

# 公式集

Last update: 2023 年 3 月 29 日

## 目次

<b>1</b>	<b>公式集：代数</b>	<b>10</b>
1.1	初等代数	10
1.1.1	多項式	10
1.1.2	線形代数	11
1.1.2.1	行列一般	11
1.1.2.2	疎行列の行列式	12
1.1.2.3	シンプレクティック行列	12
1.2	古典群	13
1.2.1	線形群	13
1.2.2	A 型	13
1.2.2.1	SL(2) 系	13
1.2.2.2	SU(3)	17
1.2.3	B 型, D 型	18
1.2.3.1	SO( $D - 1, 1$ )	18
1.2.3.2	SO(3)	19
1.3	Clifford 代数	19
1.3.1	$\Gamma$ 行列	19
1.3.1.1	基本事項	19
1.3.1.2	反対称化公式	20
1.3.1.3	展開公式	22
1.3.1.4	Trace 公式	24
1.3.1.5	双対公式	24
1.3.1.6	Fierz 恒等式	25
1.3.1.7	荷電共役変換	26
1.3.1.8	スピノール双一次形式	33
1.3.2	様々な表示	34
1.3.2.1	一般論	34
1.3.2.2	テンソル積型表示 (Minkowski)	35
1.3.2.3	テンソル積型表示 (Euclidian)	37

1.3.2.4	Majorana 表示	40
1.3.2.5	Weyl 表示	41
1.3.3	SO(6) スピノール	43
1.3.3.1	諸定義	43
1.3.3.2	Fierz 恒等式	44
1.3.3.3	形式系	45
1.3.4	SO(7) スピノール	47
1.3.4.1	諸定義	47
1.3.4.2	部分代数	48
1.3.4.3	SO(8) 型表示	48
1.3.5	SO(8) スピノール	49
1.3.5.1	$\Gamma$ 行列の関係式	49
<b>2</b>	<b>公式集：解析</b>	<b>52</b>
2.1	常微分方程式	52
2.1.1	2階微分方程式	52
2.1.1.1	基本解	52
2.1.1.2	Green 関数法	52
2.1.1.3	自己共役作用素	53
2.1.1.4	Fuchs 型方程式	54
2.1.1.5	特異点近傍での級数解	55
2.1.1.6	Klein-Gordon 方程式関連	57
2.1.1.7	具体例	58
2.2	特殊関数	59
2.2.1	$\Gamma$ 関数	59
2.2.1.1	定義と基本的性質	59
2.2.2	超幾何関数	60
2.2.2.1	定義と基本的性質	60
2.2.2.2	$F(\alpha, \beta, -n; z)$	61
2.2.2.3	$F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + n; z)$	63
2.2.2.4	他の関数との対応	63
2.2.2.5	積分表示	63
2.2.3	直交多項式	64
2.2.3.1	Legendre 多項式	64
2.2.3.2	Gegenbauer 多項式	65
2.2.3.3	Jacobi 多項式	66

2.2.4	球関数 . . . . .	67
2.2.4.1	定義と基本的性質 . . . . .	67
2.2.4.2	積分表示 . . . . .	71
2.2.4.3	Spin-weighted spherical harmonics . . . . .	72
2.2.5	Bessel 関数 . . . . .	74
2.2.5.1	定義と基本性質 . . . . .	74
2.2.5.2	球 Bessel 関数 . . . . .	75
2.2.5.3	積分表示 . . . . .	76
2.3	定積分 . . . . .	78
2.3.1	$\Gamma$ 型 . . . . .	78
2.3.2	Bessel 型 . . . . .	78
2.3.3	$\delta$ 関数関連 . . . . .	79
2.3.4	Feynman 積分 . . . . .	79
2.3.4.1	一般公式 . . . . .	79
2.4	調和テンソル . . . . .	80
2.4.1	調和関数 . . . . .	80
2.4.1.1	一般論 . . . . .	80
2.4.1.2	球面上の調和関数 . . . . .	80
2.4.1.3	2次元球面上の調和関数 . . . . .	83
2.4.2	調和ベクトル . . . . .	85
2.4.2.1	一般論 . . . . .	85
2.4.2.2	球面上の調和ベクトル . . . . .	86
2.4.3	調和2階テンソル . . . . .	87
2.4.3.1	一般論 . . . . .	87
2.4.3.2	球面上の調和2階テンソル . . . . .	88
2.4.4	Spin-weighted Spheroidal Harmonics . . . . .	100
2.5	幾何学量 . . . . .	102
2.6	偏微分方程式 . . . . .	103
2.6.1	1階 PDE 系 . . . . .	103
2.6.1.1	Paffian 系 . . . . .	103
<b>3</b>	<b>公式集：一般相対論</b>	<b>104</b>
3.1	微分形式 . . . . .	104
3.1.1	基本演算 . . . . .	104
3.1.2	Hodge 双対 . . . . .	106
3.1.2.1	定義 . . . . .	106

3.1.2.2	代数的性質 . . . . .	108
3.1.2.3	微分演算子との関係 . . . . .	110
3.2	接続形式と曲率テンソル . . . . .	111
3.2.1	基本定義 . . . . .	111
3.2.2	スピノールの接続 . . . . .	113
3.2.3	一般公式 . . . . .	113
3.2.3.1	曲率テンソルと捩れテンソル . . . . .	113
3.2.3.2	微分交換子 . . . . .	116
3.2.3.3	双対公式 . . . . .	117
3.2.4	Weyl tensor . . . . .	117
3.2.4.1	Weyl 変換 . . . . .	119
3.2.4.2	Chiral 分解 . . . . .	120
3.2.4.3	Petrov タイプ . . . . .	123
3.2.4.4	Principal null direction . . . . .	124
3.2.5	Bach tensor . . . . .	126
3.2.6	Newman-Penrose 形式 . . . . .	126
3.2.6.1	接続係数 . . . . .	126
3.2.7	$(n + 1)$ 分解 . . . . .	129
3.2.7.1	接続の分解 . . . . .	129
3.2.7.2	曲率の分解 . . . . .	129
3.2.7.3	Ricci 曲率の分解 . . . . .	130
3.2.7.4	RW 時空 . . . . .	131
3.2.8	$(n + m)$ 分解 . . . . .	132
3.2.9	Null Frame . . . . .	136
3.2.10	2次元系 . . . . .	140
3.2.10.1	2D 空間 . . . . .	140
3.2.10.2	2D 時空 . . . . .	142
3.2.11	定常時空 . . . . .	143
3.2.11.1	直交分解型表示 . . . . .	143
3.2.11.2	$(n+1)$ 分解型表示 . . . . .	144
3.2.12	光的定常系 . . . . .	146
3.2.12.1	非回転的な場合 . . . . .	146
3.2.13	球対称系 . . . . .	148
3.2.13.1	3D Riemann . . . . .	148
3.2.13.2	$(m + 1)$ -dim Riemann . . . . .	149

3.2.13.3	4D Static Riemannian . . . . .	150
3.2.13.4	4D Lorenzian:general . . . . .	151
3.2.13.5	4D Weyl tensor . . . . .	153
3.2.13.6	4D Lorenzian: Null frame . . . . .	154
3.2.13.7	Janis-Newman-Winicour 時空 . . . . .	155
3.2.13.8	$(n + 2)$ 次元球対称 Lorentz 系 . . . . .	158
3.2.13.9	$(n + 2)$ 次元静的球対称系 . . . . .	159
3.2.14	静的 $SO(n + 1)$ 対称系 . . . . .	162
3.2.15	Cohomogeneity one . . . . .	165
3.2.15.1	単純回転型 . . . . .	165
3.2.16	Warped product I 型 . . . . .	168
3.2.16.1	Geometry . . . . .	168
3.2.16.2	保存エネルギー束 . . . . .	169
3.2.17	Warped product $I^p$ 型 . . . . .	170
3.2.18	Warped product II 型 . . . . .	172
3.2.19	空間的に一様な系 . . . . .	176
3.2.20	定常軸対称系 . . . . .	179
3.2.21	$\mathbb{R}^n$ -不変系 . . . . .	183
3.2.22	$X \times G/H$ 系 . . . . .	185
3.3	球対称解 . . . . .	190
3.3.1	4次元 . . . . .	190
3.3.1.1	Schwarzschild 解 . . . . .	190
3.3.2	高次元解 (Einstein 理論) . . . . .	191
3.3.3	高次元解 (Einstein-Maxwell) . . . . .	192
3.3.4	高次元解 (Einstein-Gauss-Bonnet) . . . . .	193
3.3.5	測地線 . . . . .	193
3.3.5.1	円軌道 . . . . .	194
3.4	3次元解 . . . . .	195
3.4.1	真空解 . . . . .	195
3.4.2	BTZ ブラックホール . . . . .	196
3.5	4次元円筒対称解 . . . . .	198
3.5.1	4次元静的円筒対称真空解 . . . . .	198
3.6	4次元定常軸対称解 . . . . .	199
3.6.1	Ernst Formalism . . . . .	199
3.6.2	$(\rho, z)$ 座標系での表示 . . . . .	199

3.6.2.1	$(x, y)$ 座標での表示 . . . . .	200
3.6.3	Weyl 解 . . . . .	201
3.6.4	Kerr 解 . . . . .	203
3.6.4.1	計量 . . . . .	203
3.6.4.2	horizon . . . . .	205
3.6.4.3	測地線 . . . . .	206
3.6.4.4	スピン接続係数 . . . . .	207
3.6.5	Kerr-Newman 解 . . . . .	212
3.6.6	C-metric . . . . .	215
3.6.7	TS 解 . . . . .	221
3.6.7.1	TS2 . . . . .	224
3.6.8	Toroidal ブラックホール . . . . .	225
3.6.8.1	Lemos-Zanchin 解 . . . . .	225
3.6.8.2	Klemm-Moretti-Vanzo 解 . . . . .	225
3.6.9	Einstein-Maxwell-dilaton 系 . . . . .	226
3.7	5次元軸対称解 . . . . .	229
3.7.1	KK タイプの真空解 . . . . .	229
3.8	5次元ブラックリング解 . . . . .	231
3.8.1	Emparan-Reall 解 . . . . .	231
3.8.1.1	計量 . . . . .	231
3.8.1.2	回転正則ブラックリング解 . . . . .	235
3.8.1.3	MP 極限 . . . . .	236
3.8.2	Pomeransky-Senkov 解 . . . . .	237
3.8.3	双極子型ブラックリング解 . . . . .	238
3.9	一様系 . . . . .	241
3.9.1	群の不変計量 . . . . .	241
3.9.2	単純一様系の分類 . . . . .	242
3.9.2.1	一般論 . . . . .	242
3.9.2.2	2次元一様系 . . . . .	242
3.9.2.3	3次元一様系 . . . . .	243
3.9.3	Thurston type . . . . .	247
3.9.4	行列群の不変基底 . . . . .	248
3.9.5	対称空間 . . . . .	250
3.9.5.1	$GL(n)$ と $RH(n)$ . . . . .	250
3.10	定曲率空間 . . . . .	256

3.10.1	2次超曲面による実現	256
3.10.2	共形変換	257
3.10.3	様々な座標系	259
3.10.3.1	球面	259
3.10.3.2	Euclidean空間	260
3.10.3.3	双曲空間	260
3.10.3.4	de Sitter時空	261
3.10.3.5	Anti de Sitter時空	262
3.10.3.6	(a)dS <sup>3</sup>	264
3.10.4	場の振る舞い	264
3.10.4.1	反 de Sitter時空	264
3.11	Einstein空間	266
3.11.1	モジュライ	266
3.12	複素多様体	267
3.12.1	Kähler多様体	267
3.12.1.1	代数多様体	267
3.13	ブレイン解	268
3.13.1	ブラックストリング	268
3.14	回転ブラックホール解	269
3.14.1	GLPP解	269
3.14.1.1	GLPP解のKerr-Schild形:	269
3.14.1.2	Boyer-Lindquist形	270
3.14.2	単純GLPP解	273
3.14.2.1	Kerr-Schild形	273
3.14.2.2	Boyer-Lindquist形	275
3.14.2.3	共通の性質	277
3.14.2.4	AdSブラックホール	279
3.15	$F(R)$ 重力	281
3.15.1	一般論	281
3.15.1.1	基礎方程式	281
3.15.2	厳密解	281
3.15.2.1	静的球対称真空解	281
3.16	超重重力理論	281
3.16.1	5次元 IIA/K3×S <sup>1</sup>	281
3.16.1.1	理論内容	281

3.16.1.2	BMPV 解	282
3.17	ブラックホール熱力学	284
3.17.1	4次元ブラックホール	284
3.17.1.1	球対称ブラックホール	284
3.17.1.2	回転ブラックホール	284
3.18	光学	285
3.18.1	一般論	285
3.18.2	球対称系	285
3.19	正準理論	286
3.19.1	スカラ場系	286
3.19.1.1	球対称系	286
3.20	摂動論	286
3.20.1	1次摂動	286
3.20.1.1	計量・接続・曲率	286
3.20.1.2	Einstein 方程式	287
3.20.1.3	摂動の $(m+n)$ 分解	289
3.20.1.4	諸公式	294
3.20.2	2次摂動	294
3.20.2.1	計量・接続・曲率	294
3.20.2.2	Einstein-Hilbert 作用	296
3.20.2.3	理想流体の作用	296
3.20.2.4	Chern-Simons 型作用 (4D)	297
3.21	諸定理	298
3.21.1	共形 Killing ベクトル	298
3.21.2	共形変換	300
3.21.3	保存則	303
3.22	公式・命題・定理の証明	303
<b>4</b>	<b>公式集：物理一般</b>	<b>305</b>
4.1	電磁気学	305
4.1.1	単位系	305
4.1.1.1	真空中の電磁気学	305
4.2	量子論	306
4.2.1	井戸型ポテンシャル	306
4.2.1.1	階段ポテンシャル	307
4.2.1.2	簡単な井戸型ポテンシャル	308



4.3	素粒子物理	309
4.3.1	散乱断面積	309
4.3.1.1	一般論	309
4.4	統計物理	309
4.4.1	熱力学関係式	309
4.4.1.1	熱力学的ポテンシャル	309
4.4.2	自由粒子	310
4.4.2.1	一般公式	310
4.4.2.2	近似式	310
4.5	宇宙物理	312
4.5.1	宇宙論	312
4.5.1.1	CMB	312
4.5.1.2	水素再結合	312
4.5.1.3	Hubble ホライズンサイズ	312
4.5.2	ブラックホール	313
4.5.2.1	成長	313
4.5.2.2	蒸発	313
4.5.3	磁場	314
4.5.3.1	ジャイロ運動	314

# 1 公式集：代数

Last update: 2021/2/8

## 1.1 初等代数

### 1.1.1 多項式

【公式 1.1 (基本対称式)] 変数  $X_1, \dots, X_n$  の  $\nu$  次の基本対称式を

$$\sigma_\nu = \sum_{i_1 < \dots < i_\nu} X_{i_1} \cdots X_{i_\nu} \quad (1.1.1)$$

とおくとき，対称式

$$s_\nu = \sum_i X_i^\nu \quad (1.1.2)$$

は，次の漸化式に従う：

$$\nu = 1, \dots, n : s_\nu = \sigma_1 s_{\nu-1} - \sigma_2 s_{\nu-2} + \cdots + (-1)^\nu \sigma_{\nu-1} s_1 - (-1)^\nu \nu \sigma_\nu, \quad (1.1.3a)$$

$$\nu = n+1, \dots : s_\nu = \sigma_1 s_{\nu-1} - \sigma_2 s_{\nu-2} + \cdots + (-1)^\nu \sigma_{\nu-1} s_{\nu-n+1} - (-1)^\nu \sigma_\nu s_{\nu-n}. \quad (1.1.3b)$$

特に， $\nu = 1, \dots, 4$  に対して，

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma_1, & s_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2, & s_3 &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3, \\ s_4 &= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

また，

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= s_1, & \sigma_2 &= \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2), & \sigma_3 &= \frac{1}{6}(2s_3 - 3s_1s_2 + s_1^3), \\ \sigma_4 &= \frac{1}{24}(s_1^4 - 6s_1^2s_2 + 8s_1s_3 + 3s_2^2 - 6s_4). \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

□

## 1.1.2 線形代数

## 1.1.2.1 行列一般

【公式 1.2 (行列式)】  $A, B, C, D \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$  に対し,

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det (BDB^{-1}A - BC) = \det (AD - ACA^{-1}B).$$

□

【公式 1.3 (Fierz 型恒等式)】 線形空間  $V$  の自己準同型の全体  $\text{End}(V)$  は,  $V$  上の行列の集合  $M(V)$  と同型で,  $V$  の双対空間を  $V^*$  で表すとき

$$M(V) \cong V \otimes V^*$$

が成り立つ. 同様に,  $M(V)$  の自己準同型の全体は

$$\text{End}(M(V)) \cong M(V) \otimes M(V)^*$$

と表される.

いま,  $E_I (I = 1, \dots, N)$  を  $M(V)$  の基底で

$$\text{Tr}(E_I E_J) = C_I \delta_{IJ}$$

を満たすものとする,

$$\text{id}_{M(V)} = \sum_I \frac{1}{C_I} E_I \otimes E_I^*; \quad E_I^*(A) = \text{Tr}(E_I A)$$

が成り立つ. これより,  $a, b \in V$  に対して,  $\tilde{a} \in V^*$  を  $\tilde{a}(x) = {}^T a x, x \in V$  と定義するとき,

$$a \otimes \tilde{b} = \sum_I \frac{1}{C_I} E_I ({}^T b E_I a)$$

が成り立つ. 特に, 任意の  $c, d \in V$  に対して,

$$(c \otimes \tilde{d})^*(a \otimes \tilde{b}) = \sum_I \frac{1}{C_I} ({}^T d E_I c) ({}^T b E_I a)$$

となる. よって,  $(b, a) \equiv ({}^T b a)$  と定義すると,

$$(b, a)(d, c) = \sum_i \frac{1}{C_I} (b, E_I c)(d, E_I a)$$

が得られる. □

## 1.1.2.2 疎行列の行列式

【公式 1.4】  $n$  次正方行列

$$A_{jk} = a\delta_{jk} + b(\delta_{jk+1} + \delta_{j+1k}), \quad j, k = 1, \dots, n$$

に対して, その行列式  $\Delta_n$  は次の漸化式を満たす:

$$\begin{aligned} \Delta_n &= a\Delta_{n-1} - b^2\Delta_{n-2}, \\ \Delta_1 &= a, \quad \Delta_2 = a^2 - b^2. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \frac{\lambda_+^{n+1} - \lambda_-^{n+1}}{\sqrt{a^2 - 4b^2}}, \\ \lambda_{\pm} &\equiv \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}. \end{aligned}$$

例えば,

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = a^3 - 2ab^2.$$

□

## 1.1.2.3 シンプレクティック行列

【命題 1.5 ( $J^2 = -1$ )】

$2n$  次の実行列  $J \in \text{GL}(2n, \mathbb{R})$  が  $J^2 = -1$  を満たすとき, 適当な正則行列  $S \in \text{GL}(2n, \mathbb{R})$  が存在して,

$$J = SJ_0S^{-1}; \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

ここで,  $J_0$  を  $J_0 = \bigoplus^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  と取ることもできる. □

【証明あり】

【命題 1.6 (シンプレクティック形式)】  $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$  とする. このとき,  $T \in \text{GL}(2n, \mathbb{C})$  に対し

$$JT = \bar{T}J \Leftrightarrow T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ -\bar{T}_2 & \bar{T}_1 \end{pmatrix}$$

さらに, この条件を満たす正則行列  $T$  の集合を  $\mathcal{T}$  とするとき, 条件

$${}^T\Delta = -\Delta, \quad {}^TJ\bar{\Delta}J = \Delta$$

を満たす任意の正則行列  $\Delta \in \text{GL}(2n, \mathbb{C})$  は, 変換

$$\Delta' = T^{-1}\Delta {}^T T^{-1}, \quad T \in \mathcal{T}$$

により, 標準型  $\Delta = J$  に変換することができる. \_\_\_\_\_□

【証明あり】

## 1.2 古典群

### 1.2.1 線形群

### 1.2.2 A 型

#### 1.2.2.1 $\text{SL}(2)$ 系

【公式 1.7 ( $\epsilon A \epsilon$ )】  $\epsilon$  を

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.1)$$

とおくと, 任意の  $A \in \text{GL}(2)$  に対して,

$$\epsilon A \epsilon = -(\det A) {}^T A^{-1}. \quad (1.2.2)$$

\_\_\_\_\_□

【定義 1.8 (Pauli 行列)】 Pauli 行列  $\sigma_a (a = 0, 1, 2, 3)$  を

$$\sigma_0 = I_2, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.2.3)$$

により定義する。また,

$$\sigma^a \equiv \eta^{ab} \sigma_b; \quad \sigma^0 = -I_2, \quad \sigma^j = \sigma_j \quad (j = 1, 2, 3), \quad (1.2.4)$$

$$\bar{\sigma}^a \equiv -\epsilon^T \sigma^a \epsilon = -\sigma_a \quad (1.2.5)$$

とおく. \_\_\_\_\_ □

**【公式 1.9 (Pauli 行列の性質)】** Pauli 行列は次の性質を持つ :

$$\sigma_a^\dagger = \sigma_a, \quad (1.2.6)$$

$$\sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j = 2\delta_{jk}, \quad (1.2.7)$$

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\epsilon_{jkl} \sigma_l, \quad (1.2.8)$$

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} + i\epsilon_{jkl} \sigma_l, \quad (1.2.9)$$

$$\bar{\sigma}^a \sigma^b + \bar{\sigma}^b \sigma^a = -2\eta^{ab}, \quad (1.2.10)$$

$$\sigma^a \bar{\sigma}^b + \sigma^b \bar{\sigma}^a = -2\eta^{ab}, \quad (1.2.11)$$

$$\bar{\sigma}^a \sigma^b \bar{\sigma}^c - \bar{\sigma}^c \sigma^b \bar{\sigma}^a = 2i\epsilon^{abcd} \bar{\sigma}_d, \quad (1.2.12)$$

$$\sigma^a \bar{\sigma}^b \sigma^c - \sigma^c \bar{\sigma}^b \sigma^a = -2i\epsilon^{abcd} \sigma_d, \quad (1.2.13)$$

$$\sigma^a \bar{\sigma}^b \sigma^c + \sigma^c \bar{\sigma}^b \sigma^a = 2(\eta^{ac} \sigma^b - \eta^{bc} \sigma^a - \eta^{ab} \sigma^c), \quad (1.2.14)$$

$$\bar{\sigma}^a \sigma^b \bar{\sigma}^c + \bar{\sigma}^c \sigma^b \bar{\sigma}^a = 2(\eta^{ac} \bar{\sigma}^b - \eta^{bc} \bar{\sigma}^a - \eta^{ab} \bar{\sigma}^c), \quad (1.2.15)$$

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a \bar{\sigma}_a^{\dot{\beta}\beta} = -2\delta_{\alpha}^{\beta} \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \quad (1.2.16)$$

また,

$$\sigma^{ab} \equiv -\sigma^{[a} \bar{\sigma}^{b]} = \frac{1}{2} (\sigma^a \sigma^b - \sigma^b \sigma^a) \quad (1.2.17)$$

とおくと,

$$\sigma^{ab\dagger} = -\sigma_{ab}, \quad (1.2.18)$$

$$\sigma^{ab} \sigma^c + \sigma^c \sigma^{ab\dagger} = 2(\eta^{bc} \sigma^a - \eta^{ac} \sigma^b), \quad (1.2.19)$$

$$\sigma^{ab\dagger} \bar{\sigma}^c + \bar{\sigma}^c \sigma^{ab} = -2(\eta^{bc} \sigma^a - \eta^{ac} \sigma^b) \quad (1.2.20)$$

\_\_\_\_\_ □  
**【公式 1.10 (Fierz 型恒等式)】** 任意の複素 2 次元ベクトル  $x, y, z, w \in \mathbb{C}^2$  に対して,

$$(y^\dagger x)(w^\dagger z) = \frac{1}{2} \sum_{a=0}^3 (y^\dagger \sigma_a z)(w^\dagger \sigma_a z) \quad (1.2.21)$$

特に,  $w, y, z = x$  と置くと,

$$\sum_{j=1}^3 (y^\dagger \sigma_a x)^2 = (x^\dagger y)^2. \quad (1.2.22)$$

また, 2次元ベクトル場  $\xi(x)$  が規格化条件  $(\xi^\dagger \xi) = 1$  を満たすとき,

$$i (\xi^\dagger \sigma_j \partial_\mu \xi - \text{h.c.}) = ik_j (\xi^\dagger \partial_\mu \xi - \text{h.c.}) + (k \wedge \partial_\mu k)_j, \quad (1.2.23)$$

$$k_j \equiv (\xi^\dagger \sigma_j \xi). \quad (1.2.24)$$

□

**【公式 1.11 (スピノール表現)】**  $x = (x^a) \in \mathbb{R}^4$  に対して,  $\sigma_a$  を Pauli 行列として

$$\sigma(x) = \sigma_a x^a \quad (1.2.25)$$

とおくと,

$$\det \sigma(x) = -x \cdot x = -\eta_{ab} x^a x^b. \quad (1.2.26)$$

これより,

$$V \sigma(x) V^\dagger = \sigma(\Lambda x) \quad \Leftrightarrow \quad V \sigma_a V^\dagger = \sigma_b \Lambda^b_a \quad (1.2.27)$$

により定義される対応  $V \mapsto \Lambda$  は, 表現

$$\text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{SO}_+(3, 1) \quad (1.2.28)$$

を与える。このとき,

$$\bar{\sigma}^a V \psi = V^{\dagger -1} \Lambda^a_b \bar{\sigma}^b \psi, \quad (1.2.29a)$$

$$\sigma^{ab} V \psi = V \Lambda^a_{a'} \Lambda^b_{b'} \sigma^{a'b'} \psi. \quad (1.2.29b)$$

対応する無限小変換は次の関係により結ばれる：

$$\begin{aligned} \delta V &= -\frac{i}{2} M_{ab} \delta \Lambda^{ab} \\ &= \frac{1}{2} \left( -\delta \Lambda_0^j + \frac{i}{2} \epsilon^{jkl} \delta \Lambda_{kl} \right) \sigma_j. \end{aligned} \quad (1.2.30)$$

とおくと, この式は  $\sigma^{ab}$  を用いて

$$\delta V = \frac{1}{4} \sigma^{ab} \delta \Lambda_{ab} \quad (1.2.31)$$

と表される。 □

【公式 1.12 ( $SU(1, 1) \cong SL(2, \mathbb{R})$ )】

1)  $A \in SU(1, 1)$ , すなわち条件

$$A^\dagger \eta A = \eta; \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.2.32)$$

を満たす行列は, 一般に

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}; \quad |a|^2 - |b|^2 = 1 \quad (1.2.33)$$

と表される.

2)  $T \in SL(2, \mathbb{C})$  を

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2.34)$$

とおくとき,  $SU(1, 1)$  と  $SL(2, \mathbb{R})$  の同型対応が

$$SU(1, 1) \ni A \mapsto TAT^{-1} \in SL(2, \mathbb{R}) \quad (1.2.35)$$

により与えられる.  $TAT^{-1}$  の具体的な成分は

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 + b_2 & a_2 + b_1 \\ -a_2 + b_1 & a_1 - b_2 \end{pmatrix} \quad (1.2.36)$$

3) 行列

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \quad (1.2.37)$$

により定義される対応

$$SU(1, 1) \ni A \mapsto SAS^{-1} \in SL(2, \mathbb{R}) \quad (1.2.38)$$

も同型対応を与える.  $SAS^{-1}$  の具体的な成分は

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & -a_2 + b_2 \\ a_2 + b_2 & a_1 - b_1 \end{pmatrix} \quad (1.2.39)$$

□



【命題 1.13 (Cyclic な  $SL(2, \mathbb{Z})$  の元)】  $SL(2, \mathbb{Z})$  の元  $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$  に対して,

1. 適当な正整数  $n$  に対して  $X^n = 1$  となるのは次の場合に限られる :

- i)  $X^2 = 1$ :  $X = \pm 1$ .
- ii)  $X^3 = 1 (X \neq 1)$ :  $-qr = p^2 + p + 1, \quad p + s = -1$ .
- iii)  $X^3 = -1 (X \neq -1)$ :  $-qr = p^2 - p + 1, \quad p + s = 1$ .

2. 2次元 Euclidean 平面  $E^2$  の基底ベクトルを

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} \quad (1.2.40)$$

として,  $X^3 = \pm 1 (X \neq \pm 1)$  となる  $X \in SL(2, \mathbb{Z})$  を用いて

$$(e_1, e_2) \mapsto (e'_1, e'_2) = (e_1, e_2)X \quad (1.2.41)$$

と表される  $E^2$  の変換  $R$  が等長であるための必要十分条件は

$$\tau_1 = -\frac{2p \pm 1}{2q}, \quad \tau_2 = \frac{\sqrt{3}}{2|q|} \quad (1.2.42)$$

このとき,  $R = R(\pm 2\pi/3)$ .

□

### 1.2.2.2 $SU(3)$

#### Lie 代数

$$[e_a, e_b] = f_{abc}e_c, \quad (1.2.43)$$

$$f_{abc} = f_{[abc]}. \quad (1.2.44)$$

ここで,

$$f_{123} = 1, \quad (1.2.45a)$$

$$f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2}, \quad (1.2.45b)$$

$$f_{458} = f_{678}. \quad (1.2.45c)$$

**Adjoint 表現**

$$(ad(e_a))^b{}_c = f_{bac}. \quad (1.2.46)$$

対応する Killing 形式は

$$K(e_a, e_b) := \text{Tr}_{\text{adj}}(e_a e_b) = -3\delta_{ab}. \quad (1.2.47)$$

ベクトル表現  $e_a = -i\lambda_a/2$  とおくととき,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.2.48)$$

これらに対して,

$$\text{Tr}_v(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}. \quad (1.2.49)$$

**1.2.3 B 型, D 型****1.2.3.1  $\text{SO}(D-1, 1)$** 

【命題 1.14 ( $\mathfrak{so}(D-1, 1)$  の随伴表現に対する共役類 (2006.6.10))】

$(E_{ab})_{cd} = \delta_{ac}\delta_{bd}$  を  $M(D)$  の基底,  $\eta = [-1, +1, \dots, +1]$  を用いて,  $M_{ab} = \eta E_{ab} - \eta E_{ba}$  とおくと,  $M_{ab} (0 \leq a < b \leq D-1)$  は  $\mathfrak{so}(D-1, 1)$  の基底となる. このとき, 任意の元  $A \in \mathfrak{so}(D-1, 1)$  は適当な相似変換  $OAO^{-1} (O \in \text{SO}(D-1, 1))$  を用いて次の 3 つのいずれかに変換できる:

- 1)  $A = \sum_{j=1}^k \mu_j M_{2j-1, 2j}$
- 2)  $A = \sum_{j=0}^k \mu_j M_{2j, 2j+1}$
- 3)  $A = \sum_{j=2}^{2k+1} c_j M_{+j} + \sum_{j=1}^k \mu_j M_{2j, 2j+1}$

ここで,  $M_{+j} = M_{0j} + M_{1j}$ . □

### 1.2.3.2 SO(3)

#### Lie 代数

$$[J_1, J_2] = iJ_3, [J_2, J_3] = iJ_1, [J_3, J_1] = iJ_2. \quad (1.2.50)$$

【公式 1.15 (共役変換)】

$$e^{i\phi J_3} J_1 e^{-i\phi J_3} = \cos \phi J_1 + \sin \phi J_2, \quad (1.2.51a)$$

$$e^{i\phi J_3} J_2 e^{-i\phi J_3} = -\sin \phi J_1 + \cos \phi J_2. \quad (1.2.51b)$$

□

## 1.3 Clifford 代数

### 1.3.1 $\Gamma$ 行列

#### 1.3.1.1 基本事項

【定義 1.16】  $D$  次元空間の  $\Gamma$  行列の反交換関係を

$$\{\Gamma_a, \Gamma_b\} \equiv \Gamma_a \Gamma_b + \Gamma_b \Gamma_a = 2\eta_{ab} \quad (1.3.1)$$

により定義する。また，対応する Clifford 代数の基底を

$$\Gamma_{a_1 \dots a_n} = \Gamma_{[a_1} \dots \Gamma_{a_n]} \quad (1.3.2)$$

とする。

□

【公式 1.17 (中心)】  $\Gamma$  を

$$\Gamma := (-i)^k \Gamma^0 \dots \Gamma^{n-1} = (-i)^k (*\Gamma_{[n]}) \quad (1.3.3)$$

により定義する。ここで，

$$n = 2k + 1 - |\eta|, \quad 2k + 2 - |\eta|. \quad (1.3.4)$$

このとき，

$$\Gamma^2 = 1, \quad (1.3.5a)$$

$$\Gamma \Gamma^a = (-1)^{n-1} \Gamma^a \Gamma. \quad (1.3.5b)$$

□

【命題 1.18 (Lorentz 不変な元)]  $X \in \mathcal{C}(p, q)$  が, 任意の  $a, b$  に対して  $[\Gamma^{ab}, X]$  を満たすなら,  $a, b$  を定数として,  $X = a + b\Gamma$ .  $\square$

【定義 1.19 (スピノール表現とスピノール)] スピノール群  $\text{Spin}(n-1, 1)$  の Clifford 代数  $\mathcal{C}_D$  への埋め込みおよび  $\mathcal{C}_D$  の既約表現  $\mathcal{C}_D \cong \mathbb{C}(2^{\lfloor n/2 \rfloor})$  により定義される:

$$\text{Spin}(n-1, 1) \subset \mathcal{C}_{n-1,1}^0 \subset \mathcal{C}_n \rightarrow \mathbb{C}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}). \quad (1.3.6)$$

さらに, Lorentz 群のスピノール表現

$$\text{SO}_0(n-1, 1) \ni \Lambda \mapsto S(\Lambda) \in \text{Spin}(n-1, 1) \quad (1.3.7)$$

は

$$S(v^a \Gamma_a) S^{-1} = (\Lambda v)^a \Gamma_a \Leftrightarrow S \Gamma^a S^{-1} = (\Lambda^{-1})^a_b \Gamma^b \quad (1.3.8)$$

により定義される. 対応して, スピノール  $\psi \in \mathbb{C}(2^{\lfloor n/2 \rfloor})$  は, 擬直交基底の変換に対して

$$\theta'^a = \Lambda^a_b \theta^b \rightarrow \psi' = S(\Lambda) \psi \quad (1.3.9)$$

と変換する量の組として定義される.  $\square$

【公式 1.20 (Lorentz 変換)] 無限小 Lorentz 変換  $\delta\Lambda$  に対して

$$\delta\Lambda_{ab} = \omega_{ab} \Rightarrow \delta S(\Lambda) = \frac{1}{4} \omega_{ab} \Gamma^{ab}. \quad (1.3.10)$$

特に, 次の交換関係が成り立つ:

$$[\Gamma^{ab}, \Gamma^c] = 4\delta_d^{[a} \eta^{b]c} \Gamma^d = 2(\Gamma^a \eta^{bc} - \Gamma^b \eta^{ac}), \quad (1.3.11a)$$

$$[\Gamma^{ab}, \Gamma^{cd}] = 2(\eta^{ad} \Gamma^{bc} + \eta^{bc} \Gamma^{ad} - \eta^{ac} \Gamma^{bd} - \eta^{bd} \Gamma^{ac}). \quad (1.3.11b)$$

$\square$

### 1.3.1.2 反対称化公式

【公式 1.21 (反対称化公式)]

$$\Gamma_a \Gamma_{b_1 \dots b_n} = \Gamma_{a b_1 \dots b_n} + \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \eta_{a b_j} \Gamma_{b_1 \dots \check{b}_j \dots b_n}, \quad (1.3.12a)$$

$$\Gamma_{b_1 \dots b_n} \Gamma_a = \Gamma_{b_1 \dots b_n a} + \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \eta_{a b_j} \Gamma_{b_1 \dots \check{b}_j \dots b_n}. \quad (1.3.12b)$$

$\square$

$D$	$\mathbb{C}$ -spinor rep.	real	Weyl	real-Weyl	min $\mathbb{R}$ -rep.
1	1	○	–	–	1
2	$1 + \bar{1}$	○	complex	–	2
3	2	pseudo	–	–	4
4	$2 + 2'$	pseudo	self	–	4
5	4	pseudo	–	–	8
6	$4 + \bar{4}$	○	complex	–	8
7	8	○	–	–	8
8	$8 + 8'$	○	self	○	8

表 1: Spinor representation of  $SO(D)$

$D$	$\mathbb{C}$ -spinor rep.	Majorana	Weyl	Majorana-Weyl	min $\mathbb{R}$ -rep.
2	$1 + 1'$	○	self	○	1
3	2	○	–	–	2
4	$2 + \bar{2}$	○	complex	–	4
5	4	–	–	–	8
6	$4 + 4'$	–	self	–	8
7	8	–	–	–	16
8	$8 + \bar{8}$	○	complex	–	16
9	16	○	–	–	16
10	$16 + 16'$	○	self	○	16
11	32	○	–	–	32
12	$32 + \bar{32}$	○	complex	–	64

表 2: Spinor representation of  $SO(D - 1, 1)$

## 1.3.1.3 展開公式

【公式 1.22 (展開公式)】

$$\Gamma^a \Gamma^b = \Gamma^{ab} + \eta^{ab}, \quad (1.3.13a)$$

$$\Gamma^a \Gamma^b \Gamma^c = \Gamma^{abc} + \eta^{ab} \Gamma^c + \eta^{bc} \Gamma^a - \eta^{ac} \Gamma^b, \quad (1.3.13b)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^a \Gamma^b \Gamma^c \Gamma^d &= \Gamma^{abcd} + \eta^{ab} \Gamma^{cd} + \eta^{cd} \Gamma^{ab} - \eta^{ac} \Gamma^{bd} - \eta^{bd} \Gamma^{ac} \\ &\quad + \eta^{ad} \Gamma^{bc} + \eta^{bc} \Gamma^{ad} + \eta^{ab} \eta^{cd} - \eta^{ac} \eta^{bd} + \eta^{ad} \eta^{bc}, \end{aligned} \quad (1.3.13c)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{a_1} \dots \Gamma^{a_p} &= \Gamma^{a_1 \dots a_p} + \sum_{\sigma} \left\{ \frac{1}{2(p-2)!} \eta^{a_{\sigma_1} a_{\sigma_2}} \Gamma^{a_{\sigma_3} \dots a_{\sigma_p}} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{l! 2^l (p-2l)!} \eta^{a_{\sigma_1} a_{\sigma_2}} \dots \eta^{a_{\sigma_{2l-1}} a_{\sigma_{2l}}} \Gamma^{a_{\sigma_{2l+1}} \dots a_{\sigma_p}} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (1.3.13d)$$

