Metric is regular and takes the warped form

$$g_M = e^{2A(y)} g_X(x) + \hat{g}_Y(y) \quad (10.14.58)$$

2. Fields are regular and invariant under the maximal symmetry of X

$$F_2 = F_Y(y), \quad H_3 = H_Y(y), \quad \phi = \phi(y) \quad (10.14.59)$$

3. No gaugino condensates
4. No stringy loop/non-perturbative correction.
5. α' -expansion is allowed.

□

Reference

- Gautason FF, Junghans D, Zagermann M (2012): JHEP 1206, 029 [arXiv:1204.0807] “On Cosmological Constants from α' -Corrections

Proof. 1. Neglecting the terms that vanish when the configuration is invariant under the maximal symmetry group of X, the effective action reads

$$S = \int d\mu_X \tau^2 \left[e^{4a} \hat{V} + e^{2a} C R_s(X) + \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha')^{n+1} e^{-2na} W_n \right] \quad (10.14.60)$$

where

$$e^{-2\phi} = \tau^2 e^{-2\hat{\phi}}, \quad A = a + \hat{A}(y), \quad (10.14.61a)$$

$$C = \int d\mu_Y e^{-2\hat{\phi} + 2\hat{A}} \left(1 - \frac{\alpha'}{2} (\hat{D}A)^2 + \dots \right), \quad (10.14.61b)$$

$$W_0 = \frac{1}{4} |\mathcal{R}(X)|^2, \quad (10.14.61c)$$

$$\begin{aligned} \hat{V} = \int d\mu_Y e^{-2\hat{\phi} + 4\hat{A}} \left\{ R_s(Y) - 8\hat{\square}A - 20(\hat{D}A)^2 + 4(\hat{D}\phi)^2 - \frac{1}{2}|\hat{H}|^2 + \frac{\alpha'}{4} \left(-\text{tr}|\hat{F}|^2 + |\hat{\mathcal{R}}^+|^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 8(\hat{D}\hat{D}A)^2 + 8\hat{D}A \cdot \hat{D}((\hat{D}A)^2) + 20((\hat{D}A)^2)^2 + |\hat{D}A \cdot \hat{H}|^2 \right) \right\} \quad (10.14.61d) \end{aligned}$$

2. Variations wrt τ and a give

$$\delta\tau : \hat{V} + CR_s(X) + W = 0, \quad (10.14.62a)$$

$$\delta a : 4\hat{V} + 2CR_s(X) - \sum_{n=1}^{\infty} 2n(\alpha')^{n+1}W_n = 0 \quad (10.14.62b)$$

From these, it follows

$$CR_s(X) + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)(\alpha')^{n+1}W_n = 0 \quad (10.14.63)$$

3. When X is a constant curvature space

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\lambda\sigma} &= \frac{\Lambda}{3}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}) \\ \Rightarrow R_{\mu\nu} &= \Lambda g_{\mu\nu}, \quad R_s = 4\Lambda, \quad |\mathcal{R}|^2 = \frac{4\Lambda^2}{3} \end{aligned} \quad (10.14.64)$$

Hence, the above equation can be written

$$4(C_0 + \alpha'C_1 + \dots)\Lambda + \alpha'\Lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)w_n(\alpha'\Lambda)^n = 0 \quad (10.14.65)$$

There exists no solution such that

$$\Lambda = \Lambda_0 + \alpha'\Lambda_1 + \dots \neq 0. \quad (10.14.66)$$

Q.E.D.

【定理 10.28 (Quigly C 2015)】 10D HET supergravity with the quadratic α corrections and gaugino condensates does not allow a compactification $M = dS^4 \times Y_6$ or $M = adS^4 \times Y_6$ under the following conditions:

1. Metric is regular and takes the warped form

$$g_M = e^{2A(y)}g_X(x) + \hat{g}_Y(y) \quad (10.14.67)$$

2. Fields are regular and invariant under the maximal symmetry of X

$$\begin{aligned} F_2 &= F_Y(y), \quad H_3 = H_Y(y), \quad \phi = \phi(y), \\ \chi &= e^{-3\varphi/4}(\chi_4(x) \otimes \chi_6(y) + \text{c.c.}); \quad \hat{\mathcal{D}}\chi_6 = O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (10.14.68)$$

3. Gaugino condensates

$$\langle \text{tr}(\bar{\chi}_4 \chi_4) \rangle = M^3 f(\phi_0, \rho_0) \quad (10.14.69)$$

4. No stringy loop/non-perturbative correction.

5. α' -expansion is allowed.

□

Reference

- Quigley C (2015): arXiv: 1504.00652 “Gaugino Condensation and the Cosmological Constant”

Proof. 1. Under the ansatz of the theorem, the 10D action reduces to

$$S = \int_X d^4x \sqrt{-g_4} \int_Y d^6y \sqrt{\hat{g}_6} \left[R_s(X) + \frac{\alpha'}{4} e^{-\varphi} |\mathcal{R}_X|^2 - V(y) + \mathcal{O}(\alpha'^3) \right] \quad (10.14.70)$$

where

$$V = e^\varphi \left[e^{-\rho} (-R_s(Y) + |\hat{D}\rho|^2 + \hat{D}\rho \cdot \hat{D}\varphi) + \frac{1}{2} e^{-3\rho} |T_Y|^2 \right. \\ \left. + \frac{\alpha'}{4} e^{-2\rho} (\text{tr}|F_Y|^2 - \text{tr}|R_{+Y}|^2) + \frac{\alpha'}{2} M^3 f e^{-(\varphi+\rho)/2} (\bar{\chi}_6 \gamma^m \hat{D}_m \chi_6 + \text{cc}) \right] \quad (10.14.71)$$

2. Variation wrt φ gives

$$-\hat{\nabla} \cdot (e^{\varphi-\rho} \hat{\nabla} \rho) + \frac{\alpha'}{4} e^{-\varphi} \langle |\mathcal{R}_X|^2 \rangle_X + V(\varphi) \quad (10.14.72) \\ = \frac{\alpha'}{2} M^3 e^{\varphi-2\rho} \partial_\varphi (e^{-3(\varphi-\rho)/2} f) [\bar{\chi}_6 (\gamma^m \hat{\nabla}_m + \frac{1}{4} e^{-\rho} \gamma_{[3]} \cdot T) \chi_6 + \text{cc}] \quad (10.14.73)$$

RHS of this equation can be set to $\mathcal{O}(\alpha'^3)$ by requiring

$$\left[\gamma^m \hat{\nabla}_m + \frac{1}{4} \gamma^m \hat{\nabla}_m (-\varphi - \rho + 2 \ln f) + \frac{1}{4} e^{-\rho} \gamma_{[3]} \cdot T \right] \chi_6 = \mathcal{O}(\alpha'^3) \quad (10.14.74)$$

Hence, by integrating over Y , we obtain

$$\frac{\alpha'}{4} \langle e^{-\varphi} \rangle_Y \langle |\mathcal{R}_X|^2 \rangle_X + \langle V \rangle_Y = \mathcal{O}(\alpha'^3) \quad (10.14.75)$$

3. Variation wrt g gives

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R_s(X)g_{\mu\nu} + \frac{\alpha'}{4}\langle e^{-\varphi}\rangle_Y \left[R_{\mu****}R_{\nu****} + 2\nabla_\alpha\nabla_\beta R^{\mu\alpha\nu\beta} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}|\mathcal{R}_X|^2 \right] \\ = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\langle V\rangle_Y + O(\alpha'^3) \end{aligned} \quad (10.14.76)$$

4. When X is a constant curvature spacetime

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\lambda\sigma} &= \frac{\Lambda}{3}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}) \\ \Rightarrow R_{\mu\nu} &= \Lambda g_{\mu\nu}, \quad R_s = 4\Lambda, \quad |\mathcal{R}|^2 = \frac{4\Lambda^2}{3} \end{aligned} \quad (10.14.77)$$

The two field equations reduce to

$$\frac{2\alpha'}{3}\Lambda^2\langle e^{-\varphi}\rangle_Y + \langle V\rangle_Y = O(\alpha'^3) \quad (10.14.78a)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2}\langle V\rangle_Y + O(\alpha'^3) \quad (10.14.78b)$$

Hence, by eliminating V , we obtain

$$\Lambda = -\frac{\alpha'}{3}\Lambda^2\langle e^{-\varphi}\rangle_Y + O(\alpha'^3) \quad \Rightarrow \quad \Lambda = O(\alpha'^3) \quad (10.14.79)$$

Q.E.D.

【定理 10.29 (Kutasov D, Maxfield T, Melnikov I, Sethi S 2015)] For heterotic or type IIB with no RR fluxes, compactification to $dS^n (n \geq 4)$ is not allowed even when all α' -corrections including perturbative curvature corrections and world sheet non-perturbative effects are allowed, if no stringy loop or non-perturbative correction is included. _____□

Reference

- Kutasov D, Maxfield T, Melnikov I, Sethi S (2015):arXiv:1504.00056. “Constraining de Sitter Space in String Theory”

10.14.11 如何にして No-Go 定理を回避するか？

残る可能性

- 高次の α' 補正と RR フラックスを含む II 型超重力理論 (D ブレーンと O ブレーンを含む)
 1. KKLT シナリオ
 - i) IIB 理論の warped CY コンパクト化 with ISD flux(+compensating O_3 -planes) \Rightarrow No scale 4D $N = 1$ SUGRA
 - ii) Instanton (Euclidean D-brane)/D7 上での gaugino condensates による NP 効果 \Rightarrow Kähler モジュライの安定化 \Rightarrow adS^4 .
 - iii) \bar{D}_3 ブレーンによる vacuum uplift \Rightarrow dS^4
 2. LVS (Large volume scenario)
 - iii') Kähler uplifting: Kähler ポテンシャルへの α' 補正 \Rightarrow dS^4
 - iv') Monodromy inflation (低エネルギーでの $N = 1$ sugra の放棄)
- 超重力理論の枠組みの拡大
 - Non-geometric flux を用いたコンパクト化 [Blumenhagen et al 2015-2016]
- 開多様体によるコンパクト化
 - 例: 4D $SO(4, 4)$ -GSUGRA の Dall'Agata-Inverso dS -臨界点の M 理論へのアップリフト [Baron, Dall'Agata 2015]
- ストリングループ効果・非摂動効果

10.14.12 文献ノート

- **No-Go 定理:** M/string 理論を含む高次元理論において, 内部空間が静的な warped product 型コンパクト化では, 強エネルギー条件が常に満たされ, 4次元時空の加速膨張は起こらないことを主張 [Maldacena J & Nunez C (2001), Gibbons GW (1985), de Wit B, Smit DJ & Hari Dass ND (1987),][190, 295, 191].
- **Chen-Galtsov-Guperle 解:** 高次元 SUGRA に対する単 S-brane 型解. 内部空間は任意曲率. [hep-th/0204071][77]
- **Ohta 解:** $D = 11$ SUGRA および $D = 10$ SUGRA に対する, 時間のみに依存し, 任意曲率の定曲率空間でコンパクト化した厳密解の族 (多 S-brane 型解) [hep-th/0301095][314]
- **Townsend-Wohlfarth 解:** 内部空間が負曲率 Einstein 空間でそのサイズに時間依存性を許せば, No-Go 定理は成り立たず, 中間インフレーション真空解が存在することを指摘 [hep-th/0303079]. [372]
- Townsend-Wohlfarth 解は Chen-Galtsov-Guperle 解ないし単 S-Brane の場合の Ohta 解 [314] において 3-form flux(SM2-brane) がゼロの極限を取ったもので, flux がゼロでない場合は内部空間が平坦となる中間インフレーション解も含むことを指摘 [hep-th/0303238][313]
- Ohta 解が内部空間が球となる中間インフレーション解を含むことを指摘 [hep-th/0304172][315]
- 内部空間が複数の定曲率空間の積となる真空モデルの研究. 調べられた範囲で十分なインフレーションなし [Chen C (2003)]. [78]

10.15 KKLT

10.15.1 KKLT モデル

- 基本モデル

- IIB 型理論の no scale ISD CY フラックスコンパクト化 (複素モジュライ固定)[Giddings SB, Kachru S, Polchinski J 2002[196]]

$$K = -3 \ln(\rho + \bar{\rho})W = W(z) \Rightarrow V = e^K (K^{i\bar{j}} D_i W D_{\bar{j}} \bar{W} - |W|^2) = e^K K^{a\bar{b}} D_a W D_{\bar{b}} \bar{W} \quad (10.15.1)$$

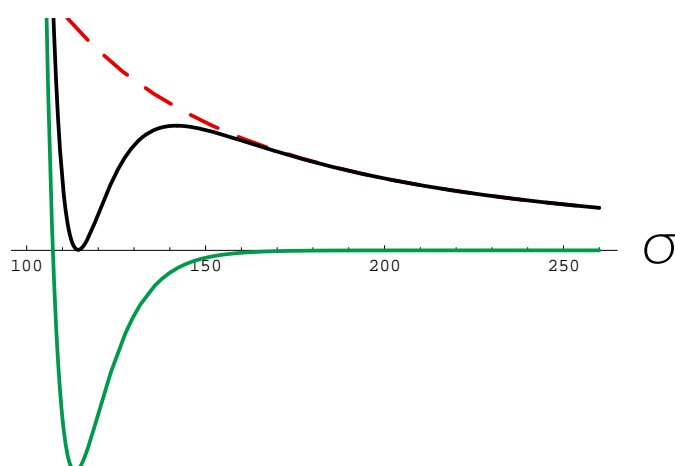
ここで, $i = (\rho, a)$.

- 非摂動論効果 (インスタントン/gaugino 凝縮:Witten E 1996[391];Tripathy PK, Trivedi SP 2003[373];Gorlich L, Kachru S, Tripathy PK, Trivedi SP 2004[202]) \Rightarrow Kahler モジュライの安定化

$$K = -3 \ln(\rho + \bar{\rho}), \quad W = W_0 + Ae^{-a\rho} \quad (a = 2\pi/N). \quad (10.15.2)$$

$\Rightarrow N = 1$ 超対称な adS 真空

- 反 D3 ブレインにより超対称性を破り Minkowski 真空 (ないし dS 真空) を実現. または, 磁化 D7 ブレインの誘起する超ポテンシャルの D 項により自発的に SUSY を破る.



10.15.2 Flux コンパクト化により得られる 4次元超重力理論

II 型超重力理論では, RR フォームフラックスが存在しない直積型コンパクト化はモジュライに対する超ポテンシャルを生み出さない. しかし, フラックス存在すると, 有限なポテンシャルが生じる. (Gukov S, Vafa C, Witten E 2000[232]; Giddings SB, Kachru S, Polchinski J 2002[196])

Moduli についての仮定 IIB 型理論において, 計量が

$$ds^2 = e^{-4u(x)} ds^2(X_4) + e^{4u(x)} ds^2(Y_6) \quad (10.15.3)$$

の形をしていて, モジュライ場が次の構成 (対応する $N = 1$ 超組) を持つとする:

- 重力場: $g_{\mu\nu}$
- dilaton-axion 場: $\tau = C_0 + ie^{-\Phi}$
- サイズモジュラス: $\rho = b/\sqrt{2} + ie^{4u}$. ここで,

$$C_{[4]} = a_{[2]} \wedge J \Rightarrow da_{[2]} = e^{-8u} *_X db \quad (10.15.4)$$

- 複素モジュライ: $z^a, a = 1, \dots, h^{2,1}$

τ, ρ セクター このとき, 10次元作用積分より, τ, ρ に対する作用積分は

$$S = \frac{1}{2\kappa_4^2} \int_X d\text{vol}(X) \left(R(X) - 2 \frac{\nabla\tau \cdot \nabla\bar{\tau}}{|\tau - \bar{\tau}|^2} - 6 \frac{\nabla\rho \cdot \nabla\bar{\rho}}{|\rho - \bar{\rho}|^2} \right) \quad (10.15.5)$$

ここで,

$$\kappa_4^2 = \frac{\kappa_{10}^2}{\text{vol}(Y)} \quad (10.15.6)$$

これは, 次の Kähler ポテンシャルに対応する:

$$\mathcal{K}_1 = -\ln[-i(\tau - \bar{\tau})] - 3 \ln[-i(\rho - \bar{\rho})] \quad (10.15.7)$$

超ポテンシャルはゼロである.

複素構造モジュライセクター 一方, 複素構造モジュライに対する Kähler ポテンシャルは, 一般論より,

$$\mathcal{K}_2 = -\ln \left(-i \int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega} \right) \quad (10.15.8)$$

で与えられる. ポテンシャルを求めるため, 上記のモジュライ場による表式を 10 次元作用積分に代入すると, $G_{[3]}$ を含む項

$$S_G = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int_X d\text{vol}(X) \int_Y \frac{1}{\text{Im } \tau} *_Y G_{[3]} \wedge \bar{G}_{[3]} \quad (10.15.9)$$

が残る. ここで, $G_{[3]}$ をカイラル分解する:

$$G_{[3]} = G_{[3]}^+ + G_{[3]}^-; \quad *_Y G_{[3]}^\pm = \mp i G_{[3]}^\pm, \quad (10.15.10)$$

すると,

$$\alpha_3^+ \wedge \beta_3^+ = 0, \quad \alpha_3^- \wedge \beta_3^- = 0 \quad (10.15.11)$$

より

$$\begin{aligned} *_Y G \wedge \bar{G} &= i(-G^+ + G^-) \wedge (\bar{G}^+ + \bar{G}^-) = -2iG^+ \wedge \bar{G}^+ + iG \wedge \bar{G} \\ &= -2iG^+ \wedge \bar{G}^+ + 2(\text{Im } \tau) H_{[3]} \wedge F_{[3]} \end{aligned} \quad (10.15.12)$$

よって, S_G は

$$S_G = \int_X d\text{vol}(X) \left[-V - \int_Y H_{[3]} \wedge F_{[3]} \right] \quad (10.15.13)$$

ここで, 第 2 項は $H_{[3]}$ および $F_{[3]}$ のコホモロジー類のみで決まる位相的項. 一方, V は

$$V = -\frac{i}{2\kappa_{10}^2 \text{Im } \tau} \int_Y G_{[3]}^+ \wedge \bar{G}_{[3]}^+ \quad (10.15.14)$$

($\text{Im } \tau = 1/g_s = \text{const}$ を仮定).

このポテンシャルは, 次の超ポテンシャル

$$W = \int_Y G_{[3]} \wedge \Omega \quad (10.15.15)$$

から導かれることを示す. まず, 調和 3 形式が

$$*_Y \Omega = -i\Omega, \quad *_Y \chi_a = i\chi_a \quad (10.15.16)$$

となることに注意する。これより,

$$G_{[3]}^+ = w_0 \Omega + \bar{w}^{\bar{a}} \bar{\chi}_{\bar{a}}; \quad w_0 = \frac{\int_Y G_{[3]} \wedge \bar{\Omega}}{\int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega}}, \quad \bar{w}^{\bar{a}} = G^{\bar{a}b} \frac{\int_Y G_{[3]} \wedge \chi_b}{\int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega}}. \quad (10.15.17)$$

よって,

$$V = \frac{\int_Y G_{[3]} \wedge \bar{\Omega} \int_Y \bar{G}_{[3]} \wedge \Omega + K^{\bar{a}b} \int_Y G_{[3]} \wedge \chi_a \int_Y \bar{G}_{[3]} \wedge \bar{\chi}_{\bar{b}}}{2(\operatorname{Im} \tau) \kappa_{10}^2 (-i) \int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega}}. \quad (10.15.18)$$

一方,

$$K = -\ln[-i(\tau - \bar{\tau})] - 3 \ln[-i(\rho - \bar{\rho})] - \ln[-i \int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega}] \quad (10.15.19)$$

に対して,

$$\partial_{\tau} K = \frac{1}{\bar{\tau} - \tau}, \quad \partial_{\rho} K = \frac{3}{\bar{\rho} - \rho}, \quad \partial_a K = -k_a, \quad (10.15.20)$$

$$K_{\tau\bar{\tau}} = \frac{1}{|\bar{\tau} - \tau|^2}, \quad K_{\rho\bar{\rho}} = \frac{3}{|\bar{\rho} - \rho|^2} \quad (10.15.21)$$

より,

$$D_{\tau} W = \frac{1}{\bar{\tau} - \tau} \int_Y \bar{G} \wedge \Omega, \quad (10.15.22a)$$

$$D_{\rho} W = \frac{3}{\bar{\rho} - \rho} W, \quad (10.15.22b)$$

$$D_a W = \int_Y G \wedge \chi_a. \quad (10.15.22c)$$

よって, 超ポテンシャルとポテンシャルの関係式は

$$\begin{aligned} V &= \frac{e^K}{\kappa^2} \left[K^{i\bar{j}} D_i W \bar{D}_{\bar{j}} \bar{W} - 3|W|^2 \right] \\ &= \frac{e^K}{\kappa^2} \left[|\bar{\tau} - \tau|^2 |D_{\tau} W|^2 + K^{\bar{a}b} D_a W \bar{D}_{\bar{b}} \bar{W} \right] \\ &= \frac{\int_Y G_{[3]} \wedge \bar{\Omega} \int_Y \bar{G}_{[3]} \wedge \Omega + K^{\bar{a}b} \int_Y G_{[3]} \wedge \chi_a \int_Y \bar{G}_{[3]} \wedge \bar{\chi}_{\bar{b}}}{2(\operatorname{Im} \tau)(2\operatorname{Im} \rho)^3 \kappa^2 (-i) \int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega}} \end{aligned} \quad (10.15.23)$$

10.15.3 No-scale structure

CY に対する一般的な Kähler モジュライの定義 $D_j (j = 1, \dots, h^{1,1})$ を $H_4(Y, \mathbb{R})$ の基底となる divisors, D_j^* をその Hodge 双対から得られる

$H^2(Y, \mathbb{R})$ の基底とする. このとき, Y の Kähler 形式 ω は $h^{1,1}$ 個の実パラメータ t^j を用いて

$$\omega = \sum_j t^j D_j^* \quad (10.15.24)$$

と表される. このとき, t^j は D_j^* の双対となる $H_2(Y, \mathbb{R})$ の基底 σ_j の体積となり,

$$t^j = \int_{\sigma_j} \omega \quad (10.15.25)$$

Y の体積 \mathcal{V} は

$$\mathcal{V} \equiv \frac{1}{3} \int_Y \omega^3 = \frac{1}{6} \kappa_{jkl} t^j t^k t^l. \quad (10.15.26)$$

また, divisor D_j の体積 τ_j は

$$\tau_j = \partial_{t_j} \mathcal{V} = \frac{1}{2} \kappa_{jkl} t^k t^l \quad (10.15.27)$$

この記法の元, 複素 Kähler 変数 ρ_j を

$$\rho_j = b_j + i\tau_j \quad (10.15.28)$$

により定義する. ここで, アクシオン場 b_j は, RR 場 $C_{[4]}$ により

$$b_j = \int_{D_j} C_{[4]} \quad (10.15.29)$$

で定義される.

フラックスコンパクト化の no-scale 構造 一般に, フラックスコンパクトされた IIB 理論の 4 次元有効理論は, 次の $N = 1$ 超重力理論で与えられる:

$$K = -\ln[-i(\tau - \bar{\tau})] - 2\ln[\mathcal{V}] - \ln[-i \int \Omega \wedge \bar{\Omega}] \quad (10.15.30a)$$

$$W = \int_Y G_{[3]} \wedge \Omega \quad (10.15.30b)$$

W は Kähler モジュライに依存しないので, この系のポテンシャルは no-scale 構造をもつ:

$$V = e^K \sum_{a,b} K^{a\bar{b}} D_a W D_{\bar{b}} \bar{W}. \quad (10.15.31)$$

ここで, a, b は axion-dilaton および複素モジュライを動く.

Proof. まず,

$$\begin{aligned} K_j &= \partial_{\rho_j} K = i\mathcal{V}^{-1} \partial_{\tau_j} \mathcal{V} = i\mathcal{V}^{-1} \frac{\partial t^m}{\partial \tau_j} \tau_m \\ &= 3 \ i\mathcal{V}^{-1} \partial_{\tau_j} \mathcal{V} - i\mathcal{V}^{-1} t^j \end{aligned} \quad (10.15.32)$$

より,

$$K_j = \frac{i}{2\mathcal{V}} t^j. \quad (10.15.33)$$

また,

$$K_{j\bar{k}} = -\frac{1}{4\mathcal{V}} \frac{\partial t^j}{\partial \tau_k} + \frac{1}{8\mathcal{V}^2} t^j t^k \quad (10.15.34)$$

より,

$$K_{j\bar{k}} \tau^k = \frac{1}{4\mathcal{V}} t^j \Rightarrow K^{j\bar{k}} t^j = 4\mathcal{V} \tau_k. \quad (10.15.35)$$

よって,

$$|W|^{-2} K^{j\bar{k}} D_j W \overline{D_k W} = K^{j\bar{k}} K_j K_{\bar{k}} = \frac{1}{4\mathcal{V}^2} K^{j\bar{k}} t^j t^k = \frac{1}{\mathcal{V}} \tau_k t^k = 3. \quad (10.15.36)$$

Q.E.D.

10.15.4 複素モジュライの固定

基底状態では $V = 0$ より, $G_{[3]}$ は ISD(imaginary self-dual) となる :

$$D_a W = 0 \Rightarrow G_{[3]}^+ = 0 \Rightarrow *_Y G_{[3]} = iG_{[3]} \text{ ISD} \quad (10.15.37)$$

この条件は,

$$G_{[3]} \in \mathcal{H}^{2,1} \oplus \mathcal{H}^{0,3} \quad (10.15.38)$$

と同等で, 複素構造モジュライ (+ dilaton-axion) に対する $h^{2,1} + 1$ 個の拘束条件となるので, 一般にそれらの値を完全に決定する.

ただし, 超対称性はより強い条件 $D_\tau W = K_\tau D = 0$, $D_i W = K_i W = 0$ (任意の i) を要求する. 今のモデルでは, この条件は, $\mathcal{D}_\rho W = 0 \Rightarrow W = 0$, したがって,

$$G_{[3]} \in \mathcal{H}^{2,1} \quad (10.15.39)$$

を要求する.

また、この基底状態は、フラックス $G_{[3]}$ に依存するが、超ポテンシャルの形より、正確には $G_{[3]}$ のコホモロジー類にのみ依存する：

$$\int_{A_j} F_3 = 4\pi^2 \alpha' M_j, \quad \int_{B_j} H_3 = -4\pi^2 \alpha' K_j \quad (10.15.40)$$

さらに、弦理論においては、これらの (M_j, K_j) は整数に量子化される。

10.15.5 非摂動的量子効果

摂動論の範囲では、Kähler モジュライの超ポテンシャルはゼロであるが、非摂動的効果を考慮すると自明でないポテンシャルが生成される可能性がある。例えば、IIB モデルの F 理論的記述において、1 2次元の時空が 8次元 CY_8 により 4次元にコンパクト化される際に、 CY_8 が算術種数 1 の divisor D を含む場合 ($\chi(D, \mathcal{O}_D) = 1$)、超ポテンシャルにサイズモジュラスに依存した項が加わる：(Witten E 1996 [390])

$$W = W_0(z) + A(z)e^{ia\rho}; \quad a = 2\pi/n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10.15.41)$$

このとき、対応するポテンシャル $V(\rho)$ は、 $\sigma = e^{4u} = \text{Im } \rho$ に関して最小点 ρ_m を持つようになる。この最小点は、 $V(\rho_m) < 0$ より AdS^4 時空を与える (KKLT[272]。また、この基底状態は $N = 1$ 超対称性を保つ。

ここで、真空はフラックスを特徴づける整数値の組 (M_j, N_j) ごとに決まり、宇宙項の値が準連続となる無限個の超対称な真空の集合を与える (ランドスケープ問題)。

σ に対するポテンシャルは、複素構造モジュライ z が固定されたとすると、 $b = \text{Re } \rho$ について最小化して、

$$V = \frac{C}{x} e^{-2x} - \frac{D}{x^2} e^{-x}; \quad x = a\sigma, \quad (10.15.42)$$

$$C = \frac{a^3 |A|^2}{6}, \quad D = \frac{a^3 |A| |W|}{2}. \quad (10.15.43)$$

このポテンシャルは、

$$\frac{C}{D} = \frac{|A|}{3|W|} > 2.5865 \dots \quad (10.15.44)$$

のとき極大点 $x = x_1$ と極小点 $x = x_2$ をもつ。

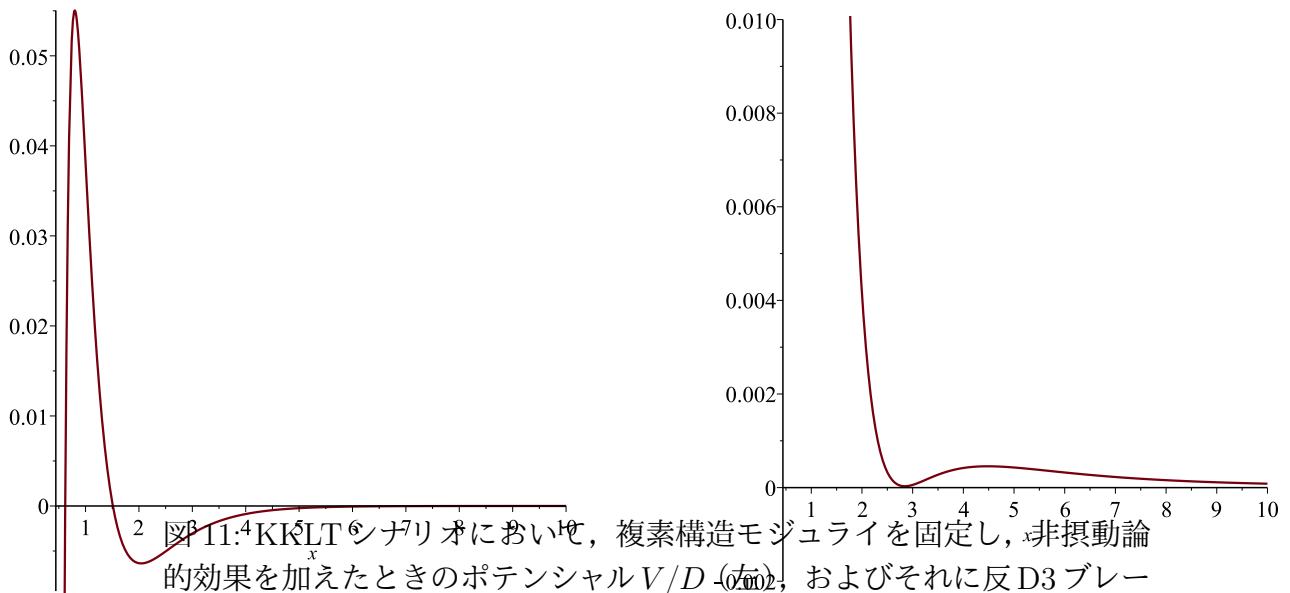


図 11.4 KKLTT シナリオにおいて、複素構造モジュライを固定し、非摂動論的効果を加えたときのポテンシャル V/D (左), およびそれに反 D3 ブレーンを加えて uplift したポテンシャル $V/D + E/x^3$. $C/D = 3, E = 0.084$ の場合.

10.15.6 Vacuum uplift

References

- Kachru S, Pearson J, Verlinde H: jhep0206, 021 (2002)

”Brane/flux annihilation and the string dual of a non-supersymmetric field theory”

Fractional D3 ブレーン ($H \wedge F$) のみが存在する場合の Warped コンパクト化の突起部分を表す Klebanov-Strassler 解 (deformed conifold) は,

$$\int_{S^3} F_3 = 4\pi^2 M \quad (10.15.45)$$

とすると, 突起の先端近傍で

$$\begin{aligned} ds^2 &= h(r)^{-1/2} g(X_4) + h(r)^{1/2} g(CY_3) \\ &\simeq a_0^2 g(X_4) + g_s M b_0^2 \left(\frac{dr^2}{2} + d\Omega_3^2 + r^2 d\Omega_2^2 \right) \end{aligned} \quad (10.15.46)$$

とあらわされる. ここで,

$$a_0^2 \simeq \frac{\epsilon^{4/3}}{g_s M}, \quad b_0^2 \simeq 0.93266 \quad (10.15.47)$$

である.

いま, この空間に反 D3 ブレーンを入れると, F_5 フラックスによる力

$$F_r(r) = -2\mu_3 \partial_r (h^{-1}) \quad (10.15.48)$$

により突起の先端 $r = 0$ に引かれそこに溜る. 一般に, 反 D3 ブレーンの作用積分は

$$\begin{aligned} S_{D3} &= \frac{\mu_3}{g_s} \int \text{Tr} \sqrt{\det(G_{//} + 2\pi g_s F) \det Q} \\ &\quad - 2\pi\mu_3 \int \text{Tr} I_\Phi I_\Phi B_6. \end{aligned} \quad (10.15.49)$$

これに apex 近傍での計量と場の値を代入し, adjoint スカラ Φ について極小化することにより次のポテンシャルを得る:

$$\tilde{V}_{\text{eff}} \simeq 2 \frac{\mu_3}{g_s} \left(p - \frac{\pi^2}{6} g_s^8 f^4 p(p^2 - 1) \right) \simeq 2 \frac{\mu_3 p}{g_s} \left(1 - \frac{8\pi^2 (p^2 - 1)}{3b_0^{12} M^2} \right). \quad (10.15.50)$$

これにワープ因子を考慮すると,

$$V_{\text{eff}} \simeq \frac{a_0^4}{h(0)^3} \tilde{V}_{\text{eff}} = \frac{8D}{\sigma^3}; \quad (10.15.51)$$

$$D \simeq \frac{2pa_0^4\mu_3}{g_s^4} \quad (10.15.52)$$

$$(\sigma = \text{Im } \tau = g_s^{-1}h).$$

10.15.7 インフレーションモデル

10.15.7.1 1. モジュライインフレーション

Racetrack model

- Kähler モジュライが1個 $T = X + iY$ で, 超ポテンシャルに非摂動論効果に起因する2種類の項が現れる場合に, axion 方向に沿って saddle point インフレーションが起きる.
- モデル

$$K = -3\ln(T + \bar{T}); \quad T = X + iY, \quad (10.15.53a)$$

$$W = W_0 + Ae^{-aT} + Be^{-bT} \quad (10.15.53b)$$

- 運動項と Uplifted ポテンシャル

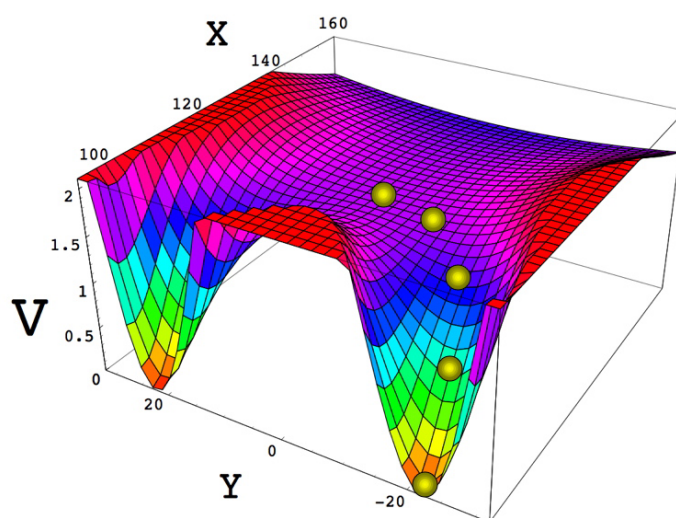
$$\mathcal{L}_k = \frac{3M_P^2}{4X^2} ((\partial X)^2 + (\partial Y)^2), \quad (10.15.54)$$

$$V = V_F + \frac{E}{X^\alpha}; \quad (10.15.55)$$

$$\begin{aligned} V_F = & \frac{e^{-aX}}{6X^2} [aA^2(aX + 3)e^{-aX} + 3W_0aA \cos(aY)] \\ & + \frac{e^{-bX}}{6X^2} [bB^3(bX + 3)e^{-bX} + 3W_0bA \cos(bY)] \\ & + \frac{e^{-(a+b)X}}{6X^2} [AB(2abX + 3a + 3b) \cos((a-b)Y)] \end{aligned} \quad (10.15.56)$$

このポテンシャルは, パラメータを適当に調整すると, 2つの最小点 (Mink/dS) と1つの鞍点をもつ.

- 例 : $A = \frac{1}{50}, B = -\frac{35}{1000}, a = \frac{2\pi}{100}, b = \frac{2\pi}{90}, W_0 = -\frac{1}{25000}$
 saddle pt : $(X_s, Y_s) = (123.22, 0), \epsilon_s = 0, \eta_s = -0.0060957a$
 最小点 : $(X_m, Y_m) = (96.130, \pm 22.146)$ (10.15.57b)
- このモデルでは, $|W_0| \ll 1, |a-b| \ll 1$ と取ると, 鞍点近傍で $\cos((a-b)Y)$ 項により (Natural inflation タイプの) インフレーションが起きる. ただし, さらに初期値の微調整が必要.



Better racetrack model

Kähler モジュライが 2 個の場合に, それぞれの非摂動論効果の組み合わせにより, やはり axion 方向に saddle point インフレーションが起きる.

- モデル : $CP^4[1, 1, 1, 6, 9]$ コンパクト化

$$K = -2 \ln \mathcal{V}; \quad \mathcal{V} = \frac{\sqrt{2}}{18} (X_2^{3/2} - X_1^{3/2}), \quad (10.15.58a)$$

$$W = W_0 + A e^{-aT_1} + B e^{-bT_2}. \quad (10.15.58b)$$

- ポテンシャル

$$V = V_F + \frac{D}{162\mathcal{V}^2}; \quad (10.15.59)$$

$$V_F = \frac{216}{(X_2^{3/2} - X_1^{3/2})^2} \left[P_1 e^{-2aX_1} + P_2 e^{-2bX_2} + W_0 (P_3 e^{-aX_1} \cos(aY_1) + P_4 e^{-bX_2} \cos(bY_2)) \right. \\ \left. + P_5 e^{-aX_1 - bX_2} \cos(-aY_1 + bY_2) \right], \quad (10.15.60)$$

$$P_1 = aA^2(3X_1 + 2aX_2^{3/2}X_1^{1/2} + aX_1^2), \quad P_2 = P_1(a, A, 1 \rightarrow b, B, 2), \quad (10.15.61)$$

$$P_3 = 3aAX_1, \quad P_4 = 3bBX_2, \quad (10.15.62)$$

$$P_5 = 3AB(aX_1 + bX_2 + 2abX_1X_2). \quad (10.15.63)$$

- 例 : $A = 0.56, B = 7.46666 \times 10^{-5}, a = 2\pi/40, b = 2\pi/258, D = 6.26019 \times 10^{-9}, W_0 = 5.22666 \times 10^{-6}$

$$\text{minimum} : X_1 = 98.75839, X_2 = 171.06117, Y_1 = 0, Y_2 = 129; \\ \mathcal{V}_s = 99, \quad m^2 = 10^{-6} \sim 10^{-7}, \quad (10.15.64a)$$

$$\text{saddle point} : X_1 = 108.96194, X_2 = 217, 68875, Y_1 = 20, Y_2 = 129; \\ V = 3.35 \times 10^{-16} M_P^4. \quad (10.15.64b)$$

$$\text{unstable direction} : \delta X_1 = \delta X_2 = 0, \delta Y_1 = -0.6546, \delta Y_2 = 0.7560; \\ \eta \simeq -0.01 \quad (10.15.64c)$$

インフレーションスケールは小さい !!

$$H_{\text{inf}} \approx 10^{-8} M_P \Rightarrow r \approx 10^{-12} \quad (10.15.65)$$

10.15.7.2 2. ブレーンインフレーション

ブレーンインフレーションの η 問題 D3- $\overline{D3}$ 系のエネルギーは, r をブレーン間の距離として

$$V(r) = 2T_3 \left(1 - \frac{1}{2\pi^3} \frac{T_3}{m_{\text{pl}10}^8 r^4} \right) = 2T_3 \left(1 - \frac{1}{2\pi^3} \frac{T_3^3}{m_{\text{pl}}^2 \phi^4} \right) \quad (10.15.66)$$

ここで, $\phi = T_3^{1/2} r$ は canonically normalized field. m_{pl} と $m_{\text{pl}10}$ の関係は $m_{\text{pl}}^2 = m_{\text{pl}10}^8 L^6$ (L は CY のサイズ) となるので, η パラメータは

$$\eta = -\frac{10}{\pi^3} \left(\frac{L}{r} \right)^6 \sim -0.3 \left(\frac{L}{r} \right)^6 \quad (10.15.67)$$

よって,

$$r < L \Rightarrow |\eta| > 0.3 \quad (10.15.68)$$

KKLMMT

1. ポテンシャル: ρ をサイズモジュライ, ϕ を D3-反 D3 の距離パラメーターとして,

$$K = -3 \ln(\rho + \bar{\rho} - k(\phi, \bar{\phi})) \quad (10.15.69)$$

超ポテンシャルが ϕ に依存しないとすると, ρ の安定点 $\rho = \rho_0$ 近傍で, $m_\phi^2 \sim H^2$ となりインフレーションは起こらない.

2. 超ポテンシャルに ϕ 依存性を持たせると, 微調整により $m_\phi^2 = O(10^{-2}) H^2$ とでき, インフレーションが起きる.

