代数

Last update: 2023 年 2 月 3 日

目 次

1 加群

1.1 基本事項

【**定義 1.1** (基本定義)】

1) 加法に関する可換群を**加群** (module) という．加群 M の部分群 N を**部分加群** (submodule) という．また，加群 M とその部分加群 N に対して，剰余集合 M/N は加群となり，**剰余加群** (residue class modele, factor module) という．

2) 集合 A の加群 M に対する左作用 $A \times M \ni (a, x) \mapsto ax \in M$ が定義され，任意の $a \in A$, $x, y \in M$ に対して，i) $a(x + y) = ax + ay$ が成り立つとき，A を M の**作用域** (operator domain), M を**作用域 A をもつ加群**ないし **A 上の加群** (module over A)，ないし **A 加群** (A-module) という．

   A 加群 M の部分加群 N に対して，$x \in N, a \in A \;\; \Rightarrow \;\; ax \in N$ が成り立つとき， N を **A 部分加群** (A-submodule) という．また，A 部分加群 N に対して，剰余加群 M/N は A 加群となり，**A 剰余加群** (residue class A-module, factor A-module) という．

3) 加群 M の作用域 A が群の時には，ii) $a(bx) = (ab)x (a, b \in A, x \in M)$ および iii) A の作用が**単位的** (unitary)，すなわち，iii) A の単位元を 1 と表すとき， i$1x = x (x \in M)$ が成り立つことを要請する．

4) 作用域 A が環の時には，i), ii) に加えて，iv) $(a+b)x = ax+bx$ $(a, b \in A, x \in M)$ を要請する．さらに，A が単位元を持つときには，A の作用が単位的，すなわち条件 iii) が成り立つなら，M が**単位的** (unitary) であるという．

□

1.1.1 自由加群

【**定義 1.2**】 M を環 R 上の加群とする．

1. $x \in M$ について，任意の $a \in R$ に対して $a \neq 0$ なら $ax \neq 0$ となるとき，x を**自由元** (free element) という．また，自由元でない元を**捩れ元** (torsion element) という．

2. M の元の系 $\{x_i\}_{i\in I}$ が M を生成し，かつ線形独立であるとき，$\{x_i\}_{i\in I}$ を M の**基底** (basis) という．

3. 基底が存在する R 加群を**自由加群** (free module) という．

$\square$

【例 1.3 (自由加群)】 R を環として，有限個の直和 R^n，行列環 $M_n(R)$，多項式環 $R[X_1,\cdots,X_n]$（R は可換環）は自由 R 加群である． $\square$

【定理 1.4 (自由加群の構造)】 M を右 (左)R 自由加群，$(x_i)_{i\in I}$ をその基底とする．$R\langle I\rangle$ を I から R への写像 v で有限個の $i\in I$ を除いて $v(i)=0$ となるものの全体とすると，$R\langle I\rangle$ は（両側）R 自由加群となる．さらに，対応

$$f: R\langle I\rangle \to M; \quad v \to \sum_i x_i v(i) \ \left(\sum_i v(i) x_i\right)$$

は，右 (左)R 加群としての同型射を与える． $\square$

1.1.2 移入的加群

【定義 1.5 (移入的加群)】 R 加群 Q が**移入的**あるいは**単射的** (injective) であるとは，任意の単射準同型 $u: M' \to M$ と準同型 $h': M' \to Q$ に対して，$h\circ u = h'$ となる準同型 $h: M \to Q$ が存在することである．

$\square$

【定理 1.6 (移入的加群の特徴付け)】 R 加群 Q について，次の２条件は同値である．

i) Q は移入的である．

ii) 任意の単射 $u: Q\to M$ は左分裂する，すなわち $u(Q)$ は M の直和因子となる．

$\square$

【例 1.7 (移入的加群)】

1. 整域 R の分数体 K は，R 加群とみて移入的である．
2. R が主イデアル整域のとき，K をその分数体として，剰余加群 K/R は移入的である．
3. 有理数の加法群 $\mathbb{Q}$，1 の累乗根全体の群 W $(\cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は，$\mathbb{Z}$ 加群として移入的である．

$\square$

1.1.3 射影的加群

【定義 1.8 (射影的加群)】 R 加群 P が**射影的** (projective) あるいは**全射的**であるとは，任意の全射準同型 $v : N \to N'$ と準同型 $h' : P \to N'$ に対して，$v \circ h = h'$ となる準同型 $h : P \to N$ が存在することである．

$\square$

【定理 1.9 (射影的加群の特徴付け)】 環 R 上の加群 P について，次の 3 条件は互いに同値である．

i) P は射影的である．

ii) 任意の全射 $v : N \to P$ は右分裂する，すなわち Ker (v) は N の直和因子となる．

iii) P は自由加群の直和因子に同型である．

$\square$

【例 1.10 (射影的加群)】

1. 主イデアル整域上の射影的加群は，すべて自由加群である．
2. Dedekind 環のイデアルはすべて射影的加群である．ただし，それらのうち単項でないものは自由加群でない．

□

1.1.4 ネターおよびアルティン加群

【命題 1.11 (極大条件，昇鎖条件，基底率)】 A-加群 M について，次の 3 つの条件は同等である：

a) (**極大条件**) M の任意の A 部分加群の集合が極大元をもつ．

b) (**昇鎖条件**) $M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n \subset \cdots$ を M の A-部分加群の列とするとき，N が存在して，$M_N = M_{N+1} = \cdots$ となる．

c) (**基底率**) M の任意の A-部分加群は有限生成である．

□

【定義 1.12 (Nöther 加群)】 A 加群 M が極大条件を満たす，すなわち，任意の A 部分加群の集合が極大元をもつとき，M を**ネター加群** (Nöther module) という． □

【命題 1.13 (Nöther 加群の性質)】

i) ネター的 A-加群の A-部分加群，剰余加群はネター的である．

ii) 有限個のネター A-加群の直和はネター加群である．

iii) A-加群の短完全系列

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f_1} M \xrightarrow{f_2} M'' \longrightarrow 0$$

において，M がネター的であるための必要十分条件は，M' と M'' が共にネター的であることである．

[< 服部昭「現代代数学」（朝倉書店，1968）] □

【命題 1.14 (極小条件，降鎖条件)】 A-加群 M について，次の 3 つの条件は同等である：

a) (極小条件) M の任意の A 部分加群の集合が極小元をもつ．

b) (降鎖条件) $M_1 \subset M_2 \supset \cdots \supset M_n \supset \cdots$ を M の A-部分加群の列とするとき，N が存在して，$M_N = M_{N+1} = \cdots$ となる．

□

【定義 1.15 (Artin 加群)】 A 加群 M が極小条件を満たす，すなわち，任意の A 部分加群の集合が極小元をもつとき，M を**アルティン加群** (Artin module) という． □

【命題 1.16 (Artin 加群の性質)】

i) アルティン的 A-加群の A-部分加群，剰余加群はアルティン的である．

ii) 有限個のアルティン A-加群の直和はアルティン加群である．

iii) A-加群の短完全系列

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f_1} M \xrightarrow{f_2} M'' \longrightarrow 0$$

において，M がアルティン的であるための必要十分条件は，M' と M'' が共にアルティン的であることである．

[< 服部昭「現代代数学」（朝倉書店，1968）] □

【定義 1.17 (Nöther 環と Artin 環)】 環 R が左（右）R-加群としてネター的およびアルティン的であるとき，R をそれぞれ，左（右）メター環，左（右）アルティン環という． □

1.2 直既約加群

【定義 1.18 (直既約群)】 A-群 M が非自明な A-部分群への直積分解 $M = M_1 \times M_2 (M_1, M_2 \neq \{e\})$ を持たない時，M は**直既約**であるという．

□

【定理 1.19 (直既約分解)】 降鎖条件ないし昇鎖条件を満たす A-群 M は，有限個の直既約 A-群の直積として表される．
[< 岩波数学事典 v4; 降鎖条件を満たす加群の場合の証明については，服部昭「現代代数学」（朝倉，1968）] □

【定理 1.20 (Krull-Remak-Schimidt の定理)】 （作用域をもつ）群 G が降鎖条件ないし昇鎖条件をみたすとする．G が 2 つの直既約部分群への直積分解

$$G = G_1 \times \cdots \times G_m = H_1 \times \cdots \times H_n$$

を持つとすると，$n = m$ で，適当な $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して，

$$\begin{aligned} &G_{\sigma(i)} \cong H_i \ (i = 1, \cdots, n), \\ &G = G_{\sigma(1)} \times \cdots \times G_{\sigma(j)} \times H_{j+1} \times \cdots \times H_n \quad (j = 0, \cdots, n) \end{aligned}$$

が成り立つ．
[< 岩波数学事典 v4; 両鎖条件を満たす加群の場合の証明については，服部昭「現代代数学」（朝倉，1968）] □

1.3 半単純加群

【定義 1.21 (単純加群)】 集合 A 上の加群 M は，$M \neq 0$ で真の部分加群を持たないとき，**単純**ないし**既約**と呼ぶ． □

【定理 1.22 (単純加群の同型類)】 環 R の極大左イデアルの集合に次の同値関係 $\sim$ を入れる：

$$L \sim L' \ \Leftrightarrow \ R/L \cong R/L'(\text{左 R 加群として}).$$

このとき，次の 1 対 1 対応がある：

$$\text{単純左 } R \text{ 加群の同型類 } [M] \ \Leftrightarrow \ R \text{ の極大左イデアルの同値類 } [L].$$

ただし，単純左 R 加群 M としては，$RM = 0$ となるものを除く．[< 岩堀長慶「対称群と一般線型群の表現論」（岩波書店，1978)] □

目次へ

【証明】

【定理 1.23 (Schur の補題)】

i) M, N を単純 A 加群とする．このとき，$f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ はゼロ準同型または同型である．

ii) M を単純 A 加群とすると，$D = \mathrm{End}_A(M)$ は斜体で，M は D 上の線形空間となる．特に，A が可換環のとき，準同型単射 $A \to D$ が存在し，A の M への表現は D の表現へと一意的に拡張される．

iii) K を代数的閉体，A を K 代数とする．単純 A 加群 V が K 上有限次元ならば，$\mathrm{End}_A(V) = K\mathrm{id}_V$.

[< 岩波数学事典 ver.4] □

【定義 1.24 (半単純加群)】 R 加群 M が単純加群の直和として表されるとき，**半単純加群**という．さらに，単純加群 P と同型な単純加群の直和となる半単純加群は P **型等型加群**という．また，加群 M に含まれる最大な P 等型部分加群（必ず存在する）を M **の** P **等型成分**という． □

【定義 1.25 (正則加群，半単純環)】 環 R を左 R 加群と見なしたものを R **上の正則加群**という．さらに，正則加群が半単純となるとき，R を**半単純環**という．特に，正則加群が等型加群となるとき，R を**等型半単純環**という． □

【定理 1.26 (完全行列環)】 体 K 上の線形空間 V に対して，$R = \mathrm{End}_K(V)$ とおく．

i) V は左 R 加群として忠実かつ単純である．

ii) V が有限次元のとき，R は等型半単純環かつ Artin 単純環である．

□

【定理 1.27 (半単純加群の特徴づけ)】 A 加群 M に対して，次の 3 つの条件は同値である：

i) M は半単純.

ii) M は単純加群の系の和である.

目次へ

iii) M の任意の部分加群は直和因子である．

[< 岩波数学事典 ver. 4; 服部昭「現代代数学」(朝倉,1968); 岩堀長慶「対称群と一般線型群の表現論」(岩波，1978)] □

【証明】

【定理 1.28 (半単純加群の性質)】 半単純加群について次が成り立つ．

i) A 加群 M が単純部分加群 $N_i (i \in I)$ の和であれば，M の任意の単純部分加群は N_i のいずれかに同型である．

ii) 半単純加群の部分加群，商加群は半単純である．

iii) 半単純部分加群の和は半単純である．

□

【定義 1.29 (加群のトレース)**】** R 加群 M と P に対して，M の部分加群

$$M_P := \sum \{\mathrm{Im}\, h \mid h \in \mathrm{Hom}_R(P, M)\}$$

を，M における P の**トレース**と呼ぶ．特に，$M = M_P$ となるとき，P は M の**生成加群**という．さらに，P が任意の R 加群の生成加群となるとき，P を単に生成加群という． □

【定理 1.30】 P を単純 R 加群，M を任意の R 加群とするとき，

i) M の部分加群 N について，$N_P = M_P \cap N$.

ii) M の直和分解 $M = N + N'$ に対して，$M_P = N_P + N'_P$.

□

【定理 1.31】 P を単純 R 加群とするとき，R 加群 M における P のトレース M_P は最大の P 等型部分加群（すなわち P 等型成分）であり，P に同型なすべての部分加群の和である．また，M_P の部分加群はすべて P 等型である． □

【定理 1.32 (半単純加群の標準分解)】 R を半単純環として，その表現 (ρ, V) を

$$V = U_1 \oplus \cdots U_r$$

と既約分解し，既約部分空間の集合 $\{U_1, \cdots, U_r\}$ を，互いに R 同型な部分集合 $U_1^{(j)}, \cdots, U_{r_j}^{(j)}$ $(U_1^{(j)} \cong_R \cdots \cong_R U_{r_j}^{(j)}, j = 1. \cdots, s)$ に分割する．このとき，

$$V = W_1 \oplus \cdots W_s; \quad W_j = U_1^{(j)} \oplus \cdots \oplus U_{s_j}^{(j)}$$

は V の等型加群 W_j による直和分解を与え，等型成分 W_j は出発点の V の既約分解の取り方に依存しない．この分解は，V の**等型成分への分解**ないし**標準分解**と言われる．
[<「対称群と一般線型群の表現論」岩堀長慶 (岩波， 1978)] □

【証明】

【定理 1.33 (半単純加群の自己準同形)】 半単純 R 加群 M は等型成分の直和となる：

$$M = \sum_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda.$$

さらに，M の部分加群 N について次の 2 条件は同値である：

i) ある $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ に対して，$N = \sum_{\lambda \in \Lambda_0} M_\lambda$.

ii) 任意の $f \in \mathrm{End}_R(M)$ に対して，$f(N) \subseteq N$.

□

【証明】

1.4 半単純環

【定理 1.34 (Jacobson 根基)】 単位的環 A の部分集合 $J(A)$ について，次の 4 つの条件は互いに同値である：

i) $J(A)$ は A の極大左イデアル全体の共通部分である．

ii) $J(A)$ は A の極大右イデアル全体の共通部分である．

iii) $J(A)$ は，A のすべての既約表現の核の共通部分である．

iv) $x \in J(A)$ となるためには，任意の $a \in A$ に対して $(1 - ax)$ が逆元をもつことが必要十分．

これらの条件により決まるイデアル $J(A)$ は，**Jacobson 根基** (Jacobson radical) と呼ばれる．
[< 岩波数学事典 ver. 4．証明については，服部昭「現代代数学」（朝倉，1968)] □

【定理 1.35 (Jacobson 根基の性質)】 環 R の Jacobson 根基 $J(R)$ は，R の巾零イデアルである．R が Artin 環なら，$J(R)$ は最大の巾零イデアルである．
[< 服部昭「現代代数学」（朝倉，1968)] □

【定義 1.36 (半単純環)】 環 R 上の正則加群が半単純であるとき，R を半単純環という． □

【定義 1.37 (逆環)】 環 R において，積を $a \circ b = ba$ と定義して得られる環 R' を R の**逆環** (opposite ring) という． □

【定理 1.38 (単位的半単純環の特徴づけ)】 単位元をもつ環 R について，次の諸条件は互いに同値である：

(0) 左 Artin 的で，$J(R) = 0$.