これより,

$$\Gamma_a \Gamma^{cd} \Gamma_b = \eta_{ab} \Gamma^{cd} + 4\Gamma_{[a} [^c \delta_b^d] + 2\delta_a^{[c} \delta_b^{d]} + \Gamma_{ab}{}^{cd}, \quad (1.3.14)$$

$$\Gamma^{ab} \Gamma^{cd} = \Gamma^{abcd} + 2(\Gamma^{a[d} \eta^{c]b} + \Gamma^{b[c} \eta^{d]a}) + 2\eta^{a[d} \eta^{c]b}, \quad (1.3.15)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{ab} \Gamma^{pqr} &= \Gamma^{abpqr} - 3(\eta^{a[p} \Gamma^{qr]b} - \eta^{b[p} \Gamma^{qr]a}) \\ &\quad - 6\eta^{a[p} \eta^{b]q} \Gamma^r, \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{abc} \Gamma^{efg} &= \Gamma^{abcefg} + 3(\eta^{a[e} \Gamma^{bc]fg} + \eta^{b[e} \Gamma^{ca]fg} + \eta^{c[e} \Gamma^{ab]fg}) \\ &\quad - 6(\eta^{a[e} \eta^{b]f} \Gamma^{c]g} + \eta^{b[e} \eta^{c]f} \Gamma^{a]g} + \eta^{c[e} \eta^{a]f} \Gamma^{b]g}) \\ &\quad - 6\eta^{a[e} \eta^{b]f} \eta^{g]c}, \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^a \Gamma^{pqr} \Gamma^b &= -\Gamma^{abpqr} - 6\eta^{a[p} \eta^{b]q} \Gamma^r \\ &\quad - \eta^{ab} \Gamma^{pqr} + 3\eta^{a[p} \Gamma^{qr]b} + 3\eta^{b[p} \Gamma^{qr]a}, \end{aligned} \quad (1.3.18)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{pqr} \Gamma^a \Gamma^b &= \Gamma^{pqrab} - 6\eta^{a[p} \eta^{b]q} \Gamma^r \\ &\quad + \eta^{ab} \Gamma^{pqr} + 3\eta^{a[p} \Gamma^{qr]b} - 3\eta^{b[p} \Gamma^{qr]a}, \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{abcd} \Gamma_{ef} &= \Gamma_{abcdef} + 4\eta_{f[a} \Gamma_{bcd]e} - 4\eta_{e[a} \Gamma_{bcd]f} \\ &\quad + 6\eta_{f[a} \eta_{e]b} \Gamma_{cd}] - 6\eta_{e[a} \eta_{f]b} \Gamma_{cd}], \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab} \Gamma_{cd} \Gamma_{ef} &= \Gamma_{abcdef} + 4\eta_{ad} \Gamma_{bcef} \\ &\quad + 4\eta_{cf} \Gamma_{abde} + 4\eta_{af} \Gamma_{bcde} \\ &\quad - 2\eta_{efcd} \Gamma_{ab} - 2\eta_{efab} \Gamma_{cd} - 2\eta_{abcd} \Gamma_{ef} \\ &\quad - 8\Gamma_{ac} \eta_{bdef} - 8\Gamma_{ae} \eta_{bfcd} - 8\Gamma_{ce} \eta_{dfba} \\ &\quad - 8\eta_{abcdef}. \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

ただし、最後の式では、 $[ab], [cd], [ef]$  のすべての組について反対称化するものとする。ここで、

$$\eta_{abcd} = \eta_{a[c]\eta_d]b}, \quad (1.3.22a)$$

$$\eta_{abcdef} = \frac{1}{2} (\eta_{a[c]\eta_d][e\eta_f]b} - \eta_{b[c]\eta_d][e\eta_f]a) \quad (1.3.22b)$$

これより

$$\mathcal{Q}_{[k]} \equiv \frac{1}{k!} Q_{a_1 \dots a_k} \Gamma^{a_1 \dots a_k}, \quad |\mathcal{Q}_{[k]}|^2 \equiv \frac{1}{k!} Q_{a_1 \dots a_k} Q^{a_1 \dots a_k} \quad (1.3.23)$$

とおくと、

$$\mathcal{Q}_{[2]}^2 = \frac{1}{4} Q_{ab} Q_{cd} \Gamma^{abcd} - |\mathcal{Q}_{[2]}|^2, \quad (1.3.24a)$$

$$\mathcal{Q}_{[3]}^2 = \frac{1}{4} Q^p{}_{ab} Q_{pcd} \Gamma^{abcd} - |\mathcal{Q}_{[3]}|^2. \quad (1.3.24b)$$

□

**【公式 1.23】** 次元が  $n$  のとき、

$$\Gamma_p \Gamma^p = n, \quad (1.3.25a)$$

$$\Gamma_p \Gamma^a \Gamma^p = -(n-2) \Gamma^a, \quad (1.3.25b)$$

$$\Gamma_p \Gamma^{ab} \Gamma^p = (n-4) \Gamma^{ab}, \quad (1.3.25c)$$

$$\Gamma_p \Gamma^{abc} \Gamma^p = -(n-6) \Gamma^{abc}, \quad (1.3.25d)$$

$$\Gamma_p \Gamma_{[j]} \Gamma^p = (-1)^j (n-2j) \Gamma_{[j]}. \quad (1.3.25e)$$

$$\Gamma_{pq} \Gamma^{pq} = -n(n-1), \quad (1.3.26a)$$

$$\Gamma_{pq} \Gamma^a \Gamma^{pq} = -(n-1)(n-4) \Gamma^a., \quad (1.3.26b)$$

$$\Gamma_{pq} \Gamma^{ab} \Gamma^{pq} = (-n^2 + 9n - 16) \Gamma^{ab}. \quad (1.3.26c)$$

$$\Gamma^{p_1 \dots p_k} \Gamma_{p_1 \dots p_k} = (1-)^{k(k-1)/2} n(n-1) \dots (n-k+1). \quad (1.3.27)$$

□

### 1.3.1.4 Trace 公式

【公式 1.24 (Trace 公式)】

まず, 一般に, Lorentz 不変な不変テンソルが計量と Levi-Civita テンソルに限られるため, 奇数次元で  $k$  が次元と一致する場合を除いて,

$$\mathrm{Tr}(\Gamma^{a_1 \cdots a_k}) = 0 \quad (k \geq 1). \quad (1.3.28)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\Gamma_{ab}\Gamma_{cd}\Gamma_{ef}\Gamma_{gh}) &= \mathrm{Tr}(1) \left[ 4\eta_{a[c]\eta_{d]b}\eta_{e[g]\eta_{h]f}} + 4\eta_{[a[e]\eta_{f]b}\eta_{c[g]\eta_{h]d}} + 4\eta_{a[g]\eta_{h]b}\eta_{c[e]\eta_{f]d}} \right. \\ &\quad \left. + 16\eta_{abcdghef} - 16\eta_{abcdefgh} + 16\eta_{abefcdgh} \right]. \end{aligned} \quad (1.3.29a)$$

ここで,

$$\eta_{abcdefgh} = \frac{1}{2} \left( \eta_{a[c]\eta_{d][e]\eta_{f]g]\eta_{h]b}} - \eta_{b[c]\eta_{d][e]\eta_{f]g]\eta_{h]a}} \right). \quad (1.3.30)$$

□

### 1.3.1.5 双対公式

【定義 1.25】  $\Gamma_{a_1 \cdots a_k}$  を  $k$  階のテンソルと見なして, 次の記法を用いる:

$$\Gamma_{[k]} := (\Gamma_{a_1 \cdots a_k}), \quad (1.3.31a)$$

$$*\Gamma_{[k]} = \left( \frac{1}{k!} \epsilon_{a_1 \cdots a_{n-k} b_1 \cdots b_k} \Gamma^{b_1 \cdots b_k} \right). \quad (1.3.31b)$$

このとき, 次の式が成り立つ:

$$*\Gamma_{[k]} = |\eta| (-1)^{k(n+1)} \Gamma_{[k]}. \quad (1.3.32)$$

□

【公式 1.26 (双対公式)】

$$*\Gamma_{[n-k]} = (-1)^{kn+k(k+1)/2} (*\Gamma_{[n]})\Gamma_{[k]}. \quad (1.3.33)$$

すなわち,

$$\frac{1}{(n-k)!} \Gamma^{b_1 \cdots b_{n-k}} \epsilon_{b_1 \cdots b_{n-k} a_k \cdots a_1} = (*\Gamma_{[n]})\Gamma_{a_1 \cdots a_k}. \quad (1.3.34)$$



ただし,

$$*\Gamma_{[n]} = i^{\lfloor \frac{n+|\eta|-1}{2} \rfloor} \Gamma \quad (1.3.35)$$

例えば,  $|\eta| = -1$  のとき,

$$\bullet n = 4: \gamma_{[k]} = -i(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \gamma_5 * \gamma_{[4-k]} = \epsilon i * \gamma_5 \gamma_{[4-k]}$$

$$\epsilon = \begin{cases} 1 & : k = 1, 2 \\ -1 & : k = 0, 3, 4 \end{cases} \quad (1.3.36)$$

$$\bullet n = 10: \Gamma_{[k]} = \epsilon \Gamma * \Gamma_{[10-k]}$$

$$\epsilon = \begin{cases} 1 & : k = 0, 3, 4, 7, 8 \\ -1 & : k = 1, 2, 5, 6, 9, 10 \end{cases} \quad (1.3.37)$$

$|\eta| = 1$  のとき,

$$\bullet n = 6: \Gamma_{[k]} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} i \Gamma * \Gamma_{[6-k]} = \epsilon i \Gamma * \Gamma_{[6-k]}$$

$$\epsilon = \begin{cases} 1 & : k = 0, 3, 4 \\ -1 & : k = 1, 2, 5, 6 \end{cases} \quad (1.3.38)$$

□

### 1.3.1.6 Fierz 恒等式

【公式 1.27 (Fierz 恒等式 [2005.2.6])] 次元  $D$  上の Clifford 代数の既約表現を考え, その次元を  $N$  とする:

$$N = 2^{\lfloor D/2 \rfloor}. \quad (1.3.39)$$

1.  $D$  が奇数で  $k = D$  となるときを除いて, 常に

$$\text{Tr} \Gamma^{a_1 \cdots a_k} = 0. \quad (1.3.40)$$

また,  $D$  が偶数で  $k, l \leq D$ , または  $D$  が奇数で  $k + l < D$  のとき,

$$\text{Tr} \Gamma^{a_1 \cdots a_k} \Gamma_{b_1 \cdots b_k} = \begin{cases} (-1)^{n(n-1)/2} N \delta_{b_1 \cdots b_k}^{a_1 \cdots a_k} & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}. \quad (1.3.41)$$

よって,  $\text{Tr}$  により  $\mathbb{C}(N)$  に内積を定義すると,  $D$  が偶数のとき  $n = D$ ,  $D$  が奇数のとき  $n = (D - 1)/2$  として,

$$1, \Gamma^a, \dots, \Gamma^{[a_1 \dots a_n]} \quad (1.3.42)$$

が直交基底となる.

2.  $D$  が偶数のとき  $n = D$ ,  $D$  が奇数のとき  $n = (D - 1)/2$  として, 任意の  $a, b, c, d \in \mathbb{C}^N$  および  $M_1, M_2 \in \mathbb{C}(N)$  に対して, 次の恒等式が成り立つ:

$$(c^* M_1 a)(b^* M_2 d) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^n (-1)^{j(j-1)/2} \frac{1}{j!} (c^* \Gamma^{a_1 \dots a_j} d) (b^* M_2 \Gamma_{a_1 \dots a_j} M_1 a). \quad (1.3.43)$$

□

### 1.3.1.7 荷電共役変換

**【定義 1.28 (荷電共役変換)】**  $\Gamma$  行列の既約表現 (複素次元  $2^{[n/2]}$ ) において,  $B$  行列を次の性質を満たす  $2^{[n/2]}$  次の複素正則行列として定義する:

$$B \Gamma^{ab} B^{-1} = \Gamma^{ab*}. \quad (1.3.44)$$

このとき, スピノール  $\psi$  と  $B^{-1}\psi^*$  の Lorentz 変換 (直交変換) は一致する:

$$\psi' = S\psi \Rightarrow B^{-1}\psi'^* = S(B^{-1}\psi^*).$$

また, 荷電共役行列  $C$  を

$$C \Gamma^{ab} C^{-1} = -(\Gamma^{ab})^T \quad (1.3.45)$$

により定義する. このとき,  $\psi$  は  $(\bar{\psi}C)^T$  と, また  $\bar{\psi}$  は  $\psi^T C$  は同じ変換性を示す (ただし,  $\Gamma^{a\dagger} = \Gamma_a$  が成り立つ表示を仮定):

$$\begin{aligned} \psi' &= S\psi \Rightarrow (\bar{\psi}'C^{-1})^T = S(\bar{\psi}C^{-1})^T, \\ \bar{\psi}' &= \bar{\psi}S^{-1} \Rightarrow \psi'^T C = (\psi^T C)S^{-1}. \end{aligned}$$

□

【注 1.29 ( $\bar{\psi}$  の定義)】 一般に,

$$\psi \rightarrow S\psi \Rightarrow \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}S^{-1} \quad (1.3.46)$$

を要請すると,

$$\bar{\psi} \propto \psi^\dagger {}^T B^{-1} C. \quad (1.3.47)$$

したがって,  $\Gamma^{a\dagger} = \Gamma_a$  が成り立つ表示では,  ${}^T B = c^{-1}B$  より,

$$|\eta| = -1 : \bar{\psi} = \psi^\dagger \Gamma^0; \quad C = B\Gamma^0, \quad (1.3.48a)$$

$$|\eta| = 1 : \bar{\psi} = \psi^\dagger; \quad C = B. \quad (1.3.48b)$$

また, Majorana スピノールに対しては,  $B\psi = \psi^* \Rightarrow \psi^\dagger = {}^T \psi {}^T B$  より

$$\bar{\psi} = {}^T \psi C. \quad (1.3.49)$$

□

【命題 1.30 ( $B$  行列の性質)】  $B$  行列は次の性質をもつ.

1. (任意性)  $\Gamma$  行列の固定された表示のもとで,  $B$  行列の自由度は

$$B \rightarrow B(\lambda + \mu\Gamma). \quad (1.3.50)$$

ただし,  $\mu^2 \neq \lambda^2$ . 特に, 奇数次元では  $B$  は定数倍を除いて一意的である.

2. (表示の変更) 1 の自由度を適当に調整すると, スピノール表現の一次変換

$$\Gamma'^a = T\Gamma^a T^{-1} \quad (1.3.51)$$

に対して,

$$B' = T^* B T^{-1}. \quad (1.3.52)$$

3. (標準テンソル積表示) 偶数次元  $n = 2k + 1 - |\eta|$  のとき, 標準テンソル積表示の元で,

$$B_\pm \Gamma^a B_\pm^{-1} = \pm \Gamma^{a*} \quad (1.3.53)$$

となる  $B_\pm$  が定数倍を除いて一意的に存在する. 特に,  $|\eta| = -1$  のとき,

$$B_1 = \Gamma^3 \Gamma^5 \cdots \Gamma^{n-1} = B_{(-1)^k}, \quad B_2 = \Gamma B_1 = B_{(-1)^{k+1}}. \quad (1.3.54)$$

さらに,  $\Gamma = \Gamma_{(n)}$  に対して, 常に

$$B\Gamma B^{-1} = (-1)^k \Gamma^* \quad (1.3.55)$$

4.  $(B\Gamma^a B^{-1})$  ある表示で  $B\Gamma^a B^{-1} = \pm\Gamma^{a*}$  なら, 2の変換に対しても  $B'\Gamma'^a B'^{-1} = \pm\Gamma'^{a*}$ . よって, 奇数次元では常に,

$$B\Gamma^a B^{-1} = (-1)^k \Gamma^{a*}; \quad n = 2k + 2 - |\eta|. \quad (1.3.56)$$

偶数次元では,

$$B_{\pm}\Gamma^a B_{\pm}^{-1} = \pm\Gamma^{a*}; \quad n = 2k + 1 - |\eta| \quad (1.3.57)$$

を満たす  $B$  行列が任意の表示で常に (定数倍の自由度を除いて) 一意的に存在. これより, 一般に, 偶数次元での任意の  $B$  行列に対して

$$B\Gamma^a B^{-1} = \Gamma^{a*}(\alpha + \beta\Gamma^*); \quad \alpha^2 - \beta^2 = 1 \quad (1.3.58)$$

が成立. さらに,  $\alpha^2 - \beta^2 = 1$  を満たす任意の  $\alpha, \beta$  に対して, この式を満たす  $B$  が定数倍の自由度を除いて一意的に存在.

5.  $(B^*B)$   $B^*B$  は  $\Gamma^a$  と可換なので, 一般に

$$B^*B = p + q\Gamma. \quad (1.3.59)$$

また, ある表示で  $B^*B = p$  (対角型) なら 2の変換に対して  $B'^*B' = T^{*-1}B^*BT^* = p$ . 特に, 偶数次元  $n = 2k + 1 - |\eta|$  では,  $p$  の符号は次のいずれかと一致する:

$$B_+^*B_+ = (-1)^{k(k-1)/2}, \quad B_-^*B_- = (-1)^{k(k+1)/2}. \quad (1.3.60)$$

よって, 偶数次元では,  $B^*B = 1$  となる  $B$  が存在する条件は,

$$n \neq 5 - |\eta| \pmod{8}. \quad (1.3.61)$$

また, 奇数次元  $n = 2k + 2 - |\eta|$  のとき, 常に

$$B = B_{(-1)^k} \Rightarrow B^*B = (-1)^{k(k+1)/2} \quad (1.3.62)$$

で,  $B^*B = 1$  となるのは

$$n \neq 4 - |\eta|, 6 - |\eta| \pmod{8}. \quad (1.3.63)$$

の時のみ.

$D(\text{mod}8)$	2	3	4	5	6	7	8	9
$ \eta  = 1$	$B_+$	X	X	X	$B_-$	$B_-$	$B_\pm$	$B_+$
$ \eta  = -1$	$B_\pm$	$B_+ = B_1$	$B_+ = B_2$	X	X	X	$B_- = B_1$	$B_- = B_1$

表 3: 各次元において,  $B^*B = 1$  となる  $B$  行列

6. (**Majorana 条件**) スピノール  $\zeta$  と  $B^{-1}\zeta^*$  は Lorentz 変換に対して同じ変換性を示す. ただし, Majorana 条件

$$\zeta^* = B\zeta \quad (1.3.64)$$

を満たすスピノールは,  $B^*B = 1$  とならないといけないので,

$$n \neq 4 - |\eta|, 5 - |\eta|, 6 - |\eta| \pmod{8} \quad (1.3.65)$$

の時のみ存在.

7. ( **$B^T$** )  $\Gamma^{a\dagger} = \Gamma_a$  が成り立つ表示に限ると,  $\Gamma^a$  の変換行列  $T$  は  $T^\dagger T \in \mathbb{R}$  となるものに限られるので, ある表示で  $B^T = cB$  ( $c$  は定数) となるなら他の表示でも同じ関係が成り立つ. 特に,  $n = 2k + 1 - |\eta|$  のとき,  $B_1, B_2, B_\pm$  に相似な行列に対して,

$${}^TB_1 = (-1)^{k(k+1)/2} B_1, \quad {}^TB_2 = (-1)^{k(k-1)/2} B_2, \quad (1.3.66a)$$

$${}^TB_+ = (-1)^{k(k-1)/2} B_+, \quad {}^TB_- = (-1)^{k(k+1)/2} B_- \quad (1.3.66b)$$

$n = 2k + 2 - |\eta|$  のとき,

$${}^TB = (-1)^{k(k+1)/2} B. \quad (1.3.67)$$

□

**【命題 1.31 ( $B = 1$  となる表示)】** 計量の符号によらず, Majorana スピノールが存在する (すなわち,  $B^*B = 1$  となる  $B$  行列が存在する) 場合には,  $B = 1$  となる表示が常に存在する.

この表示では,

- $D = 1 - |\eta|, 2 - |\eta|, 3 - |\eta|$  のとき,  $\Gamma^a$  は実行列.
- $D = 7 - |\eta|, 8 - |\eta|$  のとき,  $\Gamma^a$  は純虚行列.

□

**Proof.**  $B$  行列が  $B^*B = 1$  を満たすとき, 常に  ${}^T B = B$  となっている. これより,  $B = B_1 + iB_2$  ( $B_1, B_2 \in M(N, \mathbb{R})$ ) から  $2N$  次の正方行列

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 & -B_2 \\ -B_2 & -B_1 \end{pmatrix} \quad (1.3.68)$$

を定義すると,  $\tilde{B}$  は  $\tilde{B}^2 = 1$  を満たす実対称行列となる. よって,

$$\tilde{B} = O(I_p \oplus (-I_q)) {}^T O, \quad p + q = 2N, \quad O \in \text{SO}(2N) \quad (1.3.69)$$

と表される. ところが,

$$\tilde{B} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{B} \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} \quad (1.3.70)$$

なので,  $p = q$  となり,

$$\tilde{B} \begin{pmatrix} v_1^{(j)} \\ v_2^{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^{(j)} \\ v_2^{(j)} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, N \quad (1.3.71)$$

を満たす  $N$  個の 1 次独立な  $2N$  次元ベクトルが存在. これより,

$$T = (v^{(1)} \dots v^{(N)}); \quad v^{(j)} = v_1^{(j)} + iv_2^{(j)} \quad (1.3.72)$$

とおくと,

$$BT = T^* \Leftrightarrow (T^*)^{-1}BT = 1 \quad (1.3.73)$$

となる. これは, 変換  $T^{-1}$  により  $B \rightarrow 1$  と変換できることを意味している. Q.E.D.

**【命題 1.32 ( $C$  行列)】**  $C$  行列は次の性質をもつ.

1.  $\Gamma$  行列の固定された表示のもとで,  $C$  行列の自由度は

$$C \rightarrow C(\lambda + \mu\Gamma). \quad (1.3.74)$$

ただし,  $\mu^2 \neq \lambda^2$ . 特に, 奇数次元では  $C$  は定数倍の自由度を除いて一意的.

2. 1の自由度を適当に調整すると, スピノール表現の一次変換

$$\Gamma'^a = T\Gamma^a T^{-1} \quad (1.3.75)$$

に対して,

$$C' = \mathbb{T}^{-1} C T^{-1}. \quad (1.3.76)$$

3.  $\Gamma = \Gamma_{(2\ell)}$  に対して,

$$C\Gamma C^{-1} = (-1)^\ell \mathbb{T} \quad (1.3.77)$$

4.  $n$  が偶数のとき, 一般に

$$C\Gamma^a C^{-1} = -\mathbb{T}^a (\alpha + \beta \mathbb{T}) = -e^{-\phi \mathbb{T}} \mathbb{T}^a e^{\phi \mathbb{T}}; \quad \alpha^2 - \beta^2 = 1. \quad (1.3.78)$$

任意の複素数  $\phi$  に対して, この条件を満たす  $C$  行列が定数倍の自由度を除いて一意的に存在する. 特に,  $\beta = 0$ , すなわち

$$C\Gamma^a C^{-1} = \pm \mathbb{T}^a \quad (1.3.79)$$

となる  $C = C_\pm$  がそれぞれの符号に対して, 定数倍の自由度を除いて一意的に存在する.

5.  $n = 2\ell + 1$  のとき, 一般に

$$C\Gamma^a C^{-1} = (-1)^\ell \mathbb{T}^a \quad (1.3.80)$$

で,  $n = 2\ell$  での  $C_\pm$  を用いて,  $C = C_{(-1)^\ell}$ .

6. 条件

$$\Gamma^{a\dagger} = \Gamma_a \quad (1.3.81)$$

を満たす表示では,  $|\eta| = 1$  のとき,

$$C_\pm = cB_\pm, \quad (1.3.82)$$

$|\eta| = -1$  のとき,

$$C_\pm = cB_\mp \Gamma^0 \quad (1.3.83)$$

が成り立つ ( $c$  はゼロでない任意定数).

7. ある表示で  $C^T = pC$  となると, 任意の表示で  $C^T = pC$  が成り立つ.

□

【注 1.33 (様々な次元の時空 ( $|\eta| = -1$ ) における,  $B^*B$ ,  ${}^T B$ ,  ${}^T C$  の符号)】

$D$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$B_1^*B_1 = B_2^2$	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+
$B_2^*B_2 = B_1^2$	+	(+)	+	(-)	-	(-)	-	(+)	+	(+)
${}^T B_1 = B_1 \times$	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+
${}^T B_2 = B_2 \times$	+	(+)	+	(-)	-	(-)	-	(+)	+	(+)
$B$	$B_1$	$B_1$	$B_2$	$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$
$B\Gamma^a B^{-1} = \Gamma^{a*} \times$	+	+	+	-	+	+	-	-	+	+
$B\Gamma B^{-1} = \Gamma^* \times$	+		-		+		-		+	
${}^T B = B \times$	+	+	+	-	-	-	+	+	+	+
$B^*B$	+	+	+	-	-	-	+	+	+	+
$B^\dagger B$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$C = * \times \Gamma^0$	$B_1$	$B_1$	$B_2$	$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$	$B_1$
$C\Gamma^a C^{-1} = {}^T \Gamma^a$	-	-	-	+	-	-	+	+	-	-
$C\Gamma C^{-1} = \Gamma^T \times$	-		+		-		+		-	
${}^T C = C \times$	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-
$C^*C$	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-
$C^\dagger C$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

□

【注 1.34 (様々な次元の空間 ( $|\eta| = 1$ ) における  $B^*B$ ,  $B^*$  の符号)】

$D$	2	3	4	5	6	7	8	9
$B\Gamma B^{-1} = \Gamma^* \times$	-		+		-		+	
$B_+^* = B_+ \times$	<b>+1</b>	$\times$	-1	-1	-1	$\times$	<b>+1</b>	<b>+1</b>
$B_-^* = B_- \times$	-1	-1	-1	$\times$	<b>+1</b>	<b>+1</b>	<b>+1</b>	$\times$
$B_+^* B_+$	<b>+1</b>	$\times$	-1	-1	-1	$\times$	<b>+1</b>	<b>+1</b>
$B_-^* B_-$	-1	-1	-1	$\times$	<b>+1</b>	<b>+1</b>	<b>+1</b>	$\times$

(注)  $C_\pm = B_\pm$  なので,  $C_\pm$  の振る舞いは同じ, また,  $B_\pm$  は常に,  $B_\pm^2 = 1$ ,  $B_\pm^\dagger = B_\pm$ ,  ${}^T B_\pm = B_\pm^*$  の関係を満たす.

□



【公式 1.35 ( $B, C$  を含む初公式)】

1.  $C = cB\gamma^0 (|c| = 1)$  と取るとき,  $C\Gamma^a C^{-1} = \eta_C \mathbb{T}^a$  とおくと,

$$C^{-1} {}^T B C^* B = -c^{-2} \eta_C. \quad (1.3.84)$$

□

### 1.3.1.8 スピノール双一次形式

【命題 1.36 (時空における Majorana スピノールの双一次形式のパリティ)】

スピノールが Grassmann odd な量として,  $D$  次元時空 ( $|\eta| = -1$ ) において, Majorana スピノールの双一次形式

$$\Omega_n(\alpha, \beta) = \bar{\alpha} \Gamma_{[n]} \beta \quad (1.3.85)$$

を考える. ここで,  $\bar{\alpha} = {}^T \alpha C$ . このとき,  $\alpha$  と  $\beta$  の交換に対する  $\Omega_n(\alpha, \beta)$  パリティは

	$n \pmod{4}$			
時空の次元 $D$	0	1	2	3
$D \equiv 2, 3, 4 \pmod{8}$	+	-	-	+
$D \equiv 8, 9 \pmod{8}$	-	-	+	+

また,  $C = cB\Gamma^0 (\Gamma_0^\dagger = \Gamma^0)$  のとき, エルミート共役に対して,

$$\Omega_n(\alpha, \beta)^\dagger = \frac{1}{c^2} (-1)^{[(n-1)/2]} \Omega_n(\beta, \alpha). \quad (1.3.86)$$

[2021/6/25 に訂正]

□

【公式 1.37 (11 次元時空におけるスピノール双 1 次形式の対称性)】

$D = 11 (|\eta| = -1)$  でスピノールが Grassmann odd のとき,

$$\bar{\alpha} \Gamma_{[n_1]} \cdots \Gamma_{[n_j]} \beta = \beta \tilde{\Gamma}_{[n_j]} \cdots \tilde{\Gamma}_{[n_1]} \alpha. \quad (1.3.87)$$

ここで,

$$\tilde{\Gamma}_{[n]} = \begin{cases} \tilde{\Gamma}_{[n]} & : n \equiv 0, 3 \pmod{4}, \\ -\tilde{\Gamma}_{[n]} & : n \equiv 1, 2 \pmod{4}. \end{cases} \quad (1.3.88)$$

□

【公式 1.38 (4次元 Minkowski 時空におけるスピノール双 1 次形式の対称性)】  $\bar{\psi} = {}^T\psi C$ ;  $C = iB\gamma^0$  とおくととき,

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}\beta &= +\bar{\beta}\alpha, & \bar{\alpha}\gamma_*\beta &= +\bar{\beta}\gamma_*\alpha, \\ \bar{\alpha}\gamma^a\beta &= -\bar{\beta}\gamma^a\alpha, & \bar{\alpha}\gamma^a\gamma_*\beta &= +\bar{\beta}\gamma^a\gamma_*\alpha, \\ \bar{\alpha}\gamma^{ab}\beta &= -\bar{\beta}\gamma^{ab}\alpha, & \bar{\alpha}\gamma^{ab}\gamma_*\beta &= -\bar{\beta}\gamma^{ab}\gamma_*\alpha, \\ \bar{\alpha}\gamma^{abc}\beta &= \bar{\beta}\gamma^{abc}\alpha, & \bar{\alpha}\gamma^{abc}\gamma_*\beta &= -\bar{\beta}\gamma^{abc}\gamma_*\alpha, \\ \bar{\alpha}_*P_{L/R}\beta &= \bar{\beta}P_{L/R}\alpha; & P_{L/R} &= \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_*), \\ (\bar{\alpha}\gamma_{[n]}\beta)^\dagger &= (\bar{\alpha}\gamma_{[n]}\beta), & (\bar{\alpha}\gamma_{[n]}\gamma_*\beta)^\dagger &= -(\bar{\alpha}\gamma_{[n]}\gamma_*\beta) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).\end{aligned}$$

□

【命題 1.39 (Euclidean 空間におけるスピノールの双一次形式のパリティ)】

$D$ 次元 Riemann 空間 ( $|\eta| = 1$ ) において, Majorana スピノールの双一次形式

$$\Omega_n(\alpha, \beta) = \bar{\alpha}\Gamma_{[n]}\beta \quad (1.3.89)$$

を考える. ここで,  $\bar{\alpha} = {}^T\alpha C$ . このとき, スピノールが可換数とすると,  $\alpha$  と  $\beta$  の交換に対する  $\Omega_n(\alpha, \beta)$  のパリティは

空間次元 $D$	$n \pmod{4}$			
	0	1	2	3
$D \equiv 2, 8, 9 \pmod{8}$	+	+	-	-
$D \equiv 6, 7 \pmod{8}$	+	-	-	+

スピノールが反可換量の場合は, すべてのパリティが反転する. —□

## 1.3.2 様々な表示

### 1.3.2.1 一般論

【命題 1.40 ( $\Gamma^{a\dagger}$ )】  $\Gamma$  行列は

$$\Gamma^{a\dagger} = \Gamma_a \quad (1.3.90)$$

を満たす表示を常にもつ. この条件を保つ表示の変換は

$$\Gamma'^a = T\Gamma^a T^{-1}; \quad T^\dagger T = 1 \quad (1.3.91)$$

と表される。また、この表示では常に、

$$\Gamma^\dagger = \Gamma, \quad (1.3.92)$$

$$(\Gamma^{[p]}\Gamma^0)^\dagger = (-1)^{[p-1]} \Gamma^{[p]}\Gamma^0, \quad (1.3.93)$$

$$C = cB\Gamma^0, \quad T^a = \pm C\Gamma^a C^{-1}, \quad (\Gamma^a)^* = \mp B\Gamma^a B^{-1} \quad (1.3.94)$$

が成り立つ。 \_\_\_\_\_ □

### 1.3.2.2 テンソル積型表示 (Minkowski)

$D = 2k + 2$  のとき、Minkowski 時空の  $\Gamma$  行列に対するテンソル積表示は次のようになる：

$D = 2$ :

$$\begin{aligned} \Gamma^0 &= i\sigma_2, & \Gamma^1 &= \sigma_1, \\ \Gamma_{(2)} &= \Gamma^0\Gamma^1 = \sigma_3, \\ B &= B_1 = 1, \\ C &= B\Gamma^0 = i\sigma_2. \end{aligned} \quad (1.3.95)$$

$D = 4$ :

$$\begin{aligned} \Gamma^0 &= -i\sigma_2 \otimes \sigma_3, & \Gamma^1 &= -\sigma_1 \otimes \sigma_3, \\ \Gamma^2 &= 1 \otimes \sigma_1, & \Gamma^3 &= 1 \otimes \sigma_2, \\ \Gamma_{(4)} &= -i\Gamma^0 \cdots \Gamma^3 = \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\ B &= B_2 = -i\sigma_3 \otimes \sigma_1, \\ C &= B\Gamma^0 = \sigma_1 \otimes \sigma_2. \end{aligned} \quad (1.3.96)$$

$D = 6$ :

$$\begin{aligned} \Gamma^0 &= i\sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, & \Gamma^1 &= \sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\ \Gamma^2 &= -1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3, & \Gamma^3 &= -1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3, \\ \Gamma^4 &= 1 \otimes 1 \otimes \sigma_1, & \Gamma^5 &= 1 \otimes 1 \otimes \sigma_2, \\ \Gamma_{(6)} &= -\Gamma^0 \cdots \Gamma^5 = \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\ B &= B_1 = i1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1, \\ C &= B\Gamma^0 = -\sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2. \end{aligned} \quad (1.3.97)$$

$D = 8$ :

$$\begin{aligned}
\Gamma^0 &= -i\sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, & \Gamma^1 &= -\sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\
\Gamma^2 &= 1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, & \Gamma^3 &= 1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\
\Gamma^4 &= -1 \otimes 1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3, & \Gamma^5 &= -1 \otimes 1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3, \\
\Gamma^6 &= 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_1, & \Gamma^7 &= 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_2, \\
\Gamma_{(8)} &= i\Gamma^0 \cdots \Gamma^7 = \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\
B &= B_1 = i1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2, \\
C &= B\Gamma^0 = i\sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1.
\end{aligned} \tag{1.3.98}$$

$D = 10$ :

$$\begin{aligned}
\Gamma^0 &= i\sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, & \Gamma^1 &= \sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\
\Gamma^2 &= -1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, & \Gamma^3 &= -1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\
\Gamma^4 &= 1 \otimes 1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, & \Gamma^5 &= 1 \otimes 1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\
\Gamma^6 &= -1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3, & \Gamma^7 &= -1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3, \\
\Gamma^8 &= 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_1, & \Gamma^9 &= 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_2, \\
\Gamma_{(10)} &= \Gamma^0 \cdots \Gamma^9 = \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\
B &= B_1 = -1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1, \\
C &= B\Gamma^0 = -i\sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2.
\end{aligned} \tag{1.3.99}$$

一般に,  $D = 2k$  のテンソル積型表示と  $D = 2k + 2$  のテンソル積型表示の対応は

$$\Gamma^0, \dots, \Gamma^{2k-1} \Rightarrow \Gamma^0 \otimes (-\sigma_3), \dots, \Gamma^{2k-1} \otimes (-\sigma_3), \overbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}^k \otimes \sigma_1, \overbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}^k \otimes \sigma_2. \tag{1.3.100}$$

$\Gamma_{(D)}$  は,

$$\Gamma_{(2k+2)} = \overbrace{\sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}^{k+1}. \tag{1.3.101}$$

また,  $D = 2k + 3$  のとき,  $\Gamma^0, \dots, \Gamma^{2k+2}$  は  $D = 2k + 2$  のときと同じで,

$$\Gamma^{2k+3} = \pm \Gamma_{(2k+2)}. \tag{1.3.102}$$

テンソル積表示での  $\Gamma$  行列は，次元によらず次の性質をもつ：

$$(\Gamma^a)^\dagger = \Gamma_a, \quad (1.3.103)$$

$$(\Gamma^a)^* = \Gamma^a \quad (a = 0, 1, 2, 4, 6, \dots), \quad -\Gamma^a \quad (a = 3, 5, 7, \dots) \quad (1.3.104)$$

$$(\Gamma^a)^T = \Gamma^a \quad (a = 1, 2, 4, 6, \dots), \quad -\Gamma^a \quad (a = 0, 3, 5, 7, \dots) \quad (1.3.105)$$

### 1.3.2.3 テンソル積型表示 (Euclidian)

$B_\pm, C_\pm$  を

$$B_\pm \Gamma^a B_\pm^{-1} = \pm \Gamma^{a*}, \quad (1.3.106a)$$

$$C_\pm \Gamma^a C_\pm^{-1} = \pm \Gamma^a \quad (1.3.106b)$$

により定義する.