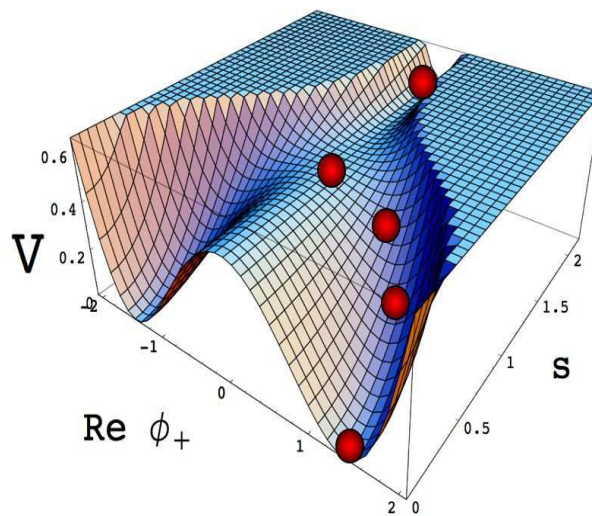
D3/D7 ブレーンインフレーション

1. ポテンシャル

$$K = -3 \ln(\rho + \bar{\rho}) - \frac{1}{2}(\phi - \bar{\phi})^2 \quad (10.15.70)$$

超ポテンシャルは ϕ に依存せず, $s = \text{Re } \phi$ がインフラトンとなる. s は D3-D7 の距離を表す.

2. 他の hypermultiplet との相互作用は, 量子効果として s に log 型ポテンシャルを生成し, 全体としては hybrid 型インフレーションが実現される.



文献ノート

1998 (ブレイン・反ブレインインフレーションモデル) (Dvali GR, Tye SHH [137])

2003 (**KKLT モデル**) すべてのモジュライが安定化され, 準安定 dS 真空をもつ, IIB 理論のワープしたフラックスコンパクト化モデル (Kachru S, Kallosh R, Linde A, Trivedi S[272]).

(**KKLMMT モデル**) KKLT モデルと $D\bar{D}$ 対を用いたブレインインフレーションモデルおよびワープを組み合わせたインフレーションモデル. (Kachru S, Kallosh R, Linde A, Maldacena J, McAllister L, Trivedi S[271])

($D3/D7$ ブレインインフレーションモデル) (Hsu JP, Kallosh R, Prokushkin S[254]; Koyama F, Tachikawa Y, Watari T[287]; Firouzjahi H, Tye SHH[158]; Hsu JP, Kallosh R 2004[253]; Dasgupta K, Hsu JP, Kallosh R, Linde A, Zagermann M 2004[101]; Chen P, Dasgupta K, Narayan K, Shmakova M, Zagermann M 2005[79])

(**DBI インフレーションモデル**) (Silverstein E, Tong D[352]; Alishahiha M, Silverstein E, Tong D 2004[7]; Chen XG 2005[81, 80])

2004 (**Racetrack モデル**) KKLT 型モデルでインスタントン効果に基づくサイズモジュラスポテンシャルとして, 2つの指数関数型ポテンシャルの和を用いると, スローロール条件を満たすモデルができることを指摘 (ただし, fine-tuning が必要). (Blanco-Pillado JJ, Burgess CP, Cline JM, Escoda C, Gomez-Reino M, Kallosh R, Linde A, Quevedo F [41])

2005 (**タキオンインフレーションモデル**) (Cremades D, Quevedo F, Sinha A[87])

(**N-flation**) (Dimopoulos S, Kachru S, McGreevy J, Wacker J [117])

ヘテロ理論・M理論でのインフレーション [Buchbinder EI 2005[57]; Becker K, Becker M, Krause A 2005[29]]

2006 (改良版 **Racetrack モデル**) CY orientifold $CP^4_{[1,1,1,6,9]}$ を用いた racetrack モデル. WMAP3years と整合的なスペクトル指数 $n_s \approx 0.95$

を与える. (Blanco-Pillado JJ, Burgess CP, Cline JM, Escoda C, Gomez-Reino M, Kallosh R, Linde A, Quevedo F[42])

2007 "A Delicate Universe": D3-D7 モデルでの η 問題 (Baumann D, Dymarsky A, Klebanov IR, McAllister L, Steinhardt PJ 2007[25])

10.15.8 KKLT シナリオの問題点

- Kähler モジユライが 1 自由度の場合, ポテンシャルの極小値は最小値でなく, $\sigma \rightarrow 0$ で $V \rightarrow -\infty$
- Kähler モジユライが 2 自由度以上の場合, ポテンシャルが安定な最小点を持つ可能性はあるが, 最小点の存在はフラックスや非摂動論効果のパラメータに敏感に依存し, 最小点の存在はモデルやパラメーターごとに個別に確認が必要.
- ポテンシャルが極小となる内部空間サイズは一般的にストリングスケールとなり, 古典論が適用可能な十分大きいサイズを実現するには, フラックスを微調整して, $|W^0| \lesssim 10^{-4}$ にしないとイケない.

10.16 LVS

概要 KKLT シナリオに Kähler ポテンシャルに対する α'^3 補正を加えることにより, W_0 のチューニングなしに Kähler モジユライを内部空間体積 \mathcal{V} が大きな値となるよう安定化することが可能となる. また, このシナリオでは, ストリングスケール, KK スケール, モジユライ質量, $m_{3/2}$ が \mathcal{V} のべきにより決まるヒエラルキーが実現される.

References

- Balasubramanian V, Berglund P, Conlon JP, Quevedo F: jhep 03, 007 (2005)
"Systematics of moduli stabilisation in CY flux compactification"
- Joseph P. Conlon, Fernando Quevedo and Kerim Suruliz: jhep 08, 007 (2005)

”Large-volume flux compactifications: moduli spectrum and D3/D7 soft supersymmetry breaking”

T2/LVS

10.16.1 Large volume scenario

- 基本モデル

- IIB 型理論の no scale ISD CY フラックスコンパクト化において, Kähler ポテンシャルに対する α'^3 補正を考慮 \Rightarrow 複素モジュライ固定

- CY の位相についての制限 : $h^{2,1} > h^{1,1} > 1$

- α'^3 補正 + 非摂動論効果 (インスタントン/gaugino 凝縮): \Rightarrow Kähler モジュライの安定化

CY の体積 \mathcal{V} が大きい極限で, ポテンシャル V は負からゼロに近づき, Kähler モジュライ $\rho_j = b_j + i\tau_j$ の 1 つ $j = s$ 以外は $\tau_j \sim \mathcal{V}^{2/3}$ に従って増大, $\tau_s \sim \log(\mathcal{V})$ となる方向でポテンシャルが最小点をもつ.

\Rightarrow 超対称性の敗れた adS 真空

- 反 D3 ブレイン/magnetized D7 ブレインにより Minkowski 真空 (ないし dS 真空) を実現.

10.16.2 Kähler ポテンシャルに対する α'^3 補正

II 型超弦理論の低エネルギー極限の α' 展開の最初の補正は α'^3 次で現れる:

$$S_{\text{IIB}} = S_{b,0} + \alpha'^3 S_{b,3} + \alpha'^4 S_{b,4} + \cdots + S_{\text{CS}} + S_{l,0} + \alpha'^2 S_{l,2} + \cdots \quad (10.16.1)$$

ここで, $S_{b,0}$ と S_{CS} は通常的作用積分, $S_{l,0}$ は最低次のブレーン作用積分:

$$S_{b,0} = \frac{1}{(2\pi)^7 \alpha'^4} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[e^{-2\phi} (R_s + 4(\nabla\phi)^2) - \frac{1}{2} F_1^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!} G_3 \cdot \bar{G}_3 - \frac{1}{4 \cdot 5!} \tilde{F}_5^2 \right], \quad (10.16.2a)$$

$$S_{\text{CS}} = \frac{1}{4i(2\pi)^7 \alpha'^4} \int e^\phi C_4 \wedge G_3 \wedge \bar{G}_3, \quad (10.16.2b)$$

$$S_{l,0} = \sum_{\text{sources}} \left(- \int d^{p+1} \xi T_p e^{-\phi} \sqrt{-g} + \mu_p \int C_{p+1} \right). \quad (10.16.2c)$$

リーディングの補正は一般に次の形をもつ (完全には決定されていない):

$$S_{b,3} \sim \frac{\alpha'^3}{\alpha'^4} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left[\mathcal{R}^4 + \mathcal{R}^3 (G_3^2 + F_5^2 + (\nabla\tau)^2 + \nabla^2\tau) \right. \\ \left. + \mathcal{R}^2 ((DG_3)^2 + (DG_5)^2 + G_3^4 + \dots) + \mathcal{R} (G_3^6 + \dots) + G_3^8 \right] \quad (10.16.3)$$

これらのうち, 10次元で \mathcal{R}^4 に比例する項が4次元有効理論において Kähler ポテンシャルに α'^3 の補正を生み出し, その具体的な形は次の式で与えられると予想されている:

$$K = K_{\text{cs}} - 2 \ln \left(\mathcal{V} - \frac{\chi(Y)}{8(2\pi)^3} f_{3/2}^{(0,0)}(\tau, \bar{\tau}) \right). \quad (10.16.4)$$

ここで,

$$f_{3/2}^{(0,0)}(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{e^{-3\phi/2}}{|m + n\tau|^2} \\ = \frac{2\zeta(3)}{e^{3\phi/2}} + \frac{2\pi^2}{3} e^{\phi/2} + \text{instanton terms}. \quad (10.16.5)$$

10.16.2.1 KKLТ との比較

Kähler モジュライが体積モジュライ ρ のみの場合,

$$\mathcal{V} = \frac{5}{6} t^3 = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \sigma^{3/2} \quad (\sigma = -i(\rho - \bar{\rho})/2) \quad (10.16.6)$$

より, $\mathcal{V} \gg \xi$ で

$$V \approx e^K \left[\frac{4\sigma^2}{3} a^2 |A|^2 e^{-2a\sigma} - 4a |W A a| e^{-a\sigma} + \frac{3\sqrt{5}\xi |W|^2}{\sqrt{2} g_s^{3/2} \sigma^{3/2}} \right] \quad (10.16.7)$$

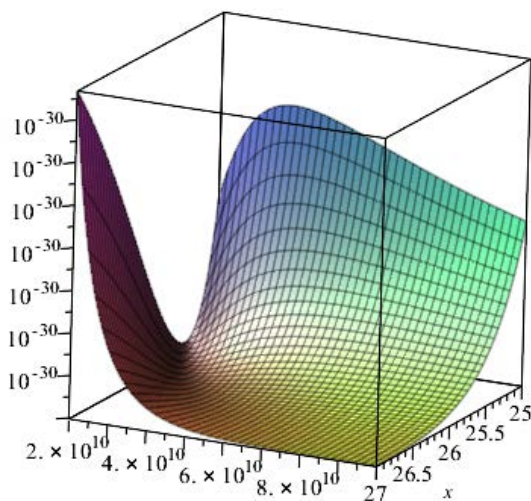


図 12: $CP^4[1, 1, 1, 6, 9]$ LVC で得られる 2次元セクターでのポテンシャル.
 $a_1 = 2\pi, A_1 = 1, W_0 = 10$

となる。ここで、

$$\xi = -\frac{\zeta(3)}{2(8\pi)^3}\chi(Y). \quad (10.16.8)$$

よって、 \mathcal{V} が大きい極限および小さい極限の両方で、最後の補正項が支配的となる。これは、KKLT モデルが妥当でないことを意味する。CY に対し、

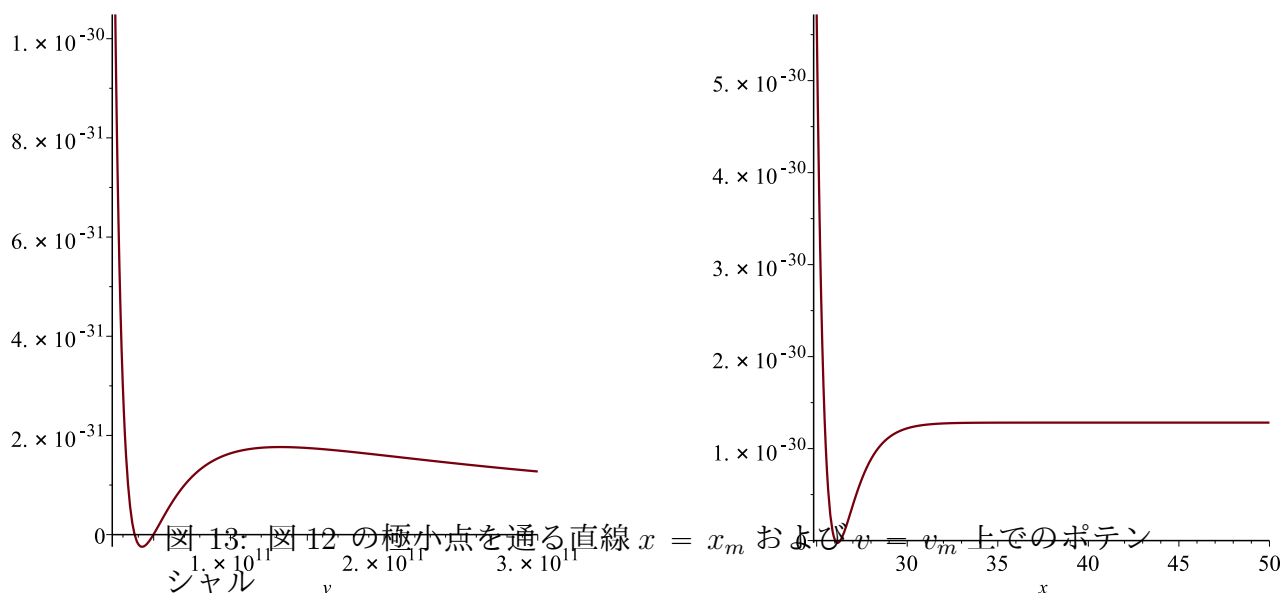
$$\chi(Y) = 2(h^{1,1} - h^{2,1}) \quad (10.16.9)$$

なので、 $h^{2,1} > h^{1,1}$ なら $\xi > 0$ 。

10.16.2.2 例： $CP^4[1, 1, 1, 6, 9]$ の複素超曲面

例として、18 次の射影代数多様体 $CP^4[1, 1, 1, 6, 9]$ の複素超曲面 Y で表される CY を考えると、モジュライの数は、 $h^{1,1} = 2, h^{2,1} = 272$ である ($\chi(Y) = -540$)。この CY 族の中で $\Gamma = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{18}$ 不変性を持つものに限定すると、複素構造モジュライは ϕ と ψ の 2 個になる：

$$Y : z_1^{18} + z_2^{18} + z_3^{18} + z_4^3 + z_5^3 - 18\psi z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 - 3\phi z_1^6 z_2^6 z_3^6 = 0 \quad (10.16.10)$$



を考える。体積は

$$\mathcal{V} = \frac{t_2}{2}(t_1^2 + 6t_1t_2 + 12t_2^2) \quad (10.16.11)$$

と書けるので,

$$\tau_1 = \frac{1}{2}t_1^2, \quad \tau_2 = \frac{1}{2}(t_1 + 6t_2)^2, \quad (10.16.12)$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_2^{3/2} - \tau_1^{3/2}). \quad (10.16.13)$$

一方, すべての複素モジュライが固定されているとして, 超ポテンシャルは

$$W = W_0 + A_1 e^{-(a_1/g_s)T_1} + A_2 e^{-(a_2/g_s)T_2}. \quad (10.16.14)$$

よって, ポテンシャルは \mathcal{V} の大きい極限 $\tau_2 \gg \tau_1 \sim 1$ で

$$V = \frac{\lambda}{\mathcal{V}} x^{1/2} e^{-2x} - \frac{\mu}{\mathcal{V}^2} x e^{-x} + \frac{\nu}{\mathcal{V}^3}, \quad (10.16.15)$$

$$x = a_1 t_1 / g_s, \quad (10.16.16)$$

$$\lambda = 24\sqrt{2}a_1^{3/2}|A_1|^2, \quad \mu = 4|A_1W|, \quad \nu = \frac{3}{4}\xi|W|^2 \quad (10.16.17)$$

このポテンシャルは，一般に

$$x = x_m \sim \left(\frac{4\nu\lambda}{\mu^2} \right)^{2/3}, \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}_m \sim \frac{\mu}{2\lambda} \sqrt{x_m} e^{x_m} \quad (10.16.18)$$

で最小値を取る．例えば

$$\xi = 1.3084 \dots, \quad a_1 = 2\pi, \quad A_1 = 1, \quad W_0 = 10 \quad (10.16.19)$$

に対して，

$$x_m = 26.15, \quad \mathcal{V}_m = 4.245 \times 10^{10} \Rightarrow V_m = 2.4517 \times 10^{-32}. \quad (10.16.20)$$

Reference

- Denef F, Douglas MR, Florea B: jhep0406, 034 (2004)

“Building a Better Racetrack”

10.16.3 質量スペクトル

KK モードと複素構造モジュライ ストリングスケールを

$$m_s = \frac{1}{\ell_s}; \quad \ell_s = 2\pi\sqrt{\alpha'} \quad (10.16.21)$$

とおくと， $R_s = R/\ell_s$, $\mathcal{V}_s = \mathcal{V}/\ell_s^6$ として，

$$M_P^2 = \frac{4\pi\mathcal{V}_s}{g_s^2\ell_s^2} \Rightarrow m_s = \frac{g_s}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s}} M_P \quad (10.16.22)$$

より

- stringy excitations:

$$m_S^2 = \frac{n}{\alpha'} \Rightarrow m_S \sim 2\pi m_s \quad (10.16.23)$$

- KK modes:

$$m_{\text{KK}}^2 = \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2 R^2}{\alpha'^2} \Rightarrow m_{\text{KK}} \sim \frac{m_s}{R_s} \approx \frac{2\pi m_s}{\mathcal{V}_s^{1/6}}, \quad m_W \sim (2\pi)^2 R_s m_s \quad (10.16.24)$$

- complex structure moduli:

$$m_{\text{CS}} = \mathcal{O}(1) \frac{g_s N m_s}{\sqrt{\mathcal{V}_s}} \quad (10.16.25)$$

ここで， N はフラックスの大きさ（量子数）である．

Scale	Mass
4-dimensional Planck mass	$\frac{4\pi\mathcal{V}_s^0}{g_s}m_s = M_P$
String scale m_s	$m_s = \frac{g_s}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}}M_P$
Stringy modes m_S	$2\pi m_s = \frac{g_s\sqrt{\pi}}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}}M_P$
Kaluza-Klein modes m_{KK}	$\frac{2\pi}{\mathcal{V}_s^{\frac{1}{5}}}m_s = \frac{g_s\sqrt{\pi}}{(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{2}{3}}}M_P$
Gravitino $m_{3/2}$	$\frac{g_s W_0}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}}m_s = \frac{g_s^2 W_0}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}}M_P$
Dilaton-axion m_τ	$\frac{g_s N}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}}m_s = \frac{g_s^2 N}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}}M_P$
Complex structure moduli m_ϕ	$\frac{g_s N}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}}m_s = \frac{g_s^2 N}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}}M_P$
‘Small’ Kähler modulus $m_{\tau_4}, m_{\tilde{\tau}_4}$	$\frac{W_0}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}}m_s = \frac{g_s W_0}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}}M_P$
Modulinos $m_{\tilde{\tau}}, m_{\tilde{\phi}}$	$\frac{g_s W_0}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}}m_s = \frac{g_s^2 W_0}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}}M_P$
‘Large’ volume modulus m_{τ_5}	$\frac{g_s W_0}{\mathcal{V}_s^0}m_s = \frac{g_s^2 W_0}{\sqrt{4\pi(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{2}{3}}}}M_P$
Volume axion m_{b_5}	$\exp(-(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{2}{3}})M_P \sim 0$

表 23: $CP^4[1, 1, 1, 6, 9]$ によるコンパクト化のモジュライ質量スペクトルの \mathcal{V} 依存性

Scale	Mass	GUT	Intermediate	TeV
M_P	M_P	2.4×10^{18} GeV	2.4×10^{18} GeV	2.4×10^{18} GeV
m_s	$\frac{g_s}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$	1.0×10^{15} GeV	1.0×10^{12} GeV	1.0×10^3 GeV
m_S	$2\pi m_s = \frac{g_s \sqrt{\pi}}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}} M_P$	6×10^{15} GeV	6×10^{12} GeV	6×10^3 GeV
m_{KK}	$\frac{2\pi m_s}{(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{1}{6}}} = \frac{g_s \sqrt{\pi}}{(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{2}{3}}} M_P$	1.5×10^{15} GeV	1.5×10^{11} GeV	0.15 GeV
$m_{3/2}$	$\frac{g_s^2 W_0}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$	1.5×10^{12} GeV	1.5×10^6 GeV	1.5×10^{-12} GeV
m_τ	$\frac{g_s N m_s}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}} = \frac{g_s^2 N}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$	1.5×10^{12} GeV	1.5×10^6 GeV	1.5×10^{-12} GeV
m_{cs}	$\frac{g_s N m_s}{\sqrt{\mathcal{V}_s^0}} = \frac{g_s^2 N}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$	1.5×10^{12} GeV	1.5×10^6 GeV	1.5×10^{-12} GeV
m_{τ_4}, m_{b_4}	$\frac{a_4 g_s W_0}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P$	1.5×10^{11} GeV	1.5×10^5 GeV	1.5×10^{-11} GeV
m_{τ_5}	$\frac{g_s^2 W_0}{\sqrt{4\pi(\mathcal{V}_s^0)^{\frac{3}{2}}}} M_P$	2.2×10^{10} GeV	22 GeV	2.2×10^{-26} GeV
m_{b_5}	$\exp(-a_5 \tau_5) M_P \sim 0$	$\sim 10^{-300}$ GeV	$\exp(-10^6)$ GeV	$\exp(-10^{18})$ GeV

表 24: LVC でのモジュライ質量スペクトルの例

Kähler モジュライとフェルミ粒子 ($CP^4[1, 1, 1, 6, 9]$ モデル)

Kähler モジュライの質量は

$$m_{\tau_2} = O(1) \frac{g_s^2 W_0}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}^{3/2}} M_P, \quad (10.16.26a)$$

$$m_{b_2} \approx e^{-a_2 \tau_2} \sim \exp(-34\mathcal{V}_s^{2/3}), \quad (10.16.26b)$$

$$m_{\tau_1} = O(1) \frac{a_1 g_s W_0}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P, \quad (10.16.26c)$$

$$m_{b_1} = O(1) \frac{a_1 g_s W_0}{\sqrt{4\pi\mathcal{V}_s^0}} M_P. \quad (10.16.26d)$$

23 にあるように、一般に体積モジュライに付随するアクシオンは非常に小さな質量をもつ。

フェルミ粒子の質量は

$$m_{3/2} = e^{K/2} |W| = \frac{g_s^2 |W_0|}{\sqrt{4\pi} \mathcal{V}_s} M_P, \quad (10.16.27a)$$

$$m_{\tilde{\tau}_1} \approx \frac{a_1 g_s^2 |W_0|}{\mathcal{V}_s} M_P, \quad (10.16.27b)$$

$$m_{\tilde{\tau}_2} \approx 0 : \text{ Goldstino}, \quad (10.16.27c)$$

$$m_{\tilde{\phi}} \approx m_{\tilde{\tau}} \frac{g_s^2 |W_0|}{\mathcal{V}_s} M_P. \quad (10.16.27d)$$

ここで、最後の2つは、dilutino および複素構造モジュライに付随するフェルミ粒子。また、Goldstino は gravitino に食われて質量を与える。

10.16.4 Kähler モジュライインフレーション

概要 Kähler モジュライが3個以上存在する LVS では、小体積サイクルに対する Kähler モジュライのアクションが分数べきの Starobinsky タイプのポテンシャル $\text{const} - c \exp(-k\phi^{4/3})$ をもつ。分数べきのため、インフレーションタイプは small field 型となる ($\epsilon \sim 10^{-12}$)。

References

- Conlon, JP, Quevedo F: jhep0601, 146 (2006) [hep-th/0509012]
”Kähler moduli inflation”

仮定

1. IIB 型 SST の Large volume fluxed CY コンパクト化
2. CY は、 $h^{2,1} > h^{1,1} \geq 3$ を満たす。
3. Kähler モジュライの small cycle moduli の一つ T_s が他のモジュライと decouple:

$$\kappa_{sij} = \kappa_{ssi} = 0 \quad (i, j \neq s) \quad (10.16.28)$$

帰結

1. $\tau_s(T = b + i\tau)$ が Starobinski 型ポテンシャルを生み出し、スローロールインフレーションを起こす。

2. 観測的予言は

$$\mathcal{V}_s = 10^5 \sim 10^7, \quad (10.16.29a)$$

$$H_{\text{inf}} \sim 10^{13} \text{GeV}, \quad (10.16.29b)$$

$$n_s \simeq 1 - \frac{2}{N} = 0.960 \sim 0.967, \quad (10.16.29c)$$

$$\frac{dn_s}{d \ln k} \simeq -(6 \sim 8) \times 10^{-4}, \quad (10.16.29d)$$

$$\epsilon < 10^{-12}. \quad (10.16.29e)$$

モデル 複素構造モジュライとディラトンは安定化しているとして、Kähler モジュライ $T_j = \tau_j + ib_j$ のみを考える：

$$\mathcal{V} = \alpha \left(\tau_1^{3/2} - \sum_{i=2}^n \lambda_i \tau_i^{3/2} \right), \quad (10.16.30a)$$

$$K = K_{\text{cs}} - 2 \ln \left(\mathcal{V} + \frac{\xi}{2} \right); \xi = -\frac{\zeta(3)\chi(Y)}{2(2\pi)^3}, \quad (10.16.30b)$$

$$W = W_0 + \sum_{j=1}^n A_j e^{-a_j T_j}. \quad (10.16.30c)$$

ポテンシャルは

$$V = \sum_j 8a_j^2 A_j^2 \sqrt{\tau_j} 3\alpha \lambda_j \mathcal{V} e^{-2a_j \tau_j} - \sum_j \frac{4a_j A_j \tau_j W_0}{\mathcal{V}^2} e^{-a_j \tau_j} + \frac{3\xi W_0^2}{4\mathcal{V}^3} \quad (10.16.31)$$

\mathcal{V} を固定したとき、 τ_j について極値を取る条件は

$$\frac{a_j^{3/2} A_j \mathcal{V}}{3\alpha \lambda_j W_0} = \frac{1 - x_j}{1 - 4x_j} \sqrt{x_j} e^{x_j}; \quad x_j = a_j \tau_j. \quad (10.16.32)$$

この条件下で

$$V = V_{\text{np}} \simeq -\frac{3W_0^2}{2\mathcal{V}^3} \left[\sum_{j=2}^n \frac{\lambda_j \alpha}{a_j^{3/2}} (\ln \mathcal{V})^{3/2} - \frac{\xi}{2} \right]. \quad (10.16.33)$$

このポテンシャルに IASD flux によるアップリフトを施して、極小点で $V = 0$ とする：

$$V = V_{\text{np}} + \frac{\gamma W_0^2}{\mathcal{V}^2}. \quad (10.16.34)$$

インフレーション τ_n のみが安定化していない初期条件を考えると,

$$V \simeq V_0 - \frac{4a_n \tau_n A_n W_0}{\mathcal{V}^2} e^{-a_n \tau_n}. \quad (10.16.35)$$

τ_n の運動項を正規化すると

$$\phi = \sqrt{\frac{4\lambda}{3\mathcal{V}}} \tau_n^{3/4} \quad (10.16.36)$$

より,

$$V \simeq V_0 - \frac{4A_n W_0}{\mathcal{V}} c \phi^{4/3} e^{-c \phi^{4/3}}, \quad (10.16.37)$$

$$c = a_n \left(\frac{3\mathcal{V}}{4\lambda} \right)^{2/3}. \quad (10.16.38)$$

これより, $c \phi^{4/3} \gg 1$ のとき,

$$N \approx \frac{9\mathcal{V}}{4c^2 \phi^2 B} e^{c \phi^{4/3}}, \quad (10.16.39a)$$

$$n_s - 1 \simeq 1 - \frac{2}{N}, \quad (10.16.39b)$$

$$\epsilon \simeq \frac{9}{32N^2} \phi^{4/3}, \quad (10.16.39c)$$

$$\xi \equiv M_P \frac{V' V'''}{V^2} \approx -\frac{2}{N^2}. \quad (10.16.39d)$$

10.16.5 LVS の問題点

1. Gravitino mass problem. KKLT では, 一般に $H \lesssim m_{3/2}$ となるため, low scale SUSY breaking $m_{3/2} \sim 1\text{TeV}$ を仮定すると, インフレーションスケールが非常に低くなる. LVS では, この制限はさらに強くなり, $H \lesssim m_{3/2}^{3/2}$ となる. $m_{3/2} \sim 1\text{TeV}$ だと, $H \lesssim 10\text{keV}$ となる. この問題は, KKLT の場合, racetrack 型モデルでの fine tuning により (KL モデル [Kallosh, Linde 2004, 2007]), また LVS の場合は, inflation pt 型 small field インフレーションと run away 型再加熱 (前加熱) を組み合わせた特殊なモデルでは回避できる [Conlon JP et al 2008].
2. Runaway problem: flux CY コンパクト化では, $\mathcal{V} \rightarrow 0$ でポテンシャルが必ずゼロとなる.

References

- Kallosh R, Linde A:jhep12, 004(2004)[hep-th/041101]
”Landscape, the scale of SUSY breaking, and inflation”
- ibid: jcap04,017 (2007)[0704.0647]
”Testing String Theory with CMB”
- Conlon JP, Kallosh R, Linde A, Quevedo F: jcap 09, 011 (2008)
”Volume Modulus Inflation and the Gravitino Mass Problem”

10.17 Kähler uplifting

概要 IIB 理論のフラックスコンパクト化において, α' 補正と NP 補正の双方を考慮すると, 安定な極小臨界点が adS から dS に連続的につながる系列を作ることができる. 特に, $\bar{D}3$ や磁荷 D7 ブレーンによる D 項を使わずに dS 真空が実現可能である.

References

- Westphal A: JHEP 03, 102 (2007) 102 [hep-th/0611332]
”De Sitter string vacua from Kähler uplifting”
- Rummel M, Westphal A: jhep01, 02 (2012)
”A sufficient condition for de Sitter vacua in type IIB string theory”

Model

- IIB SST の CY コンパクト化 + 3-form flux + α'^3 -補正 + NP 効果
- CY: $h^{2,1} > h^{1,1}$
- $N \gg 1$: N は gaugino condensate を起こしている D7 ブレーンの枚数で, 対応するゲージ場は $SU(N)$.
- Kähler potential

$$K = -2 \ln \left(\mathcal{V} + \frac{\hat{\xi}}{2} \right) - \ln(S + \bar{S}) - \ln \left(-i \int_Y \bar{\Omega} \wedge \Omega \right). \quad (10.17.1)$$

$$W = W_0 + \sum_i A_i e^{-a_i T_i}; \quad W_0 = \frac{1}{2\pi} \int_Y G_{[3]} \wedge \Omega, \quad (10.17.2)$$

$$\hat{\xi} = -\frac{\zeta(3)\chi(Y)}{4\sqrt{2}(2\pi)^3} (S + \bar{S})^{3/2} = \xi e^{-3\phi/2} \quad (10.17.3)$$

10.17.1 例 : $CP^4[1, 1, 1, 1, 1]$ の divisor

$CP^4[1, 1, 1, 1, 1]$ において,

$$z_1^5 + \cdots + z_5^5 = 0 \quad (10.17.4)$$

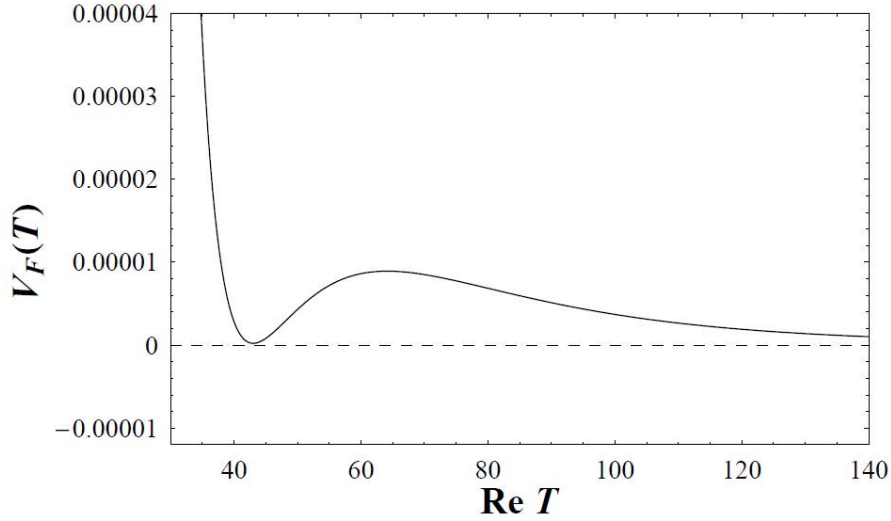


図 14: $\mathbb{C}P^4[1, 1, 1, 1, 1]$ の divisor への FCYC の Kähler uplifting で得られるポテンシャル. $a = 2\pi/100, A = 1, W_0 = -32.35, \hat{\xi} = 7.98$

により定義される CY に対して,

$$h^{1,1} = 1, h^{2,1} = 101, \chi = -200, \kappa = 5, \xi = 0.4845 \quad (10.17.5)$$

10.17.1.1 1. 複素構造モジュライとディラトンを固定した場合

ポテンシャルは

$$V(t) = e^K \left[K^{T\bar{T}} \{a^2 A^2 e^{-2at} - 2\text{Re}(aAe^{-at}\bar{W}\bar{K}_T)\} + U_{\alpha'} \right] \quad (10.17.6)$$

$$U_{\alpha'} = 3\hat{\xi} \frac{\mathcal{V}^2 + 7\hat{\xi}\mathcal{V} + \hat{\xi}^2}{(\mathcal{V} - \hat{\xi})(\hat{\xi} + 2\mathcal{V})^2} |W|^2, \quad (10.17.7)$$

$$\mathcal{V} = \gamma(T + \bar{T})^{3/2} = \gamma(2t)^{3/2} = \sqrt{6}\kappa t^{3/2}, \quad (10.17.8)$$

$$K^{T\bar{T}} = \gamma^{-4/3} \frac{\mathcal{V}^{1/3}(4\mathcal{V}^2 + \hat{\xi}\mathcal{V} + 4\hat{\xi}^2)}{12(\mathcal{V} - \hat{\xi})}. \quad (10.17.9)$$

このポテンシャルは次の scaling property をもつ :

$$a \rightarrow \lambda^{-1}a \ (N \rightarrow \lambda N), \ t \rightarrow \lambda t, \ \hat{\xi} \rightarrow \lambda^{3/2}\hat{\xi} \Rightarrow V \rightarrow \lambda^{-3}V. \quad (10.17.10)$$

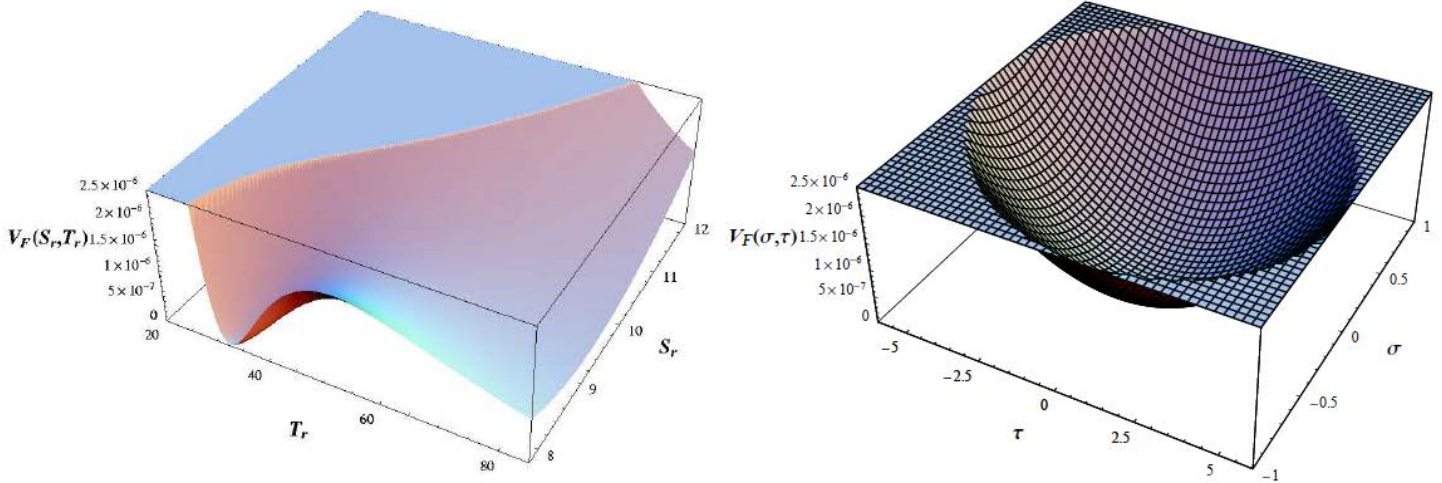


図 15: $CP^4[1, 1, 1, 1, 1]$ FCYC の Kähler uplifting で得られるポテンシャル.

dS 極小点の例

$$A = 1, a = 2\pi/10, W_0 = -1.7, \hat{\xi} = 0.4 \Rightarrow \mathcal{V}_m \approx 2,$$

$$A = 1, a = 2\pi/100, W_0 = -1.7, \hat{\xi} = 79.8 \Rightarrow \mathcal{V}_m \approx 376, T_m \approx 49, (\hat{\xi}/(2\mathcal{V}))_m \simeq 0.1,$$

$$A = 1, a = 2\pi/100, W_0 = -32.35, \hat{\xi} = 7.98 \Rightarrow \mathcal{V}_m \approx 376, T_m \approx 43, (\hat{\xi}/(2\mathcal{V}))_m \simeq 0.01$$

10.17.1.2 2. Kähler モジュライとディラトンを動かした場合

W_0 を

$$W_0 = C_1 - C_2 S; \quad C_1 = \frac{1}{2\pi} \int_Y F \wedge \Omega, \quad C_2 = \frac{1}{2\pi} \int_Y H \wedge \Omega \quad (10.17.11)$$

とおく.

$C_1 = -13.743, C_2 = 1.4, A = 1, a = 2\pi/100$ のとき, 極小点は

$$t \approx 33.3, \quad s \approx 7.9, \quad \tau = \sigma = 0 \quad (10.17.12)$$

モジュライの質量は

$$m_s^2 \approx 10^{-5}, \quad m_\sigma^2 \approx 5 \cdot 10^{-6}, \quad m_t^2 \approx 6 \cdot 10^{-8}, \quad m_\tau^2 \approx 1.4 \cdot 10^{-7}. \quad (10.17.13)$$

	$CP_{1,1,1,1,1}^4$	$CP_{2,1,1,1,1}^4$	$CP_{4,1,1,1,1}^4$	$CP_{5,2,1,1,1}^4$
$h^{2,1}$	101	103	149	145
χ	-200	-204	-296	-288
κ	5	3	2	1

表 25: $h^{1,1} = 1$ となる CY の例

10.17.2 dS 極小点が存在する条件

複素構造モジュライとディラトンが固定されたときのポテンシャルは、極点付近で

$$\begin{aligned}
 V(t) &\simeq \frac{3aA^2 + a^2A^2t}{6\gamma^2t^2}e^{-2at} + \frac{aAW_0}{2\gamma^2t^2}e^{-at} + \frac{3W_0^2\hat{\xi}}{64\sqrt{2}\gamma^3t^{9/2}} \\
 &\approx \frac{-W_0a^3A}{2\gamma^2} \left(\frac{2C}{9x^{9/2}} - \frac{e^{-x}}{x^2} \right)
 \end{aligned} \tag{10.17.14}$$

と近似される。ここで、 $x = at$ および

$$C \equiv \frac{-27W_0\hat{\xi}a^{3/2}}{64\sqrt{2}\gamma A}. \tag{10.17.15}$$

これより、

- $C < C_1 \simeq 3.65$: adS 極小点
- $C_1 < C < C_2 \simeq 3.89$: dS 極小点
- $C_2 < C$: 極小点なし.

となる。

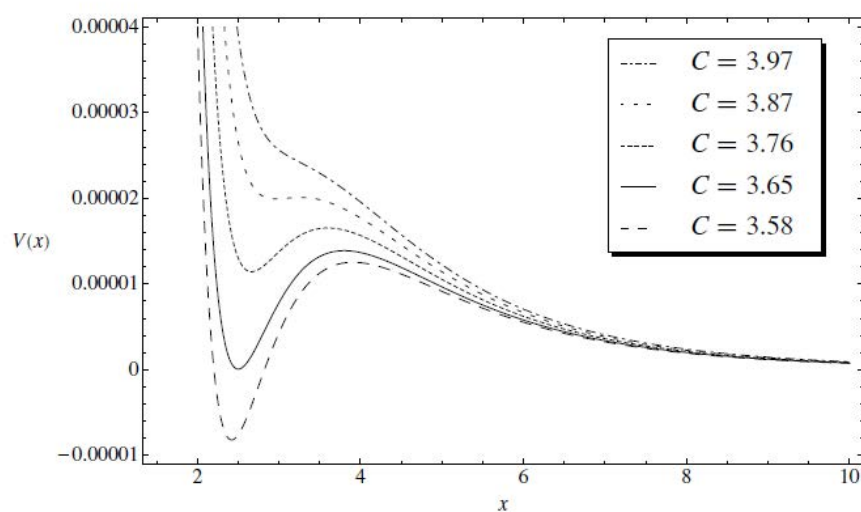


図 16: $CP^4[1, 1, 1, 1, 1]$ FCYC の Kähler uplifting で得られるポテンシャルのパラメータ C への依存性.

10.18 Monodromy Inflation

概要 String 理論において, super-Planck excursion を自然な形で可能にし, large field inflation を実現する強力なアイデア. 周期性をもつモジュライ変数が, ブレーンやフラックスとの相互作用により monodromy 的非周期性を獲得するというフレームワーク.