(I) 左 Artin 的で，正則表現は完全可約である．

(II) 任意の R 加群が半単純である．

(III) 任意の R 加群が移入的である．

(IV) 任意の R 加群が射影的である．

(V) R 加群の任意の短完全系列は分裂する．

(VI) 有限個の左 Artin 単純環の直積に同型である．

(VI)' 左 Artin 環であり，有限個の単純環の直積に同型である．

(VII) 斜体の列 D_i と正数列 n_i が存在して，$R \cong M(n_1, D_1) \oplus \cdots \oplus M(n_r, D_r)$.

目次へ

[< 服部昭「現代代数学」(朝倉，1968); 岩波数学事典 v4] □

【証明】

【定理 1.39 (単位的半単純環の性質)】 単位元を持つ半単純環は次の性質を持つ：

i) 半単純環の剰余環は半単純環である.

ii) 有限個の半単純環の直積環は半単純環である.

iii) 半単純環は Noether かつ Artin 環であり，有限個の左極小イデアルの直和である.

iv) 半単純環 R 上の任意の単純加群は，R のある左極小イデアルに同型である.

v) 半単純環上の単純加群の同型類は有限個である.

□

【定理 1.40 (単位的半単純環の構造定理)】 単位元をもつ半単純環 R の極小イデアルは有限個であり，R はそれらの直和に分解される：$R = \mathfrak{a}_1 + \cdots \mathfrak{a}_n$. 各極小イデアルは，正則加群 R の等型半単純成分で，半単純かつ単純環である．これを R の**単純成分**という．単純成分の個数は，単純 R 加群の同型類の個数と一致する. □

【定理 1.41 (単位的半単純環の中心)】

i) 単位元を持つ単純環の中心は体である.

ii) R を単位元を持つ半単純環，$\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_n$ をその単純成分とすると，中心 $C(R)$ は半単純環で，$C(\mathfrak{a}_1), \cdots, C(\mathfrak{a}_n)$ はその単純成分である.

□

【証明】

【定理 1.42 (単位単純環の特徴づけ)】 単位元を持つ環 R について，次の 5 条件は互いに同値である.

(I) 等型半単純環である．

(II) 半単純環であり，単純 R 加群の同型類は 1 つだけである．

(III) 半単純環であり，かつ単純環である．

(IV) 半単純環であり，中心は単純環（したがって体）である．

(V) Artin 単純環である．

□

【定理 1.43】 可換体 K 上の有限次元線形空間 V の線形変換の集合 G について，G 加群として V が完全可約 $\Leftrightarrow$ G の生成する $\mathrm{End}_K(V)$ の部分線形環を $K[G]$ として，$K[G]$ 加群として V が完全可約． □

【定理 1.44 (Wedderburn-Artin の定理)】 Artin 単純環 R 上の単純加群 V に対して，$D = \mathrm{End}_R(V)$，R を左極小イデアルに分解した時のイデアルの個数を n とおけば,

i) D は体である．

ii) V は D 加群として有限生成であり，$\dim_D V = n$．

iii) R 加群 V は忠実かつ再中心化性を持つ．すなわち，D の逆環を D^o とするとき，標準的に

$$R \xrightarrow{\cong} \mathrm{End}_D(V) \cong M_n(D^o).$$

逆に，体 D' 上の有限生成加群 $V \neq 0$ に対して，$R' = \mathrm{End}_{D'}(V)$，$n' = \dim_{D'} V$ とおくと，

i)' R' は Artin 単純環である．

ii)' V は R' 加群として単純であり，$l_{R'}(R') = n'$．

iii)' D' 加群 V は忠実かつ再中心化性をもつ．すなわち，標準的に

$$D' \xrightarrow{\cong} \mathrm{End}_{R'}(V).$$

[< 岩波数学事典 v4; 服部昭「現代代数学」（朝倉，1968)] □

【定理 1.45】 体 K 上の斜体 D, D'，整数 n, n' について，

$$M_n(D) \cong_K M_{n'}(D') \ (K-\mathrm{algebra}) \ \Leftrightarrow \ n = n', \quad D \cong_K D'.$$

□

【定理 1.46 (半単純環の構造定理 (Wedderburn))】 単位元をもつ半単純環 R に対して，体 $D_1, \cdots, D_h$，整数 $n_1, \cdots, n_h > 0$ が定まり，

$$R \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots M_{n_h}(D_h).$$

逆に，このような環は半単純である．特に，R が代数的閉体 K 上の有限次元半単純線形環のとき，$D_1 = \cdots = D_h = K$．
[< 岩波数学事典 v4; 服部昭「現代代数学」(朝倉，1968); 岩堀長慶「対称群と一般線型群の表現論」(岩波，1978)] □

【定理 1.47 (Burnside の定理)】 R を代数的閉体 K 上の線形環とする．R の既約表現 $\rho : R \to \mathrm{End}_K(V)$ について，

$$\rho(R) = \mathrm{End}_K(V).$$

[< 岩堀長慶「対称群と一般線型群の表現論」(岩波，1978)] □

1.5 Hom 関手と ⊗ 関手

1.5.1 ⊗ 関手

【定理 1.48 (⊗ 関手の右完全性)】 左 R 加群 P と右 R 加群 Q を固定する．

1. 右 R 加群の完全系列

$$M' \xrightarrow{u'} M \xrightarrow{u} \bar{M} \longrightarrow 0$$

は，完全系列

$$M' \otimes_R P \xrightarrow{u' \otimes \mathrm{id}_P} M \otimes_R P \xrightarrow{u \otimes \mathrm{id}_P} \bar{M} \otimes_R P \longrightarrow 0$$

を引き起こす．

2. 左 R 加群の完全系列

$$N' \xrightarrow{v'} N \xrightarrow{v} \bar{N} \longrightarrow 0$$

は，完全系列

$$Q \otimes_R N' \xrightarrow{\mathrm{id}_Q \otimes v'} Q \otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id}_Q \otimes v} Q \otimes_R \bar{N} \longrightarrow 0$$

を引き起こす．

□

【定義 1.49 (平坦加群)】 任意の右 R 加群の単準同型 $u' : M' \to M$ に対して，$u' \otimes \mathrm{id}_P : M' \otimes_R P \to M \otimes_R P$ が単準同型となるとき，左 R 加群は**平坦** (flat) であるという．平坦な右 R 加群も同様に定義される． □

【命題 1.50 (射影加群の平坦性)】 射影的加群は平坦である． □

【命題 1.51 (Noether 環上の有限生成加群の平坦性条件)】 R を Noether 環，P を有限生成 R 加群とするとき，次の 4 条件は互いに同値である．

1) $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ について，$f \in R \backslash \mathfrak{p}$ が存在して，P_f は R_f 自由加群となる．
2) $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ について，$P_\mathfrak{p}$ は $R_\mathfrak{p}$ 自由加群である．
3) P は射影的加群である．
4) P は平坦加群である．

□

1.5.2 Hom 関手

【定理 1.52 (Hom 関手の左完全性)】 左 (右) R 加群 P と 左（右）R 加群の完全系列

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u'} M \xrightarrow{u} \bar{M} \longrightarrow 0$$

は，完全系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, M') \xrightarrow{u'_*} \mathrm{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{u_*} \mathrm{Hom}_R(P, \bar{M})$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\bar{M}, P) \xrightarrow{u^*} \mathrm{Hom}_R(M, P) \xrightarrow{u'^*} \mathrm{Hom}_R(M', P)$$

を引き起こす． □

1.6 Tor と Ext

【定義 1.53 (射影分解)】 R 加群 M に対し，射影 R 加群からなる複体 (E_*, ∂) が存在して，完全系列

$$E_*(M) : \cdots \longrightarrow E_m \xrightarrow{\partial} E_{m-1} \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} E_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

が成り立つとき，$E_*(M)$ を R 加群 M の射影分解 (projective resolution) と呼ぶ．

$E_*(M)$ に対して，(E_*, ∂) のホモロジーを $H_*(E_*(M))$ と表す．このとき，$H_0(E_*(M)) \cong M$ となる． □

【命題 1.54 (射影分解の性質)】

1. 射影分解は常に存在する．
2. 加群の準同形写像 $\phi : M \to N$ と，射影分解 $E_*(M)$ および $E_*(N)$ が与えられたとき，複体写像 $\Phi : E_*(M) \to E_*(N)$ がチェーンホモトピー同値写像の自由度を除いて一意的に存在し，次の図式が可換となる：

$$\begin{array}{ccc} H_0(E_*(M)) & \xrightarrow{\Phi_*} & H_0(E_*(N)) \\ \wr\Vert & & \wr\Vert \\ M & \xrightarrow[\phi]{} & N \end{array}$$

3. 加群の短完全系列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ に対して，複体写像の系列 $0 \to E_*(M') \to E_*(M) \to E_*(M'') \to 0$ が完全となる射影分解が存在する．

□

【定義 1.55 ($\mathbf{Tor}_n^R(M, N)$)】 M, N を R 加群，$E_*(M)$ を M の射影分解とするとき，複体 $(E_k(M) \otimes_R N, \partial \otimes 1)$ のホモロジー群 $H_k(E_*(M) \otimes_R N)$ を $\mathrm{Tor}_k^R(M, N)$ と表し，M と N のねじれ積 (torsion product) と呼ぶ． □

【命題 1.56 (ねじれ積の基本的な性質)】

1. $\mathrm{Tor}_0^R(M, N) = M \otimes_R N$.
2. R が可換環のとき，$\mathrm{Tor}_n^R(M, N) \cong \mathrm{Tor}_n^R(N, M)$.

3. M が平坦な R 加群 (例えば，射影加群，自由加群) のとき，$\mathrm{Tor}_k^R(M,N) = 0 (k = 1,2,\cdots)$.

4. R が単項イデアル環のとき，$\mathrm{Tor}_k^R(M,N) = 0\ (k = 2,3,\cdots)$.

5. $\mathrm{Tor}_*^R(M,N)$ は，R 加群の圏の積 $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ から次数付き R 加群の圏への関手を与え，M,N について共変的となる.

6. $\mathrm{Tor}_k^R(\oplus_i M_i, N) \cong \oplus_i \mathrm{Tor}_k^R(M_i,N)$.

7. $\mathrm{Tor}_k^R(\lim_{\longrightarrow} M_i, N) \cong \lim_{\longrightarrow} \mathrm{Tor}_k^R(M_i,N)$.

8. R 加群の短完全系列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

に対して，長完全系列

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Tor}_k^R(M_1,N) & \xrightarrow{f_*} & \mathrm{Tor}_k^R(M_2,N) & \xrightarrow{g_*} & \mathrm{Tor}_k^R(M_3,N) & & \\
 & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Tor}_{k-1}^R(M_1,N) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^R(M_3,N) & & \\
 & \xrightarrow{\partial} & M_1\otimes_R N & \longrightarrow & M_2\otimes_R N & \longrightarrow & M_3\otimes_R N & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

が成り立つ.

□

【例 1.57 (加群のねじれ積)**】**　加群のねじれ積は次の性質を持つ.

i) K が標数 0 の体，A が有限生成加群のとき，$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K,A) = 0$.

ii) $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_d\ (m,n>0,\ d = \mathrm{GCD}(m,n))$.

iii) K が体の時，$\mathrm{Tor}_1^K(A,B) = 0$.

□

【定義 1.58 ($\mathrm{Ext}_R^k(M,N)$)**】**　M,N を R 加群，$E_*(M)$ を M の射影分解とするとき，複体 $(\mathrm{Hom}_R(E_k(M),N),\partial^*)$ のコホモロジー群 $H^k(\mathrm{Hom}_R(E_*(M),N))$ を $\mathrm{Ext}_R^k(M,N)$ と表し，M と N の**ねじれ積** (torsion product) と呼ぶ.　□

【命題 1.59 (Ext の基本的な性質)】

1. $\mathrm{Ext}^0_R(M,N)=\mathrm{Hom}_R(M,N)$.
2. M が射影 R 加群，または N が入射 R 加群なら，$\mathrm{Ext}^k_R(M,N)=0(k=1,2,\cdots)$.
3. R が単項イデアル環のとき，$\mathrm{Ext}^k_R(M,N)=0\ (k=2,3,\cdots)$.
4. $\mathrm{Ext}^*_R(M,N)$ は，R 加群の圏の積 $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ から次数付き R 加群の圏への関手を与え，N について共変的，M について反変的となる．
5. $\mathrm{Ext}^k_R(\oplus_i M_i,\prod_j N_j)\cong\prod_{i.k}\mathrm{Ext}^k_R(M_i,N_j)$.
6. R 加群の短完全系列

$$0\longrightarrow M_1\longrightarrow M_2\longrightarrow M_3\longrightarrow 0$$

$$0\longrightarrow N_1\longrightarrow N_2\longrightarrow N_3\longrightarrow 0$$

に対して，長完全系列

$$\cdots\longrightarrow\mathrm{Ext}^k_R(M_2,N)\longrightarrow\mathrm{Ext}^k_R(M_1,N)\xrightarrow{\partial}\mathrm{Ext}^{k+1}_R(M_3,N)\longrightarrow\cdots$$

$$\cdots\longrightarrow\mathrm{Ext}^k_R(M,N_2)\longrightarrow\mathrm{Ext}^k_R(M,N_3)\xrightarrow{\partial'}\mathrm{Ext}^{k+1}_R(M,N_1)\longrightarrow\cdots$$

が成り立つ．

□

1.7 定理・命題・公式の証明

定理 1.3 の証明. まず，L を R の極大左イデアルとする．このとき，$M=R/L$ が零でない部分 R-加群 $N\neq M$ を持つとすると，R-準同形 $\pi:R\to M$ による N の逆像 L' は R の左イデアルで，$L\subsetneq L'\subsetneq R$. これは，$L$ が極大左イデアルであることに反する．よって，M は単純加群．

次に，仮定より，単純 R-加群 M に対し，$Rv\neq 0$ となる $v\in M$ が存在．この v を用いて写像 $\phi:R\to M$ を $R\ni x\mapsto\phi(x)=xv\in M$ により定義する．このとき，$\phi\in\mathrm{Hom}_R(R,M)$ で，$\phi(R)$ は M の部分 R-加群となるので．M の単純性と $RM\neq 0$ より，$\phi(R)=M$，すなわち ϕ は全射となる．そこで，$L=\mathrm{Ker}\ (\phi)$ とおくと，L は R の左イデアルで，$R/L\cong_R M$. いま，$L\subset L'$ となる左イデアルが存在したとすると，$\phi(L')$ は M の R-部分加群となるので，M の単純性より，$L'=L$ または $L'=R$. これは L が極大左イデアルであることを意味する． Q.E.D.