$D = 2k + 2$  のとき，Minkowski 時空の  $\Gamma$  行列に対するテンソル積表示は次のようになる：

$D = 2$ :

$$\begin{aligned} \Gamma^1 &= \sigma_1, & \Gamma^2 &= \sigma_2, \\ \Gamma_{(2)} &= -i\Gamma^1\Gamma^2 = \sigma_3, \\ B_+ &= \sigma_1, B_- = \sigma_2, \\ C_\pm &= B_\pm. \end{aligned} \quad (1.3.107)$$

$D = 4$ :

$$\begin{aligned} \Gamma^1 &= -\sigma_1 \otimes \sigma_3, & \Gamma^2 &= -\sigma_2 \otimes \sigma_3, \\ \Gamma^3 &= 1 \otimes \sigma_1, & \Gamma^4 &= 1 \otimes \sigma_2, \\ \Gamma_{(4)} &= -\Gamma^1 \dots \Gamma^4 = \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\ B_+ &= \sigma_2 \otimes \sigma_1, B_- = \sigma_1 \otimes \sigma_2, \\ C_\pm &= B_\pm. \end{aligned} \quad (1.3.108)$$

$D = 6$ :

$$\begin{aligned}
\Gamma^1 &= \sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, & \Gamma^2 &= \sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\
\Gamma^3 &= -1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3, & \Gamma^4 &= -1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3, \\
\Gamma^5 &= 1 \otimes 1 \otimes \sigma_1, & \Gamma^6 &= 1 \otimes 1 \otimes \sigma_2, \\
\Gamma_{(6)} &= i\Gamma^1 \cdots \Gamma^6 = \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\
B_+ &= \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1, & B_- &= \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2, \\
C_{\pm} &= B_{\pm}.
\end{aligned} \tag{1.3.109}$$

$D = 8$ :

$$\begin{aligned}
\Gamma^1 &= -\sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, & \Gamma^2 &= -\sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\
\Gamma^3 &= 1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, & \Gamma^4 &= 1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\
\Gamma^5 &= -1 \otimes 1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3, & \Gamma^6 &= -1 \otimes 1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3, \\
\Gamma^7 &= 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_1, & \Gamma^8 &= 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_2, \\
\Gamma_{(8)} &= \Gamma^1 \cdots \Gamma^8 = \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\
B_+ &= \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1, & B_- &= \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2, \\
C_{\pm} &= B_{\pm}.
\end{aligned} \tag{1.3.110}$$

8次元 Euclidean 空間のスピンールは、実カイラル表示をもつ。

$$T = -\frac{i}{8} \{ \alpha \otimes \beta \otimes \beta (1 + \sigma_3) \otimes \beta + \alpha \sigma_1 \otimes \beta \otimes \beta (1 - \sigma_3) \otimes \beta \}, \tag{1.3.111}$$

$$\alpha = \sigma_1 + i\sigma_2, \quad \beta = \sigma_2 - i\sigma_3 \tag{1.3.112}$$

という変換を行うと、次のようなすべてのガンマ行列が実対称となる表示が得られる:

$$\begin{aligned}
\Gamma^1 &= -\sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2, & \Gamma^2 &= -\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes 1 \otimes \sigma_2, \\
\Gamma^3 &= -1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2, & \Gamma^4 &= 1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2, \\
\Gamma^5 &= \sigma_2 \otimes 1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2, & \Gamma^6 &= -\sigma_2 \otimes 1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2, \\
\Gamma^7 &= -1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_1, & \Gamma^8 &= 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_3, \\
\Gamma_{(8)} &= \Gamma^1 \cdots \Gamma^8 = -\sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes 1 \otimes \sigma_2, \\
B_+ &= 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1, & B_- &= \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes 1 \otimes \sigma_2, \\
C_{\pm} &= B_{\pm}.
\end{aligned} \tag{1.3.113}$$

この表示では  $\Gamma_{(8)}$  は実対称行列なので, 直交変換により対角化でき, ガンマ行列は実対称のままとなる.

$$\begin{aligned}
\Gamma^1 &= \sigma_1 \otimes 1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2, & \Gamma^2 &= -\sigma_2 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_2, \\
\Gamma^3 &= \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2, & \Gamma^4 &= -\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2, \\
\Gamma^5 &= -\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2, & \Gamma^6 &= \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2, \\
\Gamma^7 &= -1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_1, & \Gamma^8 &= \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes 1 \otimes \sigma_2, \\
\Gamma_{(8)} &= \Gamma^1 \cdots \Gamma^8 = 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_3, \\
B_+ &= 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1, B_- = -1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_3, \\
C_{\pm} &= B_{\pm}.
\end{aligned} \tag{1.3.114}$$

$D = 10$ :

$$\begin{aligned}
\Gamma^1 &= \sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, & \Gamma^2 &= \sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\
\Gamma^3 &= -1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, & \Gamma^4 &= -1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\
\Gamma^5 &= 1 \otimes 1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, & \Gamma^6 &= 1 \otimes 1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\
\Gamma^7 &= -1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3, & \Gamma^8 &= -1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3, \\
\Gamma^9 &= 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_1, & \Gamma^{10} &= 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_2, \\
\Gamma_{(10)} &= -i\Gamma^1 \cdots \Gamma^{10} = \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\
B_+ &= \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1, B_- = \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2, \\
C_{\pm} &= B_{\pm}
\end{aligned} \tag{1.3.115}$$

一般に,  $D = 2k$  のテンソル積型表示と  $D = 2k + 2$  のテンソル積型表示の対応は

$$\Gamma^1, \dots, \Gamma^{2k} \Rightarrow \Gamma^1 \otimes (-\sigma_3), \dots, \Gamma^{2k} \otimes (-\sigma_3), \overbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}^k \otimes \sigma_1, \overbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}^k \otimes \sigma_2. \tag{1.3.116}$$

$\Gamma_{(D)}$  は,

$$\Gamma_{(2k+2)} = \overbrace{\sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}^{k+1}. \tag{1.3.117}$$

また,  $D = 2k + 3$  のとき,  $\Gamma^1, \dots, \Gamma^{2k+2}$  は  $D = 2k + 2$  のときと同じで,

$$\Gamma^{2k+3} = \pm \Gamma_{(2k+2)}. \tag{1.3.118}$$

テンソル積表示での Euclidean 空間の  $\Gamma$  行列は、次元によらず次の性質をもつ：

$$(\Gamma^a)^\dagger = \Gamma^a, \quad (1.3.119)$$

$$(\Gamma^a)^* = \bar{\Gamma}^a = (-1)^{a-1} \Gamma^a, \quad (1.3.120)$$

$$C_\pm = B_\pm. \quad (1.3.121)$$

### 1.3.2.4 Majorana 表示

$D = 2$ : (Majorana-Weyl)  $\Gamma^a$  は実行列

$$\begin{aligned} \Gamma^0 &= i\sigma_2, & \Gamma^1 &= \sigma_1, \\ \Gamma_{(2)} &= \Gamma^0\Gamma^1 = \sigma_3, \\ B &= 1, & C &= B\Gamma^0 = i\sigma_2. \end{aligned} \quad (1.3.122)$$

$D = 3$ :  $D = 2$  の表示で  $\Gamma^2 = \pm\Gamma_{(2)}$  とすればよい.

$D = 4$ :  $\Gamma^a$  は実行列

$$\begin{aligned} \Gamma^0 &= -i\sigma_1 \otimes \sigma_2, & \Gamma^1 &= \sigma_2 \otimes \sigma_2, & \Gamma^2 &= -1 \otimes \sigma_3, & \Gamma^3 &= -1 \otimes \sigma_1, \\ \Gamma_{(4)} &= -i\Gamma^0 \cdots \Gamma^3 = \sigma_3 \otimes \sigma_2, \\ B &= 1, & C &= \Gamma^0 = -i\sigma_1 \otimes \sigma_2. \end{aligned} \quad (1.3.123)$$

$D = 8$ :  $\Gamma^a$  は純虚行列

$$\begin{aligned} \Gamma^0 &= -i\sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3, & \Gamma^1 &= -\sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3, \\ \Gamma^2 &= -1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3, & \Gamma^3 &= 1 \otimes 1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1, \\ \Gamma^4 &= -1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1, & \Gamma^5 &= -1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1, \\ \Gamma^6 &= 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_2, & \Gamma^7 &= -1 \otimes \sigma_2 \otimes 1 \otimes \sigma_3, \\ \Gamma_{(8)} &= \Gamma^0 \cdots \Gamma^7 = \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3, \\ B &= 1, & C &= \Gamma^0 = -i\sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3. \end{aligned} \quad (1.3.124)$$

$D = 9$ :  $D = 8$  において,  $\Gamma^8 = \pm\Gamma_{(8)}$  とすればよい.



$D = 10$ : (Majorana-Weyl)  $\Gamma^a$  は実行列

$$\begin{aligned}
\Gamma^0 &= -i\sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_1, & \Gamma^1 &= -\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_1, \\
\Gamma^2 &= \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_1, & \Gamma^3 &= -1 \otimes \sigma_3 \otimes 1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1, \\
\Gamma^4 &= 1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2, & \Gamma^5 &= 1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2, \\
\Gamma^6 &= -1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1, & \Gamma^7 &= 1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes 1 \otimes \sigma_1, \\
\Gamma^8 &= -1 \otimes 1 \otimes \sigma_2 \otimes 1 \otimes \sigma_2, & \Gamma^9 &= -1 \otimes \sigma_3 \otimes 1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1, \\
\Gamma_{(10)} &= \Gamma^0 \cdots \Gamma^9 = 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_3, \\
B &= 1, & C &= \Gamma^0 = -i\sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \sigma_1.
\end{aligned} \tag{1.3.125}$$

$D = 11$ :  $D = 10$  において,  $\Gamma^{10} = \pm\Gamma_{(10)}$  とすればよい.

### 1.3.2.5 Weyl 表示

$D = 4$ :

$$\begin{aligned}
\gamma^0 &= -i\sigma_1 \otimes 1, & \gamma^j &= -\sigma_2 \otimes \sigma^j, \\
\gamma_{(4)} &= -\gamma_5 = -\sigma_3 \otimes 1, \\
B &= i\sigma_2 \otimes \sigma_2, & C &= -i\sigma_3 \otimes \sigma_2.
\end{aligned} \tag{1.3.126}$$

行列表示でこれらは

$$\begin{aligned}
\gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & -iI_2 \\ -iI_2 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^j &= \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^j \\ -i\sigma^j & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_5 &= \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \\
B &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, & C &= \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.3.127}$$

と表される. 特に, Lorentz 変換の生成元は

$$\gamma^{0j} = \begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^j \end{pmatrix}, \quad \gamma^{jk} = \epsilon^{jkl} \begin{pmatrix} i\sigma_l & 0 \\ 0 & i\sigma_l \end{pmatrix}. \tag{1.3.128}$$

これより, スピノールの成分は,  $V \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  として,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}; \quad \psi_R \rightarrow V\psi_R, \quad \psi_L \rightarrow (V^\dagger)^{-1}\psi_L \tag{1.3.129}$$

と変換する.

Dirac 方程式

$$(\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (1.3.130)$$

は, 次のように分解される:

$$(\partial_t - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \psi_R = -im\psi_L, \quad (1.3.131a)$$

$$(\partial_t + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla) \psi_L = -im\psi_R, \quad (1.3.131b)$$

運動量表示では

$$\begin{pmatrix} p^0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} & -m \\ -m & p^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = 0. \quad (1.3.132)$$

この解は,  $E = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$  として,

$$\begin{aligned} p^0 = E: \quad \psi_R &= (E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\chi_L, \quad \psi_L = m\chi_L \\ \text{or } \psi_R &= m\eta_R, \quad \psi_L = (E + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\eta_R, \end{aligned} \quad (1.3.133a)$$

$$\begin{aligned} p^0 = -E: \quad \psi_R &= (E + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\chi_L, \quad \psi_L = -m\chi_L \\ \text{or } \psi_R &= -m\eta_R, \quad \psi_L = (E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\eta_R. \end{aligned} \quad (1.3.133b)$$

Current は

$$i\bar{\psi}\psi = -(\psi_R^\dagger \psi_L + \psi_L^\dagger \psi_R), \quad (1.3.134a)$$

$$V^\mu \bar{\psi}\gamma_\mu \psi = \psi_R^\dagger (V^0 + V_j \sigma^j) \psi_R + \psi_L^\dagger (V^0 - V_j \sigma^j) \psi_L, \quad (1.3.134b)$$

$$\bar{\psi}\gamma_5 \psi = i(\psi_L^\dagger \psi_R - \psi_R^\dagger \psi_L), \quad (1.3.134c)$$

$$V^\mu \bar{\psi}\gamma_\mu \gamma_5 \psi = \psi_R^\dagger (V^0 + V_j \sigma^j) \psi_R - \psi_L^\dagger (V^0 - V_j \sigma^j) \psi_L \quad (1.3.134d)$$

Majorana 条件は

$$\psi^* = B\psi \Leftrightarrow \psi_R = -\sigma_2 \psi_L^*. \quad (1.3.135)$$

$\psi_L = \chi$  とおくと, Majorana スピノールに対するカレントは

$$i\bar{\psi}\psi = \chi^T \sigma_2 \chi + \chi^\dagger \sigma_2 \chi^*, \quad (1.3.136a)$$

$$V^\mu \bar{\psi}\gamma_\mu \psi = 2\chi^\dagger (V^0 - V_j \sigma^j) \chi, \quad (1.3.136b)$$

$$\bar{\psi}\gamma_5 \psi = i(\chi^T \sigma_2 \chi - \chi^\dagger \sigma_2 \chi^*), \quad (1.3.136c)$$

$$\bar{\psi}\gamma_\mu \gamma_5 \psi = 0. \quad (1.3.136d)$$

荷電共役変換

$$\psi^c = T(\bar{\psi}C^{-1}) \quad (1.3.137)$$

に対して,

$$\bar{\psi}\mathcal{O}\chi = \bar{\chi}^c\tilde{\mathcal{O}}\psi^c. \quad (1.3.138)$$

ここで,

$$\tilde{\mathcal{O}} = C^{-1}T\mathcal{O}C \quad (1.3.139)$$

で,

$$\mathcal{O} = \gamma^{a_1} \dots \gamma^{a_n} \mapsto \tilde{\mathcal{O}} = (-1)^n \gamma^{a_n} \dots \gamma^{a_1}. \quad (1.3.140)$$

また,  $\psi$  が Majorana スピノールの時,

$$\psi^c = \psi \quad (1.3.141)$$

### 1.3.3 SO(6) スピノール

#### References

- Grana M, Minasianb R, Petrini M, Tomasiello A: jhep0408, 046 (2004)

“Supersymmetric backgrounds from generalized Calabi-Yau manifolds”

#### 1.3.3.1 諸定義

カイラル分解  $\mathbf{8} = \mathbf{4} + \mathbf{4}^* = \eta_+ + \chi_-$  に対し, 次の条件を満たす表示を取る:

$$(\gamma^a)^\dagger = \gamma^a, \quad (1.3.142)$$

$$\eta_+ \in \mathbf{4} \Rightarrow \eta_+^* \in \mathbf{4}^*. \quad (1.3.143)$$

また,

$$\gamma_7 = i\gamma^{123456}. \quad (1.3.144)$$

より,

$$\gamma_{a_1 \dots a_k} = \frac{1}{(6-k)!} i\gamma_7 \gamma^{b_1 \dots b_{6-k}} \epsilon_{b_1 \dots b_{6-k} a_k \dots a_1}. \quad (1.3.145)$$

すなわち,

$$\gamma_{[k]} = (-1)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} i \gamma_7 * (\gamma_{[6-k]}). \quad (1.3.146)$$

例えば,

$$\begin{aligned} \Gamma^1 &= \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, & \Gamma^2 &= \sigma_1 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\ \Gamma^3 &= -1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3, & \Gamma^4 &= -1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3, \\ \Gamma^5 &= 1 \otimes 1 \otimes \sigma_1, & \Gamma^6 &= 1 \otimes 1 \otimes \sigma_2, \\ \Gamma_7 &= -\sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3, \\ C &= \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2. \end{aligned} \quad (1.3.147)$$

$C$  は次の性質をもつ :

$$C^\dagger = \mathcal{T}C = C^{-1} = C, \quad (1.3.148a)$$

$$C\gamma^a C = -\mathcal{T}(\gamma^a) \quad (1.3.148b)$$

したがって,

$$\begin{aligned} \eta_+^* = C\eta_- &\Rightarrow \eta_+^\dagger \eta_+ = \eta_-^\dagger \eta_-, & \eta_+^\dagger \gamma^{ab} \eta_+ &= -\eta_-^\dagger \gamma^{ab} \eta_-, \\ &(\eta_+^\dagger \gamma^{ab} \eta_+)^* &= -\eta_+^\dagger \gamma^{ab} \eta_+, \\ \eta_\pm^\dagger \gamma^a \eta_\pm &= \eta_\pm^\dagger \gamma^{abc} \eta_\pm = 0, \\ &(\eta_+^\dagger \gamma^{abc} \eta_-)^* &= -\eta_-^\dagger \gamma^{abc} \eta_+, \\ \eta_\pm^\dagger \eta_\mp &= \eta_\pm^\dagger \gamma^a \eta_\mp = \eta_\pm^\dagger \gamma^{ab} \eta_\mp = 0. \end{aligned} \quad (1.3.149)$$

### 1.3.3.2 Fierz 恒等式

任意のスピンール  $a, b, c, d$  と Clifford 代数の元  $M_1, M_2$  に対し

$$\begin{aligned} (c^\dagger M_1 a)(b^\dagger M_2 d) &= \frac{1}{8} \{ (c^\dagger d)(b^\dagger M_2 M_1 a) + (c^\dagger \gamma_7 d)(b^\dagger M_2 \gamma_7 M_1 a) \} \\ &+ \frac{1}{8} \{ (c^\dagger \gamma^p d)(b^\dagger M_2 \gamma_p M_1 a) - (c^\dagger \gamma_7 \gamma^p d)(b^\dagger M_2 \gamma_7 \gamma_p M_1 a) \} \\ &- \frac{1}{16} \{ (c^\dagger \gamma^{pq} d)(b^\dagger M_2 \gamma_{pq} M_1 a) + (c^\dagger \gamma_7 \gamma^{pq} d)(b^\dagger M_2 \gamma_7 \gamma_{pq} M_1 a) \} \\ &- \frac{1}{48} (c^\dagger \gamma^{pqr} d)(b^\dagger M_2 \gamma_{pqr} M_1 a). \end{aligned} \quad (1.3.150)$$

ただし,

$$(c^\dagger A \gamma^{pqr} B d)(b^\dagger C \gamma_{pqr} D d) = -(c^\dagger A \gamma_7 \gamma^{pqr} B d)(b^\dagger C \gamma_7 \gamma_{pqr} D d). \quad (1.3.151)$$

### 1.3.3.3 形式系

$$\gamma_7 \eta_{\pm} = \pm \eta_{\pm}, \quad \eta_+^* = C \eta_-, \quad \eta_{\pm}^{\dagger} \eta_{\pm} = 1/2 \quad (1.3.152)$$

となるスピノールに対し,

$$J^{pq} = -i \eta^{\dagger} \gamma^{pq} \gamma_* \eta = \mp 2i \eta_{\pm}^{\dagger} \gamma^{pq} \eta_{\pm}, \quad (1.3.153a)$$

$$\Omega^{pqr} = -i \eta^{\dagger} \gamma^{pqr} (1 + \gamma_*) \eta = -2i \eta_{\pm}^{\dagger} \gamma^{pqr} \eta_{\pm}. \quad (1.3.153b)$$

とおく。このとき、

$$J_{pq} = -J_{qp}, \quad J_m^n J_n^p = -\delta_m^p, \quad J \wedge \Omega = 0, \quad J \wedge J \wedge J \wedge = \frac{3}{4} i \Omega \wedge \bar{\Omega} = 6v \quad (1.3.154)$$

これにより定義される SU(3) 構造に対応する複素エルミート正規直交基底を  $\{\phi^i, \bar{\phi}^{\bar{i}}\}$  とするとき、

$$\hat{\gamma}^j \equiv \phi_m^j \gamma^m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma^{2j-1} + i \gamma^{2j}), \quad \hat{\gamma}^{\bar{j}} \equiv \bar{\phi}_m^{\bar{j}} \gamma^m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma^{2j-1} - i \gamma^{2j}) \quad (1.3.155)$$

と置くと、

$$\hat{\gamma}^i \hat{\gamma}^j + \hat{\gamma}^j \hat{\gamma}^i = 0, \quad \hat{\gamma}^i \hat{\gamma}^{\bar{j}} + \hat{\gamma}^{\bar{j}} \hat{\gamma}^i = 2\delta^{ij}. \quad (1.3.156)$$

また、 $\eta_-$  は、ガンマ行列の Clifford 基底となる：

$$\hat{\gamma}^i u_+ = 0 \Leftrightarrow \hat{\gamma}^{\bar{i}} u_- = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.3.157)$$

また、Fierz 恒等式より、次の関係が成り立つ：

$$\eta_{\pm} \otimes \eta_{\pm}^{\dagger} = \frac{1}{8} e^{\mp j J}, \quad \eta_+ \otimes \eta_-^{\dagger} = -\frac{i}{8} \Omega, \quad \eta_- \otimes \eta_+^{\dagger} = -\frac{i}{8} \bar{\Omega}. \quad (1.3.158)$$

### IIA 型フラックス

$$F_2^{(1)} = F_2 \cdot J, \quad F_{2,k}^{(3)} = \frac{1}{8} F^{ij} \Omega_{ijk}, \quad (1.3.159a)$$

$$F_4^{(1)} = \frac{1}{8} F^{mnpq} J_{mn} J_{pq}, \quad F_{4,i}^{(3)} = \frac{1}{24} F_k^{ijl} \Omega_{ijl}, \quad (1.3.159b)$$

$$F_6^{(1)} = \frac{1}{6} F_6 \cdot J \wedge J \wedge J \quad (1.3.159c)$$

とおくと、

$$F_2 = \frac{1}{3}F_2^{(1)}J + \text{Re}(F_2^{(3)} \cdot \bar{\Omega}) + F_2^{(8)}, \quad (1.3.160a)$$

$$F_4 = \frac{1}{6}F_4^{(1)}J \wedge J + \text{Re}(F_4^{(3)} \wedge \bar{\Omega}) + F_4^{(8)}, \quad (1.3.160b)$$

$$F_6 = \frac{1}{6}F_6^{(1)}J \wedge J \wedge J. \quad (1.3.160c)$$

これらのフラックスの形式和に対応する Clifford 代数の元を

$$\mathbb{F}_A = F_0 + \mathbb{F}_2 + \mathbb{F}_4 + \mathbb{F}_6 \quad (1.3.161)$$

により定義するとき、

$$\begin{aligned} \eta_-^\dagger \mathbb{F}_A \eta_+ &= \frac{1}{2} (\mathbb{F}_A e^{i\mu})_0 \\ &= \frac{1}{2} F_0 - \frac{i}{4} F^{ab} J_{ab} - \frac{1}{16} F^{abcd} J_{ab} J_{cd} + \frac{i}{96} F^{abcdef} J_{ab} J_{cd} J_{ef} \\ &= \frac{1}{2} \left( F_0 - iF_2^{(1)} - F_4^{(1)} + iF_6^{(1)} \right), \end{aligned} \quad (1.3.162a)$$

$$\begin{aligned} \eta_+^\dagger \gamma_m \mathbb{F}_A \eta_- &= -\frac{i}{2} (\mathbb{F}_A \bar{\Omega})_m \\ &= \frac{i}{4} F^{ab} \bar{\Omega}_{abm} - \frac{i}{12} F^{abc} {}_m \bar{\Omega}_{abc} \\ &= 2i \left( F_{2,n}^{(3)} + F_{4,n}^{(3)} \right) \bar{P}_m{}^n, \end{aligned} \quad (1.3.162b)$$

$$\begin{aligned} \eta_+^\dagger \mathbb{F}_A \gamma_m \eta_- &= -\frac{i}{2} (\bar{\Omega} \mathbb{F}_A)_m \\ &= \frac{i}{4} F^{ab} \bar{\Omega}_{abm} + \frac{i}{12} F^{abc} {}_m \bar{\Omega}_{abc} \\ &= 2i \left( F_{2,n}^{(3)} - F_{4,n}^{(3)} \right) \bar{P}_m{}^n, \end{aligned} \quad (1.3.162c)$$

$$\eta_-^\dagger \gamma_n \mathbb{F}_A \gamma_m \eta_- = -(\mathbb{F}_{Am} e^{i\mu})_n + \frac{1}{2} (\mathbb{F}_A e^{i\mu})_0 g_{mn} + (\mathbb{F}_A e^{i\mu})_{mn} \quad (1.3.162d)$$

**IIB 型フラックス** フラックスの SU(3) 分解を

$$F_3^{(1)} = -\frac{i}{36} \hat{F}^{ijk} \Omega_{ijk}, \quad F_{3,i}^{(3)} = \frac{1}{4} \hat{F}_{imn} J^{mn}, \quad F_{3,ij}^{(6)} = \hat{F}_3^{kl} (i\Omega_j)_{kl}, \quad (1.3.163a)$$

$$F_{5i}^{(3)} = \frac{1}{16} F_i^{mnpq} J_{mn} J_{pq} \quad (1.3.163b)$$

により定義するとき、

$$\hat{F}_3 = -\frac{3}{2}\text{Im}(F_3^{(1)}\bar{\Omega}) + F_3^{(3)} \wedge J + F_3^{(6)}, \quad (1.3.164a)$$

$$\hat{F}_5 = F_5^{(3)} \wedge J \wedge J. \quad (1.3.164b)$$

フラックスの形式和に対応する Clifford 代数の元

$$\mathbb{F}_B = \mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_3 + \mathbb{F}_5 \quad (1.3.165)$$

に対して、

$$\begin{aligned} \eta_-^\dagger \mathbb{F}_B \eta_+ &= -\frac{i}{2} (\mathbb{F}_B \mathcal{Q})_0 \\ &= \frac{i}{12} F^{abc} \Omega_{abc} = -3 \left( F_3^{(1)} - \bar{F}_3^{(1)} \right), \end{aligned} \quad (1.3.166a)$$

$$\begin{aligned} \eta_+^\dagger \gamma_m \mathbb{F}_B \eta_+ &= \frac{1}{2} (\mathbb{F}_B e^{-iJ})_m \\ &= \left( F_n + \frac{i}{2} J_{ab} F^{ab}{}_n - \frac{1}{4} J_{ab} J_{cd} F^{abcd}{}_n \right) \bar{P}_m{}^n \\ &= \left( F_n + 2iF_{3,n}^{(3)} - 4F_{5,n}^{(3)} \right) \bar{P}_m{}^n, \end{aligned} \quad (1.3.166b)$$

$$\begin{aligned} \eta_+^\dagger \mathbb{F}_B \gamma_m \eta_+ &= \frac{1}{2} (e^{-iJ} \mathbb{F}_B)_m \\ &= \left( F_n + \frac{i}{2} J_{ab} F^{ab}{}_n - \frac{1}{4} J_{ab} J_{cd} F^{abcd}{}_n \right) P_m{}^n \\ &= \left( F_n + 2iF_{3,n}^{(3)} - 4F_{5,n}^{(3)} \right) P_m{}^n, \end{aligned} \quad (1.3.166c)$$

$$\begin{aligned} \eta_-^\dagger \gamma_n \mathbb{F}_B \gamma_m \eta_+ &= -i (\mathbb{F}_B \mathcal{Q})_n + \frac{i}{2} (\mathbb{F}_B \mathcal{Q})_0 g_{mn} + i (\mathbb{F}_B \mathcal{Q})_{mn} \\ &= \frac{i}{2} F^{ab}{}_{(m} \Omega_{n)ab} - \frac{i}{12} F^{abc} \Omega_{abc} g_{mn} + \frac{i}{2} F^a \Omega_{amn} + \frac{i}{12} F^{abc}{}_{mn} \Omega_{abc} \\ &= \frac{i}{2} F_{3,mn}^{(6)} + 2 \left( F_3^{(1)} - \bar{F}_3^{(1)} \right) g_{mn} + \frac{1}{2} (iF_1^p + F_5^p) \Omega_{mn} \end{aligned} \quad (1.3.166d)$$

### 1.3.4 SO(7) スピノール

#### 1.3.4.1 諸定義

$\gamma^a (a = 1, \dots, 7)$  は次の関係式を満たす:

$$\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\delta^{ab}, \quad (1.3.167)$$

$$i\gamma^1 \cdots \gamma^7 = 1. \quad (1.3.168)$$

成分がすべて純虚で行列として hermitian となる表示は

$$\gamma^{1,2,3} = \begin{pmatrix} i\alpha^{1,2,3} & 0 \\ 0 & -i\alpha^{1,2,3} \end{pmatrix}, \quad (1.3.169a)$$

$$\gamma^{4,5,6} = \begin{pmatrix} 0 & i\beta^{1,2,3} \\ i\beta^{1,2,3} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.3.169b)$$

$$\gamma^7 = \begin{pmatrix} 0 & -iI_4 \\ iI_4 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.169c)$$

ここで,

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^3 = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix} \quad (1.3.170a)$$

$$\beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & 0 \\ 0 & i\sigma^2 \end{pmatrix} \quad (1.3.170b)$$

#### 1.3.4.2 部分代数

$\mathfrak{so}(8)$  と  $\mathfrak{sl}(8, \mathbb{R})$  は  $\mathcal{Cl}_7^*$  の部分代数となる:

$$\mathfrak{so}(8) = \{i\gamma^a, \gamma^{ab}\}, \quad (1.3.171a)$$

$$(8, \mathbb{R}) = \{i\gamma^a, \gamma^{ab}, i\gamma^{abc}\}. \quad (1.3.171b)$$

また,  $\mathfrak{su}(8)$  は  $\mathcal{Cl}_7$  の部分代数となる:

$$\mathfrak{su}(8) = \{i\gamma^a, \gamma^{ab}, ij\gamma^{abc}\} \quad (1.3.172)$$

ここで,  $j$  は  $\mathbb{C}$  に対して外的で  $j^2 = -1$  となる要素である.

#### 1.3.4.3 $SO(8)$ 型表示

$\Gamma^{ab}(a, b = 1, \dots, 8)$  を

$$\Gamma^{ab} = \gamma^{ab} \quad (a, b = 1, \dots, 7), \quad (1.3.173a)$$

$$\Gamma^{a8} = -\Gamma^{8a} = -i\gamma^a \quad (a = 1, \dots, 7) \quad (1.3.173b)$$



により定義する. このとき,

$$[\Gamma^{ab}, \Gamma^{cd}] = 4 (\delta^{d[a}\Gamma^{b]c} - \delta^{c[a}\Gamma^{b]d}), \quad (1.3.174a)$$

$$\Gamma^{12\dots 8} = -1, \quad (1.3.174b)$$

$$\frac{1}{2}(\Gamma^{ab})_A{}^B(\Gamma_{ab})_C{}^D = 4 (\delta_{AC}\delta^{BD} - \delta_A{}^D\delta_C{}^B), \quad (1.3.174c)$$

$$\frac{1}{4!}(\Gamma^{abcd})_A{}^B(\Gamma_{abcd})_C{}^D = 4\delta_{AC}\delta^{BD} + 4\delta_A{}^D\delta_C{}^B - \delta_A{}^B\delta_C{}^D. \quad (1.3.174d)$$

ベクトル-スピノール双対関係  $(\Gamma^{ab})_{AB} = (\Gamma_{AB})^{ab}$  とおくと,

$$(\Gamma^{ab})_{AB}(\Gamma_{ab})_{CD} = -8(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}), \quad (1.3.175a)$$

$$(\Gamma_{AB})_{ab}(\Gamma^{AB})_{cd} = -8(\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}). \quad (1.3.175b)$$

また,

$$[\Gamma^{ab}, \Gamma^{cd}]_{AB} = 8\delta_{[b}^{[c}(\Gamma_{a]}^{d]})_{AB}, \quad (1.3.176a)$$

$$[\Gamma^{AB}, \Gamma^{CD}]_{ab} = 8\delta_{[B}^{[C}(\Gamma_{A]}^{D]})_{ab}. \quad (1.3.176b)$$

### 1.3.5 SO(8) スピノール

#### 1.3.5.1 $\Gamma$ 行列の関係式

**【公式 1.41】** 8次元における  $\Gamma$  行列  $\Gamma_a$  から作られる Lorentz 群の生成元  $\Gamma_{ab}$  は, 16次元スピノール表現の chiral 表示

$$\Gamma_{ab} = \begin{pmatrix} +\Gamma_{ab} & 0 \\ 0 & -\Gamma_{ab} \end{pmatrix} \quad (1.3.177)$$

により, 実8次元行列  $\pm\Gamma_{ab}$  で表される. それらの成分には次の性質がある:

$$\pm\Gamma_{ab}^{AB} = (\pm\Gamma_{ab})^{AB} = (\pm\Gamma^{AB})_{ab}, \quad (1.3.178a)$$

$$\pm\Gamma_{AB}^{abcd} = \pm\frac{1}{4!}\epsilon^{abcdefgh}\pm\Gamma_{AB}^{efgh}, \quad (1.3.178b)$$

(添え字の上下に違いはない). 以下, 誤解の可能性がない場合は  $\pm$  を省略. このとき, 次の関係式が成り立つ:

$$(\Gamma^{ab})_{AB}(\Gamma_{ab})_{CD} = 16 (\delta_{A[C}\delta_{D]B}), \quad (1.3.179a)$$

$$(\Gamma^{AB})_{ab}(\Gamma_{AB})_{cd} = 16 (\delta_{a[c}\delta_{d]b}), \quad (1.3.179b)$$

$$[\Gamma^{ab}, \Gamma^{cd}]_{AB} = 4 (\delta^{c[b}(\Gamma_{AB})^{a]d} - \delta^{d[b}(\Gamma_{AB})^{a]c}), \quad (1.3.179c)$$

$$[\Gamma^{AB}, \Gamma^{CD}]_{ab} = 4 (\delta^{C[B}(\Gamma_{ab})^{A]D} - \delta^{D[B}(\Gamma_{ab})^{A]C}), \quad (1.3.179d)$$

$$\{\Gamma^{AB}, \Gamma^{CD}\}_{ab} = 2\Gamma_{ac}^{[AB}\Gamma_{cb}^{CD]} + 4\delta_{ab}\delta^{A[D}\delta_{C]B}, \quad (1.3.179e)$$

$$(\Gamma^{ab}\Gamma^{cd})_{(AB)} = (\Gamma^{abcd})_{AB} + 2\delta^{a(d}\delta^{c)b}\delta_{AB}, \quad (1.3.179f)$$

$$(\Gamma^{abcd})_{AB}(\Gamma_{abcd})_{CD} = 2 \times 4! \{8\delta_{A(C}\delta_{D)B} - \delta_{AB}\delta_{CD}\} \quad (1.3.180a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{[AB}^{ab}\Gamma_{CD]}^{cd} &= \frac{1}{2} \left( \Gamma_{AB}^{[ab}\Gamma_{CD]}^{cd} \mp \frac{1}{4!} \epsilon^{abcdefgh} \Gamma_{AB}^{ef} \Gamma_{CD}^{gh} \right) \\ &\quad + \frac{1}{3} \Gamma_{AB}^{e[a} \delta^{b][c} \Gamma_{CD}^{d]e} + \frac{1}{3} \Gamma_{CD}^{e[a} \delta^{b][c} \Gamma_{AB}^{d]e} \\ &\quad + \frac{1}{12} \delta^{a[d} \delta^{c]b} \Gamma_{AB}^{ef} (\Gamma_{ef})_{CD}. \end{aligned} \quad (1.3.180b)$$

□

**【命題 1.42】**  $\pm\xi_{ABCD}$  を 8次元の自己 (反) 双対形式とする:  $\pm\xi \in \mathcal{A}_{\pm}^4(\mathbb{R}^8)$ . これに対して,  $\pm\eta \in \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^8) \otimes \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^8)$  を

$$\pm\eta_{abcd} = \frac{1}{16} \pm\Gamma_{ab}^{AB} \pm\Gamma_{cd}^{CD} \pm\xi_{ABCD} \quad (1.3.181)$$

により対応させる. このとき,

$$\pm S_{ab} = \pm\eta_{acb}{}^c = -\frac{1}{16} (\pm\Gamma^{ABCD})_{(ab)} \pm\xi_{ABCD} \quad (1.3.182)$$

として,

$$\pm\eta_{abcd} = (\pm S \wedge 1)_{ab;cd} = \frac{1}{2} (\pm S_{a[c}\delta_{d]b} - \pm S_{b[c}\delta_{d]a}), \quad (1.3.183)$$

$$\pm S_{ab} = \pm S_{ba}, \quad \pm S_c{}^c = 0, \quad (1.3.184)$$

$$\pm\eta_{[abcd]} = 0 \quad (1.3.185)$$

が成り立つ. この対応は 1 対 1 である. すなわち,

$$\pm\xi_{ABCD} = \frac{1}{16} \pm\Gamma_{AB}^{ab} \pm\Gamma_{CD}^{cd} \pm\eta_{abcd} = -\frac{1}{16} (\pm\Gamma_{ABCD})^{ab} \pm S_{ab} \quad (1.3.186)$$

$$\pm\xi_{ABCD} \pm\xi^{ABCD} = \frac{3}{2} \text{Tr}(\pm S^2) \quad (1.3.187)$$

が成り立つ.

次に,

$$\pm \xi'_{abcd} = \frac{1}{16} \mp \Gamma_{ab}^{AB} \mp \Gamma_{cd}^{CD} \pm \xi_{ABCD} \quad (1.3.188)$$

とおくと,

$$\pm \xi'_{abcd} = \pm \xi'_{[abcd]}, \quad (1.3.189a)$$

$$\frac{1}{4!} \epsilon_{abcd}{}^{pqrs} \pm \xi'_{pqrs} = \pm \pm \xi'_{abcd}, \quad (1.3.189b)$$

$$\pm \xi'_{abcd} \pm \xi'^{abcd} = \pm \xi_{abcd} \pm \xi^{abcd} \quad (1.3.189c)$$

が成り立つ. したがって, この対応は, それぞれ  $\mathcal{O}_{\pm}^4(\mathbb{R}^8)$  での等長変換を与える. □

## 2 公式集：解析

Last update: 2011.7.18

### 2.1 常微分方程式

#### 2.1.1 2階微分方程式

##### 2.1.1.1 基本解

【公式 2.1 (定数変化法)】 2階同次方程式

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + p(x)\frac{du(x)}{dx} + q(x)u(x) = 0$$

の1つの解を  $U_1(x)$  とするとき, それと独立な基本解  $U_2(x)$  は

$$U_2(x) = U_1(x) \int^x dx' (U_1(x'))^{-2} \exp - \int^{x'} p(x'') dx'' \quad (2.1.1)$$

で与えられる. □

##### 2.1.1.2 Green 関数法

【公式 2.2 (非同次方程式)】 2階同次方程式

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + p(x)\frac{du(x)}{dx} + q(x)u(x) = 0$$

の2つの基本解を  $U_1(x), U_2(x)$ , その Wronskian を  $\Delta(x)$  とする:

$$\Delta(x) = U_1'U_2 - U_2'U_1 = C \exp \left( - \int dx p(x) \right). \quad (2.1.2)$$

このとき, 非同次方程式

$$u'' + pu' + qu = f \quad (2.1.3)$$

の一般解は

$$u(x) = U_1(x) \int^x \frac{dx'}{\Delta(x')} U_2(x') f(x') - U_2(x) \int^x \frac{dx'}{\Delta(x')} U_1(x') f(x'). \quad (2.1.4)$$

□

### 2.1.1.3 自己共役作用素

【命題 2.3 (対称条件)]  $x$  を変数とする区間  $[a, b]$  上での 2 階微分作用素

$$L := p\partial^2 + q\partial + r; \quad \partial = d/dx \quad (2.1.5)$$

が内積

$$N(\Phi_1, \Phi_2) = \int_a^b dx \mu(x) \bar{\Phi}_1(x) \Phi_2(x) \quad (2.1.6)$$

に関して対称となる条件は,

$$p = \bar{p}, \quad (2.1.7a)$$

$$\mu(q + \bar{q}) = 2\partial(\mu p), \quad (2.1.7b)$$

$$2\mu(r - \bar{r}) = \partial[\mu(q - \bar{q})]. \quad (2.1.7c)$$

特に, 第 2 式は

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{q + \bar{q}}{2p} - \frac{\partial p}{p} \quad (2.1.8)$$

と表されるので, 内積を決める測度  $\mu$  は  $L$  の係数により定数倍を除いて一意に決まる. また, 条件 (2.1.7) が満たされるとき,  $q = q_1 + iq_2, r = r_1 + ir_2$  に対して,  $L$  は

$$L\Phi = \frac{1}{\mu} \partial(\mu p \partial \Phi) + \frac{i}{2\mu} \{\mu q_2 \partial \Phi + \partial(\mu q_2 \Phi)\} + r_1 \Phi \quad (2.1.9)$$

と書き換えられる. また,

$$N(\Phi, L\Phi) = \int_a^b dx \mu \left[ -p \left| \partial \Phi + \frac{iq_2}{2p} \Phi \right|^2 + \left( r_1 + \frac{q_2^2}{4p} \right) |\Phi|^2 \right] \quad (2.1.10)$$

が成り立つ.