10.18.1 IIA 理論におけるモジュライ安定化

概要 IIA 理論では, IIB 理論と異なり, 量子効果を用いない純粹の古典的なフラックスコンパクト化ですべてのモジュライが安定化される例が存在する.

References

- Scherk J, Schwarz H: NPB153, 61 (1979)
How to get masses from extradimensions”
- Grimm TW, Louis J: NPB718, 153 (2005)
”The effective action of type IIA Calabi-Yau orientifolds”

- O DeWolfe, A Giryavets, S Kachru, W Taylor: jhep07, 066 (2005)
”Type IIA moduli stabilization”
- Derendinger JP, Kounas C, Petropoulos PM, Zwirner F: NPB715, 211 (2005)
”Superpotentials in IIA compactifications with general fluxes”
- Villadoro G, Zwirner F: jhep 06, 047 (2005)
” $\mathcal{N} = 1$ effective potential from dual type-IIA D6/O6 orientifolds with general fluxes”

IIA 理論では、フラックスのみですべてのモジュライが安定化される場合がある。

10.18.1.1 1. DGKT モデル

[O DeWolfe, A Giryavets, S Kachru, W Taylor (2005)]

- 理論 : Massive IIA
- コンパクト化 : $Y = T^2 \times T^2 \times T^2/\mathbb{Z}_3^2$ orientifold

[Dixon IJ, Harvey JA, Vafa C, Witten E: NPB261, 678 (1985)]

- T^3 : $z_i \sim z_i + 1 \sim z_i + \alpha$ ($\alpha = e^{i\pi/3}$).
- T^3/\mathbb{Z}_3 : orbifold

$$T : (z_1, z_2, z_3) \rightarrow (\alpha^2 z_1, \alpha^2 z_2, \alpha^2 z_3) \quad (10.18.1)$$

この orbifold は 27 個の不動点を持ち、CY($\chi = 72$) の特異極限。

- T^3/\mathbb{Z}_3^2 : free action Q による同一視

$$Q : (z_1, z_2, z_3) \rightarrow \left(\alpha^2 z_1 + \frac{1+\alpha}{3}, \alpha^4 z_2 + \frac{1+\alpha}{3}, z_3 + \frac{1+\alpha}{3} \right) \quad (10.18.2)$$

この orbifold は 9 個の \mathbb{Z}_3 特異点を持ち、CY($\chi = 24$) の特異極限で、 $h^{2,1} = 0$, $h^{1,1} = 12$. $h^{1,1}$ のうち 9 個は blow up modulus, 残り 3 個は幾何学的な Kähler モジュライ。

– Orientifolding $\mathcal{O} = \Omega_p(-1)^{FL}\sigma$

$$\sigma : z_i \rightarrow -\bar{z}_i \quad (10.18.3)$$

Orientifold plane O6 は T^6 の y^i 方向の T^3 に巻き付く.

- モジュライ : Kähler 3個 + axio-dilaton

$$\psi_j = b_j + iv_j \quad (j = 1, \cdot, 4), \quad (10.18.4a)$$

$$\mathcal{V} = v_1 v_2 v_3, \quad (10.18.4b)$$

$$v_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\phi} \sqrt{\mathcal{V}}. \quad (10.18.4c)$$

ここで, v_j はトーラス T_j^2 のサイズ, $b_j (j = 1, 2, 3)$ は $B_2 = \sum_{j=1}^3 b_j w_j$ ($w_j \propto idz^j \wedge d\bar{z}^j$ より), b_4 は $C_{[3]} = b_4 \alpha_0$ より生じる:

$$\Omega = 3^{1/4} idz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_0 + i\beta_0). \quad (10.18.5)$$

- Kähler ポテンシャル

$$K = -\ln(8\mathcal{V}^3 e^{4\phi}) = -\ln(32v_1 v_2 v_3 v_4^4). \quad (10.18.6)$$

- Flux $H_3, F_2, F_4, F_6 \Rightarrow W$

$$W = \frac{f_6}{\sqrt{2}} + \sum_{i=1}^3 \frac{f_{4,i}}{\sqrt{2}} \psi_i - \frac{f_0}{\sqrt{2}} \psi_1 \psi_2 \psi_3 - 2f_3 \psi_4. \quad (10.18.7)$$

ここで $f_6, f_{4,i}, f_0, f_3$ はフラックスの強度を表す整数で, 次の量子化条件を満たす

$$f_0 f_3 = -2. \quad (10.18.8)$$

この超ポテンシャルは, Kähler ポテンシャルを一定に保つ変数の変換

$$\psi_i \rightarrow \frac{C}{|f_{4,i}|} \psi_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (10.18.9a)$$

$$\psi_4 \rightarrow \frac{C}{|f_3|} \psi_4 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{f_6}{f_3}, \quad (10.18.9b)$$

$$C = \sqrt{|f_0|^{-1} |f_{4,1} f_{4,2} f_{4,3}|} \quad (10.18.9c)$$

により

$$W = C \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\hat{f}_{4,i}}{\sqrt{2}} \psi_i - \frac{\hat{f}_0}{\sqrt{2}} \psi_1 \psi_2 \psi_3 - 2\hat{f}_3 \psi_4 \right) \quad (10.18.10)$$

と全体のスケールを除いて連続パラメータを持たない形に書き換えられる。ここで、 \hat{f}_* は f_* の符号である。したがって、すべてのフラックスがゼロでないときには、ポテンシャルはフラックスに依存しなくなる。

- SUSY vacuum: このポテンシャルは

$$\delta = \text{sign}(f_0 f_{4,1} f_{4,2} f_{4,3}) \quad (10.18.11)$$

として、 $\delta = -1$ の時に超対称な adS 臨界点をもつ：

$$\hat{f}_{4,1} \psi_1 = \hat{f}_{4,2} \psi_2 = \hat{f}_{4,3} \psi_3 = i\sqrt{\frac{5}{3}}, \quad \hat{f}_3 \psi_4 = i\frac{2}{3}\sqrt{\frac{10}{3}}. \quad (10.18.12)$$

10.18.1.2 2. VZ model

[Viladoro G, Zwirner F (2005); Derendinger JP, Kounas C, Petropoulos PM, Zwirner F (2005)]

- 内部空間： $Y = T^2 \times T^2 \times T^2 / \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 / \mathcal{O}$

2つの \mathbb{Z}_2 変換は、 $z^j = x^{2j+2} + ix^{2j+3}$ ($j = 1, 2, 3$) とするとき、

$$Z_2 : (z^1, z^2, z^3) \rightarrow (-z^1, -z^2, z^3), \quad (10.18.13a)$$

$$Z'_2 : (z^1, z^2, z^3) \rightarrow (z^1, -z^2, -z^3) \quad (10.18.13b)$$

- Orientifold 変換 $\mathcal{O} = \Omega_p (-1)^{F_L} \mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} : (z^1, z^2, z^3) \rightarrow (-\bar{z}^1, -\bar{z}^2, -\bar{z}^3) \quad (10.18.14)$$

		ϕ	B	C_1	C_3
各場のパリティは	$(-1)^{F_L}$	+	+	-	-
	Ω_p	+	-	+	-

- 変換で不変なバルクスカラ場

- dilaton: ϕ
- Kähler moduli: t_A ($A = 1, 2, 3$)
- CS moduli: u_A ($A = 1, 2, 3$)
- axion fields:

$$B_{45}, B_{67}, B_{89} \Rightarrow \tau_A (A = 1, 2, 3), \quad (10.18.15a)$$

$$C_{579}; C_{568}, C_{478}, C_{469} \Rightarrow \sigma; \quad \nu_A (A = 1, 2, 3) \quad (10.18.15b)$$

ここで,

$$ds^2(M) = \frac{1}{\hat{s}} \tilde{g}_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + \sum_{A=1}^3 t_A \left(\hat{u}_A (dx^{2j+2})^2 + \frac{1}{\hat{u}_A} (dx^{2j+1})^2 \right) \quad (10.18.16a)$$

$$e^{-2\phi} = \frac{\hat{s}}{t_1 t_2 t_3}, \quad \hat{s} = s^2 \hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3, \quad (10.18.16b)$$

$$u_i = \frac{\sqrt{\hat{s} \hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3}}{\hat{u}_i}, \quad (10.18.16c)$$

$$B_{45|67|89} = \tau_{1|2|3}, \quad (10.18.16d)$$

$$C_{579} = \sigma, \quad C_{568|478|469} = -\nu_{1|2|3} \quad (10.18.16e)$$

- Chiral moduli variables

$$S = s + i\sigma, \quad T_A = t_A + i\tau_A, \quad U_A = u_A + i\nu_A. \quad (10.18.17)$$

- Kähler ポテンシャル

$$K = -\ln Y; \quad Y = st_1 t_2 t_3 u_1 u_2 u_3 = 3^{-4\phi} \mathcal{V}^3. \quad (10.18.18)$$

- BG fluxes

$$- H_3\text{-flux: } H_{(0)} = H_{468}, \quad H_{(1)}^{1|2|3} = H_{578|569|479}$$

$$- \text{geometrical flu } f^a{}_{bc}:$$

$$\omega_{(1)}^{1|2|3} = f_{597|759|975}, \quad (10.18.19a)$$

$$\omega_{(2)}^{1|2|3} = f_{586|748|964}, \quad (10.18.19b)$$

$$(\omega_{(3)}^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & f^4_{96} & f^4_{87} \\ f^6_{49} & 0 & f^6_{58} \\ f^8_{74} & f^8_{65} & 0 \end{pmatrix} \quad (10.18.19c)$$

– RR-flux:

- * $F_0: F_{(0)}$
- * $F_2: F_{(2)}^{1|2|3} = F_{45|67|89}$
- * $F_4: F_{(4)}^{1|2|3} = F_{6789|8945|4567}$
- * $F_6: \text{dual to } F_{\mu\nu\lambda\sigma} = F^{(6)}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}(X)$

• Super potetial

$$W = \frac{1}{4} \int_Y \mathbf{G} \wedge e^{iJ^c} - i(H - if \circ J^c) \wedge \Omega^c. \quad (10.18.20)$$

ここで,

$$J^c = J + iB; \quad J = \frac{i}{2} \sum_{A=1}^3 dz^A \wedge d\bar{z}^A, \quad (10.18.21a)$$

$$\Omega^c = \text{Re}(ie^\phi \Omega) + iC_{[3]}; \quad \Omega = dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3. \quad (10.18.21b)$$

$$(f \circ J^c)_{abd} = f_{ba}^c J_{cd}^c. \quad (10.18.21c)$$

具体的には

$$J_{45|67|89}^c = T_{1|2|3}, \quad (10.18.22a)$$

$$\Omega_{579}^c = S, \quad \Omega_{568|478|469}^c = -U_{1|2|3} \quad (10.18.22b)$$

なので,

$$\begin{aligned} 4W &= \sum_{A=1}^3 (\omega_{(1)}^A T_A U_A - \omega_{(2)}^A S T_A) - \sum_{A,B=1}^3 \omega_{(3)}^{AB} T_A U_B \\ &+ \sum_{A=1}^3 (iF_{(4)}^A T_A - F_{(2)}^A T_B T_C) + F_{(6)} - iF_{(0)} T_1 T_2 T_3 \\ &+ i(H_{(0)} S - \sum_{A=1}^3 H_{(1)}^A U_A). \end{aligned} \quad (10.18.23)$$

• SUSY adS minimum: 理論が 3 つの T^2 の入れ替えについて対称で, BG flux が条件

$$\frac{1}{9} F_{(6)} = -t_0^2 F_{(2)} = \frac{t_0 u_0}{6} \omega_{(1)} = \frac{s_0 t_0}{2} \omega_{(2)} = \frac{t_0 u_0}{6} \omega_{(3)} \quad (10.18.24a)$$

$$\frac{t_0}{2} F_{(4)} = \frac{t_0^3}{5} F_{(0)} = -\frac{s_0}{2} H_{(0)} = \frac{u_0}{2} H_{(1)} = q \quad (10.18.24b)$$

を満たすとき, K と W は

$$K = -\ln(st^4u^3), \quad (10.18.25a)$$

$$W = \frac{p}{4} \left\{ 906(\hat{S} + 3\hat{U})\hat{T} + 3\hat{T}^3 \right\} \\ + \frac{iq}{4} \left\{ -2(\hat{S} + 3\hat{U}) + 9\hat{T} - 5\hat{T}^3 \right\} \quad (10.18.25b)$$

となり ($\hat{T} = T/t_0, \hat{U} = U/u_0, \hat{S} = S/s_0$), 安定な超対称 adS 最小点をもつ:

$$S = s_0(1 - 3ia), \quad T_A = t_0, \quad U_A = u_0(1 + ia). \quad (10.18.26)$$

ここで, a は任意の実数である. したがって, ポテンシャルは a の変化する方向に flat direction をもつ.

10.18.2 IIA 理論での dS 真空

概要 Massive IIA を $(\text{Nil}/\Gamma)^2$ の orientifold にコンパクト化. モジュライは, $g \sim e^{\phi}\mathcal{V}^{1/4}$, $e^{6\sigma} \sim \mathcal{V}$ および Nil/Γ のねじれたトーラスの2つの周期 L_1, L_2 . ポテンシャルとして, $R(Y) \rightarrow V_R$, $(O6, H_3, F_0) \rightarrow V_{OHm_0}$, $F_6 \rightarrow V_{F_6}$, KK5 brane $\rightarrow V_{\text{KK5}}$ を考慮すると, 安定な dS 真空が存在.

References

- Silverstein E: prd 77, 106006 (2008)
”Simple de Sitter solutionS”

モデル

- 内部空間 : $Y = \text{Nil}^3 \times \tilde{\text{Nil}}^3/\Gamma/\mathcal{O}$

$$\ell_s^{-2}ds^2(M) = g(\text{Nil}) + g(\tilde{\text{Nil}}); \quad (10.18.27a)$$

$$g(\text{Nil}) = L_1^2(\eta^1)^2 + L_2^2(\eta^2)^2 + L_x^2(\eta_3)^2, \quad (10.18.27b)$$

$$\eta^1 = du_1, \quad \eta^2 = du_2, \quad \eta^3 = dx + \frac{M}{2}(u_1 du_2 - u_2 du_1) \quad (10.18.27c)$$

コンパクト化に用いる離散群 Γ は各 Nil について、次の 3 つの等長変換により生成される：

$$t_x : (x, u_1, u_2) \rightarrow (x + 1, u_1, u_2), \quad (10.18.28a)$$

$$t_1 : (x, u_1, u_2) \rightarrow (x - \frac{M}{2}u_2, u_1 + 1, u_2), \quad (10.18.28b)$$

$$t_2 : (x, u_1, u_2) \rightarrow (x + \frac{M}{2}u_2, u_1, u_2 + 1). \quad (10.18.28c)$$

これらの変換は次の関係式を満たす：

$$t_1 t_2 t_1^{-1} t_2^{-1} = t_x^M \quad (10.18.29)$$

また、orientifolding は $\mathcal{O} = \Omega_p(-1))^{FL} \mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} : \text{Nil} \times \tilde{\text{Nil}} \ni (X, \tilde{X}) \rightarrow (\tilde{X}, X) \quad (10.18.30)$$

これより、

$$\pi_1(Y) = \langle \gamma_1 = t_1 \tilde{t}_1, \gamma_2 = t_2 \tilde{t}_2, \gamma_x = t_x \tilde{t}_x; \gamma_1 \gamma_2 \gamma_1^{-1} \gamma_2^{-1} \gamma_x \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_M, \quad (10.18.31a)$$

$$H_1(Y, \mathbb{Z}) = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_x; M\gamma_x = 0 \rangle \cong \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}_M, \quad (10.18.31b)$$

$$H^1(Y, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2. \quad (10.18.31c)$$

- モジュライ: g, L, L_1, L_2, σ

$$ds^2(M) = g(X_4) + g(Y_6), \quad (10.18.32a)$$

$$e^\phi = g_s e^{\tilde{\phi}}, \quad (10.18.32b)$$

$$\mathcal{V} = L^6/2 = L_1^2 L_2^2 L_x^2/2 = (L_0^6/2)e^{6\sigma}, \quad (10.18.32c)$$

$$g = \frac{e^\phi}{L^{3/2}} = \frac{g_s}{L_0^{3/2}} e^{\tilde{\phi} - 3\sigma}, \quad (10.18.32d)$$

$$g^E(X_4) = e^{6\sigma - 4\tilde{\phi}} g^s(X_4). \quad (10.18.32e)$$

- string フレームのポテンシャル V_s と Einstein フレームでのポテンシャル V の関係：

$$V_s = -\frac{1}{2\ell_s^4} \int_Y e^{-2\phi} R_s(Y) + \dots \quad (10.18.33)$$

に対して、

$$V = m_{\text{pl}}^4 \frac{e^{4\phi}}{(L^6/2)^2} V_s. \quad (10.18.34)$$

- 曲率

$$R_s(Y) = -\frac{L_x^2 M^2}{\ell_s^2 L_u^4}; \quad L_u^2 = L_1 L_2 \Rightarrow V_R = m_{\text{pl}}^4 \frac{g^2 L_x^2 M^2}{2L^6}. \quad (10.18.35)$$

- Orientifold plane O6 と H_3 フラックス

- O6 plane tension

$$V_{O6} = -2^3 \pi g^3. \quad (10.18.36)$$

- Tadpole cancelation for H_3 :

$$m_0 \int_{\Sigma_3} H = -2\sqrt{2} \mu_6 \kappa^2 n_{O6}. \quad (10.18.37)$$

ここで, orientifold projection で残る H_3 は

$$\begin{aligned} H_3 = & p_1(\eta_1 \wedge \eta^2 \wedge \eta^3 - \tilde{\eta}_1 \wedge \tilde{\eta}_2 \wedge \tilde{\eta}_3) \\ & + p_2(\tilde{\eta}_1 \wedge \eta^2 \wedge \tilde{\eta}^3 - \eta_1 \wedge \tilde{\eta}_2 \wedge \eta_3) \\ & + p_3(\eta_1 \wedge \tilde{\eta}^2 \wedge \tilde{\eta}^3 - \tilde{\eta}_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3) \end{aligned} \quad (10.18.38)$$

量子化条件

$$m_0 = \frac{f_0}{2\sqrt{2}\pi\ell_s}; \quad f_0 \in \mathbb{Z}, \quad (10.18.39a)$$

$$p_i = -h_{3i}(2\pi)^2 \ell_s^2; \quad h_{3i} \in \mathbb{Z} \quad (10.18.39b)$$

を考慮すると, tadpole 相殺条件は

$$f_0 h_{3i} = 2 \Rightarrow f_0 = 1, \quad h_{3,i} = h_3 = 2. \quad (10.18.40)$$

よって, O6, H_3 および F_0 のポテンシャルへの寄与は

$$m_{\text{pl}}^{-4} V_{OHm0} = \frac{3p^2 g^2}{2\ell_s^4 L^6} - \frac{2\sqrt{2}}{\ell_s} |m_0 p| g^3 + \frac{\ell_s^2 m_0^2 g^4 L^6}{4}. \quad (10.18.41)$$

- F_6 フラックス

$$F_6 = \ell_s^5 K \eta^1 \wedge \eta^2 \wedge \eta^3 \wedge \tilde{\eta}^1 \wedge \tilde{\eta}^2 \wedge \tilde{\eta}^3, \quad (10.18.42)$$

$$K = f_6 (2\pi)^5 / \sqrt{2}; \quad f_6 \in \mathbb{Z}, \quad (10.18.43)$$

$$V_{F_6} = m_{\text{pl}}^4 g^4 \frac{K^2}{4L^6}. \quad (10.18.44)$$

- Discrete Wilson line

$$\tilde{F}_2 = dC_1 + m_0 B, \quad (10.18.45a)$$

$$B = \frac{q}{M}(2\pi)^2 \ell_s^2 dx \wedge d\tilde{x} + \frac{r}{M}(2\pi)^2 \ell_s^2 (dx \wedge \tilde{\eta}^1 - d\tilde{x} \wedge \tilde{\eta}^1), \quad (10.18.45b)$$

$$V_{BWL} = 4\pi^4 m_{\text{pl}}^4 m_0^2 \ell_s^2 \left(\frac{q}{M}\right)^2 g^4 + \dots. \quad (10.18.45c)$$

- KK 5-branes : 4次元時空 X および $\partial_x - \partial_{\tilde{x}}$, $\partial_{u_1} + \partial_{u_2} + \partial_{\tilde{u}_1} + \partial_{\tilde{u}_2}$ に巻きつく D5 ブレーンで, $\partial_x + \partial_{\tilde{x}}$ 方向の U(1) に関して KK 磁荷をもつ.

$$V_{KK5} = 4\pi^2 m_{\text{pl}}^2 g^2 n_K \frac{L_x^{5/2}}{L^{9/2}}. \quad (10.18.46)$$

- 全ポテンシャル

$$V = m_{\text{pl}}^4 (ag^2 - bg^3 + cg^4); \quad (10.18.47)$$

$$a = M^2 \frac{L_x^4}{2L^6} + 4n_K \frac{L_x^{5/2}}{L^{9/2}} + \frac{3p^2}{2\ell_s^4 L^6}, \quad (10.18.48)$$

$$b = \frac{2\sqrt{2}}{\ell_s} |pm_0|, \quad (10.18.49)$$

$$c = \ell_s^2 \left[\frac{m_0^2}{4} L^6 + 4\pi^4 m_0^2 \left(\frac{q}{M}\right)^2 \frac{L^6}{L_x^4} + \left(\frac{r}{M}\right)^2 \frac{16\pi^4 m_0^2 L^3}{L_x} + \left(\frac{r}{M}\right)^4 \frac{(2\pi)^8 m_0^2}{L_x^2} + \frac{K^2}{4\ell_s^{12} L^6} \right]. \quad (10.18.50)$$

このポテンシャルは

$$\delta = \frac{4ac}{b^2} - 1 \quad (10.18.51)$$

で定義される δ の最小値が

$$0 < \delta < 1/8 \quad (10.18.52)$$

を満たすことがいえることより, g に関して $V > 0$ となる極小点をもつ.

- Example: $n_K = M = 10$, $f_6 = 80$, $q = r = 1$ [Silverstein E (2008)]

– Critical point

$$g \simeq 0.00015 \Rightarrow \delta = 0.005359, \quad (10.18.53a)$$

$$(L, L_x) = (15.45, 2.099) \Rightarrow V \simeq 2.4 \times 10^{-10}. \quad (10.18.53b)$$

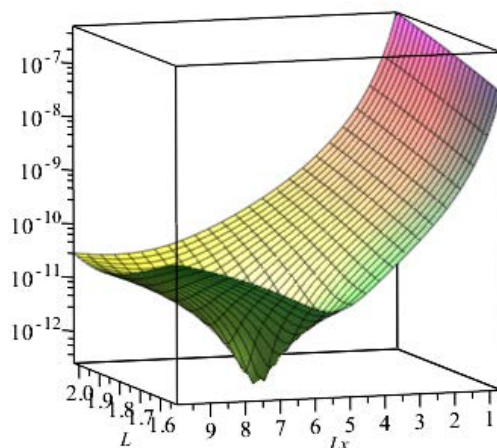


図 17: IIA 理論の Nil コンパクト化により得られた dS 真空の例

Scaling モジュライ変数を

$$L = K^{1/6} \hat{L}, \quad L_x = M^{-1/2} \hat{L}_x, \quad g = K^{-1} \hat{g} \quad (10.18.54)$$

とスケールすると, ポテンシャルは次の形に書ける :

$$V = \frac{m_{\text{pl}}^4}{K^3} \hat{g}^2 (\hat{a} - \hat{b} \hat{g} + \hat{c} \hat{g}^2); \quad (10.18.55a)$$

$$\hat{a} = \frac{\hat{L}_x^4}{2\hat{L}^6} + 4n_K \frac{K^{1/4} \hat{L}_x^{5/2}}{M^{5/4} \hat{L}^{9/2}} + \frac{6(2\pi)^4}{\hat{L}^6}, \quad (10.18.55b)$$

$$\hat{b} = 8\pi, \quad (10.18.55c)$$

$$\begin{aligned} \hat{c} = & \frac{\hat{L}^6}{32\pi^2} + \frac{\pi^2 q^2 \hat{L}^6}{2 \hat{L}_x^4} + 2\pi^2 \left(\frac{r}{M}\right)^2 \left(\frac{M}{K}\right)^{1/2} \frac{\hat{L}^3}{\hat{L}_x} \\ & + 32\pi^6 \left(\frac{r}{M}\right)^4 \frac{M}{K} \frac{1}{\hat{L}_x^2} + \frac{1}{4\hat{L}^6}. \end{aligned} \quad (10.18.55d)$$

10.18.3 Monodromy inflation in IIA

概要 Massive IIA 理論の Nil コンパクト化において, 適当な Nil の S^1 に巻きつく D4 ブレーンを考えると, その別の S^1 方向の運動に対してモノ

ドロミーが生じ、D4 ブレーンの位置がインフラトンとなる large field インフレーションモデルが構成できる。

References

- Silverstein E, Westphal A: prd78, 106003 (2008)

“Monodromy in the CMB: Gravity waves and string inflation”

10.18.3.1 1. D4 ブレーンの作用積分

10次元 IIA 理論の $Y_6 = \text{Nil}/\Gamma \times \widetilde{\text{Nil}}/\widetilde{\Gamma}$ へのコンパクト化において、

$$x' = x - \frac{M}{2}u_1u_2 \quad (10.18.56)$$

とおくと、 Γ を生成する変換 t_x, t_1, t_2 は

$$t_x : (x', u_1, u_2) \rightarrow (x' + 1, u_1, u_2), \quad (10.18.57a)$$

$$t_1 : (x', u_1, u_2) \rightarrow (x' - Mu_2, u_1 + 1, u_2), \quad (10.18.57b)$$

$$t_2 : (x', u_1, u_2) \rightarrow (x', u_1, u_2 + 1) \quad (10.18.57c)$$

となるので、 Nil/Γ は $\text{Nil}/\langle t_x, t_2 \rangle \cong T^2 \times \mathbb{R}$ を t_1 で割ったものとなる。

いま、4次元時空 X_4 に広がり、 Nil/Γ の $x' = \text{const}, u_1 = \text{const}$ で決まる u_2 方向の S^1 に巻き付く D4 ブレーンを考える。この S^1 の長さは、 u_1 の関数 $(L_2^2 + L_x^2 M - 2u_1^2)^{1/2}$ となり、 $|u_1|$ の増大とともに限りなく増大する。D4 ブレーンのエネルギーはこの S^1 の長さに比例するので、large field inflaton の候補となる。

D4 ブレーンが u_1 方向のみに運動するとすると、D4 ブレーンの作用積分

$$S_{D4} = - \int_{\Sigma_5} \frac{d^5 \xi}{(2\pi)^4 \ell_s^5} e^{-\phi} \sqrt{\det(G+B)} + \frac{1}{(2\pi)^4 \ell_s^5} \int_{\Sigma_5} C e^{-B+2\pi \ell_s^2 F} \quad (10.18.58)$$

は、

$$S_{D4} = \frac{1}{(2\pi)^4 g_s \ell_s^4} \int d^4 x \sqrt{-g_4} \sqrt{(L_2^2 + L_x^2 M^2 u_1^2)(1 - \ell_s L_1^2 \dot{u}_1^2)} \quad (10.18.59)$$

となる。これを \dot{u}_1 について展開し 2 次まで取り、運動項の正規化のために、変換

$$\frac{d\phi}{du_1} = \frac{L_u^{3/2} \beta^{-1/4}}{(2\pi)^2 \sqrt{g_s} \ell_s} \left(1 + \frac{M^2 L_x^2}{\beta L_u^2} u_1^2 \right)^{1/4} \quad (10.18.60)$$

を行うと,

$$S_{D4} = \int d^4x \sqrt{-g_4} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V_{D4}(\phi) \right); \quad (10.18.61)$$

$$V_{D4} = \frac{\beta^{1/2} L_u}{(2\pi)^4 g_s \ell_s^4} \left(1 + \frac{M^2 L_x^2}{\beta L_u^2} u_1(\phi)^2 \right)^{1/2} \quad (10.18.62)$$

を得る. ここで,

$$\beta \equiv L_2/L_1, \quad L_u^2 = L_1 L_2 \quad (10.18.63)$$

10.18.3.2 2. ポテンシャルの振る舞い

ϕ_{cr} を

$$\frac{\phi_{\text{cr}}}{m_{\text{pl}}} \approx (2\pi)^{3/2} \beta^{1/4} \frac{g_s^{1/2} L^{3/4}}{\sqrt{2ML_x^{9/4}}} \quad (10.18.64)$$

とすると,

- $\phi \ll \phi_{\text{cr}}$ のとき :

$$V_{D4} \simeq \frac{1}{2} m^2 \phi^2; \quad m^2 = \frac{M^2 L_x^4}{\ell_s^2 L^6}. \quad (10.18.65)$$

Nil コンパクト化におけるモジュライポテンシャルのうち, 曲率項の寄与を

$$V_{\text{mod},R} \simeq m_{\text{pl}}^4 \frac{(2\pi)^7}{4} g^2 \frac{M^2 L_x^2}{L^6} \quad (10.18.66)$$

とすると,

$$V_{D4} \sim \left(\frac{\phi}{m_{\text{pl}}} \right)^2 V_{\text{mod},R} \quad (10.18.67)$$

より, $\phi \gtrsim m_{\text{pl}}$ の領域でこの近似が成り立つとすると, D4 ブレーンのエネルギーがモジュライ安定化に大きく影響することになる. したがって, 次の $\phi \gg \phi_{\text{cr}}$ の領域までブレーンのモジュライ安定化への影響が無視して上記のポテンシャルが使用できるためには,

$$\phi_{\text{cr}} < m_{\text{pl}} \quad (10.18.68)$$

が要求される.

- $\phi \gg \phi_{\text{cr}}$ のとき :

$$\phi \approx \frac{M^{1/2} L_u L_x^{1/2}}{6\pi^2 g_s^{1/2} \ell_s \beta^{1/2}} u_1^{3/2} \quad (10.18.69)$$

より,

$$V_{D4} \simeq \mu^{10/3} \phi^{2/3}; \quad (10.18.70)$$

$$\mu^{10/3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (2\pi)^{-8/3} \frac{M^{2/3} \beta^{1/3} L_x}{\ell_s^{10/3} g_s^{2/3} L}. \quad (10.18.71)$$

10.18.3.3 3. 整合性

D4 の影響でモジュライ安定化が壊されないための条件 $V_{\text{mod},R}$ をモジュライポテンシャルのうち曲率の寄与として, 安定化が壊されないための必要条件は

$$V_{D4} < V_{\text{mod},R} \Rightarrow \phi < \phi_{\text{max}} \sim m_{\text{pl}} \times (2\pi)^{21/2} \left(\frac{m_{\text{pl}}}{\mu}\right)^5 \frac{M^3 g^3 L_x^6}{8L^9}. \quad (10.18.72)$$

Rescale したモジュライ変数で表すと

$$\frac{\phi_{\text{cr}}}{m_{\text{pl}}} \sim (2\pi)^{3/2} \beta^{1/4} \hat{g}^{1/2} \left(\frac{M}{K}\right)^{1/8} \left(\frac{\hat{L}}{\hat{L}_x}\right)^{9/4}, \quad (10.18.73a)$$

$$\frac{\phi_{\text{max}}}{m_{\text{pl}}} \sim \frac{\beta^{-1/2}}{3(2\pi)^3 \hat{g}} \left(\frac{K}{M}\right)^{1/4} \frac{\hat{L}^{-9/2}}{\hat{L}_x} \quad (10.18.73b)$$

これより, F_6 フラックスの大きさ K を大きく, または β を小さくなるパラメータ tuning をすれば, $\phi_{\text{cr}}/m_{\text{pl}} \ll 1$ かつ $\phi_{\text{max}}/m_{\text{pl}} \gtrsim 10$ という要請が満たされる.

【注 10.30】

- KK5 ブレーンの生み出すポテンシャルは

$$\begin{aligned} V_{KK5} &\sim \frac{1}{\sqrt{\beta}} m_{\text{pl}}^4 g^2 \frac{M L_x^{5/2}}{L^9/2} \\ &\sim \frac{m_{\text{pl}}^4}{K^3} \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\frac{K}{M}\right)^{1/4} \frac{\hat{L}_x^2}{\hat{L}^{9/2}} \hat{g}^2 \sim V_{\text{mod},R} \times \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\frac{K}{M}\right)^{1/4} \frac{\hat{L}_x^{3/2}}{\hat{L}_x^2} \end{aligned} \quad (10.18.74)$$

となるので, K^2/β を増大させると, KK5 ブレーンのエネルギーが支配的となり危険.

- Kallosh-Linde 問題

$$m_{\text{pl}}^2 H_{\text{inf}}^2 \sim V_{D4} < V_{\text{mod},R} \sim m_{\text{pl}}^2 R_s(Y) \lesssim m_{\text{pl}}^2 m_{3/2}^2 \quad (10.18.75)$$

より

$$H_{\text{inf}} \lesssim m_{3/2}. \quad (10.18.76)$$

□

D4 ブレーンの反作用によるモジュライ極点のずれとインフレーション軌道のずれ 全ポテンシャルは, D4 ブレーンがない場合のモジュライ平衡点近傍で展開すると

$$\begin{aligned} V_{\text{tot}} &= V_{\text{mod}}(Le^\sigma) + V_{D4}(\phi, Le^\sigma) \\ &\simeq V_{\text{mod}}(L) + \frac{1}{2} \partial_\sigma^2 V_{\text{mod}} \sigma^2 + V_{D4}(\phi, L) \\ &\quad + \partial_\sigma V_{D4} \sigma + \frac{1}{2} \partial_\sigma^2 V_{D4} \sigma^2 \end{aligned} \quad (10.18.77)$$

ここで,

$$V_{D4} \ll V_{\text{mod}} \ll \partial_\sigma^2 V_{\text{mod}} \quad (10.18.78)$$

より,

$$\sigma \approx \frac{\partial_\sigma V_{D4}}{\partial_\sigma^2 V_{\text{mod}} + \partial_\sigma^2 V_{D4}} \sim \frac{V_{D4}}{V_{\text{mod},R}}. \quad (10.18.79)$$

これを考慮して $\partial_\phi^2 V$ を計算すると,

$$\Delta\eta \sim \eta \frac{V_{D4}}{V_{\text{mod},R}}. \quad (10.18.80)$$

したがって, $V_{D4}/V_{\text{mod},R} \ll 1$ なら, η への backreaction は無視できる.

D4 の 6 次元内部空間への影響 D4 ブレーンが u_1 の位置にあるとき, D4 ブレーンは u_2 方向に一定の間隔でずれながら, x' 方向に $N_w = M u_1$ 回巻き付いた状態にある:

$$N_w = M u_1 \sim \frac{V_{D4}}{V_{\text{mod},R}} \frac{2L_x^3 M^2}{(2\pi)^3 g_s}. \quad (10.18.81)$$

そこで, Y_6 において u_2, x, \tilde{x} 方向を KK reduction し, $\tilde{u}_2 u_1, \tilde{u}_1$ 上の理論に落とすと, D4 ブレーンの重力ポテンシャルは

$$\Phi_{D4} \sim \frac{G_7 V_{D4}}{r}; \quad G_7 \sim (2\pi)^4 \frac{g_s^2 \ell_s^5}{L_x^2 L_2}. \quad (10.18.82)$$

これより, D4 ブレーンの曲率の影響領域の半径 r_c は $r_c \sim G_7 V_{D4}$. これを Y の半径と比較すると

$$\frac{r_c}{L_2 \ell_s} \sim \frac{V_{D4}}{V_{\text{mod},R}} \frac{L_x^3 M^2}{\beta L^3 (2\pi)^2} \sim \frac{V_{D4}}{V_{\text{mod},R}} \frac{1}{\beta (2\pi)^2} \sqrt{\frac{M}{K}}, \quad (10.18.83a)$$

$$\frac{r_c}{L_2 \ell_s} \sim \frac{V_{D4}}{V_{\text{mod},R}} \frac{1}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{M}{K}}. \quad (10.18.83b)$$

ここで,

$$\frac{V_{D4}}{V_{\text{mod},R}} \propto \beta^{1/3} \quad (10.18.84)$$

より, $K/M \gg 1$ としても β が小さすぎると, 内部空間が古典的に扱える条件

$$\frac{r_c}{L_2 \ell_s} \ll 1, \quad \frac{r_c}{L_1 \ell_s} \ll 1 \quad (10.18.85)$$

が満たされなくなる.

10.18.3.4 4. 観測情報からの制限

一般に, $V \propto \phi^p$ のとき,

$$N \simeq \frac{1}{2p} \left\{ \left(\frac{\phi_N}{m_{\text{pl}}} \right)^2 - 1 \right\} \quad (10.18.86)$$

より, スカラ曲率ゆらぎの振幅は

$$\Delta_R \simeq \left(\frac{V^3}{12\pi^2 m_{\text{pl}}^6 V'^2} \right)^{1/2} \simeq \frac{(4/3)^{1/6}}{2\pi} N^{2/3} \left(\frac{\mu}{m_{\text{pl}}} \right)^{5/3}. \quad (10.18.87)$$

COBE 規格化では

$$\mu_{\text{obs}} \simeq 1.6 \times 10^{-3} \quad (N = 60). \quad (10.18.88)$$

整合性条件を rescale されたモジュライパラメータで表すと

$$\frac{\phi_{\text{cr}}}{m_{\text{pl}}} \sim (2\pi)^{3/2} \gamma^{-1/2} \frac{\hat{g}^{1/2}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{L}}{\hat{L}_x} \right)^{9/4} \ll 1, \quad (10.18.89a)$$

$$\frac{\phi_{\text{max}}}{m_{\text{pl}}} \sim \frac{\gamma}{3(2\pi)^3 \hat{g}} \left(\frac{\hat{L}}{\hat{L}_x} \right)^{-9/2} > \frac{\phi_N}{m_{\text{pl}}}, \quad (10.18.89b)$$

$$\frac{\phi_*}{m_{\text{pl}}} \sim K^{9/8} \gamma^{1/4}, \quad (10.18.89c)$$

$$\Delta_R \sim 60^{2/3} \frac{(2\pi)^{7/2}}{2^{5/6}} K^{-3/2} \gamma^{-1/3} \hat{g}^{4/3} \frac{\hat{L}_x^{1/2}}{\hat{L}^{3/2}}. \quad (10.18.89d)$$

ここで,

$$\gamma \equiv \beta^{-1/2} \left(\frac{K}{M} \right)^{1/4}. \quad (10.18.90)$$

まず

$$\phi_{\text{max}} > 9m_{\text{pl}} \Rightarrow \gamma > 190 \quad (N_{\text{total}} > 60) \quad (10.18.91)$$

また,

$$\Delta_R \sim 5.4 \times 10^{-5} \Rightarrow \gamma^{1/3} K^{3/2} \sim 1.9 \times 10^{10}. \quad (10.18.92)$$

両者より,

$$K \leq 2.3 \times 10^6 \Rightarrow f_6 \lesssim 310. \quad (10.18.93)$$

および

$$\beta M^{1/2} \lesssim 0.04 \quad (10.18.94)$$

これは $M = 1$ でも $\beta \sim 0.04$ 程度の fine tuning が必要であることを意味する。

(注) Silverstein が dS 真空を求めたモデルでは, KK5 ブレーンは $\beta = 1$ に安定化させる効果をもつ。

【問 10.31】 IIA 理論の Nil コンパクト化において, D4 を $u_2 - \tilde{u}_2$ 方向に巻き付け, $u_2 + \tilde{u}_2, u_1, \tilde{u}_1$ の線形結合の方向に動くとする:

$$u_2 = \sigma + cu_B(t), \quad \tilde{u}_2 = -\sigma + cu_B(t), \quad u_1 = au_B(t), \quad \tilde{u}_1 = bu_B(t). \quad (10.18.95)$$

このとき, $u_B \gg 1$ で, $V_{D4} \propto \phi^{2/5}$ となることを示せ。 _____□

10.18.4 Axion monodromy inflation in IIB model

概要 IIB 理論における DBI 作用積分が生み出す D5- B 場アクシオン結合, NS5- C がアクシオン結合を用いると, 大振幅で $V \propto \phi$ となる大振幅アクシオンインフレーションモデルが構成できる. このモデルは, IIA 理論の Nil コンパクト化に基づく monodromy influm の T 双対と見なすことができる (D4 \leftrightarrow D5/NS5, geometrical flux \leftrightarrow B/C 場).