【定理 1.3 に戻る】

定理 1.3 の証明. i) $\Leftrightarrow$ ii): i) $\Rightarrow$ ii) は明らか．いま，A-加群 M が単純部分加群系 M_i を用いて，$M = \sum_{i \in J} M_i$ と表されたとすると，$i \neq j \in J$ に対して，$M_i \cap M_j$ は M_i, M_j の A-部分加群なので，M_i の単純性より，$M_I = M_j$ または $M_i \cap M_J = 0$．よって，$\{M_i; i \in I\}$ の異なる要素のみの部分集合を $\{M_j; j \in J \subset I\}$ とすると，$M = \sum_{j \in J} M_j$ は M の単純部分加群による直和分解を与える．よって，ii) $\Rightarrow$ i) が成り立つ．

i) $\Rightarrow$ iii): A-加群 M が $M = \oplus_{i \in I} M_i$ と部分単純加群の直和で表されるとする．このとき，M の部分加群 N に対して，I の部分集合の族 S を

$$S = \{J \mid J \subset I, N \cap M_J = 0\}; \quad M_J \equiv \sum_{i \in J} M_i$$

により定義する．いま，S の勝手な全順序部分族 $T = \{J_\alpha; \alpha \in H\}$ に対して，$\tilde{J} = \cup_{\alpha \in H} J_\alpha$ とおく．$x \in M_{\tilde{J}}$ とすると，x は有限個の M_i の元の直和なので，$x = M_{i_1} + \cdots + M_{i_n}$ で，$i_1, \cdots, i_n \in J_\alpha$ となる $\alpha \in H$ が存在．すなわち，$x \in M_{J_\alpha}$．よって，$x \notin N$ なので，$M_{\tilde{J}} \cap N = 0$．これは，$\tilde{J} \in S$，すなわち T が極大元をもつことを意味する．したがって，S は帰納的順序集合となり，Zorn の補題より，極大元 J^* をもち，$L = M_{J^*}$ に対して，$L \cap N$ が成り立つ．

いま，$k \notin J^*$ に対して，J^* の極大性より，$(L + M_k) \cap N \neq 0$ となるが，これは，$(L + N) \cap M_k \neq 0$ を意味する．ところが，M_k は単純なので，これより $M_k \subset L + N$．よって，$L + N = M$ となるので，iii) が成り立つ．また，同時に，これは $N = \oplus_{i \in J - J^*} M_i$ を意味するので，半単純加群の部分加群は再び半単純となることが分かる．

iii) $\Rightarrow$ i): まず，M に対して iii) が成り立つとき，その部分加群 N を勝手にとる．いま，その部分加群を P とすると，$M = P \oplus P'$ となる部分加群 P' が存在するが，これは $P'' = P' \cap N$ とすると，$N = P \oplus P''$ を意味するので，N に対しても iii) が成り立つ．つぎに，$N \neq 0$ として，$x \neq 0 \in N$ に対して，x を含まない N の部分加群の中で最大のものを N_1 とすると，$N = N_1 \oplus N_2$ となる．いま，$N_2 = N_2' \oplus N_2''$ と部分加群の直和に分解されたとすると，N_1 の極大性より，$N_1 + N_2'$．$N_1 + N_2''$ のいずれも x を含むが，$N_1 + N_2' \cap N_1 + N_2'' = N_1$ なので，矛盾．よって，N_2 は単純加群となる．これは，iii) を満たす加群が常に単純部分加群を含むことを意味する．

そこで，M に含まれる単純部分加群を M_i $(I \in I)$ として，I の部分集合 J のうち，$M_J \equiv \sum_{j\in J} M_j = \oplus_{j\in J} M_j$ となるものの全体を S とする．このとき，S は帰納的順序集合となり，Zorn の補題より，極大元 $J^* \in S$ をもつ．このとき，$M_{J^*} \subsetneq M$ とすると，$M = M_{J^*} \oplus N$ となるが，N はある単純部分加群 $M_k(k \neq J^*)$ を含み，J^* の極大性と矛盾する．よって，$M = M_{J^*}$ となり，i) が成り立つ．

Q.E.D.

【定理 1.3 に戻る】

定理 1.3 の証明.　V の別の既約分解を $V = U_1' \oplus \cdots \oplus U_t$，対応する等型成分への分解を $V = W_1' \oplus \cdots \oplus W_u'$ とする．いま，W_1 と W_1' に含まれる既約成分が同型として，$U_1 \subset W_1$ とする．このとき，V の既約成分 U_i, U_j' への標準射影をそれぞれ π_i, π_j' とすると，Schur の補題より，$U_j' \cap W_1' = 0$ のとき，$\pi_j'(U_i) = 0$ となる．よって，$U_i \subset W_1'$，したがって，$W_1 \subset W_1'$. 同様にして，$W_1' \subset W_1$ なので，結局 $W_1 = W_1'$. Q.E.D.

【定理 1.3 に戻る】

定理 1.3 の証明.　部分加群 N は再び半単純なので，標準分解をもつ．また，N は直和因子 L をもち，L も標準分解をもつ．これらを合わせると，M の標準分解として，

$$
\begin{aligned}
M &= \oplus_i M_i : \quad M_i = \oplus_\alpha U_{i\alpha}, \\
N &= \oplus_i M_i' : \quad M_i' = \oplus_{\alpha\in S_i} U_{i\alpha} \subset M_i
\end{aligned}
$$

となるものが選べる．

まず，$f \in \mathrm{Hom}_R(M)$ に対して，Schur の補題より，$\pi_{j\beta} f(U_{i\alpha}) \neq 0$ なら $i = j$ となるので，$f(M_j) \subset M_j$. これは，i) $\Rightarrow$ ii) を意味する．

次に，i) が成り立たないとすると，ある i に対し，$M_i' \subsetneq M_i, M_i' \neq 0$. このとき，$U_{i\alpha} \subset M_i', U_{i\beta} \cap M_i' = 0$ となる 2 つの既約成分 $U_{i\alpha}, U_{i\beta}$ が存在する．すると，これら 2 成分を入れ替え，他の既約成分では恒等写像となる $f \in \mathrm{Hom}_R(M)$ が存在する．この準同形写像に対しては $f(N)$ は N に含まれないので ii) が成り立たない．したがって，ii) $\Rightarrow$ i) が成立． Q.E.D.

【定理 1.3 に戻る】

定理 1.4 の証明. (VII) $\Rightarrow$ (VI) $\Leftrightarrow$ (VI'): まず，$M(n, D)$ は単純 Artin 環なので，(VII) $\Rightarrow$ (VI) は明らか．次に，$R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$（直積，$R_i$ は単純環）とする．このとき，R の単位元は $1 = e_1 \oplus \cdots \oplus e_n$ と直和分解される．いま，R の任意の左イデアル L に対して，$L_i = L \cap R_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ とおくと，任意の $x \in L$ に対して $x = e_1 x \oplus \cdots \oplus e_n x$ となるが，R_i は R の両側イデアルなので，$e_i x \in L \cap R_i$ となる．よって，$L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$.

このことを用いると，(VI) が成り立つとき，R の任意の左イデアルの降鎖列 $M_1 \supset M_2 \supset \cdots$ に対して，すべての降鎖列 $M_1 \cap R_i \supset \cdots M_j \cap R_i \supset \cdots$ は十分大きな j に対して一定となるので，M_j に対しても降鎖条件が成り立つ．すなわち (VI') が成り立つ．各 R_i に含まれる降鎖列は R の降鎖列と見なされるので，逆 (VI') $\Rightarrow$ (VI) が成り立つことは明らか．

(VI) $\Rightarrow$ (0): $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$（直積，$R_i$ は左アルティン的単純環）とする．このとき，R の人の左イデアル L は $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n (L_i = L \cap R)$ と表されるので，$J(R) = \oplus_{i=1}^n J(R_i)$. 単純環に対しては $J(R_i) = 0$ なので，$J(R) = 0$ となり，(0) が成立．

(0) $\Rightarrow$ (I): R の左極大イデアル全体に対して $\cap_\lambda L_\lambda = 0$ となるが，R は左アルティン的なので，左イデアルの減少列 $\lambda_1 \supset \lambda_1 \cap \lambda_1 \supset \cdots$ は有限なところでゼロとなる．すなわち，有限個の左極大イデアル L_i が存在して，$\cap_{i=1}^m L_i = 0$. これより，単射 $j : R \to M \equiv \oplus_{i=1}^m R/L_i$ が存在．ところが，M は明らかに半単純 R-加群なので，その部分加群 $R \cong j(R)$ も半単純．よって，(I) が成り立つ．

(I) $\Leftrightarrow$ (II): M を任意の R 加群とすると，M の部分集合 $B = \{x_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ で，B が M を生成するものが存在．いま，u_λ を自由元として，自由加群

$$A = \left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda u_\lambda \,\middle|\, a_\lambda \in R \right\} \cong R^\Lambda$$

を導入すると，全射 R 準同形

$$\pi : A \ni u_\lambda \mapsto x_\lambda \in M$$

が存在する．R が R 加群として半単純とすると，その直和 A も半単純，さらに A の R 準同形像 $\pi(A) = M$ も半単純となる．よって，(I) $\Rightarrow$ (II) が成り立つ．(II) $\Rightarrow$ (!) は自明．

(II) $\Leftrightarrow$ (V): R 加群が半単純であることと，その任意の部分加群が直和因子であることが同等，さらにこの性質は (V) と同等．

(II) $\Leftrightarrow$ (III): (II) が成り立てば，入射 $j : N \to M$ において，N の像は常に M の直和因子となるので，任意の N は入射的で (III) が成り立つ．逆に，(III) が成り立つとき，M の任意の部分加群 N に対して，入射 $j : N \to M$ は左分裂するので，N は M の直和因子となる．よって，(II) が成立．

(II) $\Leftrightarrow$ (IV): (II) が成り立てば，全射 $\pi : M \to N$ において，$M = L \oplus \mathrm{Ker}\,(\pi)$ で $j : L \to N$ は同型となるので，この全射は分裂し，(IV) が成り立つ．逆に，(IV) が成り立つとき，任意の加群 M とその部分加群 N に対して，完全系列 $0 \to N \to M \to M/L \to 0$ の全射部分は右分裂し，$f : M/L \to M, \pi\circ f = \mathrm{id}_{M/L}$ となる写像 f が有り，$M = N \oplus f(M/l)$ となるので，(II) が成り立つ．

(I) $\Rightarrow$ (VII): (I) が成り立つと，次の既約分解が存在する：

$$R \cong n_1\mathfrak{l}_1 \oplus \cdots \oplus n_r\mathfrak{l}_r, \quad \mathfrak{l}_i \not\cong \mathfrak{l}_j\ (i \neq j).$$

ここで，$\mathfrak{l}_i$ は極小左 R イデアルの同型類で，一般に $n\mathfrak{l} = \oplus_{k=1}^n \mathfrak{l}^{(k)}$ $(\mathfrak{l}^{(k)} \cong \mathfrak{l})$. このとき，

$$\mathrm{End}_R(R) \cong \oplus_{i=1}^r \mathrm{End}_R(n_i\mathfrak{l}_i).$$

いま一つの因子，$\mathrm{End}_R(n\mathfrak{l})$ に着目し，R 同型写像 $\theta_k : \mathfrak{l} \to \mathfrak{l}^{(k)}$ を一つ固定する．このとき，$\pi_k : n\mathfrak{l} \to \mathfrak{l}^{(k)}$ として，$f \in \mathrm{End}_R(n\mathfrak{l})$ に対して，$\theta_j^{-1}\circ\pi_j\circ f\circ\theta_k$ は $\mathfrak{l}$ の A 自己準同形となるので，

$$f\circ\theta_k = \sum_j \theta_j\phi_{jk}; \quad \phi_{jk} \in \mathrm{End}_R(\mathfrak{l})$$

このとき，$\Phi = (\phi_{jk}; j, k = 1, \cdots, n) \in M(D)$ $(D = \mathrm{End}_R(\mathfrak{l}))$ となり，Schur の補題より D は斜体で，$f \mapsto \Phi$ は同型対応となる：

$$\mathrm{End}_R(n\mathfrak{l}) \cong M(n, D),\ D = \mathrm{End}_R(\mathfrak{l}).$$

もとの $\mathrm{End}_R(R)$ に戻ると，

$$\mathrm{End}_R(R) \cong \oplus_{i=1}^r M(n_i, D_i), \quad D_i = \mathrm{End}_R(\mathfrak{l}_i) \tag{1}$$

が得られるが，全行列環 $M(n, D)$ は単純 Artin 環で，対応 $f \in \mathrm{End}_R(R) \mapsto f(1) \in R$ は R と $\mathrm{End}_R(R)$ の逆同型を与えるので，(VII) が成り立つ．

Q.E.D.

【定理 1.4 に戻る】

定理 1.4 の証明.

i) 中心 $C(R)$ は明らかに R の部分環なので，そのゼロ以外の元 a が可逆であることを示せば良い．まず，$f_a(x)=ax$ とおくと，$f_a \in \mathrm{End}_R(R)$ となるが，R の左イデアル分解 $R=\oplus_i \mathfrak{l}_i$ において，$a\mathfrak{l}_i \subset \mathfrak{l}_i$ より $f_a|_{\mathfrak{l}_i}$ は $\mathrm{End}_R(\mathfrak{l}_i) \cong D$(斜体) に属する．異なる $\mathfrak{l}_i$ は R 同型で，ある i に対して $f_a|_{\mathfrak{l}_i}=0$ なら $f_a=0 \;\Rightarrow\; a=f_a(1)=0$．よって，Schur の補題より，$f_a|_{\mathfrak{l}_i}$，したがって f_a は $\mathrm{Hom}_R(R)$ で可逆．ところが，$\mathrm{Hom}_R(R)$ は R に半同型なので，a は R で可逆．

ii) 直和分解 $R=\mathfrak{a}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{a}_n$ に対応して，R の単位元は $1=e_1\oplus\cdots\oplus e_n$ と直和分解される．各 $\mathfrak{a}_i$ は R の両側イデアルであるので，

$$x=xe_1\oplus\cdots\oplus xe_n=e_1x\oplus\cdots\oplus e_nx \;\Rightarrow\; xe_i=e_ix \;(i=1,\cdots,n)$$

すなわち，$e_i \in C(R)$ で，任意の $x \in C(R)$ に対して，$xe_i \in C(\mathfrak{a}_i)$．よって，$C(R)=\oplus_i C(\mathfrak{a}_i)$．$C(\mathfrak{a}_i)$ は i) より体なので，単純成分となる．

Q.E.D.