さらに, 複素関数  $h(x) = k(x)e^{i\theta(x)}$  ( $k > 0$ ) を用いて,

$$L' := \frac{1}{h} L \circ h \quad (2.1.11)$$

により作用素  $L'$  を定義すると,  $L$  が対称なら  $L'$  も対称で, 対応する内積測度は

$$\mu' = k^2 \mu \quad (2.1.12)$$

で与えられる. □

【公式 2.4 (固有関数の規格化)】 自己共役 2 階常微分作用素

$$L\Phi = -\frac{1}{\mu(x)}\partial_x(\mu(x)p(x)\partial_x\Phi) + V(x)\Phi \quad (2.1.13)$$

の固有関数

$$L\Phi_\lambda = \lambda\Phi_\lambda \quad (2.1.14)$$

の内積は,

$$\int_a^b dx\mu(x)\Phi_{\lambda'}^*\Phi_\lambda = \frac{1}{\lambda - \lambda'} [\mu p(\Phi_\lambda\partial_x\Phi_{\lambda'}^* - \Phi_{\lambda'}^*\partial_x\Phi_\lambda)]_{a+0}^{b-0}. \quad (2.1.15)$$

□

#### 2.1.1.4 Fuchs 型方程式

【命題 2.5】 複素解析関数を係数とする 2 階 ODE

$$\frac{d^2u}{dz^2} + p(z)\frac{du}{dz} + q(z)u = 0 \quad (2.1.16)$$

が  $z = z_0, z_1, \infty$  を確定特異点とする Fuchs 型方程式であるための必要十分条件は,  $p(z), q(z)$  が

$$p(z) = \frac{a_0}{z - z_0} + \frac{a_1}{z - z_1}, \quad (2.1.17a)$$

$$q(z) = \frac{b_0}{(z - z_0)^2} + \frac{b_1}{(z - z_1)^2} + \frac{c}{(z - z_0)(z - z_1)} \quad (2.1.17b)$$

で与えられることである. このとき, 各特異点での指数 ( $u \approx z^\lambda$ ) は

$$z = z_0 : \lambda_0, \lambda'_0; \lambda^2 + (a_0 - 1)\lambda + b_0 = 0, \quad (2.1.18a)$$

$$z = z_1 : \lambda_1, \lambda'_1; \lambda^2 + (a_1 - 1)\lambda + b_1 = 0, \quad (2.1.18b)$$

$$z = \infty : \lambda_\infty, \lambda'_\infty; \lambda^2 + (a_0 + a_1 - 1)\lambda + c + b_0 + b_1 = 0 \quad (2.1.18c)$$

また，一般解は超幾何関数を用いて

$$\begin{aligned}
 u(z) &= (z - z_1)^{\lambda_1} \left[ A_0(z - z_0)^{\lambda_0} F(\alpha, \beta, \gamma; \zeta) \right. \\
 &\quad \left. + B_0(z - z_0)^{\lambda'_0} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; \zeta) \right], \\
 &= (z - z_0)^{\lambda_0} \left[ A_1(z - z_1)^{\lambda_1} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - \zeta) \right. \\
 &\quad \left. + B_1(z - z_1)^{\lambda'_1} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - \zeta) \right], \\
 &= \left( \frac{z - z_1}{z - z_0} \right)^{\lambda_1} \left[ A_\infty \zeta^{\lambda_\infty} F(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1; 1/\zeta) \right. \\
 &\quad \left. + B_\infty \zeta^{\lambda'_\infty} F(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1; 1/\zeta) \right] \quad (2.1.19)
 \end{aligned}$$

と表される．ここで，

$$\zeta = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}, \quad (2.1.20a)$$

$$\alpha = \lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_\infty, \quad (2.1.20b)$$

$$\beta = \lambda_0 + \lambda_1 - \lambda'_\infty, \quad (2.1.20c)$$

$$\gamma = a_0 + 2\lambda_0 = 1 + \lambda_0 - \lambda'_0. \quad (2.1.20d)$$

ただし，

$$\lambda_0 + \lambda'_0 + \lambda_1 + \lambda'_1 = 1 + \lambda_\infty + \lambda'_\infty. \quad (2.1.21)$$

□

### 2.1.1.5 特異点近傍での級数解

【命題 2.6】 複素解析関数を係数とする 2 階 ODE

$$z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + zp(z) \frac{du}{dz} + q(z)u = 0 \quad (2.1.22)$$

の係数が  $z = 0$  でべき級数

$$p(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots, \quad (2.1.23a)$$

$$q(z) = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots \quad (2.1.23b)$$

に展開できるとする．特性方程式

$$\lambda^2 + (p_0 - 1)\lambda + q_0 = 0 \quad (2.1.24)$$

の解を  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$  とする．

1)  $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$  のとき : このとき, 基本解は

$$u_1 = z^{\lambda_1}(a_0 + a_1z + \cdots), \quad (2.1.25a)$$

$$u_2 = z^{\lambda_2}(b_0 + b_1z + \cdots) \quad (2.1.25b)$$

とべき級数に展開可能で,  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ ,  $c_n = a_n, b_n$  として,  $c_n$  は漸化式

$$n(p_0 + n - 1 + 2\lambda)c_n = - \sum_{k=0}^{n-1} [(\lambda + k)p_{n-k} - q_{n-k}] c_k \quad (2.1.26)$$

に従う.

2)  $\lambda = \mu, \mu + m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) のとき : このとき, 基本解は

$$u_1 = z^{\mu+m}(1 + a_1z + a_2z^2 + \cdots), \quad (2.1.27a)$$

$$u_2 = z^{\mu}(b_0 + b_1z + b_2z^2 + \cdots) + cu_1 \log z \quad (2.1.27b)$$

と表され,  $a_n$  は漸化式

$$n(n+m)a_n = - \sum_{k=0}^{n-1} [(\mu + m + k)p_{n-k} - q_{n-k}] a_k \quad (2.1.28)$$

に従う. また,  $b_n$  は漸化式

$$0 \leq n \leq m-1:$$

$$n(n-m)b_n = - \sum_{k=0}^{n-1} [(\mu + k)p_{n-k} - q_{n-k}] b_k, \quad (2.1.29)$$

$$n \geq m+1:$$

$$n(n-m)b_n = - \sum_{k=0}^{n-1} [(\mu + k)p_{n-k} - q_{n-k}] b_k - c \left[ 2(n + \mu) + \sum_{k=0}^{n-m} p_{n-m-k} a_k \right] \quad (2.1.30)$$

に従う. ここで,

$$b_m = 0, \quad (2.1.31a)$$

$$mc = - \sum_{k=0}^{m-1} [(\mu + k)p_{n-k} - q_{n-k}] b_k. \quad (2.1.31b)$$

ただし,  $m = 0$  の時は,  $b_0 = 0$  で  $c$  は任意である.

□



### 2.1.1.6 Klein-Gordon 方程式関連

【命題 2.7 (一様電場中の荷電粒子)】 方程式

$$L_E \phi(x) := [-\partial_x^2 + m^2 - (ax + E)^2] \phi(x) = 0 \quad (2.1.32)$$

の正則な解の基本系は

$$\phi_{E,o}(x) = e^{-\pi|\kappa|} (ax + E) \frac{M_{\kappa,1/4}(z)}{(az)^{3/4}}, \quad (2.1.33a)$$

$$\phi_{E,e}(x) = e^{-\pi|\kappa|} \frac{M_{\kappa,-1/4}(z)}{(az)^{1/4}} \quad (2.1.33b)$$

で与えられる.  $\phi_{E,o}$  は  $x$  の奇関数,  $\phi_{E,e}$  は  $x$  の偶関数である. ここで,

$$\kappa = i \frac{m^2}{4a}, \quad (2.1.34)$$

$$az = i(ax + E)^2. \quad (2.1.35)$$

また,  $M_{\kappa,\mu}$  は次の Whittaker 方程式の基本解:

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + \left( -\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{z} + \frac{1/4 - \mu^2}{z^2} \right) W = 0. \quad (2.1.36)$$

$x \rightarrow \pm\infty$  での解の漸近挙動は

$$\phi_{E,o} \sim \sqrt{\pi} \frac{ax + E}{|ax + E|^{3/2}} \operatorname{Re} \left( \frac{\exp[-\frac{z}{2} + \kappa \ln |z| + \frac{3\pi}{8}i]}{\Gamma(\kappa + 3/4)} \right) \quad (2.1.37a)$$

$$\phi_{E,e} \sim \frac{2\sqrt{\pi}}{|ax + E|^{1/2}} \operatorname{Re} \left( \frac{\exp[-\frac{z}{2} + \kappa \ln |z| + \frac{\pi}{8}i]}{\Gamma(\kappa + 1/4)} \right). \quad (2.1.37b)$$

$L_{E_1} \phi_1 = 0, L_{E_2} \phi_2 = 0$  に対して, Klein-Gordon 積に対応するノルムを

$$N(\phi_1, \phi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx (E_1 + E_2 + 2ax) \bar{\phi}_1(x) \phi_2(x) \quad (2.1.38)$$

により定義する. このとき,

$$N(\phi_{E,o}, \phi_{E',o}) = N(\phi_{E,e}, \phi_{E',e}) = 0, \quad (2.1.39)$$

$$N(\phi_{E,o}, \phi_{E',e}) = N(\phi_{E,o}, \phi_{E',e}) = 2\pi\delta(E - E'). \quad (2.1.40)$$

□

### 2.1.1.7 具体例

- 方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{2}e^u$$

一般解：

$$u = -\log \left[ A^2 \cos^2 \left( \frac{x+B}{2A} \right) \right].$$

## 2.2 特殊関数

### 2.2.1 $\Gamma$ 関数

#### 2.2.1.1 定義と基本的性質

【定義 2.8 ( $\Gamma$  関数)]  $\operatorname{Re} z > 0$  に対して,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (2.2.1)$$

$\operatorname{Re} z \leq 0$  に対しては, 関係式

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1) \quad (2.2.2)$$

により定義. □

【公式 2.9 (ガンマ関数の特殊値)]

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1, \\ \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

□

【定義 2.10 (Euler 関数)]

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1} dt}{(1+t)^{p+q}} \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta, \quad [\operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q > 0], \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

□

【公式 2.11]

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (2.2.4)$$

□

【公式 2.12 (単位 Euclidean 球面の面積)]

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(S^{2n-1}) &= \frac{2\pi^n}{(n-1)!}, \\ \operatorname{vol}(S^{2n}) &= \frac{2^{2n+1} n! \pi^n}{(2n)!}. \end{aligned}$$

□

## 2.2.2 超幾何関数

### 2.2.2.1 定義と基本的性質

【定義 2.13 (超幾何関数)】  $\gamma \notin -\mathbb{N}_0 := \{0, -1, -2, \dots\}$  に対して,

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\gamma)_n} z^n. \quad (2.2.5)$$

常に  $|z| < 1$  で収束. また,  $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0$  のとき,  $|z| \leq 1$  で絶対収束. ここで,

$$(\alpha)_0 = 1, \quad (2.2.6)$$

$$(\alpha)_n := \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}. \quad (2.2.7)$$

□

【公式 2.14 ( $F(1)$ )】  $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0$  で  $\gamma \notin -\mathbb{N}_0$  のとき,

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}. \quad (2.2.8)$$

[Wittaker ET, Watson GN 1927: *Modern Analysis*; Rainville ED 1960: *Special Functions*] □

【命題 2.15 (Gauss の微分方程式)】  $\gamma \notin -\mathbb{N}_0$  のとき,  $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$  は次の微分方程式を満たす:

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]\frac{du}{dz} - \alpha\beta u = 0. \quad (2.2.9)$$

この方程式の  $z = 0$  近傍における基本解は

$$U_1(z) := F(\alpha, \beta, \gamma; z), \quad (2.2.10a)$$

$$\begin{aligned} U_2(z) &:= x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; z) \\ &= x^{1-\alpha-\beta} F(1 - \alpha, 1 - \beta, 2 - \gamma; z) \end{aligned} \quad (2.2.10b)$$

これらの Wronskian は

$$W(U_1, U_2) := U_1'U_2 - U_2'U_1 = \frac{\gamma - 1}{z^\gamma(1-z)^{\alpha+\beta+1-\gamma}}. \quad (2.2.11)$$

これらの解の特異点は  $z = 0, 1, \infty$  に含まれ, 特異点指数は

- $z = 0$ :  $\lambda_0 = 0, 1 - \gamma$ ,
- $z = 1$ :  $\lambda_1 = 0, \gamma - \alpha - \beta$ ,
- $z = \infty$ :  $\lambda_\infty = \alpha, \beta$ .

ただし,  $\gamma, \gamma - \alpha - \beta, \alpha - \beta$  が整数の時には, さらに  $z^k \log z, (1-z)^k \log(1-z), (1/z)^k \log 1/z$  型の特異性が生じる. ここで,  $k$  はそれぞれ  $z = 0, 1, \infty$  における指数の大きい方. □

【公式 2.16 (Kummer の変換式)】

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma; z) &= (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma; z) \\ &= (1-z)^{-\alpha} F(\alpha, \gamma-\beta, \gamma; z/(z-1)) \\ &= (1-z)^{-\beta} F(\gamma-\alpha, \beta, \gamma; z/(z-1)). \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

□

【公式 2.17 (Wronakian 由来関係式)】

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha} F(\alpha, \beta, \gamma; z) F(\alpha - \gamma + 2, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; z) \\ &\quad - \frac{1}{\alpha - \gamma + 1} F(\alpha + 1, \beta, \gamma; z) F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; z) \\ &= -\frac{\gamma - 1}{\alpha(\alpha - \gamma + 1)} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta-1}. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

□

### 2.2.2.2 $F(\alpha, \beta, -n; z)$

【命題 2.18 ( $\gamma \in -\mathbb{N}_0$  の場合の基本解)】  $\gamma = -n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) の場合,  $z = 0$  近傍での Gauss 方程式の解の基本系は

$$z^{n+1} F(\alpha + n + 1, \beta + n + 1, n + 2; z), \quad (2.2.14a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\alpha, \beta, -n; z) &:= z^{n+1} F(\alpha + n + 1, \beta + n + 1, n + 2; z) \\ &\quad \times \left[ C(\alpha) - (n + 1) \int_a^z \frac{dt}{t^{n+2}} G(t) \right] \end{aligned} \quad (2.2.14b)$$

で与えられる。ここで,

$$G(t) = \frac{(1-t)^{\alpha+\beta+n-1}}{[F(1-\alpha, 1-\beta, n+2; t)]^2}. \quad (2.2.15)$$

$C(a)$  を適当にとると,  $\tilde{F}$  は

$$\tilde{F} = F^*(\alpha, \beta, -n; z) + Az^{n+1}F(\alpha+n+1, \beta+n+1, n+2; z) \ln z \quad (2.2.16)$$

と表される。ここで,

$$F^*(\alpha, \beta, -n; z) = F(\alpha+n+1, \beta+n+1, n+2; z) \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(n-k)!}{n!} z^k G^{(k)}(z) - z^{n+1} \int_0^z \frac{dt}{t} \left( \frac{1}{n!} G^{(n+1)}(t) + A \right) \right], \quad (2.2.17a)$$

$$A := -\frac{1}{n!} G^{(n+1)}(0) = (-1)^n \frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{n!(n+1)!}. \quad (2.2.17b)$$

$\tilde{F}(\alpha, \beta, -n; z)$  は,  $C(a)$  の自由度を除いて

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\alpha, \beta, -n; z) &= \lim_{\gamma \rightarrow -n} \left[ F(\alpha, \beta, \gamma; z) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(n+1)!(\gamma)_{n+1}} z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma; z) \right] \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

と一致する。また, そのように  $C(a)$  を取ると

$$\begin{aligned} F^*(\alpha, \beta, -n; z) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n-k)! (\alpha)_k (\beta)_k}{n!} z^k \\ &\quad + (-1)^n \frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{n!(n+1)!} z^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} z^k \frac{(\alpha+n+1)_k (\beta+n+1)_k}{k!(2+n)_k} \\ &\quad \times \sum_{l=1}^k \left( -\frac{1}{\alpha+n+l} - \frac{1}{\beta+n+l} + \frac{1}{n+1+l} + \frac{1}{l} \right) \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

が成り立つ。さらに,

$$\tilde{F}(\alpha, \beta, -n; 1) = \frac{(-1)^{n+1}}{n! \Gamma(-\alpha-n) \Gamma(-\beta-n)} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \gamma_E \right). \quad (2.2.20)$$

ここで,  $\gamma_E$  は Euler 定数. □

### 2.2.2.3 $F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + n; z)$

$\gamma - \alpha - \beta \in \mathbb{N}_0$  の場合

【公式 2.19】  $\gamma = \alpha + \beta + 1$  のとき,  $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$  は  $z = 0$  近傍で正則な関数  $P(z), Q(z)$  を用いて,

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = P(1-x) + Q(1-x)(1-x) \ln(1-x).$$

このとき,

$$Q(0) = \frac{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.$$

□

### 2.2.2.4 他の関数との対応

【公式 2.20】

$$F(-\alpha, \beta, \beta; z) = (1-z)^\alpha. \quad (2.2.21)$$

□

### 2.2.2.5 積分表示

【公式 2.21】

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \times \int_0^1 dt t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha}, \quad (2.2.22)$$

$$\int_0^\infty dt \frac{t^{\nu-1}}{(1-2xt+t^2)^\mu} = B(\nu, 2\mu - \nu) \left( \frac{2}{1-x} \right)^{\mu-1/2} \times F\left(\mu - \nu + \frac{1}{2}, \nu - \mu + \frac{1}{2}, \mu + \frac{1}{2}; \frac{1+x}{2}\right), \quad (-1 < x < 1). \quad (2.2.23)$$

(2006.7.11 日チェック : 公式 2.42 参照) \_\_\_\_\_ □

### 2.2.3 直交多項式

#### 2.2.3.1 Legendre 多項式

【定義 2.22 (Legendre 多項式)】 Legendre 多項式  $P_n(x)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) を

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (2.2.24)$$

(Rodrigues の公式) により定義する。 □

【例 2.23】

$$P_0(x) = 1, \quad (2.2.25a)$$

$$P_1(x) = x = \cos\theta, \quad (2.2.25b)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = \frac{1}{4}(3 \cos 2\theta + 1), \quad (2.2.25c)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = \frac{1}{8}(5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta), \quad (2.2.25d)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) = \frac{1}{64}(35 \cos 4\theta + 20 \cos 2\theta + 9), \quad (2.2.25e)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) = \frac{1}{128}(63 \cos 5\theta + 35 \cos 3\theta + 30 \cos \theta). \quad (2.2.25f)$$

□

【公式 2.24 (超幾何関数による表示)】

$$\begin{aligned} P_n(x) &= F\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right) \\ &= \frac{(2n-1)!!}{n!} x^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}; \frac{1}{2} - n; \frac{1}{x^2}\right) \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

□

【公式 2.25 (母関数)】

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad [-1 < x < 1, |t| < 1] \quad (2.2.27)$$

□



【公式 2.26 (微分方程式)】

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0. \quad (2.2.28)$$

□

【公式 2.27 (直交関係)】

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,m}. \quad (2.2.29)$$

また,

$$\int_{-1}^1 x^r P_n(x)dx = 0 \quad [r = 0, \dots, n-1]. \quad (2.2.30)$$

□

## 2.2.3.2 Gegenbauer 多項式

【定義 2.28 (Gegenbauer 多項式)】

$$G_n^\nu = \frac{(-1)^n \Gamma(\nu + 1/2) \Gamma(n + 2\nu)}{2^n \Gamma(2\nu) \Gamma(n + \nu + 1/2)} \frac{(1-x^2)^{1/2-\nu}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^{n+\nu-1/2}]. \quad (2.2.31)$$

□

【公式 2.29 (超幾何関数による表示)】

$$C_n^\nu(x) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n! \Gamma(2\nu)} F\left(-n, n+2\nu; \nu + \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right) \quad (2.2.32)$$

$$= \frac{2^n \Gamma(n+\nu)}{n! \Gamma(\nu)} x^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}; 1-n-\nu; \frac{1}{x^2}\right), \quad (2.2.33)$$

$$C_{2n}^\nu(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(n+\nu)}{n! \Gamma(\nu)} F\left(-n, n+\nu; \frac{1}{2}; x^2\right), \quad (2.2.34)$$

$$C_{2n+1}^\nu(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(n+\nu+1)}{n! \Gamma(\nu)} 2x F\left(-n, n+\nu+1; \frac{3}{2}; x^2\right) \quad (2.2.35)$$

□

【公式 2.30 (母関数)】

$$(1 - 2tx + t^2)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\nu(x) t^n \quad [-1 < x < 1, |t| < 1] \quad (2.2.36)$$


---

□

【公式 2.31 (微分方程式)】

$$(x^2 - 1)y'' + (2\nu + 1)xy' - n(n + 2\nu)y = 0. \quad (2.2.37)$$


---

□

### 2.2.3.3 Jacobi 多項式

【定義 2.32 (Jacobi 多項式)】

$$G_n(\alpha, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{d^n}{dx^n} [x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}]. \quad (2.2.38)$$


---

□

【公式 2.33 (超幾何関数による表示)】

$$G_n(\alpha, \gamma; x) = F(-n, \alpha + n; \gamma; x) \quad (2.2.39)$$


---

□

【公式 2.34 (他の直交多項式との関係)】

$$P_n(x) = G_n(1, 1; (1-x)/2), \quad (2.2.40a)$$

$$T_n(x) = G_n(0, 1/2; (1-x)/2), \quad (2.2.40b)$$

$$C_n^\nu(x) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\Gamma(2\nu)} G_n(2\nu, \nu + \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}), \quad (2.2.40c)$$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)} \lim_{\beta \rightarrow \infty} G_n(\beta, \alpha+1; x/\beta). \quad (2.2.40d)$$


---

□

【公式 2.35 (Jacobi 方程式)】

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + 1)x]y' + n(\alpha + n)y = 0. \quad (2.2.41)$$

□

【公式 2.36 (直交関係)】

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} G_n(\alpha, \gamma; x) G_m(\alpha, \gamma; x) dx = 0 \quad [m \neq n], \quad (2.2.42a)$$

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} x^m G_n(\alpha, \gamma; x) dx = 0 \quad [m = 0, \dots, n-1] \quad (2.2.42b)$$

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} [G_n(\alpha, \gamma; x)]^2 dx = \frac{n! \Gamma(n + \alpha - \gamma + 1) [\Gamma(\gamma)]^2}{(\alpha + 2n) \Gamma(\alpha + n) \Gamma(\gamma + n)} \quad (2.2.42c)$$

□

## 2.2.4 球関数

### 2.2.4.1 定義と基本的性質

【定義 2.37 (Legendre 関数)】 第 1 種 Legendre 関数  $\mathfrak{P}_\nu(z) \equiv P_\nu(z)$  を,  $\mathbb{C} \setminus \{z \leq -1\}$  において, 次の式により定義する:

$$P_\nu(z) := \mathfrak{P}_\nu(z) = F\left(-\nu, \nu + 1; 1; \frac{1-z}{2}\right). \quad (2.2.43)$$

この定義は  $\nu$  が非負整数のとき, Legendre 多項式と一致する.

第 2 種 Legendre 関数  $\mathfrak{Q}_\nu(z)$  を,  $\mathbb{C} \setminus \{z \leq 1\}$  において, 次の式により定義する:

$$\mathfrak{Q}_\nu(z) := \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu + 3/2) (2z)^{\nu+1}} F\left(\frac{\nu}{2} + 1, \frac{\nu+1}{2}; \nu + \frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right). \quad (2.2.44)$$

ただし,  $z^{\nu+1}$  は,  $z$  が 1 より大きい実数の時, 正実数となる枝を選ぶものとする. また,  $-1 < x < 1$  に対して,  $Q_\nu(x)$  を

$$Q_\nu(x) := \frac{1}{2} [\mathfrak{Q}_\nu(x + i0) + \mathfrak{Q}_\nu(x - i0)] \quad (2.2.45)$$

により定義する. □

## 【命題 2.38 (基本的性質)】

- 1.
- $P_\nu(z)$
- と
- $\Omega_\nu(z)$
- は, Legendre の微分方程式

$$(1 - z^2) \frac{d^2 u}{dz^2} - 2z \frac{du}{dz} + \nu(\nu + 1)u = 0 \quad (2.2.46)$$

の独立な基本解である. この確定特異点  $z = \pm 1, \infty$  における基本解の振る舞いは,

- $z = \pm 1$ :  $u = 1, \log(z \mp 1)$ .
- $z = \infty$ :  $u = z^\nu, z^{-(\nu+1)}$ .

特に,  $P_\nu(z)$  は  $z = 1$  で正則で規格化条件

$$P_\nu(1) = 1 \quad (2.2.47)$$

を満たす解として一意的に決定される.

2. 常に次の関係式が成り立つ:

$$P_\nu(z) = P_{-\nu-1}(z), \quad (2.2.48a)$$

$$\Omega_\nu(z) - \Omega_{-\nu-1}(z) = \pi \cot(\nu\pi) P_\nu(z). \quad (2.2.48b)$$

3. Wronskian

$$P_\nu(z)\Omega'_\nu(z) - \Omega_\nu(z)P'_\nu(z) = \frac{1}{1 - z^2}, \quad (2.2.49)$$

[< 岩波数学辞典 v.3]

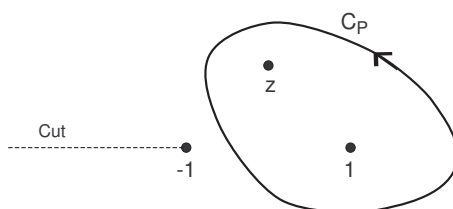
□

## 【命題 2.39 (Legendre 関数の基本積分表示)】

1. 第 1 種 Legendre 関数
- $P_\nu(z)$
- は,
- $\mathbb{C} \setminus \{z \leq -1\}$
- において,
- $t$
- 次の Schläfli 積分表示をもつ:

$$P_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_P} \frac{(\zeta^2 - 1)^\nu}{2^\nu (\zeta - z)^{\nu+1}} d\zeta. \quad (2.2.50)$$

ここで,  $C_P$  は次の経路である.



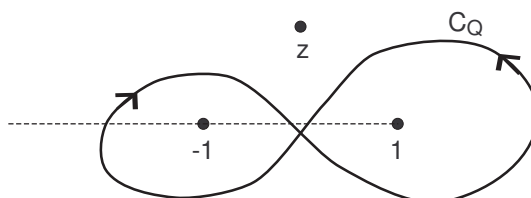
これより，次の Laplace の積分表示が得られる：

$$P_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( z \pm \sqrt{z^2 - 1} \cos \phi \right)^\nu d\phi. \quad (2.2.51)$$

2.  $\nu$  が整数でないとき，第 2 種 Legendre 関数  $\Omega_\nu(z)$  は， $\mathbb{C} \setminus \{z \leq 1\}$  において，次の積分表示をもつ：

$$\Omega_\nu(z) = \frac{1}{4i \sin \nu\pi} \oint_{C_Q} \frac{(\zeta^2 - 1)^\nu}{2^\nu (z - \zeta)^{\nu+1}} d\zeta. \quad (2.2.52)$$

ここで， $C_Q$  は次の経路である。



また， $\operatorname{Re} \nu > -1$  のとき， $\Omega_\nu(z)$  は次の積分表示をもつ：

$$\Omega_\nu(z) = \frac{1}{2^{\nu+1}} \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}} dt \quad (\operatorname{Re} \nu > -1). \quad (2.2.53)$$

□

**【定義 2.40 (Legendre 陪関数)】** Hobson の第 1 種 Legendre 陪関数  $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$  を， $\mathbb{C} \setminus \{z \leq 1\}$  において，次の式により定義する：

$$\mathfrak{P}_\nu^\mu(z) := \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^{\mu/2} F \left( -\nu, \nu+1, 1-\mu; \frac{1-z}{2} \right). \quad (2.2.54)$$

$\mu$  が正整数  $m$  のとき,

$$\mathfrak{P}_\nu^m(z) = (z^2 - 1)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} P_\nu(z). \quad (2.2.55)$$

Hobson の第 2 種 Legendre 陪関数  $\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$  を,  $\mathbb{C} \setminus \{z \leq 1\}$  において, 次の式により定義する:

$$\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) := \frac{e^{\mu\pi i} \sqrt{\pi} \Gamma(\mu + \nu + 1)}{2^{\nu+1} \Gamma(\nu + 3/2)} \frac{(z^2 - 1)^{\mu/2}}{z^{\mu+\nu+1}} F\left(\frac{\nu + \mu}{2} + 1, \frac{\nu + \mu + 1}{2}, \nu + \frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right). \quad (2.2.56)$$

ただし,  $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2}$ ,  $(z^2 - 1)^{\mu/2}$ ,  $z^{\nu+\mu+1}$  は,  $z$  が 1 より大きい実数の時, 正実数となる枝を選ぶものとする.  $\mu$  が正整数  $m$  のとき,

$$\mathfrak{Q}_\nu^m(z) = (z^2 - 1)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} \mathfrak{Q}_\nu(z). \quad (2.2.57)$$

$-1 < x < 1$  に対して, Legendre 陪関数  $P_\nu^\mu(x)$ ,  $Q_\nu^\mu(x)$  を次式で定義する:

$$\begin{aligned} P_\nu^\mu(x) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \mu)} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2} F\left(-\nu, \nu + 1, 1 - \mu; \frac{1-x}{2}\right) \\ &= e^{\mu\pi i/2} \mathfrak{P}_\nu^\mu(x + i0) = e^{-\mu\pi i/2} \mathfrak{P}_\nu^\mu(x - i0), \end{aligned} \quad (2.2.58a)$$

$$Q_\nu^\mu(x) = \frac{e^{-\mu\pi i}}{2} [e^{-\mu\pi i/2} \mathfrak{Q}_\nu^\mu(x + i0) + e^{\mu\pi i/2} \mathfrak{Q}_\nu^\mu(x - i0)]. \quad (2.2.58b)$$

( $\leftarrow$  岩波数学事典公式 1 8 II (注) この定義は, 岩波数学公式集のもの (Ferrers の Legendre 陪関数) の  $e^{-\mu\pi i}$  倍になっている.)

特に,  $\mu$  が非負整数  $m$  のとき,

$$\begin{aligned} P_\nu^m(x) &= (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\nu(x) \\ &= \frac{(-1)^m \Gamma(\nu + m + 1)}{m! 2^m \Gamma(1 + \nu - m)} (1 - x^2)^{m/2} \\ &\quad \times F\left(m - \nu, m + \nu + 1, m + 1; \frac{1-x}{2}\right), \end{aligned} \quad (2.2.59a)$$

$$P_\nu^{-m}(x) = (-1)^m \frac{\Gamma(\nu - m + 1)}{\Gamma(\nu + m + 1)} P_\nu^m(x), \quad (2.2.59b)$$

$$Q_\nu^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} Q_\nu(x), \quad (2.2.59c)$$

$$Q_\nu^{-m}(x) = (-1)^m \frac{\Gamma(\nu - m + 1)}{\Gamma(\nu + m + 1)} Q_\nu^m(x) \quad (2.2.59d)$$

□

【公式 2.41 (直交関係式)]  $n, n'$  を非負の整数,  $m$  を  $|m| \leq n, n'$  となる整数とするととき,

$$\int_{-1}^1 dx P_n^m(x) P_{n'}^m(x) = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{n,n'} \quad (2.2.60)$$

□

### 2.2.4.2 積分表示

【公式 2.42 (陪 Legendre 関数の積分表示)]

1.  $\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)$ :

$$\mathfrak{P}_\nu^{-\mu}(z) = \frac{(z^2 - 1)^{\mu/2}}{2^\mu \sqrt{\pi} \Gamma(\mu + 1/2)} \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - t^2)^{\mu-1/2}}{(z + t\sqrt{z^2 - 1})^{\mu-\nu}} dt$$

( $\operatorname{Re} \mu > -1/2$ ,  $|\arg(z \pm 1)| < \pi$ ),

$$\mathfrak{P}_\nu^{-\mu}(z) = \frac{(z^2 - 1)^{\mu/2}}{2^\nu \Gamma(\mu - \nu) \Gamma(\nu + 1)} \int_0^\infty \frac{\sinh^{2\nu+1} t}{(z + \cosh t)^{\mu+\nu+1}} dt$$

( $\operatorname{Re} z > -1$ ,  $|\arg(z \pm 1)| < \pi$ ,  
 $\operatorname{Re} \nu > -1$ ,  $\operatorname{Re}(\mu - \nu) > 0$ ),

$$\mathfrak{P}_\nu^{-\mu}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(\mu + 1/2) (z^2 - 1)^{\mu/2}}{\Gamma(\mu - \nu) \Gamma(\mu + \nu + 1)} \int_0^\infty \frac{\cosh(\nu + 1/2)t}{(z + \cosh t)^{\mu+1/2}} dt$$

( $\operatorname{Re} z > -1$ ,  $|\arg(z \pm 1)| < \pi$ ,  
 $\operatorname{Re}(\mu + \nu) > -1$ ,  $\operatorname{Re}(\mu - \nu) > 0$ ),

$$\mathfrak{P}_\nu^\mu(\cosh \alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sinh^\mu \alpha}{\Gamma(1/2 - \mu)} \int_0^\alpha \frac{\cosh(\nu + 1/2)t}{(\cosh \alpha - \cosh t)^{\mu+1/2}} dt$$

( $\alpha > 0$ ,  $\operatorname{Re} \mu < 1/2$ ).