References

- McAlister, Silverstein E, Westphal A: prd82, 046003 (2010)
Gravity waves and linear inflation from axion monodromy”

axions IIB 理論では, 2 種類のモデル依存 axions が生じる :

- $B_2 = \sum_I b_I \omega^I \Rightarrow b_I (I = 1, \dots, h^{1,1})$
- $C_p = \sum c_\alpha^{(p)} \omega_{[p]}^\alpha \Rightarrow c_\alpha^{(p)} (\alpha = 1, \dots, b_p)$

ブレーンが存在しないとき, これらの場はシフト対称性をもつ :

$$\phi_a \rightarrow \phi_a + (2\pi)^2 f_a \quad (10.18.96)$$

運動項は一般に,

$$S_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g_4} \gamma^{IJ} \partial a_I \cdot \partial a_J \quad (10.18.97)$$

の構造をもつ. ここで,

$$\gamma^{IJ} = \begin{cases} \frac{1}{6(2\pi)^7 g_s^2 \ell_s^8} \int_Y * \omega_I \wedge \omega_J & ; b_I \\ \frac{1}{6(2\pi)^7 \ell_s^8} \int_Y * \omega_I \wedge \omega_J & ; c_J \end{cases} \quad (10.18.98)$$

これより,

$$m_{\text{pl}}^2 = \frac{2}{(2\pi)^7} \frac{\mathcal{V}}{g_s^2 \ell_s^2}, \quad \mathcal{V} = \text{Vol}(Y)/\ell_s^6 = L^6 \quad (10.18.99)$$

を考慮すると

$$\phi_b^2 \sim \frac{L^2 b^2}{3g_s^2 (2\pi)^7 \ell_s^2} = \frac{1}{6} L^2 m_{\text{pl}}^2 b^2 \Rightarrow f_a \sim \frac{L}{\sqrt{6}} m_{\text{pl}} \quad (10.18.100a)$$

$$\phi_c^2 \sim \frac{L^2 c^2}{3(2\pi)^7 \ell_s^2} = \frac{1}{6} g_s^2 L^2 m_{\text{pl}}^2 c^2 \Rightarrow f_a \sim \frac{g_s L}{\sqrt{6}} m_{\text{pl}} \quad (10.18.100b)$$

Brane-axion 相互作用 DBI 作用積分より

$$D5 : V(b) = \frac{\epsilon}{g_s(2\pi)^5 \ell_s^4} \sqrt{\ell^4 + b^2}, \quad (10.18.101a)$$

$$NS5 : V(b) = \frac{\epsilon}{g_s^2(2\pi)^5 \ell_s^4} \sqrt{\ell^4 + g_s^2 c^2} \quad (10.18.101b)$$

両者はS双対変換により互いに移り変わる. いずれのモデルでも、 $\phi_a \gg m_{\text{pl}}$ のとき

$$V(\phi_a) \approx \mu_a^3 \phi_a \quad (10.18.102)$$

B-axion IIB 理論の CY コンパクト化により、 $N = 2$ の 4D sugra が得られる。この際モジュライは、orientifold 射影のあと、

- Kähler: $T^A = \tau^A + i\theta^A$; $\theta^A = \int_{\Sigma_A^{(4)}} C_4$
 $\Rightarrow T_+^\alpha$: \mathcal{O} -even
- Axionic: $G^I = g_s^{-1} b^I + i(c^I - C_0 b^I)$: \mathcal{O} -odd

このとき、

$$T_\alpha = \frac{3}{2}(\partial_{v_\alpha} \mathcal{V} + i\theta_\alpha) - \frac{3}{8} e^\phi c^{\alpha IJ} G_I (G + \bar{G})_J \quad (10.18.103)$$

より、Kähler ポテンシャルは

$$K = -2 \ln(e^{-3\phi/2} \mathcal{V}) = -3 \ln \left(T_L + \bar{T}_L + \frac{3}{2} e^{-\phi} c^{LIJ} b_I b_J \right) \quad (10.18.104)$$

となる。この K の b 依存性のため、B-axion には η 問題が起こりインフラトンとなれない。

C-axion C-axion と NS5 ブレーンの結合の場合、 η 問題は起こらず、インフラトンとなることが可能。ただし、Euclidian D1 ブレーンとの相互作用は危険で、抑制が必要。

例えば、 $h_+^{1,1} = 2$, $h_-^{1,1} = 1$ となるコンパクト化では、

$$K = -2 \ln \mathcal{V}_E; \quad \mathcal{V}_E = \frac{L^6}{g_s^{3/2} (2\pi)^6} = (T_L + \tilde{T}_L)^{3/2} - [T_+ + \bar{T}_+ + \frac{3}{8} g_s c_{+---} (G_- + \bar{G}_-)^2]^{3/2}, \quad (10.18.105a)$$

$$W = W_0 + A_1 e^{-a_+ T_+} + A_L e^{-a_L T_L} \quad (10.18.105b)$$

に対し、モデルパラメータを

$$A_L = -1, A_+ = 1, a_L = \frac{2\pi}{25}, a_+ = \frac{2\pi}{3}, W_0 = 3 \times 10^{-2} \times W_0(\text{KKLT}) \quad (10.18.106)$$

ととると、モジュライは安定化される：

$$T_L \sim 20, T_+ \sim 4, b \sim 0. \quad (10.18.107)$$

さらに、NS5 ブレーンとの相互作用

$$V_{\text{NS5}} = m_{\text{pl}}^4 \frac{e^{4A_{\text{bottom}}}}{(2\pi)^3 g_s \mathcal{V}_E^2} \sqrt{v_+^2 + g_s^2 c^2}, \quad (10.18.108)$$

$$v_+^2 = \frac{g_s}{2} \left\{ T_+ + \bar{T}_+ + \frac{3}{8} g_s c_{+--} (G_- + \bar{G}_-)^2 \right\}, \quad (10.18.109)$$

$$\phi_c \sim m_{\text{pl}} e^{A_{\text{top}}} \frac{c g_s}{L^2} \quad (10.18.110)$$

を考慮すると、 c はインフラトンとなる。モデルパラメータとして

$$e^{A_{\text{bottom}}} \sim 0.04, \quad e^{A_{\text{top}}} \sim 1 \quad (10.18.111)$$

と取ると、巻きつき数は $N_w \sim 70$ となり、axion のモジュライへの反作用は無視できる。

10.18.5 様々な axion monodromy influms

- Stringy realisation
 - Baumann D, McAllister L: Inflation and String Theory (CUP, 2015)
review
 - Westphal A: IJMPA30, 1530024 (2015) [1409.5350]
- D7-deformation moduli \Rightarrow axion
 - Arends M, Hebecker A et al: FortPhys. 62, 647 (2014) [1405.0283]
- B-axion
 - McAllister L, Silverstein E, Westphal A, Wrase : jhpe09, 123 (2014) [1405.3652]

- Franco S, Galloni D, Retolaza A, Uranga A: jhep02, 086 (2015) [1405.7044]
- NG flux + Kähler moduli \Rightarrow axion
 - Hassler F, Lust D, Massai S: [1405.2325]
- Wilson line axion, MSSM D-brane position modulus
 - Ibanez LE, Valenzuela I: plb736, 226 (2014) [1404.5235]
- F-theory
 - Grimm TW: plb739, 201 (2014) [1404.4268]
- CS moduli
 - Garcia-Etxebarria I, Grimm TW, Valenzuela I: npb 899, 414 (2015) [1412.5537]

10.19 Non-geometrical flux

10.19.1 T 双対変換

References

- Buscher TH: PLB194(1987)59.
“A Symmetry of the String Background Field Equations’ ‘
- Buscher TH: PLB201(1988)466.
“Path-integral derivation of quantum duality sigma-models’ ‘
- Bergshoeff E, Hull CM, Ortin T: NPB451(1995) 547.
”Duality in the Type-II Superstring Effective Action “
- Hassan SF: NPB568 (2000) 145.
”T-Duality, Space-time Spinors and R-R Fields in Curved Back-grounds”

10.19.1.1 1. NS sector

Nonlinear σ モデルアプローチ [Buscher TH (1987, 1988)]

ストリング作用積分

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma_2} d^2\sigma \sqrt{h} [h^{ab}g(X)(\partial_a X, \partial_b X) + \epsilon^{ab}B(X)(\partial_a X, \partial_b X) + \alpha'^{(2)}R\phi(X)] \quad (10.19.1)$$

において、背景場が $k = \partial_x$ 方向に不変であるとする：

$$\partial_x g_{MN} = \partial_x B_{MN} = \partial_x \phi = 0 \quad (10.19.2)$$

このとき、この作用積分は次のものと同等である：

$$S_1 = S_0(\partial_a X^x \rightarrow V_a) + \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma_2} X^x dV \quad (10.19.3)$$

この新たな作用積分で, Lagrange multiplier V_a を消去すると (Legendre 変換),

$$\hat{S} = S_0(g \rightarrow \hat{g}, B \rightarrow \hat{B}); \quad (10.19.4)$$

$$\hat{g} = g_{xx}^{-1}(dX^x + B_{(x)})^2 - g_{xx}g_{(x)}^2 + g' \quad (10.19.5)$$

$$\hat{B} = g_{(x)} \wedge (-dX^x + B_{(x)}) + B' \quad (10.19.6)$$

$$\hat{\phi} = \phi - \frac{1}{2} \log g_{xx} \quad (10.19.7)$$

を得る. ここで,

$$g_{(x)} = \frac{1}{g_{xx}} g_{xI} dX^I \quad (10.19.8a)$$

$$B_{(x)} = I_{\partial_x} B = B_{xI} dX^I \quad (10.19.8b)$$

この変換則は **Bucher** ルールと呼ばれる.

10.19.1.2 2. RR セクター

RR セクターのフォーム場

- IIA

$$\tilde{F}_2 = F_2 = dC_1, \quad (10.19.9a)$$

$$\tilde{F}_4 = dC_3 + C_1 \wedge H_3 \quad (10.19.9b)$$

- IIB

$$\tilde{F}_1 = F_1 = dC_0, \quad (10.19.10a)$$

$$\tilde{F}_3 = dC_2 - C_0 H_3, \quad (10.19.10b)$$

$$\tilde{F}_5 = * \tilde{F}_5 : \quad d\tilde{F}_5 = H_3 \wedge \tilde{F}_3 \quad (10.19.10c)$$

の T 双対変換は,

$$F_{n(x)} = I_{\partial_x} F_n = \frac{1}{(n-1)!} F_{xI_1 \dots I_{n-1}} dX^{I_1} \wedge \dots \wedge dX^{I_{n-1}} \quad (10.19.11)$$

とおくとき,

$$\tilde{F}_{[n](x)} = \tilde{F}'_{[n-1]} - g_{(x)} \wedge \tilde{F}_{[n-1](x)}, \quad (10.19.12a)$$

$$\tilde{F}'_{[n]} = \tilde{F}_{[n+1](x)} + B_{(x)} \wedge \tilde{F}_{[n](x)} \quad (10.19.12b)$$

で与えられる [Bergshoeff E, Hull CM, Ortin T (1995); Hassan SF (2000)].

10.19.2 Geometrical flux

概要 Nil 多様体など, ツイストしたトーラスによるコンパクト化は, ツイストを一種のフラックスと見なすことにより, 広い意味でフラックストーラスコンパクト化と見なすことができ, 通常のフラックスコンパクト化と T 双対変換により結びつく.

Reference

- Kachru S, Shulz MB, Tripathy PK, Trivedi SP: JHEP0303(2003)061
“ New supersymmetric string compactifications ”

10.19.2.1 1. 簡単な例

H_3 フラックスをもつ直交トーラス

$$T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3 : (x, y, z) \sim (x+1, y, z) \sim (x, y+1, z) \sim (x, y, z+1) \quad (10.19.13)$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (10.19.14)$$

$$B = Nzdx \wedge dy, \quad (10.19.15)$$

$$H_3 = dB = Ndx \wedge dy \wedge dz; \quad N = \int_{T^3} H_3 \quad ((2\pi)^2 \alpha' = 1) \quad (10.19.16)$$

に対して, x 方向に T 双対変換を施すと,

$$g_{(x)} = 0, \quad B_{(x)} = Nzdy; \quad B' = 0 \quad (10.19.17)$$

より, トーラスは Nil 多様体に変化し, B 場は消える :

$$ds^2 = (dx + Nzdy)^2 + dy^2 + dz^2 \quad (10.19.18a)$$

$$B = 0 \Rightarrow H_3 = 0. \quad (10.19.18b)$$

この Nil 多様体の自明でない接続係数をもち, それから作られる 3 形式

$$\omega_3 = \omega_{ab} \wedge \theta^a \wedge \theta^b = N\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 \quad (10.19.19)$$

の成分は定数となる. この 3 形式は *geometric flux* と呼ばれる.

10.19.2.2 2. $T^2 \times T^2 \times T^2/\mathbb{Z}_2$ orientifold

IIB-1 + O3

- Geometry

$$T^6 = T^2 \times T^2 \times T^2 \ni ((x^1, y^1), (x^2, y^2), (x^3, y^3)) \quad (10.19.20)$$

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 [R_{xi}^2 (dx^i)^2 + R_{yi}^2 (dy^i)^2] \quad (10.19.21)$$

- Flux

$$H_3 = -N_1(dx^{12} + dy^{12}) \wedge dx^3 \quad (10.19.22a)$$

$$F_3 = N_2(dx^{12} + dy^{12}) \wedge dy^3 \quad (10.19.22b)$$

$$F_1 = F_5 = 0 \quad (10.19.22c)$$

ここで, $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}$.

- Moduli

- Complex structure : $h^{1,2} = 9$ for full.

$$\tau_j = iR_{yj}/R_{xj} \quad (j = 1, \dots, 3), \quad S = C_0 + ie^{-\Phi} \quad (10.19.23)$$

- Kähler: $h^{1,1} = 9$ for full

$$\rho_j = iR_{xj}R_{yj} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (10.19.24)$$

- 10D IIB field equations (warping is neglected)

$$G_3 = F_3 - SH_3 = (dx^{12} + dy^{12}) \wedge (N_2 dy^3 + N_1 S dx^3) \quad (10.19.25)$$

- Axio-dilaton = const $\Rightarrow G_3 \cdot G_3 = 0 \Rightarrow S\tau_3 = N_2/N_1$
- Imaginary self-duality: $*G_3 = iG_3 \Rightarrow \tau_1\tau_2 = -1$
- \mathbb{Z}_2 orientifolding: $(x^i, y^i) \Rightarrow (-x^i, -y^i) \Rightarrow N = 4$ Susy,
 $2^6 = 64$ O3 + flux $\Rightarrow N = 2$ Susy
- RR-tadpole cancelation

$$N_{D3} + N_{\text{flux}} = \frac{1}{4}N_{O3} = 16;$$

$$N_{\text{flux}} = \frac{1}{(2\pi)^4(\alpha')^2} \int_{Y_6} H_3 \wedge F_3 = 2N_1N_2/2 = (10.19.26)$$

- Superpotential

$$\begin{aligned}\Omega &= (dx^1 + \tau_1 dy^1) \wedge (dx^2 + \tau_2 dy^2) \wedge (dx^3 + \tau_3 dy^3) \\ \Rightarrow W_{IIB} &= \int G_3 \wedge \Omega = -(1 + \tau_1 \tau_2)(N_2 - N_1) S^3.\end{aligned}\quad (10.19.27)$$

IIB-1+O3 \Rightarrow **IIA-2 + O4** x^1 方向の T 変換を施すと

$$g_{x^1 x^1} = R_{x^1}^2, \quad g_{(x^1)} = 0, \quad B_{(x^1)} = N_1 x^2 dx^3; \quad B' = N_1 y^2 dy^1 \wedge dx^3 \quad (10.19.28)$$

より、次の IIA 理論の orientifold コンパクト化を得る：

- Geometry: $\text{Nil}^3 \times T^3$

$$\begin{aligned}ds^2 &= \tilde{R}_{x^1}^2 (dx^1 + N_1 x^2 dx^3)^2 + R_{x^2}^2 (dx^2)^2 + R_{x^3}^2 (dx^3)^2 + \sum_{j=1}^3 R_{y^j}^2 (dy^j)^2 \\ \tilde{R}_{x^1} &= 1/R_{x^1}\end{aligned}\quad (10.19.30)$$

- Topology: Nil は $T^2 \times \mathbb{R}$ を次の変換で同一視したものである：

$$x^2 \rightarrow x^2 + 1, \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^3 \end{pmatrix} \rightarrow S \begin{pmatrix} x^1 \\ x^3 \end{pmatrix}; \quad (10.19.31)$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N_1 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \gamma_1 & \rightarrow & \gamma_1 + N_1 \gamma_3 \\ \gamma_3 & \rightarrow & \gamma_3 \end{pmatrix} \quad (10.19.32)$$

これより、

$$N_1 \gamma_3 \sim 0 \Rightarrow H_1(Y_6) \cong \mathbb{Z}^5 \oplus \mathbb{Z}_{N_1} \Rightarrow b_1 = 5 \quad (10.19.33)$$

Kähler 多様体に対しては、 $h^{0,1} = h^{1,0}$ より b_1 は偶数となるので、これは Y_6 が Kähler 多様体でないことを意味する。

- Form fluxes

$$H_3 = -N_1 dy^1 \wedge dy^2 \wedge dx^3 \quad (10.19.34a)$$

$$F_2 = N_2 dx^2 \wedge dy^3 \quad (10.19.34b)$$

$$F_4 = N_2 (dx^1 + N_1 x^2 dx^3) \wedge dy^{123} \quad (10.19.34c)$$

- Geometrical flux: 基底

$$\theta^1 = \tilde{R}_{x1}(dx^1 + N_1 x^2 dx^3), \quad \theta^2 = R_{x2} dx^2, \quad \theta^3 = R_{x3} dx^3, \quad \dots \quad (10.19.35)$$

に対して、接続係数は

$$\omega^2_3 = -f\theta^1, \quad \omega^3_1 = f\theta^2, \quad \omega^1_2 = f\theta^3; \quad f = N_1 \frac{\tilde{R}_{x1}}{R_{x2}R_{x3}} \quad (10.19.36)$$

となるので、geometrical flux は

$$\omega_{[3]} := \frac{1}{2}\omega_{ab}\theta^a \wedge \theta^b = f\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 = N_1 R_{x1}^{-2} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (10.19.37)$$

- 曲率

$$\mathcal{R}^2_3 = -3f^2\theta^2 \wedge \theta^3, \quad \mathcal{R}^3_1 = f^2\theta^3 \wedge \theta^1, \quad \mathcal{R}^1_2 = f^2\theta^1 \wedge \theta^2 \quad (10.19.38a)$$

$$R^1_1 = 2f^2, \quad R^2_2 = R^3_3 = -2f^2, \quad (10.19.38b)$$

$$R_s = -2f^2. \quad (10.19.38c)$$

- Moduli

– Axio-dilaton: $\tilde{S} = R_{x1}S$.

– Complex structure: $\tilde{\tau}_1 = i\tilde{R}_{x1}/R_{y1} = -1/\rho_1, \quad \tilde{\tau}_2 = \tau_2, \quad \tilde{\tau}_3 = \tau_3$

– Size: $\tilde{\rho}_1 = i\tilde{R}_{x1}R_{y1} = \tau_1, \quad \tilde{\rho}_2 = \rho_2, \quad \tilde{\rho}_3 = \rho_3$

– Constraint

$$\tilde{\rho}_1\tilde{\tau}_2 = -1, \quad \tilde{R}_{x1}\tilde{S}\tilde{\tau}_3 = N_2/N_1 \quad (10.19.39)$$

- Superpotential

$$\Omega_{\text{IIA}} = \eta^1 \wedge \eta^2 \wedge \eta^3; \quad \eta^j = \theta^j + \tilde{\tau}^j \theta^{j+3} \quad (j = 1, 2, 3), \quad (10.19.40a)$$

$$G_{\text{IIA}} = \tilde{F}_{4(x)} + k \wedge F_2 - \frac{i\tilde{R}_{x1}}{g_s^{\text{IIA}}} \left(H_3 + \tilde{R}_{x1}^{-2} k \wedge dk \right); \quad k = g_{x^1\mu} dx^\mu \quad (10.19.40b)$$

より、

$$W_{\text{IIA}} = \int G_{\text{IIA}} \wedge \Omega_{\text{IIA}} = -N_2(1 + \tilde{\rho}_1\tilde{\tau}_2) + N_1 N_2 \tilde{R}_{x1} \tilde{S} (\tilde{\tau}_3 + \tilde{\rho}_1\tilde{\tau}_2\tilde{\tau}_3) (= W_{\text{IIB}}). \quad (10.19.41)$$

IIA-2 + O4 \Rightarrow **IIB-3 + O5** IIA-2+O4において、 y^1 方向に T 変換を施すと、

$$g_{(y^1)} = 0, \quad B_{(y^1)} = N_1 y^2 dx^3; \quad B' = 0 \quad (10.19.42)$$

より、つぎのような IIB 理論のコンパクト化を得る：

- Geometry

$$ds^2 = \tilde{R}_{x1}^2 (dx^1 + N_1 x^2 dx^3)^2 + R_{x2}^2 (dx^2)^2 + R_{x3}^2 (dx^3)^2 \quad (10.19.43)$$

$$+ \tilde{R}_{y1}^2 (dy^1 + N_2 y^2 dx^3)^2 + R_{y2}^2 (dy^2)^2 + R_{y3}^2 (dy^3)^2 \quad (10.19.44)$$

- Form flux

$$H_3 = 0 \quad (10.19.45a)$$

$$F_3 = -N_2 (dx^1 + N_1 x^2 dx^3) \wedge dy^{23} + N_2 (dy^1 + N_1 y^2 dx^3) \wedge dx^2 \wedge dy^3 \quad (10.19.45b)$$

- Geometrical flux

$$\omega^2_3 = -f\theta^1, \quad \omega^3_1 = f\theta^2, \quad \omega^1_2 = f\theta^3; \quad f = N_1 \tilde{R}_{x1} / (R_{x2} R_{x3}) \quad (10.19.46a)$$

$$\omega^5_3 = -g\theta^4, \quad \omega^3_4 = g\theta^5, \quad \omega^4_5 = g\theta^3; \quad g = N_1 \tilde{R}_{y1} / (R_{y2} R_{x3}) \quad (10.19.46b)$$

- Superpotential

$$\hat{J} = i \hat{j}_{i\bar{j}} \eta^i \wedge \eta^{\bar{j}} \Rightarrow \hat{\Omega} = \eta^1 \wedge \eta^2 \wedge \eta^3, \quad (10.19.47a)$$

$$\hat{G}_3 = \hat{F}_{5(yx)} + \hat{k}_{(x)} \wedge \hat{F}_{3(y)} - \hat{k}_{(y)} \wedge \hat{F}_{3(x)} + \hat{k}_{(x)} \wedge \hat{k}_{(y)} \wedge \hat{k}_{(z)} \quad (10.19.47b)$$

$$-ie^{-\hat{\Phi}} \sqrt{\det \hat{j}} \left(\hat{\mathcal{H}}_3 + \hat{j}_{xx}^{-1} \hat{k}_{(x)} \wedge d\hat{k}_{(x)} + \hat{j}_{yy}^{-1} \hat{k}_{(y)} \wedge d\hat{k}_{(y)} \right) \quad (10.19.47c)$$

より、

$$\hat{W}_{\text{IIB}} = \int \hat{G}_3 \wedge \hat{\Omega} \quad (10.19.48)$$

10.19.3 Non-geometric flux

概要 H フラックス, 幾何学的フラックス \mathcal{F} , 非幾何学的フラックス \mathcal{R} , \mathcal{Q} のすべてを考慮すると, IIA 理論のトーラスコンパクト化で得られる 4 次元有効理論と IIB 理論から得られる 4 次元有効理論は完全に T 双対性で対応するようになる.

Reference

- Wecht B: CQG 24 (2007) S773.
“Lectures on non-geometrical flux compactifications”
- Shelton J, Taylor W, Wecht B: JHEP0510(2005)085.
“Nongeometric flux compactifications” ‘
- Shelton J, Taylor W, Wecht B: JHEP0702(2007)095.
“Generalized flux vacua”

10.19.3.1 1. Simple example

3次元 Nil 多様体 (=twisted torus)

$$ds^2 = (dx + Nzdy)^2 + dy^2 + dz^2, \quad B = 0 \quad (10.19.49)$$

に y 方向の T 双対変換を施すと

$$g_{yy} = 1 + N^2z^2, \quad g_{(y)} = \frac{Nz}{1 + N^2z^2}, \quad B_{(x)} = 0; \quad B' = 0 \quad (10.19.50)$$

より、

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + N^2z^2} + dz^2, \quad B = \frac{Nz}{1 + N^2z^2} dx \wedge dy \quad (10.19.51)$$

を得る。この空間構造は局所的には確定するが、大域的には $z \rightarrow z + 1$ での同一視の際に計量と B 場が混合するので、確定しない：

$$\rho = \int B + iV : \quad \rho^{-1} = Nz - i \rightarrow \rho^{-1} + N, \quad (10.19.52a)$$

$$(g + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -Nz & 0 \\ Nz & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (g + B)^{-1} + N \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.19.52b)$$

そこで、この配位は、非幾何学的 Q -フラックスをもつという:

$$Q^{xy}{}_z = N \quad (10.19.53)$$

10.19.3.2 2. $T^2 \times T^2 \times T^2/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ モデル

IIB モデル

- Coordinates: $z^1 = x^\alpha + \tau x^i, z^2 = x^\beta + \tau x^j, z^3 = x^\gamma + \tau x^k$
- metric : $ds^2 = \sum_j dz^j d\bar{z}^j$
- Moduli
 - axio-dilaton: $S = C_0 + ie^{-\phi}$
 - Kähler: $U = C_{\alpha i \beta j} + iV$
 - Complex structure: τ

- Kahler potential

$$K = -3 \ln(-i(\tau - \bar{\tau})) - 3 \ln(-i(U - \bar{U})) - \ln(-i(S - \bar{S})) \quad (10.19.54)$$

- Superpotential

$$W = P_1(\tau) + SP_2(\tau); \quad (10.19.55)$$

$$P_1(\tau) = a_0 - 3a_1\tau + 3a_2\tau^2 - a_3\tau^3, \quad (10.19.56)$$

$$P_2(\tau) = -b_0 + 3b_1\tau - 3b_2\tau^2 + b_3\tau^3 \quad (10.19.57)$$

これより得られるポテンシャルは no-scale 構造をもつ :

$$V = e^K \sum_{i,j=\tau,S} K^{i\bar{j}} D_i W (D_j W)^* \geq 0 \quad (10.19.58)$$

- Tadpole condition

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^4 (\alpha')^2} \int H_3 \wedge F_3 = 16 \\ \Rightarrow & a_0 b_3 - 3a_1 b_2 + 3a_2 b_1 - a_3 b_0 = 16 \end{aligned} \quad (10.19.59)$$

Term	IIB flux	Integer flux	Term	IIA flux	Integer flux
1	\bar{F}_{ijk}	a_0	1	$\bar{F}_{\alpha i \beta j \gamma k}$	a_0
τ	$\bar{F}_{ij\gamma}$	a_1	τ	$\bar{F}_{\alpha i \beta j}$	a_1
τ^2	$\bar{F}_{i\beta\gamma}$	a_2	τ^2	$\bar{F}_{\alpha i}$	a_2
τ^3	$\bar{F}_{\alpha\beta\gamma}$	a_3	τ^3	$F^{(0)}$	a_3
S	\bar{H}_{ijk}	b_0	S	\bar{H}_{ijk}	b_0
$S\tau$	$\bar{H}_{\alpha jk}$	b_1	$S\tau$	f_{jk}^α	b_1
$S\tau^2$	$\bar{H}_{i\beta\gamma}$	b_2	U	$\bar{H}_{\alpha\beta k}$	c_0
$S\tau^3$	$\bar{H}_{\alpha\beta\gamma}$	b_3	$U\tau$	$f_{k\alpha}^j, f_{\beta k}^i, f_{\beta\gamma}^\alpha$	$\check{c}_1, \hat{c}_1, \tilde{c}_1$

表 26: IIB モデル (左) と IIA モデル (右) でのフラックスと超ポテンシャルの対応

IIA モデル

- Geometric flux

$$ds^2 = \eta_{ab}\theta^a\theta^b; \quad d\theta^a = -f^a{}_{bc}\theta^b \wedge \theta^c, \quad (10.19.60a)$$

$$f_{jk}^\alpha = f_{ki}^\beta = f_{ij}^\gamma, \quad f_{j\gamma}^i = f_{k\alpha}^j = f_{i\beta}^k, \quad f_{i\gamma}^j = f_{j\alpha}^k = f_{k\beta}^i, \quad f_{\beta\gamma}^\alpha = f_{\gamma\alpha}^\beta = f_{\alpha\beta}^\gamma$$

- Moduli

- axio-dilaton: $S = C_{\alpha\beta\gamma} + ie^{-\phi}$
- complex structure: $U = C_{ij\gamma} + i\tau_2$
- Kähler: $\tau = B_{\alpha i} + iV$

- Superpotential

$$W = P_1(\tau) + S\tilde{P}_2(\tau) + U\tilde{P}_3(\tau); \quad (10.19.61)$$

$$\tilde{P}_2(\tau) = -b_0 + 3b_1\tau \quad (10.19.62)$$

$$\tilde{P}_3(\tau) = 3\{c_0 + (\hat{c}_1 + \check{c}_1 - \tilde{c}_1)\tau\} \quad (10.19.63)$$

この超ポテンシャルにより、すべてのモジュライが安定化される！

Term	IIA flux	IIB flux	integer flux
1	$\bar{F}_{\alpha i \beta j \gamma k}$	\bar{F}_{ijk}	a_0
τ	$\bar{F}_{\alpha i \beta j}$	$\bar{F}_{ij\gamma}$	a_1
τ^2	$\bar{F}_{\alpha i}$	$\bar{F}_{i\beta\gamma}$	a_2
τ^3	$F^{(0)}$	$\bar{F}_{\alpha\beta\gamma}$	a_3
S	\bar{H}_{ijk}	\bar{H}_{ijk}	b_0
U	$\bar{H}_{\alpha\beta k}$	$Q_k^{\alpha\beta}$	c_0
$S\tau$	f_{jk}^α	$\bar{H}_{\alpha jk}$	b_1
$U\tau$	$f_{k\alpha}^j, f_{\beta k}^i, f_{\beta\gamma}^\alpha$	$Q_k^{\alpha j}, Q_k^{i\beta}, Q_\alpha^{\beta\gamma}$	$\check{c}_1, \hat{c}_1, \tilde{c}_1$
$S\tau^2$	$Q_k^{\alpha\beta}$	$\bar{H}_{i\beta\gamma}$	b_2
$U\tau^2$	$Q_\beta^{\gamma i}, Q_\gamma^{i\beta}, Q_k^{ij}$	$Q_\gamma^{i\beta}, Q_\beta^{\gamma i}, Q_k^{ij}$	$\check{c}_2, \hat{c}_2, \tilde{c}_2$
$S\tau^3$	$R^{\alpha\beta\gamma}$	$\bar{H}_{\alpha\beta\gamma}$	b_3
$U\tau^3$	$R^{ij\gamma}$	Q_γ^{ij}	c_3

表 27: IIB モデルと IIA モデルでのすべてのフラックスと超ポテンシャルの対応

完全な T 双対性 H_{abc} フラックス、幾何学的フラックス $f^a{}_{bc}$ 、 Q フラックス $Q^{ab}{}_c$ にさらに次のような T 双対変換

$$H_{abc} \xleftrightarrow{x^a} f^a{}_{bc} \xleftrightarrow{x^b} Q^{ab}{}_c \xleftrightarrow{x^c} R^{abc} \quad (10.19.64)$$

で結ばれる R -フラックスを付け加えると、表 27 に示した対応により、IIA および IIB 理論における超ポテンシャルは T 双対で 1 対 1 に対応することになる：

$$W = P_1(\tau) + SP_2(\tau) + UP_3(\tau) : \quad (10.19.65)$$

$$P_1 = a_0 - 3a_1\tau + 3a_2\tau^2 - a_3\tau^3, \quad (10.19.66)$$

$$P_2 = -b_0 + 3b_1\tau - 3b_2\tau^2 + b_3\tau^3, \quad (10.19.67)$$

$$P_3 = 3\{c_0 + (\hat{c}_1 + \check{c}_1 - \tilde{c}_1)\tau - (\hat{c}_2 + \check{c}_2 + \tilde{c}_2)\tau^3 - c_3\tau^3\} \quad (10.19.68)$$

【注 10.32】 この一般化されたフラックスを用いることにより、dS 真空やインフレーションを実現する $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ および T^6/\mathbb{Z}_2 オービフォルドコンパクト化が構成されている：

References

- B. de Carlos, A. Guarino and J. M. Moreno: JHEP 02 (2010) 076, [arXiv:0911.2876].
“ Complete classification of Minkowski vacua in generalised flux models ”
- U. Danielsson and G. Dibitetto: JHEP 03(2013) 018, [arXiv:1212.4984].
“ On the distribution of stable de Sitter vacua ”
- J. Blaback, U. Danielsson and G. Dibitetto: JHEP 08 (2013) 054, [arXiv:1301.7073].
“ Fully stable dS vacua from generalised fluxes ”
- C. Damian, O. Loaiza-Brito, L. Rey and M. Sabid: JHEP 06 (2013) 109, [arXiv:1302.0529].
“ Slow-Roll Inflation in Non-geometric Flux Compactification ”
- F. Catino, C. A. Scrucca and P. Smyth: JHEP 04 (2013) 056, [arXiv:1302.1754]
“ Simple metastable de Sitter vacua in N=2 gauged supergravity ”
- C. Damian and O. Loaiza-Brito: Phys. Rev. D 88 (2013) 046008, [arXiv:1304.0792].
“ More stable dS vacua from S-dual non-geometric fluxes ”

□

10.19.3.3 3. 一般的な定義

References

- Andriot D, Betz A: jhep 1312, 083 (2013) [arXiv:1306.4381].
“b-supergravity: a ten-dimensional theory with non-geometric fluxes, and its geometric framework”
- Kaloper N, Myers RC: JHEP9905(1999)010.
“ The O(dd) story of massive supergravity ”

Toroidal reduction 10次元超重力理論のNSセクターの d 次元トーラスへのコンパクト化

$$g(M) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & \theta_\mu^m \\ \theta_\nu^n & \gamma_{mn} \end{pmatrix} \quad (10.19.69)$$

により、 $O(d, d)$ 不変な非線形シグマ型の D 次元理論が得られる。

- KK reduction: $M_{10} = X_D \times T^d$

– Gauge fields ($2d$)

$$A^a : (A_\mu^a) = \begin{pmatrix} V_\mu^m = \theta_\mu^m \\ B_{\mu m} \end{pmatrix} \Rightarrow F^a = dA^a \quad (10.19.70)$$

– Moduli

$$M = \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & -\gamma^{-1}B \\ B\gamma^{-1} & \gamma - B\gamma^{-1}B \end{pmatrix} \in O(d, d)/(O(d) \times O(d)) \quad (10.19.71)$$

ここで、

$$M\Omega^T M = \Omega; \quad \Omega := \begin{pmatrix} 0_d & 1_d \\ 1_d & 0_d \end{pmatrix} \quad (10.19.72)$$

- Action

$$S_0 = \int d^D x \sqrt{-g} e^{-\phi} \left[R + (\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2} h \cdot h + \frac{1}{8} \text{Tr}(\Omega \nabla_\mu M \Omega \nabla^\mu M) - \frac{1}{4} {}^T F_{\mu\nu} \Omega M \Omega F^{\mu\nu} \right] \quad (10.19.73)$$

ここで、

$$h = db - \frac{1}{2} \Omega_{ab} A^a \wedge F^b, \quad b = \frac{1}{2} B_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (10.19.74)$$

- Duality group $O(d, d)$

$$A \rightarrow TA, \quad M \rightarrow TM^T T; \quad T\Omega^T T = \Omega \Leftrightarrow T \in O(d, d) \quad (10.19.75)$$

NG flux in terms of the moduli Toroidal reduction で得られる d 次
のモジュライ行列のパラメータを次のように変更する：

$$M = \begin{pmatrix} g - bg^{-1}b & -bg^{-1} \\ g^{-1}b & g^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{g} & \tilde{g}\beta \\ -\beta\tilde{g} & \tilde{g}^{-1} - \beta\tilde{g}\beta \end{pmatrix} \in O(d, d)/(O(d) \times O(d)) \quad (10.19.76)$$

この変換は、

$$(g + b)^{-1} = \tilde{g}^{-1} + \beta \quad (10.19.77)$$

と同等。

この β を用いて、 Q -flux および R -flux を次のように定義することができる：

$$Q_c{}^{ab} = \partial_c \beta^{ab} - 2\beta^{d[a} f^b]{}_{cd}, \quad (10.19.78a)$$

$$\mathcal{R}^{abc} = 3\beta^{d[a} \nabla_e \beta^{bc]} \quad (10.19.78b)$$

10.19.4 Flux-scaling scenario

概要 IIB 理論の CY orientifold コンパクト化において、 H -flux, geometrical flux \mathcal{F} , non-geometrical flux Q , \mathcal{R} のすべてを考慮した場合の 4 次元有効理論を $N = 1$ 超重力理論の形式で具体的に書き下すことができる。この定式化を用いて、安定な SUSY adS 真空をもつ例、その $\bar{D}3$ uplift により non-susy Minkowski 真空を持つ例、 D 項 uplift により axionic flat direction をもつ安定な Minkowski 真空の例を、ブレーンを導入せずに、作ることができる。これらの例では、真空でのモジュライの値はポテンシャルの値は、フラックスのべきの分数式となっており、その値の制御は容易である。しかし、インフレーションモデルを作るのは難しい。一つの可能性は、理論の S 双対性を NG フラックスに拡張することにより示唆される”P-flux” を導入することである。

References

- Blumenhagen R, Font A, Fuchs M, Herschmann D, Plauschinn E, Sekiguchi Y, Wolf F: npb 897, 500 (2015)

“A flux-scaling scenario for high-scale moduli stabilization in string theory”

- Blumenhagen R, Domian C, Font A, Herschmann D, Sun R: Fortsch.Phys. 64 (2016) no.6-7, 536-550

“The Flux-Scaling Scenario: De Sitter Uplift and Axion Inflation”

10.19.4.1 1. Model

以下、IIB 理論において、CY orientifold コンパクト化を考え、フラックスはそれに対する摂動とみなし、内部空間の構造への反作用は考えない。ただし、RR-tadpole 条件は考慮する。

このモデルでは、調和形式は、orientifold 作用 $\mathcal{O} = \Omega_p(-1)^{F_L} \mathcal{R}$ における内部空間での \mathbb{Z}_2 作用 \mathcal{R} に関するパリティにより次のように分類される：

$$H^{1,1} : \omega_A \Rightarrow \omega_\alpha \ (\alpha = 1, \dots, h_+^{1,1}), \quad \omega_a \ (a = 1, \dots, h_-^{1,1}). \quad (10.19.79)$$

$$H^{2,2} : \tilde{\omega}^A \Rightarrow \tilde{\omega}^\alpha \ (\alpha = 1, \dots, h_+^{1,1}), \quad \tilde{\omega}^a \ (a = 1, \dots, h_-^{1,1}). \quad (10.19.80)$$

$$H^{2,1} : \alpha_\Lambda \Rightarrow \alpha_{\hat{\lambda}} \ (\hat{\lambda} = 1, \dots, h_+^{2,1}), \quad \alpha_\lambda \ (\lambda = 1, \dots, h_-^{2,1}). \quad (10.19.81)$$

$$H^{1,2} : \beta^\Lambda \Rightarrow \beta^{\hat{\lambda}} \ (\hat{\lambda} = 1, \dots, h_+^{2,1}), \quad \beta^\lambda \ (\lambda = 1, \dots, h_-^{2,1}). \quad (10.19.82)$$

ここで、

$$\int_Y \omega_A \wedge \tilde{\omega}^B = \delta_B^A, \quad \int_Y \alpha_\Lambda \wedge \beta^\Sigma = \delta_\Lambda^\Sigma. \quad (10.19.83)$$

また、

$$\tilde{\omega}^0 = 1, \quad \omega_0 = \Omega(Y)/\mathcal{V}(Y) \quad (10.19.84)$$

と約束する。

モジュライは

- Complexified Kähler: $T_\alpha = \tau_\alpha + i\rho_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, h_+^{1,1}$
- Purely axionic moduli: $G^a = S b^a + i c^a$, $a = 1, \dots, h_-^{1,1}$
- CS moduli: $U^\lambda = u^\lambda + i v^\lambda$, $\lambda = 1, \dots, h_-^{2,1}$
- axio-dilaton: $S = e^{-\phi} - i C_0$

これらの chiral superfield に加えて、可換ゲージ場が生じる：

$$A_{\hat{\lambda}} : \hat{\lambda} = 1, \dots, h_+^{2,1} \quad \Leftarrow C_{[4]} \quad (10.19.85)$$

10.19.4.2 2. Non-geometrical flux

H -flux, geometrical flux F , non-geometrical flux Q, R を記述するパラメータを、作用素

$$\mathcal{D} \equiv d - H \wedge - F_\circ - Q_\circ - R_\circ; \quad (10.19.86)$$

$$F_\circ \omega_p = (F_{[j_1 j_2}^i \omega_{|i|j_3 \dots j_{p+1}]}) \in \mathcal{A}^{p+1}, \quad (10.19.87)$$

$$Q_\circ \omega_p = (Q_{[j_1}^{i_1 i_2} \omega_{|i_1 i_2|j_2 \dots j_{p-1}]}) \in \mathcal{A}^{p-1}, \quad (10.19.88)$$

$$R_\circ \omega_p = (R^{i_1 i_2 i_3} \omega_{|i_1 i_2 i_3|j_1 \dots j_{p-3}}) \in \mathcal{A}^{p-3} \quad (10.19.89)$$

の微分形式の基底への作用により次のように定義する：

$$\mathcal{D}\alpha_\Lambda = q_\Lambda^A \omega_A + f_{\Lambda A} \tilde{\omega}^A, \quad (10.19.90a)$$

$$\mathcal{D}\beta^\Lambda = \tilde{q}^{\Lambda A} \omega_A + \tilde{f}^\Lambda_A \tilde{\omega}^A, \quad (10.19.90b)$$

$$\mathcal{D}\omega_A = -\tilde{f}^\Lambda_A \alpha_\Lambda + f_{\Lambda A} \beta^\Lambda, \quad (10.19.90c)$$

$$\mathcal{D}\tilde{\omega}^A = \tilde{q}^{\Lambda A} \alpha_\Lambda - q_\Lambda^A \beta^\Lambda. \quad (10.19.90d)$$

ただし、 $A = 0$ に対応する係数は、 H フラックスと R フラックスを表す：

$$f_{\Lambda 0} = r_A, \quad \tilde{f}^\Lambda_0 = \tilde{r}^\Lambda, \quad q_A^0 = h_\Lambda, \quad \tilde{q}^{\Lambda 0} = \tilde{h}^\Lambda. \quad (10.19.91)$$