【定理 1.4 に戻る】

2　有限群

Last update: 2015/10/18

2.1　基本事項

2.1.1　基本定義

【定義 2.1 (群の位数)】　有限群 G の元の数をその**位数** (order) といい，$|G|$ で表す．□

【定義 2.2 (共役類)】

i) 群 G の集合 S と T に対して，$x \in G$ が存在して，$T = xSx^{-1}$ となるとき，S と T は**共役** (conjugate) であるという．

ii) 群 G の元 a に対して，a と共役な元の集合を a の**共役類** (conjugate class) という．群 G は，互いに共通部分を持たない共役類の和集合となる．

□

【定義 2.3 (部分群の指数)】　群 G の部分群 H に対して，その異なる剰余類 gH の数を H の**指数** (index) とよび，$[G : H]$ で表す．□

2.1.2　基本定理

【定理 2.4 (Lagrange の定理)】　有限群 G の部分群 H に対して，$|G| = [G : H]|H|$. 特に，H の位数は，G の位数の約数である．□

【定理 2.5 (Cauchy の定理 (1844))】　p が有限群 G の位数の約数となるとき，位数 p の G の部分群が存在する．□

【定理 2.6 (Sylow の定理)】　p, m を互いに素な自然数として，有限群 G の位数が $p^n m (n \in \mathbb{N})$ と表されるとき，

1. G は位数 p^n の部分群 (**Sylow** p **部分群**) を含み，任意の 2 つの Sylow p 部分群は互いに共役である．

2. G に含まれる Sylow p 部分群の個数は，p を法として 1 に合同である．

3. 位数が p のベキとなる G の部分群は，少なくとも一つの Sylow p 部分群に含まれる．

[< 近藤武「群論」(岩波,1991)] □

【定理 **2.7** (Jordan-Hölder の定理)】　任意の有限群に対し，その組成剰余群列として単純群の集合が重複を含めて一意的に定まる．
[< 近藤武「群論」(岩波,1991)] □

2.2　有限群の例

2.2.1　p 群

【定義 **2.8** (p 群)】　位数が素数 p のベキとなる有限群を **p 群**という．
□

【定理 **2.9** (p 群とベキ零群の関係)】

1. p 群はベキ零群である．

2. 任意の有限ベキ零群は，p 群の直積で表される．

□

【定理 **2.10** (p 群の数)】　p を素数とするとき，

1. 位数が p となる群は，巡回群 $\mathbb{Z}_p$ である．

2. 位数が p^2 となる群は可換群で，2 つの異なる群がある．

3. 位数が p^3 となる群としては，3 つの可換群と 2 つの非可換群が存在する．

□

【定義 **2.11** (4 元数群)】

1. 4 元数体 $\mathbb{Q}$ の 8 個の元 $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ からなる群を **4 元数群**という．

2. 関係
$$\sigma^{2^{n-1}} = 1, \quad \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}, \quad \tau^2 = \sigma^{2^{n-2}}$$
を満たす 2 元 σ, τ から生成される位数 2^n の群を，**一般 4 元数群** (generalised quaternion group) という．

3. 関係
$$\sigma^{2^{n-1}} = \tau^2 = 1, \quad \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1+2^{n-2}}$$
を満たす 2 元 σ, τ から生成される位数 2^n の群を，**準 2 面体群** (semidihedral group) という．

□

2.2.2 対称群

【定義 2.12 (対称群)】 自然数 n に対して，集合 $S_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ から自分自身への 1 対 1 写像
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$
すなわち置換の全体が作る群を n 次の**対称群** (symmetric group) といい，$\mathfrak{S}_n$ で表す．

置換のうち，S_n の 2 個の要素のみを入れ替える変換を互換という．任意の置換 σ は互換の積で表され，その個数が偶数か奇数かは σ で決まり，偶数個の互換の積は**偶置換**，奇数個の互換の積は**奇置換**と呼ばれる．特に，S_n の偶置換の元全体が作る S_n の部分群は n 次の**交代群** (alternating group) といい，$\mathfrak{A}_n$ で表す． □

【定理 2.13 (交代群の単純性)】 交代群 $\mathfrak{A}_n$ は $n \geqslant 5$ のとき単純である．
[< 近藤武「群論」（岩波，1991)] □

【定義 2.14 (置換の型)】

1) $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が，S_n の順序付き部分集合 $T = [i_1, \cdots, i_p] (i_1 < \cdots < i_p)$ を用いて，
$$\sigma(i_k) = i_{k+1} \ (\text{mod}\ p, k = 1, \cdots, p), \quad \sigma(j) = j \ (j \notin T) \qquad (2.2.1)$$

と表されるとき，σ を**循環置換** (cyclic permutation) といい，$\sigma = (i_1 \cdots i_p)$ と表記する．

2) 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ は，S_n の分割 $\{T_l, l = 1, \cdots, s\} : S_n = \bigcup_l T_l \,(T_l \cap T_m = \emptyset, l \neq m)$ を用いて，

$$\sigma = (T_1)(T_2)\cdots(T_s) \tag{2.2.2}$$

と（順序は別にして）一意的に循環置換の積で表される．このとき，T_j の要素の数を l_j とし，T_j の順序を $l_1 \geqslant \cdots \geqslant l_s > 0$ ととなるよう並べたとき，数列 $(l_1, l_2, \cdots, l_s)$ は

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_s = n \tag{2.2.3}$$

を満たす．この数列を**σ の定める n の分割**という．

3) σ の定める n の分割 $(l_1, \cdots, l_s)$ に対して，$l_j = p$ となる要素の数を $\alpha_p = \alpha_p(\sigma)(p = 1, \cdots, n$ とする．このとき，記号

$$(1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \cdots n^{\alpha_n}) \tag{2.2.4}$$

を**σ の型**という．

□

【定理 2.15 (対称群の共役類)】 対称群 $\mathfrak{S}_n$ の共役類は，置換の型 $(1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \cdots n^{\alpha_n})$ と 1 対 1 に対応する． □

【証明】

【公式 2.16 (対称群の共役類の元の数)】 n 次の対称群の型 $(1^{a_1} \cdots n^{a_n})$ の共役類の要素の数は

$$\frac{n!}{1^{a_1} a_1! 2^{a_2} a_2! \cdots n^{a_n} a_n!} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} i^{a_i} a_i!}$$

で与えらえる．
[< 武藤武「群論」（岩波, 1991)] □

【系 2.17 (対称群の中心)】 n 時の対称群 $\mathfrak{S}_n$ の中心は，$n \geqslant 3$ のとき単位元のみからなる． □

2.3　単純有限群

【**定理 2.18** (分類定理)】　単純有限群は次の 4 つのタイプに分類される：

1. 位数 p の巡回群 $\mathbb{Z}_p$.
2. 5 次以上の交代群.
3. Lie 型単純群.
4. 散在型単純群（26 個）

□

2.4　有限群の表現

2.4.1　群環

【**定義 2.19** (**有限群の群環**)】　有限群 G に対し，環 R を係数とする G の元の形式的線型和 $a_1g_1 + \cdots + a_ng_n$ の全体には，自然に R-多元環の構造が入る．このようにして得られる多元環 $R[G]$ を，G の**群環** (group algebra) という．□

【**定理 2.20** (**Maschke の定理** (**群環の半単純性**))】　有限群 G の体 K 上の群環 $K[G]$ に対し，

$$K[G] \text{ が半単純} \iff K \text{ の標数が } G \text{ の位数が約数でない}$$

□

【**定義 2.21** (可逆半群)】

1) 半群 G の元 a, b に対して，$a = aba, b = bab$ が成り立つとき，a と b は互いに逆であるという．
2) 半群 G のすべての元が逆元をもつとき，G は**正則半群** (regular semi-group) であるという．
3) 正則半群 G のすべての元の逆元が一意的であるとき，G を**可逆半群** (inverse semi-group) という．

[<Encyclopedia of Mathematics < Clifford A.H., Preston G.B., ”The Algebraic theory of semigroups”, 1, Amer. Math. Soc. (1961)] □

【定理 2.22 (Maschke の定理の半群環への一般化)**】** 有限可逆半群 G の体 K 上の半群環 $K[G]$ に対し，

$$K[G] \text{ が半単純 } \Leftrightarrow K \text{ の標数が } G \text{ の位数が約数でない}$$

□

【定理 2.23 (Maschke の定理のよじれ群への一般化)**】** 有限群 G の位数が可換体 K の標数で割り切れないとき，K 上のよじれ群環 A の上の加群は，すべて半単純である．したがって，K 上の G の射影表現はすべて完全可約である．
[< ???] □

2.4.2 有限群の既約表現

【定理 2.24 (有限群の既約表現の数)】 K が代数的閉体で，その標数が有限群 G の位数の約数でないとき，G の K 上の既約表現類の個数は，G の共役類の個数に等しい．
[< 近藤武「群論」(岩波, 1991)] □

【注 2.25 ($K[G]$ の中心の基底)】 有限群 G の共役類への分割を $G = C_1 \cup \cdots \cup C_k$ とするとき，C_i の元の和を $c_i \in K[G]$ とおけば，$c_1, \cdots, c_k$ が中心 $Z(K[G])$ の K 上の基底となる．
[< 近藤武「群論」(岩波, 1991)] □

【定義 2.26 (群の 1 次指標)】 K を体とするとき，群 G から乗法群 $K^* = K - \{0\}$ への準同型写像 $\phi : H \to K^*$ を，G の K 上の **1 次指標**という． □

【定理 2.27 (部分群の定める群環の巾等元)】 K を標数ゼロの代数的閉体，G を有限群とする．

1) G の部分群 H および H 上の 1 次指標 $\phi : H \to K^*$ に対して，$K[G]$ の元
$$e = e(H, \phi) \equiv \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \phi(h) h$$

は，巾等元となる ($e^2 = e$)．また，$K[G]$ の左イデアル $\mathfrak{l} = K[G]e$ はゼロでない．

2) H_1, H_2 を G の部分群，ϕ_1, ϕ_2 をそれぞれの 1 次指標，$R = K[G]$, $\mathfrak{l}_i = Re(H_j, \phi_j)$ とする．このとき，

$$\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2) \cong_K e_1Re_2 : \quad f \mapsto f(e_1)$$

が成り立つ．

3) 2) の記号のもとで，

$$\langle \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2 \rangle_R \equiv \dim_K \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2) = \sharp \left\{ H_1\sigma H_2 \,\middle|\, \phi_2(y) = \phi_1(\sigma y \sigma^{-1}) \forall y \in H_2 \cap \sigma^{-1}H_1\sigma \right\}.$$

特に，$\phi_1 \equiv 1, \phi_2 \equiv 1$ のとき，$\langle \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2 \rangle_R = |H_1 \backslash G / H_2|$.

4) 2) の記号のもとで，$H_1 \cap H_2 = \{1\}$ のとき，$\langle \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2 \rangle_R \geqslant 1$ で，

$$\text{等号} \;\Leftrightarrow\; \forall\sigma \in G - H_1H_2, \exists y \in H_2 \cap \sigma^{-1}H_1\sigma \text{ s.t. } \phi_2(y) \neq \phi_1(\sigma y \sigma^{-1}).$$

5) 2) の記号のもとで，$H_1 \cap H_2 = \{1\}$，かつ $\langle \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2 \rangle_R = 1$ とすると，$(e_1e_2)^2 = c(e_1e_2)$ $(c \neq 0)$ で，$Re_1e_2 \cong_R Re_2e_1$ は極小左イデアルとなる．

[< 岩堀長慶「対称群と一般線形群の表現論」（岩波，1978）] ―――― □

【定理 2.28 (有限群の既約表現の次元)】 有限群の既約表現の次数は，群の位数の約数である．
[< 近藤武「群論」（岩波, 1991)] ―――― □

【定理 2.29 (有限群の既約表現の次元)】 有限群 G の既約表現の次数は，$C(G)$ を G の中心とするとき，$[G : C(G)]$ の約数である．
[< 近藤武「群論」（岩波, 1991)] ―――― □

【定理 2.30 (有限群の既約表現の次元（伊藤）)】 H を有限群 G の可換正規部分群とするとき，G の既約表現の次数は，$[G : H]$ の約数である．
[< 近藤武「群論」（岩波, 1991)] ―――― □

2.4.3 対称群の表現

【定義 2.31 (自然数の分割数)】 自然数 n に対して，その分割

$$(l_1, \cdots, l_s) : l_1 \geqslant \cdots \geqslant l_s > 0, \quad l_1 + l_2 + \cdots + l_s = n$$

の異なるものの総数 $p(n)$ を n **の分割数**という． □

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

表 1: $1 \leqslant n \leqslant 10$ に対する分割数 $p(n)$ の値

【定理 2.32 (対称群の既約表現の数)】 n 次の対称群の既約表現類の数は，n の分割数 $p(n)$ と一致する． □

【定義 2.33 (Young 図式)】

1) 自然数 n の分割 $(l_1, \cdots, l_s)$ に対して，同じサイズのマス目を上から j 番目の行に l_j 個左詰に並べた s 段の図形を，n 次の**台** D，D のマス目に 1 から n までの整数を一個ずつ配置したものを**盤** B，台と盤を **Young 図式** (Young table)，$(l_1, \cdots, l_s)$ を**盤の符号数**という．また，これらの行と列を反転したものを**共役な**盤/台という．

2) n 次の盤 B に対して，B の各行での置換の積で表される $\mathfrak{S}_n$ の元が作る部分群を**水平置換群**，各列での置換の積で表される元の作る部分群を**垂直置換群**といい，それぞれ $\mathfrak{H}_B$, $\mathfrak{K}_B$ で表す．

3) 盤 B に対して，群環 $Q[\mathfrak{S}_n] \subset \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ の巾等元 a_B, b_B を

$$\begin{aligned} a_B &= \frac{1}{|\mathfrak{H}_B|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{H}_B} \sigma, \\ b_B &= \frac{1}{|\mathfrak{K}_B|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{K}_B} \mathrm{sign}(\sigma)\sigma \end{aligned}$$

により定義し，それぞれ **Young 水平対称子**, **Young 垂直対称子**という．

□

【命題 2.34 (置換群の盤への作用)】 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して，盤の対応 $\sigma : B \to B'$ を

$$B'[i,j] = \sigma(B[i,j])$$

により定義すると，

$$\sigma \mathfrak{H}_B \sigma^{-1} = \mathfrak{H}_{\sigma B}, \quad \sigma \mathfrak{K}_B \sigma^{-1} = \mathfrak{K}_{\sigma B},$$

が成り立つ． □

【定理 2.35 (水平対称子と垂直対称子の絡数)】 $\mathfrak{S}_n$ の盤 B に対応する水平対称子を a_B, 垂直対称子を b_B とするとき，$R = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ に対して，

$$\dim a_B R b_B = 1$$

□

【定理 2.36 (盤 B の定める $\mathfrak{S}_n$ の既約表現)】 $\mathfrak{S}_n$ の盤 B に対して，$R = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ の元を

$$c_B = \sum_{\sigma \in \mathfrak{H}_B} \sum_{\tau \in \mathfrak{K}_B} \mathrm{sign}(\tau) \sigma \tau$$

により定義し，**Young の対称子**とよぶ．このとき，Rc_B は R の極小左イデアル，したがって R の既約表現を与える．したがって，その次元 $r = \dim_{\mathbb{C}} Rc_B$ は $n!$ の約数となり，

$$e_B \equiv \frac{r}{n!} c_B \ \Rightarrow \ e_B^2 = e_B$$

が成り立つ．

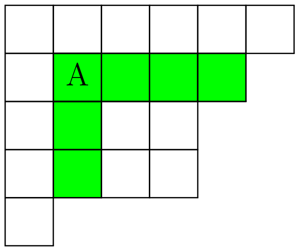
Young の対称子により左イデアル $\mathfrak{l}_B = Re_B$ に対応する R の表現は，**盤 B の定める $\mathfrak{S}_n$ の既約表現**と呼ばれる． □

【定理 2.37 ($\mathfrak{S}_n$ の既約表現の分類)】 $\mathfrak{S}_n$ の群環 $R = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ において，

$$\mathfrak{l}_B \cong_R \mathfrak{l}_{B'} \ \Leftrightarrow \ B \text{ と } B' \text{ の符号数が一致}$$

が成り立つ．また，R の任意の左極小イデアルに対して，$\mathfrak{l}_B$ がそれと R 同型となる盤 B が存在する．これより，$\mathfrak{S}_n$ の既約表現類は，$\mathfrak{S}_n$ の台と 1 対 1 に対応する． □

【定義 2.38 (Young 図形のフック（鉤）)】 符号数 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ をもつ Young 台において，位置 (i,j) のマス A に対し，$(i,j), (i,j+1), \cdots, (i, \lambda_i)$ および $(i+1, j), \cdots, (m_j, j)(\lambda_{m_j+1} < j \leqslant \lambda_{m_j}$ の位置に対応するマスからなる鉤型の部分を A を角とするフックという．また，フックに含まれるセルの総数をフックの長さという．



□

【系 2.39 (対称群の複素既約表現の次数)】 対称群 $\mathfrak{S}_r$ の複素既約表現の次数は，対応する Young 台の符号数 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ を用いて次のように表される：

$$N_\lambda = \frac{r!}{l_1! \cdots l_n!} D(l_1, \cdots, l_n)$$

である．ここで，$l = \lambda + \delta$, $\delta = (n-1, \cdots, 1, 0)$ で，$D(l_1, \cdots, l_n)$ は差積を表す．

Young 台の i 番目のセルを角とするフックの長さを s_i とすると，N_λ は

$$N_\lambda = \frac{r!}{s_1 s_2 \cdots s_r}$$

[< 岩堀長慶「対称群と一般線形群の表現論」（岩波，1978）] □

2.5 定理・命題・公式の証明

定理 2.2.2 の証明. 型 $1^{a_1} 2^{a_2} \cdots n^{a_n}$ の置換 $\sigma = (i_1) \cdots (i_{a_1})(j_1 j_2) \cdots (j_{2a_2-1} j_{2a_2}) \cdots$ に，置換

$$\tau = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots i_{a_1} & j_1 & j_2 \cdots & j_{2a_2-1} & j_{2a_2} & \cdots \\ i'_1 & \cdots i'_{a_1} & j'_1 & j'_2 \cdots & j'_{2a_2-1} & j'_{2a_2} & \cdots \end{pmatrix}$$

による共役変換を施すと，$\sigma' = \tau \sigma \tau^{-1} = \sigma = (i'_1) \cdots (i'_{a_1})(j'_1 j'_2) \cdots (j'_{2a_2-1} j'_{2a_2}) \cdots$ となるので，共役変換は置換の型を変えない．逆に，同じ型の任意の 2 つの置換 σ, σ' は，上記の置換 τ による共役変換で結ばれる．
[< 近藤武「群論」（岩波，1991)] Q.E.D.