2.  $P_\nu^\mu(x)$ :

$$P_\nu^\mu(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin^\mu \theta}{\Gamma(1/2 - \mu)} \int_0^\theta \frac{\cos(\nu + 1/2)\phi}{(\cos \phi - \cos \theta)^{\mu+1/2}} d\phi$$

$$(0 < \theta < \pi, \quad \operatorname{Re} \mu < 1/2),$$

$$P_\nu^{-\mu}(\cos \theta) = \frac{\Gamma(2\mu + 1)2^{-\mu} \sin^\mu \theta}{\Gamma(\mu + 1)\Gamma(\mu + \nu + 1)\Gamma(\mu - \nu)} \int_0^\infty \frac{t^{\mu+\nu} dt}{(1 + 2t \cos \theta + t^2)^{\mu+1/2}}$$

$$(\operatorname{Re}(\mu + \nu) > -1, \quad \operatorname{Re}(\mu - \nu) > 0),$$

$$P_\nu^{-\mu}(\cos \theta) = \frac{1}{\Gamma(\nu + \mu + 1)} \int_0^\infty e^{-t \cos \theta} J_\mu(t \sin \theta) t^\nu dt$$

$$(0 < \theta < \pi/2, \quad \operatorname{Re}(\mu + \nu) > -1).$$

3.  $\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)$ :

$$\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) = \frac{e^{i\mu\pi}\Gamma(\nu + \mu + 1)}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu + 1)} (z^2 - 1)^{\mu/2} \int_{-1}^{+1} (1 - t^2)^\nu (z - t)^{-\nu-\mu-1} dt$$

$$(\operatorname{Re}(\nu + \mu) > -1, \quad \operatorname{Re} \nu > -1, \quad |\arg(z \pm 1)| < \pi),$$

$$\mathfrak{Q}_\nu^\mu(\cosh \alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i\mu\pi} \sinh^\mu \alpha}{\Gamma(1/2 - \mu)} \int_\alpha^\infty \frac{e^{-(\nu+1/2)t}}{(\cosh t - \cosh \alpha)^{\mu+1/2}} dt$$

$$(\alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \mu < 1/2, \quad \operatorname{Re}(\nu + \mu) > -1).$$

[< 岩波数学辞典 v3 公式 18II] \_\_\_\_\_ □

### 2.2.4.3 Spin-weighted spherical harmonics

【定義 2.43 (Spin-weighted spherical harmonics)】 複素角度微分演算子

$$\partial_\pm := \partial_\theta \pm \frac{i}{\sin \theta} \partial_\phi \quad (2.2.61)$$

を用いて, スピン荷重  $s$  の関数  ${}_s\eta$  に対する微分作用素  $\mathfrak{D}, \bar{\mathfrak{D}}$  を

$$\mathfrak{D}_s \eta = -\sin^s \theta \partial_+ (\sin^{-s} \theta {}_s\eta), \quad (2.2.62a)$$

$$\bar{\mathfrak{D}}_s \eta = -\sin^{-s} \theta \partial_- (\sin^s \theta {}_s\eta), \quad (2.2.62b)$$

$$(\bar{\mathfrak{D}}\mathfrak{D} - \mathfrak{D}\bar{\mathfrak{D}}) {}_s\eta = 2s {}_s\eta, \quad (2.2.62c)$$

とおく. このとき, スピン荷重  $s$  の調和関数  ${}_s Y_l^m (s = \pm 1, \pm 2)$  を逐次的に

$${}_{s+1} Y_l^m = [(l-s)(l+1+s)]^{-1/2} \mathfrak{D}_s Y_l^m, \quad (2.2.63a)$$

$${}_{-s-1} Y_l^m = -[(l-s)(l+1+s)]^{-1/2} \bar{\mathfrak{D}}_{-s-1} Y_l^m. \quad (2.2.63b)$$



により定義する. この式において,  ${}_{\pm s}Y_l^m$  と  ${}_{\pm(s+1)}Y_l^m$  のノルムは一致する. 例えば,

$${}_1Y_l^m = \frac{\bar{\partial}Y_l^m}{\sqrt{l(l+1)}} = -\frac{\partial_+Y_l^m}{\sqrt{l(l+1)}}, \quad (2.2.64a)$$

$${}_{-1}Y_l^m = -\frac{\bar{\partial}Y_l^m}{\sqrt{l(l+1)}} = \frac{\partial_-Y_l^m}{\sqrt{l(l+1)}}, \quad (2.2.64b)$$

$${}_2Y_l^m = \frac{\bar{\partial}_1Y_l^m}{\sqrt{(l+2)(l-1)}} = \frac{\sin\theta\partial_+(\sin^{-1}\theta\partial_+Y_l^m)}{\sqrt{(l+2)(l+1)l(l-1)}}, \quad (2.2.64c)$$

$${}_{-2}Y_l^m = -\frac{\bar{\partial}_{-1}Y_l^m}{\sqrt{(l+2)(l-1)}} = \frac{\sin\theta\partial_-(\sin^{-1}\theta\partial_-Y_l^m)}{\sqrt{(l+2)(l+1)l(l-1)}}. \quad (2.2.64d)$$

□

【公式 2.44】 Spin-weighted spherical harmonics に対して,

$$\bar{\partial}_{-1}Y_l^m = \sqrt{l(l+1)}Y_l^m, \quad (2.2.65a)$$

$$\bar{\partial}_1Y_l^m = -\sqrt{l(l+1)}Y_l^m, \quad (2.2.65b)$$

$$\bar{\partial}_2Y_l^m = -\sqrt{(l+2)(l-1)}{}_1Y_l^m, \quad (2.2.65c)$$

$$\bar{\partial}_{-2}Y_l^m = \sqrt{(l+2)(l-1)}{}_{-1}Y_l^m. \quad (2.2.65d)$$

□

【公式 2.45 (微分方程式)】 Spin-weighted spherical harmonics を

$${}_sY_l^m = {}_sP_m^l(\cos\theta)e^{im\phi} \quad (2.2.66)$$

とおくとき,

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{d_s P_m^l}{dx} \right) + \left( (l-s)(l+1+s) + s - \frac{(m+sx)^2}{1-x^2} \right) {}_sP_m^l = 0. \quad (2.2.67)$$

□

## 2.2.5 Bessel 関数

### 2.2.5.1 定義と基本性質

【定義 2.46 (Bessel 関数)】

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \quad (z \neq \text{負の実数}), \quad (2.2.68a)$$

$$N_\nu(z) = \frac{1}{\sin(\nu\pi)} [\cos(\nu\pi)J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)], \quad (2.2.68b)$$

$$\begin{aligned} N_n(z) &= \frac{1}{\pi} [\partial_\nu J_\nu(z) - (-1)^n \partial_\nu J_{-\nu}(z)]_{\nu=n} \\ &= \frac{2}{\pi} J_n(z) \left( \gamma + \log \frac{z}{2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \left[ \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{n+k} \frac{1}{m} \right] \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-r-1)!}{r!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r}, \end{aligned} \quad (2.2.68c)$$

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu(z) + iN_\nu(z), \quad (2.2.68d)$$

$$H_\nu^{(2)} = J_\nu(z) - iN_\nu(z). \quad (2.2.68e)$$

これらのいずれかを一般に  $Z_\nu(z)$  と表すと,  $n$  が整数の時,

$$Z_{-n}(z) = (-1)^n Z_n(z). \quad (2.2.69)$$

また, 一般の  $\nu$  に対し,

$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{\nu\pi i} H_\nu^{(1)}(z), \quad H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-\nu\pi i} H_\nu^{(2)}(z). \quad (2.2.70)$$

□

【命題 2.47 (Bessel 方程式)】 Bessel 関数  $u = Z_\nu(z)$  は次の微分方程式を満たす:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0. \quad (2.2.71)$$

□

## 2.2.5.2 球 Bessel 関数

【定義 2.48 (球 Bessel 関数の定義)】

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+1/2}(z), \quad (2.2.72a)$$

$$n_n(z) = (-1)^{n+1} j_{-n-1}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} N_{n+1/2}(z), \quad (2.2.72b)$$

$$h_n^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{n+1/2}^{(1)}(z) = j_n(z) + i n_n(z), \quad (2.2.72c)$$

$$h_n^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{n+1/2}^{(2)}(z) = j_n(z) - i n_n(z). \quad (2.2.72d)$$

□

【公式 2.49 (三角関数による表示)】

$$j_n(z) = (-1)^n z^n \left( \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \frac{\sin z}{z}, \quad (2.2.73a)$$

$$n_n(z) = (-1)^{n+1} z^n \left( \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \frac{\cos z}{z}, \quad (2.2.73b)$$

$$h_n^{(1)}(z) = i(-1)^{n+1} z^n \left( \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \frac{e^{iz}}{z}, \quad (2.2.73c)$$

$$h_n^{(2)}(z) = i(-1)^n z^n \left( \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \frac{e^{-iz}}{z}, \quad (2.2.73d)$$

$$(2.2.73e)$$

□

【公式 2.50 (漸近挙動)】

1.  $z \sim 0$  で

$$j_n(z) \sim \frac{z^n}{(2n+1)!!}, \quad n_n(z) \sim -\frac{(2n-1)!!}{z^{n+1}}, \quad (2.2.74a)$$

$$h_n^{(1)}(z) \sim -i \frac{(2n-1)!!}{z^{n+1}}, \quad h_n^{(2)}(z) \sim i \frac{(2n-1)!!}{z^{n+1}}. \quad (2.2.74b)$$

2.  $z \sim \infty$  で

$$j_n(z) \sim \frac{1}{z} \cos\left(z - \frac{(n+1)\pi}{2}\right), \quad (2.2.75a)$$

$$n_n(z) \sim \frac{1}{z} \sin\left(z - \frac{(n+1)\pi}{2}\right), \quad (2.2.75b)$$

$$h_n^{(1)}(z) \sim (-i)^{n+1} \frac{e^{iz}}{z}, \quad h_n^{(2)}(z) \sim i^{n+1} \frac{e^{-iz}}{z}. \quad (2.2.75c)$$

□

【公式 2.51 (内積)】 球 Bessel 関数の内積は

$$\int_0^\infty dr r^2 j_l(\lambda r) j_l(\lambda' r) = \frac{\pi}{\lambda \lambda'} \delta(\lambda - \lambda'). \quad (2.2.76)$$

□

### 2.2.5.3 積分表示

【公式 2.52 ( $J_\nu(z)$  の積分表示)】

Poisson の積分表示

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(x \cosh t - \nu\pi/2) \cosh(\nu t) dt \quad [|\operatorname{Re} \nu| < 1, x > 0], \\ &= \frac{2(x/2)^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2 - \nu)} \int_1^\infty \frac{\sin(xt) dt}{(t^2 - 1)^{\nu+1/2}} \quad [|\operatorname{Re} \nu| < 1/2, x > 0] \end{aligned} \quad (2.2.77)$$

□

【公式 2.53 ( $N_\nu(z)$  の積分表示)】

Poisson の積分表示

$$\begin{aligned} N_\nu(x) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(x \cosh t - \nu\pi/2) \cosh(\nu t) dt \quad [|\operatorname{Re} \nu| < 1, x > 0], \\ &= -\frac{2(x/2)^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2 - \nu)} \int_1^\infty \frac{\cos(xt) dt}{(t^2 - 1)^{\nu+1/2}} \quad [|\operatorname{Re} \nu| < 1/2, x > 0] \end{aligned} \quad (2.2.78)$$

□

【公式 2.54 ( $H_\nu(z)$  の積分表示)】

Heine の積分表示

$$H_\nu^{(\pm)}(z) = \frac{\mp 2ie^{\mp\nu\pi i/2}}{\pi} \int_0^\infty e^{\pm iz \cosh t} \cosh(\nu t) dt \quad [|\operatorname{Re} \nu| < 1, \operatorname{Im} z > 0]. \quad (2.2.79)$$

$$H_\nu^{(\pm)}(z) = \frac{\mp 2i(x/2)^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2 - \nu)} \int_1^\infty \frac{e^{\pm ixt} dt}{(t^2 - 1)^{\nu+1/2}} \quad [|\operatorname{Re} \nu| < 1/2, x > 0] \quad (2.2.80)$$

□

【公式 2.55 ( $K_\nu(z)$  の積分表示)】

Poisson の積分表示

$$\begin{aligned} K_\nu(x) &= \sec\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \int_0^\infty \cos(x \sinh t) \cosh(\nu t) dt \quad [|\operatorname{Re} \nu| < 1, x > 0], \\ &= \frac{1}{2} e^{\pm\nu\pi i/2} \int_{-\infty}^\infty e^{-ix \sinh t \pm \nu t} dt \quad [|\operatorname{Re} \nu| < 1, x > 0] \end{aligned} \quad (2.2.81)$$

□

## 2.3 定積分

### 2.3.1 $\Gamma$ 型

【公式 2.56 (Euler 関数)】

$$\int_0^1 dt t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \quad (2.3.1)$$


---

【公式 2.57 ( $\sin^n \theta$ )】

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \sin^n \theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \quad (2.3.2)$$


---

【公式 2.58】  $a > 1$  のとき,

$$\int_0^1 dx \frac{\sqrt{1-x^2}}{a^2-x^2} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right), \quad (2.3.3a)$$

$$\int_0^1 dx \frac{\sqrt{1-x^2}}{(a^2-x^2)^2} = \frac{\pi}{4} \frac{1}{a^3 \sqrt{a^2-1}}, \quad (2.3.3b)$$

$$\int_0^1 dx \frac{\sqrt{1-x^2}}{(a^2-x^2)^3} = \frac{\pi}{16} \frac{4a^2-3}{a^5(a^2-1)^{3/2}}, \quad (2.3.3c)$$

$$\int_0^1 dx \frac{\sqrt{1-x^2}}{(a^2-x^2)^4} = \frac{\pi}{48} \frac{8a^4-12a^2+5}{a^7(a^2-1)^{5/2}}. \quad (2.3.3d)$$


---

### 2.3.2 Bessel 型

【公式 2.59】

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta \sin^{2m+1} \theta e^{ir \cos \theta} &= (-1)^m 2^m m! \left(\frac{\partial}{r \partial r}\right)^m \frac{e^{ir} - e^{-ir}}{ir} \\ &= \frac{2^{m+1} m!}{r^m} j_m(r), \\ \int_0^\pi d\theta \sin^{2m} \theta e^{ir \cos \theta} &= \pi (-1)^m (2m-1)!! \left(\frac{\partial}{r \partial r}\right)^m J_0(r) \\ &= \frac{\pi (2m-1)!!}{r^m} J_m(r). \end{aligned}$$

これより, 一般に

$$f_n(r) := \int_0^\pi d\theta \sin^n \theta e^{ir \cos \theta}$$

とおくと,

$$\left(\frac{\partial}{r\partial r}\right)^l f_n(r) = (-1)^l \frac{(n-1)!!}{(n+2l-1)!!} f_{n+2l}(r).$$

□

【公式 2.60】

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\omega \sinh x + \nu x} = 2e^{-\nu\pi i/2} K_\nu(\omega) \quad (\omega > 0) \quad (2.3.4)$$

および

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} K_{i\mu}(\omega) = \frac{1}{4} \left| \Gamma\left(\frac{i\mu}{2}\right) \right|^2 \quad (\mu : \text{real}) \quad (2.3.5)$$

より,

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i(\omega \sinh x + \mu x)} = \frac{2\pi}{\mu} \frac{1}{e^{\pi\mu} - 1} \quad (\mu > 0). \quad (2.3.6)$$

□

### 2.3.3 $\delta$ 関数関連

### 2.3.4 Feynman 積分

#### 2.3.4.1 一般公式

【公式 2.61 (Feynman の恒等式)】

$$\prod_{j=1}^r \frac{1}{A_j} = (r-1)! \int_{\Delta} \frac{d^{r-1}\alpha}{\left(\sum_{j=1}^r \alpha_j A_j\right)^r} \quad (2.3.7)$$

ここで,

$$\int_{\Delta} d^{r-1}\alpha = \int_0^\infty d\alpha_1 \cdots \int_0^\infty d\alpha_r \delta\left(1 - \sum_{j=1}^r \alpha_j\right). \quad (2.3.8)$$

□

## 2.4 調和テンソル

### 2.4.1 調和関数

#### 2.4.1.1 一般論

【定義 2.62】 Riemann 多様体上の関数  $Y$  が

$$\Delta Y = -k^2 Y \quad (2.4.1)$$

を満たすとき, 調和関数と呼ぶ. □

【定理 2.63 (スペクトル条件 [2004.9.4])】  $n$  次元コンパクト正曲率 Einstein 多様体

$$R_{ij} = (n-1)g_{ij} \quad (2.4.2)$$

において, 調和関数のスペクトル第 2 固有値は次の条件を満たす:

$$k^2 \geq n. \quad (2.4.3)$$

□

#### 2.4.1.2 球面上の調和関数

【命題 2.64 (同次座標の性質)】  $E^{n+1}$  内の単位球面  $S^n$  を

$$\Omega \cdot \Omega = 1$$

と表す. このとき,

$$D_A D_B \Omega^j = -g_{AB} \Omega^j, \quad (2.4.4)$$

$$\Delta D_A \Omega^j = -D_A \Omega^j. \quad (2.4.5)$$

[証明は formula\_cg.tex] □

【命題 2.65 (多項式型表示)】  $E^{n+1}$  内の単位球面  $S^n$  を  $\Omega \cdot \Omega = 1$  と表す. このとき,

- 1)  $a_{j_1 \dots j_\ell}$  を対称でトレースゼロの定数とするとき,

$$Y_{\mathbf{a}}(\Omega) = a_{j_1 \dots j_\ell} \Omega^{j_1} \dots \Omega^{j_\ell} \quad (2.4.6)$$

に対して,

$$\Delta_n Y_{\mathbf{a}} = -\ell(\ell + n - 1) Y_{\mathbf{a}} \quad (2.4.7)$$

が成り立つ.



- 2) このような調和関数  $Y$  の全体は  $S^n$  上の完全系をなし、各  $\ell$  に対して、独立な調和関数の数は

$$N_\ell = \frac{n+2\ell-1}{n-1} \binom{n+\ell-2}{n-2} \quad (2.4.8)$$

で与えられる.

- 3) 調和関数の内積は

$$(Y_{\mathbf{a}}, Y_{\mathbf{b}}) := \int d^n \Omega \bar{Y}_{\mathbf{a}} Y_{\mathbf{b}} = C(n, \ell) a_{j_1 \dots j_\ell} b^{j_1 \dots j_\ell}, \quad (2.4.9a)$$

$$C(n, \ell) = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}} \ell!}{2^\ell \Gamma(\frac{n+1}{2} + \ell)}. \quad (2.4.9b)$$

で与えられる. 異なる  $\ell$  の調和関数は直交する.

□

**【公式 2.66 (球面調和関数と多項式の積 [2005.8.27])】**  $n$  次元球面上の  $\ell$  次の調和関数を

$$Y(\mathbf{a}) = Y_{\mathbf{a}} = a_{(k)_\ell} \Omega^{(k)_\ell} \quad (2.4.10)$$

とするとき、次の公式が成り立つ.

1.  $Y_{\mathbf{a}} \Omega^i, D_A Y_{\mathbf{a}} D^A \Omega^i$ :

$$\Omega^i Y_{\mathbf{a}} = Y(\delta^i \hat{\otimes} \mathbf{a}) + \frac{\ell}{2\ell + n - 1} Y(I^i \mathbf{a}), \quad (2.4.11a)$$

$$D^A \Omega^i D_A Y_{\mathbf{a}} = -\ell Y(\delta^i \hat{\otimes} \mathbf{a}) + \frac{\ell(\ell + n - 1)}{2\ell + n - 1} Y(I^i \mathbf{a}) \quad (2.4.11b)$$

ここで,

$$\delta^i \hat{\otimes} \mathbf{a} = \delta^i \otimes_s \mathbf{a} - \frac{\ell}{2\ell + n - 1} \delta \otimes_s I^i \mathbf{a}, \quad (2.4.12a)$$

$$(\delta^i \otimes_s \mathbf{a})_{(k)_{\ell+1}} = \delta^i_{(k_1} a_{k_2 \dots k_{\ell+1})}, \quad (2.4.12b)$$

$$(I^i \mathbf{a})_{(k)_{\ell-1}} = a^i_{k_1 \dots k_{\ell-1}}, \quad (2.4.12c)$$

$$(\delta \otimes_s I^i \mathbf{a})_{(k)_{\ell+1}} = \delta_{(k_1 k_2} a^i_{k_3 \dots k_{\ell+1})}. \quad (2.4.12d)$$

2.  $\Omega^i \Omega^j Y_{\mathbf{a}}, \Omega^i D_A \Omega^j D^A Y_{\mathbf{a}}, D_A \Omega^i D_B \Omega^j D^A D^B Y_{\mathbf{a}}$ :

$$\begin{aligned} \Omega^i \Omega^j Y_{\mathbf{a}} &= Y(\delta^i \hat{\otimes} \delta^j \hat{\otimes} \mathbf{a}) + \frac{1}{2\ell + n + 1} \{ \delta^{ij} Y(\mathbf{a}) + 2\ell Y(\delta^i \hat{\otimes} I^j \mathbf{a}) \} \\ &\quad + \frac{\ell(\ell - 1)}{(2\ell + n - 1)(2\ell + n - 3)} Y(I^i I^j \mathbf{a}), \end{aligned} \quad (2.4.13a)$$

$$\begin{aligned} \Omega^i D_A \Omega^j D^A Y_{\mathbf{a}} &= -\ell Y(\delta^i \hat{\otimes} \delta^j \hat{\otimes} \mathbf{a}) + \frac{\ell}{2\ell + n + 1} \{ (n + 1) Y(\delta^i \hat{\otimes} I^j \mathbf{a}) - \delta^{ij} Y(\mathbf{a}) \} \\ &\quad + \frac{\ell(\ell - 1)(\ell + n - 1)}{(2\ell + n - 1)(2\ell + n - 3)} Y(I^i I^j \mathbf{a}), \end{aligned} \quad (2.4.13b)$$

$$\begin{aligned} D_A \Omega^i D_B \Omega^j D^A D^B Y_{\mathbf{a}} &= \ell^2 Y(\delta^i \hat{\otimes} \delta^j \hat{\otimes} \mathbf{a}) - \frac{2\ell \{ \ell^2 + (n - 1)\ell - n - 1 \}}{2\ell + n + 1} Y(\delta^i \hat{\otimes} I^j \mathbf{a}) \\ &\quad - \frac{\ell(\ell + n + 1)}{2\ell + n + 1} \delta^{ij} Y(\mathbf{a}) + \frac{\ell(\ell - 1)(\ell + n - 1)^2}{(2\ell + n - 1)(2\ell + n - 3)} Y(I^i I^j \mathbf{a}). \end{aligned} \quad (2.4.13c)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \delta^i \hat{\otimes} \delta^j \hat{\otimes} \mathbf{a} &= \delta^i \otimes_s \delta^j \otimes_s \mathbf{a} - \frac{2\ell}{2\ell + n + 1} \delta \otimes_s \delta^i \otimes_s I^j \mathbf{a} - \frac{\delta^{ij}}{2\ell + n + 1} \delta \otimes \mathbf{a} \\ &\quad + \frac{\ell(\ell - 1)}{(2\ell + n + 1)(2\ell + n - 1)} \delta \otimes_s \delta \otimes_s I^i I^j \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

$$\delta^i \hat{\otimes} I^j \mathbf{a} = \delta^i \otimes_s I^j \mathbf{a} - \frac{\ell - 1}{\ell + 2n - 3} \delta \otimes_s I^i I^j \mathbf{a}. \quad (2.4.15)$$

3. 作用素  $I^i, \delta^i \hat{\otimes}, \delta \hat{\otimes}$  の間の関係:

$$I^i \delta^j \otimes_s \mathbf{a} = \frac{1}{\ell + 1} \delta^{ij} \mathbf{a} + \frac{\ell}{\ell + 1} \delta^j \otimes_s I^i \mathbf{a}, \quad (2.4.16)$$

$$I^i \delta \otimes_s I^j \mathbf{a} = \frac{2}{\ell + 1} \delta^i \otimes_s I^j \mathbf{a} + \frac{\ell - 1}{\ell + 1} \delta \otimes_s I^i I^j \mathbf{a}, \quad (2.4.17)$$

$$\begin{aligned} I^i \delta^j \hat{\otimes} \mathbf{a} &= \frac{1}{\ell + 1} \delta^{ij} \mathbf{a} + \frac{\ell}{\ell + 1} \delta^j \hat{\otimes} I^i \mathbf{a} \\ &\quad - \frac{2\ell}{(\ell + 1)(2\ell + n - 1)} \delta^i \hat{\otimes} I^j \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

$$\delta^i \hat{\otimes} I_i \mathbf{a} = \mathbf{a}, \quad (2.4.19)$$

$$I_i \delta^i \hat{\otimes} \mathbf{a} = \frac{(\ell + n - 1)(2\ell + n + 1)}{(\ell + 1)(2\ell + n - 1)} \mathbf{a}, \quad (2.4.20)$$

$$\delta^i \hat{\otimes} \delta_i \hat{\otimes} \mathbf{a} = 0. \quad (2.4.21)$$

□

【公式 2.67 (球面調和関数の Fourier 変換)】  $n + 1$  次元 Euclidean 空間  $E^{n+1}$  において,  $r^2 = x \cdot x$  として,

$$F(r^2) := \int d^n \Omega e^{ix \cdot \Omega} = \Omega_{n-1} \int_0^\pi d\theta \sin^{n-1} \theta e^{ir \cos \theta} \quad (2.4.22)$$

とおく. このとき,  $a_{j_1 \dots j_\ell}$  を定数対称テンソルとして

$$\begin{aligned} & \int d^n \Omega a_{j_1 \dots j_\ell} \Omega^{j_1} \dots \Omega^{j_\ell} e^{ix \cdot \Omega} \\ &= (-i)^\ell \sum_{\substack{\ell/2 \leq k \leq \ell}} \frac{2^{2k-\ell} \ell!}{(\ell-k)!(2k-\ell)!} \\ & \quad \times x^{j_1 \dots j_{2k-\ell}} a_{j_1 \dots j_{2k-\ell} m_1}^{m_1} \dots a_{m_{\ell-k}}^{m_{\ell-k}} F^{(k)}(r^2). \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

特に, 単位球面  $S^n \subset E^{n+1}$  上の調和関数

$$Y = a_{j_1 \dots j_\ell} \Omega^{j_1} \dots \Omega^{j_\ell}$$

に対して,

$$\int d^n \Omega Y(\Omega) e^{ix \cdot \Omega} = (-2ir)^\ell Y(x/r) F^{(\ell)}(r^2). \quad (2.4.24)$$

□

### 2.4.1.3 2次元球面上の調和関数

【公式 2.68 (具体的表式)】  $S^2$  上の調和関数  $Y_l^m(\Omega)$  を

$$Y_l^m(\Omega) = C_l^m e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta), \quad (2.4.25)$$

$$\Omega = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (2.4.26)$$

により定義すると, 規格化条件

$$\int_{S^2} d\Omega Y_l^m(\Omega) Y_{l'}^{m'*}(\Omega) = \delta^{mm'} \delta_{ll'}. \quad (2.4.27)$$

より

$$C_l^m = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \quad (2.4.28)$$

このとき,

$$Y_l^{m*} = (-1)^m Y_l^{-m} \quad (2.4.29)$$

□

【定義 2.69 (Spin-weighted spherical harmonics)】 次の微分方程式の正則解  $S_l^m(x)$  を用いて,  ${}_s Y_l^m(\Omega) = {}_s C_l^m e^{im\phi} S_l^m(\cos\theta)$  と表される関数系をスピン荷重  $s$  の調和関数と呼ぶ:

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dS}{dx} \right) + \left\{ -\frac{(m+sx)^2}{1-x^2} + l(l+1) - s^2 \right\} S = 0. \quad (2.4.30)$$

2次元球面上の複素ベクトル

$$\partial_{\pm} := \partial_{\theta} \pm \frac{i}{\sin\theta} \partial_{\phi} \quad (2.4.31)$$

を用いて, スピン荷重  $s$  の量に対する作用素  $\eth$  と  $\bar{\eth}$  を

$$\eth {}_s \eta = -\sin^s \theta \partial_+ (\sin^{-s} \theta {}_s \eta), \quad (2.4.32a)$$

$$\bar{\eth} {}_s \eta = -\sin^{-s} \theta \partial_- (\sin^s \theta {}_s \eta), \quad (2.4.32b)$$

$$(\eth\bar{\eth} - \bar{\eth}\eth) {}_s \eta = 2s {}_s \eta, \quad (2.4.32c)$$

により定義する. このとき,

$${}_1 Y_l^m = \frac{\eth Y_l^m}{\sqrt{l(l+1)}} = -\frac{\partial_+ Y_l^m}{\sqrt{l(l+1)}}, \quad (2.4.33a)$$

$${}_{-1} Y_l^m = -\frac{\bar{\eth} Y_l^m}{\sqrt{l(l+1)}} = \frac{\partial_- Y_l^m}{\sqrt{l(l+1)}}, \quad (2.4.33b)$$

$${}_2 Y_l^m = \frac{\eth {}_1 Y_l^m}{\sqrt{(l+2)(l-1)}} = \frac{\sin\theta \partial_+ (\sin^{-1} \theta \partial_+ Y_l^m)}{\sqrt{(l+2)(l+1)l(l-1)}}, \quad (2.4.33c)$$

$${}_{-2} Y_l^m = -\frac{\bar{\eth} {}_{-1} Y_l^m}{\sqrt{(l+2)(l-1)}} = \frac{\sin\theta \partial_- (\sin^{-1} \theta \partial_- Y_l^m)}{\sqrt{(l+2)(l+1)l(l-1)}} \quad (2.4.33d)$$

これらは次の関係式を満たす:

$$\eth {}_{-1} Y_l^m = \sqrt{l(l+1)} Y_l^m, \quad (2.4.34a)$$

$$\bar{\eth} {}_1 Y_l^m = -\sqrt{l(l+1)} Y_l^m, \quad (2.4.34b)$$

$$\eth {}_2 Y_l^m = -\sqrt{(l+2)(l-1)} {}_1 Y_l^m, \quad (2.4.34c)$$

$$\eth {}_{-2} Y_l^m = \sqrt{(l+2)(l-1)} {}_{-1} Y_l^m. \quad (2.4.34d)$$

□

## 2.4.2 調和ベクトル

### 2.4.2.1 一般論

【定義 2.70 (調和ベクトル)】 Riemann 多様体上のベクトル場  $V^i$  が次の条件を満たすとき, 調和ベクトルという.

$$-\Delta V^i = k^2 V^i, \quad (2.4.35)$$

$$D_i V^i = 0. \quad (2.4.36)$$

□

【命題 2.71 (恒等式 [2004.9.4])】 Riemann 多様体上のベクトル場  $V^i$  は次の恒等式を満たす :

$$2D_{[i} V_{j]} D^{[i} V^{j]} = 2D_i (V_j D^{[i} V^{j]}) + V_j (-\Delta V^j + R_k^j V^k) \quad (2.4.37a)$$

$$2D_{(i} V_{j)} D^{(i} V^{j)} = 2D_i (V_j D^{(i} V^{j)}) + V_j (-\Delta V^j - R_k^j V^k) \quad (2.4.37b)$$

これより, 特に  $n$  次元 Einstein 空間

$$R_{ij} = (n-1)K g_{ij} \quad (2.4.38)$$

の上では,

$$2D_{[i} V_{j]} D^{[i} V^{j]} = 2D_i (V_j D^{[i} V^{j]}) + V_j [-\Delta + (n-1)K] V^j \quad (2.4.39a)$$

$$2D_{(i} V_{j)} D^{(i} V^{j)} = 2D_i (V_j D^{(i} V^{j)}) + V_j [-\Delta - (n-1)K] V^j \quad (2.4.39b)$$

□

【定理 2.72 (スペクトル条件 [2004.9.4])】  $n$  次元コンパクト Einstein 空間上の調和ベクトルのスペクトルは次の条件を満たす :

$$k^2 \geq (n-1)|K|. \quad (2.4.40)$$

□

【定理 2.73 (絶対平行ベクトル場 [2004.9.4])】  $n$  次元コンパクト Riemann 空間  $M^n$  上に

$$D_i V_j = 0$$

を満たすベクトル場が存在するとする. このとき, このようなベクトル場の全体の作る線形空間  $L$  の次元を  $m$  とすると,  $M^n$  は Riemann 多様体として直積  $T^m \times \mathcal{K}^{n-m}$  と表され,  $L$  は  $T^m$  の各点でその接空間と一致する. さらに,  $M^n$  が Einstein 空間なら Ricci 平坦で,  $\mathcal{K}^{n-m}$  は Killing ベクトルを持たない Ricci 平坦空間となる. □

### 2.4.2.2 球面上の調和ベクトル

【命題 2.74 (同次座標表示)】  $n \geq 2$  に対して,  $E^{n+1}$  内の単位球面  $S^n$  を  $\Omega \cdot \Omega = 1$  と表す. このとき,  $S^n$  上のベクトル場  $V_A$  に対する方程式

$$\Delta V_A = -k^2 V_A, \quad (2.4.41a)$$

$$D_A V^A = 0 \quad (2.4.41b)$$

について次の命題が成り立つ.

i) (2.4.41) は

$$k^2 = \ell(\ell + n - 1) - 1 \quad (\ell = 1, 2, \dots) \quad (2.4.42)$$

のときのみ正則な解をもち, その解は一般に

$$V_A = a_{j_1 \dots j_\ell; j} \Omega^{j_1} \dots \Omega^{j_\ell} D_A \Omega^j \quad (2.4.43)$$

と表される. ここで,  $a_{j_1 \dots j_\ell; j}$  は次の条件を満たす定数の組である:

$$a_{j_1 \dots j_\ell; j} = a_{(j_1 \dots j_\ell); j}, \quad (2.4.44a)$$

$$a_{j_1 \dots j_{\ell-2} i^i; j} = 0, \quad (2.4.44b)$$

$$a_{(j_1 \dots j_\ell); j_{\ell+1}} = 0 \quad (2.4.44c)$$

2) 1) の解の族は (2.4.41b) を満たす  $S^n$  上のベクトル場が作る  $L^2$  空間において完全系をなし, それらの内積は

$$(V_a, V_b) := \int d^n \Omega (\bar{V}_a)^A (V_b)_A = C(n, \ell) \bar{a} \cdot b. \quad (2.4.45)$$

ここで  $C(n, \ell)$  は (2.4.9) のものと同じである. 異なる  $\ell$  の調和ベクトル場は直交する.

3)  $\ell = 1$  に対応する調和ベクトル場と Killing ベクトルは 1 対 1 に対応する.

4)  $\ell = 2$  に対応する調和ベクトル場の自由度は

$$N_V^2(S^n) = \frac{1}{3}(n+3)(n^2-1). \quad (2.4.46)$$

5) 一般の  $\ell(\geq 1)$  に対する調和ベクトル場の自由度は

$$\begin{aligned} N_V^l(S^n) &= \frac{(n+2\ell-1)(n+\ell-1)(n+\ell-3)!}{(\ell+1)(\ell-1)!(n-2)!} \\ &= \frac{(n+\ell-1)(n+2\ell-1)}{\ell+1} {}_{n+\ell-3}C_{n-2}. \end{aligned} \quad (2.4.47)$$

□

### 2.4.3 調和2階テンソル

#### 2.4.3.1 一般論

【定義 2.75 (調和2階テンソル)】 Riemann 多様体上の2階テンソル  $T_{ij}$  が条件

$$-\Delta T_{ij} = k^2 T_{ij}, \quad (2.4.48)$$

$$T_i^i = 0, \quad D^j T_{ij} = 0 \quad (2.4.49)$$

を満たすとき、調和テンソルという。 □

【命題 2.76 (恒等式 [2004.9.4])】  $T_{ij}$  を

$$T_i^i = 0, \quad D^j T_{ij} = 0$$

を満たす2階対称テンソルとすると、次の恒等式が成り立つ：

$$\begin{aligned} 2D_{[i}T_{j]k}D^{[i}T^{j]k} &= 2D^i(T_{jk}D^{[i}T^{j]k}) + T_{jk}[-\Delta T^{jk} + R_l^j T^{lk} + R_i^{jk} T^{il}], \\ 2D_{(i}T_{j)k}D^{(i}T^{j)k} &= 2D^i(T_{jk}D^{(i}T^{j)k}) + T_{jk}[-\Delta T^{jk} - R_l^j T^{lk} - R_i^{jk} T^{il}]. \end{aligned}$$

これより、特に断面曲率  $K$  の  $n$  次元定曲率空間上では

$$\begin{aligned} 2D_{[i}T_{j]k}D^{[i}T^{j]k} &= 2D^i(T_{jk}D^{[i}T^{j]k}) + T_{jk}(-\Delta + nK)T^{jk}, \\ 2D_{(i}T_{j)k}D^{(i}T^{j)k} &= 2D^i(T_{jk}D^{(i}T^{j)k}) + T_{jk}(-\Delta - nK)T^{jk}. \end{aligned}$$

□

【定理 2.77 (スペクトル条件 [2004.9.4])】  $M^n$  を断面曲率  $K$  の  $n$  次元コンパクト定曲率空間とする。このとき、 $M^n$  上の 2 階対称調和テンソルのスペクトル  $k^2$  は次の条件を満たす：

$$k^2 \geq n|K|. \quad (2.4.50)$$

□

【定理 2.78 (2次元定曲率空間上の調和テンソル [2004.9.4])】  $M^2$  を断面曲率  $K$  の 2 次元コンパクト定曲率空間とする。このとき、

1. 反対称 2 階調和テンソルは、 $\epsilon_{ij}$  の定数倍のみである。
2. いたるところ正則な対称 2 階調和テンソルは  $K \leq 0$  の時のみ存在し、 $T^2(K = 0)$  に対しては、 $ds^2 = dx^2 + dy^2$  となる座標系で対応する  $T_{ij}$  は定数となる ( $k^2 = 0$ )。また、 $H^2/\Gamma(K = -1)$  に対しては、無限小モジュライ変形と対応する。

□

### 2.4.3.2 球面上の調和 2 階テンソル

【命題 2.79 (同次座標表示)】  $n \geq 2$  に対して、 $E^{n+1}$  内の単位球面  $S^n$  を  $\Omega \cdot \Omega = 1$  と表す。このとき、 $S^n$  上の 2 階テンソル場  $T_{AB}$  に対する方程式

$$\Delta T_{AB} = -k^2 T_{AB}, \quad (2.4.51a)$$

$$T^A_A = 0 \quad (2.4.51b)$$

$$D_B T^{BA} = D_B T^{AB} = 0 \quad (2.4.51c)$$

について次の命題が成り立つ。

i) (2.4.51) は

$$k^2 = \ell(\ell + n - 1) - 2 \quad (\ell = 1, 2, \dots) \quad (2.4.52)$$

に対してのみ正則な解をもち、それらは

$$T_{AB} = a_{j_1 \dots j_\ell; i_1 i_2} \Omega^{j_1} \dots \Omega^{j_\ell} D_A \Omega^{i_1} D_B \Omega^{i_2} \quad (2.4.53)$$



と表される. ここで,  $a_{j_1 \dots j_\ell; i_1 i_2}$  は次の条件を満たす定数の組である:

$$a_{j_1 \dots j_\ell; i_1 i_2} = a_{(j_1 \dots j_\ell); i_1 i_2}, \quad (2.4.54a)$$

$$a_{j_1 \dots j_{\ell-2} j^j; i_1 i_2} = 0, \quad (2.4.54b)$$

$$a_{(j_1 \dots j_\ell; j_{\ell+1})}^i = a_{(j_1 \dots j_\ell; j_{\ell+1})}^i = 0. \quad (2.4.54c)$$

- 2)  $\ell = 1$  に対して, 条件 (2.4.54) は  $a_{j_1; j_2 j_3}$  が完全反対称であることと同等である. 特に,  $T^{AB} = -T^{BA}$  となる.
- 3)  $n = 2$  に対して, 自明でない調和 2 階テンソルは  $T^{AB} \propto \epsilon^{AB} (\ell = 1)$  のみである.
- 4) 調和 2 階テンソルは条件 (2.4.51b) および (2.4.51c) を満たす  $S^n$  上の 2 階テンソル場が作る  $L_2$  空間において完全で, 内積は

$$(T_a, T_b) := \int d^n \Omega (\bar{T}_a)_{AB} (T_b)^{AB} = C(n, \ell) \bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} \quad (2.4.55)$$

で与えられる. ここで  $C(n, \ell)$  は (2.4.9) のものと同じである. 異なる  $\ell$  の調和テンソル場は直交する.