これに orientifold 射影を施すと次の成分が残る：

$$\mathcal{F}(-) : f_\lambda, \quad \tilde{f}^\lambda \quad (2h_-^{2,1}), \quad (10.19.92a)$$

$$H(-) : h_\lambda, \quad \tilde{h}^\lambda \quad (2h_-^{2,1}), \quad (10.19.92b)$$

$$F(+) : f_{\lambda\alpha}, \quad \tilde{f}^{\lambda\alpha}, \quad f_{\lambda a}, \quad \tilde{f}^\lambda_a \quad (2h_+^{1,1}h_+^{2,1} + 2h_-^{1,1}h_+^{2,1}), \quad (10.19.92c)$$

$$Q(-) : q_{\hat{\lambda}}^a, \quad \tilde{q}^{\hat{\lambda}a}, \quad q^{\lambda\alpha}, \quad \tilde{q}^{\lambda\alpha} \quad (2h_+^{1,1}h_-^{2,1} + 2h_-^{1,1}h_+^{2,1}), \quad (10.19.92d)$$

$$R(+): r_{\hat{\lambda}}, \quad \tilde{r}^{\hat{\lambda}} \quad (2h_+^{2,1}) \quad (10.19.92e)$$

これらのフラックスは Bianchi 恒等式、tadpole 条件より導かれる次の条件を満たすことが要求される：

$$\mathcal{D}^2 = 0. \quad (10.19.93)$$

10.19.4.3 3. 4D sugra

Superpotential 一般公式

$$W = \int_Y (\mathcal{F} + \mathcal{D}\Phi_c^{\text{ev}})_3 \wedge \Omega \quad (10.19.94)$$

$$\Phi_c^{\text{ev}} \equiv iS_0 iG^a \omega_a - iT_\alpha \tilde{\omega} \alpha \quad (10.19.95)$$

もフラックスの表式を代入すると

$$W = -(f_\lambda X^\lambda - \tilde{f}^\lambda F_\lambda) + iS(h_\lambda X^\lambda - \tilde{h}^\lambda F_\lambda) + iG^a(f_{\lambda a} X^\lambda - \tilde{f}^\lambda{}_a F_\lambda) - iT_\alpha(q_\lambda{}^\alpha X^\lambda - \tilde{q}^{\lambda\alpha} F_\lambda) \quad (10.19.96)$$

ここで、 X^λ と F_λ は

$$\Omega = X^\lambda \alpha_\lambda - F_\lambda \beta^\lambda \quad (10.19.97)$$

により定義される CS モジュライの関数。

つぎに Kähler ポテンシャルは

$$K = -\ln\left(-i \int_Y \Omega \wedge \bar{\Omega}\right) - \ln(S + \bar{S}) - 2 \ln \mathcal{V}; \quad (10.19.98)$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6} \kappa_{\alpha\beta\gamma} t^\alpha t^\beta t^\gamma, \quad (10.19.99)$$

$$J = e^{\phi/2} t^\alpha \omega_\alpha, \quad B_2 = b^a \omega_a. \quad (10.19.100)$$

以上より、スカラポテンシャルは

$$V = V_F + V_D + V_{\text{tad}}^{\text{NS}}; \quad (10.19.101)$$

$$V_D = -\frac{m_{\text{pl}}^4}{2} [(\text{Im } \mathcal{N})^{-1}]^{\hat{\lambda}\hat{\sigma}} D_{\hat{\lambda}} D_{\hat{\sigma}}, \quad (10.19.102)$$

$$D_{\hat{\lambda}} = \frac{1}{\mathcal{V}} \left[-r_{\hat{\lambda}} (e^\phi \mathcal{V} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\beta\gamma} t^\alpha t^\beta t^\gamma) - q_{\hat{\lambda}}{}^a \kappa_{a\alpha\beta} t^\alpha t^\beta + f_{\hat{\lambda}\alpha} t^\alpha \right] \quad (10.19.103)$$

ただし、 $\tilde{r}^{\hat{\lambda}} = \tilde{q}^{\hat{\lambda}\alpha} = \tilde{f}^{\hat{\lambda}}{}_\alpha = 0$ とした。

10.19.4.4 4. $\overline{D3}$ uplifting

Toy model 簡単な例として、

$$h_+^{1,1} = 1, \quad h_-^{1,1} = 0, \quad h_-^{2,1} = 1, \quad h_+^{2,1} = 0 \quad (10.19.104)$$

となるモデルを考えると、複素モジュライ変数は T, U, S のみで、ゲージ場は現れない。ポテンシャルは

$$K = -\ln(S + \bar{S}) - 3 \ln(T + \bar{T}) - 3 \ln(U + \bar{U}) \quad (10.19.105a)$$

$$W = i(-fU + h_0 S - 3hSU^2 - qT) \quad (10.19.105b)$$

これより、直ちに、つぎの SUSY adS 極小点が存在することが分かる：

$$U = \frac{\sqrt{5}}{3} \sqrt{\frac{h_0}{h}}, \quad S = -\frac{\sqrt{5}}{4} \frac{f}{\sqrt{h_0 h}}, \quad T = -\frac{\sqrt{5}f}{2q} \sqrt{\frac{h_0}{h}} \quad (10.19.106a)$$

$$V = -\frac{9}{4 \cdot 5^{5/2}} \frac{q^3 h^{5/2} m_{\text{pl}}^4}{f^2 h_0^{3/2} 4\pi} \quad (10.19.106b)$$

この極点でのモジュライの質量は

$$m_{\text{mod}}^2 = \mu_i \frac{q^3 h^{5/2} m_{\text{pl}}^2}{f^2 h_0^{3/2} 4\pi}, \quad (10.19.107)$$

$$(\mu_i) \simeq [0.43, 0.24, 0.12; 0.56, 0.13, 0.04] \quad (10.19.108)$$

となるので、この極点は安定である。また、 $s > 0$ より、フラックスの符号に対し

$$f < 0, \quad h_0, h, q > 0 \quad (10.19.109)$$

が要求される。

Uplifting 反 D3 ブレーンによりポテンシャルを uplift するとすると、

$$V_{\text{up}} = \frac{A}{\gamma^{4/3}} \frac{m_{\text{pl}}^4}{4\pi} \quad (10.19.110)$$

がポテンシャルに付け加わる。この新たなポテンシャルは次の Minkowski 極点をもつ：

$$S = \frac{1}{3^{3/4}} \frac{f}{\sqrt{h h_0}}, \quad U = \frac{1}{3^{1/4}} \left(\frac{h_0}{h} \right)^{1/2}, \quad T = \frac{f}{3^{1/4} q} \left(\frac{h_0}{h} \right)^{1/2} \quad (10.19.111)$$

$$A = \frac{3^{1/4} q h^{3/2}}{2 h_0^{1/2}}. \quad (10.19.112)$$

ただし、この極点が存在する条件は

$$f, h_0, h, q > 0 \quad (10.19.113)$$

となるので、この極点は uplift する前の adS 極点と全く関係ないことが分かる。特に、この極点では SUSY は破れており、

$$\mu_{3/2} = 0.3135. \quad (10.19.114)$$

この曲点でのモジュライ質量は

$$(\mu_i) \simeq [0.80, 0.45, 0.03; 1.55, 0.21, 0.08] \quad (10.19.115)$$

また,

$$M_s^2 = \frac{3^{3/4}\pi}{2^{3/2}} \frac{q^{3/2}h}{f^2 h_0^{1/2}} m_{\text{pl}}^2, \quad M_{\text{KK}}^2 = \frac{3^{1/2}}{16\pi} \frac{q^2 h}{f^2 h_0} m_{\text{pl}}^2 \quad (10.19.116)$$

より

$$\frac{M_{\text{KK}}^2}{M_s^2} = \frac{(q/h_0)^{1/2}}{2^{5/2} 3^{1/4} \pi^2}, \quad \frac{M_{\text{mod}}^2}{M_{\text{KK}}^2} = \mu_i \frac{4q}{3^{1/2}} \frac{h^{3/2}}{h_0^{1/2}} \quad (10.19.117)$$

となるので, $h, q = O(1), h_0 \sim f \gg 1$ と取れば, 望ましい質量ヒエラルキー $M_s^2 > M_{\text{KK}}^2 > M_{\text{mod}}^2$ が得られる. ただし, インフラトンに対応する場は含まれない.

10.19.4.5 5. *D-term uplifting*

D-term による *uplifting* の可能性を見るため,

$$h_+^{2,1} = 1, \quad h_-^{2,1} = 1, \quad h_+^{1,1} = 1, \quad h_-^{1,1} = 0 \quad (10.19.118)$$

となる場合を考える. この場合, スカラ場 S, T, U に加えて可換ゲージ場が 1 個現れ, つぎの *D-term* ポテンシャルを生み出す:

$$V_D = \frac{\delta g^2}{u\tau^2} \left(1 + \frac{q}{3h} \frac{\tau}{s}\right)^2. \quad (10.19.119)$$

超ポテンシャルは

$$W = i(fU + \tilde{f}U^3 - hS + qT). \quad (10.19.120)$$

全ポテンシャルは次の安定な Minkowski 真空をもつ.

$$S = \gamma_1 \frac{f^{3/2}}{h\tilde{f}^{1/2}}, \quad T = \gamma_2 \frac{f^{3/2}}{q^t f^{1/2}}, \quad U = \gamma_3 \left(\frac{f}{\tilde{f}}\right)^{1/2} \quad (10.19.121a)$$

$$\delta g^2 = \gamma_4 \frac{hg\tilde{f}}{f}, \quad (10.19.121b)$$

$$(\gamma_i) = [0.1545, 1.5701, 1.0718, 0.0044]. \quad (10.19.121c)$$

モジュライ質量は

$$M_{\text{mod}}^2 = \mu_i \frac{hq^3 \tilde{f}^{5/2} m_{\text{pl}}^2}{f^{9/2} 4\pi}, \quad (10.19.122a)$$

$$(\mu_i) \simeq [0.69, 0.01, 0.17; 0.75, 0.05, 0] \quad (10.19.122b)$$

また,

$$\frac{M_s^2}{M_{\text{KK}}^2} = 178 \frac{h^{1/2}}{h_0^{1/2}}, \quad \frac{M_{\text{KK}}^2}{M_{\text{mod}}^2} = \frac{0.1}{\mu_i} \frac{1}{hq} \left(\frac{f}{\tilde{f}} \right)^{3/2}. \quad (10.19.123)$$

より, mass hierarchy も実現できる.

10.19.4.6 6. P -flux

Q -flux が存在するときに IIB 理論が S 双対性を持つためには, S 双対変換に対して

$$S : \begin{pmatrix} P & Q \end{pmatrix} \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \begin{pmatrix} P & Q \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathcal{F} & H \end{pmatrix} \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \begin{pmatrix} \mathcal{F} & H \end{pmatrix} \quad (10.19.124)$$

と変換する新たなフラックス P を導入する必要がある。 P の作用は, p -形式 $\rightarrow (p-1)$ -形式で、基底に対する作用は

$$-P \circ \alpha_\Lambda = p_\Lambda^A \omega_A, \quad -P \circ \beta^\Lambda = \tilde{p}^{\Lambda A} \omega_A, \quad (10.19.125a)$$

$$-P \circ \omega_A = 0, \quad -P \circ \tilde{\omega}^A = -p^{\Lambda A} \alpha_\Lambda + p_\Lambda^A \beta^\Lambda \quad (10.19.125b)$$

と表される。

この P -フラックスが存在すると超ポテンシャルは次のように修正される:

$$W = W_0 + (ST_\alpha + \frac{1}{2} \kappa_{abc} G^b G^c) (p_\lambda^\alpha X^\lambda - \tilde{p}^{\lambda\alpha} F_\lambda). \quad (10.19.126)$$

10.19.4.7 7. Axion monodromy inflation

D-term uplifting model に P -flux を加えると,

$$W = \lambda W_0 - ipSTU. \quad (10.19.127)$$

このとき, Minkowski 真空でゼロ質量であったアクシオン場 $\theta_{\alpha c}$ に対して, 有効ポテンシャル

$$V_{\text{eff}} = B_1 \theta^2 + B_2 \theta^4; \quad (10.19.128a)$$

$$B_1 \sim \frac{\lambda p h^2 q^2 \tilde{f}^{5/2}}{f^{19/2}}, \quad B_2 \sim \frac{p^2 h^3 q \tilde{f}^{5/2}}{f^{13/2}} \quad (10.19.128b)$$

目次へ

が生じ、インフラトンとなることができる。ただし、

$$\frac{M_{\text{KK}}^2}{M_\theta^2} \sim \frac{1}{\lambda p f^{1/2} \tilde{f}^{1/2}} \quad (10.19.129)$$

となるので、インフレーション時に4次元有効理論が適用できるためには、フラックス係数が非整数となる必要がある。

10.20 *OMC

11 統一理論：文献ノート

Last update: 2013/11/1

11.1 標準モデルを超えて

11.1.1 Axion

11.1.1.1 Overview

- 導入

1977 Peccei-Quinn 機構 [Peccei RD, Quinn HR[324]]

1979 QCD における CP の破れの効果. 中性子の電気双極子モーメント [Crewther RJ, Di Vecchia P, Veneziano G, Witten E[98]; Baluni, V[19]]

- ハドロンのアクシオン

1993 質量に対する宇宙論的制限. [Chang S, Choi K[75]]

1998 混合ダークマターモデル [Moroi T, Murayama H[302]]

11.2 Anomalies

11.2.1 レビュー

11.2.2 Overview

- Axial anomaly

1969 Axial anomaly の発見 [Adler SL[4]]

- $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ 崩壊への応用 [Bell JS, Jackiw R[34]]

- 非くり込み定理：axial anomaly は 1-loop exact であることを摂動展開で具体的に示した. [Adler SL, Bardeen WA[5]]

1979 't Hooft anomaly matching 条件：ゲージ場強結合によるゼロ質量複合粒子形成に対する条件. ['t Hooft G[365]]

- 経路積分による導出. [Fujikawa K[170, 171, 172]]

- Anomalies in 10D SUGRA
 - 1984 Anomaly cancelation in 10D type II SUGRA [Alvarez-Gaume L, Witten E [8]]
 - Anomaly cancelation in 10D type I $SO(32)/E_8 \times E_8$ SUGRA (Green-Schwarz mechanism) [Green MB, Schwarz JH[220]]
- Anomaly inflow and the CS term of D-branes

11.3 大統一理論

11.3.1 レビュー

Short Reviews

- Frank Wilczek(1997): “The Future of Particle Physics” [385]

Long Reviews

- Gell-Mann M, Ramond P, Slansky R (1978): Color Embeddings, Charge Assignments, And Proton Stability In Unified Gauge Theories [183]
- Slansky R (1981): Group Theory for Unified Model Building [353]

Heterotic SST GUT

- Nilles H P, Ramos-Sanchez S, Ratz M and Vaudrevange P K S (2009): ”From strings to the MSSM”, Eur. Phys. J. C 59 249-67 (arXiv:0806.3905)

II SST IDB GUT

- Lüst D (2004): ”Intersecting brane worlds: a path to the standard model?”, Class. Quantum Grav. 21: S1399-1424 (arXiv:hep-th/0401156).

- Blumenhagen R, Cvetič M, Langacker P and Shiu G (2005): "Toward realistic intersecting D-brane models", Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 55: 71-139 (arXiv:hep-th/0502005)
- Blumenhagen R, Kors B, Lüst D and Stieberger S (2007): "Four-dimensional string compactifications with D-branes, orientifolds and fluxes", Phys. Rep. 445: 1-193 (arXiv:hep-th/0610327).

F-theory GUT

- Denef F (2008): "Les Houches lectures on constructing string vacua", arXiv:0803.1194.
- Heckman J J (2010): "Particle physics implications of F-theory", arXiv:1001.0577.
- Weigand T (2010): "Lectures on F-theory compactifications and model building", Class. Quantum Grav. 27:214004 (arXiv:1009.3497 [hep-th])

M-theory GUT

11.3.2 Overview

1978 可能な大統一理論の組織的な群論的分析 (Review) (Gell-Mann M, Ramond P, Slansky R[183])

- SU(5) モデル

1974 **Georgi-Glashow** モデル (Georgi H, Glashow S (1974)[185])

- SO(10) モデル

1974 $SO(10) \Rightarrow SU(5)(GG) \Rightarrow G_{SM}$ (Fritzsch H, Minkowski P[168]; Georgi H [184])

1974 **Pati-Salam** モデル $SO(10) \Rightarrow SU(4) \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ (Pati JC, Salam A ([323])).

1979 $SO(10) \Rightarrow SU(5)(GG) \times U(1) \Rightarrow G_{SM}(\subset SU_5)$ (Georgi H, Nanopoulos DV [186])

1979 **LR-symmetric model** $SO(10) \Rightarrow SU(3) \times SU(2) \times SU(2) \times U(1) \Rightarrow G_{SM}$ (Georgi H, Nanopoulos DV [186])

1982 **Flipped SU(5) モデル** $SO(10)$ GUT の新たな対称性破れのパターン : $SO(10) \Rightarrow SU(5) \times U(1) \Rightarrow G_{SM}$ (Barr SM[22])

- E_6 モデル

1975 (Gürsey F, Ramond P, Sikivie P[236])

- E_7 モデル

1975 (Gürsey F, Sikivie P[237]; Ramond P[332])

- 対称性の自発的破れ

1983 (**Hosotani 機構**) 単連結でない空間をもつモデルにおいて, 非 Wilson ループ (非自明な平坦ゲージ場) による対称性の自発的破れ (Hosotani Y)

- ゲージ・Higgs 統一

1990 オービフォールドコンパクト化によるカイラリティの生成 (Antoniadis I[10]; Pomarol A, Quiros M (1998)[330])

11.3.3 No-scale model

11.3.3.1 History

- No-scale SUGRA

1983

11.4 超対称性

11.4.1 Reivews

- S. Ferrara(1986): “Supersymmetry” [147]
- N.-P. Nilles(1984):[309]
- Keith R. Dienes (Institute for Advanced Study)(1996)hep-th/9602045:
“String Theory and the Path to Unification: A Review of Recent
Developments”
Comments: 104 pages, LaTeX, 21 figures, 3 tables.
Final version to appear in Physics Reports

11.4.2 History

1966 超群 $SU(M|N)$ [Miyazawa H][301]

1967 (**Coleman-Mandula の no-go 定理**) 相対論的場の量子論と整合的な S 行列の対称性を表す Lie 代数は, Poincare 群の Lie 代数と (内部対称性を表す) コンパクト Lie 代数の直和に限られる. [Coleman & Mandula][83]

1971 (**超 Poincare 代数**) 最初の発見. [Gol’fand YuA & Likhtman EP (1971)][201]

2D superstring action[Gervais JL & Sakita B][187]

1972 超 Poincare 代数の非線形表現の最初の構成. [Volkov DV & Akulov VP][377]

1973 (**Wess-Zumino モデル**) 最初の 4 次元超対称場の理論 (カイラルモデル). [Wess & Zumino 1974][382]

1974 超 Poincare 代数の内部対称性を含む超代数への拡張およびそのユニタリ表現. [Salam A, Strathdee J[342]; Salam A, Strathdee J 2005[343]; Wess J[380]]

超空間の導入 [Salam A, Strathdee[341]]

- 超対称場の理論における量子発散の緩和 [Wess J, Zumino B[381]; Iliopoulos J, Zumino B[265]; West PC 1976[384]]
- 1975 (**Haag-Lopuszanski-Sohnius の no-go 定理**) 相対論的場の量子論と整合的な S 行列の対称性として許される (拡張) Poincare および共形超代数の一般形の決定. [Hagg, Lopuszanski & Sohnius][242]
- 超対称ハミルトニアンの正值性 [Zumino B[399]]
- 1976 古典超代数および (実) 単純超代数の分類 [Nahm W, Rittenberg V, Scheunert M[304]; Scheunert M, Nahm W, Rittenberg V[346]; Kac VG 1975, 1977[269, 270]].
- 1978 (テンソル計算法) 超対称代数の既約表現の積の分解に関するテンソル計算法 [Ferrara S, van Nieuwenhuizen [154]; Stelle KS, West PC[355]]
- 4次元超 Poincare 代数の既約ユニタリ表現の組織的研究 [Nahm W[303]; Freedman DZ 1979[161]; Ferrara S 1981[145, 146]]
- 1981 拡張超対称性のユニタリ表現 [Ferrara S, Savoy CA, Zumino B[150]; Ferrara S, Savoy CA 1982[149]]
- 1982 (dS 超代数) [Lukierski J, Novicki A[291, 292]]
- dS 超重力理論のゴースト [Pilch K, van Nieuwenhuizen P, Sohnius M[325]]
- 1987 $2 \leq D \leq 10$ における (拡張) 超 Poincare 代数に対するユニタリ表現 [Strathdee J[357]]

11.5 スピンの上限

11.5.1 Reviews

- Porrati M: prd78, 065016 (2008):
“Universal limits on massless high-spin particles”

11.5.2 Overview

1970 スピン $5/2$ の場に対する場の方程式を決定.

J. Schwinger: Particles, sources and fields (Addison-Wesley, Reading, MA, 1970).

J. Fang and C. Fronsdal, Phys. Rev. D18, 3630 (1978).

F.A. Berends, J.W. van Holten, P. van Nieuwenhuizen and B. de Wit, Phys. Lett. 83B, 188 (1979).

1977 S 行列に対する Born 近似のレベルで, 超組 $(2,5/2)$ が整合的でないことを指摘.

M.T. Grisaru, H. Pendleton, P. van Nieuwenhuizen: Phys.Rev. D15, 996 (1977)

“Supergravity and the S Matrix”

M.T. Grisaru, H. Pendleton: Phys. Lett. 67B, 323 (1977)

“Soft Spin $3/2$ Fermions Require Gravity and Supersymmetry “

1979

C. Aragone and S. Deser, Phys. Lett. 86B, 161 (1979).

“Consistency Problems of Hypergravity”

11.6 超重力理論

11.6.1 Reviews

論文選集

- Salam A & Sezgin E (ed.): *Supergravities in Diverse Dimensions*, vol. 1 & 2 (World Scientific, 1989).
- Duff MJ (ed.): *The World in Eleven Dimensions: Supergravity, Supermembrane and M-theory* (IOP, 1999).

一般解説

- Wess J & Bagger J: *Supersymmetry and Supergravity*, 2nd edition (Princeton Univ. Press, 1992).
- Gates SJ, Grisaru MT, Rocek M & Siegel W: *Superspace or one thousand and one lessons in supersymmetry* (Benjamin, 1983).
- Srivastava PP: *Supersymmetry, superfields and supergravity* (Adam Hilge, 1986).
- West P: *Introduction to supersymmetry and supergravity* (World Scientific, 1986).
- Freund PGO: *Introduction to supersymmetry* (C.U.P., 1988).
- Bailin D & Love A: *Supersymmetric gauge field theory and string theory* (IOP, 1994).
- Weinberg S: *The Quantum Theory of Fields*, vol. III, Supersymmetry (CUP, 2000).
- Fayet P and Ferrara S: *Supersymmetry*, Phys. Rept. **32**, 249 (1977).
- Van Nieuwenhuizen P: *Supergravity*, Phys. Rept. **68**, 198 (1981).
- Sohnius M: *Introducing Supersymmetry*, Phys. Rept. **128**, 39 (1985).
- Lykken JD: *Introduction to supersymmetry*, hep-th/9612114.

現象論

- Nanopoulos D: *Supersymmetric GUTS*, Phys. Rept. **105**, 71 (1984).
- Nilles H: *Supersymmetry, supergravity and particle physics*, Phys. Rept. **110**, 1 (1984).
- Haber HE & Kane GL: *The Search For Supersymmetry: Probing Physics Beyond The Standard Model*, Phys. Rept. **117**, 75 (1985).
- Ellis J: *Supersymmetry and grand unification*, hep-th/9512335.
- Chung JH, Everett LL, Kane GL, King SF, Lykken J & Wang L-T: *The soft supersymmetry-breaking lagrangian: theory and applications*, MCTP-03-39
- Dine M: *TASI lectures on M Theory phenomenology*, hep-th/0003175.
- Ross GG: *Supersymmetric models*, Les Houches Summer School in Theoretical Physics, Session 68: Probing the Standard Model of Particle Interactions, (France, 28 Jul. - 5 Sep., 1997).
- Raby S: *Desperately seeking supersymmetry*, hep-ph/0401169.

Kaluza-Klein Supergravity

- Witten E: *Fermion quantum numbers in Kaluza-Klein theory*, in Proceedings of the Shelter Island II conference (1983) 227, eds. Khuri, Jackiw, Weinberg and Witten (MIT Press, 1985).
- Duff MJ, Nilsson BEW & Pope CN: *Kaluza-Klein supergravity*, Phys. Rept. **130**, 1 (1986).
- Appelquist T, Chodos A & Freund PGO: *Modern Kaluza-Klein theories* (Addison-Wesley, 1987).
- Castellani L, D'Auria R & Fre P: *Supergravity and superstrings: a geometric perspective*, 3 vols (World Scientific, 1991).[70]
- Salam A & Sezgin E: *Supergravities in diverse dimensions* (World Scientific, 1989).[340]

- Duff MJ: *Kaluza-Klein theory in perspective*, in Proceedings of the Nobel Symposium *Oskar Klein Centenary*, Stockholm, Sept. 1994, ed. Lindstrom (World Scientific, 1995) [hep-th/9410046].
- Duff MJ: *The world in eleven dimensions: a tribute to Oskar Klein*, hep-th/0100237.

M 理論

- Duff MJ: *Supermembranes: The first fifteen weeks*, Class. Quant. Grav. **5**, 189 (1988).
- Duff MJ: *Classical and quantum supermembranes*, Class. Quant. Grav. **6**, 1577 (1989).
- Duff MJ, Khuri RR & Lu JX: *String solitons*, Phys. Rept. **259**, 213 (1995).
- Schwarz JH: *The power of M-theory*, Phys. Lett. **B360**, 13 (1995).
- Duff MJ: *Supermembranes*, Lectures given at the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics (TASI 96), Boulder 1996, hep-th/9611203.
- Duff MJ: *M-theory: the theory formerly known as strings*, Int. J. Mod. Phys. **A11**, 5623 (1996) [hep-th/9608117].
- Townsend PK: *Four lectures on M-theory*, hep-th/9612121.
- Stelle KS: *An introduction to p-branes*, In Seoul/Sokcho 1997, Dualities in gauge and string theories, 39-104.
- Polchinski J: *String Theory*, 2 vols (CUP, 1998).
- Kaku M: *Introduction to superstrings and M-theory* (Springer, 1999).
- Kaku M: *Strings, conformal fields and M-theory*.
- Duff MJ: *The World in Eleven Dimensions: Supergravity, Supermembranes and M-theory* (IOP, 1999).[125]

- Johnson C: *D-branes* (CUP, 2003).
- G_2 ホロノミーをもつ多様体による M 理論のコンパクト化 [Duff (2002)][126]

11.6.2 Model construction

overview

- SUGRA モデルの最初の構成
 - 1976 [Ferrara S, Freedman DS, van Nieuwenhuizen P[148]; Deser S, Zumino B[114]]
- $D = 11$ model
 - 1978 $D = 11$ SUGRA の構成 (Cremmer E, Julia B, Scherk J[93])
 - 1980 $D = 11$ SUGRA (on-shell) の超空間による定式化 (Cremmer E & Ferrara S[88]; Brink L & Howe P[55])
 - 1981 $D = 11$ SUGRA の一意性 (宇宙項の自由度なし) (Nicolai H & van Nieuwenhuizen P[308])
- $D = 10$ models
 - 1977 $D = 10$ SYM(super-YM) 理論の構成 (Gliozzi F, Olive D & Scherk J[199]; Brink L, Schwarz JH & Scherk J[56])
 - 1981 $D = 10, N = 1$ SUGRA の構成 (場の方程式と局所 SUSY 変換則:superspace による定式化) (Nillson BEW[310])
 - $D = 10, N = 1$ SUGRA に対する作用積分の構成 (Chamseddine AH[74])
 - 1982 $D = 10, N = 1$ Maxwell-Einstein SUGRA の構成 (Chern-Simons 項の導入) (Bergshoeff E, de Roo M, de Wit B, van Nieuwenhuizen P[37])
 - 1983 (I 型モデル) $D = 10, N = 1$ Einstein-YM SUGRA の構成 (Chapline G & Manton NS[76])
 - (IIB 型モデル) $D = 10, N = 2$ chiral SUGRA の構成 (Schwarz JH & West PC; Schwarz JH; Howe P. & West PC)

- 1984 Type I model での anomaly free condition ($G = \text{SO}(32), E_8 \times E_8, E_8 \times \text{U}(1)^{248}, \text{U}(1)^{496}$) (Green MB & Schwarz JH[219, 347])
- IIB モデルが anomaly free であることの証明 (Alvarez-Gaume L & Witten E[8])
 - (IIA 型モデル) $D = 10, N = 2$ nonchiral SUGRA の構成 (Campbell C and West PC[64]; Giani F & Pernici M[189]; Huq M & Namazie MA (1985) [262])
- 1986 (Massive IIA 型モデル) 宇宙項を持つ IIA の変形 ($D = 10, N = 2$) (Romans L[338])
- 1987 Massive IIA 型モデルに対する超場による定式化 (Carr JL, Gates SJ Jr., Oerter RN [69])
- $D = 6$ models
 - 1984 $6D, N = 1$ モデル : $(n_T, n_V, n_H) = (1, n(2n + 1) + 3, 6n)$, $\mathcal{M} = \text{Sp}(n, 1)/(\text{Sp}(n) \times \text{Sp}(1))$, $G = \text{Sp}(n) \times \text{Sp}(1)$ [Nishino H, Sezgin E 1984[312]]
 - 1985 $D = 10$ Type I SUGRA の K3 コンパクト化による $6D, N = 1$ anomaly free モデルの構築. [Green MB, Schwarz JH, West PC 1985[223]]
 - $D = 5$ models
 - 1981 $D = 5, N = 1$ minimal SUGRA 理論の構成 [Cremmer E in Superspace and supergravity, ed. S.W. Hawking and M. Rocek, CUP]
 - 1985 $D = 5, N = 1$ (gauged) SUGRA と任意個の $\text{U}(1)$ ゲージ超組との結合モデルの構成 (Günaydin M, Sierra G, Townsend PK [234])
 - $D = 4$ models
 - 1976 $N = 1$ 単純 SUGRA 理論 (On-shell, 補助場なし) [Ferrara S, Freedman DS, van Nieuwenhuizen P[148]; Deser S, Zumino B[114]]
 - $N = 2$ 単純 SUGRA 理論の構成 [Ferrara S, van Nieuwenhuizen P[152]]

- 1977 $N = 1$ 単純 SUGRA の超空間形式 [Wess J, Zumino B[383]]
- $N = 1$ AdS SUGRA 理論の構成 (gravitino の質量項も許す) [Townsend PK[370]]
 - $N = 1$ 単純 SUGRA 理論 (Off-shell, 補助場 : 非極小) [Breitenlohner P[54]]
 - $N = 2, 3$ gauged-SUGRA の例を構成. 成分場は, $1[2]2[3/2], 1[1]$. Massive な $3/2$ 場と正の宇宙項 ! [Freedman and Das[162]]
 - $N = 3$ 単純 SUGRA 理論の構成 [Freedman DZ[?]; Ferrara S, Scherk J, Zumino B[151]]
 - $N = 4$ 単純 SUGRA 理論の構成 (κ の 3 次まで) [Das A 1977[100]]
- 1978 $N = 1$ 単純 SUGRA (Off-shell, 極小補助場 : S, P, A_μ) [Ferrara S, van Nieuwenhuizen P[153]]
- 1979 (**Cremmer-Julia model**) $N = 8$ SUGRA with global $E_7 \times$ local $SU(8)$ symmetry by T^7 compactification of $D = 11, N = 1$ minimal SUGRA (Cremmer E and Julia B[91])
- 1981 $N = 1$ 単純 SUGRA (Off-shell, 極小補助場 : $B_{\mu\nu}, A_\mu$) [Sohnius M, West PC[354]]
- 1982 (**de Wit-Nicolai model**) $N = 8$ SUGRA with local $SO(8) \times SU(8)$ invariant model の構成 (de Wit and Nicolai H[108, 107])
- 1983 $N = 1$ SUGRA に対する一般的な作用積分の決定 [Cremmer E, Ferrara S, Girardello L and Van Proeyen A NPB212:413]
- $N = 2$ SUGRA : 一般的な hypermultiplet と結合した理論の一般系を決定 [Bagger J, Witten E 1983[17]]
- 1984 $N = 2$ SUGRA : 一般的な hypermultiplet および vector multiplet と結合した理論の一般系を決定 [de Wit B, Lauwers PG, Philippe R, Su SQ, van Proeyen A 1984[106]]
- $N = 8$ SUGRA の electric gauging の完全構成: $SO(p, q)(p + q = 8)$ および $CSO(7, 1) = ISO(7), CSO(6, 2), CSO(5, 3), CSO(4, 4), CSO(3, 5), CSO(2, 6), CSO(1, 7)$ (分類の完全性の証明は Cordaro et al (1998) [Hull CM (1984)[256]])
- 1985 $N = 4$ SUGRA の一般的構成 [de Roo M NPB255:515]

- 1996 $N = 2$ SUGRA の一般的構成 [Andrianopoli L et al NPB476:397 (hep-th/9603004)]
- 1998 $N = 8$ **Sugra** の **electric semi-simple** $SL(8)$ 型 **gauging** の完全分類 [Cordaro F, Fre P, Gualtieri L, Termonia P, Trigiante M[84]]
- 2002 $N = 8$ Sugra の non-semisimple electric $SL(8)$ 型 **gauging** [Andrianopoli L, D'Auria R, Ferrara S, Lledo MA[9]; Hull CM 2003[259]]
- 2007 $N = 8$ **gauged Sugra** の一般的構成 : Embedding tensor 法 [de Wit B, Samtleben H, Trigiante M[111]]
- 2011 $N = 8$ **Sugra** の **gauging** の trombone 対称性への拡張 $E_{7(7)} \times \mathbb{R}$ の部分群の **gauging**. Dyonic **gauging**. 付加的な宇宙項. 一般には作用積分を持たない. [Le Diffon A, Samtleben H, Trigiante M [289]]

11.6.3 4DSugra のモジュライポテンシャル

Overview

- $N = 8$ models
 - 1983 ($N = 8$ $SO(8)$ -**gauged sugra** の $SU(3)$ 不変な極点の分類: 5 種類の極点. すべて adS. ただし, 最も Λ が小さい極点は non-susy. [Warner NP (1983)[378]]
 - 2011 ($N = 8$ **gauge sugra** の一般的なモデルでの極点探査) : 埋め込みテンソルを用いる. [Dall'Agata1 G, Inverso G [?]]

11.6.4 4D 理論と 11D/10D 理論の対応

Overview

- $N = 8$ 理論
 - 1979 **CJ** 理論: $M/T^7 \Rightarrow$ 4D $N = 8$ ungauged sugra (Cremmer E and Julia B[91])

- 1987 **DN 理論**: $M/S^7 \Rightarrow$ 4D SO(8) gauged sugra [B. de Wit and H. Nicolai 1987 [109]; H. Nicolai and K. Pilch 2012 [307]]
- 2012 SO(8) gauged SUGRA の新たな 1 径数変形 [Dall'Agata G, Inverso G, Trigiante M [?]]
- 2013 Deformed SO(8) gauging の D=11 への uplifting の試み [de Wit B, Nicolai H [110]]

11.6.5 Exact solutions

Overview

- 一般
 - 2001 並進対称性をもたない black brane 解の存在を示唆する議論 [Horowitz GT & Maeda Kengo [247, 248]]
 - 2002 数値計算による非一様 black brane 解 [Gubser SS [231], Wiseman T 2003[386]]
- $D = 4$ models
 - 1982 $N = 2$ SUGRA+EM における BPS 解の研究 (Gibbons G W and Hull C M [194])
 - 1983 $N = 2$ minimal SUGRA (重力場+2 個のグラヴィティノー+Maxwell 場) に対する超対称解の分類 (Tod K [368])
 - * **Null class**: pp-waves
 - * **Timelike class**: Israel-Wilson-Perjes クラス
 - 1992 $N = 4$ SUGRA における BPS 限界についての研究 (Kallosh R et al [275])
 - 1994 $N = 2$ SUGRA+EM+dilaton における BPS 解の研究 (Gibbons GW et al [192])
 - 1995 $N = 2$ SUGRA+dilaton, $N = 4$ reduced SUGRA($D = 5$ 理論の KK 簡約+SL(2, \mathbb{R}) 不変な axion-dilaton), および $N = 4$ SUGRA+SL(2, \mathbb{R}) 不変な axion-dilaton に対する超対称解の分類 (Tod K [367])

- $N = 2$ SUGRA に対する磁気 black string 解 (Gibbons GW, Horowitz GT, Townsend PK [193])
- 2003 $N = 2$ gauged SUGRA での SUSY/BPS 解の完全分類 (Caldarelli MM, Klemm D 2003[61]).
- $D = 5$
 - 1997 $N = 1$ モデルに対する荷電回転超対称 BH 解 (Breckenridge J et al [52])
 - 2002 $N = 1$ 極小モデルに対する超対称解の完全分類 (Gauntlett J et al [178])
 - * **Null class:** plane-fronted wave with 3 arbitrary harmonic functions on \mathbb{R}^3 . (超対称磁気ブラックストリング解および $\text{AdS}_3 \times S^2$ を含む.)
 - * **Timelike class :** 一般解は次の 3 つのデータで決まる : 4次元ハイパー Kähler 多様体 B , B 上の接続形式, 2 つの方程式を満たす B 上の関数 f . (BMPV 解を含む.)
 - 2002 $N = 1$ 極小モデルにおける超対称正則 BH 解の一意性 (Reall H [335])
 - 2003 $N = 1$ 極小ゲージ超重力理論の超対称解の完全分類. AdS_5 が唯一の極大超対称時空. (Gauntlett JP, Gutowski JB [174])
 - * **Null class:** 3 コの任意関数により決まる.
 - * **Time-like class:** 4次元 Kähler 空間上の線バンドル. 自由度は Kähler 構造と 1 コの反正則関数.
 - 2004 (漸近的 AdS_5 回転ブラックホール解) $D = 5, N = 1$ 極小ゲージ超重力理論における漸近的に AdS_5 となる回転ブラックホール解の 1 径数族 [241]
 - (超対称ブラックリング解) $N = 1$ 極小重力理論における 3 パラメーター $(Q, J_1 \mp J_2)$ ブラックリング解. (Elvang H, Emparan R, Mateos D, Reall HS [141]).
 - (超対称多重ブラックリング解) $D = 5, N = 1$ 極小超重力理論およびそれに任意個のベクトル超多重項が結合した系における多重ブラックリング解 [Gauntlett JP, Gutowski JB (2004)[175, 176]]

- $D = 6$

2003 $N = 1$ 極小モデルに対する超対称解の完全分類とホライズン位相の分類 (Gutowski JB, Martelli D, Reall HS [240])

* Maximally supersymmetric $\Leftrightarrow E^{5,1}$ or $\text{adS}_3 \times S^3$, the plane-wave solution of Meessen P(2002)[Phys. Rev. D65:087501].

- $D = 10$

- ♠ 一般論

2004 IIB モデルに対して, Killing スピノールに付随する微分形式族の微分関係式および代数関係式の導出. それに基づいて, 複素 Killing スピノールに付随するベクトル場すべて光的な Killing ベクトルに平行となることを示した. (Hackett-Jones EJ, Smith DJ [243])

2005 (**GGP** 形式) IIB モデルに対して, Killing スピノールの等方群が $\text{Spin}(7) \times \mathbb{R}^8$, $\text{SU}(4) \times \mathbb{R}^8$, G_2 の 3 種類に限られることを示し, 最初 2 つのタイプの Killing スピノールが存在するためのフラックスおよび計量に対する必要条件を導出. (Gran U, Gutowski J, Papadopoulos G [203])

- (等方群が G_2 の場合) IIB モデルにおいて, Killing スピノールの等方群が G_2 となる解の構造を研究. (Gran U, Gutowski J, Papadopoulos G [204])

- (超対称解の組織的分類) Killing 方程式を幾何構造, フラックス, スピノールに関する線形系に帰着. (Gran U, Gutowski J, Papadopoulos G, Roest D [206])

- ♠ 高い超対称性を持つ解

2001 (**Maximal SUSY pp-wave** 解) IIB 理論での 32 SUSY pp-wave 解 (Blau M, Figueroa-O’Farrill J, Hull C, Papadopoulos G [44])

- (**Penrose 極限**) M 理論および IIB 理論での 32 SUSY pp-wave 解を $\text{AdS}_p \times S^q$ 型 SUSY 解の Penrose 極限となることを指摘 (Blau M, Figueroa-O’Farrill J, Hull C, Papadopoulos G [43, 45])

- 2002 (**32 kis SUSY 解の完全分類**) 平坦な時空, $\text{AdS}_5 \times S^5$, Kowalski-Glikman 解で尽くされる. (Figueroa-O’Farrill J., Papadopoulos G. [157])
- (**16 と 32 の中間 SUSY 解**) D=11 および IIB 理論での pp-wave の (twisted) toroidal コンパクト化により IIA/IIB 理論での 16/18/20/24/26/28 SUSY 解を構成. (Michelson J [300, 299])
 - IIA 理論および IIB 理論でそれぞれ 24 および 24/28 SUSY をもつ pp-wave 解の族を構成 (Bena I, Roiban R [35])
- 2006 (**IIB モデルの 32 kis SUSY 解の分類**).
- * 等方群 $G = G_2, \text{SU}(3), \text{SU}(2)$ の場合: n 次元極大超対称解 X_n ($n = 3, 4, 6$) とホロノミー G をもつ Riemann 多様体 Y_{10-n} の積 $X_n \times Y_{10-n}$.
 - * 等方群 $G = K \ltimes \mathbb{R}^8$ ($K = \text{Spin}(7), \text{SU}(4), \text{Sp}(2), \text{SU}(2) \times \text{SU}(2), \{1\}$) の場合: ホロノミー K をもつ 8 次元多様体上を伝播する pp-wave.
- (Gran U, Gutowski J, Papadopoulos G, Roest D [205])
- ♠ $N = 1$ 超対称・極大対称 4 次元解 (へのコンパクト化)
- 2004 IIA/IIB 型モデルに対する $N = 1$ 超対称 ($X_4 = E^{3,1}$) の完全分類. (Grana M, Minasian R, Petrini M, Tomasiello A[212])
- 2005 (Massive)IIA モデルに対する $N = 1$ 超対称 ($X_4 = \text{adS}^4$) の完全分類. 内部空間は (共形的にも) 複素構造を持たず, ワープも許されない. (Lüst D, Tsimpis D 2005[293]; Behndt K, Cvetič M 2005[32])
- IIB 型モデルに対する 6 次元 $\text{SU}(3)$ 構造の分類. $X_4 = \text{adS}^4$ が許されるのは, $\text{SU}(3)$ 構造が $\text{SU}(2)$ 構造に簡約れるときのみ. (Behndt K, Cvetič M, Gao P 2005[33])
 - (**Pure spinor による表現**) II 型超対称解であるための必要十分条件を 2 つの純スピノールを用いて表現: $(d + H \wedge) \Phi_1 = 0$, $(d + H \wedge) \Phi_2 = F_{\text{RR}}$. (Grana M, Minasian R, Petrini M, Tomasiello A[210])
- 2007 (**Twisted tori コンパクト化**) 6 次元 Nil ないし Sol 多様体へのコンパクト化であらわされる超対称解の探査 (一定ディラト

ン, 大体積極限での近似解しか得られなかった). (Grana M, Minasian R, Petrini M, Tomasiello A[211])

• $D = 11$

1984 一般 pp-wave 解の発見: 16 kis (Hull CM [255])

$$ds_{11}^2 = -2dudv + Hdu^2 + dz_9^2, \quad (11.6.1a)$$

$$F_{[4]} = \mu du \wedge \Phi_{[3]}, \quad (11.6.1b)$$

$$\Delta_9 \Phi_{[3]} = 0, \quad \Delta_9 H = -\mu^2 |\Phi_{[3]}|^2. \quad (11.6.1c)$$

ここで, $H, \Phi_{[3]}$ は u に依存して良い.