【定理 2.2.2 に戻る】

3　可換環

様々な環の間の関係

$$
\begin{array}{l}
\text{離散付値環} \;\Rightarrow\; \text{付値環} \;\Rightarrow\; \text{局所整域} \\
\quad\Downarrow \\
\text{主イデアル整域} \;\Rightarrow\; \text{Bézout 整域} \\
\quad\Downarrow \\
\text{Gauss 整域 (UFD)} \;\Rightarrow\; \text{GCD 整域} \;\Rightarrow\; \text{整閉整域（正規環）}
\end{array}
$$

3.1　基本事項

3.1.1　イデアル

【定義 3.1 (Spec)**】**　環 R に対し，その素イデアルの全体のなす集合を $\mathrm{Spec}(R)$ で表す．また，$\mathfrak{a}$ を R のイデアルとするとき，$\mathfrak{a}$ を含む素イデアルの全体を $\mathrm{Spec}(R,\mathfrak{a})$ で表す：

$$\mathrm{Spec}(R,\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}.$$

□

【命題 3.2 (部分環)**】**　R を可換環，A をその部分環とする．このとき，$\mathfrak{a}$ が R のイデアルなら，$\mathfrak{a} \cap A$ は A のイデアルである．特に，$\mathfrak{p}$ が R の素イデアルで $\mathfrak{p} \not\supset A$ なら，$\mathfrak{p} \cap A$ は A の素イデアルとなる．□

【命題 3.3 (剰余環のイデアル)**】**　R を可換環，$\mathfrak{a}$ をそのイデアル．$\pi : R \to R/\mathfrak{a}$ を標準的全射とする．ことのき，

1. $\pi_* : \mathfrak{b} \mapsto \pi(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ により次の 1 対 1 対応が得られる：

   $$\pi_* : \{\mathfrak{a}\text{ を含む } R \text{ のイデアルの全体}\} \xrightarrow{\simeq} \{R/\mathfrak{a}\text{ のイデアルの全体}\}$$

2. 1. の対応は次の 1 対 1 対応を与える：

   $$\pi_* : \mathrm{Spec}(R,\mathfrak{a}) \cong \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{a}).$$

□

【命題 3.4 (分数環のイデアル)**】**　R を単位可換環，S を単位元を含みゼロを含まない R の積閉集合，R_S を分数環，j を R から R_S への包含写像とする：

$$j : R \to R_S = \left\{ xs^{-1} \,\middle|\, x \in R, s \in S \right\}.$$

1. $\mathfrak{b}$ が R_S のイデアルであるとき，$j^{-1}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b} \cap R$ は R のイデアルとなり，対応 $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a} \cap R$ は次の単射を与える：

   $$j^* : \{R_S \text{ のイデアルの全体}\} \to \{R \text{ および } \mathfrak{a} \cap S = \varnothing \text{ となる } R \text{ のイデアルの全体}\}$$

   この写像の逆像は，対応

   $$j_* : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_S := \left\{ as^{-1} \,\middle|\, a \in \mathfrak{a}, s \in S \right\}$$

   で与えられる．

2. 1. の対応 j^* は素イデアルに制限すれば全単射となる：

   $$j^* : \mathrm{Spec}(R_S) \cong \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \cap S = \varnothing\}$$

□

【定義 3.5 (斉次イデアル)**】**　次数付環 $A = \bigoplus_j A_j$ のイデアル $\mathfrak{a}$ は，A の斉次元たちから生成されるとき，**斉次イデアル** (homogeneous ideal) という． □

【命題 3.6 (斉次イデアルの特徴付け)**】**　次数付環 $A = \bigoplus_j A_j$ のイデアル $\mathfrak{a}$ が斉次イデアルであるための必要十分条件は，$\mathfrak{a}_j := \mathfrak{a} \cap A_j$ として，$\mathfrak{a} = \bigoplus_j \mathfrak{a}_j$ が成り立つことである． □

【命題 3.7 (斉次素イデアルの構造)**】**　次数付環 $A = \bigoplus_j A_j$ と正整数 d に対して，$A^{(d)} = \bigoplus_j A_{dj}$ とおく．$A^{(d)}$ を A の部分環と見なすと，A の任意の斉次素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して，$\mathfrak{p}^{(d)} = \mathfrak{p} \cap A^{(d)}$ は $A^{(d)}$ の斉次素イデアルとなり，対応 $\pi : \mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}^{(d)}$ は，A の斉次素イデアル全体と $A^{(d)}$ の斉次素イデアル全体の間の 1 対 1 対応を与える．また，π の逆対応は，$\pi^* : \mathfrak{q} \mapsto \sqrt{\mathfrak{q}}$ で与えられる． □

3.2　整拡大

【**定義 3.8** (整拡大)】　S を整域，R をその部分環とする．S の元 x が，R 係数のモニック多項式 $f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$ の根となるとき，x は R 上整であるという．S の任意の元が R 上整であるとき，S は R 上整，あるいは S は R の**整拡大**であるという．□

【**定義 3.9** (整閉)】　S を整域，R をその部分環とする．

i) R 上整な S の元の全体 $\tilde{R}$ は，S の部分 R 多元環となる．これを，R の S における**整閉包**という．

ii) R の S における整閉包が R と一致するとき，R は**整閉**であるという．

iii) R の商体 $Q(R)$ における整閉包を R の**正規化**という．また，R の正規化が R 自身と一致するとき，R を**整閉整域**という．

□

3.3　可換 Artin 環

【**定義 3.10** (Artin 環)】　単位元をもつ可換環 R において，その真イデアルからなる任意の集合が包含関係に関して常に極小元をもつとき，R を **Artin 環**という．□

3.3.1　例

【**例 3.11**】

1.
2. Artin 環の商環は Artin 環である．

□

3.3.2　性質

【**命題 3.12**】　Artin 環は Noether 環である．□

3.4　可換 Noether 環

【定義 3.13 (Noether 環)**】**　単位元をもつ可換環 R において，その真イデアルからなる任意の集合が包含関係に関して常に極大元をもつとき，R を **Noether 環**という． □

3.4.1　例

【例 3.14】

1. 単項イデアル環は Noether 環である．したがって，$\mathbb{Z}$，体 k 上の整式環 $k[X]$ は Noether 環である．
2. Artin 環は Noether 環である．
3. Noether 環の商環は Noether 環である．
4. R が Noether 環ならその上の有限生成環 $R[X_1, \cdots, X_n]/I$ も Noether 環となる．

□

3.4.2　性質

【命題 3.15】　単位元をもつ可換環 R について，つぎの 4 条件は同等である．

i) R は Noether 環.

ii) R のイデアルの任意の昇鎖列 $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots$ について，適当な $N > 0$ が存在して $I_N = I_{N+1} = \cdots$.

iii) R の任意のイデアルは有限生成イデアルである．

iv) 有限生成 R 加群の部分加群は有限生成 R 加群である．

□

【**定理 3.16** (Hilbert の基底定理)】　R が Noether 環ならその上の有限生成環 $R[X_1, \cdots, X_n]/I$ も Noether 環となる. □

【**定義 3.17** (Krull 次元)】　R を環として，R の素イデアルの昇鎖 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ を長さ n の素イデアル列という．素イデアル列の長さの上限を R の **Krull 次元**といい，K-dim R と書く. □

3.5　正規環

【**定義 3.18** (正規環)】　整閉整域を**正規環**という. □

3.5.1　例

【**例 3.19** (正規環の例)】

1. A を正規環とすると，$A[X_1, \cdots, X_n]$ も正規環．特に，k を体とすると，$k[X_1, \cdots, X_n]$ は正規環.
2. A を正規環とすると，その分数環 A_S も正規環.
3. 可換体の正規部分環 A_i $(i \in I)$ の交わり $\cap_{i \in I} A_i$ は正規.

□

3.5.2　性質

【**定理 3.20**】　A を正規環，$\mathfrak{p}$ をその高さ 1 の素イデアルとして，

$$A = \cap_{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1} A_{\mathfrak{p}}. \tag{3.5.1}$$

□

3.6　局所環

【**定義 3.21** (局所環)】　単位元をもつ可換環が極大イデアルを一つしか持たないとき，局所環という. □

3.6.1 Noether 局所環

【**定義 3.22** (パラメーター系)】 Noether 局所環 $(R, \mathfrak{m})$ について，$\mathfrak{m}$ の元の列 $\{a_1, \cdots, a_d\}$(d =K-dim R) で，$\mathfrak{m} = \sqrt{(a_1, \cdots, a_d)}$ となるとき，$\{a_1, \cdots, a_d\}$ を R の**パラメーター系**という． □

【**注 3.23** (根基)】 環 R のイデアル I に対して，$\sqrt{I} = \{x \in R \mid x^n \in I \ \exists n \in \mathbb{N}\}$ である． □

【**定義 3.24** (正則局所環)】 Noether 局所環 $(R, \mathfrak{m})$ が $\mathfrak{m} = (a_1, \cdots, a_d)$ となるパラメーター系 $\{a_1, \cdots, a_d\}$(d =K-dim R) をもつとき，$(R, \mathfrak{m})$ を**正則局所環**，$\{a_1, \cdots, a_d\}$ をその**正則パラメーター系**という． □

【**定理 3.25** (Auslander)】 正則局所環は素元分解環であり，したがって正規環である． □

【**定義 3.26** (Cohen-Macaulay 環)】

1. A を環，M をその上の加群とする．A の元の列 $x_1, \cdots, x_d$ は，次の条件を満たすとき，長さ d の M**-正則列** (M-regular sequence) であるという：$i = 1, \cdots, d$ に対して，x_i をかける写像

$$x_i : M/(x_1, \cdots, x_{i-1})M \to M/(x_1, \cdots, x_{i-1})M$$

   が単射でありかつ全射でない．

2. A を Noether 局所環，M を有限生成 A-加群とする．A の極大イデアルに含まれる M-正則列の長さの最大値を，M **の深さ** (depth) といい，depth$M$ で表す．

3. $\dim A = \mathrm{depth} A$ となる Noether 局所環 A を **Cohen-Macaulay 環**という．

□

3.7 定理・命題・公式の証明

4　代数 (多元環)

4.1　基本次項

【**定義 4.1** (基本定義)】　K を単位元をもつ可換環とする．

1) 単位的な K 加群の構造をもつ環 R に対して，$k(xy) = (kx)y = x(ky)$ $(k \in K, x, y \in R)$ が成り立つとき，R を K **上の多元環**ないし**代数** (algebra over K) という．

2) 多元環 R は，環として零環（1 個の要素からなる環），単位的，可換，半単純のとき，それぞれ**零多元環** (zero algebra), **単位的多元環** (unitary algebra), **可換多元環** (commutative algebra), **半単純多元環** (semi-simple algebra) という．

□

【**定義 4.2** (R 加群間の絡数)】　R を体 K 上の単位的多元環，M, N を R 加群とするとき，$\mathrm{Hom}_R(M, N)$ の K 上の次元を M と N の間の**絡数** (intertwining number) とよび，$\langle M, N\rangle_R$ と表す．□

4.2　構造と表現に関する基本定理

【**定理 4.3** (多元環の既約表現と正則表現の極大/極小左イデアルの対応)】

体 K 上の多元環 R の既約表現 (ρ, V) に対して，R の左極大イデアル I が存在して，$R/I \cong_R V$ となる．さらに，R が半単純（すなわち，左正則表現が完全可約）なら，R の左極小イデアル I_0 が存在して，$I_0 \cong_R V$ が成り立つ．[<「対称群と一般線型群の表現論」岩堀長慶 (岩波，1978)]

□

【**定義 4.4** (双対正則加群)】　K を可換環，A を K 線形環とする．A の双対加群 $A^* = \mathrm{Hom}_K(A, K)$ に A の左作用を

$$(af)(b) = f(ba) \quad a, b \in A, \quad f \in A^*$$

で定義する．このように定義される左 A 加群 A^* を A **上の双対正則加群**という．□

【定義 4.5 (表現の係数)**】**　G を集合，K を可換環，V を K 加群，$V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ とする．写像

$$\rho : G \to \mathrm{End}_K(V)$$

に対して，各 $x \in V, x^* \in V^*$ ごとに決まる K^G の元

$$\rho_{x,x^*}(s) := x^*(\rho(s)x) \quad s \in G$$

を ρ の (x, x^*) 係数とよぶ．さらに，ρ_{x,x^*} から生成される K^G の K 部分加群

$$C(\rho) := K < \rho_{x,x^*} \mid x \in V, x^* \in V^* >$$

を ρ **の係数加群**とよぶ．特に，G が K 代数 A となるとき，$C(\rho)$ は A 上の双対正則加群 A^* の部分加群と見なされる．　□

【定義 4.6 (表現の指標)**】**　可換体 K 上の有限次元表現 (ρ, V) に対して，対応する K 線形環 A 上の関数

$$\chi_\rho(a) = \mathrm{Tr}\rho(a) \quad (a \in A)$$

を表現 ρ **の指標**という．　□

【定理 4.7】　A を可換体 K 上の線形環，A^* を A の双対正則加群とする．

i) 単純 A 加群 P の定める既約表現 ρ の係数加群 $C(\rho)$ は A^* の P 等型成分である．また，$\rho_1, \cdots, \rho_m$ を互いに同型でない A の既約表現とすると，$C_(\rho_1), \cdots, C_(\rho_m)$ は A^* において加法的に独立である．（これは，A のすべての既約表現が双対正則加群の等型成分として得られることを意味している．）

ii) $\rho_1, \cdots, \rho_m$ がすべてゼロでない有限次既約表現とすると，次の 2 条件は同値である．

　a) $\rho_1, \cdots, \rho_m$ は互いに同型でない．

　b) $\chi_{\rho_1}, \cdots, \chi_{\rho_m}$ は K 上線形独立である．

□

【定理 4.8 (半単純多元環の表現次数)**】** 代数的閉体 K 上の単位的半単純多元環 R に対し，その既約表現類の個数は，R の中心 $Z(R)$ の K 上の次元に等しい． $\square$

【定理 4.9 (巾等元の生成する左イデアル)**】** R を体 K 上の単位的多元環，e, f をその巾等元として，$\mathfrak{l} = Re$, $\mathfrak{m} = Rf$ とおく．このとき，K 上のベクトル空間として $\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{l}, \mathfrak{m}) \cong eRf$ が成り立つ． $\square$