- 5)  $\ell = 2$  に対して, 対称調和テンソルの独立な自由度は

$$N_{ST}^2(S^n) = \frac{1}{12} (n^2 - 4)(n + 1)(n + 3) \quad (2.4.56)$$

交代調和テンソルの独立な自由度は

$$N_{AT}^2(S^n) = \frac{1}{8} n(n + 1)(n + 3)(n - 2). \quad (2.4.57)$$

- 6)  $\ell \geq 2, n \geq 2$  に対して, 対称調和テンソルの独立な自由度は

$$\begin{aligned} & \frac{n(n+1)}{2} ({}_{n+\ell-1}C_\ell + {}_{n+\ell-2}C_{\ell-1}) - (n+1) ({}_{n+\ell}C_{\ell+1} + {}_{n+\ell-3}C_{\ell-2}) \\ &= \frac{(n+1)(n-2)(n+\ell)(n+2\ell-1)}{2\ell(\ell+1)} {}_{n+\ell-3}C_{\ell-2} \end{aligned} \quad (2.4.58)$$

□

**Proof.**

- 1)  $T^{i_1 i_2} = T_{AB} D^A \Omega^{i_1} D^B \Omega^{i_2}$  を考えれば、ベクトル場の場合と全く同様にして固有値および同次座標表示が得られる。  $a_{j_1 \dots j_\ell; i_1 i_2}$  に対する条件は次のようにして求められる。 まず、

$$\begin{aligned} a_{j_1 \dots j_\ell} &:= a_{j_1 \dots j_\ell; i}^i, \\ a_{j_1 \dots j_{\ell-1}; i_1} &:= a_{j_1 \dots j_{\ell-1}; i}^i, \\ a_{j_1 \dots j_{\ell-2}} &:= a_{j_1 \dots j_{\ell-2}; i_1 i_2}^{i_1 i_2} \end{aligned}$$

とおくと、(2.4.51b) は

$$a_{(j_1 \dots j_\ell; i_1 i_2)} = a_{(j_1 \dots j_\ell} \delta_{i_1 i_2)}$$

と表される。この式の2つの添え字についてトレースを取ると、

$$\begin{aligned} (n+2\ell)a_{j_1 \dots j_\ell} &= 2\ell a_{(j_1 \dots j_{\ell-1}; j_\ell)}, \\ a_{j_1 \dots j_{\ell-2}} &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。また、(2.4.51c) は

$$a'_{j_1 \dots j_\ell; i_1 i_2} = a_{j_1 \dots j_\ell; (i_1 i_2)}, \quad a''_{j_1 \dots j_\ell; i_2 i_2} = a_{j_1 \dots j_\ell; [i_1 i_2]}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} (n+\ell+1)a'_{(j_1 \dots j_\ell; i_1 i_2} \delta_{i_3}^i) + \ell a'_{(j_1 \dots j_{\ell-1}; i_1} \delta_{j_\ell i_2} \delta_{i_3}^i) \\ - (n+\ell+1)a'_{(j_1 \dots j_\ell; i_1} \delta_{i_2 i_3}^i) - \ell a'_{(j_1 \dots j_{\ell-1}; i} \delta_{j_\ell i_1} \delta_{i_2 i_3}^i) = 0 \\ \ell a''_{(j_1 \dots j_{\ell-1}; i_1} \delta_{j_\ell}^i) - (n+\ell-1)a''_{(j_1 \dots j_\ell; i_1} \delta_{i_2}^i) - \ell a''_{j_1 \dots j_{\ell-1}; i} \delta_{j_\ell i_1}^i = 0 \end{aligned}$$

と表される。これらのうち、第1式は

$$\begin{aligned} (3n+4\ell+2)a'_{(j_1 \dots j_\ell} \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3}^i) - 2\ell a'_{(j_1 \dots j_{\ell-1}; i} \delta_{j_\ell i_1} \delta_{i_2 i_3}^i) \\ - 2(n+\ell+1)a'_{(j_1 \dots j_\ell; i_1} \delta_{i_2 i_3}^i) = 0 \end{aligned}$$

この式で2組の添え字についてトレースを取ると、

$$(3n+4\ell+2)(n+2\ell+1)a'_{j_1 \dots j_{\ell-1} i} = \{(n+\ell+1)(n+2\ell+3) + (3n+5\ell+3)(n+2\ell-1)\} a'_{j_1 \dots j_{\ell-1} i}$$

を得る。これと  $T_A^A = 0$  に対応する条件より

$$a'_{j_1 \dots j_{\ell-1}; i} = a'_{j_1 \dots j_{\ell-1} i} = 0$$

となるので、結局、 $a'_*$  に対する条件は、 $a'_{(j_1 \dots j_\ell; i_1)}^i = 0$  となる。同様に、 $a''_*$  に対する式のトレースより  $a''_{(j_1 \dots j_\ell; i_1)}^i = 0$  を得る。  $a_* = a'_* + a''_*$  なので、これらの条件は(2.4.54c)にまとめられる。

2)  $\ell = 1$  のとき自明でない条件は (2.4.54c) のみである。これより,

$$a_{j_1; j_2 j_3} = -a_{j_2; j_1 j_3} = a_{j_3; j_1 j_2} = -a_{j_1; j_3 j_2}.$$

3)  $a_{*; i_1 i_2}$  を 1) で行ったように, 対称部分  $a'_{*; i_1 i_2}$  と反対称部分  $a''_{*; i_1 i_2}$  に分解する。まず,

$$a'_{j_1 \dots j_{\ell-1}; i_1 i_2} := \frac{1}{2} a'_{j_1 \dots j_{\ell-1} j_{\ell}; i_1 i_2} \epsilon_{i_2}^{j_{\ell} i_3}$$

とおくと,

$$0 = (\ell + 1) a'_{(j_1 \dots j_{\ell}; i_1)}^{i_2} = (\ell + 1) a'_{j_1 \dots j_{\ell}; i_1}^{i_2} - 2\ell a'_{(j_1 \dots j_{\ell-1}; i_2 i_3)}^{i_3} \epsilon_{i_3 j_{\ell} i_1}$$

が成り立つ。一方,  $a'_{j_1 \dots j_{\ell}; i_1 i_2}$  に対する条件 (2.4.54c) は,  $a'_{j_1 \dots j_{\ell-1}; i_1 i_2}$  に対する同様の条件と同等となる。したがって, 帰納的に,  $a'_{j_1 \dots j_{\ell}; i_1 i_2}$  は  $\ell = 1$  に対応する  $a'_{j; i_1 i_2}$  の線形結合として表される。ところが, 2) よりこの量はゼロとなる。したがって,  $a'_{*; i_1 i_2} = 0$ 。次に,

$$a''_{j_1 \dots j_{\ell}; i_1 i_2} =: b_{j_1 \dots j_{\ell}; i_3} \epsilon_{i_1 i_2}^{i_3}$$

とおくと,

$$a''_{j_1 \dots j_{\ell}; i_1 i_2} \epsilon^{i_2 i_3 i_4} = b_{j_1 \dots j_{\ell}; i_3} \delta_{i_1}^{i_4} - b_{j_1 \dots j_{\ell}; i_4} \delta_{i_1}^{i_3}$$

より, 条件 (2.4.54c) は

$$b_{(j_1 \dots j_{\ell}; i_3} \delta_{i_1}^{i_4} = b_{(j_1 \dots j_{\ell}; i_4} \delta_{i_1}^{i_3}$$

となる。このトレースより

$$(\ell + 2) b_{j_1 \dots j_{\ell}; i_4}^{j_4} = \ell b_{(j_1 \dots j_{\ell-1}; i_4} \delta_{i_{\ell}}^{i_4}$$

を得る。したがって,  $\ell > 1$  のとき, このトレースより  $b_* = 0$ , したがって,  $a''_* = 0$  を得る。

4) 調和ベクトルの場合と同様。

5),6)  $a_{j_1 \dots j_l; i_1 i_2}$  を  $(i_1, i_2)$  について対称な部分と反対称な部分に分解すると, 条件はいずれに対しても,

$$a_{(j_1 \dots j_l) i} = 0, \quad a_{k j_1 \dots j_{l-2}; i_1 i_2}^k = 0 \quad (2.4.59)$$

となる。以下,  $\sharp = n + 1, i', j', \dots = 1, \dots, n, i, j, \dots = 1, \dots, n + 1$  とする。

i)  $a_{(j_1 \dots j_l: j_{l+1})\#} = 0$ : この条件は

$$(l+1)a_{(\#\dots\#j'_1 \dots j'_p)\#} \equiv pa_{\#\dots\#(j'_1 \dots j'_p)\#} + (l+1-p)a_{\#\dots\#j'_1 \dots j'_p\#\#} \quad (2.4.60)$$

より, 次の条件と同等:

$$a_{\#\dots\#\#\#} = 0, \quad (2.4.61a)$$

$$a_{\#\dots\#j'_1 \dots j'_p\#\#} = -\frac{p}{l+1-p}a_{\#\dots\#(j'_1 \dots j'_p)\#} \quad (1 \leq p \leq l) \quad (2.4.61b)$$

$$a_{(j'_1 \dots j'_l: j'_{l+1})\#} = 0. \quad (2.4.61c)$$

ii)  $a_{(j_1 \dots j_l: j_{l+1})i'} = 0$ : i) と同様にして, この条件は次の2つの条件と同等:

$$a_{\#\dots\#\#i'} = 0, \quad (2.4.62a)$$

$$a_{\#\dots\#j'_1 \dots j'_p\#\#i'} = -\frac{p}{l+1-p}a_{\#\dots\#(j'_1 \dots j'_p)i'} \quad (1 \leq p \leq l) \quad (2.4.62b)$$

$$a_{(j'_1 \dots j'_l: j'_{l+1})i'} = 0. \quad (2.4.62c)$$

iii) i) と ii) より, 条件  $a_{(j_1 \dots j_l: j_{l+1})i} = 0$  は, 次のように書き換えられる:

$$a_{\#\dots\#\#\#} = 0, \quad (2.4.63a)$$

$$a_{\#\dots\#\#j'\#\#} = 0, \quad (2.4.63b)$$

$$a_{\#\dots\#\#i'} = 0, \quad (2.4.63c)$$

$$a_{\#(j'_1 \dots j'_l: j'_{l+1})} = 0, \quad (2.4.63d)$$

$$a_{(j'_1 \dots j'_l: j'_{l+1})i'} = 0, \quad (2.4.63e)$$

$$a_{\#\dots\#j'_1 \dots j'_p\#\#} = \mp \frac{p-1}{l+2-p}a_{\#\dots\#(j'_1 \dots j'_{p-1})j'_p} \quad (2 \leq p \leq l+1), \quad (2.4.63f)$$

$$a_{\#\dots\#j'_1 \dots j'_p\#\#} = \pm \frac{p(p-1)}{(l+1-p)(l+2-p)}a_{\#\dots\#(j'_1 \dots j'_{p-1})j'_p} \quad (2 \leq p \leq l). \quad (2.4.63g)$$

ただし, 反対称テンソルに対しては, 最後の条件は自明となる.

iv)  $a_{k j_1 \dots j_{l-2}: i'_1 i'_2} = 0$ : この条件は, 次の条件の組に分解される:

$$a_{\#\dots\#j'_1 \dots j'_p: i'_1 i'_2} + a_{\#\dots\#k' j'_1 \dots j'_p: i'_1 i'_2} = 0 \quad (0 \leq p \leq l-2) \quad (2.4.64)$$

よって, iii) の結果とあわせると, すべての成分は拘束条件

$$a_{\#(j'_1 \dots j'_l j'_{l+1})} = 0, \quad (2.4.65a)$$

$$a_{(j'_1 \dots j'_l j'_{l+1})i'} = 0 \quad (2.4.65b)$$

を満たす成分  $a_{j'_1 \dots j'_l i'_1 i'_2}$  と  $a_{\#j'_1 \dots j'_{l-1} i'_1 i'_2}$  をもちいて次のように表される :

$$a_{\# \dots \# j'_1 \dots j'_p i'_1 i'_2} = (-1)^{[\frac{l-p}{2}]} a_{(\#)k'_1 \dots j'_1 \dots j'_p i'_1 i'_2}^{k'_1} \quad (0 \leq p \leq l-2), \quad (2.4.66a)$$

$$a_{\# \dots \# i' \#} = 0, \quad (2.4.66b)$$

$$a_{\# \dots \# j'_1 \dots j'_p \#} = \pm \frac{p-1}{l+2-p} (-1)^{[\frac{l-p}{2}]} a_{(\#)k'_1 \dots (j'_1 \dots j'_{p-1})j'_p}^{k'_1} \quad (2 \leq p \leq l+1), \quad (2.4.66c)$$

$$a_{\# \dots \# \#} = 0, \quad (2.4.66d)$$

$$a_{\# \dots \# j' \#} = 0, \quad (2.4.66e)$$

$$a_{\# \dots \# j'_1 \dots j'_p \#} = \mp \frac{p(p-1)}{(l+1-p)(l+2-p)} (-1)^{[\frac{l-p}{2}]} a_{(\#)k'_1 \dots (j'_1 \dots j'_{p-1})j'_p}^{k'_1} \quad (2 \leq p \leq l). \quad (2.4.66f)$$

v)  $a_{k j_1 \dots j_{l-2} \# i'} = 0$ : この条件は, 次の条件の組に分解される :

$$a_{\# \dots \# j'_1 \dots j'_p i' \#} + a_{\# \dots \# k' j'_1 \dots j'_p i' \#}^{k'} = 0 \quad (0 \leq p \leq l-2) \quad (2.4.67)$$

これに iv) の関係式を代入すると,

$$p(l-1-p)a_{(\#)k'_1 \dots (j'_1 \dots j'_p) i'}^{k'_1} - (p+2)(l+1-p)a_{(\#)k'_1 \dots (k' k' j'_1 \dots j'_p) i'}^{k'_1} = 0 \quad (0 \leq p \leq l-2) \quad (2.4.68)$$

関係式

$$(p+2)a_{(\#)k'_1 \dots (k' k' j'_1 \dots j'_p) i'}^{k'_1} = p a_{(\#)k'_1 \dots (j'_1 \dots j'_p) i'}^{k'_1} + 2a_{(\#)k'_1 \dots j'_1 \dots j'_p}^{k'_1} \quad (2.4.69)$$

を用いると, これは次のように変形される :

$$p a_{(\#)k'_1 \dots (j'_1 \dots j'_p) i'}^{k'_1} + (l+1-p)a_{(\#)k'_1 \dots j'_1 \dots j'_p}^{k'} \quad (0 \leq p \leq l-1) \quad (2.4.70)$$

これらは縮約と整合的なので,  $p = l - 1, l - 2$  に対して成り立てば十分. さらに,  $p = l - 1$  に対する式は (2.4.65b) の縮約となっているので, 独立な条件は,

$$(l - 2)a_{\#k'(j'_1 \dots j'_{l-2})i'}^{k'} + 3a_{\#j'_1 \dots j'_{l-2} : k'i'}^{k'} = 0. \quad (2.4.71)$$

vi)  $a_{kj_1 \dots j_{l-2} : \# \#}^k = 0$ : この条件は, 対称テンソルの時にのみ非自明で, 次の条件の組に分解される:

$$a_{\# \dots \# j'_1 \dots j'_p : \# \#}^{k'} + a_{\# \dots \# k' j'_1 \dots j'_p : \# \#}^{k'} = 0 \\ (0 \leq p \leq l - 2) \quad (2.4.72)$$

これに iv) の関係式を代入すると,

$$p(p - 1)(l - p)(l - 1 - p)a_{(\#)k'_1 \dots (j'_1 \dots j'_{p-1} j'_p)}^{k'_1} \\ - (p + 1)(p + 2)(l + 1 - p)(l + 2 - p)a_{(\#)k'_1 \dots (k' k' j'_1 \dots j'_{p-1} j'_p)}^{k'_1} = 0 \\ (0 \leq p \leq l - 2) \quad (2.4.73)$$

vii)  $a_{j'_1 \dots j'_l : i'_1 i'_2}$  の自由度: 以下, 次の略記法を用いる:

$$X_{i'}^m : a_{k'_1}^{k'_1} \dots a_{k'_m}^{k'_m} (j'_1 \dots j'_{l-2m} : j'_{l-2m+1})_{i'} \quad (m = 0, \dots, [l/2]), \\ X^m : a_{k'_1}^{k'_1} \dots a_{k'_m}^{k'_m} (j'_1 \dots j'_{l-2m} : j'_{l-2m+1} j'_{l-2m+2}) \quad (m = 0, \dots, [l/2]), \\ Y_{i'}^m : a_{k'_1}^{k'_1} \dots a_{k'_{m-1}}^{k'_{m-1}} a_{j'_1 \dots j'_{l-2m+1} : k'_m i'}^{k'_m} \quad (m = 1, \dots, [(l + 1)/2]), \\ Y^m : a_{k'_1}^{k'_1} \dots a_{k'_{m-1}}^{k'_{m-1}} (j'_1 \dots j'_{l-2m+1} : j'_{l-2m+2})_{k'_m} \quad (m = 1, \dots, [(l + 1)/2]), \\ Z^m : a_{k'_1}^{k'_1} \dots a_{k'_{m-2}}^{k'_{m-2}} a_{k'_{m-1}}^{k'_{m-1}} j'_1 \dots j'_{l-2m+2} : k'_m, \quad (m = 1, \dots, [l/2] + 1) \\ W^m : a_{k'_1}^{k'_1} \dots a_{k'_{m-2}}^{k'_{m-2}} a_{k'_{m-1}}^{k'_{m-1}} j'_1 \dots j'_{l-2m+2} : k'_{m-1} k'_m \quad (m = 2, \dots, [l/2] + 1).$$

これらの量の縮約は次のようになる：

$$\begin{aligned}
(l-2m+1)X_{i'}^m &\rightarrow (l-2m-1)X_{i'}^{m+1} + 2Y_{i'}^m, \\
&\quad (l-2m)Y^{m+1} + 2Z^{m+1}, \\
Y_{i'}^m &\rightarrow Y_{i'}^{m+1}, \\
&\quad W^{m+1}, \\
(l-2m+2)(l-2m+1)X^m &\rightarrow (l-2m)(l-2m-1)X^{m+1} + 4(l-2m)Y^{m+1} + 2Z^{m+1}, \\
(l-2m+2)Y^m &\rightarrow (l-2m)Y^{m+1} + 2W^{m+1}, \\
Z^m &\rightarrow Z^{m+1}, \\
W^m &\rightarrow W^{m+1}.
\end{aligned}$$

この記号法で，条件は

$$A^{(0)} : X_{i'}^0 = 0, \quad (2.4.74)$$

$$\begin{aligned}
B^{(m)} : (4m-3)(l-2m+2)(l-2m+1)X^m + 2m(2m-1)\{2(l-2m+2)Y^m + Z^m\} = \\
(m=2, 3, \dots, [l/2]). \quad (2.4.74)
\end{aligned}$$

- まず，条件  $A^{(0)}$  の元で， $B^{(2)}$  が満たされれば任意の  $m=2, 3, \dots, [l/2]$  に対して  $B^{(m)}$  が満たされることを示す．そこで， $B^{(m-1)}$  が成り立つとすると，上記の縮約関係式より，

$$\begin{aligned}
(B^{(m)})' : (4m-7)(l-2m+2)(l-2m+1)X^m + 4(2m^2-m-4)(l-2m+2)Y^m \\
+ (4m^2-2m-8)Z^m + 8(2m-3)(m-1)W^m \quad (2.4.75)
\end{aligned}$$

を得る．一方，再び縮約公式を用いると，条件  $A^{(0)}$  より，レベル  $m$  で

$$A^{(m)} : (l-2m+1)X^m + 2mY^m = 0, \quad (2.4.76a)$$

$$A_1^{(m)} : (l-2m+2)Y^m + Z^m + 2(m-1)W^m \quad (2.4.76b)$$

の2式を得る．これらの間に関係式

$$\begin{aligned}
m(B^{(m)})' - 4(2m-3)A_1^{(m)} - 2(2m-3)(l-2m+2)A^{(m)} = (m-2)B^{(m)} \\
(2.4.77)
\end{aligned}$$

が成り立つことが確かめられる．よって， $B^{(m)}$  も成り立つ．以上より， $B^{(2)}$  のみを要請すればよい．

- 次に、条件  $A^{(0)}$  と  $B^{(2)}$  が線形独立であることを示す。一般に、 $B^{(2)}$  から生成される線形集合に属する元は一般に定数対称テンソル  $\beta^{j_1 \cdots j_l}$  を用いて

$$b = b^{j_1 \cdots j_l; i_1 i_2} a_{j_1 \cdots j_l; i_1 i_2}; \quad (2.4.78)$$

$$\begin{aligned} b^{j_1 \cdots j_l; i_1 i_2} &= 5(l-1)(l-2)\delta^{(j_1 j_2} \beta^{j_3 \cdots j_l) i_1 i_2} \\ &\quad + 24(l-2)\delta^{i_1} (j_1 \beta^{j_2 \cdots j_l) i_2} \\ &\quad + 12\beta^{j_1 \cdots j_l} \delta^{i_1 i_2} \end{aligned} \quad (2.4.79)$$

と表される。ただし、右辺で  $i_1, i_2$  について対称化を仮定する。もし、この元が  $A^{(0)}$  から生成される線形集合に属するとすると、 $b$  は  $(j_1', \dots, j_l', i_1')$  について対称でなければならない：

$$b^{j_1 \cdots j_l; i_1 i_2} = (l-2)(5l+19)\delta^{(j_1 j_2} \beta^{j_3 \cdots j_l) i_1 i_2} + 12\beta^{j_1 \cdots j_l} \delta^{i_1 i_2}. \quad (2.4.80)$$

この式で、 $(i_1', i_2'), (j_1', j_2')$  のそれぞれについてトレースをとり対称化すると次の2つの式を得る：

$$\begin{aligned} \{10l^3 + 5(n-4)l^2 + (22-19n)l - 92 + 18n\} \beta &= -8(l-2) * (2l-7)(\delta \otimes \beta_{(1)}), \\ \{14l^2 + 6(2n-9)l + 28\} \beta &= 14(l-1)(l-2)(\delta \otimes \beta_{(1)})_s \end{aligned} \quad (2.4.82)$$

この2式は、 $l \geq 3$  のとき線形独立となる：

$$\Delta = 140l_3^4 + (70n+1004)l_3^3 + (294n+4368)l_3^2 + (392n+5904)l_3 + 168n + 1728 > 0 \quad (2.4.83)$$

( $l_3 = l-3$ ). よって、 $\beta = 0$ . また、 $l=2$  の時も明らかに  $\beta = 0$ .

- 次に、条件  $A^{(0)}$  の線形独立な方程式の数を求める。  $j_1'', \dots, i'' = 1, \dots, n-1$  とおくと、条件は

$$\begin{aligned} a_{n \cdots n; nn} &= 0, \\ p a_{n \cdots n; j_1'' \cdots j_{l+1-p}''; nn} &= (l-p+1) a_{n \cdots n; j_1'' \cdots j_{l+1-p}''}^n \\ &\quad (p = 1, \dots, l), \\ a_{n \cdots n; ni''} &= 0, \\ p a_{n \cdots n; j_1'' \cdots j_{l+1-p}''; ni''} &= (l-p+1) a_{n \cdots n; j_1'' \cdots j_{l+1-p}''}^{i''} \\ &\quad (p = 1, \dots, l), \\ a_{n(j_1'' \cdots j_{l+1}'')} &= 0, \\ a_{(j_1'' \cdots j_{l+1}'')}^{i''} &= 0. \end{aligned}$$



と書き換えられる。これより、条件  $A^{(0)}$  の線形独立な方程式の数  $x_n$  は次の漸化式に従う：

$$x_n = x_{n-1} + n_{n+l-1}C_l + n_{n+l-1}C_{l+1}, \quad (2.4.84)$$

$$x_1 = 1 \quad (2.4.85)$$

これより、

$$x_n = n_{n+l}C_{l+1}. \quad (2.4.86)$$

– 次に、条件  $B^{(2)}$  の線形独立な方程式の数を求める。上と同様、 $j_1'', \dots, i'' = 1, \dots, n-1$  とおくと、条件は

$$12a_{nnj_1'' \dots j_{l-2}'' : nn} = \dots \quad (l \geq 2), \quad (2.4.87a)$$

$$36a_{nnnj_1'' \dots j_{l-3}'' : nn} = \dots \quad (l \geq 3), \quad (2.4.87b)$$

$$(p-1)(5p-6)a_{n \dots nj_1'' \dots j_{l-p}'' : nn} = \dots \quad (l \geq 4, p = 4) \quad (2.4.87c)$$

と書き換えられる。ここで、各式において右辺は  $a_{n \dots nj_1'' \dots j_{l-q}'' : nn}$  ( $q < p$ )、 $a_{\dots j_i''}$  の形の項の線形結合である。これらがすべて線形独立なのは明らかなので、その数は

$$n_{n+l-3}C_{l-2} \quad (2.4.88)$$

– 以上より、 $a_{j_1' \dots j_l' : i_1' i_2'}$  の自由度は

$$N_{0n}^l = \frac{n(n+1)}{2} n_{n+l-1}C_l - n_{n+l}C_{l+1} - n_{n+l-3}C_{l-2}. \quad (2.4.89)$$

viii)  $a_{\#j_1' \dots j_{l-1}' : i_1' i_2'}$  の自由度：以下、次の略記法を用いる：

$$X_{\#i'}^m : a_{\#k_1'}^{k_1'} \dots a_{\#k_m'}^{k_m'} (j_1' \dots j_{l-2m-1}' : j_{l-2m}') i' \quad (m = 0, \dots, [(l-1)/2]),$$

$$X_{\#}^m : a_{\#k_1'}^{k_1'} \dots a_{\#k_m'}^{k_m'} (j_1' \dots j_{l-2m-1}' : j_{l-2m}' j_{l-2m+1}') \quad (m = 0, \dots, [(l-1)/2]),$$

$$Y_{\#i'}^m : a_{\#k_1'}^{k_1'} \dots a_{\#k_{m-1}'}^{k_{m-1}'} a_{\#k_m'}^{k_m'} (j_1' \dots j_{l-2m}' : k_m') i' \quad (m = 1, \dots, [l/2]),$$

$$Y_{\#}^m : a_{\#k_1'}^{k_1'} \dots a_{\#k_{m-1}'}^{k_{m-1}'} a_{\#k_m'}^{k_m'} (j_1' \dots j_{l-2m}' : j_{l-2m+1}') k_m' \quad (m = 1, \dots, [l/2]),$$

$$Z_{\#}^m : a_{\#k_1'}^{k_1'} \dots a_{\#k_{m-2}'}^{k_{m-2}'} a_{\#k_{m-1}'}^{k_{m-1}'} a_{\#k_m'}^{k_m'} (j_1' \dots j_{l-2m+1}' : k_m'), \quad (m = 1, \dots, [(l-1)/2] + 1)$$

$$W_{\#}^m : a_{\#k_1'}^{k_1'} \dots a_{\#k_{m-2}'}^{k_{m-2}'} a_{\#k_{m-1}'}^{k_{m-1}'} a_{\#k_m'}^{k_m'} (j_1' \dots j_{l-2m+1}' : k_{m-1}' k_m') \quad (m = 2, \dots, [(l-1)/2] + 1).$$

これらの量の縮約は次のようになる：

$$\begin{aligned}
(l-2m)X_{\#i'}^m &\rightarrow (l-2m-2)X_{\#i'}^{m+1} + 2Y_{\#i'}^m, \\
&\quad (l-2m-1)Y_{\#}^{m+1} + 2Z_{\#}^{m+1}, \\
Y_{\#i'}^m &\rightarrow Y_{\#i'}^{m+1}, \\
&\quad W_{\#}^{m+1}, \\
(l-2m)(l-2m+1)X_{\#}^m &\rightarrow (l-2m-2)(l-2m-1)X_{\#}^{m+1} + 4(l-2m-1)Y_{\#}^{m+1} + 2Z_{\#}^{m+1}, \\
(l-2m+1)Y_{\#}^m &\rightarrow (l-2m-1)Y_{\#}^{m+1} + 2W_{\#}^{m+1}, \\
Z_{\#}^m &\rightarrow Z_{\#}^{m+1}, \\
W_{\#}^m &\rightarrow W_{\#}^{m+1}.
\end{aligned}$$

この記号法で，条件は

$$B_{\#}^{(0)} : X_{\#}^0 = 0, \quad (2.4.90a)$$

$$A_{\#}^{(1)} : (l-1)X_{\#i'}^1 + 2Y_{\#i'}^1 = 0, \quad (2.4.90b)$$

$$B_{\#}^{(m)} : (4m-1)(l-2m+1)(l-2m)X_{\#}^m + 2m(2m+1)\{2(l-2m+1)Y_{\#}^m + Z_{\#}^m\} = 0 \\ (m = 1, 2, \dots, [(l+1)/2]). \quad (2.4.90c)$$

- まず，条件  $A_{\#}^{(1)}$  の元で， $B_{\#}^{(0)}$  が満たされれば任意の  $m = 1, 3, \dots, [l/2]$  に対して  $B_{\#}^{(m)}$  が満たされることを示す．そこで， $B_{\#}^{(m-1)}$  が成り立つとすると，上記の縮約関係式より，

$$(B_{\#}^{(m)})' : (4m-5)(l-2m)(l-2m+1)X_{\#}^m + 4(2m^2+m-4)(l-2m+1)Y_{\#}^m \\ + (4m^2+2m-8)Z_{\#}^m + 8(2m-1)(m-1)W_{\#}^m \quad (2.4.91)$$

を得る．一方，再び縮約公式を用いると，条件  $A_{\#}^{(1)}$  より，レベル  $m$  で

$$A_{\#}^{(m)} : (l-2m)X_{\#}^m + (2m+1)Y_{\#}^m = 0, \quad (2.4.92a)$$

$$A_{\#1}^{(m)} : (l-2m+1)Y_{\#}^m + Z_{\#}^m + (2m-1)W_{\#}^m = 0. \quad (2.4.92b)$$

の2式を得る．これらの間に関係式

$$(2m+1)(B_{\#}^{(m)})' - 8(m-1)A_{\#1}^{(m)} - 8(m-1)(l-2m+1)A_{\#}^{(m)} = (2m-3)B_{\#}^{(m)} \quad (2.4.93)$$

が成り立つことが確かめられる．よって， $B_{\#}^{(m)}$  も成り立つ．以上より，条件  $B_{\#}^{(m)}$  は不要である．

- 次に, 条件  $A_{\#}^{(1)}$  と条件  $B_{\#}^{(2)}$  が線形独立であることを示す. まず, 条件  $B_{\#}^{(2)}$  の線形包に属する元は, 定数テンソル  $\gamma = (\gamma^{(j'_1 \cdots j'_{l-2}):i'})$  を用いて

$$c := c^{j'_1 \cdots j'_l} a_{\#j'_1 \cdots j'_l}; \quad (2.4.94)$$

$$c^{j'_1 \cdots j'_l} = 2(l-2)\delta^{(j'_1 j'_2 \gamma \cdots j'_{l-1})(j'_l: j'_l)} + 3 \left\{ \delta^{j'_l(j'_1 \gamma \cdots j'_{l-1}): j'_l} + \delta^{j'_{l+1}(j'_1 \gamma \cdots j'_{l-1}): j'_l} \right\} \quad (2.4.95)$$

と表される. この元が  $A_{\#}^{(1)}$  の線形包に属するとすると,

$$c^{j'_1 \cdots j'_l} = c^{(j'_1 \cdots j'_l)} = 2(l+1)\delta^{(j'_1 j'_2 \gamma \cdots j'_{l+1})} \quad (2.4.96)$$

が成り立たなければならない. この式を順に,  $(j'_l j'_{l+1})$ ,  $(j'_1, j'_2)$ ,  $(j'_1, j'_{l+1})$  について縮約し, 添え字について対称化すると, 次の3式を得る:

$$(l+2n-4)\gamma_s + (l-2)(l-3)(\delta \otimes \gamma_{(1)})_s - (l-2)^2(\delta \otimes \tilde{\gamma})_s = 0, \quad (2.4.97a)$$

$$(3l+n-2)\gamma_s + (2l-1)(\delta \otimes \gamma_{(1)})_s - (l-1)(l-2)(\delta \otimes \tilde{\gamma})_s = 0, \quad (2.4.97b)$$

$$\{l^2 + (n-5)l - 4n + 8\} \gamma_s + (l-2)^2(l-3)(\delta \otimes \gamma_{(1)})_s - (l-2)^3(\delta \otimes \tilde{\gamma})_s = 0. \quad (2.4.97c)$$

ここで,

$$\gamma_s = (\gamma^{(j'_1 \cdots j'_{l-2}: j'_{l-1})}), \quad (2.4.98a)$$

$$(\delta \otimes \gamma_{(1)})_s = (\gamma^{k'k' (j'_1 \cdots j'_{l-4}: j'_{l-3})}), \quad (2.4.98b)$$

$$(\delta \otimes \tilde{\gamma})_s = (\gamma^{j'_1 \cdots j'_{l-3} k': k'}) \quad (2.4.98c)$$

上記の式をこれらの量に関する線形方程式と見なすと, 係数行列の行列式は

$$\Delta = (n-1)l(l-2)^2(l^2 - 6l + 4). \quad (2.4.99)$$

これより,  $l = 3, 4, \dots$  に対して,  $\gamma_s = 0$ . 上記の方程式より  $l = 2$  に対しても同じ結論が成り立つ. よって,  $c = 0$ .

- 次に, 条件  $A_{\#}^{(1)}$  の線形独立な式の数数を数える. まず, 条件は

$$(p+3)a_{\#j'_1 \cdots j'_{l-p}: ni'} = \cdots, \quad (p = 2, \dots, l) \quad (2.4.100)$$

と書き換えられる. これより独立な式の数

$$n_{n+l-3} C_{l-2}. \quad (2.4.101)$$

- 条件  $B_{\sharp}^{(0)}$  の独立な式の数には明らかに,  ${}_{n+l}C_{l+1}$ . よって,  $a_{\sharp j_1 \dots j_{l-1}; i_1 i_2}$  の自由度は

$$N_{1n}^l = \frac{n(n+1)}{2} {}_{n+l-2}C_{l-1} - {}_{n+1}C_{l+1} - n {}_{n+l-3}C_{l-2}. \quad (2.4.102)$$

ix) 以上より

$$N_{ST2}^l(S^n) = \frac{n(n+1)}{2} ({}_{n+l-1}C_l + {}_{n+l-2}C_{l-1}) - (n+1) ({}_{n+l}C_{l-1} + {}_{n+l-3}C_{l-2}). \quad (2.4.103)$$

Q.E.D.

#### 2.4.4 Spin-weighted Spheroidal Harmonics

【定義 2.80 (Spin-weighted spheroidal harmonics)】 微分方程式

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) + \left\{ (a\omega \cos \theta - s)^2 - \frac{(m + s \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} - s^2 + s + {}_sA_l^m \right\} S = 0. \quad (2.4.104)$$

の正則解  ${}_sS_l^m$  をスピンウエイト  $s$  の扁球調和関数とよぶ. ただし,

$$l \geq \max(|m|, |s|). \quad (2.4.105)$$

特に,  $s = 0$  のとき, これは通常の扁球波動関数  $S_l^m(\cos \theta, -a^2 \omega^2)$  と一致する. また,  $a\omega = 0$  のとき,  ${}_sY_l^m = {}_sS_l^m(\theta) e^{m\phi}$  はスピンウエイト  $s$  の球面調和関数となり,  $A = (l-s)(l+s+1)$ . [Goldberg JN et al (1967) JMP8:2155] □

【命題 2.81 (スピンウエイトをもつ球面調和関数)】 球面上の関数に対する微分作用

$$\partial_+ = \partial_\theta + \frac{i}{\sin \theta} \partial_\phi, \quad (2.4.106a)$$

$$\partial_- = \partial_\theta - \frac{i}{\sin \theta} \partial_\phi \quad (2.4.106b)$$

を用いて, スピンウエイト  $s$  の量  $\eta$  に対する微分作用素  $\bar{\partial}$  を

$$\bar{\partial} \eta = -\sin^s \theta \partial_+ (\sin^{-s} \theta \eta), \quad (2.4.107a)$$

$$\bar{\partial} \eta = -\sin^{-s} \theta \partial_- (\sin^s \theta \eta), \quad (2.4.107b)$$

目次へ

により定義する. このとき,

$${}_{s+1}Y_l^m = \frac{1}{\sqrt{(l+s+1)(l-s)}} \bar{\partial}_s Y_l^m, \quad (0 \leq s \leq l) \quad (2.4.108a)$$

$${}_{s-1}Y_l^m = -\frac{1}{\sqrt{(l+|s|+1)(l-|s|)}} \bar{\partial}_s Y_l^m, \quad (-l \leq s \leq l) \quad (2.4.108b)$$

---

□

## 2.5 幾何学量

【公式 2.82】  $a > 0$  のとき,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin ax}{x} = \pi. \quad (2.5.1)$$

これより,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin ax}{x} = \delta(x). \quad (2.5.2)$$

□

【公式 2.83 (球面の面積)】  $n$  次元単位球面の面積  $\Omega_n$  は次式で与えられる.

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

□

## 2.6 偏微分方程式

### 2.6.1 1階PDE系

#### 2.6.1.1 Paffian系

【定理 2.84】  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m (\ni (x^\mu, y^i))$  における 1 階偏微分方程式系

$$\partial_\mu u(x, y) = U_\mu(u, x) (\neq 0) \quad (2.6.1)$$

が局所解を持つとき,  $u$  は適当な  $y$  の関数  $a(y)$  と  $(m + 1)$  変数の関数  $P(x, a)$  を用いて

$$u = P(x, a(y)) \quad (2.6.2)$$

と表される. \_\_\_\_\_ □

### 3 公式集：一般相対論

Last update: 2023 年 3 月 29 日

#### 3.1 微分形式

##### 3.1.1 基本演算

**【定義 3.1】**  $n$  次元多様体上の  $p$ -形式  $\omega$  をベクトル場上の  $p$  階反対称形式

$$\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)}) = \text{sign}(\sigma)\omega(X_1, \dots, X_p)$$

として定義し、その全体で作る線形空間を  $\mathbf{A}^p$  と表す。ベクトル場の基底  $e_1, \dots, e_n$  に対して、 $\omega \in \mathbf{A}^p$  の成分を

$$\omega_{i_1 \dots i_p} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$$

とおく。 \_\_\_\_\_ □

**【定義 3.2 (外積)】**  $p$  形式  $\alpha$  と  $q$  形式  $\beta$  の外積  $\alpha \wedge \beta \in \mathbf{A}^{p+q}$  を

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, \dots, X_{p+q}) = \sum_{\sigma} \frac{\text{sign}(\sigma)}{p!q!} \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)}) \beta(X_{\sigma(p+1)}, \dots, X_{\sigma(p+q)})$$

により定義する。たとえば、 $\alpha, \beta \in \mathbf{A}^1, \gamma \in \mathbf{A}^2$  に対して、

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(X, Y) &= \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X), \\ (\alpha \wedge \gamma)(X, Y, Z) &= \alpha(X)\gamma(Y, Z) + \alpha(Y)\gamma(Z, X) + \alpha(Z)\gamma(X, Y). \end{aligned}$$

このとき、次の性質が成り立つ：

- i)  $(f\alpha + g\beta) \wedge \gamma = f\alpha \wedge \gamma + g\beta \wedge \gamma$
- ii)  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq}\beta \wedge \alpha$  ( $\alpha \in \mathbf{A}^p, \beta \in \mathbf{A}^q$ )
- iii)  $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$

また、 $\alpha^1, \dots, \alpha^p$  を 1 形式の系とするとき、

$$(\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^p)(X_1, \dots, X_p) = \det(\alpha^i(X_j)).$$



さらに,  $e_1, \dots, e_n$  をベクトル場の基底,  $\theta^1, \dots, \theta^n$  をその双対基底 ( $\mathbf{A}^1$  の基底で  $\theta^i(e_j) = \delta_j^i$ ) とするとき,  $\omega \in \mathbf{A}^p$  に対して,

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}.$$

□

**【定義 3.3 (外微分)】** 線形作用素  $d: \mathbf{A}^p \rightarrow \mathbf{A}^{p+1}$  を次の性質により定義する:

- i) 関数  $\phi$  に対して,  $d\phi = \partial_\mu \phi dx^\mu$ .
- ii)  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$  ( $\alpha \in \mathbf{A}^p$ ).
- iii)  $d^2 = 0$ .