- **Kowalski-Glikmann 解** 32 kis をもつ pp-wave 解 (Kowalski-Glikman J [286])
- 2002 空間依存性をもつ 16 kis pp-wave 解の u 非依存クラスの超対称性, コンパクト化, 双対性, Penrose 極限との関連について議論. (Cvetič M, Lü H, Pope CN [99])
 - **26 susy の pp-wave 解** M 理論での 26 SUSY pp-wave 解およびそのコンパクト化による同じ susy の IIA 解, および 28 susy の IIB pp-wave 解 (Michelson J [300]).
 - **18/20/22/24 susy の pp-wave 解** (Gauntlett JP, Hull CM [180])
 - **32 kis SUSY 解の完全分類** 平坦な時空, $\text{AdS}_4 \times S^7$, $\text{AdS}_7 \times S^4$, Kowalski-Glikman 解で尽くされる. (Figueroa-O’Farrill J., Papadopoulos G. [157])
- 2003 (超対称解のもつ G 構造) Killing スピノールに付随する微分形式族の微分関係式および代数関係式の導出. それに基づいて, Killing スピノールに付随するベクトル場は常に時間的か光的な Killing ベクトルで, それぞれ $\text{SU}(5)$ 構造および $(\text{Spin}(7) \times \mathbb{R}^8) \times \mathbb{R}$ 構造をもつことを示した. さらに, 時間的 Killing を伴う Killing スピノールが存在するための時空計量およびフラックスに対する必要十分条件を与えた. (Gauntlett JP, Pakis S [182])
 - (光的 Killing スピノール) 光的 Killing スピノールが存在するための時空計量およびフラックスに対する必要十分条件を与えた. (Gauntlett JP, Gutowski JB, Pakis S [179])

- 2005 (超対称解の組織的分類) Killing 方程式を幾何構造, フラックス, スピノールに関する線形系に帰着. (Gran U, Papadopoulos G, Roest D [207])
- (24kis 解の一様性) (Figueroa-O’Farrill J, Meessen P, Philip S[156])

11.6.6 弦理論との関係

11.6.6.1 Overview

- Non-decoupling

2007 **Non-decoupling**: 10D IIA の D 次元時空へのトーラスコンパクト化では, g_s を一定に保って KK 粒子の質量が発散する極限で, $D = 4$ のとき BPS 体 (ブレーン, モノポール) の一部が質量ゼロとなる. [Green MB, Ooguri H, Schwarz J[214]]

11.6.7 高次補正

11.6.7.1 Overview

1983 10次元 N=1SUGRA の 4次元定曲率時空へのコンパクト化に対する NO-GO 定理. [Freedman DZ, Gibbons GW, West PC [163]]

-

1984 10D ヘテロ型超重力理論の 4D ミンコフスキー時空への CY コンパクト化 [Candelas P, Horowitz GT, Strominger A, Witten E [67]]

1985 弦理論の整合性から D=10SUGRA の最低高次補正 ($O(R^2)$) が Gauss-Bonnet 項に比例することを指摘. [Zwiebach B [400]]

閉ボゾン弦理論

1985 $O(R^2)$. 3体 tree 散乱振幅に基づく計算. すべての NS-NS 場への依存性を決定. 結果は, トーション入り接続のみで記述で

きる [Nepomechie R[305]]

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} := \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \mu\nu \end{array} \right\} + \frac{e^{-m\phi}}{2\sqrt{3}} H_{\mu\nu}{}^{\rho} + p (\delta_{\nu}^{\rho} \partial_{\mu} \phi + \delta_{\mu}^{\rho} \partial_{\nu} \phi - g_{\mu\nu} g^{\rho\lambda} \partial_{\lambda} \phi) \quad (11.6.2)$$

ここで, $p^2 = /[2(D-1)(D-2)], m^2 = 8/(D-2)$.

1987 $O(R^3), g_{\mu\nu}$ のみ. 3体および4体散乱振幅による計算. [Metsaev RR, Tseytlin AA [298]]

1989 $O(R^4), g_{\mu\nu}$ のみ. 4-loop β 関数 (dilaton も含む). [Jack I, Jones DRT, Mohammadi N [266]]

タイプ II 超弦理論

1986 $O(R^4), g_{MN}$ のみ. 4体 tree 散乱振幅に基づく計算. R_4 依存性のみ決定. [Gross DJ, Witten E [230]]

– $O(R^4), g_{MN}$ のみ. 非線形 σ モデルによる β 関数の 4-loop 計算. [Grisaru MT, Zanon D [226]]

1987 $O(R^2, H_3^2), g_{\mu\nu}$ と H_3 のみ. β 関数の 2-loop 計算. [Hull CM, Townsend PK [260]]

– $O(R^3), g_{\mu\nu}$ のみ. 3体および4体散乱振幅による計算. 超弦理論では \mathcal{R}^3 項は現れないことを確認. [Metsaev RR, Tseytlin AA [298]]

– $O(R^4); g_{\mu\nu}, \phi$ のみ. β 関数の 4-loop 計算 [Park QH, Zanon D [321]]

– $O((R, H_3, \Phi)^4)$, RS-RS フォーム場はゼロ; S-matrix 法による計算. [Gross DJ, Sloan JH [229]]

ヘテロ型超弦理論

1986 $O(R^4, F_2^4), \phi = H_3 = 0$. 4体 tree 散乱振幅に基づく計算 [Kikuchi Y, Marzban C, Ng, YJ [280]]

– $dH \neq 0$ でのコンパクト化では, 内部空間が non-Kahler となることを指摘. ただし, $dH = (\alpha'/4)8\pi^2(\hat{R} \wedge \hat{R} - F \wedge F)$ で $\hat{R} = R + H/4$ の補正が正しく考慮されていない. [Strominger A [358]]

- $dH = (\alpha'/4)8\pi^2(\hat{R} \wedge \hat{R} - F \wedge F)$ において, R を定義する接続をどのように選ぶかに不定性があり, どのように選んでもアノマリーはキャンセルされる. [Hull CM [257]] 接続の違いは2次元非線形 σ モデルでの正則化の違いに対応し, 場の再定義により吸収される. [Sen A 1986 [349]]
- 1987 $O(R^2, H_3^2)$, $\phi = F_2 = 0$. β 関数の 2-loop 計算. [Hull CM, Townsend PK [260]]
 - $O(R^3)$, $g_{\mu\nu}$ のみ. 3 体および 4 体散乱振幅による計算. 超弦理論では \mathcal{R}^3 項は現れないことを確認. [Metsaev RR, Tseytlin AA [298]]
 - $O(R^4)$; $g_{\mu\nu}, \phi$ のみ. β 関数の 4-loop 計算 [Park QH, Zanon D [321]]
 - $O((R, H_3, \Phi)^4)$, $A_1 = \omega_1$; S-matrix 法による tree 計算. [Gross DJ, Sloan JH [229]]
 - $O((R, F_2)^4)$, $H_3 = 0$. S-matrix 法での 1-loop 補正 [Sakai M, Tani Y[339]; Ellis J, Jetzer P, Mizrachi L 1988[140]; Abe M, Kubota H, Sakai N 1988[1]]
- 1989 SUSY との整合性から, Anomaly cancellation condition が $dH = \hat{R} \wedge \hat{R} - F \wedge F$ ($\hat{R} = R + H/4$) と修正されることを指摘 [Bergshoeff EA, de Roo M[36]]
- 1991 $dH \neq 0$, $E^{5,1} \times Y_4$ 型インスタントン解 [Callan CG, Harvey JA, Strominger A[62]]
- 1993 $O((R, H_3, F_2)^4)$ 作用積分の超対称化. Tree 振幅起源の R^4 項が超対称化できないことを示した. [de Roo M, Suelmann H, Wiedemann [105]]
- 1996 $O((R, H_3, F_2)^4)$ 作用積分を双対性の観点から I 型と Hetro 型で比較 [Tseytlin AA [374]]
- 2009 Anomaly cancelation: $D = 5, 6, 7, 8, (10)$ のヘテロ型理論において, Anomaly 相殺条件と Killing スピノール方程式から 2 ループ補正での運動方程式が導かれるための必要十分条件は, コンパクト化する余剰次元での接続がインスタントン

目次へ

1985 超弦理論による D=10 SUGRA の最低次補正が Gauss-Bonnet 項に比例することに着目し, その影響を宇宙論的解と球対称解により調べた. [Boulware DG, Deser S [48]]

11.7 弦理論

11.7.1 定式化

11.7.1.1 Overview

- 超弦理論に対する 2D 非線形 σ モデル
 - 1971 NSR(Neveu-Schwarz-Ramond) 形式 [Neveu A, Schwarz JH[306]; Ramond P[331]]
 - 1981 GS(Green-Schwarz) 形式 [Green MB, Schwarz JH[215, 216, 217, 218]; Brink L, Green MB, Schwarz JH[222]]
 - 1985 NSR 形式での ST SUSY generator の構成. [Friedan D, Martinec E, Shenker S[165, 166]]
- 非臨界弦理論
 - 1987 任意次元で線形 dilaton 背景場が Boson 弦理論の整合的背景場となることを指摘. [Myers RC]
 - 1989 [de Alwis SP, Polchinski J, Schimmrigk R]
 - 1992 [Chamseddine AH]
- 臨界弦理論
 - 1984 (I型弦理論) $SO(32)$ I型弦理論における発散の相殺 [Green MB, Schwarz JH[220]]
 - 1985 (ヘテロ型弦理論) [Gross DJ, Harvey JA, Martinec E, Rohm R[227]]
- 4次元自由フェルミオン超弦理論
 - 1986 [Kawai H, Lewellen DC, Tye S-H[276, 277]]
- 動的背景場
 - 2007 **D-duality** [Green D, Lawrence A, McGreevy J, Morrison DR, Silverstein E[213]]
- M2 ブレーン

- 2006 (**M** クリスタルモデル) レベル $\pm k$ の CS 理論対 n 個からなる円環 quiver ゲージ理論. [S. Lee, Phys. Rev. D 75 (2007), 10 1901[hep-th/0610204]; S. Lee, S. Lee and J. Park, J. High Energy Phys. 05 (2007), 004 [hep-thj0702120]; S. Kim, S. Lee, S. Lee and J. Park, Nucl. Phys. B 797 (2008), 340; arXiv:0705.3540.]
- 2007 (**N=8 SCCST (BLG モデル)**) $N = 8$ 超対称性をもつ 3 次元超共形場理論. 超対称条件を満たす Lie 3-代数により一意的に決定される. [Bagger J, Lambert N (2007,2008)[14, 16, 15]; Gustavsson A (2007,2008)[239, 238]]
- 2008 正定値計量をもつ BLG モデルは一意的で A_4 型 Lie 3-代数に対応し, $SU(2) \times SU(2)$ Chern-Simons 理論と同等であることを示す. [Papadopoulos G (2008)[319]; Gauntlett JP, Gutwowski JB (2008)[177]]
- BLG モデルはオービフォールド $\mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^2/D_{2k}$ を運動する 2 枚の M2 ブレーンを記述すると解釈できる. [Van Raamsdonk 2008[?]; Lambert N, Tong D 2008[288]; Distler J et al 2008[120]]
- 2008 (**Lorentz 計量をもつモデル**) [J. Gomis, G. Milanesi and J. G. Russo, arXiv:0805.1012; S. Benvenuti, D. Rodriguez-Gomez, E. Tonni and H. Verlinde, ar Xiv:0805.1087; P. M. Ho, Y. Imamura and Y. Matsuo, ar Xiv:0805.1202]
- Lorentz 計量をもつモデルはゴーストをもち, これを取り除くと, susy が破れ, D3 ブレーンの理論となる. [P. M. Ho, Y. Imamura and Y. Matsuo, ar Xiv:0805.1202; Y. Honma, S. Iso, Y. Sumitomo and S. Zhang, ar Xiv:0805.1895; M. A. Bandres, A. E. Lipstein and J. H. Schwarz, ar Xiv:0806.0054; J. Gomia, D. Rodriguez-Gomez, M. Van Raamsdonk and H. Verlinde, arXiv:0806.0738; B. Ezhuthachan, S. Mukhi and C. Papageorgakis, arXiv:0806.1639]]
- 2008 (**N=4 SCCST (GW モデル)**) $N = 4$ 超対称性をもつ 3 次元超共形場理論. [Gaiotto D, Witten E (2008)[?]]
- (**N=4 SCCST (HLLP モデル)**) Twisted hypermultiplet を加えることにより GW モデルを拡張. BLG モデルを特殊な場合として含むことを示す. M クリスタルモデルがオービフォールド

$(\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_n)^2$ を運動する M2 ブレーンと解釈できることを示し, それが D3-D5-NS5 系の M 理論双対として実現できることを示す. [Hosomichi K, Lee KM, Lee S, Lee S, Park J (2008)[249, 250]]

2008 (N=6 SCCST (ABJM モデル)) $N = 6$ 超対称性をもつ $U(N) \times U(N)$ 超共形 CS 理論. Orbifold $\mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_k$ を運動する N 枚の M2 ブレーンを記述. IIB 型 SST における N 枚の D3, 1 枚の NS5, 1 枚の $(k, 1)$ B5 系に対応する理論の T 双対を M リストすることにより実現される. [O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis and J. Maldacena (2008)[6]]

- ABJM モデルの拡張. IIB 型 SST における N 枚の D3, n_A 枚の NS5, n_B 枚の $(k, 1)$ B5 系に対応する $U(N)^{n_A+n_B}$ をゲージ群とする $N = 4$ 超対称性をもつ quiver ゲージ理論. [Imamura Y, Kimura K[?]]

11.7.2 現象論

11.7.2.1 Reviews

- Type II Orientifold with D-branes
 - Lüst D (2004): Class. Quantum Grav. 21: S1399-1424 (arXiv:hep-th/0401156)

“Intersecting brane worlds: a path to the standard model?”
 - Blumenhagen R, Cvetič M, Langacker P and Shiu G (2005):Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 55 71-139 (arXiv:hep-th/0502005)

“Toward realistic intersecting D-brane models”
 - Blumenhagen R, Kors B, Lüst D and Stieberger S (2007):Phys. Rep. 445 10-193 (arXiv:hep-th/0610327)

“Four-dimensional string compactifications with D-branes, orientifolds and fluxes”
- F 理論
 - Grimm T W (2010) arXiv:1008.4133: “The $N = 1$ effective action of F-theory compactifications”

- Weigand T (2019) *Class. Quantum Grav.* 27: 214004: “Lectures on F-theory compactifications and model building”
- Heckman J J (2010) arXiv:1001.0577: “Particle physics implications of F-theory”
- Denev F (2008) arXiv:0803.1194: “Les Houches lectures on constructing string vacua”
- Calabi-Yau 4-fold
 - Klemm A, Lian B, Roan S S and Yau S-T (1998) *Nucl. Phys. B* 518 515-74 (arXiv:hep-th/9701023): “Calabi-Yau fourfolds for M- and F-theory compactifications”

11.7.2.2 Hetero 型理論

- 前史
 - 1984 (**Green-Schwarz 機構**) 10次元I型超重力理論における量子アノマリーの相殺機構 [Green MB, Schwarz JH (1984)[219]]
 - 1985 I型SO(32)超弦理論の有限性 (1ループでのS行列の有限性) [Green MB, Schwarz JH (1985)[221]]
 - 1985 (ヘテロ型弦理論) [Gross DJ, Harvey JA, Martinec E, Rohm R[227, 228]]
 - 1985 **Hetero 型弦理論の Calabi-Yau コンパクト化** 4次元定曲率時空 M_4 への直積型コンパクト化, すべての配位の $\text{Isom}(M_4)$ 対称性, $N = 1$ 超対称性という要請のもとで, 宇宙項がゼロで内部空間がSU(3)ホロノミーをもつこと, したがって Calabi-Yau であることが要求されることを示した. 非単連結商 CY/Γ において細谷メカニズム (Wilson ループ) によりゲージ対称性を $E_6 \rightarrow \text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1)$ と破るアイデアも議論. [Candelas P, Horowitz GT, Strominger A, Witten E (1985)[67]]
- Toroidal orbifold
 - 1984 **Susy breaking** Twisted orbifolding による超対称の破れ (減少) [Rohm R[336]]

- 1985 **Toridal orbifold** コンパクト化 厳密解の構成と現象論について
の一般論. [Dixon DJ, Harvey JA, Vafa C, Witten E[121, 122]]
- 1987 **3 世代 GUT モデル** オービフォルドトーラスコンパクト化.
Wilson ラインがゲージ対称性を破るだけでなく, chiral fermion
の数を変化させることを指摘. [Ibanez LE, Nilles HP, Quevedo
F[264]]
- 2006 **MSSM T^6/\mathbb{Z}_6 orbifold.** Q,L は $SO(10)$ -like. 大量のモジュ
ライ自由度あり. 一般状態では no exotics で gauge coupling
unification を実現. t クォークの湯川結合係数はゲージ相互作用
で生成. 他は非摂動効果で. [Buchmuller W, Hamaguchi K,
Lebedev O, Ratz M[58, 59]]
- Smooth CY コンパクト化
- 1985 **SM ゲージ群** 非単連結空間 CY/Γ での Wilson line を用いて
ゲージ対称性を SM 群に破るモデル. [Witten E[388]; Breit JD,
Ovrut BA, Segre GC[53]]
- 1986 **Gauge symmetry breaking** Gauge instanton(=BG gauge
field j = Gauge bundle) によりゲージ対称性の破れ $E_8 \rightarrow SO(10)/SU(5)$
が実現される可能性を指摘. さらに Wilson line により最終的に
SM 群まで落とすことが可能であることも指摘. [Witten E[389]]
- 2004 **SM CY** 離散対称性 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ をもつ CY を初めて構成. [Broun
V, Ovrut BA, Pantev T, Reinbacher R[51]]
- 2005 **SM-like モデル** $CY/\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ の上に $SU(4)$ ゲージインスタ
ントンを正則安定バンドルを用いて構成し, $SO(10)$ 型 SSM モデル
を構築. $G = SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y \times U(1)_{B-L}$, 3 世代, 3
右巻ニュートリノ, 2 Higgs doublets, 6 geometric moduli +
vector bundle moduli, exotic matter なし. [Braun V, He Y-H,
Ovrut BA, Pantev T[50]]
- 2006 **MSSM** (CY=有理楕円曲面上の楕円曲線バンドル, $SU(5)$ ゲー
ジバンドル) CY/\mathbb{Z}_2 による最初の厳密な MSSM model without
exotics with 0/1/2 Higgs doublet pairs. モジュライ安定化は
不完全. Hidden sector ではゲージ群は E_8 で, 物質もモジュ
ライ自由度もなし. [Bouchard V, Donagi R[47]]

11.7.2.3 II型理論

- D ブレーン

- 1995 D ブレーン・O プレーンの RR 電荷 [Polchinski J [327, 328]]
- 1995 D ブレーン・交差 D ブレーンによる超対称性の破れ [Bershadsky M, Sadov V]

- 交差 D ブレーン

- 1996 交差 D ブレーンによる chiral fermion の生成 [Berkooz M, Douglas MR, Leigh RG[40]]
- 2000 標準モデルの構成. Non-susy, non-GUT, two Higgs. U(1) anomaly の一般化された GS 機構による相殺と massive 化 [Antoniadis I, Kiritsis E, Tomaras TN [11]]
- 2001 **3 世代標準モデル: 最初の例.** IIA over T^6/Ω . [Ibanez LE, Marchesano F, Rabadan R: JHEP 0111 (2001) 002[263]]
 - 標準モデルを与える T^6 オービフォールドコンパクト化の安定性の解析. [Blumenhagen R, Kors B, Lust D, Ott T: NPB 616 (2001) 3[46]]
- 2007 **MSSM 型モデル** IIA over T^6/Z'_6 モデルによる計算機を用いた組織的構成. ゲージ群, 世代数等についての統計を計算. [Gemeiner F, Honecker G: JHEP 09 (2007) 128: “Mapping an island in the landscape ” [?]; JHEP 07 (2008) 052[?]]
- 2011 **MSSM 型モデルの安定化** フラックスによる IIA over T^6/Z'_6 モデルの安定化. Bailin-Love モデル (Bailin D, Love A: NPB809 (2009) 64 [arXiv: 0801.3385]) では, アクシオンを除いて adS 超対称真空の周りですべてのモジュライの安定化が可能. [Bailin D, Love A (2011) arXiv:1104.3522 “Stabilising the supersymmetric Standard Model on the Z_6 orientifold” [?]]]

11.7.2.4 F 理論

- $[p, q]$ -7-レーン

- 1995 $[p, q]$ -7-レーンと弦 [Schwarz JH (1995): Phys. Lett.B 360 13-8 (arXiv:hep-th/9508143): “An $SL(2, Z)$ multiplet of type IIB superstrings”]
- 1996 $[p, q]$ -弦: 弦の束縛状態解釈 [Witten E (1996) Nucl. Phys. B 460 335-50 (arXiv:hep-th/9510135): “Bound states of strings and p-branes”]
- 同じ位置で重なった $4D7's+O7$ の組 4 個が与える $SO(8)^4$ 模型の $[p, q]$ ブレーン解釈. $O7$ ブレーンを異なったタイプの $[p, q]-7$ ブレーンの組で置き換えることができる. [Sen A (1996) Nucl. Phys. B 475 562-78 (arXiv:hep-th/9605150): “F-theory and orientifolds”]

- **F** 理論

- 1996 **F** 理論の提案 [Vafa C (1996) Nucl. Phys. B 469 403-18 (arXiv:hep-th/9602022): “Evidence for F-theory”]
- **M-F** 双対 [Witten E (1996) :Nucl. Phys. B 474 343-60 (arXiv:hep-th/9604030) “Non-perturbative superpotentials in string theory”]

11.8 双対性と対称性

11.8.1 双対性

Overview

- IIA 理論 \Leftrightarrow M 理論

1984 S^1 コンパクト化: 11 次元超重力理論 \Rightarrow IIA 超重力理論
(Campbell C and West PC[64]; Giani F & Pernici M[189];
Huq M & Namazie MA (1985))

Hopf fibration: ねじれのある S^1 コンパクト化 (Nilsson BEW
& Pope CN (1984)[311])

11.8.2 AdS/CFT 対応

Reviews

- Aharony O, Gubser SS, Maldacena J, Ooguri H, Oz, Y.: Phys. Rep. **323**, 183 (2000).

歴史

1974 (t'Hooft G) $SU(N)$ -ゲージ理論での $N \rightarrow \infty$ 極限と (閉) 弦理論の
関係に関する考察 [364]

1998 (Maldacena JM) AdS/CFT 対応 ($\mathcal{N} = 4$ Super-YM/ S^3 と $AdS^5 \times S^5$
上の SUGRA/SST の対応, およびその一般化) の提案 [294]

11.8.3 Hopf Duality

- **Symmetry without symmetry:** $M/S^7(N = 8, SO(8))$ vs. $IIA/CP^3(N = 6/0, SU(4) \times U(1))$; $M/M(2, 3)(N = 2/0, SU(3) \times SU(2) \times U(1))$ vs. $IIA/CP(2) \times S^2(N = 0, SU(3) \times SU(2) \times U(1))$ [Duff, Lü & Pope (1997)][127]
- **Hopf-Duality:** $D = 4 N = 4$ SYM \Leftrightarrow IIB SST/ $AdS^5 \times S^5(N = 8, SO(6)) \Leftrightarrow$ IIA SST/ $AdS^5 \times CP^2 \times S^1(N = 0, SU(3) \times U(1)^3) \Leftrightarrow$ $M/AdS^5 \times CP^2 \times T^2$ [Duff, Lü & Pope (1998)][128]
- IIB/ $AdS^3 \times S^3$ vs. IIA/ $S^2 \times S^1, /S^3/Z_p$ [Duff, Lü & Pope (1999)][129]

11.8.4 隠れた対称性

Overview

- 1977 $D = 4, N = 4$ 超重力理論の $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ 対称性 [Ferrara S, Scherk J & Zumino B (1977); Cremmer E, Scherk J & Ferrara S (1978)][151, 97]
- 1981 $D = 5, N = 8$ 超重力理論 (M 理論/ T^6) の (ボゾン部分の) 大域的 E_6 対称性 [Cremmer E (1981)]
- 1983 IIB 理論の $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ 対称性 [Schwarz J & West P (1983)][348]
- 1984 IIA 理論の $SO(1, 1)$ 対称性 [Campbell C & West P (1984)][64]
- 1995 $D = 9, N = 8$ 超重力理論 (M 理論/ T^2) の (ボゾン部分の) 大域的 $GL(2, \mathbb{R})$ 対称性 [Boergshoeff E & Hull CM & Ortin T (1995)[38]; Lü H & Pope CN & Stelle KS (1996)[290]]
- 1998 $N = 8$ の D 次元超重力理論 (M 理論/ T^{11-D}) の (ボゾン部分の) 大域的 E_{11-D} 対称性 [Cremmer E & Julia B & Lü H & Pope CN (1998)[92]]

11.8.5 Generalised Geometry

History

- Early history

2003 **Generalised Calai-Yau** [Hitchin N [246]]

11.9 コンパクト化

11.9.1 レビュー

- $D = 11, N = 1$ minimal SUGRA の Freund-Rubin コンパクト化に対して, これまでに知られている 7次元コンパクト空間, 対応する超対称性および安定性のリスト [Duff, Nilsson and Pope (1986)[132]]
- Kaluza-Klein supergravity のレビュー [Castellani, D'Auria and Fre (1991)[70]]
- M理論と5つの超弦理論の関係のレビュー [Townsend (1996)[371]]
- M-theory, G_2 -holonomy [Duff (2002)[126]]
- Heterotic M-theory [Ovrut BA (2002)[316]]
- Flux コンパクト化 [Grana M(2005)[208]]

Grana M: “Flux compactifications in string theory: a comprehensive review”

- Flux コンパクト化 [Douglas MR, Kachru S (2006)[123]]

Douglas MR, Kachru S: “Flux compactification”

- Flux コンパクト化 [Blumenhagen R, Körs B, Lüst D, Stieberger S (2006)[?]]

Blumenhagen R, Körs B, Lüst D, Stieberger S: “Four-dimensional String Compactifications with D-branes, Orientifolds and Fluxes”

11.9.2 No-Go 定理

- **4D CCST KK** 内部空間が滑らかでコンパクト閉とすると, 10D SUGRA では, 直積型コンパクト化 $CCST^4 \times CY_6$ のみ可能. 特に, ゲージ場が生じない. [Freedman DZ, Gibbons GW, West PC 1983[163]]
- **加速膨張**: M/string理論を含む高次元理論において, 内部空間が静的な warped product 型コンパクト化では, 強エネルギー条件が常に満

たされ、4次元時空の加速膨張は起こらないことを主張 [Maldacena J & Nunez C (2001), Gibbons GW (1985), de Wit B, Smit DJ & Hari Dass ND (1987),][190, 295, 191].

11.9.3 SUGRA の KK コンパクト化

- 一般論

1976 **KK 理論**における自発的コンパクト化（場の方程式の安定な解となるコンパクト化）の概念の導入．一般に pure gravity では自発的コンパクト化ができないことも指摘． [Cremmer and Scherk (1976,1977)][95, 94, 96]

1977 KK 理論における現実的な自発的コンパクト化のためには、高次元において重力以外の物質場が必要であることを指摘． [Cremmer, Horvath, Palla and Scherk (1977)][89]

1981 **11DSUGRA** による現象論 KK SUGRA 理論のコンパクト化により、低エネルギーで標準モデルを与える可能性を組織的に分析．最大の問題点として、chiral な表現に従う質量ゼロのフェルミオンが得られないことを指摘．また、超対称性と CCS(covariantly constant spinor) の関係を指摘し、 $N = 1$ SUSY が残るコンパクト化が望ましいと主張． [Witten E (1981)][387]

1982 **非可換な KK ゲージ場** KK 理論におけるコンパクト化において、コンパクト化された余剰空間 K の等長変換群とコンパクト化により得られる4次元理論に現れる非可換ゲージ場のゲージ群 G との関係を一般的に議論 ($K = G/H$)． [Salam and Strathdee (1982)][344]

- $D = 11, N = 1$ minimal SUGRA

1979 T^7 コンパクト化: $E^{3,1}$ 上の $D = 4, N = 8$ SUGRA. Global $E_7 \times$ local $SU(8)$ symmetry. ただし、 $SU(8)$ ゲージ場は composite で kinetic term を持たない． [Cremmer and Julia (1979)][91]

1980 **負の宇宙項**: 直積型コンパクト化が4次元時空に負の宇宙項を誘起することを指摘 [Duff and van Nieuwenhuizen (1980), Aurilia, Nicolai and Townsend (1980)][135, 12]

- 1980 **Freund-Rubin** コンパクト化: 直積型コンパクト化による $N = 1$ SUGRA の構成の一般的議論. 4次元時空 M^4 が定曲率で $F_4 = 3m\Omega_4$ の場合、 $m \neq 0$ なら M^4 は必ず AdS^4 となることを指摘 [Freund and Rubin (1980)][164]
- 1982 **Round S^7** コンパクト化 : AdS^4 上の $N = 8$ SUGRA [Duff (1982), Duff and Toms (1982), Duff and Pope (1983)][124, 134, 133]
- 1982 **Round S^7 with parallelizing torsion** によるコンパクト化 : AdS^4 上の非超対称モデル [Englert (1982)][142]
- 1983 **Squashed S^7** コンパクト化による $D = 4, N = 1$ SUGRA モデルの構成 : G_2 ホロノミーをもつ空間による自明でないコンパクト化の最初の例 (結果は AdS^4 上の理論で, ゲージ群は $SO(5) \times SO(3)$, 物質場はベクトル多重項に属するため現実的なモデルでない) [Awada, Duff and Pope (1983), Duff, Nilsson and Pope (1983)][13, 131]
- **Skew-whiffing theorem:** Freund-Rubin コンパクト化において, round S^7 を除くと, コンパクト空間の2つの向きのうち一方のみが $N > 0$ の超対称性を持ちうることを指摘. 特に, round S^7 以外の対称空間によるコンパクト化は必ず非超対称モデルを与える. [Duff, Nilsson and Pope (1983)][131]
 - $K3 \times T^3$ コンパクト化 : 結果は $D = 4, N = 4$ SUGRA で, 粒子のスペクトルが Betti 数と指数定理により決定されることを初めて指摘 [Duff, Nilsson and Pope (1983)][130]
- 1984 M^{pqr} 空間コンパクト化 : [Castellani, D'Auria and Fré (1984), Witten (1981), Nilsson and Pope (1984), Page and Pope (1984)][71, 387, 311, 317]
- Q^{pqr} 空間コンパクト化 : [D'Auria, Fré and van Nieuwenhuizen (1984), Nilsson and Pope (1984), Page and Pope (1984)][103, 311, 317]
 - N^{pqr} 空間コンパクト化 : [Castellini and Romans (1984), Page and Pope (1985), Castellini (1985)][73, 318, 72]
 - **Hopf-fibration** 空間コンパクト化 [Nilsson & Pope (1984)][311]
- 1985 **Squashed $N(1, 1)$** 空間コンパクト化 [Page and Pope (1985)][318]

- **Heterotic M 理論**

1996 [Witten E 1996[391]]

- **$D = 10$ type IIA SUGRA**

1984 $\mathbb{C}P^3$ コンパクト化 : 結果は AdS^4 上の理論. ゲージ対称性 $G = SU(4) \times U(1)$ (Watamura [379])

- **$D = 10, N = 1$ Type I/heterotic SUGRA**

[4次元へのコンパクト化]

1985 **Calabi-Yau** コンパクト化 : $D = 4, N = 1$ SUGRA モデルの構成に関する一般論 (Candelas P, Horowitz GT, Strominger A, Witten E [67])

1986 フラックス (トージョン) が存在する場合での超対称性の解析 (Strominger A [358])

[6次元へのコンパクト化]

1985 **K3** コンパクト化 : $F_0 \in H \cong U(1)^n \in SO(32), E_8 \times E_8$. [Green MB, Schwarz JH, West PC 1985[223]]

11.9.4 SUSY を保つコンパクト化

- No flux, vanishing dilaton

1985 $Het/\mathbb{R}^4 \times \mathcal{K}^6$ コンパクト化 \Rightarrow $SU(3)$ -holonomy [Candelas P, Horowitz GT, Strominger A, Witten E[67]]

- Non-zero flux

1986 初期の研究 [Strominger A [358]; Hull CM[258]; de Wit B, Smit DJ, Hari Dass ND 1987[112]]

- 場の方程式との関連

1996 超弦理論・M理論・F理論の2～4次元へのコンパクトにおいて, フォーム場 $F_{[2]}, F_{[3]}, F_{[4]}$ に対する tad pole 相殺条件 [Sethi S, Vafa C, Witten E [350]]

- 2002 I型 SUGRA/ $\mathbb{R}^{1,9-p} \times M_p$ コンパクト化では, Killing スピノールが存在し, かつ anomaly cancellation 条件が満たされれば, 場の方程式が満たされる. [Gauntlett JP, Martelli D, Pakis S, Waldram D 2004[181]; Gillard J, Papadopoulos G, Tsimpis D 2003[198]; de Wit B, Smit DJ, Hari Dass ND 1987[112]]
- 2003 Hetero 型超弦理論のシグマモデル背景場に対する 2 ループまでの補正の計算. CY \Rightarrow Non-Kahler hermit 変形 [Gillard J, Papadopoulos G, Tsimpis D 2003[198]]

11.9.5 F 理論

- D7 ブレインがある場合の IIB 理論の S^2 コンパクト化の考察に基づき, 計量符号が (10, 2) の 1 2 次元時空上の弦理論として F 理論を提案し, 双対性 $HET/T^2 \Leftrightarrow F/K3$ を予言. さらに, 楕円型ファイバー構造をもつ多様体 K に対して, 双対性 $F/K \times S^1 \Leftrightarrow M/K$ を予言し, K が Calabi-Yau, G_2 , Spin(7) の場合の例を考察 [Vafa C (1996)][375].

11.9.6 M 理論

11.9.6.1 G_2 -holonomy

- 一般論

1995 なめらかなコンパクト G_2 多様体によるコンパクト化: 得られる 4 次元理論は, b_2 個の U(1) vector multiplets と b_3 個の中性 chiral multiplets をもつ $D = 4 N = 1$ SUGRA 理論 [Papadopoulos & Townsend (1995)][320]

11.9.7 高次補正

- 1986 $dH \neq 0$ でのコンパクト化では, 内部空間が non-Kahler となることを指摘. ただし, $dH = (\alpha'/4)8\pi^2(\hat{R} \wedge \hat{R} - F \wedge F)$ で $\hat{R} = R + H/4$ の補正が正しく考慮されていない. [Strominger A [358]]
- $dH = (\alpha'/4)8\pi^2(\hat{R} \wedge \hat{R} - F \wedge F)$ において, R を定義する接続をどのように選ぶかに不定性があり, どのように選んでもアノーマリー

はキャンセルされる. [Hull CM [257]] 接続の違いは2次元非線形 σ モデルでの正則化の違いに対応し, 場の再定義により吸収される. [Sen A 1986 [349]]

1989 SUSYとの整合性から, Anomaly cancellation condition が $dH = \hat{R} \wedge \hat{R} - F \wedge F$ ($\hat{R} = R + H/4$) と修正されることを指摘 [Bergshoeff EA, de Roo M[36]]

1991 $dH \neq 0$, $E^{5,1} \times Y_4$ 型インスタントン解 [Callan CG, Harvey JA, Strominger A[62]]

11.9.8 フラックスコンパクト化

- IIB

2002

- ヘテロ型理論

1985 E_8 ヘテロ型理論でのグルイーノ縮退による SUSY breaking. (Dine M, Rohm R, Seiberg N, Witten E 1985[118])

1986 H_3 フラックスの量子化. (Rohm R, Witten E 1986[337])

1986 超対称で4D 極大対称な H_3 フラックスコンパクト化の分析. $H_3 \neq 0$ のとき, 内部空間が Non-Kähler となることを指摘. (Strominger A 1986[358])

2006 H フラックスとゲージノ縮退がある場合の4次元への超対称コンパクト化とモジュライ安定性の解析. (Manousselis P, Prezas N, Zoupanos G 2006[296])

- G-構造とトーシオン

2002 非可積分 G 構造の数学的分類 (Friedrich T 2002[167])

– SU(3) 構造, G_2 構造 (Simon Chiossi, Simon Salamon 2002[82])

2003 数学的 SU(3) 構造のトーシオンと Hetero 型理論のフラックスコンパクト化の超対称性との対応の組織的研究. Hetero 型理論に対して, $H_3 \neq 0$ の超対称6次元コンパクト化に対する必要条件をトーシオンクラスに対する条件として表現. 複素非

Kähler 多様体へのヘテロ型理論のフラックスコンパクト化の具体例を岩沢多様体を用いて構成. アノーマリー相殺条件は, SU(3) ホロノミーのゲージ群への埋め込みでなく, U(1) ゲージ場により満たす. (Cardoso GL et al 2003[68])

- Generalised complex structure による記述
2005 II 型 SST のフラックスコンパクト化において, N=1 超対称性をもつ条件を pure spinor の組に対する条件として表現 [Grana M, Minasian R, Petrini M, Tomasiello A[210]]
2009 一般化された CY による $N = 1$ SUSY フラックスコンパクト化の枠組みでのモジュライの抽出と 4 次元有効理論構成の試み [Martucci L[297]]

11.9.9 Non-geometrical flux

Reviews

- Wecht B: CQG 24 (2007) S773-794.
“Lectures on nongeometric flux compactifications”
- Samtleben H: CQG 25 (2008) 214002 (36pp).
“Lectures on gauged supergravity and flux compactifications”

Overview

- T 双対性
1987 **Buscher rule**: 曲がった時空でのボース弦理論の T-双対性. CFT の観点から. [Buscher TH: PLB194(1987)59. “A SYMMETRY OF THE STRING BACKGROUND FIELD EQUATIONS”]
1988 一般化と経路積分による量子論での議論. [Buscher TH: PLB201(1988)466. “Path-integral derivation of quantum duality sigma-models”]
1995 次元低下法による双対変換の導出. RR 場も含む. [Bergshoeff E, Hull CM, Ortin T: NPB451(1995) 547. “Duality in the Type-II Superstring Effective Action”]

2000 スピノールに対する変換公式. [Hassan SF: NPB568 (2000) 145. "T-Duality, Space-time Spinors and R-R Fields in Curved Backgrounds"]

- 幾何学的フラックス

2003 T^6/\mathbb{Z}_2 orientifold 模型: Mink vacuum by geometric flux on non-CY orientifold(trwisted tori=Nil manifold). [Kachru S, Shulz MB, Tripathy PK, Trivedi SP: JHEP 0303 (2003) 061. "New supersymmetric string compactifications"]

- 非幾何学的フラックス

2005 Symmetric T^6/\mathbb{Z}_2 模型: 4D 超ポテンシャルの T-双対性. NG flux と超重力代数の関係. [Shelton J, Taylor W, Wecht B: JHEP0510(2005)085. "Nongeometric flux compactifications"]

2006 Symmetric T^6/\mathbb{Z}_2 模型: NG flux を含む一般的フラックスが存在する場合のトーラスコンパクト化に対応する 4次元有効理論の解析. adS 超対称真空の (数値的) 探査. [Shelton J, Taylor W, Wecht B: JHEP0702(2007)095. "Generalized flux vacua"]

2010 等方 $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ orientifold 模型: 超重力代数の分類と Mink/dS 真空に対する No-Go 定理. [de Carlos B, Guarino A, Moreno JM:JHEP1001(2010)012. "Flux moduli stabilisation, super-gravity algebra and no-go theorems"]

- 等方 $T^6/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ orientifold 模型:NG flux を用いた Mink/dS コンパクト化の構成. [de Carlos B, Guarino A, Moreno JM:JHEP1002(2010)076." Compact classification of Minkowski vacua in generalised flux models"]

- Double Field Theory

2007 **Double Torus Formulation** for NG flux: 弦作用積分の一般化. [Hull CM: JHEP0510(2005)065. "A geometry for non-geometric string backgrounds"]

- β -超重力理論

2011 β 変数による NG flux(Q) の Lagrangian 記述: [Andriot D, Larfors M, Lüst D, Patalong P: JHEP 1109 (2011) 134. "A ten-dimensional action for non-geometric fluxes"]

- 2013 β -超重力理論: NG flux (Q, R) に対する Lagrangian 記述: [Andriot D, Betz A: arXiv:1306.4381. “ β -supergravity: a ten-dimensional theory with non-geometric fluxes, and its geometric framework”]

11.9.10 モジュライ安定化

- IIA

- 2005 (フラックスによる摂動的モジュライ安定化) (Derendinger JP, Kounnas C, Petropoulos PM, Zwirner F 2005[113]; Villadoro G, Zwirner F 2005[376]; DeWolfe O, Giriyavets A, Kachru S, Taylor W 2005[116]; Camara PG, Font A, Ibanez LE 2005[63])

- IIB

- 2002 IIB orientifold T^6/\mathbb{Z}_2 [Kachru S, Schulz M, Trivedi SP 2003[274]]

- 2004 **KKLT** モデル: Flux による複素モジュライ安定化と非摂動論効果 (D3 インスタントン/D7 ゲージの凝縮) による Kahler モジュライ安定化 + $\overline{D3}$ による超対称性の破れと宇宙項の調整 [Kachru S, Kallosh R, Linde A, Trivedi S 2004[?]]