4.3 半単純多元環のテンソル積

【定理 4.10 (半単純多元環のテンソル積とその表現)】 K を代数的閉体，R と S を共に K 上の単位的半単純多元環とする．

(i) $T = R \otimes_K S$ も K 上の単位的半単純多元環である．そして，R, S の既約成分の個数を r, s とすると，T の単純成分の個数は rs である．特に，R と S が単純なら，T も単純である．

(ii) (ρ, V), (θ, U) をそれぞれ R, S の既約表現とすると，$(\rho \otimes \theta, V \otimes U)$ は $T = R \otimes S$ の既約表現である．

(iii) 逆に，$T = R \otimes S$ の既約表現 (ϕ, W) に対して，R の既約表現 (ρ, V) と S の既約表現 (θ, U) が存在して，$V \otimes U \cong_T W$ となる．しかも，与えられた ϕ に対し，ρ, θ は同値を除いて一意的である．

[<「対称群と一般線型群の表現論」(岩堀長慶，岩波書店 1978)] $\square$

【定理 4.11 (表現空間の標準分解と $\mathrm{End}_R(V)$ の既約表現)】 代数的閉体 K 上の単位的半単純多元環 R の表現 (ρ, V) に対し，表現空間 V の等型成分への標準分解を

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$$

とし，

$$(*) \qquad S \equiv \mathrm{End}_R(V) = \{b \in \mathrm{End}(V) \mid b\rho(a) = \rho(a)b \ \forall a \in R\}$$

とおく．このとき，

(i) $\rho(R)$ は K 上の単位的半単純多元環で，その単純成分の個数は t である．そして，これらの単純成分を順序に並べて $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_t$ とすると，$V_i = \mathfrak{a}_i V$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$ となる．

(ii) S は K 上の単位的半単純多元環で，その単純成分の個数は t である．そして，(*) は S 加群 V の等型成分への標準分解となる．

(iii) R と S のテンソル積である単位的多元環 $T = R \otimes_K S$ の表現 $\tilde{\rho} : T \to \mathrm{End}(V)$ を

$$\tilde{\rho}(a \otimes b) \equiv \rho(a)b = b\rho(a) \quad (a \in R, b \in S)$$

で定めることができる．すると，各 V_i は既約な部分 T 加群となる．よって，既約 R 加群 U_i と既約 S 加群 W_i とが（同値を除いて一意的に）存在し，

$$U_i \otimes W_i \cong_T V_i \quad (1 \leqslant i \leqslant t)$$

となる．このとき，$U_1, \cdots, U_t$ のどの 2 つも R 同型でない．また，$W_1, \cdots, W_t$ のどの 2 つも S 同型でない．

(iv) $\dim U_i = n_i, \dim W_i = m_i$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$ とおくと，

$$n_i = \langle V_i, W_i \rangle_S, \quad m_i = \langle V_i, U_i \rangle_R \quad (1 \leqslant i \leqslant t)$$

となる．また，K 上の多元環として，次の 2 つの同型が成り立つ：

$$\rho(R) \cong M_{n_1}(K) \oplus \cdots \oplus M_{n_t}(K),$$
$$S \cong M_{m_1}(K) \oplus \cdots \oplus M_{m_t}(K),$$

(v) $\mathrm{End}_S(V) = \rho(R)$ が成り立つ．

[<「対称群と一般線型群の表現論」（岩堀長慶，岩波書店 1978)] □

【定理 4.12】 定理 4.11 と同じ記号を用いるとき，

(i) $a \in R$ と番号 $i(= 1, \cdots, t)$ に対して，次の 5 条件は互いに同値である：

(イ) aV は V の既約な部分 S 加群であって，$aV \subset V_i$.

(ロ) $\rho(Ra)$ は $\rho(R)$ の極小左イデアルで，$\rho(Ra) \subset \mathfrak{a}_i$.

(ハ) $\rho(aR)$ は $\rho(R)$ の極小右イデアルで，$\rho(aR) \subset \mathfrak{a}_i$.

(ニ) $aV \subset V_i$, $\dim(aV) = m_i$.

(ホ) $aV \subset V_i$, $\dim(aU_i) = 1$.

(ii) $\mathfrak{a}_i$ の極小右イデアルの直和分解を $\mathfrak{a}_I = \mathfrak{r}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{r}_{n_i}$ とすれば，各 $\boldsymbol{r}_j V$ は V の既約部分 S 加群であって，

$$V_i = \boldsymbol{r}_1 V \oplus \cdots \oplus \mathfrak{r}_{n_i} V$$

は S 加群 V_i の直和分解を与える．そして，巾等元 f_i により $\mathfrak{r}_i = f_i R$ とおけば，$\mathfrak{r}_i V = f_i V$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$ である．

[<「対称群と一般線型群の表現論」(岩堀長慶，岩波書店 1978)] □

4.4　一般線型群のテンソル空間への表現の標準分解

【定義 4.13 (対称群のテンソル空間への表現)】　体 K 上の n 次元ベクトル空間 V に対し，その r 個のテンソル積で得られる K 上の n^r 次元ベクトル空間を

$$T_r(V) \equiv \overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^{r} \tag{4.4.1}$$

で表す．

このとき，r 次対称群 $\mathfrak{S}_r$ の $T_r(V)$ への表現 ρ_1 を

$$\begin{aligned}&\mathfrak{S}_r \ni \tau \mapsto \rho_1(\tau) \in \mathrm{GL}(T_r) :\\ &\rho_1(\tau)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) = x_{\tau^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\tau^{-1}(r)}, \quad x_1, \cdots, x_r \in V.\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

で定義することができる．ρ_1 に対して，

$$\rho_1(\tau\sigma) = \rho_1(\tau)\rho_1(\sigma), \quad \tau, \sigma \in \mathfrak{S}_r \tag{4.4.3}$$

が成り立つ．ρ_1 は，K 上の多元環の準同形

$$\rho_1 : K[G] \to \mathrm{End}_K(T_r) \tag{4.4.4}$$

を誘導する． □

【定理 4.14 (ρ_1 **の核)】** $K = \mathbb{C}$ とすると，$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_r]$ は半単純で，r 次の台の全体を $D_1, \cdots, D_{p(r)}$，$\mathfrak{a}(D)$ を台 D に対応する $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_r]$ の極小イデアルとして，

$$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_r] = \mathfrak{a}(D_1) \oplus \cdots \mathfrak{a}(D_{p(r)})$$

と単純成分へ分解される．

この記法のもとで，r 次の台 D の符号数を $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)(\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k > 0)$ とすると，

$$\mathrm{Ker}\rho_1 \supset \mathfrak{a}(D) \ \Leftrightarrow \ k > n = \dim V$$

が成り立つ．したがって，$\mathrm{Ker}\rho_1$ は，深さ k が n を超える台 D_i に対応する極小イデアル $\mathfrak{a}(D_i)$ の直和で与えられる． □

【系 4.15 $(R = \mathrm{Im}(\rho_1))$**】** ρ_1 による $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_r]$ の像 R は，$\mathrm{End}(T_r)$ の部分多元環となり，

$$R \cong \mathbb{C}[\mathfrak{S}_r]/\mathrm{Ker}\rho_1 \cong \oplus_{D:\mathrm{depth}(D) \leqslant n} \mathfrak{a}(D).$$

と単純成分への分解が得られる． □

【定義 4.16 (一般線型群のテンソル空間上の表現)】 V を体 K 上の n 次元ベクトル空間，$T = T_r(V)$ として，$\mathrm{GL}(V)$ の T 上の線形表現

$$\rho_2 : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(T) \tag{4.4.5}$$

を次のように構成する：

$$\mathrm{GL}(V) \ni A \mapsto \rho_2(A) = \overbrace{A \otimes \cdots \otimes A}^{} r \in \mathrm{GL}(T), \tag{4.4.6}$$

$$\rho_2(A)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) = Ax_1 \otimes \cdots \otimes Ax_r, \quad x_1, \cdots, x_r \in V \tag{4.4.7}$$

このとき，

$$\rho_2(1_V)1_T, \quad \rho_2(AB) = \rho_2(A)\rho_2(B), \quad A, B \in \mathrm{GL}(V) \tag{4.4.8}$$

が成り立つ． □

【定理 4.17 $(S = \rho_2(\mathbb{C}[\mathrm{GL}(V)]))$**】** ρ_2 による $\mathrm{GL}(V)$ の像に属する元の有限個の線形結合全体が作る集合 $S = \rho_2(\mathbb{C}[\mathrm{GL}(V)])$ は，$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(T)$ の部分多元環となる．この S と多元環 $R = \rho_1(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_r])$ の間に次の関係が成り立つ：

$$\mathrm{End}_R(V) = S, \quad \mathrm{End}_S(V) = R.$$

特に，$\rho_1(\sigma)\,(\sigma \in \mathfrak{S}_r)$ と $\rho_2(A)\,(A \in \mathrm{GL}(V))$ は常に可換である． □

【系 4.18 (GL(V) **のテンソル積表現の完全可約性)】** 多元環 $S = \mathbb{C}[\rho_2(\mathrm{GL}(V))] \subset \mathrm{End}(T)$ は半単純である．したがって，GL(V) の $T_r(V)$ への線形表現は完全可約である． $\square$

【定理 4.19 ($\mathfrak{S}_r \times \mathrm{GL}(V)$ **の** $T_r(V)$ **への表現の指標)】** $\tau \in \mathfrak{S}_r$ の型を $(1^{\alpha_1(\tau)}2^{\alpha_2(\tau)}\cdots r^{\alpha_r(\tau)})$ とするとき，$A \in \mathrm{GL}(V)$ に対し，

$$\mathrm{Tr}(\rho_1(\tau)\rho_2(A)) = (\mathrm{Tr}\, A)^{\alpha_1(\tau)}\cdots(\mathrm{Tr}\, A^r)^{\alpha_r(\tau)}.$$

$\square$

【定理 4.20 (GL(V) **のテンソル表現の既約成分)】** $\dim V = n$, $T = T_r(V)$ とする．深さが n 以下であるような台 D 上の任意の盤 B の定める Young 対称子を c_B として，$U = c_B T$，または $U = \hat{c}_B T$ ($c_B = \sum_\sigma k(\sigma)\sigma \Rightarrow \hat{c}_B = \sum_\sigma k(\sigma)\sigma^{-1}$) とおけば，$U$ は GL(V) の既約表現を与える．

GL(V) の U 上の表現指標を ψ_D とすると，ψ_D は次の公式で与えられる：

$$\mathrm{GL}(V) \ni A \mapsto \psi_D(A) = S_\lambda(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n) \equiv \frac{|\epsilon^{l_1},\cdots,\epsilon^{l_n}|}{|\epsilon^{n-1},\cdots,\epsilon,1|}$$

ただし，D の符号数を $\lambda = (\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ とするとき，$l = (l_1,\cdots,l_n)$ は $l = \lambda+\delta, \delta = (n-1,\cdots,1,0)$ で定まる整数成分ベクトルである．また，$\epsilon = (\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n)$ は行列 A の固有値である． $\square$

【系 4.21 (GL(V) **のテンソル表現の既約成分の重複度)】** r 次の盤 B の深さが $\leqslant \dim V$ ならば，GL(V) の既約表現空間 $c_B T_r(V)$ が T_r 中に含まれる重複度は，$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_r]$ の極小左イデアル $\mathfrak{l}_B = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_r]c_B$ の次元に等しい．すなわち，B の符号数が $\lambda = (\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ ならば，

$$\langle T_r, c_B T_r\rangle_S = \frac{r!}{l_1!\cdots l_n!}D(l_1,\cdots,l_n)$$

である．ここで，$l = \lambda+\delta$ で，$D(l_1,\cdots,l_n)$ は差積を表す． $\square$

【定理 4.22 (GL(V) **のテンソル表現の既約成分の次元)】** $\dim V = n$, $T = T_r(V)$ のとき．深さが n 以下であるような台 D 上の任意の盤 B に対し，GL(V) の既約な表現空間 $c_B T$ の次元は，D の符号数 $\lambda = (\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ を用いて，次の式で与えられる：

$$\dim c_B T = \frac{D(l_1,\cdots,l_n)}{D(n-1,\cdots,1,0)}$$

ただし，$l = (l_1,\cdots,l_n) = \lambda+\delta$． $\square$

【定義 4.23 (GL(V) **の符号数をもつ既約表現)】**　符号数 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ ($\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$) の台 D 上の盤 B を用いて作った表現空間 $c_B T_r(V)$ 上の GL(V) の既約表現を，GL(V) **の符号数** ($\lambda_1, \cdots, \lambda_n$) **をもつ既約表現**と呼ぶ． □

【定理 4.24 (**符号数をもつ** GL(V) **の既約表現の同値判定条件)】**　GL(V) ($\dim V = n$) の 2 つの既約表現 ρ, ρ' がそれぞれ符号数 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$ をもてば，

$$\rho \cong \rho' \iff \lambda = \mu.$$

□

【定義 4.25 (**標準盤**)**】**　r 次の盤 B において，B の各列，各行に書かれた数字が，右に向かっても，下に向かっても単調増加するとき，B を**標準盤**という． □

【定理 4.26 (GL(V) **のテンソル表現の既約分解)】**　深さが高々$n = \dim V$ 以下の r 次の標準盤の全体を $B_1, \cdots, B_m$ とし，これらに対応する Young 対称子を $c_i = c_{Bi} (1 \leqslant i \leqslant m)$ とする．群環 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_r]$ の逆自己同型 $a = \sum \lambda_\sigma \sigma \mapsto \hat{a} = \sum \lambda_\sigma \sigma^{-1}$ による c_i の像 $\hat{c}_i$ を用いて，$T = T_r(V)$ は

$$T = \hat{c}_1 T \oplus \cdots \oplus \hat{c}_m T$$

と直和に分解され，各 $\hat{c}_i T$ は GL(V) の既約表現を与える． □

4.5　外積代数

以下，特に断らない限り体 K は標数ゼロとする．

【定義 4.27 (外積べき空間)**】**　体 K 上の線形空間 V に対して，ある体 K 上の代数 $\bigwedge V$ と線形写像 $j : V \to \bigwedge V$ が存在して，V から任意の体 K 上の代数 A への線形写像 $\phi : V \to A$ が

$$\phi(v) \cdot \phi(v) = 0 \quad \forall v \in V$$

を満たすとき，$\phi_* \circ j = \phi$ となる代数の準同型 $\phi_* : \bigwedge V \to A$ が一意的に存在する．この対 ($\bigwedge V, j$) を V の**外積代数**という．外積代数における積は，$a \wedge b$ と表す． □

【命題 4.28 (次数付き代数構造)**】**　体 K 上の n 次元線形空間 V 上の外積代数 $(\bigwedge V, j)$ に対して次が成り立つ．

i) j は単射である．$e_1, \cdots, e_n$ を V の基底とするとき，$j(e_k)$ を同じ記号 e_k で表すと，

$$1, e_i, e_i \wedge e_j (i < j), \cdots, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} (i_1 < \cdots < i_p), \cdots$$

が $\bigwedge V$ の基底となる．特に，$\bigwedge V$ の次元は $n(n-1)/2$ である．

ii) $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} (i_1 < \cdots < i_p)$ で生成される線形部分空間を $\bigwedge^p V$ とおくと，基底の取り方に依らない直和分解

$$\bigwedge V = K \oplus V \oplus \cdots \oplus \bigwedge^p V \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n V$$

が得られ，この分解に関して $\bigwedge V$ は次数付き代数となる．特に，$v \in \bigwedge^p V, w \in \bigwedge^q V$ に対して，

$$v \wedge w = (-1)^{pq} w \wedge v$$

が成り立つ．

□

【命題 4.29 (テンソルによる表現)**】**　テンソル積空間 $\bigotimes^p V$ での反対称化作用素

$$A_p : \bigotimes^p V \to \bigotimes^p V$$

を

$$A_p(v_1 \otimes \cdots v_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sign}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots v_{\sigma(p)}$$