$d$  はこの性質により一意的に定まる. 特に,

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$$

に対して

$$d\omega = \frac{1}{p!} \partial_\nu \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}.$$

すなわち,

$$(d\omega)_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \partial_{\mu_i} \omega_{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \mu_{i+1} \dots \mu_{p+1}}.$$

たとえば,

$$\begin{aligned} (d\alpha)_{\mu\nu} &= \partial_\mu \alpha_\nu - \partial_\nu \alpha_\mu, \\ (d\beta)_{\mu\nu\lambda} &= \partial_\mu \beta_{\nu\lambda} + \partial_\nu \beta_{\lambda\mu} + \partial_\lambda \beta_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

□

**【定義 3.4 (内積作用素)】** ベクトル場  $X$  に対して, 線形作用素  $I_X: \mathbf{A}^p \rightarrow \mathbf{A}^{p-1}$  を次の性質により定義する:

- i) 関数  $f$  に対して,  $I_X f = 0$ .
- ii) 1形式  $\alpha \in \mathbf{A}^1$  に対して,  $I_X \alpha = \alpha(X)$ .

$$\text{iii) } I_X(\alpha \wedge \beta) = I_X\alpha \wedge \beta + (-1)^p\alpha \wedge I_X\beta \quad (\alpha \in \mathbf{A}^p).$$

$$\text{iv) } I_X^2 = 0.$$

$I_X$  はこれらの条件により一意的に定まる.  $\omega \in \mathbf{A}^p$  に対する  $I_X$  の具体的な作用は,

$$(I_X\omega)(Y_1, \dots, Y_{p-1}) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_{p-1}).$$

成分表示では

$$(I_X\omega)_{i_1 \dots i_{p-1}} = X^j \omega_{j i_1 \dots i_{p-1}}.$$

□

**【公式 3.5 (Lie 微分と内積作用素)】**  $X, Y$  を任意のベクトル場,  $\mathcal{L}_X$  を  $X$  にそう Lie 微分とするとき,

$$\mathcal{L}_X = dI_X + I_X d,$$

$$d\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X d,$$

$$[\mathcal{L}_X, I_Y] = I_{[X, Y]}$$

□

### 3.1.2 Hodge 双対

#### 3.1.2.1 定義

**【定義 3.6 (微分形式の内積)】**  $n$  次元 Riemann 多様体において,  $\mathbf{A}^p$  における内積を

$$\langle \omega, \chi \rangle = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \chi^{\mu_1 \dots \mu_p}$$

により定義する. 特に, 1 形式の系  $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_p$  に対して,

$$\langle \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p, \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_p \rangle = \det \langle \alpha_i, \beta_j \rangle.$$

□

**【定義 3.7】**  $n$  次元 Riemann 多様体上の微分形式に対して, 線形写像  $*$ :  $\mathbf{A}^p \rightarrow \mathbf{A}^{n-p}$  を

$$*\omega \wedge \chi = \langle \omega, \chi \rangle \Omega, \quad \forall \chi \in \mathbf{A}^p$$

により定義する．ここで， $\Omega$  は Riemann 計量に対応する体積形式  $\in \mathbf{A}^n$  である．Riemann 計量と多様体の向きが与えられると， $*$ はこの条件により一意的に定まる．成分表示では

$$(*\omega)_{i_1 \dots i_{n-p}} = \frac{1}{p!} \epsilon_{i_1 \dots i_{n-p} j_1 \dots j_p} \omega^{j_1 \dots j_p}. \quad (3.1.1)$$

また，

$$*(dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}) = \frac{1}{(n-p)!} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{n-p}} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_{n-p}}^{\mu_1 \dots \mu_p}.$$

□

### 【例 3.8】

1. 3次元 Riemann 多様体の正規直交基底を  $e_1, e_2, e_3$ ，その双対基底を  $\theta^1, \theta^2, \theta^3$  とするとき， $[e_1, e_2, e_3]$  を正の向き，すなわち  $\Omega = \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3$  とするとき，

$$\begin{aligned} *1 &= \Omega, \\ *\theta^1 &= \theta^2 \wedge \theta^3, \quad *\theta^2 = \theta^3 \wedge \theta^1, \quad *\theta^3 = \theta^1 \wedge \theta^2, \\ *(\theta^1 \wedge \theta^2) &= \theta^3, \quad *(\theta^2 \wedge \theta^3) = \theta^1, \quad *(\theta^3 \wedge \theta^1) = \theta^2, \\ *\Omega &= 1. \end{aligned}$$

2. 4次元 Riemann 多様体の正規直交基底を  $e_0, e_1, e_2, e_3$ ，その双対基底を  $\theta^0, \theta^1, \theta^2, \theta^3$  とするとき， $\Omega = \theta^0 \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3$  に対して，

$$\begin{aligned} *1 &= \Omega, \\ *\theta^0 &= -\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3, \quad *\theta^I = \frac{1}{2} \epsilon_{IJK} \theta^0 \wedge \theta^J \wedge \theta^K, \\ *(\theta^0 \wedge \theta^I) &= \frac{1}{2} \epsilon_{IJK} \theta^J \wedge \theta^K, \quad *(\theta^I \wedge \theta^J) = \epsilon_{IJK} \theta^0 \wedge \theta^K, \\ *(\theta^0 \wedge \theta^I \wedge \theta^J) &= -\epsilon_{IJK} \theta^K, \quad *(\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3) = \theta^0, \\ *\Omega &= 1. \end{aligned}$$

ただし， $I, J, K$  は 1, 2, 3 を動くものとする．

3. 4次元 Lorentz 多様体の正規直交基底を  $e_0, e_1, e_2, e_3$ , その双対基底を  $\theta^0, \theta^1, \theta^2, \theta^3$  とするとき,  $\Omega = \theta^0 \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3$  に対して,

$$\begin{aligned} *1 &= \Omega, \\ *\theta^0 &= \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3, \quad *\theta^I = \frac{1}{2}\epsilon_{IJK}\theta^0 \wedge \theta^J \wedge \theta^K, \\ *(\theta^0 \wedge \theta^I) &= -\frac{1}{2}\epsilon_{IJK}\theta^J \wedge \theta^K, \quad *(\theta^I \wedge \theta^J) = \epsilon_{IJK}\theta^0 \wedge \theta^K, \\ *(\theta^0 \wedge \theta^I \wedge \theta^J) &= \epsilon_{IJK}\theta^K, \quad *(\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3) = \theta^0, \\ *\Omega &= -1. \end{aligned}$$

ただし,  $I, J, K$  は  $1, 2, 3$  を動くものとする.

□

### 3.1.2.2 代数的性質

【公式 3.9 (基本的性質)】

1)  $X, Y$  をベクトル場,  $\omega \in \mathbf{A}^p$ ,  $(\pm)$  を  $\det(g)$  の符号として,

$$\begin{aligned} *1 &= \Omega, \quad *\Omega = (\pm)1, \\ **\omega &= (\pm)(-1)^{p(n-p)}\omega = (\pm)(-1)^{p(n+1)}\omega, \\ *\omega \wedge \chi &= *\chi \wedge \omega, \quad *\omega \wedge *\chi = (\pm)\omega \wedge \chi, \\ \langle *\omega, *\chi \rangle &= (\pm)\langle \omega, \chi \rangle \end{aligned}$$

(注)  $n$  が奇数の時には, 常に  $**\omega = (\pm)\omega$ . また,  $n$  が偶数の時には  $**\omega = (\pm)(-1)^p\omega$ .

2)

$$\begin{aligned} *I_X *\omega &= (\pm)(-1)^{pn} X_* \wedge \omega, \\ I_X *\omega &= (-1)^{p+n+1} *(X_* \wedge \omega), \\ *I_X \omega &= (-1)^{n+p} X_* \wedge *\omega, \\ I_X \omega &= (\pm)(-1)^{pn+1} *(X_* \wedge *\omega), \end{aligned}$$

$$(*I_X *I_Y + (-1)^n I_Y *I_X) \omega = (\pm)(-1)^{(p+1)n} g(X, Y) \omega.$$

一般に,  $q$  形式  $\alpha$  と  $p$  形式  $\beta$  ( $q \leq p$ ) に対して,

$$I_\alpha \beta := \frac{1}{(p-q)!} \alpha^{\nu_1 \dots \nu_q} \beta_{\nu_1 \dots \nu_q \mu_1 \dots \mu_{p-q}} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p-q}} \quad (3.1.2)$$

と定義するとき,  $q$  形式  $\alpha$  と  $p$  形式  $\omega$  に対して

$$I_\alpha * \omega = (-1)^{q(n-p+1)} * (\alpha \wedge \omega), \quad (3.1.3a)$$

$$I_\alpha \omega = \pm (-1)^{p(n+1)+q(p+1)} * (\alpha \wedge * \omega), \quad (3.1.3b)$$

$$*(I_\alpha * \omega) = \pm (-1)^{p(n-q+1)} \alpha \wedge \omega, \quad (3.1.3c)$$

$$*(I_\alpha \omega) = (-1)^{q(p+n)} \alpha \wedge * \omega. \quad (3.1.3d)$$

3)  $\alpha$  が  $p$  形式,  $\beta$  が  $q$  形式のとき,

$$I_\alpha I_\beta = I_{\beta \wedge \alpha}, \quad (3.1.4)$$

$$(\alpha \cdot \Omega) \cdot (\beta \cdot \Omega) = \pm (-1)^{(n-p)(p-q)} \beta \cdot \alpha \quad (p > q). \quad (3.1.5)$$

4) 一般に  $\alpha$  が  $p$  形式,  $\beta$  が  $q$  形式,  $k \leq p, q$  のとき,

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta]_k &:= \frac{1}{(p-k)!(q-k)!k!} \alpha_{i_1 \dots l_k i_{p-k} \dots i_{p-k}} \beta^{l_1 \dots l_k}_{j_1 \dots j_{q-k}} \theta^{i_1 \dots i_{p-k} j_1 \dots j_{q-k}} \\ &= \frac{1}{k!} \alpha_{l_1 \dots l_k} \wedge \beta^{l_1 \dots l_k}, \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

すなわち

$$[\alpha, \beta]_{i_1 \dots i_{p+q-2k}} = \frac{(p+q-2k)!}{(p-k)!(q-k)!k!} \alpha_{l_1 \dots l_k i_1 \dots i_{p-k}} \beta^{l_1 \dots l_k}_{i_{p-k+1} \dots i_{p+q-2k}} \quad (3.1.7)$$

と定義すると,

$$[\alpha_p, \beta_q]_0 = \alpha_p \wedge \beta_q, \quad (3.1.8a)$$

$$[\alpha_p, \beta_q]_q = \alpha \cdot \beta \quad (q \leq p), \quad (3.1.8b)$$

$$[V_* \wedge \alpha_p, \omega_q]_k = [\alpha_p, I_V \omega_q]_{k-1} + (-1)^k V_* \wedge [\alpha_p, \omega_q]_k, \quad (3.1.8c)$$

$$[\omega_q, V_* \wedge \alpha_p]_k = [I_V \omega_q, \alpha_p]_{k-1} + (-1)^q V_* \wedge [\omega_q, \alpha_p]_k, \quad (3.1.8d)$$

$$I_V [\alpha_p, \beta_q]_k = (-1)^k [I_V \alpha_p, \beta_q]_k + (-1)^p [\alpha_p, I_V \beta_q]_k, \quad (3.1.8e)$$

$$*[\alpha_p, \beta_q]_k = \pm (-1)^{(n+1)(p+q)+k(n-q)} [\alpha_p, \beta_q]_{q-k}, \quad (3.1.8f)$$

$$*[\alpha_p, \beta_q]_k = (-1)^{(n+1)q+k(n-q)} [* \alpha_p, \beta_q]_{q-k}, \quad (3.1.8g)$$

$$[* \alpha_p, \beta_q]_{q-k} = (-1)^{pq+kn+(n+1-k)(p+q)} [\alpha_p, * \beta_q]_{p-k}, \quad (3.1.8h)$$

$$[\alpha_p, \beta_q]_k \cdot \gamma_r = (-1)^{p(q-k)} \alpha_p \cdot [\beta_q, \gamma_r]_{q-k} \quad (r = p+q - \mathbf{2k}). \quad (3.1.8i)$$

□

**【公式 3.10 (1 + (n - 1) 分解)】**  $\mathbb{V}$  を  $n$  次元ベクトル空間,  $\mathbb{V}^*$  をその双対空間とする. いま,  $K$  を  $\mathbb{V}$  の (光的でない) ベクトルとすると,  $\mathbb{V}$  と  $\mathbb{V}^*$  はそれぞれ  $K$  および  $K_*$  に平行な 1 次元部分空間とそれに直交する部分空間に直和分解される:

$$\mathbb{V} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{V}_1, \quad \mathbb{V}^* = \mathbb{R}^* \oplus \mathbb{V}_1^*.$$

いま,  $\mathbb{V}$  の計量に関する双対を  $*$ ,  $\mathbb{V}_1$  に関するその上の形式の双対を  $*_1$  とおくと,  $I_K \alpha = 0$  となる  $\mathbb{V}$  上の  $p$  形式を  $\mathbb{V}_1$  上の  $p$  形式と同一視するとき, 次の公式が成り立つ:

$$I_K * \alpha = (-1)^{p+n+1} *(K_* \wedge \alpha) = \Delta *_1 \alpha. \quad (3.1.9)$$

ここで,  $e_0$  と  $\theta^0$  をそれぞれ互いに双対な  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^*$  の単位基底とすると,

$$\Delta = \theta^0(K). \quad (3.1.10)$$

□

**【公式 3.11 (直積空間)】**  $M = X_n \times Y_m$  で  $\alpha_p, \beta_q$  をそれぞれ  $n$  次元空間  $X_n$  上の  $p$  形式,  $m$  次元空間  $Y_m$  上の  $q$  形式とすると,

$$*(\alpha_p \wedge \beta_q) = (-1)^{p(m-q)} *_X \alpha_p \wedge *_Y \beta_q. \quad (3.1.11)$$

□

### 3.1.2.3 微分演算子との関係

**【公式 3.12】**  $\omega \in \mathbf{A}^p$ ,  $\pm$  を  $\det(g)$  の符号として,

i)  $\nabla \cdot \omega$  を

$$\nabla \cdot \omega := \frac{1}{(p-1)!} \nabla^\nu \omega_{\nu\mu_1 \dots \mu_{p-1}} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p-1}}$$

とおくとき,

$$\begin{aligned} *d*\omega &= \mp(-1)^{pn} \nabla \cdot \omega, \\ d*\omega &= (-1)^{n-p} *(\nabla \cdot \omega). \end{aligned}$$

ii)  $\delta : \mathbf{A}^p \rightarrow \mathbf{A}^{p-1}$  を

$$\delta\omega = \pm(-1)^{pn} *d*\omega$$

により定義するとき,

$$\delta\omega = -\nabla \cdot \omega.$$

また,  $M$  がコンパクト閉多様体,  $\chi \in \mathbf{A}^{p+1}$  の時,

$$\int_M \langle d\omega, \chi \rangle \Omega = \int_M \langle \omega, \delta\chi \rangle \Omega.$$

iii)

$$\begin{aligned} ((d\delta + \delta d)\omega)_{\mu_1 \dots \mu_p} &= -\nabla^\nu \nabla_\nu \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} + pR_{\alpha[\mu_1} \omega^\alpha_{\mu_2 \dots \mu_p]} \\ &\quad - \frac{p(p-1)}{2} R_{\alpha\beta[\mu_1 \mu_2} \omega^{\alpha\beta}_{\mu_3 \dots \mu_p]}. \end{aligned}$$

□

## 3.2 接続形式と曲率テンソル

### 3.2.1 基本定義

$e_a$  および  $\theta^a$  をそれぞれ, ベクトル場の基底およびその双対基底とする:

$$\theta^a(e_b) = \delta_b^a.$$

一般の線形接続  $\nabla$  に対して, 接続係数  $\omega^a_b$  を

$$\nabla_X e_a = e_b \omega^b_a(X)$$

により定義する. このとき,

$$\nabla_X \theta^a = -\omega^a_b(X) \theta^b.$$

特に,  $V = V^a e_a, W = W_a \theta^a$  に対し,

$$(\nabla_X V)^a = \partial_X V^a + \omega^a_b(X) V^b, \quad (3.2.1a)$$

$$(\nabla_X W)_a = \partial_X W_a - W_b \omega^b_a(X). \quad (3.2.1b)$$

さらに,  $g_{ab}$  を

$$g_{ab} = g(e_a, e_b)$$

により定義すると,

$$dg_{ab} = g_{bc}\omega^c_a + g_{ac}\omega^c_b \equiv \omega_{ab} + \omega_{ba}.$$

接続形式を用いると, トーション形式は

$$\Theta^a := D\theta^a = d\theta^a + \omega^a_b \wedge \theta^b$$

曲率形式は,

$$\mathcal{R}^a_b := d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b$$

と表される. また, Bianchi 恒等式は

$$D\Theta^a = \mathcal{R}^a_b \wedge \theta^b,$$

$$D\mathcal{R}^a_b = 0$$

と表される.

特に,  $g_{ab}$  が定数行列となるとき,

$$d\theta^a = \frac{1}{2}C^a_{bc}\theta^b \wedge \theta^c \quad (3.2.2)$$

とおくと, Riemann 接続 ( $\Theta^a = 0$ ) に対する接続係数  $\omega^a_b(\theta)$  は,

$$\omega^a_b(\theta) = \frac{1}{2}(-C^a_c_b + C^a_{bc} - C^a_{cb})\theta^c \quad (3.2.3)$$

$$\Leftrightarrow 2\omega_{cab}(\theta) = -(d\theta_c)_{ab} + (d\theta_a)_{bc} - (d\theta_b)_{ac}. \quad (3.2.4)$$

で与えられる. 具体的に  $\theta^a_\mu$  と  $e^\mu_a$  で表すと,

$$\omega_{\mu ab}(\theta) = -(d\theta_{[a})_{|\mu\nu|}e^\nu_{b]} - \theta^c_\mu \partial_\lambda \theta_{c\nu} e^\lambda_{[a} e^\nu_{b]}. \quad (3.2.5)$$

また, 捩れが存在する一般の場合には,

$$\Theta^a = \frac{1}{2}T_{\mu\nu}{}^a dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (3.2.6)$$

とおくと, 接続係数は

$$\omega_{\mu ab} = \omega_{\mu ab}(\theta) + K_{\mu ab}, \quad (3.2.7)$$

$$K_{\mu ab} = \frac{1}{2}(T_{ab\mu} - T_{\mu ab} + T_{\mu ba}) \quad (3.2.8)$$

と表される.



### 3.2.2 スピノールの接続

**【公式 3.13 (スピノールの接続)】** 一般に,  $G$  を構造群として持つ主ファイバー束  $P$  の  $\mathfrak{g}$  に値を取る接続形式が局所座標系で  $\omega_\alpha$ , 対応する曲率形式が  $\mathcal{R}_\alpha$  と表されとすると, 線形表現  $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$  により定まる  $P$  の随伴ベクトル束  $E = P \times_\rho V$  における接続形式および曲率形式は

$$\rho_*(\omega_\alpha), \quad \rho_*(\mathcal{R}_\alpha)$$

と表される. すなわち, ベクトルバンドルの断面場  $\phi$  に対し,

$$\nabla_X \phi = \partial_X \phi + \rho_*(\omega(X))\phi, \quad (3.2.9a)$$

$$([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]})\phi = \rho_*(\mathcal{R}(X, Y))\phi \quad (3.2.9b)$$

特に, Lorentz 群 (ないし回転群) のベクトル表現  $\rho^v$  とスピノール表現  $\rho^s$  に対して,

$$\delta\Lambda = (\delta\Lambda_{ab}) \mapsto \rho^v(\delta\Lambda) = (\delta\Lambda^a_b), \quad \rho^s(\delta\Lambda) = \frac{1}{4}\delta\Lambda_{ab}\Gamma^{ab}$$

となるので, Riemann 接続に対して,

$$\begin{aligned} \rho^v(\omega) &= \omega^a_b, \quad \rho^v(\mathcal{R}) = \mathcal{R}^a_b \\ \Rightarrow \rho^s(\omega) &= \frac{1}{4}\omega_{ab}\Gamma^{ab}, \quad \rho^s(\mathcal{R}) = \frac{1}{4}\mathcal{R}_{ab}\Gamma^{ab} \end{aligned}$$

が成り立つ. すなわち, Dirac spinor  $\psi$  に対し,

$$\nabla_X \psi = \partial_X \psi + \frac{1}{4}\omega_{ab}(X)\Gamma^{ab}\psi, \quad (3.2.10a)$$

$$([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]})\psi = \frac{1}{4}\mathcal{R}_{ab}(X, Y)\Gamma^{ab}\psi. \quad (3.2.10b)$$

□

### 3.2.3 一般公式

#### 3.2.3.1 曲率テンソルと捩れテンソル

**【定義 3.14 (Torsion と曲率)】** トーションテンソル  $T_{\nu\lambda}^\mu$  を

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = T(X, Y) \Leftrightarrow T_{\nu\lambda}^\mu = 2\Gamma_{[\nu\lambda]}^\mu \quad (3.2.11)$$

により定義する。また、曲率テンソル  $R^\mu{}_{\nu\lambda\sigma}$  を

$$([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]})Z = R(X, Y)Z \Leftrightarrow R_{\lambda\sigma}{}^\mu{}_\nu = 2\partial_{[\lambda}\Gamma_{\sigma]\nu}^\mu + 2\Gamma_{[\lambda|\rho]}^\mu\Gamma_{\sigma]\nu}^\rho \quad (3.2.12)$$

により定義する。 □

【公式 3.15 (接続形式, トーション形式, 曲率形式との関係)】

- 接続係数 一般フレーム場を  $e_a^\mu$ 、双対フレーム場を  $\theta^a_\mu$  とする :

$$\theta^a(e_b) = \delta_b^a, \quad e_a \cdot e_b = g_{ab}(x), \quad \theta^a \cdot \theta^b = g^{ab}(x) \quad (3.2.13)$$

これに対する接続形式  $\omega^a{}_b = dx^\mu \omega_\mu{}^a{}_b$  を

$$\nabla_\mu e_a = e_b \omega_\mu{}^b{}_a, \quad \nabla_\mu \theta^a = -\omega_\mu{}^a{}_b \theta^b. \quad (3.2.14)$$

により定義する。このとき、テンソルの共変微分は

$$\nabla_X(V^a e_a) = X^\mu (D_\mu V^a) e_a \quad : \quad D_\mu V^a = \partial_\mu V^a + \omega_\mu{}^a{}_b V^b \quad (3.2.15a)$$

$$\nabla_X(W_a \theta^a) = X^\mu (D_\mu W_a) \theta^a \quad : \quad D_\mu W_a = \partial_\mu W_a - W_b \omega_\mu{}^b{}_a \quad (3.2.15b)$$

と表される。また、トーションテンソル、曲率テンソルに対応するトーション形式  $\mathcal{T}^a$ 、曲率形式  $\mathcal{R}^a{}_b$  が

$$\mathcal{T}^a \equiv \frac{1}{2} T_{bc}{}^a \theta^b \wedge \theta^c = D\theta^a \equiv d\theta^a + \omega^a{}_b \wedge \theta^b, \quad (3.2.16a)$$

$$\mathcal{R}^a{}_b \equiv \frac{1}{2} R_{cd}{}^a{}_b \theta^c \wedge \theta^d = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \quad (3.2.16b)$$

と表される。これより、次の Bianchi 恒等式が得られる :

$$D\mathcal{T}^a = \mathcal{R}^a{}_b \wedge \theta^b \quad (3.2.17a)$$

$$\Leftrightarrow D_{[\lambda} T_{\mu\nu]}{}^a \equiv \partial_{[\lambda} T_{\mu\nu]}{}^a + T_{[\mu\nu}{}^b \omega_{\lambda]}{}^a{}_b = \theta_{[\lambda}^b R_{\mu\nu]}{}^a{}_b,$$

$$D\mathcal{R}^a{}_b \equiv d\mathcal{R}^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \mathcal{R}^c{}_b - \mathcal{R}^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = 0. \quad (3.2.17b)$$

- 計量接続 Contorsion  $K_{\nu\lambda}{}^\mu$  を

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \{\overset{\mu}{\nu\lambda}\} + K_{\nu\lambda}{}^\mu \Leftrightarrow \omega_\mu{}^a{}_b = \omega_\mu{}^a{}_b(e) + K_\mu{}^a{}_b \quad (3.2.18)$$

により定義する。このとき、接続が計量を保つことを要求すると

$$\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = 0 \Leftrightarrow K_{\mu(\lambda\nu)} = 0. \quad (3.2.19)$$

が成り立ち、これより、torsion と contorsion は一対一に対応

$$K_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2}(T_{\nu\lambda\mu} - T_{\mu\nu\lambda} + T_{\mu\lambda\nu}) \quad (3.2.20a)$$

$$T_{\mu\nu}{}^a = 2K_{[\mu}{}^a{}_{\nu]}. \quad (3.2.20b)$$

- 正規直交フレームバンドルの接続 正規直交フレーム場を  $e_a^\mu$ 、双対フレーム場を  $\theta_\mu^a$  とするとき、計量接続の接続係数は

$$\omega_{ab} + \omega_{ba} = -dg_{ab} = 0 \quad (3.2.21)$$

を満たす。また、スピノールの共変微分が

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \gamma^{ab} \psi \quad (3.2.22)$$

により定義される。このとき、

$$D_\mu \gamma^a = 0, \quad D_\mu \gamma_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \gamma_\lambda \quad (3.2.23)$$

が成り立つ。

- Levi-Civita 接続  $\omega^a{}_b(e) = \omega_\mu{}^a{}_b(e) dx^\mu$  は、条件

$$\omega_{ab}(e) + \omega_{ba}(e) = -dg_{ab} = 0, \quad (3.2.24a)$$

$$d\theta^a + \omega^a{}_b(e) \wedge \theta^b = 0 \quad (3.2.24b)$$

により一意的に定まる。

□

【公式 3.16 (曲率テンソルの成分表示)】 線型接続

$$\begin{aligned} \nabla_\mu V^\nu &= \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu V^\alpha, \\ \Gamma_\mu &\equiv \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha, \quad \tilde{\Gamma}_\mu \equiv \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha \end{aligned}$$

に対して、

$$\text{Riemann 曲率} : R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\beta}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha + \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\gamma - \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\gamma,$$

$$\begin{aligned} \text{Ricci 曲率} : R_{\mu\nu} &= R_{\mu\alpha\nu}^\alpha \\ &= \partial_\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\gamma - \Gamma_{\nu\gamma}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\gamma, \end{aligned}$$

$$\text{スカラー曲率} : R_s = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

特に,  $\Gamma$  が計量接続の時,

$$R_s = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu [\sqrt{-g}(g^{\mu\alpha}\Gamma_\alpha - g^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^\mu)] \\ + g^{\mu\nu} [\Gamma_{\beta\mu}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta + 2\Gamma_{[\beta\mu]}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \tilde{\Gamma}_\alpha + \Gamma_\mu(\tilde{\Gamma}_\nu - \Gamma_\nu)].$$

□

【公式 3.17 (Bianchi 恒等式)】 Riemann 接続に対して, Bianchi 恒等式

$$\nabla_{[\alpha} R_{\beta\gamma]\mu\nu} = 0$$

より

$$\nabla_\alpha R^\alpha{}_{\mu\nu\lambda} = 2\nabla_{[\nu} R_{\lambda]\mu}, \\ \nabla_\nu R_\mu^\nu = \frac{1}{2}\nabla_\mu R.$$

□

### 3.2.3.2 微分交換子

【公式 3.18 (共変微分と Laplacian の交換子)】

$$[\nabla_\mu, \Delta]f = -R_\mu^\nu \nabla_\nu f, \\ [\nabla_\mu, \Delta]V_\nu = 2R_\mu{}^\alpha{}_\nu{}^\beta \nabla_\alpha V_\beta - R_\mu^\alpha \nabla_\alpha V_\nu + (\nabla^\alpha R_{\mu\nu} - \nabla_\nu R_\mu^\alpha) V_\alpha, \\ [\nabla_\mu, \Delta]T_{\nu\lambda} = 2R_\mu{}^\alpha{}_\nu{}^\beta \nabla_\alpha T_{\beta\lambda} + 2R_\mu{}^\alpha{}_\lambda{}^\beta \nabla_\alpha T_{\nu\beta} - R_\mu^\alpha \nabla_\alpha T_{\nu\lambda} \\ + (\nabla^\alpha R_{\lambda\mu} - \nabla_\lambda R_\mu^\alpha) T_{\nu\alpha} + (\nabla^\alpha R_{\nu\mu} - \nabla_\nu R_\mu^\alpha) T_{\alpha\lambda}.$$

これより,

$$[\nabla_\alpha, \Delta]V^\alpha = R^{\alpha\beta} \nabla_\alpha V_\beta + \frac{1}{2}\nabla_\alpha R V^\alpha, \\ [\nabla^\alpha, \Delta]T_{\mu\alpha} = 2R_\mu{}^\beta{}_\gamma{}^\alpha \nabla_\alpha T_{\beta\gamma} + R^{\alpha\beta} \nabla_\alpha T_{\mu\beta} + \frac{1}{2}\nabla^\alpha R T_{\mu\alpha} + (\nabla^\alpha R_\mu^\beta - \nabla_\mu R^{\alpha\beta}) T_{\alpha\beta}.$$

□

### 3.2.3.3 双対公式

【定義 3.19】 4次元（擬）Riemann 多様体の曲率テンソル  $R_{abcd}$  の2種類の双対を

$$(*R)_{abcd} = \frac{1}{2}\epsilon_{cdpq}R_{ab}{}^{pq}, \quad (3.2.25a)$$

$$(\star R)_{abcd} = \frac{1}{2}\epsilon_{abpq}R^{pq}{}_{cd} \quad (3.2.25b)$$

により定義する。このとき、

$$(*R)_{abcd} = (\star R)_{cdab} \quad (3.2.26)$$

となる。 \_\_\_\_\_ □

【公式 3.20】 4次元（擬）Riemann 多様体の曲率テンソルの双対に対して次の式が成り立つ。

$$(**R)^{ab}{}_{cd} = -R^{ab}{}_{cd} + 4\delta_{[c}^{[a}R_{d]}^b - R\delta_{[c}^{[a}\delta_{d]}^b, \quad (3.2.27a)$$

$$(\star R)_{abcd} = (*R)_{abcd} + 2\epsilon_{ab[c}{}^p R_{d]p} - \frac{1}{2}R\epsilon_{abcd}, \quad (3.2.27b)$$

$$(*R)_{abcp}R^{abdq} = \frac{1}{4}\delta_p^q(*R)_{abcd}R^{abcd}. \quad (3.2.27c)$$

\_\_\_\_\_ □

### 3.2.4 Weyl tensor

【定義 3.21】 次元  $n$  の Riemann 多様体に対して、

$$R^{ab}{}_{cd} = C^{ab}{}_{cd} + \frac{4}{n-2}\delta_{[c}^{[a}R_{d]}^b - \frac{2R}{(n-1)(n-2)}\delta_{[c}^{[a}\delta_{d]}^b, \quad (3.2.28)$$

$$\mathcal{R}^{ab} = \mathcal{C}^{ab} + \frac{2}{n-2}S^{[a} \wedge \theta^{b]} + \frac{1}{n(n-1)}R\theta^a \wedge \theta^b; \quad (3.2.29)$$

$$S^a = S_b^a\theta^b; \quad S_b^a := R_b^a - \frac{1}{n}R\delta_b^a. \quad (3.2.30)$$

\_\_\_\_\_ □

【定義 3.22】 一般に,  $n$  次元 (擬) Riemann 多様体上の正規直交基底  $\theta^a$  に関して  $p$  個の反対称な内部添え字をもつ量  $X^{a_1 \cdots a_p}$  に対して,

$$(\star X)^{a_1 \cdots a_{n-p}} = \frac{1}{p!} \epsilon^{a_1 \cdots a_{n-p} b_1 \cdots b_p} X^{b_1 \cdots b_p} \quad (3.2.31)$$

と定義する. さらに,

$$\mathcal{S}^{ab} := S^{[a} \wedge \theta^{b]}; \quad S^a = R_b^a \theta^b - \frac{1}{n} R \theta^a, \quad (3.2.32a)$$

$$\Sigma^{ab} := \theta^a \wedge \theta^b \quad (3.2.32b)$$

とおく. \_\_\_\_\_ □

【公式 3.23 (4次元の場合)】 曲率形式の分解

$$\mathcal{R}_{ab} = \mathcal{C}_{ab} + \mathcal{S}_{ab} + \frac{R}{12} \Sigma_{ab} \quad (3.2.33)$$

に対して,

$$\star \mathcal{C}_{ab} = \star \mathcal{C}_{ab}, \quad \star \mathcal{S}_{ab} = -\star \mathcal{S}_{ab}, \quad \star \Sigma_{ab} = \star \Sigma_{ab}. \quad (3.2.34)$$

\_\_\_\_\_ □

【公式 3.24】  $a = (0, I)$  のとき,

$$C^{0I}{}_{0J} = R^{0I}{}_{0J} - \frac{1}{n-2} (R_J^I + \delta_J^I R_0^0) + \frac{R}{(n-1)(n-2)} \delta_J^I \quad (3.2.35)$$

$$C^{0I}{}_{JK} = R^{0I}{}_{JK} - \frac{1}{n-2} (\delta_K^I R_J^0 - \delta_J^I R_K^0). \quad (3.2.36)$$

\_\_\_\_\_ □

【公式 3.25 (2次式)】  $A, B \in A^2(\mathbb{R}^n) \otimes A^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $S, T \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$  に対して,

$$(A \circ B)_{abcd} = A_{abpq} B^{pq}{}_{cd},$$

$$(S \wedge T)_{abcd} = S_{ac} T_{bd} - S_{ad} T_{bc}$$

とおくと,

$$(\delta \wedge \delta) \circ (\delta \wedge \delta) = 2\delta \wedge \delta. \quad (3.2.37)$$

また,  $\mathcal{R} = (R_{abcd}), C = (C_{abcd}), r = (R_{ab}), s$  をスカラー曲率として,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \circ \mathcal{R} &= C \circ C - \frac{4s}{(n-1)(n-2)} C + \frac{2}{n-2} \{C \circ (\delta \wedge r) + (\delta \wedge r) \circ C\} \\ &+ \frac{2}{(n-2)^2} (\delta \wedge r^2 + r^2 \wedge \delta + 2r \wedge r) - \frac{4s}{(n-1)(n-2)^2} (\delta \wedge r + r \wedge \delta) \\ &+ \frac{2s^2}{(n-1)^2(n-2)^2} \delta \wedge \delta. \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

これより,

$$\begin{aligned} R_{pqr}^a R^{bpqr} &= C_{pqr}^a C^{bpqr} + \frac{4}{n-2} C^{apbq} R_{pq} \\ &+ \frac{2}{(n-2)^2} \{(n-4)R_p^a R_b^p + g_{ab} R_q^p R_p^q\} \\ &+ \frac{4R}{(n-1)(n-2)^2} R_{ab} - \frac{2R^2}{(n-1)(n-2)^2} g_{ab} \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

$$R_{pqrs} R^{pqrs} = C_{pqrs} C^{pqrs} + \frac{4}{n-2} R_q^p R_p^q - \frac{2R^2}{(n-1)(n-2)}. \quad (3.2.40)$$

□

### 3.2.4.1 Weyl 変換

【公式 3.26 (接続形式の変換)】 Weyl 変換

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \hat{g}_{\mu\nu} = e^{2\Phi} g_{\mu\nu} \quad (3.2.41)$$

に対して, 正規直交フレーム場は

$$\hat{\theta}^a = e^\Phi \theta^a \quad (3.2.42)$$

と変換するので, 対応する接続形式の間には

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{ab} - \omega_{ab} &= \nabla_b \Phi \theta_a - \nabla_a \Phi \theta_b \\ &= \hat{\nabla}_b \Phi \hat{\theta}_a - \hat{\nabla}_a \Phi \hat{\theta}_b \end{aligned} \quad (3.2.43)$$

の関係がある.

□

【公式 3.27 (曲率テンソルの変換)] Weyl 変換

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \hat{g}_{\mu\nu} = e^{2\Phi} g_{\mu\nu} \quad (3.2.44)$$

に対して, Christoffel シンボルおよび曲率テンソルは次のように変換する:

$$\hat{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\mu} = \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} + \nabla_{\nu}\Phi\delta_{\lambda}^{\mu} + \nabla_{\lambda}\Phi\delta_{\nu}^{\mu} - \nabla^{\mu}\Phi g_{\nu\lambda}, \quad (3.2.45)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}^{\mu}{}_{\nu\lambda\sigma} = & R^{\mu}{}_{\nu\lambda\sigma} + 2\delta_{[\sigma}^{\mu}\nabla_{\lambda]}\nabla_{\nu}\Phi - 2g_{\nu[\sigma}\nabla_{\lambda]}\nabla^{\mu}\Phi \\ & - 2\nabla_{\nu}\Phi\nabla_{[\lambda}\Phi\delta_{\sigma]}^{\mu} + 2\nabla^{\mu}\Phi\nabla_{[\lambda}\Phi g_{\sigma]\nu} - 2(\nabla\Phi)^2\delta_{[\lambda}^{\mu}g_{\sigma]\nu}, \end{aligned} \quad (3.2.46)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\mu\nu} = & R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\nabla^2\Phi - (n-2)\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\Phi \\ & + (n-2)\nabla_{\mu}\Phi\nabla_{\nu}\Phi - (n-2)(\nabla\Phi)^2g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

$$e^{2\Phi}\hat{R} = R - 2(n-1)\nabla^2\Phi - (n-1)(n-2)(\nabla\Phi)^2. \quad (3.2.48)$$

□

### 3.2.4.2 Chiral 分解

【定義 3.28 (カイラル成分)] 一般に, 4次元時空上の2形式が作る複素線形空間  $\mathcal{A}^2$  は, Hodge 双対に関して2つの固有空間に直和分解される:

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}_+^2 + \mathcal{A}_-^2: \quad (3.2.49)$$

$$*F = \pm iF, \quad F \in \mathcal{A}_{\pm}^2. \quad (3.2.50)$$

自己双対2形式の空間  $\mathcal{A}_+^2$  の複素基底として,

$$U \cdot U = V \cdot V = U \cdot W = V \cdot W = 0, \quad U \cdot V = 2, \quad W \cdot W = -4. \quad (3.2.51)$$

を満たすもの  $\{U, V, W\}$  が存在する. このとき,  $\{\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}\}$  が反自己双対2形式空間  $\mathcal{A}_-^2$  の基底を与える.