- ヘテロ型理論

1985

11.9.11 ランドスケープ問題

- String/M 理論の Flux コンパクト化と無限の (準) 安定基底状態. [49, 143, 26, 104, 196, 2, 3]
- Anthropic Landscape[361]
- (**KKLT** モデル) すべてのモジュライが安定化され, 準安定 dS 真空をもつ, IIB 理論のワープしたフラックスコンパクト化モデル (Kachru S & Kallosh R & Linde A & Trivedi S(2003)[272]).

11.9.12 有効理論

Overview

- Calabi-Yau コンパクト化

1985 **CY コンパクト化の基礎理論** Heterotic 理論の MIG_4 対称性をもつ時空 $CCS_{3,1} \times Y_6$ へのコンパクト化において, $D = 4, N = 1$ 超対称理論が得られることを要請すると $CCS_4 = E^{3,1}$ および Y_6 が $SU(3)$ ホロノミーをもつこと (したがって Calabi-Yau となること) が要求されることを示し, その例を構成. さらに, 4次元理論での世代数が $\chi(Y)$ で決まることを示し, 具体例でその値を計算 (Candelas P, Horowitz GT, Strominger A, Witten E [67])

CY orbifold コンパクト化による世代数の遁減 Orbifold 特異点をもつ CY コンパクト化により, 世代数 1, 2, 4 の例が作れることを示し, CP 対称性を議論. さらに 4次元理論での質量ゼロモードの数および, それらの間の湯川結合係数に対する一般表式を導出. (Strominger A, Witten E [360])

1986 **F 項非繰り込み定理** $SU(3)$ ホロノミーを持つ 6次元空間によるコンパクト化において, 4次元有効理論における F 項が摂動論のすべてのオーダーで σ -モデル量子補正を受けないことを示す. (Witten E [389])

1991 **CY 多様体のモジュライ空間構造の決定** CY 多様体のモジュライ空間が複素構造モジュライと Kähler モジュライの空間の直積となり, それぞれが自然な誘導計量に関して Kähler 多様体となること, また, 対応する Kähler ポテンシャルおよび湯川結合係数が共通の正則前ポテンシャルのみで表されることを示した. (Candelas P, de la Ossa XC [65])

- Flux Compactification (type II)

2004 **CY-orientifold compactification of IIB** (warp neglected) (Grimm TW, Louis J[224])

2004 **CY-orientifold compactification of IIA** (warp neglected) (Grimm TW, Louis J[225])

- 2007 **Warped compactification to $adS_4/Mink^4$ by manifolds with $SU(3) \times SU(3)$ structure.** 量子効果・非摂動論効果の影響を議論. Non-smearred instantons による複素構造の不安定化 (Koerber P, Martucci L2007[285])
- 2009 一般化された CY による $N = 1$ SUSY フラックスコンパクト化の枠組みでのモジュライの抽出と 4 次元有効理論構成の試み [Martucci L[297]]

11.9.13 Kaluza-Klein モード

歴史的概観

- IIB ($D = 10$) SUGRA
1985 (Kim HJ, Romans LJ, van Nieuwenhuizen P; Gunaydin N, Marcus N) S^5 上でのコンパクト化に対する KK 質量スペクトル. [281, 233]

11.9.14 トポロジー変化

歴史的概観

- 1993 Flop transition (Witten E; Aspinwall, Greene, Morrison 1994)
- 1995 Conifold transition (Greene, Morrison, Strominger)
- 1997 Semi-classical stability of sugra vacua (Taylor-Robinson MM)
- 2003 Cosmological flop transition in M-theory (Brandle M, Lukas A)
- 2005 Cosmological conifold transition in IIB sugra (Lukas, Palti, Saffin)
- 2006 Toroidal compactification-decompactification transition in M-theory (Kodama H, Ohta N)

11.9.15 観測的検証

11.9.15.1 Overview

- Inflation

- 2006 IIB フラックスコンパクト化に基づく DBI インフレーションモデル: D ブレーンがワープ突起近傍を動く場合のインフレーションモデル. 特に, Klebanov-Strassler 突起に対して, 頂点近傍で十分なインフレーションが起きるが, 生成されるゆらぎが WMAP による観測上限を上回る非ガウス性を持つことを指摘. [Kecskeneti S, Maiden J, Shiu G, Underwood B 2006 [279]]
- 2007 IIB フラックスコンパクト化に基づく DBI インフレーションモデル: インフレーションを引き起こすブレイン (D_3) が運動しているワープ突起の頂点近傍でのワープ因子の振る舞いが, 生成されるスカラゆらぎのスペクトル指数やそのスケール依存性に観測可能な影響を及ぼすと議論. [Shiu G, Underwood B 2007[351]]

11.9.16 宇宙モデル

Torii & Shiromizu (2002)[369]

$p+q$ 次元時空での gravity+dilaton+ q -form field 系に対する $M_p \times K_q$ 型 (定曲率空間の積) のコンパクト化とその安定性 (reduced p -D theory としての) を議論. このモデルは Freund-Rubin によるコンパクト化のモデルに $p+q$ 次元宇宙項を加えたもので, Carroll et al(2002) および Bousso, DeWolfe & Myers(2002) のモデルに dilaton を加えた場合の効果の研究. 結論は, $M_p = \text{AdS}^p$, $K_q = S^q$ のみが許され, 広いパラメータ領域で安定.

Giddings SB (2003), Giddings SB & Myers RC (2004)[195, 197]

高次元統一理論では, その詳細 (string/M など) によらず, 場の理論的記述が可能なら, extra dimensions のスケールを記述する radial dilaton が無限大 (extra dimension のスケールが無限大) の極限で有効ポテンシャルがゼロとなることを指摘 (物質のエネルギー密度が extra dimensions の体積に比例して増大しない限り). これより, 現在の宇宙において radial dilaton が有限な値で (局所的に) 安定化されていたとしても, 宇宙項が正ならば, radial dilaton は大域的に不安定で, 熱転移ないし量子トンネル効果により radial dilaton が限りなく増大する状態へ移行する (decompactification) と主張. また, この状態は (物

質のエネルギー密度が extra dimension の体積とともに急速に増大しない限り), 観測を説明する quintessence モデルとは対応しないことも指摘.

11.9.16.1 Inflating compactification

- **No-Go 定理:** M/string 理論を含む高次元理論において, 内部空間が静的な warped product 型コンパクト化では, 強エネルギー条件が常に満たされ, 4次元時空の加速膨張は起こらないことを主張 [Maldacena J & Nunez C (2001), Gibbons GW (1985), de Wit B, Smit DJ & Hari Dass ND (1987),][190, 295, 191].
- **Chen-Galtsov-Guperle 解:** 高次元 SUGRA に対する単 S-brane 型解. 内部空間は任意曲率. [hep-th/0204071][77]
- **Ohta 解:** $D = 11$ SUGRA および $D = 10$ SUGRA に対する, 時間のみに依存し, 任意曲率の定曲率空間でコンパクト化した厳密解の族 (多 S-brane 型解) [hep-th/0301095][314]
- **Townsend-Wohlfarth 解:** 内部空間が負曲率 Einstein 空間でそのサイズに時間依存性を許せば, No-Go 定理は成り立たず, 中間インフレーション真空解が存在することを指摘 [hep-th/0303079]. [372]
- Townsend-Wohlfarth 解は Chen-Galtsov-Guperle 解ないし単 S-Brane の場合の Ohta 解 [314] において 3-form flux(SM2-brane) がゼロの極限を取ったもので, flux がゼロでない場合は内部空間が平坦となる中間インフレーション解も含むことを指摘 [hep-th/0303238][313]
- Ohta 解が内部空間が球となる中間インフレーション解を含むことを指摘 [hep-th/0304172][315]
- 内部空間が複数の定曲率空間の積となる真空モデルの研究. 調べられた範囲で十分なインフレーションなし [Chen C (2003)]. [78]
-

11.10 ブレインワールドモデル

Overview

- Randall-Sundrum モデル
 - 1999 RSI モデル. 階層性問題の解決法. [Randall L, Sundrum R 1999[334]]
 - RSII モデル. AdS コンパクト化. . [Randall L, Sundrum R 1999[333]]
- Hořava-Witten モデル
 - 1995 HW 理論 [Horava P, Witten E 1995[252, 251]]
- DGP モデル
 - 2000 DGP モデル [Dvali GR, Gabadadze G, Porrati M 2000[136]]

11.11 宇宙項とインフレーション

11.11.1 de Sitter 真空

- 4D SUGRA
 - 1985 $N=8$ SO(7, 1)-**SUGRA**: SO(5) \times SO(3) 対称性をもつ dS 極点. 不安定. [Hull CM, Warner NP[261]]
- 弦理論のコンパクト化
 - 1985 (**No-Go** 定理) string 理論における de Sitter 真空に対する No-Go 定理 [Maldacena J & Nunez C (2001), Gibbons GW (1985), de Wit B, Smit DJ & Hari Dass ND (1987)][295].
 - 2000 de Sitter 時空において string 理論を構築する上での原理的問題 [Banks T (2000), Banks T & Fischler W (2001), Hellerman S, Kaloper N & Susskind L (2001), Fischler W, Kashani-Poor A, McNeese R & Paban S (2001), Witten E (2001), Strominger A (2001)][20, 244, 159, 392, 359]
 - 2002 de Sitter 時空における Poincare 回帰時間(?) [Dyson L, Lindesay J & Susskind L (2002), Dyson L, Kleban M & Susskind L (2002), Goheer N, Kleban M & Susskind L (2002), Banks T, Fischler W & Paban S (2002)][139, 138, 200, 21].

- 2003 (**KKLT モデル**) すべてのモジュライが安定化され, 準安定 dS 真空をもつ, IIB 理論のワープしたフラックスコンパクト化モデル (Kachru S & Kallosh R & Linde A & Trivedi S(2003)[272]).
- String 理論における準安定 de Sitter コンパクト化の遷移不安定 [Giddings SB (2003), Giddings SB & Myers RC (2004)][195, 197]

Kachru S, Kallosh R, Linde A & Trivedi SP[272]

すべてのモジュライパラメータが安定化され, de Sitter 型解を (準安定) 基底状態としてもつ IIB F 理論のコンパクト化を構成:

3-形式フラックス \Rightarrow radion 以外のモジュライを安定化 (Giddings-Kachru-Polchinski モデル [196])

Euclidean D-brane instantons/gaugino condensation correction \Rightarrow radion のポテンシャル: 準安定状態は AdS [390]

$\overline{D3}$ ブレイン \Rightarrow radion ポテンシャルの最小値を正の側に上げる [273]: $\overline{D3}$ ブレインの数の fine-tuning により小さな $\Lambda > 0$ を実現.

さらに, この準安定状態の寿命は現在の宇宙年齢より十分長くかつ, AdS の再帰時間より十分短いことを示した.

11.11.2 インフレーションモデル

ブレーンインフレーションモデル

1998 ブレイン・反ブレインインフレーションモデル (Dvali GR, Tye SHH [137])

KKLT モデル

2003 (**KKLT モデル**) すべてのモジュライが安定化され, 準安定 dS 真空をもつ, IIB 理論のワープしたフラックスコンパクト化モデル (Kachru S, Kallosh R, Linde A, Trivedi S[272]).

(**KKLMMT モデル**) KKLТ モデルと $D\bar{D}$ 対を用いたブレインインフレーションモデルおよびワープを組み合わせたインフレーションモデル. (Kachru S, Kallosh R, Linde A, Maldacena J, McAllister L, Trivedi S[271])

(**D-term uplifting of vacua**) 内部フラックスをもつ D7 ブレインを利用. 4次元有効理論としては, $N = 1$ 超対称性を持つ理論が得られ, D項により自発的に超対称性が破れる. (Burgess CP, Kallosh R, Quevedo F2003[60])

(**D3/D7 ブレインインフレーションモデル**) (Hsu JP, Kallosh R, Prokushkin S[254]; Koyama F, Tachikawa Y, Watari T[287]; Firouzjahi H, Tye SHH[158]; Hsu JP, Kallosh R 2004[253])

2004 (**Racetrack モデル**) KKLТ 型モデルでインスタントン効果に基づくサイズモジュラスポテンシャルとして, 2つの指数関数型ポテンシャルの和を用いると, スローロール条件を満たすモデルができることを指摘 (ただし, fine-tuning が必要). (Blanco-Pillado JJ, Burgess CP, Cline JM, Escoda C, Gomez-Reino M, Kallosh R, Linde A, Quevedo F [41])

2006 (**改良版 Racetrack モデル**) CY orientifold $CP^4_{[1,1,1,6,9]}$ を用いた racetrack モデル. WMAP3years と整合的なスペクトル指数 $n_s \approx 0.95$ を与える. (Blanco-Pillado JJ, Burgess CP, Cline JM, Escoda C, Gomez-Reino M, Kallosh R, Linde A, Quevedo F [42])

DBI インフレーションモデル

(**DBI インフレーションモデル**) (Silverstein E, Tong D[352]; Alishahiha M, Silverstein E, Tong D 2004[7]; Chen XG 2005[81, 80])

KKLT-hybrid

(**No-inflaton field inflation**) anti-D3 branes \rightarrow NS5 転移を用いたハイブリッド型インフレーションモデル. インフラトンが場でないため, 断熱ゆらぎの生成はない (?) (Pilo L, Riotto A, Zaffaroni A 2004[326]).

2005 (**タキオンインフレーションモデル**) (Cremades D, Quevedo F, Sinha A[87])

***N*-flation**

(**N-flation**) (Dimopoulos S, Kachru S, McGreevy J, Wacker J [117])

***T*-brane inflation**

2015 (**dS vacuum by T-brane**) [Cicoli M, Quevedo F, Valandro R:
arXiv: 1512.04558]

11.12 インスタントン**11.12.1 5D ブレインワールドモデル**

Garriga & Sasaki (2000)[173]

de Sitter スライスを用いた AdS⁵ の解析接続:

$$ds^2 = dy^2 + H^2 a^2(y) \left(-dt^2 + \frac{1}{H^2} \cosh^2(Ht) d\Omega_3^2 \right) \quad (11.12.1)$$

$$\Rightarrow ds^2 = dy^2 + a(y)^2 d\Omega_4^2; \quad a(y) = \ell \sin(y/\ell). \quad (11.12.2)$$

Bouhmadi-Lopez, Gonzalez-Diaz & Zhuk (2002)[?]

Garriga-Sasaki モデルで bulk にダスト (特別なスカラ場) を入れたモデル:

$$a(y) = \frac{\ell}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{b} \cosh \frac{2y}{\ell} - 1 \right)^{1/2}. \quad (11.12.3)$$

($b > 1$). 一般的な y で cut& doubling をしたあと, 両端のスロート $y = 0$ を接着してコンパクト化.

11.13 特異点

11.13.1 歴史的概観

- 宇宙論

2001 (**ekpyrotic 宇宙モデル**) [Khoury J, Ovrut BA, Steinhardt PJ & Turok N(2001), Khoury J, Ovrut BA, Seiberg PJ, Steinhardt PJ & Turok N(2002), Steinhardt PJ & Turok N (2002)]

2002 (“時間的”初期特異点) $E^{2,1}$ を空間並進とブーストを組み合わせた Poincare 変換の元 γ により生成される群 $\Gamma = \{\gamma^n\}$ により同一視し, さらに KK 還元をすることにより, Milne 型 2 次元宇宙を含み時間的な特異点をもつ宇宙モデルを構成. 平坦な空間との直積により高次元モデルを作り (酸化), そこでのボゾンの弦理論の分配関数を計算. さらに, Milne 型宇宙の光円錐を超えた拡張という点に着目して, 2 D モデルと類似の高次元宇宙モデルを構成. ただし, この理論における有効宇宙モデルの議論には, フォーム場の取り扱いに間違いがある. [Cornalba L & Costa MS (2002)[85]]

2003 (**Pre-Big Bang シナリオ**) [Gasperini M & Veneziano G]

2004 (**Big Crunch と AdS/CFT**) M 理論ないし IIB 理論のコンパクト化により得られるフル超対称 4 次元理論 ($AdS_4 \times S^7$) および 5 次元理論 ($AdS_5 \times S^5$) にさらに truncation を施して得られる Einstein-1 成分 Scalar 系において, 漸近的に AdS で球対称な解で, (負の有限エネルギーをもつ) ソリトンのものが存在することを初期値問題の数値的研究と $SO(4)$ 対称インスタントンの解析接続の 2 つの方法により示した. さらに, それらが有限時間でつぶれ Big-Crunch 特異点を生み出すことを示し, その AdS/CFT 双対理論との対応を議論. [Hertog T & Horowitz GT (2004)[245]]

- ブラックホール

1993 (**BH 相補性**) ブラックホールの内部と外部が量子論的相関をもつという主張 [Susskind L & Thorlacius L & Uglum J (1993)[362]; Stephens CR & 't Hooft G & Whiting BF (1994)[356]]

- Orbifold

- $(E^{1,d}/\mathbb{Z}_2)$ [*Balasubramanian V et al (2003)[18]]
- (Milne 宇宙) []

参考文献

- [1] Abe, M., Kubota, H. and Sakai, N.: *Phys. Lett. B* **200**, 461 (1988).
- [2] Acharya, B. S.: A Moduli Fixing Mechanism in M theory, *hep-th/0212294* (2003).
- [3] Acharya, B. S.: Compactification with Flux and Yukawa Hierarchies, *hep-th/0303234* (2004).
- [4] Adler, S.: Axial-Vector Vertex in Spinor Electrodynamics, *Phys. Rev.* **177**, 2426 (1969).
- [5] Adler, S. and Bardeen, W.: Absence of higher order corrections in the anomalous axial vector divergence equation, *Phys. Rev.* **182**, 1517–1536 (1969).
- [6] Aharony, O., Bergman, O., Jafferis, D. and Maldacena, J.: $N = 6$ superconformal Chern-Simons-matter theories, M2-branes and their gravity duals, *JHEP* **0810**, 091 (2008).
- [7] Alishahiha, M., Silverstein, E. and Tong, D.: DBI in the Sky, *Phys. Rev. D* **70**, 123505 (2004).
- [8] Alvarez-Gaum'e, L. and Witten, E.: Gravitational anomalies, *Nucl. Phys. B* **234**, 269–330 (1984).
- [9] Andrianopoli, L., D'Auria, R., Ferrara, S. and Lled'o, M.: Gauging of Flat Groups in Four Dimensional Supergravity, *JHEP* **0207**, 010 (2002).
- [10] Antoniadis, I.: A possible new dimension at a few TeV, *Phys. Lett. B* **246**, 377–84 (1990).
- [11] Antoniadis, I., Kiritsis, E. and Tomaras, T.: A D-brane alternative to unification, *Phys. Lett. B* **486**, 186 (2000).
- [12] Aurilia, A., Nicolai, H. and Townsend, P.: Hidden constants: The theta parameter of QCD and the cosmological constant of $N = 8$ supergravity, *Nucl. Phys. B* **176**, 509 (1980).

- [13] Awada, M., Duff, M. and Pope, C.: $N = 8$ supergravity breaks down to $N = 1$, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 294 (1983).
- [14] Bagger, J. and Lambert, N.: Modeling Multiple M2-branes, *Phys. Rev. D* **75**, 045020 (2007).
- [15] Bagger, J. and Lambert, N.: Comments on multiple M2-branes, *JHEP* **0802**, 105 (2008).
- [16] Bagger, J. and Lambert, N.: Gauge symmetry and supersymmetry of multiple M2-branes, *Phys. Rev. D* **77**, 065008 (2008).
- [17] Bagger, J. and Witten, E.: Matter Couplings in $N=2$ Supergravity, *Nucl. Phys. B* **222**, 1–10 (1983).
- [18] Balasubramanian, V., Hassan, S., Keski-Vakkuri, E. and Naqvi, A.: A Space-Time Orbifold: A Toy Model for a Cosmological Singularity, *Phys. Rev. D* **67**, 026003 (2003).
- [19] Baluni, V.: CP-nonconserving effects in quantum chromodynamics, *Phys. Rev. D* **19**, 2227–2230 (1979).
- [20] Banks, T. and Fischler, W.: M-theory observables for cosmological space-times, *hep-th/0102077* (2001).
- [21] Banks, T., Fischler, W. and Paban, S.: Recurrent Nightmares?: Measurement Theory in de Sitter Space, *JHEP* **0212**, 062 (2002).
- [22] Barr, S.: A New Symmetry Breaking Pattern for $SO(10)$ and Proton Decay, *Phys. Lett. B* **112**, 219 (1982).
- [23] Bars, I.: Compactification of superstrings and torsion, *Phys. Rev. D* **33**, 383–8 (1986).
- [24] Bars, I., Nemeschansky, D. and Yankielowicz, S.: Compactified Superstrings And Torsion, *Nucl. Phys. B* **278**, 632 (1986).
- [25] Baumann, D., Dymarsky, A., Klebanov, I., McAllister, L. and Steinhardt, P.: A Delicate Universe, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 141601 (2007).

- [26] Becker, K. and Becker, M.: M-Theory on Eight-Manifolds, *Nucl. Phys. B* **477**, 155–167 (1996).
- [27] Becker, K., Becker, M., Dasgupta, K. and Green, P.: Compactifications of Heterotic Theory on Non-Kähler Complex Manifolds: I, *JHEP* **0304**, 007 (2003).
- [28] Becker, K., Becker, M., Fu, J.-X., Tseng, L.-S. and Yau, S.-T.: Anomaly Cancellation and Smooth Non-Kähler Solutions in Heterotic String Theory, *Nucl. Phys. B* **751**, 108 (2006).
- [29] Becker, K., Becker, M. and Krause, A.: M-Theory Inflation from Multi M5-Brane Dynamics, *Nucl. Phys. B* **715**, 349–371 (2005).
- [30] Becker, K. and Dasgupta, K.: Heterotic Strings with Torsion, *JHEP* **0211**, 006 (2002).
- [31] Becker, M., Tseng, L.-S. and Yau, S.-T.: Moduli Space of Torsional Manifolds, *Nucl. Phys. B* **736**, 119–34 (2007).
- [32] Behrndt, K. and Cvetic, M.: General $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric flux vacua of (massive) type IIA string theory, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 021601 (2005).
- [33] Behrndt, K., Cvetic, M. and Gao, P.: General type IIB fluxes with SU(3) structures, *Nucl. Phys. B* **721**, 287–308 (2005).
- [34] Bell, J. and Jackiw, R.: A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the sigma model., *Nuovo Cimento A* **60**, 47–61 (1969).
- [35] Bena, I. and Roiban, R.: Supergravity pp-wave solutions with 28 and 24 supercharges, *Phys. Rev. D* **67**, 125014 (2003).
- [36] Bergshoeff, E. and de Roo, M.: The Quartic Effective Action of the Heterotic String and Supersymmetry, *Nucl. Phys. B* **328**, 439–68 (1989).
- [37] Bergshoeff, E., Roo, de M., De Wit, B. and Nieuwenhuizen, van P.: Ten-dimensional Maxwell-Einstein supergravity, its currents, and the issue of its auxiliary fields, *Nucl. Phys. B* **195**, 97–136 (1982).

- [38] Bergshoeff, E., Hull, C. and Ortin, T.: Duality in the Type-II Superstring Effective Action, *Nucl. Phys. B* **451**, 547–78 (1995).
- [39] Bergshoeff, E., Kallosh, R., Ortín, T., Roest, D. and Van Proeyen, A.: New Formulations of $D = 10$ Supersymmetry and D8-O8 Domain Walls, *Class. Quantum Grav.* **17**, 3359–82 (2001).
- [40] Berkooz, M., Douglas, M. and Leigh, R.: Branes intersecting at angles, *Nucl. Phys. B* **480**, 265–278 (1996).
- [41] Blanco-Pillado, J., Burgess, C., Cline, J., Escoda, C., Gomez-Reino, M., Kallosh, R. and Li, : Racetrack Inflation, *JHEP* **0411**, 063 (2004).
- [42] Blanco-Pillado, J., et al.: Inflating in a Better Racetrack, *JHEP* **0609**, 002 (2006).
- [43] Blau, M., Figueroa-O’Farrill, J., Hull, C. and Papadopoulos, G.: A new maximally supersymmetric background of IIB superstring theory, *JHEP* **0201**, 047 (2002).
- [44] Blau, M., Figueroa-O’Farrill, J., Hull, C. and Papadopoulos, G.: Penrose limits and maximal supersymmetry, *Class. Quantum Grav.* **19**, L87–95 (2002).
- [45] Blau, M., Figueroa-O’Farrill, J. and Papadopoulos, G.: Penrose limits, supergravity and brane dynamics, *Class. Quantum Grav.* **19**, 4753 (2002).
- [46] Blumenhagen, R., Körs, B., Lüst, D. and Ott, T.: The standard model from stable intersecting brane world orbifolds, *Nucl. Phys. B* **616**, 3–33 (2001).
- [47] Bouchard, V. and Donagi, R.: An $SU(5)$ heterotic standard model, *Phys. Lett. B* **633**, 783–91 (2006).
- [48] Boulware, D. and Deser, S.: String-generated gravity models, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2656–2660 (1985).

- [49] Bousso, R. and Polchinski, J.: Quantization of Four-form Fluxes and Dynamical Neutralization of the Cosmological Constant, *JHEP* **0006**, 006 (2000).
- [50] Braun, V., He, Y.-H., Ovrut, B. and Pantev, T.: A heterotic standard model, *Phys. Lett. B* **618**, 252 (2005).
- [51] Braun, V., Ovrut, B., Pantev, T. and Reinbacher, R.: Elliptic Calabi-Yau threefolds with $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ Wilson lines, *JHEP* **0412**, 062 (2004).
- [52] Breckenridge, J., Myers, R., Peet, A. and Vafa, C.: D-branes and spinning black holes, *Phys. Lett. B* **391**, 93–98 (1997).
- [53] Breit, J., Ovrut, B. and Segre, G.: E_6 symmetry breaking in the superstring theory, *Phys. Lett. B* **158**, 33–39 (1985).
- [54] Breitenlohner, P.: A geometric interpretation of local supersymmetry, *Phys. Lett. B* **67**, 49–51 (1977).
- [55] Brink, L. and Howe, P.: Eleven-Dimensional Supergravity on the Mass Shell in Superspace, *Phys. Lett. B* **91**, 384–6 (1980).
- [56] Brink, L., Schwarz, J. and Scherk, J.: Supersymmetric Yang-Mills theories, *Nucl. Phys. B* **121**, 77–92 (1977).
- [57] Buchbinder, E.: Five-Brane Dynamics and Inflation in Heterotic M-Theory, *Nucl. Phys. B* **711**, 314–344 (2005).
- [58] Buchmuller, W., Hamaguchi, K., Lebedev, O. and Ratz, M.: Supersymmetric standard model from the heterotic string, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 121602:1–4 (2006).
- [59] Buchmuller, W., Hamaguchi, K., Lebedev, O. and Ratz, M.: Supersymmetric Standard Model from the Heterotic String (II), *Nucl. Phys. B* **785**, 149 (2007).
- [60] Burgess, C., Kallosh, R. and Quevedo, F.: De Sitter string vacua from supersymmetric D terms, *JHEP* **0310**, 056 (2003).

- [61] Caldarelli, M. and Klemm, D.: All Supersymmetric Solutions of $N = 2, D = 4$ Gauged Supergravity, *JHEP* **0309**, 019 (2003).
- [62] Callan, C., Harvey, J. and Strominger, A.: World sheet approach to heterotic instantons and solitons, *Nucl. Phys. B* **359**, 611–34 (1991).
- [63] Cámara, P., Font, A. and Ibanez, L.: Fluxes, moduli fixing and MSSM-like vacua in a simple IIA orientifold, *JHEP* **0509**, 013 (2005).
- [64] Campbell, C. and West, P.: $N = 2, D = 10$ nonchiral supergravity and its spontaneous compactification, *Nucl. Phys. B* **243**, 112–24 (1984).
- [65] Candelas, P. and Ossa, de la X.: Moduli Space of Calabi-Yau Manifolds, *Nucl. Phys. B* **355**, 455–81 (1991).
- [66] Candelas, P. and de la Ossa, X. C.: Comments on Conifolds, *Nucl. Phys. B* **342**, 246–268 (1990).
- [67] Candelas, P., Horowitz, G., Strominger, A. and Witten, E.: Vacuum configurations for superstrings, *Nucl. Phys. B* **258**, 46–74 (1985).
- [68] Cardoso, G., Curio, G., Dall’Agata, G. and Lüster, D.: BPS action and superpotential for heterotic string compactifications with fluxes, *JHEP* **0310**, 004 (2003).
- [69] Carr, J., Gates, Jr., S. and Oerter, R.: $D = 10, N = 2a$ Supergravity in Superspace, *Phys. Lett. B* **189**, 68–74 (1987).
- [70] Castellani, L., D’Auria, R. and Fre, P.: *Supergravity and superstrings: a geometric perspective*, World Scientific (1991).
- [71] Castellani, L., D’Auria, R. and Fré, P.: $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ from $D = 11$ supergravity, *Nucl. Phys. B* **239**, 610 (1984).
- [72] Castellani, L.: The mass spectrum of the $N = 2, SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ compactifications of $d = 11$ supergravity, *Nucl. Phys. B* **254**, 266 (1985).

- [73] Castellini, L. and Romans, L.: $N = 3$ and $N = 1$ supersymmetry in a new class of solutions for $d = 11$ supergravity, *Nucl. Phys. B* **238**, 683 (1984).
- [74] Chamseddine, A.: $N = 4$ supergravity coupled to $N = 4$ matter and hidden symmetries, *Nucl. Phys. B* **185**, 403–15 (1981).
- [75] Chang, S. and Choi, K.: Hadronic axion window and the big bang nucleosynthesis, *Phys. Lett. B* **316**, 51–6 (1993).
- [76] Chapline, G. and Manton, N.: Unification of Yang-Mills theory and supergravity in ten dimensions, *Phys. Lett. B* **120**, 105–109 (1983).
- [77] Chen, C.-M., Gal'tsov, D. and Gutperle, M.: S-brane Solutions in Supergravity Theories, *Phys. Rev. D* **66**, 024043 (2002).
- [78] Chen, C.-M., Ho, P.-M., Neupane, I. and Wand, J.: A Note on Acceleration from Product Space Compactification, *JHEP* **0307**, 017 (2003).
- [79] Chen, P., Dasgupta, K., Narayan, K., Shmakova, M. and Zagermann, M.: Brane Inflation, Solitons and Cosmological Solutions: I, *JHEP* **0509**, 009 (2005).
- [80] Chen, X.: Inflation from warped space, *JHEP* **0508**, 045 (2005).
- [81] Chen, X.: Running non-Gaussianities in DBI inflation, *Phys. Rev. D* **72**, 123518 (2005).
- [82] Chiossi, S. and Salamon, S.: The intrinsic torsion of $SU(3)$ and G_2 structures, *math.DG/0202282* (2002).
- [83] Coleman, S. and Mandula, J.: *Phys. Rev.* **159**, 1251 (1967).
- [84] Cordaro, F., Fre, P., Gualtieri, L., Termonia, P. and Trigiante, M.: $N=8$ gaugings revisited: An Exhaustive classification., *Nucl. Phys. B* **532**, 245–279 (1998).
- [85] Cornalba, L. and Costa, M.: A New Cosmological Scenario in String Theory, *Phys. Rev. D* **66**, 066001 (2002).

- [86] Cornwell, J.: *Supersymmetries and Infinite-Dimensional Algebras, Group Theory in Physics, vol. 3*, Elsevier (1989).
- [87] Cremades, D., Quevedo, F. and Sinha, A.: Warped Tachyonic Inflation in Type IIB Flux Compactifications and the Open-String Completeness Conjecture, *JHEP* **0510**, 106 (2005).
- [88] Cremmer, E. and Ferrara, S.: Formulation of 11-Dimensional Supergravity in Superspace, *Phys. Lett. B* **91**, 61–6 (1980).
- [89] Cremmer, E., Horvath, Z., Palla, L. and Scherk, J.: Grand unified schemes and spontaneous symmetry breaking, *Nucl. Phys. B* **127**, 57 (1977).
- [90] Cremmer, E. and Julia, B.: The N=8 Supergravity Theory. 1. The Lagrangian, *Phys. Lett. B* **80**, 48 (1978).
- [91] Cremmer, E. and Julia, B.: The SO(8) supergravity, *Nucl. Phys. B* **159**, 141–212 (1979).
- [92] Cremmer, E., Julia, B., Lü, H. and Pope, C.: Dualisation of Dualities, I, *Nucl. Phys. B* **523**, 73–144 (1998).
- [93] Cremmer, E., Julia, B. and Scherk, J.: Supergravity theory in 11 dimensions, *Phys. Lett. B* **76**, 409–412 (1978).
- [94] Cremmer, E. and Scherk, J.: Spontaneous compactification of space in an Einstein-Yang-Mills-Higgs model, *Nucl. Phys. B* **108**, 409 (1976).
- [95] Cremmer, E. and Scherk, J.: Dual models in four dimensions with internal symmetries, *Nucl. Phys. B* **103**, 399 (1976).
- [96] Cremmer, E. and Scherk, J.: Spontaneous compactification of extra space dimensions, *Nucl. Phys. B* **110**, 61 (1977).
- [97] Cremmer, E., Scherk, J. and Ferrara, S.: SU(4) Invariant Supergravity Theory, *Phys. Lett. B* **74B**, 61 (1978).

- [98] Crewther, R., Di Vecchia, P., Veneziano, G. and Witten, E.: Chiral estimate of the electric dipole moment of the neutron in quantum chromodynamics, *Phys. Lett. B* **88**, 123–127 (1979).
- [99] Cvetič, M., Lü, H. and Pope, C.: M-theory PP-waves, Penrose Limits and Supernumerary Supersymmetries, *Nucl. Phys. B* **644**, 65–84 (2002).
- [100] Das, A.: SO(4) Invariant Extended Supergravity, *Phys. Rev. D* **15**, 2805 (1977).
- [101] Dasgupta, K., Hsu, J., Kallosh, R., Linde, A. and Zagermann, M.: D3/D7 brane inflation and semilocal strings, *JHEP* **0408**, 030 (2004).
- [102] Dasgupta, K., Rajesh, G. and Sethi, S.: M Theory, Orientifolds and G-Flux, *JHEP* **9908**, 023 (1999).
- [103] D’Auria, R., Fré, P. and Nieuwenhuizen, van P.: $N = 2$ matter coupled to supergravity from compactification on a coset G/H possessing an additional Killing vector, *Phys. Lett. B* **136**, 347 (1984).
- [104] de Boer, J., Dijkgraaf, R., Hori, K., Keurentjes, A., Morgan, J., Morrison, D. R. and Sethi, S.: Triples, Fluxes, and Strings, *Adv. Theor. Math. Phys.* **4**, 995–1186 (2002).
- [105] de Roo, M., Suelmann, H. and Wiedemann, A.: The Supersymmetric effective action of the heterotic string in ten-dimensions, *Phys. Lett. B* **405**, 326–66 (1993).
- [106] de Wit, B., Lauwers, P., Philippe, R., Su, S. and Van Proeyen, A.: Gauge and Matter Fields Coupled to $N=2$ Supergravity, *Phys. Lett. B* **134**, 37 (1984).
- [107] Wit, de B. and Nicolai, H.: $N = 8$ supergravity, *Nucl. Phys. B* **208**, 323–364 (1982).
- [108] Wit, de B. and Nicolai, H.: $N = 8$ supergravity with local $SO(8) \times SU(8)$ invariance, *Phys. Lett. B* **108**, 285 (1982).

- [109] de Wit, B. and Nicolai, H.: The Consistency of the S^7 Truncation in $D = 11$ Supergravity, *Nucl. Phys. B* **281**, 211 (1987).
- [110] de Wit, B. and Nicolai, H.: Deformations of gauged $SO(8)$ supergravity and supergravity in eleven dimensions, *JHEP* **1305**, 077 (2013).
- [111] de Wit, B., Samtleben, H. and Trigiante, M.: The maximal $D=4$ supergravities, *JHEP* **0706**, 049 (2007).
- [112] de Wit, B., Smit, D. and Hari Dass, N.: Residual Supersymmetry of Compactified $D = 10$ Supergravity, *Nucl. Phys. B* **283**, 165–91 (1987).
- [113] Derendinger, J.-P., Kounnas, C., Petropoulos, P. and Zwirner, F.: Superpotentials in IIA compactifications with general fluxes, *Nucl. Phys. B* **715**, 211–33 (2005).
- [114] Deser, S. and Zumino, B.: Consistent supergravity, *Phys. Lett. B* **62**, 335–7 (1976).
- [115] Dewitt, B.: in *Dynamical Theory of Groups and Fields, 1963 Les Houches Summer School* (1963).
- [116] Dewolfe, O., Giryavets, A., Kachru, S. and Taylor, W.: Type IIA Moduli Stabilization, *JHEP* **07**, 066 (2005).
- [117] Dimopoulos, S., Kachru, S., McGreevy, J. and Wacker, J.: N-flation, *hep-th/0507205* (2005).
- [118] Dine, M., Rohm, R., Seiberg, N. and Witten, E.: Gluino condensation in superstring models, *Phys. Lett. B* **156**, 55–60 (1985).
- [119] Dirac, P.: Quantised singularities in the electromagnetic field, *Proc. R. Soc. London A* **133**, 60–72 (1931).
- [120] Distler, J., Mukhi, S., Papageorgakis, C. and Van Raamsdonk, M.: M2-branes on M-folds, *JHEP* **0805**, 038 (2008).
- [121] Dixon, L., Harvey, J., Vafa, C. and Witten, E.: Strings on Orbifolds., *Nucl. Phys. B* **261**, 678–686 (1985).

- [122] Dixon, L., Harvey, J., Vafa, C. and Witten, E.: Strings on Orbifold 2, *Phys. Lett. B* **274**, 285–314 (1986).
- [123] Douglas, M. and Kachru, S.: Flux Compactification, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 733–96 (2007).
- [124] Duff, M.: in Ferrara, S. and Taylor, J. eds., *Supergravity 81*, Cambridge Univ. Press (1982).
- [125] Duff, M. ed.: *The World in Eleven Dimensions*, IOP (1999).
- [126] Duff, M.: M-theory on manifolds of G_2 holonomy: the first twenty years, *hep-th/0201062* (2002).
- [127] Duff, M., Lü, H. and Pope, C.: Supersymmetry without supersymmetry, *Phys. Lett. B* **409**, 136–144 (1997).
- [128] Duff, M., Lu, H. and Pope, C.: $\text{AdS}_5 \times S^5$ untwisted, *Nucl. Phys. B* **532**, 181–209 (1998).
- [129] Duff, M., Lü, H. and Pope, C.: $\text{AdS}_3 \times S^3$ (un)twisted and squashed, and an $O(2, 2; \mathbb{Z})$ multiplet of dyonic strings, *Nucl. Phys. B* **544**, 145–180 (1999).
- [130] Duff, M., Nilsson, B. and Pope, C.: Compactification of $D = 11$ supergravity on $K3 \times T^3$, *Phys. Lett. B* **129**, 39 (1983).
- [131] Duff, M., Nilsson, B. and Pope, C.: Spontaneous supersymmetry breaking by the squashed seven-sphere, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 2043 (1983).
- [132] Duff, M., Nilsson, B. and Pope, C.: Kaluza-Klein supergravity, *Phys. Rep. C* **130**, 1 (1986).
- [133] Duff, M. and Pope, C.: in S. Ferrara, J. T. and Nieuwenhuizen, van P. eds., *Supersymmetry and Supergravity 82*, World Scientific (1983).
- [134] Duff, M. and Toms, D.: in Ellis, J. and Ferrara, S. eds., *Unification of the Fundamental Interactions II*, Plenum (1982).