により定義する．$c(p)$ をゼロでない定数として，$\bigwedge^p V$ の元 $v_1 \wedge \cdots v_p$ に

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \mapsto c(p) A_p(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \in \bigotimes^p V$$

を対応させと，この対応は一意的に線形単射準同型 $\phi : \bigwedge^p V \to \bigotimes^p V$ に拡張され，外積代数の元の反対称テンソルによる表現を与える．この表現のもとで，$t \in \bigwedge^p V, s \in \bigwedge^q$ に対して，

$$\phi(t \wedge s) = \frac{c(p+q)}{c(p)c(q)} A_{p+q}(\phi(t) \otimes \phi(s)) \in \bigwedge^{p+q} V$$

が成り立つ．　□

【定義 4.30 (内積)**】** $\bigwedge^p V^* \times \bigwedge^p V$ 上の双線形関数を

$$< u^1 \wedge \cdots \wedge u^p, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p >:= \det(u^i(v_j))$$

により定義し，内積と呼ぶ．e_i を V の基底，θ^j をその双対基底とするとき，一般元

$$\phi = \sum_{i_1<\cdots i_p} \phi_{i_1\cdots i_p}\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^p = \frac{1}{p!}\sum_{i_1,\cdots,i_p} \phi_{i_1\cdots i_p}\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^p$$

$$v = \sum_{i_1<\cdots i_p} v^{i_1\cdots i_p}e_1 \wedge \cdots \wedge e_p = \frac{1}{p!}\sum_{i_1,\cdots,i_p} v^{i_1\cdots i_p}e_1 \wedge \cdots \wedge e_p$$

の内積は辞書

$$< \phi, v >= \sum_{i_1<\cdots i_p} \phi_{i_1\cdots i_p}v^{i_1\cdots i_p} = \frac{1}{p!}\sum_{i_1,\cdots,i_p} \phi_{i_1\cdots i_p}v^{i_1\cdots i_p}$$

と表される． □

【命題 4.31】 $\bigwedge V$ と $\bigwedge V^*$ は内積に関して互いに双対空間となり，$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}\}$ と $\{\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_p}$ が互いに双対基底となる． □

【定義 4.32 (内積作用素)**】** 各 $\phi \in \bigwedge^p V^*$ に対して

$$u \in \bigwedge^q V \mapsto \phi \cdot u \bigwedge^{q-p} V$$

を

$$(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^p)\cdot(v_1 \wedge \cdots \wedge v_q) = \frac{1}{(q-p)!}\sum_{\sigma\in S_q} \mathrm{sign}(\sigma)\omega^1(v_{\sigma(1)})\cdots\omega^p(v_{\sigma(p)})$$
$$\times \quad v_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(q)}$$

により定義する．この作用素 $\phi\cdot$ を**内積作用素**と呼ぶ． □

【命題 4.33】

i) $\omega \in V^*, u \in \bigwedge^p V, v \in \bigwedge^q V$ に対して，

$$\omega\cdot(u \wedge v) = (\omega\cdot u) \wedge v + (-1)^p u \wedge (\omega\cdot v).$$

ii) $\omega \in \bigwedge^p V^*, \chi \in \bigwedge^q V^*, u \in \bigwedge^r V (r \geqslant p+q)$ のとき，次の式が成り立つ．

$$(\omega \wedge \chi) \cdot u = \chi \cdot (\omega \cdot u).$$

iii) $\omega \in \bigwedge^p V^*, v \in \bigwedge^p V$ に対して，

$$\omega \cdot v =< \omega, v > .$$

□

【定義 4.34 (Hodge 双対変換)**】** V が非退化な内積 $< u, v >$ をもつとし，その正規直交基底を $e_1, \cdots, e_n$，その V^* における双対基底を $\theta^1, \cdots, \theta^n$ とする：

$$< e_i, e_j >= \eta_{ij}, \quad < \theta^i, \theta_j >= \eta^{ij}.$$

体積要素

$$*1 := \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n$$

を用いて，線形写像

$$* : \bigwedge^p V^* \to \bigwedge^{n-p} V^*$$

を

$$\phi \wedge *\chi =< \phi, \chi > *1 \quad \forall \phi \in \bigwedge^p V^*$$

と定義し，**Hodge 双対作用素**と呼ぶ． □

【命題 4.35】 $e_1, \cdots, e_n$ を V の正規直交基底，$\theta^1, \cdots, \theta^n$ をその双対基底とするとき，

$$\begin{aligned} *(\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_p}) &= \frac{1}{(n-p)!} \epsilon^{i_1 \cdots i_p}{}_{i_{p+1} \cdots i_n} \theta^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_n} \\ &= \eta^{i_1 j_1} \cdots \eta^{i_p j_p} (e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}) \cdot (*1). \end{aligned}$$

□

4.6 Clifford 代数

4.6.1 定義と一般的性質

【定義 4.36】 体 K 上の n 有限次元ベクトル空間 V とその計量 q に対して，そのテンソル代数を $\mathscr{T}(V)$，$v \otimes v + q(v,v)(v \in V)$ の形の元全体から生成される $\mathscr{T}(V)$ のイディアルを $\mathscr{I}_q(V)$ とする．このとき，商代数

$$\mathcal{C}\ell(V,q) := \mathscr{T}(V)/\mathscr{I}_q(V)$$

を (V,q) に伴う **Clifford 代数**という．特に，$K = \mathbb{R}$ で q が (p,q) 型の符号を持つ非退化計量のとき，それに伴う Clifford 代数を $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q}) = \mathcal{C}\ell_{p,q}$ と表す．また，$K = \mathbb{C}$ で q が非退化のとき，それに伴う Clifford 代数は次元のみで決まるので，それを $\mathcal{C}\ell(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}\ell_n$ と表す．さらに，$\mathcal{C}\ell_{p,0} = \mathcal{C}\ell_p$，$\mathcal{C}\ell_{0,q} = \mathcal{C}\ell_q^*$ と略記する． □

【命題 4.37】 V から $\mathcal{C}\ell(V,q)$ への自然な写像 j は単射であり，$(\mathcal{C}\ell(V,q), j)$ は次の意味で普遍的である：

> V から単位元を持つ K を係数とする任意の代数 A への線形写像 f が，$f(v)f(v) = -<v,v>$ を満たすとき，K-代数としての準同型 $\phi : \mathcal{C}\ell(V,q) \to A$ で $f = \phi \circ j$ となるものが一意的に存在する．

□

【命題 4.38】 任意の $v_1, \cdots, v_j \in V$ に対して，対応

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_j \in \Lambda^j(V) \mapsto \frac{1}{j!} \sum_{\sigma \in S_j} \mathrm{sign}(\sigma) v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(j)}$$

により決まる写像

$$j : \Lambda^* V \to \mathcal{C}\ell(V,q)$$

は K-加群としての同型となる．特に，$\mathcal{C}\ell(V,q)$ は 2^n 次元ベクトル空間で，$e_1, \cdots, e_n$ を V の基底とすると，$e_{i_1} \cdots e_{i_j} (i_1 < \cdots < i_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ の形の元の全体は $\mathcal{C}\ell(V,q)$ の基底となる． □

【定義 4.39】 $\mathcal{C}\ell(V,q)$ に対して，$\alpha(v) = -v(\forall v \in V)$ となる自己同型が一意的に存在する．この自己同型を**主自己同型**という．また，$\beta(v) = v(\forall v \in V)$ となる反自己同型（i.e., $\beta(vw) = \beta(w)\beta(v)$）が一意的に存在する．これを**主反自己同型**または転置写像と呼ぶ． □

4.6.2　構造

【命題 4.40】

i) α の固有値は $+1$ および -1 で，$\mathcal{C}\ell(V,q)$ は対応する固有空間の直和となる：

$$\mathcal{C}\ell(V,q)=\mathcal{C}\ell^0(V,q)\oplus\mathcal{C}\ell^1(V,q)$$

この分解により，$\mathcal{C}\ell(V,q)$ は $\mathbb{Z}_2$ を次数とする次数付き代数となる．

ii) 次の K-代数としての同型が成り立つ：

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\ell^0_{p,q}&\cong\mathcal{C}\ell_{p-1,q},\\ \mathbb{C}\ell^0_n&\cong\mathbb{C}\ell_{n-1}.\end{aligned}$$

iii) $\mathbb{C}$-代数として次の同型が成り立つ：

$$\mathcal{C}\ell_{p,q}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\cong\mathbb{C}\ell_{p+q}.$$

□

【定義 4.41】　$\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ を $\mathbb{Z}_2$-次数付き代数とする．そのテンソル積の要素のうち，$\mathscr{A}^0$ ないし $\mathscr{A}^1$ に属する元と $\mathscr{B}^0$ ないし $\mathscr{B}^1$ に属する元のテンソル積として表されるもの，$a\otimes b$，$a'\otimes b'$ に対して，その積を

$$(a\otimes b)\cdot(a'\otimes b')=(-1)^{\deg(b)\deg(a')}(aa')\otimes(bb')$$

と定義する．このとき，$\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ に

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{B})^0&:=\mathscr{A}^0\otimes\mathscr{B}^0+\mathscr{A}^1\otimes\mathscr{B}^1,\\ (\mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{B})^1&:=\mathscr{A}^0\otimes\mathscr{B}^1+\mathscr{A}^0\otimes\mathscr{B}^1\end{aligned}$$

により次数を与えて得られる $\mathbb{Z}_2$ 次数付き代数を，$\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ の $\mathbb{Z}_2$ **次数付きテンソル積**と呼び，$\mathscr{A}\hat{\otimes}\mathscr{B}$ と表す．□

【命題 4.42】

i) (V,q) の直交分解 $V=V_1\oplus V_2, q=q_1\oplus q_2$ に対して，次の K-代数としての同型が存在する：

$$\mathcal{C}\ell(V,q)\cong\mathcal{C}\ell(V_1,q_1)\hat{\otimes}\mathcal{C}\ell(V_2,q_2).$$

ii) 特に，次の同型が成り立つ：

$$\mathcal{C}\ell_{p,q} \cong \mathcal{C}\ell_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \mathcal{C}\ell_1 \hat{\otimes} \mathcal{C}\ell_1^* \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \mathcal{C}\ell_1^*,$$
$$\mathbb{C}\ell_n \cong \mathbb{C}\ell_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \mathbb{C}\ell_n.$$

ただし，$\mathcal{C}\ell_1$，$\mathcal{C}\ell_1^*$，$\mathbb{C}\ell_1$ はそれぞれ p, q, n 回現れるものとする．

□

【定義 4.43】 $\mathcal{C}\ell(V, q) = \mathcal{C}\ell_{r,s}(n = r + s)$ に対して，V が向きづけられているとして，V の正の向きの q-正規直交基底 $e_1, \cdots, e_n$ から定義される

$$\omega := e_1 \cdots e_n \in \mathcal{C}\ell_{r,s}$$

を $\mathcal{C}\ell_{r,s}$ の**体積要素**と呼ぶ． □

【命題 4.44】 $\mathcal{C}\ell_{r,s}$ の体積要素 ω に対して次の性質が成り立つ：

i) n が奇数の時，$\mathcal{C}\ell_{r,s}$ の中心は $\mathbb{R} + \mathbb{R} \cdot \omega$.

ii) n が偶数の時，$\mathcal{C}\ell_{r,s}$ の中心は $\mathbb{R}$ で，任意の $\phi \in \mathcal{C}\ell_{r,s}$ に対して，$\omega\phi = \alpha(\phi)\omega$.

iii)

$$\omega^2 = \begin{cases} (-1)^s & \text{for } n \equiv 0, 3 (\mathrm{mod} 4) \\ (-1)^{s+1} & \text{for } n \equiv 1, 2 (\mathrm{mod} 4) \end{cases}$$

□

4.6.3 分類と相互関係

【命題 4.45】 次の $\mathbb{R}$ 代数としての同型が成り立つ：

i) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$:

$$1 \otimes 1 \mapsto (1,1), \quad i \otimes i \mapsto (1,-1), \quad i \otimes 1 \mapsto (i,i), \quad 1 \otimes i \mapsto (-i,i).$$

ii) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathbb{C}(2)$:

$$1 \otimes e_j \mapsto -i\sigma_j, \quad i \otimes e_j \mapsto \sigma_j.$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
Cl_n	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8)\oplus\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
Cl_n^*	$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2)\oplus\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
$\mathbb{C}l_n$	$\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(2)\oplus\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(4)\oplus\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(8)\oplus\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(16)$

表 2: $n=1,\cdots,8$ に対する Clifford 代数の分類

iii) $\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H}\cong\mathbb{R}(4)$:

$$\begin{aligned}&e_1\otimes 1\mapsto 1\otimes(-i\sigma_2),\quad e_2\otimes 1\mapsto(-i\sigma_2)\otimes\sigma_3,\\&1\otimes e_1\mapsto\sigma_3\otimes(i\sigma_2),\quad 1\otimes e_2\mapsto(i\sigma_2)\otimes 1.\end{aligned}$$

□

【命題 4.46】 $n=1,\cdots,8$ に対して，$Cl_n, Cl_n^*, \mathbb{C}l_n$ は表 2 で与えられる． □

【定理 4.47 (周期性)**】** 次の代数としての同型が成り立つ：

$$\begin{aligned}Cl_n&\cong Cl_{n-2}^*\otimes Cl_2\cong Cl_{n-2}^*\otimes\mathbb{R}(2)\\Cl_n^*&\cong Cl_{n-2}\otimes Cl_2^*\cong Cl_{n-2}\otimes\mathbb{H}\\Cl_{r,s}&\cong Cl_{r-1,s-1}\otimes Cl_{1,1}\cong Cl_{r-1,s-1}\otimes\mathbb{R}(2).\end{aligned}$$

特に，Cl_n と Cl_n^* に対して n に関する次の周期 8 の周期性がある：

$$\begin{aligned}Cl_{n+8}&\cong Cl_n\otimes Cl_8\cong Cl_n\otimes\mathbb{R}(16),\\Cl_{n+8}^*&\cong Cl_n^*\otimes Cl_8^*\cong Cl_n^*\otimes\mathbb{R}(16).\end{aligned}$$

また，次の対称性がある：

$$Cl_{r,s}\cong Cl_{r-4,s+4},\quad Cl_{r,s+1}\cong Cl_{s,r+1}.$$

さらに，これらより $\mathbb{C}l_n$ に対して次の周期性が成り立つ：

$$\mathbb{C}l_{n+2}\cong\mathbb{C}l_n\otimes\mathbb{C}l_2\cong\mathbb{C}l_n\otimes\mathbb{C}(2).$$

□

n	$C\ell_n$	ν_n	d_n	K_n	$\mathscr{M}_n$	$\mathbb{C}\ell_n$	$\nu_n^{\mathbb{C}}$	$d_n^{\mathbb{C}}$	$\mathscr{M}_n^{\mathbb{C}}$
1	$\mathbb{C}$	1	2	$\mathbb{C}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$	2	1	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$
2	$\mathbb{H}$	1	4	$\mathbb{H}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{C}(2)$	1	2	$\mathbb{Z}$
3	$\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$	2	4	$\mathbb{H}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$\mathbb{C}(2)\oplus\mathbb{C}(2)$	2	2	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$
4	$\mathbb{H}(2)$	1	8	$\mathbb{H}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{C}(4)$	1	4	$\mathbb{Z}$
5	$\mathbb{C}(4)$	1	8	$\mathbb{C}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{C}(4)\oplus\mathbb{C}(4)$	2	4	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$
6	$\mathbb{R}(8)$	1	8	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{C}(8)$	1	8	$\mathbb{Z}$
7	$\mathbb{R}(8)\oplus\mathbb{R}(8)$	2	8	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$\mathbb{C}(8)\oplus\mathbb{C}(8)$	2	8	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$
8	$\mathbb{R}(16)$	1	16	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{C}(16)$	1	16	$\mathbb{Z}$

表 3: $n = 1, \cdots, 8$ に対する Clifford 代数の表現

4.6.4 表現

【定義 4.48】 k を体 K の部分体とするとき，$C\ell(V,q)$ から K 線形空間 W の線形変換の作る代数への k 代数としての準同型

$$\rho : C\ell(V,q) \to \mathrm{Hom}_K(W,W)$$

を $C\ell(V,q)$ の K-表現と呼ぶ．また，この表現のもとで，W を K 上の $C\ell(V,q)$-加群と呼ぶ． □

【定理 4.49 (表現定理)】 $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のとき，行列代数 $M(n,K) = \mathrm{Hom}_K(K^n, K^n)$ の既約表現は自明な表現と K^n への基本表現に限られる．これより Cliffor 代数 $C\ell_n(\mathbb{C}\ell_n)$ の $n = 1, \cdots, 8$ に対する実（複素）既約表現の個数 $\nu_n(\nu_n^{\mathbb{C}})$，既約表現の次元 $d_n(d_n^{\mathbb{C}})$，各既約表現の可換部分代数 K_n，表現環 $\mathscr{M}_n(\mathscr{M}_n^{\mathbb{C}})$ は，表 3 のようになる．さらに，これらの指標は次の周期性を持つ：

$$\begin{aligned}
&\nu_{m+8k} = \nu_m, \quad \nu_{m+2k}^{\mathbb{C}} = \nu_m^{\mathbb{C}}, \\
&d_{m+8k} = 2^{4k} d_m, \quad d_{m+2k}^{\mathbb{C}} = 2^k d_m^{\mathbb{C}}, \\
&\mathscr{M}_{m+8k} \cong \mathscr{M}_m, \quad \mathscr{M}_{m+2k}^{\mathbb{C}} \cong \mathscr{M}_m^{\mathbb{C}}, \\
&K_{m+8k} \cong K_m.
\end{aligned}$$

□

4.7　非結合的代数

【定義 4.50 (非結合的代数)】　体 K 上の線形空間 A に乗法が定義されていて，それが双線形写像であるとする．このとき，乗法が結合的でないなら，A を**非結合的代数** (non-associative algebra) あるいは単に対数と呼ぶ．　□

【定義 4.51 (中心)】　代数 A において，任意の $a, b \in A$ に対し次の 3 条件が満たされるとき，$c \in A$ は中心の元となる：

i) $ac = ca$

ii) $a(bc) = (ab)c$

iii) $a(cb) = (ac)b$

A が単位元をもち，その中心が基礎体 K と一致するとき，A は**中心的** (central) と言われる．　□

【定義 4.52 (ベキ結合的代数)】　代数 A の 1 つの元で生成される部分代数が結合的であるとき，A を**ベキ結合的代数** (power associative algebra) と呼ぶ．Jordan ダイス，交代代数はベキ結合的代数である．　□

4.7.1　交代代数

【定義 4.53 (交代代数)】　非結合的代数 A が次の条件を満たすとき，**交代代数** (alternative algebra) という：

i) $au^2 = (au)u$

ii) $u^2a = u(ua)$

さらに，$ax = b,\ ya = b\ (a \neq 0)$ が x, y に関して常に解をもつとき，A は**交代体** (alternative field) という．　□

【定義 4.54 (合成代数)】　標数が 2 でない体 K 上の有限次元代数 A が，単位元 1 を持ち，非退化 2 次形式 $N : A \to K$ が定義されていて $N(xy) = N(x)N(y)(x, y \in A)$ が成り立つとき，A を**合成代数** (composition algebra) または**組成代数**という．このとき，次の i)，ii)，iii) が成立する:

i) A はノルム N を持つ**2次代数**になる．すなわち，

$$f(x,y) = (1/2)(N(x+y) - N(x) - N(y))$$

とおけば，任意の $x \in A$ に対して

$$x^2 - 2f(x,1)x + N(x)1 = 0$$

が成り立つ．

$$\bar{x} = 2f(x,1)1 - x$$

とおけば，上式は，

$$x\bar{x} = \bar{x}x = N(x)1$$

を意味する．

ii) 上の $x \mapsto \bar{x}$ は対合（involution）になる．すなわち

$$\bar{1} = 1, \bar{\bar{x}} = x, \overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$$

が成り立つ．これを合成代数 A の**標準的対合** (canonical involution) という．

iii) A は交代代数になる．

一般に i)，ii) が成り立つような代数を**対合的2次代数** (involutive quadratic algebra) という．逆に非退化なノルムを持つ交代的2次代数は合成代数になる． □

【命題 4.55 (Cayley-Dickson 構成法)】 A を K 上の対合的2次代数，$\alpha \in K^\times$ に対して，次の方法で対合的2次代数となる $A' = A \times A$ が構成され，A が結合的合成代数なら A' も合成代数となる：

i) 演算： $A' \ni x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ に対し．

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \quad xy = (x_1y_1 + \alpha\bar{y}_2x_2, y_2x_1 + x_2\bar{y}_1)$$

ii) A と $Ax0$ を同一視し，$K \subset A \subset A'$ と埋め込み，$1' = 1$.

iii) ノルム：

$$N(x) = N(x_1) - \alpha N(x_2).$$

$\square$

【**定理 4.56 (Hurwitz の定理)**】　Cayley-Dickson 構成法により，$A = K$ から出発して，合成代数を順次作ることができる：

$$K \;\Rightarrow\; K\text{ の 2 次拡大} \;\Rightarrow\; K\text{ 上の 4 元数環} \;\Rightarrow\; K\text{ 上の 8 元数環}$$

K の標数が 2 と異なるならば，K 上の合成代数はこれらによって尽くされる． $\square$

【**定理 4.57**】

1. $\alpha = 1$ として Cayley-Dickson 構成法により作られる合成代数の系

   $$K \;\Rightarrow\; K \oplus K \;\Rightarrow\; M_2(K) \;\Rightarrow\; \mathrm{Oct}(K)$$

   を**分解型**という．これらは，零因子をもつ合成代数として特徴付けられる．

2. $\alpha = -1$ として, $K = \mathbb{R}$ から Cayley-Dickson 構成法により作られる合成代数の系

   $$\mathbb{R} \;\Rightarrow\; \mathbb{C} \;\Rightarrow\; \mathbb{H} \;\Rightarrow\; \mathbb{O}$$

   により，$\mathbb{R}$ 上のすべての非分解型合成代数が尽くされる．

$\square$

4.7.2　Jordan 代数

諸定義

【**定義 4.58 (Jordan 代数)**】　非結合的代数 A が次の条件を満たすとき，**Jortan 代数**という：

i) $ac = ca$

ii) $a^2(ua) = (a^2u)a$

$\square$

【命題 **4.59** (可換な交代代数)】 可換な交代代数は Jordan 代数となる． □

【定義 **4.60** ($(A)_{\mathrm{J.alg}}$, **自由 Jordan 代数** $J_0^{(n)}$)】

1. R を体 K 上の有限次元結合的代数とするとき，R に新しい乗法 $\cdot$ を $a \cdot b := (ab + ba)/2$ で定義すると，$A = (R, \cdot)$ は Jordan 代数となる．これを $(\boldsymbol{R})_{\mathbf{J.alg}}$ と書く．

2. 自由多元環 $R = K\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$ に対し，$1, x_1, \cdots, x_n$ で生成される $(R)_{\mathrm{J.alg}}$ の部分代数を，自由生成元 x_i をもつ**自由 Jordan 代数**と呼び，$\boldsymbol{J_0^{(n)}}$ と表す．

3. Jordan 代数 A が結合的代数 R に対して $(R)_{\mathrm{J.alg}}$ の部分代数とならないとき，**例外的** (で) あるという．

□

【定義 **4.61** (**Peirce 分解**)】 Jordan 代数 A とそのべき等元 $e(e^2 = e)$ および数 $\lambda \in K$ に対し，

$$A_e(\lambda) := \{x \in A \mid \ ex = \lambda x\} \tag{4.7.1}$$

とおく．このとき，

1. A は常に e に関する Peirce 分解を持つ:

$$A = A_e(1) \oplus A_e(1/2) \oplus A_e(0). \tag{4.7.2}$$

2. 単位元 1 が互いに直交するべき等元 e_i の和で書けるとき ($1 = \sum_i e_i, \quad e_i e_j = \delta_{ij} e_i$),

$$A = \oplus_{i \leqslant j} A_{ij} : \quad A_{ii} = A_{e_i}(1), \quad A_{ij} = A_{e_i}(1/2) \cap A_{e_j}(1/2) \ (i < j) \tag{4.7.3}$$

となる．A_{ij} を A の **Peirce 空間**と呼ぶ．

3. すべての i に対して $A_{ii} = K e_i + N_i$ で N_i が A_{ii} のベキ零イデアルであるとき，A は**被約代数** (reduced algebra) であるという．このとき，e_i の個数を A の**次数** (degree) という．

□

【**命題 4.62** (係数拡大)】　Jordan 代数 A に対して，その基礎体 K の有限次分離拡大体 K' で，$A' = A \otimes_K K'$ が被約となるものがある．このとき，A' の次数を A の**絶対次数** (absolute degree) という．A が被約かつ単純であるとき，$A_{ij}(i < j)$ の次元は一定となる．　□

分類

【**命題 4.63** (可換な 2 次代数)】　内積 $f(x, y)$ をもつ線形空間 A において，$f(v_0, v_0) = 1$ となる元 v_0 が存在するとする．このとき，A における可換な積を

$$xy = f(x, v_0)y + f(y, v_0)x - f(x, y)v_0$$

により定義すると，この積に関して A は $v_0 = 1$ を単位元とする可換な 2 次代数でかつ Jordan 代数になる．特に f が非退化ならば，A は絶対次数 2 の中心的単純 Jordan 代数になり，逆にこのような Jordan 代数は非退化対称双 1 次形式 f から上のようにして得られる．A が被約になるためには，$x \neq 0$ に対して $N(x) = f(x, x) = 0$ となることが必要十分である．

具体的には，$v_0 = 1$ と $v_1 = v$ を

$$f(1, 1) = 1, \quad f(v, v) = -1, \quad f(1, v) = 0 \tag{4.7.4}$$

となるように取ると，$v^2 = 1$ より

$$e_1 = \frac{1}{2}(1 + v), \quad e_2 = \frac{1}{2}(1 - v) \tag{4.7.5}$$

が直交するべき等元による 1 の分解を与え，Peirce 空間は

$$A_{11} = Ke_1, \quad A_{22} = Ke_2, \quad A_{12} = \langle 1, v \rangle^{\perp}. \tag{4.7.6}$$

□

【**定理 4.64** (被約単純 Jordan 代数の分類)】　K を標数ゼロの体とするとき，K 上の被約単純 Jordan 代数は次のもので尽くされる：

次数 $r = 1$　$A = K$.

次数 $r = 2$　可換な 2 次代数.

次数 $r \geqslant 3$　C を K 上の d 次元合成代数，$R = M_r(C)$ とするとき，

$d = 1, 2, 3$ a を $M_r(K)$ の可逆対角元とするとき，

$$\mathrm{Her}_r(C, a) := \left\{ x \in M_r(C) \,\middle|\, x = a^{-1}\,{}^t\bar{x}a \right\} \tag{4.7.7}$$

に対応する $(M_r(K))_{\mathrm{J.arg}}$ の部分 Jordan 代数．

$d = 8$ 積を $x \cdot y = (xy + yx)/2$ で定義すると，$\mathrm{Her}_3(C)(a = 1)$ は次元 27，次数 $r = 3$ の例外型 Jordan 代数となる．

□

5　体

5.1　諸定義

【定義 5.1 (素体)】　可換体 K は，その部分体が必ず K と一致するとき**素体** (prime field) という． $\square$

【定義 5.2 (標数)】　体 K の単位元 1 の n 個の和 $n1$ が 0 となる自然数 n が存在するとき，その最小値 p は素数となり，**標数** (characteristic) という．また，そのような自然数が存在しないときには，標数は 0 であるという． $\square$

5.2　拡大体

5.2.1　基礎事項

【定義 5.3 (拡大次数)】　体 L が体 K の拡大体であるとき，L を K-加群とみたときの次元を**拡大次数**といい，$[L:K]$ で表す：

$$[L:K] := \dim_K L$$

$\square$

【定理 5.4 (拡大次数の連鎖律)】　体の拡大 $K \subset L \subset M$ に対して，

$$[M:K] = [M:L][L:K]$$

が成り立つ．特に，L が K の有限次拡大体で，さらに M が L の有限次拡大体なら，M は K の有限次拡大体である． $\square$

【定義 5.5 (代数拡大)】　L を体 K の拡大体とする．L の元 α が K 上**代数的** (algebraic) であるとは，K を係数とする多項式 $f(X)(\neq 0) \in K[X]$ が存在して，$f(\alpha) = 0$ となることである．特に，L のすべての元が K 上代数的となるとき，L は K の**代数拡大体** (algebraic extension) であるという． $\square$

【定理 5.6 (根体)】　$K[X]$ の任意の既約多項式 $f(X)$ に対し，

$$M = K(\theta), \quad f(\theta) = 0$$

となる K の拡大体 M が一意的に存在し，$K[X]/(f)$ と同型となる． $\square$

【命題 5.7 (有限次代数拡大)】 L が K の有限次拡大体なら，K の代数拡大体である．逆に，K に K 上代数的な元を有限個付加して得られる拡大体 $K(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ は，K 上有限次拡大体となる．特に，n 次の既約多項式 $f(X)$ に対して，その根体は K 上の n 次拡大体となる． □

【定義 5.8 (代数的閉体)】 体 K は，K 上の代数方程式が必ず K に解を持つとき，**代数的に閉じている** (algebraically closed) という． □

【定義 5.9 (代数的閉包)】 体 K の拡大体 Ω は，つぎの 2 条件を満たすとき，K の代数的閉包という：

(1) Ω は代数的に閉じている．

(2) Ω は K の代数拡大である．

□

【定理 5.10 (代数的閉包の存在 [Steinitz E (1910)])】 K を任意の体とするとき，その代数的閉包が同型を除いて一意的に存在する． □

5.3 有限体

【定理 5.11 (Wedderburn)】 有限な非可換体は存在しない．[岩波数学事典; Wederburn JHM 1905; Witt E 1931] □

【定理 5.12 (有限体の分類)】 有限体の標数は素数 p で，元の個数は $p^\alpha (\alpha \in \mathbb{N})$ となる．逆に，任意の素数 p と自然数 α に対して，元の個数が p^α となる有限体が同型を除いて一意的に存在する．この体を $GF(p^\alpha)$ または $\mathbb{F}_q (q = p^\alpha)$ と表記する．特に，素数 p に対して，$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p$ である．[岩波数学事典] □

参考文献

[1] 山崎圭次郎：環と加群 (岩波書店, 1990).

[2] 横田一郎：群と位相 （裳華房，1973）.

[3] A.O. Barut and R. Raczka: Theory of group representations and applications.

[4] 竹内外史： リー代数と素粒子論（裳華房，1983）.

[5] H.B. Lawson, Jr. and M-L. Michelsohn: *Spin Geometry* (Princeton Univ. Press, 1989).