- [135] Duff, M. and Nieuwenhuizen, van P.: Quantum inequivalence of different field representations, *Phys. Lett. B* **94**, 179 (1980).
- [136] Dvali, G., Gabadadze, G. and Porrati, M.: 4D gravity on a brane in 5D Minkowski space, *Phys. Lett. B* **485**, 208–14 (2000).
- [137] Dvali, G. and Tye, S.: Brane Inflation, *Phys. Lett. B* **450**, 72–82 (1999).
- [138] Dyson, L., Kleban, M. and Susskind, L.: Disturbing Implications of a Cosmological Constant, *JHEP* **0210**, 011 (2002).
- [139] Dyson, L., Lindesay, J. and Susskind, L.: Is There Really a de Sitter/CFT Duality, *JHEP* **0208**, 045 (2002).
- [140] Ellis, J., Jetzer, P. and Mizrachi, L.: *Nucl. Phys. B* **303**, 1 (1988).
- [141] Elvang, H., Emparan, R., Mateos, M. and Reall, H.: A supersymmetric black ring, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 211302 (2004).
- [142] Englert, F.: Spontaneous compactification of eleven dimensional supergravity, *Phys. Lett. B* **119**, 339 (1982).
- [143] Feng, J., March-Russell, J., Sethi, S. and Wilczek, F.: Saltatory Relaxation of the Cosmological Constant, *Nucl. Phys. B* **602**, 307–328 (2001).
- [144] Fernandez, M., Ivanov, S., Ugarte, L. and Villacampa, R.: Non-Kaehler Heterotic String Compactifications with non-zero fluxes and constant dilaton, *arXiv:0804.1648* (2008).
- [145] Ferrara, S.: A review of broken supergravity models, in Isham, C., Penrose, R. and Sciama, D. eds., *Quantum Gravity 2, A Second Oxford Symposium, Oxford 1980*, 520–48, Clarendon Press (1981).
- [146] Ferrara, S.: Aspects of supergravity theories, in Schmutzer, E. ed., *Proc. of the 9th Int. Conf. on General Relativity and Gravitation, Jena 1980*, 207–24, Cambridge Univ. Press (1983).
- [147] Ferrara, S.: *Supersymmetry vol. 1 & 2*, World Scientific (1986).

- [148] Ferrara, S., Freedman, D. and Nieuwenhuizen, van P.: Progress toward a theory of supergravity, *Phys. Rev. D* **13**, 3214 (1976).
- [149] Ferrara, S. and Savoy, C.: Representations of extended supersymmetry on one and two particle states, in Ferrara, S. and Taylor, J. eds., *Supergravity '81*, 47–82, Cambridge Univ. Press (1982).
- [150] Ferrara, S., Savoy, C. and Zumino, B. .: General massive multiplets in extended supersymmetry, *Phys. Lett. B* **100**, 393–8 (1981).
- [151] Ferrara, S., Scherk, J. and Zumino, B.: Algebraic Properties of Extended Supersymmetry, *Nucl. Phys. B* **121**, 393 (1977).
- [152] Ferrara, S. and van Nieuwenhuizen, P.: Consistent Supergravity with Complex Spin 3/2 Gauge Fields., *Phys. Rev. Lett.* **37**, 1669 (1976).
- [153] Ferrara, S. and van Nieuwenhuizen, P.: The auxiliary fields in supergravity, *Phys. Lett. B* **74**, 333–5 (1978).
- [154] Ferrara, S. and van Nieuwenhuizen, P.: Tensor calculus fro supergravity, *Phys. Lett. B* **76**, 404–8 (1978).
- [155] Fidanza, S., Minasian, and Tomasiello, : Mirror symmetric SU(3) structure manifolds with NS fluxes, *Comm. Math. Phys.* **254**, 401–23 (2005).
- [156] Figueroa-O’Farrill, J., Meessen, P. and Philip, S.: Supersymmetry and homogeneity of M-theory backgrounds, *Class. Quantum Grav.* **22**, 207–26 (2005).
- [157] Figueroa-O’Farrill, J. and Papadopoulos, G.: Maximally supersymmetric solutions of ten- and eleven-dimensional supergravities, *JHEP* **0303**, 048 (2003).
- [158] Firouzjahi, H. and Tye, S.-H. H.: Closer towards inflation in string theory, *Phys. Lett. B* **584**, 147–54 (2004).
- [159] Fischler, W., Kashani-Poor, A., MaNees, R. and Paban, S.: The Acceleration of the Universe, a Challenge for String Theory, *JHEP* **0107**, 003 (2001).

- [160] Fradkin, E. and Tseytlin, A.: Nonlinear Electrodynamics from Quantized Strings., *Phys. Lett. B* **163**, 123 (1985).
- [161] Freedman, D.: Irreducible representations of supersymmetry, in Levy, M. and Deser, S. eds., *Recent Developments in Gravitation Cargese 1978*, 549–61, Plenum (1979).
- [162] Freedman, D. and Das, A.: Gauge Internal Symmetry in Extended Supergravity., *Nucl. Phys. B* **120**, 221–230 (1977).
- [163] Freedman, D., Gibbons, G. and West, P.: Ten into Four Won't Go, *Phys. Lett. B* **124**, 491–2 (1983).
- [164] Freund, P. and Rubin, M.: Dynamics of dimensional reduction, *Phys. Lett. B* **97**, 233–235 (1980).
- [165] Friedan, D., Martinec, E. and Shenker, S.: Covariant Quantization of Superstrings, *Phys. Lett. B* **160**, 55–61 (1985).
- [166] Friedan, D., Martinec, E. and Shenker, S.: Conformal invariance, supersymmetry and string theory, *Nucl. Phys. B* **271**, 93–165 (1986).
- [167] Friedrich, T.: On types of non-integrable geometries, *math.DG/0205149* (2002).
- [168] Fritzsche, H. and Minkowski, P.: *Ann. Phys.* **93**, 193 (1975).
- [169] Fu, J. and Yau, S.: The theory of superstring with flux on non-Kahler manifolds and the complex Monge-Ampere equation, *hep-th/0604063* (2006).
- [170] Fujikawa, K.: Path Integral Measure for Gauge Invariant Fermion Theories., *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1195 (1979).
- [171] Fujikawa, K.: Path Integral for Gauge Theories with Fermions, *Phys. Rev. D* **21**, 2848 (1980).
- [172] Fujikawa, K.: On the Evaluation of Chiral Anomaly in Gauge Theories with γ_5 Couplings., *Phys. Rev. D* **29**, 285–292 (1984).

- [173] Garriga, J. and Sasaki, M.: Brane-World Creation and Black Holes, *Phys. Rev. D* **62**, 043523 (1999).
- [174] Gauntlett, J. and Gutowski, J.: All supersymmetric solutions of minimal gauged supergravity in five dimensions (Erratum: ibid D70:089901 (2004)), *Phys. Rev. D* **68**, 105009 (2003).
- [175] Gauntlett, J. and Gutowski, J.: Concentric Black Rings, *Phys. Rev. D* **71**, 025013 (2005).
- [176] Gauntlett, J. and Gutowski, J.: General Concentric Black Rings, *Phys. Rev. D* **71**, 024033 (2005).
- [177] Gauntlett, J. and Gutowski, J.: Constraining Maximally Supersymmetric Membrane Actions., *JHEP* **0806**, 053 (2008).
- [178] Gauntlett, J., Gutowski, J., Hull, C., Pakis, S. and Reall, H.: All supersymmetric solutions of minimal supergravity in five dimensions, *Class. Quant. Grav.* **20**, 4587–4634 (2003).
- [179] Gauntlett, J., Gutowski, J. and Pakis, S.: The Geometry of $D = 11$ Null Killing Spinors, *JHEP* **0312**, 049 (2003).
- [180] Gauntlett, J. and Hull, C.: pp-waves in 11-dimensions with extra supersymmetry, *JHEP* **0206**, 013 (2002).
- [181] Gauntlett, J., Martelli, D., Pakis, S. and Waldram, D.: G-Structures and Wrapped NS5-Branes, *Comm. Math. Phys.* **247**, 421–45 (2004).
- [182] Gauntlett, J. and Pakis, S.: The Geometry of D=11 Killing Spinors, *JHEP* **0304**, 039 (2003).
- [183] Gell-mann, M., Ramond, P. and Slansky, R.: Color Embeddings, Charge Assignments, And Proton Stability In Unified Gauge Theories, *Rev. Mod. Phys.* **50**, 721 (1978).
- [184] Georgi, H.: in Carlson, C. ed., *Particles and Fields*, AIP (1975).
- [185] Georgi, H. and Glashow, S.: Unity of All Elementary-Particle Forces, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 438–441 (1974).

- [186] Georgi, H. and Nanopoulos, D.: Ordinary Predictions from Grand Principles: T Quark Mass in O(10), *Nucl. Phys. B* **155**, 52–74 (1979).
- [187] Gervais, J. and Sakita, B.: *Nucl. Phys. B* **34**, 632 (1971).
- [188] Gervalle, R. and Volkov, M. S.: Electroweak monopoles and their stability, *Nucl. Phys. B* **984**, 115937 (2022).
- [189] Giani, F. and Pernici, M.: $N = 2$ supergravity in ten dimensions, *Phys. Rev. D* **30**, 325–33 (1984).
- [190] Gibbons, G.: Aspects of Supergravity Theories, in Aguilla, del F., Azcarrage, A. and Ibanez, L. eds., *Supersymmetry, Supergravity and Related Topics*, World Scientific (1985).
- [191] Gibbons, G.: Thoughts on Tachyon Cosmology, *Class. Quantum Grav.* **20**, S321–S346 (2003).
- [192] Gibbons, G. W., et al.: *Nucl. Phys. B* **416**, 850 (1994).
- [193] Gibbons, G. W., Horowitz, G. T. and Townsend, P. K.: Higher-dimensional resolution of dilatonic black-hole singularities, *Class. Quantum Grav.* **12**, 297–317 (1995).
- [194] Gibbons, G. and Hull, C.: A Bogomolny bound for general relativity and solitons in N=2 supergravity, *Phys. Lett. B* **109**, 190–4 (1982).
- [195] Giddings, S. B.: The fate of four dimensions, *Phys. Rev. D* **68**, 026006 (2003).
- [196] Giddings, S. B., Kachru, S. and Polchinski, J.: Hierarchies from Fluxes in String Compactifications, *Phys. Rev. D* **66**, 106006 (2002).
- [197] Giddings, S. B. and Myers, R. C.: Spontaneous decompactification, *hep-th/0404220* (2004).
- [198] Gillard, J., Papadopoulos, G. and Tsimpis, D.: Anomaly, fluxes and $(2, 0)$ heterotic string compactifications, *JHEP* **0306**, 035 (2003).

- [199] Gliozzi, F., Olive, D. and Scherk, J.: Supersymmetry, supergravity theories and the dual spinor model, *Nucl. Phys. B* **122**, 253–90 (1977).
- [200] Goheer, N., Kleban, M. and Susskind, L.: The Trouble with de Sitter Space, *JHEP* **0307**, 056 (2003).
- [201] Golfand, Y. and Likhtman, E.: *Sov. Phys. JETP Lett.* **13**, 323 (1971).
- [202] Görlich, L., Kachru, S., Tripathy, P. and Trivedi, S.: Gaugino condensation and nonperturbative superpotentials in flux compactifications, *JHEP* **0412**, 074 (2004).
- [203] Gran, U., Gutowski, J. and Papadopoulos, G.: The spinorial geometry of supersymmetric IIB backgrounds, *Class.Quant.Grav.* **22**, 2453–92 (2005).
- [204] Gran, U., Gutowski, J. and Papadopoulos, G.: The G_2 spinorial geometry of supersymmetric IIB backgrounds, *Class. Quantum Grav.* **23**, 143–206 (2006).
- [205] Gran, U., Gutowski, J., Papadopoulos, G. and Roest, D.: Maximally supersymmetric G-backgrounds of IIB supergravity, *hep-th/0604079* (2006).
- [206] Gran, U., J., G., Papadopoulos, G. and Roest, D.: Systematics of IIB spinorial geometry, *Class. Quantum Grav.* **23**, 1617–78 (2006).
- [207] Gran, U., Papadopoulos, G. and Roest, D.: Systematics of M-theory spinorial geometry, *Class. Quantum Grav.* **22**, 2701–44 (2005).
- [208] Grana, M.: Flux compactifications and generalized geometries (RTN Winter School on Strings, Supergravity and Gauge Theories, Geneva, Switzerland, 16–20 Jan 2006)., *Class. Quantum Grav.* **23**, S883–926 (2006).
- [209] Grana, M.: Flux compactifications in string theory: A Comprehensive review, *Phys. Rep. C* **423**, 91–158 (2006).

- [210] Grana, M., Minasian, R., Petrini, M. and Tomasiello, A.: Generalized structures of $\mathcal{N} = 1$ vacua, *JHEP* **0511**, 020 (2005).
- [211] Grana, M., Minasian, R., Petrini, M. and Tomasiello, A.: A scan for new $\mathcal{N} = 1$ vacua on twisted tori, *JHEP* **0705**, 031 (2007).
- [212] Grana, M., Minasian, R., Petrini, M. and Tomasiello, A.: Supersymmetric backgrounds from generalized Calabi-Yau manifolds, *JHEP* **0408**, 046 (2004).
- [213] Green, D., Lawrence, A., McGreevy, J., Morrison, D. and Silverstein, E.: Dimensional Duality, *hep-th/07050550* (2007).
- [214] Green, M., Ooguri, H. and Schwarz, J.: Nondecoupling of Maximal Supergravity from the Superstring, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 041601 (2007).
- [215] Green, M. and Schwarz, J.: Supersymmetrical Dual String Theory, *Nucl. Phys. B* **181**, 502–30 (1981).
- [216] Green, M. and Schwarz, J.: Supersymmetrical Dual String Theory. 2. Vertices and Trees, *Nucl. Phys. B* **198**, 252–68 (1982).
- [217] Green, M. and Schwarz, J.: Supersymmetrical Dual String Theory. 3. Loops and Renormalization, *Nucl. Phys. B* **198**, 441–60 (1982).
- [218] Green, M. and Schwarz, J.: Supersymmetrical String Theories, *Phys. Lett. B* **109**, 444–8 (1982).
- [219] Green, M. and Schwarz, J.: Anomaly cancellations in supersymmetric D=10 gauge theory and superstring theory, *Phys. Lett. B* **149**, 117–122 (1984).
- [220] Green, M. and Schwarz, J.: Superstring field theory, *Nucl. Phys. B* **243**, 475–536 (1984).
- [221] Green, M. and Schwarz, J.: Infinity cancellations in SO(32) superstring theory, *Phys. Lett. B* **151**, 21–25 (1985).

- [222] Green, M., Schwarz, J. and Brink, L.: $N = 4$ Yang-Mills and $N = 8$ Supergravity as Limits of String Theories, *Nucl. Phys. B* **198**, 474–92 (1982).
- [223] Green, M., Schwarz, J. and West, P.: Anomaly Free Chiral Theories in Six-Dimensions, *Nucl. Phys. B* **254**, 327–48 (1985).
- [224] Grimm, T. and Louis, J.: The effective action of $N = 1$ Calabi-Yau orientifolds, *Nucl. Phys. B* **699**, 387–426 (2004).
- [225] Grimm, T. and Louis, J.: The effective action of type IIA Calabi-Yau orientifolds, *Nucl. Phys. B* **718**, 153 (2005).
- [226] Grisaru, M. and Zanon, D.: Sigma Model Superstring Corrections To The Einstein-Hilbert Action, *Phys. Lett. B* **177**, 347–51 (1986).
- [227] Gross, D., Harvey, J., Martinec, E. and Rohm, R.: Heterotic string, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 502–505 (1985).
- [228] Gross, D., Harvey, J., Martinec, E. and Rohm, R.: Heterotic String Theory. 1. The Free Heterotic String, *Nucl. Phys. B* **256**, 253 (1985).
- [229] Gross, D. and Sloan, J.: The Quartic Effective Action for the Heterotic String, *Nucl. Phys. B* **291**, 41 (1987).
- [230] Gross, D. and Witten, E.: Superstring Modifications of Einstein's Equations, *Nucl. Phys. B* **277**, 1–10 (1986).
- [231] Gubser, S.: On non-uniform black branes, *Class. Quantum Grav.* **19**, 4825–44 (2002).
- [232] Gukov, S., Vafa, C. and Witten, E.: CFT's From Calabi-Yau Fourfolds (Erratum: *ibid* B608:477-478 (2001)), *Nucl. Phys. B* **584**, 69–108 (2000).
- [233] Gunaydin, M. and Marcus, N.: The Spectrum Of The S^5 Compactification Of The Chiral $\mathcal{N} = 2$, $D = 10$ Supergravity And The Unitary Supermultiplets Of $U(2, 2|4)$, *Class. Quantum Grav.* **2**, L11–17 (1985).

- [234] Günaydin, M., Sierra, G. and Townsend, P.: Gauging the $D = 5$ Maxwell-Einstein supergravity theories: more on jordan algebra, *Nucl. Phys. B* **253**, 573 (1985).
- [235] Gurrieri, S., Louis, J., Micu, A. and Waldram, D.: Mirror symmetry in generalized Calabi-Yau compactifications, *Nucl. Phys. B* **654**, 61–113 (2003).
- [236] Gürsey, F., Ramond, P. and Sikivie, P.: A Universal Gauge Theory Model Based On E_6 , *Phys. Lett. B* **60**, 177 (1976).
- [237] Gürsey, F. and Sikivie, P.: $E(7)$ As A Universal Gauge Group, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 775 (1976).
- [238] Gustavsson, A.: Selfdual strings and loop space Nahm equations., *JHEP* **0804**, 083 (2008).
- [239] Gustavsson, A.: Algebraic structures on parallel M2-branes., *Nucl. Phys. B* **811**, 66 (2009).
- [240] Gutowski, J., Martelli, D. and Reall, H.: All supersymmetric solutions of minimal supergravity in six dimensions, *Class. Quantum Grav.* **20**, 5049–78 (2003).
- [241] Gutowski, J. and Reall, H.: Supersymmetric AdS5 black holes, *JHEP* **0402**, 006 (2004).
- [242] Haag, R., Lopuszanski, J. and Sohnius, M.: *Nucl. Phys. B* **88**, 257 (1975).
- [243] Hackett-Jones, E. and Smith, D.: Type IIB Killing spinors and calibrations, *JHEP* **0411**, 029 (2004).
- [244] Hellerman, S., Kaloper, N. and Susskind, L.: String Theory and Quintessence, *JHEP* **0106**, 003 (2001).
- [245] Hertog, T. and Horowitz, G.: Towards a Big Crunch Dual, *JHEP* **0407**, 073 (2004).
- [246] Hitchin, N.: Generalized Calabi-Yau manifolds, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **54**, 281–308 (2003).

- [247] Horowitz, G. T. and Maeda, K.: Fate of the black string instability, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 131301:1–4 (2001).
- [248] Horowitz, G. T. and Maeda, K.: Inhomogenous near-extremal black branes, *Phys. Rev. D* **65**, 104028:1–9 (2002).
- [249] Hosomichi, K., Lee, K., Lee, S., Lee, S. and Park, J.: N=4 Superconformal Chern-Simons Theories with Hyper and Twisted Hyper Multiplets, *JHEP* **0807**, 091 (2008).
- [250] Hosomichi, K., Lee, K., Lee, S., Lee, S. and Park, J.: N=5,6 Superconformal Chern-Simons Theories and M2-branes on Orbifolds, *JHEP* **0809**, 002 (2008).
- [251] Horava, P. and Witten, E.: Eleven-dimensional supergravity on a manifold with boundry, *Nucl. Phys. B* **475**, 94 (1996).
- [252] Horava, P. and Witten, E.: Heterotic and type I string dynamics from eleven dimensions, *Nucl. Phys. B* **460**, 506–524 (1996).
- [253] Hsu, J. and Kallosh, R.: Volume Stabilization and the Origin of the Inflaton Shift Symmetry in String Theory, *JHEP* **0404**, 042 (2004).
- [254] Hsu, J., Kallosh, R. and Prokushkin, S.: On Brane Inflation With Volume Stabilization, *JCAP* **0312**, 009 (2003).
- [255] Hull, C.: Exact pp-Wave Solutions of 11-Dimensional Supergravity, *Phys. Lett. B* **139**, 39 (1984).
- [256] Hull, C.: More Gaugings Of N=8 Supergravity., *Phys. Lett. B* **148**, 297–300 (1984).
- [257] Hull, C.: Anomalies, Ambiguities And Superstrings, *Phys. Lett. B* **167**, 51–5 (1986).
- [258] Hull, C.: Compactifications Of The Heterotic Superstring, *Phys. Lett. B* **178**, 357 (1986).
- [259] Hull, C.: New Gauged $N = 8, D = 4$ Supergravities, *Class. Quantum Grav.* **20**, 5407 (2003).

- [260] Hull, C. and Townsend, P.: THE TWO LOOP β -FUNCTION FOR σ -MODELS WITH TORSION, *Phys. Lett. B* **191**, 115 (1987).
- [261] Hull, C. and Warner, N.: The Potentials Of The Gauged N=8 Supergravity Theories., *Nucl. Phys. B* **253**, 675 (1985).
- [262] Huq, M. and Namazie, M.: Kaluza-Klein supergravity in ten dimensions, *Class. Quantum Grav.* **2**, 293–307 (1985).
- [263] Ibanez, L., Marchesano, F. and Rabadan, R.: Getting just the standard model at intersecting branes., *JHEP* **0111**, 002 (2001).
- [264] Ibanez, L., Nilles, H. and Quevedo, F.: Orbifolds and Wilson lines, *Phys. Lett. B* **187**, 25–32 (1987).
- [265] Iliopoulos, J. and Zumino, B.: Broken supergauge symmetry and renormalization, *Nucl. Phys. B* **76**, 310 (1974).
- [266] Jack, I., Jones, D. and Mohammedi, N.: THE FOUR LOOP METRIC β -FUNCTION FOR THE BOSONIC σ -MODEL, *Phys. Lett. B* **220**, 1715 (1989).
- [267] Joyce, D.: *Compact Manifolds with Special Holonomy*, Oxford Univ. Press (2000).
- [268] Julia, B. and Zee, A.: Poles with both magnetic and electric charges in non-Abelian gauge theory , *Phys. Rev. D* **11**, 2227–2232 (1975).
- [269] Kac, V.: Classification of simple Lie superalgebras, *Functional Analysis and Applications* **9**, 263–5 (1975).
- [270] Kac, V.: Lie superalgebras, *Adv. Math.* **26**, 8–96 (1977).
- [271] Kachru, S., Kallosh, R., Linde, A., Maldacena, J., McAllister, L. and Trivedi, S. P.: Towards Inflation in String Theory, *JCAP* **0310**, 013 (2003).
- [272] Kachru, S., Kallosh, R., Linde, A. and Trivedi, S.: de Sitter Vacua in String Theory, *Phys. Rev. D* **68**, 046005 (2003).

- [273] Kachru, S., Pearson, J. and Verlinde, H.: Brane/Flux Annihilation and the String Dual of a Non-Supersymmetric Field Theory, *JHEP* **0206**, 021 (2002).
- [274] Kachru, S., Schulz, M. and Trivedi, S.: Moduli stabilization from fluxes in a simple IIB orientifold, *JHEP* **0310**, 007 (2003).
- [275] Kallosh, R., et al.: *Phys. Rev. D* **46**, 5278 (1992).
- [276] Kawai, H., Lewellen, D. and Tye, S.-H.: Construction of four-dimensional fermionic string models, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1832–1835 (1986).
- [277] Kawai, H., Lewellen, D. and Tye, S.-H.: Construction of fermionic string models in four dimensions, *Nucl. Phys. B* **288**, 1–76 (1987).
- [278] Kawasaki, M., Yamaguchi, M. and Yanagida, T.: Natural chaotic inflation in supergravity, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3572 (2000).
- [279] Kecskemeti, S., Maiden, J., Shiu, G. and Underwood, B.: DBI Inflation in the Tip Region of a Warped Throat, *JHEP* **0609**, 076 (2006).
- [280] Kikuchi, Y., Marzban, C. and Ng, Y.: Heterotic String Modifications Of Einstein's And Yang-Mills' Actions, *Phys. Lett. B* **176**, 57–60 (1986).
- [281] Kim, H., Romans, L. and Nieuwenhuizen, van P.: The Mass Spectrum of Chiral $N = 2$ $D = 10$ Supergravity on S^5 , *Phys. Rev. D* **23**, 389 (1985).
- [282] Klebanov, I. R. and Strassler, M. J.: Supergravity and a Confining Gauge Theory: Duality Cascades and χ SB-Resolution of Naked Singularities, *JHEP* **0008**, 052 (2000).
- [283] Klinkhamer, F. R. and Manton, N. S.: A saddle point solution in the Weinberg-Salam theory, *Phys. Rev. D* **30**, 2212 (1984).
- [284] Kodama, H. and Uzawa, K.: Comments on the four-dimensional effective theory for warped compactification, *JHEP* **0603**, 053 (2006).

- [285] Koerber, P. and Martucci, L.: From ten to four and back again: How to generalize the geometry, *JHEP* **0708**, 059 (2007).
- [286] Kowalski-Glikman, J.: A nontrivial vacuum state in D=10, N=1 supergravity, *Phys.Lett.B* **139**, 159–160 (1984).
- [287] Koyama, F., Tachikawa, Y. and Watari, T.: Supergravity Analysis of Hybrid Inflation Model from D3–D7 System, *Phys. Rev. D* **69**, 106001 (2004).
- [288] Lambert, N. and Tong, D.: Membranes on an Orbifold., *Phys. Rev. Lett.* **101**, 041602 (2008).
- [289] Le Diffon, A., Samtleben, H. and Trigiante, M.: N=8 Supergravity with Local Scaling Symmetry., *JHEP* **1104**, 079 (2011).
- [290] Lü, H., Pope, C. and Stelle, K.: Weyl Group Invariance and p-brane Multiplets, *Phys. Lett. B* **476**, 89–117 (1996).
- [291] Lukierski, J. and Novicki, A.: Superspinors and graded Lorentz groups in three, four and five dimensions, *Fortschr. Phys.* **30**, 75–98 (1982).
- [292] Lukierski, J. and Novicki, A.: All possible de Sitter superalgebras and the presence of ghosts, *Phys. Lett. B* **151**, 382–6 (1985).
- [293] Lüst, D. and Tsimpis, D.: Supersymmetric AdS₄ compactifications of IIA supergravity, *JHEP* **0502**, 027 (2005).
- [294] Maldacena, J.: The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231–252 (1998).
- [295] Maldacena, J. and Nunez, C.: Supergravity description of field theories on curved manifolds and a no go theorem, *Int. J. Mod. Phys. A* **16**, 822–855 (2001).
- [296] Manousselis, P., Prezas, N. and Zoupanos, G.: Supersymmetric compactifications of heterotic strings with fluxes and condensates, *Nucl. Phys. B* **739**, 85–105 (2006).

- [297] Martucci, L.: On moduli and effective theory of N=1 warped flux compactifications, *JHEP* **0905**, 027 (2009).
- [298] Metsaev, R. and Tseytlin, A.: Curvature Cubed Terms In String Theory Effective Actions, *Phys. Lett. B* **185**, 52–8 (1987).
- [299] Michelson, J.: A pp-Wave With 26 Supercharges, *Class. Quantum Grav.* **19**, 5935 (2002).
- [300] Michelson, J.: (Twisted) Toroidal Compactification of pp-Waves, *Phys. Rev. D* **66**, 066002 (2002).
- [301] Miyazawa, H.: *Prog. Theor. Phys.* **36**, 1266 (1966).
- [302] Moroi, T. and Murayama, H.: Axionic hot dark matter in the hadronic axion window, *Phys. Lett. B* **440**, 69–76 (1998).
- [303] Nahm, W.: Supersymmetry and their representations, *Nucl. Phys. B* **135**, 149–66 (1978).
- [304] Nahm, W., Rittenberg, V. and Scheunert, M.: *Phys. Lett. B* **61**, 383 (1976).
- [305] Nepomechie, R.: On The Low-Energy Limit Of Strings, *Phys. Rev. D* **32**, 3201 (1985).
- [306] Neveu, A. and Schwarz, J.: Factorizable dual model of pions, *Nucl. Phys. B* **31**, 86–112 (1971).
- [307] Nicolai, H. and Pilch, K.: Consistent Truncation of $d = 11$ Supergravity on $\text{AdS}^4 \times S^7$, *JHEP* **1203**, 099 (2012).
- [308] Nicolai, H., Townsend, P. and van Nieuwenhuizen, P.: Comments on 11-dimensional supergravity, *Lett. Nuovo Cimento* **30**, 315–20 (1981).
- [309] Nilles, N.-P.: *Phys. Rep. C* **110**, 1 (1984).
- [310] Nillson, B.: Simple 10-dimensional supergravity in superspace, *Nucl. Phys. B* **188**, 176–92 (1981).

- [311] Nilsson, B. and Pope, C.: Hopf fibration of eleven-dimensional supergravity, *Class. Quantum Grav.* **1**, 499–515 (1984).
- [312] Nishino, H. and Sezgin, E.: Matter and Gauge Couplings of N=2 Supergravity in Six Dimensions, *Phys. Lett. B* **144**, 187–192 (1984).
- [313] Ohta, N.: Accelerating Cosmologies from S-Branes, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 061303 (2003).
- [314] Ohta, N.: Intersection Rules for S-Branes, *Phys. Lett. B* **558**, 213–220 (2003).
- [315] Ohta, N.: A Study of Accelerating Cosmologies from Superstring/M theories, *Prog. Theor. Phys.* **110**, 269 (2003).
- [316] Ovrut, B.: Lectures on heterotic M-theory, in Gubser, S. S. and Lykken, J. D. eds., *Strings, branes and extra dimensions, TASI 2001*, 359, World Scientific (2004).
- [317] Page, D. and Pope, C.: Stability analysis of compactification of $d = 11$ supergravity with $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ symmetry, *Phys. Lett. B* **145**, 337 (1984).
- [318] Page, D. and Pope, C.: New squashed solutions of $d = 11$ supergravity, *Phys. Lett. B* **147**, 55 (1985).
- [319] Papadopoulos, G.: M2-branes, 3-Lie Algebras and Plücker relations., *JHEP* **0805**, 054 (2008).
- [320] Papadopoulos, G. and Townsend, P.: Compactification of $d = 11$ supergravity on manifolds of exceptional holonomy, *Phys. Lett. B* **357**, 300 (1995).
- [321] Park, Q.-H. and Zanon, D.: More on σ -model β functions and low-energy effective actions, *Phys. Rev. D* **35**, 4038–40 (1987).
- [322] Parker, M.: Classification of real simple Lie superalgebra of classical type, *J. Math. Phys.* **21**, 689–97 (1980).
- [323] Pati, J. and Salam, : Lepton Number as the Fourth Color, *Phys. Rev. D* **10**, 275 (1974).

- [324] Peccei, R. and Quinn, H.: CP Conservation in the Presence of Pseudoparticles, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 1440–3 (1977).
- [325] Pilch, K., van Nieuwenhuizen, P. and Sohnius, M.: de Sitter superalgebras and supergravity, *Comm. Math. Phys.* **98**, 105–17 (1985).
- [326] Pilo, L., Riotto, A. and Zaffaroni, A.: Old inflation in string theory, *JHEP* **0407**, 052 (2004).
- [327] Polchinski, J.: Dirichlet Branes and Ramond-Ramond charges, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4724–4727 (1995).
- [328] Polchinski, J., Chaudhuri, S. and Johnson, C.: Notes on D-branes, *hep-th9602052* (1996).
- [329] Polyakov, A. M.: Particle spectrum in quantum field theory, *Sov. Phys. JETP Lett.* **20**, 194 (1974).
- [330] Pomarol, A. and Quiros, M.: The Standard Model from extra dimensions, *Phys. Lett. B* **438**, 255–60 (1998).
- [331] Ramond, P.: Dual Theory for Free Fermions, *Phys. Rev. D* **3**, 2415–8 (1971).
- [332] Ramond, P.: Unified Theory Of Strong, Electromagnetic, And Weak Interactions Based On The Vector - Like Group E(7), *Nucl. Phys. B* **110**, 214 (1976).
- [333] Randall, L. and Sundrum, R.: Large mass hierarchy from a small extra dimension, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370–3 (1999).
- [334] Randall, L. and Sundrum, R.: Out of this world supersymmetry breaking, *Nucl. Phys. B* **557**, 79 (1999).
- [335] Reall, H.: Higher dimensional black holes and supersymmetry, *Phys. Rev. D* **68**, 024024 (2003).
- [336] Rohm, R.: Spontaneous Supersymmetry Breaking in Supersymmetric String Theories, *Nucl. Phys. B* **237**, 553 (1984).

- [337] Rohm, R. and Witten, E.: The antisymmetric tensor field in superstring theory, *Annals of Physics* **170**, 454 (1986).
- [338] Romans, L.: Massive $N = 2$ supergravity in ten dimensions, *Phys. Lett. B* **169**, 374–80 (1986).
- [339] Sakai, N. and Tani, Y.: *Nucl. Phys. B* **287**, 457 (1987).
- [340] Salam, A. and Sezgin, E. eds.: *Supergravities in Diverse Dimensions*, World Scientific (1989).
- [341] Salam, A. and Strathdee, J.: Supergauge transformations, *Nucl. Phys. B* **76**, 477–82 (1974).
- [342] Salam, A. and Strathdee, J.: Unitary representations of supergauge transformations, *Nucl. Phys. B* **80**, 499–505 (1974).
- [343] Salam, A. and Strathdee, J.: SU(6) and supersymmetry, *Nucl. Phys. B* **84**, 127–31 (1975).
- [344] Salam, A. and Strathdee, J.: *Ann. Phys.* **141**, 316 (1982).
- [345] Salamon, S.: Almost parallel structures, *math.DG/0107146* (2000).
- [346] Scheunert, M., Nahm, W. and Rittenberg, V.: *J. Math. Phys.* **17**, 1626 (1976).
- [347] Schwarz, J. ed.: *Superstrings: The first 15 years of superstring theory*, World Scientific (1986).
- [348] Schwarz, J. and West, P.: Symmetries and transformation rules of chiral $N = 2, d = 10$ supergravity, *Phys. Lett. B* **126**, 301–4 (1983).
- [349] Sen, A.: $(2, 0)$ supersymmetry and space-time supersymmetry in the heterotic string theory, *Nucl. Phys. B* **278**, 289308 (1986).
- [350] Sethi, S., Vafa, C. and Witten, E.: Constraints on low dimensional string compactifications, *Nucl. Phys. B* **480**, 213–24 (1996).
- [351] Shiu, G. and Underwood, B.: Observing the Geometry of Warped Compactification via Cosmic Inflation, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 051301 (2007).

- [352] Silverstein, E. and Tong, D.: Scalar Speed Limits and Cosmology: Acceleration from D-cceleration, *Phys. Rev. D* **70**, 103505 (2004).
- [353] Slansky, R.: Group Theory For Unified Model Building, *Phys. Rep. C* **79**, 1–128 (1981).
- [354] Sohnius, M. and West, P.: An alternative off-shell version of $N = 1$ supergravity, *Phys. Lett. B* **105**, 353–7 (1981).
- [355] Stelle, K. and West, P.: Tensor calculus for the vector multiplet coupled to supergravity, *Phys. Lett. B* **77**, 376–8 (1978).
- [356] Stephens, C., 't Hooft, G. and Whiting, B.: Black Hole Evaporation without Information Loss, *Class. Quantum Grav.* **11**, 621–48 (1994).
- [357] Strathdee, J.: Extended Poincaré supersymmetry, *Int. J. Mod. Phys. A* **2**, 273–300 (1987).
- [358] Strominger, A.: Superstring with torsion, *Nucl. Phys. B* **274**, 253–284 (1986).
- [359] Strominger, A.: The dS/CFT Correspondence, *JHEP* **0110**, 034 (2001).
- [360] Strominger, A. and Witten, E.: New Manifolds for Superstring Compactification, *Comm. Math. Phys.* **101**, 341–61 (1985).
- [361] Susskind, L.: The Anthropic Landscape of String Theory, *hep-th/0302219* (2003).
- [362] Susskind, L., Thorlacius, L. and Uglum, J.: The Stretched Horizon and Black Hole Complementarity, *Phys. Rev. D* **48**, 3743–61 (1993).
- [363] Hooft, 't G.: Magnetic monopoles in unified gauge theories, *Nucl. Phys. B* **79**, 276–284 (1974).
- [364] Hooft, 't G.: A planar diagram theory for strong interactions, *Nucl. Phys. B* **72**, 461–473 (1974).

- [365] Hooft, 't G.: A property of electric and magnetic flux in non-abelian theories, *Nucl. Phys. B* **153**, 141–160 (1979).
- [366] Tamm, I.: Die verallgemeinerten Kugelfunktionen und die Wellenfunktionen eines Elektrons im Felde eines Magnetpoles, *Z. Phys.* **71**, 141–150 (1931).
- [367] Tod, K.: More on supercovariantly constant spinors, *Class. Quantum Grav.* **11**, 1801–1820 (1995).
- [368] Tod, K. P.: All metrics admitting supercovariantly constant spinors, *Phys. Lett. B* **121**, 241–244 (1983).
- [369] Torii, T. and Shiromizu, T.: Cosmological constant, dilaton field and Freund-Rubin compactification, *hep-th/0210002* (2002).
- [370] Townsend, P.: Cosmological constant in supergravity, *Phys. Rev. D* **15**, 2802–4 (1977).
- [371] Townsend, P.: Four lectures on M-theory, *hep-th/9612121* (1996).
- [372] Townsend, P. and Wohlfarth, M.: Accelerating Cosmologies from Compactification, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 061302 (2003).
- [373] Tripathy, P. and Trivedi, S.: Compactification with flux on K3 and tori, *JHEP* **0303**, 028 (2003).
- [374] Tseytlin, A.: Generalised chiral null models and rotating string backgrounds, *Phys. Lett. B* **381**, 73–80 (1996).
- [375] Vafa, C.: Evidence for F-Theory, *Nucl. Phys. B* **469**, 403–418 (1996).
- [376] Villadoro, G. and Zwirner, F.: $N = 1$ effective potential from dual type-IIA D6/O6 orientifolds with general fluxes, *JHEP* **0506**, 047 (2005).
- [377] Volkov, D. and Akulov, V.: Possible universal neutrino interaction, *Sov. Phys. JETP Lett.* **16**, 438 (1972).

- [378] Warner, N.: SOME NEW EXTREMA OF THE SCALAR POTENTIAL OF GAUGED $N = 8$ SUPERGRAVITY, *Phys. Lett. B* **128**, 169 (1983).
- [379] Watamura, S.: *Phys. Lett. B* **136**, 245 (1984).
- [380] Wess, J.: Supersymmetry and internal symmetry, *Acta Phys. Austriaca* **41**, 409–14 (1975).
- [381] Wess, J. and Zumino, B.: A Lagrangian model invariant under supergauge transformation, *Phys. Lett. B* **49**, 52–4 (1974).
- [382] Wess, J. and Zumino, B.: Supergauge transformations in four dimensions, *Nucl. Phys. B* **70**, 39–50 (1974).
- [383] Wess, J. and Zumino, B.: Superspace formulation of supergravity, *Phys. Lett. B* **66**, 361–4 (1977).
- [384] West, P.: The supersymmetric effective potential, *Nucl. Phys. B* **106**, 219–27 (1976).
- [385] Wilczek, F.: The Future of Particle Physics, in K. Kikkawa, , H. Kunitomo, and H. Ohtsubo, eds., *Physics in the 21st Century*, 71–96, Singapore (1997), World Scientific.
- [386] Wiseman, T.: Static Axisymmetric Vacuum Solutions and Non-Uniform Black Strings, *Class. Quantum Grav.* **20**, 1137–1176 (2003).
- [387] Witten, E.: Search for a realistic Kaluza-Klein theory, *Nucl. Phys. B* **186**, 412–428 (1981).
- [388] Witten, E.: Symmetry breaking patterns in superstring models, *Nucl. Phys. B* **258**, 75–100 (1985).
- [389] Witten, E.: New issues in manifolds of $su(3)$ holonomy, *Nucl. Phys. B* **268**, 79 (1986).
- [390] Witten, E.: Nonperturbative Superpotentials in String Theory, *Nucl. Phys. B* **474**, 343–360 (1996).

- [391] Witten, E.: Strong coupling expansion of Calabi-Yau compactification, *Nucl. Phys. B* **471**, 135 (1996).
- [392] Witten, E.: Quantum gravity in de Sitter space, *hep-th/0106109* (2001).
- [393] Wu, T. T. and Yang, C. N.: Some solutions of the classical isotropic gauge field equations, in Mark H, F. S. ed., *Properties of Matter Under Unusual Conditions*, 344–354, Wiley-Interscience (1969).
- [394] Wu, T. T. and Yang, C. N.: Dirac monopole without strings: monopole harmonics, *Nucl. Phys. B* **107**, 365 (1976).
- [395] Yamaguchi, M.: Natural double inflation in supergravity, *Phys. Rev. D* **64**, 063502 (2001).
- [396] Yamaguchi, M. and Yokoyama, J.: New inflation in supergravity with a chaotic initial condition, *Phys. Rev. D* **63**, 043506 (2001).
- [397] Yamaguchi, M. and Yokoyama, J.: Chaotic hybrid new inflation in supergravity with a running spectral index, *Phys. Rev. D* **68**, 123520 (2003).
- [398] Yang, Y.: *Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis*, Springer (2014).
- [399] Zumino, B.: Supersymmetry and the vacuum, *Nucl. Phys. B* **89**, 535–46 (1975).
- [400] Zwiebach, B.: Curvature Squared Terms and String Theories, *Phys. Lett. B* **156**, 315–7 (1985).