同様に, Weyl テンソル  $C_{abcd}$  に対して, 次の様なカイラル分解を定義できる.

$$C_{abcd}^{\pm} = \frac{1}{2}(C_{abcd} \mp i *C_{abcd}); \quad *C_{abcd} = \frac{1}{2}\epsilon_{cdpq}C_{ab}{}^{pq}, \quad (3.2.52a)$$

$$*C_{abcd}^{\pm} = \pm iC_{abcd}^{\pm}, \quad (3.2.52b)$$

$$\pm C_{abcd} = \frac{1}{2}(C_{abcd} \mp i \star C_{abcd}); \quad \star C_{abcd} = \frac{1}{2}\epsilon_{abpq}C^{pq}{}_{cd} \quad (3.2.52c)$$

$$\star^{\pm}C_{abcd} = \pm i^{\pm}C_{abcd}. \quad (3.2.52d)$$



ただし, Weyl テンソルに対しては

$$\star C_{abcd} = \star C_{abcd} \quad (3.2.53)$$

が成り立つ. \_\_\_\_\_ □

【公式 3.29 (自己双対 2 形式の Lorentz 変換)] 2 形式  $F_{ab}$  に対して, その (反) 自己双対成分は

$$F^{(\pm)} \equiv \frac{1}{2}(F \mp i \star F) : \quad F_{ab}^{(\pm)} = \frac{1}{2} \left( F_{ab} \mp \frac{i}{2} \epsilon_{abcd} F^{cd} \right) \quad (3.2.54a)$$

$$F_{IJ}^{(\pm)} = \pm i \epsilon_{IJK} F_{0K}^{(\pm)} \quad (3.2.54b)$$

で与えられる. 対応する 3 次元ベクトル  $F_{0I}^{(\pm)}$  は, Lorentz 変換  $\Lambda = (\Lambda^a_b)$  に対して,

$$F_{0I}^{(\pm)'} = \Lambda^{(\pm)}_I{}^J F_{0J}^{(\pm)}, \quad (3.2.55a)$$

$$\Lambda^{(\pm)}_I{}^J \equiv \Lambda_0^0 \Lambda_I^J - \Lambda_I^0 \Lambda_0^J \pm i \epsilon_{IKL} \Lambda^K_0 \Lambda^L_J \quad (3.2.55b)$$

と変換する.  $\Lambda^{(\pm)} = (\Lambda^{(\pm)}_I{}^J) \in \text{SO}(3, \mathbb{C})$  である. \_\_\_\_\_ □

【証明】

【定義 3.30 (自己双対基底)] 正規直交基底  $e_a$  より null 基底  $(k, l, m)$  と体積形式 (向きを規定) を

$$l \cdot l = k \cdot k = m \cdot m = 0, \quad l \cdot k = -1, \quad m \cdot \bar{m} = 1, \quad (3.2.56)$$

$$\Omega = ik_* \wedge l_* \wedge m_* \wedge \bar{m}_* \quad (3.2.57)$$

により定義する. このとき,  $x \wedge y := x \otimes y - y \otimes x$  に対して,

$$\star(k \wedge l) = -im \wedge \bar{m}, \quad \star(m \wedge \bar{m}) = -ik \wedge l, \quad (3.2.58a)$$

$$\star(k \wedge m) = ik \wedge m, \quad \star(l \wedge \bar{m}) = il \wedge m \quad (3.2.58b)$$

より,

$$V := k \wedge m, \quad U := -l \wedge \bar{m}, \quad W := -k \wedge l + m \wedge \bar{m} \quad (3.2.59)$$

は自己双対 2 階反対称テンソルの複素基底となる.

$$\star V = iV, \quad \star U = iU, \quad \star W = iW. \quad (3.2.60)$$

例えば, 正規直交基底  $e_0, e_1, e_2, e_3$  に対して, null 基底を

$$k = \frac{e_0 + e_1}{\sqrt{2}}, \quad l = \frac{e_0 - e_1}{\sqrt{2}}, \quad m = \frac{e_2 + ie_3}{\sqrt{2}}, \quad (3.2.61a)$$

$$k_* = -\frac{\theta^0 - \theta^1}{\sqrt{2}}, \quad l_* = -\frac{\theta^0 + \theta^1}{\sqrt{2}}, \quad (3.2.61b)$$

$$(3.2.61c)$$

と取ると,

$$\Omega = ik_* \wedge l_* \wedge m_* \wedge \bar{m}_* = \theta^0 \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3. \quad (3.2.62)$$

□

【定義 3.31 (NP 表示)】  $+C$  はカイラル基底を用いて

$$\begin{aligned} +C = & \Psi_0 U \otimes U + \Psi_1 (U \otimes W + W \otimes U) \\ & + \Psi_2 (V \otimes U + U \otimes V + W \otimes W) \\ & + \Psi_3 (V \otimes W + W \otimes V) + \Psi_4 V \otimes V \end{aligned} \quad (3.2.63)$$

と展開される. ここで,  $\Psi_0 \sim \Psi_4$  は

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= C(k, m, k, m), \quad \Psi_1 = C(k, l, k, m), \\ \Psi_2 &= C(k, m, \bar{m}, l) = \frac{1}{2}(C(k, l, k, l) - C(k, l, m, \bar{m})), \\ \Psi_3 &= C(l, k, l, \bar{m}), \quad \Psi_4 = C(l, \bar{m}, l, \bar{m}). \end{aligned} \quad (3.2.64)$$

□

【公式 3.32 (2次公式)】 一般に  $A_{abcd}, B_{abcd} \in A^2 \otimes A^2$  に対して,

$$(A \circ B)_{abcd} := A_{abpq} B_{cd}{}^{pq}$$

とおくと,  $C = (C_{abcd})$  として,

1.  $*C \circ *C = -C \circ C$ .
2.  $+C \circ +C = \frac{1}{2}C \circ C - \frac{i}{2}C \circ *C$ .

## 3. カイラル基底を用いると

$$\begin{aligned}
{}^+C_{\circ}{}^+C &= 4(\Psi_0\Psi_2 - \Psi_1^2)U \otimes U \\
&+ 2(\Psi_0\Psi_3 - \Psi_1\Psi_2)(U \otimes W + W \otimes U) \\
&+ 2(\Psi_0\Psi_4 - 2\Psi_1\Psi_3 + \Psi_2^2)(U \otimes V + V \otimes U) \\
&+ 4(\Psi_1\Psi_3 - \Psi_2^2)W \otimes W \\
&+ 2(\Psi_1\Psi_4 - \Psi_2\Psi_3)(V \otimes W + W \otimes V) \\
&+ 4(\Psi_2\Psi_4 - \Psi_3^2)V \otimes V. \tag{3.2.65}
\end{aligned}$$

## 4.

$${}^+C_{apqr}{}^+C_b{}^{pqr} = (2\Psi_0\Psi_4 - 8\Psi_1\Psi_3 + 6\Psi_2^2)g_{ab}.$$

□

【公式 3.33 (曲率形式による表現)]  ${}^+\mathcal{C}_{0I}, {}^+\Sigma^{0I}$  を

$${}^+\mathcal{C}_{0I} = \mathcal{C}_{0I} - \frac{i}{2}\epsilon_{IJK}\mathcal{C}_{JK} = {}^+C_{0Iab}\theta^a \wedge \theta^b, \tag{3.2.66}$$

$${}^+\Sigma^{0I} = \theta^0 \wedge \theta^I + \frac{i}{2}\epsilon_{IJK}\theta^J \wedge \theta^K \tag{3.2.67}$$

とおくと,

$${}^+\mathcal{C}_{01} = 2\Psi_2{}^+\Sigma^{01} + (\Psi_3 - \Psi_1){}^+\Sigma^{02} + i(\Psi_3 + \Psi_1){}^+\Sigma^{03}, \tag{3.2.68a}$$

$${}^+\mathcal{C}_{02} = (\Psi_3 - \Psi_1){}^+\Sigma^{01} + \frac{1}{2}(\Psi_0 + \Psi_4 - 2\Psi_2){}^+\Sigma^{02} - \frac{i}{2}(\Psi_0 - \Psi_4){}^+\Sigma^{03}, \tag{3.2.68b}$$

$${}^+\mathcal{C}_{03} = -i(\Psi_3 + \Psi_1){}^+\Sigma^{01} - \frac{i}{2}(\Psi_0 - \Psi_4){}^+\Sigma^{02} - \frac{1}{2}(\Psi_0 + \Psi_4 + 2\Psi_2){}^+\Sigma^{03} \tag{3.2.68c}$$

□

## 3.2.4.3 Petrov タイプ

【定義 3.34 (Petrov タイプ)] 複素行列  $Q_{IJ} = -{}^+C_{0I0J}$  の固有空間の構造に応じて, Weyl テンソルの Petrov タイプが次のように定義される:

Petrov type	固有空間	$\Psi_a$ の標準形	
I	[1 1 1]	$\Psi_0 = \Psi_4 = (\lambda_2 - \lambda_1)/2$ $\Psi_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ $\Psi_1 = \Psi_3 = 0$	
D	[(1 1) 1]	$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$ $\Psi_2 = \lambda_2$	
II	[2 1]	$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = 0$ $\Psi_2 = \lambda_1, \Psi_4 = -2$	————□
N	[(2 1)]	$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0$ $\Psi_4 = -2$	
III	[3]	$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_4 = 0$ $\Psi_3 = -i$	
O	—	$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$	

### 3.2.4.4 Principal null direction

定義 条件

$$k_{[e}C_{abc[d}k_{f]}k^bk^c = 0 \Leftrightarrow \Psi_0 = C(k, m, k, m) = 0 \quad (3.2.69)$$

を満たす光的ベクトル  $k$  を principal null direction という。

一般に、任意の光的基底  $(k, l, m, \bar{m})$  から作られる光的ベクトル  $k'$  は

$$k' = k + E\bar{m} + \bar{E}m + E\bar{E}l \quad (3.2.70)$$

と表されるが、これが principal null となる条件は

$$\Psi'_0 = \Psi_0 - 4E\Psi_1 + 6E^2\Psi_2 - 4E^3\Psi_3 + E^4\Psi_4 = 0. \quad (3.2.71)$$

よって、一般に PND は 4 個ある。

**Petrov タイプとの対応** 多重度が 2 以上の PND が存在するとき、時空は代数的に特殊であるという。PND の多重度と Petrov 型との対応は以下の通り。

Petrov 型	I	D	II	III	N
PND 多重度	(1, 1, 1, 1)	(2, 2)	(2, 1, 1)	(3, 1)	(4)

目次へ

特に, Petrov 型 D の時空では 2 つの PND,  $k, \ell$  が存在し, 次の式を満たす.

$$C_{abc[dk_f]k^b k^c} = 0, \quad C_{abc[d\ell_f]\ell^b \ell^c} = 0, \quad (3.2.72)$$

### 3.2.5 Bach tensor

【定義 3.35 (Bach tensor(3D))】 3次元 Riemann 多様体において, Bach テンソルを

$$R_{ijk} = \nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} + \frac{1}{4} (g_{ik} \nabla_j R - g_{ij} \nabla_k R) \quad (3.2.73)$$

により定義する. □

【定理 3.36】 3次元 Riemann 計量が共形的に平坦となるための必要十分条件は, Bach テンソルがゼロとなることである. (Eisenhart 1949[Eis49])

□

### 3.2.6 Newman-Penrose 形式

#### 3.2.6.1 接続係数

【定義 3.37 (Null 基底)】 4次元時空の null tetrad を次のようにとる :

$$g = -k \otimes l - l \otimes k + m \otimes \bar{m} + \bar{m} \otimes m, \quad (3.2.74)$$

$$k \cdot l = -1, \quad m \cdot \bar{m} = 1. \quad (3.2.75)$$

このとき, 体積形式は

$$\Omega = ik \wedge l \wedge m \wedge \bar{m}. \quad (3.2.76)$$

これより

$$*1 = \Omega, \quad (3.2.77)$$

$$*k = -ik \wedge m \wedge \bar{m}, \quad *l = il \wedge m \wedge \bar{m}, \quad *m = -ik \wedge l \wedge m, \quad (3.2.78)$$

$$\begin{aligned} *(k \wedge l) &= -im \wedge \bar{m}, & *(m \wedge \bar{m}) &= -ik \wedge l, \\ *(k \wedge m) &= ik \wedge m, & *(l \wedge m) &= -il \wedge m, \end{aligned} \quad (3.2.79)$$

$$\begin{aligned} *(k \wedge l \wedge m) &= im, & *(k \wedge m \wedge \bar{m}) &= ik, \\ *(l \wedge m \wedge \bar{m}) &= -il, \end{aligned} \quad (3.2.80)$$

$$*(k \wedge l \wedge m \wedge \bar{m}) = i. \quad (3.2.81)$$

□

【定義 3.38 (スピン接続係数)】 Null 基底に対し, スピン接続係数を次のように定義する :

$$\alpha = \frac{1}{2}(-l \cdot \nabla_{\bar{m}} k + \bar{m} \cdot \nabla_{\bar{m}} m), \quad (3.2.82a)$$

$$\beta = \frac{1}{2}(-l \cdot \nabla_m k + \bar{m} \cdot \nabla_m m), \quad (3.2.82b)$$

$$\rho = -m \cdot \nabla_{\bar{m}} k = k \cdot \nabla_{\bar{m}} m, \quad (3.2.82c)$$

$$\sigma = -m \cdot \nabla_m k = k \cdot \nabla_m m, \quad (3.2.82d)$$

$$\lambda = \bar{m} \cdot \nabla_{\bar{m}} l = -l \cdot \nabla_{\bar{m}} \bar{m}, \quad (3.2.82e)$$

$$\mu = \bar{m} \cdot \nabla_m l = -l \cdot \nabla_m \bar{m}, \quad (3.2.82f)$$

$$\kappa = -m \cdot \nabla_k k = k \cdot \nabla_k m, \quad (3.2.82g)$$

$$\pi = \bar{m} \cdot \nabla_k l = -l \cdot \nabla_k \bar{m}, \quad (3.2.82h)$$

$$\epsilon = \frac{1}{2}(-l \cdot \nabla_k k + \bar{m} \cdot \nabla_k m), \quad (3.2.82i)$$

$$\nu = \bar{m} \cdot \nabla_l l = -l \cdot \nabla_l \bar{m}, \quad (3.2.82j)$$

$$\tau = -m \cdot \nabla_l k = k \cdot \nabla_l m, \quad (3.2.82k)$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(-l \cdot \nabla_l k + \bar{m} \cdot \nabla_l m) \quad (3.2.82l)$$

□

【公式 3.39 (接続係数)】 Null tetrad の共変微分は,  $(\nabla V)(X, Y) = g(\nabla_X V, Y)$  と置くとき,

$$\begin{aligned} \nabla k &= -(\gamma + \bar{\gamma})k \otimes k - (\epsilon + \bar{\epsilon})l \otimes k \\ &\quad + (\alpha + \bar{\beta})m \otimes k + (\bar{\alpha} + \beta)\bar{m} \otimes k + \tau k \otimes \bar{m} + \bar{\tau} k \otimes m \\ &\quad + \kappa l \otimes \bar{m} + \bar{\kappa} l \otimes m \\ &\quad - \rho m \otimes \bar{m} - \bar{\rho} \bar{m} \otimes m - \sigma \bar{m} \otimes \bar{m} - \bar{\sigma} m \otimes m, \end{aligned} \quad (3.2.83a)$$

$$\begin{aligned} \nabla l &= (\epsilon + \bar{\epsilon})l \otimes l + (\gamma + \bar{\gamma})k \otimes l \\ &\quad - (\alpha + \bar{\beta})m \otimes l - (\bar{\alpha} + \beta)\bar{m} \otimes l - \pi l \otimes m - \bar{\pi} l \otimes \bar{m} \\ &\quad - \nu k \otimes m - \bar{\nu} k \otimes \bar{m} \\ &\quad + \bar{\mu} m \otimes \bar{m} + \mu \bar{m} \otimes m + \bar{\lambda} \bar{m} \otimes \bar{m} + \lambda m \otimes m, \end{aligned} \quad (3.2.83b)$$

$$\begin{aligned} \nabla m &= -\bar{\nu} k \otimes k + \tau k \otimes l - \bar{\pi} l \otimes k + \kappa l \otimes l \\ &\quad + \bar{\mu} m \otimes k + \bar{\lambda} \bar{m} \otimes k - (\gamma - \bar{\gamma})k \otimes m \\ &\quad - \rho m \otimes l - \bar{\sigma} \bar{m} \otimes l - (\epsilon - \bar{\epsilon})l \otimes m \\ &\quad + (\alpha - \bar{\beta})m \otimes m - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{m} \otimes m. \end{aligned} \quad (3.2.83c)$$

これより特に

$$\nabla \cdot k = \epsilon + \bar{\epsilon} - \rho - \bar{\rho}, \quad (3.2.84a)$$

$$\nabla \cdot l = \mu + \bar{\mu} - \gamma - \bar{\gamma}, \quad (3.2.84b)$$

$$\nabla \cdot m = \bar{\pi} - \tau + \beta - \bar{\alpha}. \quad (3.2.84c)$$

□

【公式 3.40 (外微分)]  $(a \wedge b)(X, Y) = g(a, X)g(b, Y) - g(b, X)g(a, Y)$   
とおくとき,

$$\begin{aligned} dk_* &= -(\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau})k \wedge m - (\bar{\alpha} + \beta - \tau)k \wedge \bar{m} \\ &\quad + \kappa l \wedge \bar{m} + \bar{\kappa} l \wedge m \\ &\quad - (\epsilon + \bar{\epsilon})l \wedge k - (\rho - \bar{\rho})m \wedge \bar{m}, \end{aligned} \quad (3.2.85a)$$

$$\begin{aligned} dl_* &= (\alpha + \bar{\beta} - \pi)l \wedge m + (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})l \wedge \bar{m} \\ &\quad - \nu k \wedge m - \bar{\nu} k \wedge \bar{m} \\ &\quad + (\gamma + \bar{\gamma})k \wedge l - (\mu - \bar{\mu})m \wedge \bar{m}, \end{aligned} \quad (3.2.85b)$$

$$\begin{aligned} dm_* &= -(\gamma - \bar{\gamma} + \bar{\mu})k \wedge m - \bar{\lambda}k \wedge \bar{m} \\ &\quad - (\epsilon - \bar{\epsilon} - \rho)l \wedge m + \sigma l \wedge \bar{m} \\ &\quad + (\bar{\pi} - \tau)k \wedge l + (\bar{\alpha} - \beta)m \wedge \bar{m} \end{aligned} \quad (3.2.85c)$$

同様に,

$$\begin{aligned} d(k_* \wedge l_*) &= (\pi - \bar{\tau})(+i * m) + (\bar{\pi} - \tau)(-i * \bar{m}) \\ &\quad + (\mu - \bar{\mu})(+i * k) - (\rho - \bar{\rho})(-i * l), \\ d(m_* \wedge \bar{m}_*) &= -(\pi - \bar{\tau})(+i * m) + (\bar{\pi} - \tau)(-i * \bar{m}) \\ &\quad - (\mu + \bar{\mu})(+i * k) + (\rho + \bar{\rho})(-i * l), \end{aligned} \quad (3.2.86a)$$

$$\begin{aligned} d(k_* \wedge m_*) &= (2\epsilon - \rho)(+i * m) - \sigma(-i * \bar{m}) \\ &\quad + (2\beta - \tau)(+i * k) - \kappa(-i * l), \end{aligned} \quad (3.2.86b)$$

$$\begin{aligned} d(l_* \wedge m_*) &= (2\bar{\gamma} - \bar{\mu})(+i * m) - \bar{\lambda}(-i * \bar{m}) \\ &\quad + \bar{\nu}(+i * k) - (2\bar{\alpha} - \bar{\pi})(-i * l). \end{aligned} \quad (3.2.86c)$$

□



### 3.2.7 $(n+1)$ 分解

時空  $(\mathcal{M}, \tilde{g})$  の Riemann 接続を  $\tilde{\nabla}$ ,  $\mathcal{M}$  内の超曲面を  $\Sigma$ ,  $\tilde{g}$  より  $\Sigma$  に誘導された Riemann 計量を  $g$ , 対応する Riemann 接続を  $\nabla$ ,  $n$  を  $\Sigma$  の単位法ベクトル場,  $\tilde{g}(n, n) = \pm 1$  とする.

#### 3.2.7.1 接続の分解

**Gauss** の公式:  $\Sigma$  に接するベクトル場  $X, Y$  に対して,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - K(X, Y)n; \quad \nabla_X Y \parallel \Sigma, \quad (3.2.87)$$

$$K(X, Y) = K(Y, X). \quad (3.2.88)$$

**Weingarten** の公式:  $X$  を  $\Sigma$  に平行なベクトル場として,

$$\tilde{\nabla}_X n = \pm K(X) \parallel \Sigma, \quad (3.2.89)$$

$$g(K(X), Y) = K(X, Y). \quad (3.2.90)$$

**計量による表現:**  $(n+1)$  次元時空の計量は一般に,

$$ds^2 = \pm N^2 dt^2 + g_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt) \quad (3.2.91)$$

と表される. この表示のもとで,  $t = \text{一定面 } \Sigma_t$  の単位法ベクトル  $n$  は

$$n = \frac{1}{N}(\partial_t - \beta^i \partial_i) \quad (3.2.92)$$

となる.  $m = Nn$  とおくと,

$$K(X, Y) = \pm \frac{1}{2N}(\mathcal{L}_m g)(X, Y), \quad (3.2.93)$$

$$K_{ij} = \pm \frac{1}{2N}(\partial_t g_{ij} - \nabla_i \beta_j - \nabla_j \beta_i). \quad (3.2.94)$$

#### 3.2.7.2 曲率の分解

**Gauss-Codazzi** 方程式:  $\Sigma$  の接ベクトル場  $X, Y, Z$  に対して,

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z \pm (K(X, Z)K(Y) - K(Y, Z)K(X)) \\ &\quad + [-(\nabla_X K)(Y, Z) + (\nabla_Y K)(X, Z)]n. \end{aligned} \quad (3.2.95)$$

この式は次の 2 式と同等である :

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y, Z, W) = & R(X, Y, Z, W) \pm (K(X, W)K(Y, Z) \\ & - K(X, Z)K(Y, W)), \end{aligned} \quad (3.2.96)$$

$$\tilde{R}(X, Y, Z, n) = \pm ((\nabla_X K)(Y, Z)) - (\nabla_Y K)(X, Z) \quad (3.2.97)$$

成分表示のもとで, これらの方程式は次のように表わされる :

$$\tilde{R}_{ijkl} = R_{ijkl} \mp (K_{ik}K_{jl} - K_{il}K_{jk}), \quad (3.2.98a)$$

$$n_\mu \tilde{R}^\mu{}_{ijk} = \pm (\nabla_k K_{ij} - \nabla_j K_{ik}). \quad (3.2.98b)$$

となる.

残りの成分:

$$\tilde{g}(n, \tilde{R}(X, n)Y) = \pm \frac{1}{N} (\mathcal{L}_m K)(X, Y) - K(X, K(Y)) \pm \frac{1}{N} (\nabla^2 N)(X, Y) \quad (3.2.99)$$

成分表示では,

$$\begin{aligned} n^\mu n^\nu \tilde{R}_{\mu\nu j} &= \mp \frac{1}{N} (\dot{K}_{ij} - (\mathcal{L}_\beta K)_{ij}) + K_{ik} K_j^k \mp \frac{1}{N} (\nabla^2 N)_{ij}, \\ (\mathcal{L}_\beta K)_{ij} &= (\nabla_\beta K)_{ij} + K_{ik} \nabla_j \beta^k + K_{jk} \nabla_i \beta^k. \end{aligned} \quad (3.2.100)$$

$$(\mathcal{L}_\beta K)_{ij} = (\nabla_\beta K)_{ij} + K_{ik} \nabla_j \beta^k + K_{jk} \nabla_i \beta^k. \quad (3.2.101)$$

### 3.2.7.3 Ricci 曲率の分解

**Constraints:** Gauss 方程式および Codazzi 方程式のトレースより

$$2n^\mu n^\nu \tilde{G}_{\mu\nu} = \mp R + K^2 - K_j^i K_i^j, \quad (3.2.102a)$$

$$n^\mu \tilde{G}_{\mu i} = \pm (\nabla_j K_i^j - \nabla_i K). \quad (3.2.102b)$$

**Ricci テンソル:**  $\tilde{R}_{\nu\lambda\sigma}^\mu$  の分解より

$$\tilde{R}_{ij} = R_{ij} \pm (2K_{ik}K_j^k - KK_{ij}) - \frac{1}{N} \mathcal{L}_m K_{ij} - \frac{1}{N} \nabla_i \nabla_j N \quad (3.2.103a)$$

$$\tilde{R}_j^i = R_j^i \mp KK_j^i - \frac{1}{N} \mathcal{L}_m K_j^i - \frac{1}{N} \nabla^i \nabla_j N, \quad (3.2.103b)$$

$$\tilde{R}_0^0 = -\frac{1}{N} \mathcal{L}_m K \mp K_j^i K_i^j - \frac{1}{N} \Delta N, \quad (3.2.103c)$$

$$\tilde{R} = R - \frac{2}{N} \mathcal{L}_m K \mp (K^2 + K_j^i K_i^j) - \frac{2}{N} \Delta N. \quad (3.2.103d)$$

Einstein テンソルの (ij) 成分:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{ij} = G_{ij} \pm & \left[ 2K_i^k K_{kj} - K K_{ij} + \frac{1}{2}(K^2 + K_l^k K_k^l) g_{ij} \right] \\ & - \frac{1}{N} (\mathcal{L}_m K_{ij} - g_{ij} \mathcal{L}_m K) - \frac{1}{N} \nabla_i \nabla_j N + \frac{1}{N} \Delta N \end{aligned} \quad (3.2.104)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_j^i = G_j^i \pm & \left[ -K K_j^i + \frac{1}{2}(K^2 + K_l^k K_k^l) \delta_j^i \right] \\ & - \frac{1}{N} \mathcal{L}_m (K_j^i - \delta_j^i K) - \frac{1}{N} \nabla^i \nabla_j N + \frac{1}{N} \Delta N \end{aligned} \quad (3.2.105)$$

Weyl テンソルを用いた表現:  $\dim M = n + 1$  として,

$$\tilde{R}^0{}_{i0j} = \tilde{C}^0{}_{i0j} + \frac{1}{n} \tilde{R}_0^0 g_{ij} \quad (3.2.106)$$

より,

$$\begin{aligned} G_{ij} = \tilde{G}_{ij} + \frac{n-1}{n} \left( \tilde{G}_0^0 + \frac{1}{2} \tilde{R} \right) g_{ij} - \tilde{C}^0{}_{i0j} \\ \mp \left[ K_i^k K_{kj} - K K_{ij} + \frac{1}{2} (K^2 - K_l^k K_k^l) g_{ij} \right] \end{aligned} \quad (3.2.107)$$

### 3.2.7.4 RW 時空

【公式 3.41 (RW 時空での共変微分の分解)】 RW 時空

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij}(t, x) dx^i dx^j = -dt^2 + a(t)^2 \gamma_{ij}(x) dx^i dx^j \quad (3.2.108)$$

において,

$$g_{\mu\nu} \Rightarrow \nabla, \quad \gamma_{ij} \Rightarrow D, \quad H = \dot{a}/a$$

とおく. このとき, テンソルの共変微分は次の様に分解される:

$$\nabla_0 T^{\mu\dots\nu\dots} = (\partial_t + (p-q)H) T^{\mu\dots\nu\dots}, \quad (3.2.109a)$$

$$\begin{aligned} \nabla_j T^{\mu\dots\nu\dots} = D_j T^{\mu\dots\nu\dots} + \delta_0^\mu H T_j^{\mu\dots\nu\dots} + H \delta_j^\mu T^{0\dots\nu\dots} \\ - H g_{j\nu} T^{\mu\dots 0\dots} - H \delta_\nu^0 T^{\mu\dots j\dots} \end{aligned} \quad (3.2.109b)$$

ここで,  $p$  と  $q$  はそれぞれ,  $T$  の上添え字と下添え字で 0 でないものの数.

□

### 3.2.8 $(n + m)$ 分解

【命題 3.42 (接続の分解)】 時空  $(M, \tilde{g})$  に対する接続を  $\nabla$ ,  $(\Sigma, g)$  を  $(M, \tilde{g})$  の部分空間,  $(N(\Sigma), h)$  をその法ベクトルバンドルとする.

1.  $\nabla$  は  $T(\Sigma)$  および  $N(\Sigma)$  に線形接続  $D$  を誘導する :

$$\begin{aligned} D_X Y &= (\nabla_X Y)^\#; \quad X, Y \in C^\infty(T(\Sigma)), \\ D_X v &= (\nabla_X v)^\perp; \quad X \in C^\infty(T(\Sigma)), v \in C^\infty(N(\Sigma)). \end{aligned}$$

これらの誘導接続の直和により定義される  $T(M)|_\Sigma = T(\Sigma) \oplus N(\Sigma)$  の線形接続をやはり  $D$  と表す. このとき,  $D$  は計量接続となり, さらに  $T(\Sigma)$  上では  $g = \tilde{g}|_\Sigma$  に関する Riemann 接続となる.

いま,  $X \in \Sigma, V \in T(M)|_\Sigma$  に対して,

$$\nabla_X V = D_X V - K(X)V$$

とおくと,  $K(X) \in \text{End}(T(M)|_\Sigma)$  で,  $X, Y \in C^\infty(T(\Sigma)), v \in C^\infty(N(\Sigma))$  のとき, 次の関係式がなりたつ :

$$\begin{aligned} K(X)T(\Sigma) &\subset N(\Sigma), \quad K(X)N(\Sigma) \subset T(\Sigma), \\ K(X, Y) &:= K(X)Y = K(Y)X, \\ \tilde{g}(v, K(X)Y) &= -\tilde{g}(K(X)v, Y). \end{aligned}$$

2.  $M$  上の  $\Sigma$  に横断的な可換ベクトル場のつくる  $\dim N(\Sigma)$  次元線形集合を  $\mathcal{L} \subset C^\infty(T(M))$ , その積分多様体を  $L$  とする. また  $\mathcal{L}$  の生成する変換による  $\Sigma$  の像 (の族) を  $\Sigma_y$ , あるいは単に  $\Sigma$  と表す. このとき,  $\xi, \eta \in \mathcal{L}$  および  $X \parallel \Sigma$  に対して,

$$\mathcal{L}_\xi X, \mathcal{L}_{\xi^\perp} X \parallel \Sigma$$

および

$$\begin{aligned} \nabla_\xi X &= \mathcal{L}_\xi X + D_X \xi - K(X)\xi, \\ \nabla_{\xi^\perp} X &= \mathcal{L}_{\xi^\perp} X - K(X)\xi^\perp + D_X \xi^\perp \end{aligned}$$

が成り立つ. また,  $v \perp \Sigma$  とすると,

$$\begin{aligned} (\nabla_\xi v)^\# &= -h(v, D^\# \xi^\perp) - K(\xi^\#)v, \\ (\nabla_{\xi^\perp} v)^\# &= -h(v, D^\# \xi^\perp). \end{aligned}$$

□

【公式 3.43 (計量の Lie 微分)]  $X, Y, Z // \Sigma$ ,  $u, v, w \perp \Sigma$  のとき,

1.  $\mathcal{L}_X \tilde{g}$  の成分は,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \tilde{g})(Y, Z) &= g(Z, D_Y X) + g(Y, D_Z X), \\ (\mathcal{L}_X \tilde{g})(v, Y) &= \tilde{g}(Y, [v, X]), \\ (\mathcal{L}_X \tilde{g})(v, w) &= h(v, D_X w) + h(w, D_X v) \\ &\quad + \tilde{g}(v, [w, X]) + \tilde{g}(w, [v, X]). \end{aligned}$$

特に,  $\xi, \eta \in \mathcal{L}$  で,  $\mathcal{L}_\xi X = \mathcal{L}_\eta X = 0$  なら

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \tilde{g})(\xi, Y) &= \tilde{g}(\xi, D_Y X) + \tilde{g}(Y, D_X \xi), \\ (\mathcal{L}_X \tilde{g})(\xi, \eta) &= \tilde{g}(\xi, D_X \eta) + \tilde{g}(\eta, D_X \xi). \end{aligned}$$

2.  $\mathcal{L}_u \tilde{g}$  の成分は

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_u \tilde{g})(X, Y) &= 2h(u, K(X, Y)), \\ (\mathcal{L}_u \tilde{g})(X, v) &= h(v, D_X u) + \tilde{g}(X, \nabla_v u), \\ (\mathcal{L}_u \tilde{g})(v, w) &= \tilde{g}(w, \nabla_v u) + \tilde{g}(v, \nabla_w u). \end{aligned}$$

□

【公式 3.44 (共変微分の Lie 微分)]  $\xi \in \mathcal{L}$ ,  $X, Y, Z // \Sigma$  のとき,

$$\begin{aligned} 2g(Z, \mathcal{L}_\xi D_X Y) &= 2g(Z, D_{[\xi, X]} Y) + 2g(Z, D_X [\xi, Y]) \\ &\quad + (D_Y \mathcal{L}_\xi g)(X, Z) + (D_X \mathcal{L}_\xi g)(Y, Z) - (D_Z \mathcal{L}_\xi g)(X, Y). \end{aligned}$$

これは  $\xi$  を  $\xi''$  および  $\xi^\perp$  に置き換えても成り立つ。これより,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi''} D_X Y &= \frac{1}{2} [D_{X,Y}^2 \xi'' + D_{Y,X}^2 \xi'' - R(X, \xi'') Y - R(Y, \xi'') X], \\ \mathcal{L}_{\xi^\perp} D_X Y &= -K(X) D_Y \xi^\perp - K(Y) D_X \xi^\perp - h(D^\# \xi^\perp, K(X, Y)) \\ &\quad - (D_X K)(Y) \xi^\perp - (D_Y K)(X) \xi^\perp - h(\xi^\perp, (D^\# K)(X, Y)). \end{aligned}$$

□

【公式 3.45 (曲率の分解)】  $X, Y // \Sigma, v \perp \Sigma, \xi, \eta \in \mathcal{L}$  のとき,  $\nabla$  に対する曲率テンソル  $\tilde{R}$  は,  $D$  に対する曲率テンソル  $R \oplus F$  および  $K$  を用いて次のように表される :

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X, Y)V &= (R(X, Y) + F(X, Y))V \\
&\quad - (D_X K)(Y)V + (D_Y K)(X)V + (K(X)K(Y) - K(Y)K(X))V, \\
\tilde{R}(X, \xi^\perp)Y &= D_{X,Y}^2 \xi^\perp + (D_Y K)(X)\xi^\perp + h(\xi^\perp, (D^\# K)(X, Y)) \\
&\quad + K(X)K(Y)\xi^\perp + (\nabla_{K(X,Y)} \xi^\perp + (\mathcal{L}_{\xi^\perp} K)(X, Y))^\perp, \\
\tilde{R}(X, \xi^\perp)w &= -h(w, D_X D^\# \xi^\perp) - K(K(X)\xi^\perp)w + (\nabla_{\xi^\perp} K)(X)w \\
&\quad + D_{K(X)\xi^\perp} w + D_{(\nabla_{\xi^\perp} X)^\#} w + D_X (\nabla_{\xi^\perp} w)^\perp \\
&\quad - (\nabla_{\xi^\perp} D_X w)^\perp + K(X) (\nabla_{\xi^\perp} w)^\# - h(w, D_{(K(X)*^\#)} \xi^\perp), \\
\tilde{R}(\xi^\perp, \eta^\perp)v &= D_{h(v, D^\# \xi^\perp)} \eta^\perp - D_{h(v, D^\# \eta^\perp)} \xi^\perp \\
&\quad + D_{h(\xi^\perp, D^\# \eta^\perp)} v - D_{h(\eta^\perp, D^\# \xi^\perp)} v, \\
&\quad + K(h(v, D^\# \eta^\perp))\xi^\perp - K(h(v, D^\# \xi^\perp))\eta^\perp \\
&\quad + (\nabla_{\xi^\perp} (\nabla_{\eta^\perp} v)^\perp - \nabla_{\eta^\perp} (\nabla_{\xi^\perp} v)^\perp + \nabla_{[\xi, \eta]^\perp} v)^\perp.
\end{aligned}$$

これより,  $X, Y, Z, X', Y' // \Sigma, v, w \perp \Sigma, \eta, \xi \in \mathcal{L}$  として, 共変表示  $\tilde{R}(*, *, *, *)$  は次のようになる.

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X, Y, X', Y') &= R(X, Y, X', Y') + h(K(X, Y'), K(Y, X')) - h(K(X, X'), K(Y, Y')), \\
\tilde{R}(X, Y, Z, v) &= h(v, (D_X K)(Y, Z) - (D_Y K)(X, Z)), \\
\tilde{R}(X, Y, v, w) &= -h(w, F(X, Y)v) - h(w, (K(X)K(Y) - K(Y)K(X))v), \\
\tilde{R}(X, \xi^\perp, Y, w) &= -h(w, D_{X,Y}^2 \xi^\perp + K(X)K(Y)\xi^\perp) \\
&\quad - h(w, \nabla_{K(X,Y)} \xi^\perp + (\mathcal{L}_{\xi^\perp} K)(X, Y)), \\
\tilde{R}(X, \xi^\perp, v, w) &= h(v, (\nabla_{\xi^\perp} K)(X)w) + h(\nabla_{\xi^\perp} v, D_X w) - h(D_X v, \nabla_{\xi^\perp} w), \\
&\quad + \frac{1}{2} [h(v, D_{[\xi^\perp, X]} w) - h(w, D_{[\xi^\perp, X]} v) \\
&\quad + \partial_X (h(\nabla_{\xi^\perp} w, v) - h(\nabla_{\xi^\perp} v, w)) + \partial_{\xi^\perp} (h(D_X v, w) - h(D_X w, v))], \\
\tilde{R}(\xi^\perp, \eta^\perp, v, w) &= -\tilde{g}(w, \tilde{R}(\xi^\perp, \eta^\perp)v).
\end{aligned}$$

□

【公式 3.46 (接続形式)】 計量が<sup>s</sup>

$$ds^2 = \gamma_{pq} dy^p dy^q + \eta_{IJ} (\theta^I + \zeta_p^I dy^p) (\theta^J + \zeta_q^J dy^q) \quad (3.2.110)$$

と表される時空において,

$$\tilde{e}_I = e_I = e_I^i \partial_i, \quad (3.2.111a)$$

$$\tilde{e}_P = n_P = n_P^q (\partial_q - \zeta_q^I e_I) \quad (3.2.111b)$$

は正規直交基底となる. ここで,

$$\gamma^{pq} = \eta^{PQ} n_P^p n_Q^q. \quad (3.2.112)$$

また, その双対基底は

$$\tilde{\theta}^I = \theta^I + \zeta^I; \quad \theta^I = \theta^I_i(x, y) dx^i, \quad \zeta^I = \zeta^I_q(x, y) dy^q, \quad (3.2.113a)$$

$$\tilde{\theta}^P = \nu^P = \nu^P_q(x, y) dy^q. \quad (3.2.113b)$$

ただし,

$$\gamma_{pq} = \eta_{PQ} \nu_p^P \nu_q^Q, \quad \nu^P(n_Q) = \delta_Q^P. \quad (3.2.114)$$

この基底に関する接続形式  $\tilde{\omega}_a^a$  の成分は次のように表される.

$$\tilde{\omega}_{IJK} = -e_K^l \partial_{[I} \theta_{J]l} + e^l [I \partial_{J]} \theta_{Kl} + e_{[I}^l \partial_{|K|} \theta_{J]l}, \quad (3.2.115a)$$

$$\tilde{\omega}_{IJp} = \theta_{[Ii} \partial_p e_{J]}^i - \nabla_{[I}^{\parallel} \zeta_{J]q}, \quad (3.2.115b)$$

$$h_{PIJ} := \tilde{\omega}_{PIJ} = n_P^q \left[ -\frac{1}{2} e_I^i e_J^j \partial_q g_{ij} + \nabla_{(I}^{\parallel} \zeta_{J)q} \right], \quad (3.2.115c)$$

$$l_{IPQ} := \tilde{\omega}_{IPQ} = -n_Q^q \nabla_I^{\perp} \nu_{Pq} = -(n_Q^q \partial_I \nu_{Pq} + \tilde{\omega}_{PQI}), \quad (3.2.115d)$$

$$\tilde{\omega}_{PQI} = n_{[P}^p n_{Q]}^q [\nu_{Rq} \partial_I \nu_p^R + \partial_q \zeta_{Ip} - \zeta_q^J (\tilde{\omega}_{IJp} + \nu_p^R h_{RIJ})] \quad (3.2.115e)$$

$$\tilde{\omega}_{PQR} = -n_R^s \partial_{[P} \nu_{Q]s} + n_{[P}^s \partial_{Q]} n_{Rs} + n_{[P}^s \partial_{|R|} \nu_{Q]s}. \quad (3.2.115f)$$

□

### 3.2.9 Null Frame

【公式 3.47 (Null frame[BH1995.12.19])]】

計量:

$$ds^2 = -\theta^+ \otimes \theta^- - \theta^- \otimes \theta^+ + \sum_A \theta^A \otimes \theta^A. \quad (3.2.116)$$

Orthonormal frame との関係:

$$e_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 \pm e_1), \quad \theta^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^0 \pm \theta^1). \quad (3.2.117)$$

$$\theta^+(e_+) = \theta^-(e_-) = 1, \quad \theta^+(e_-) = \theta^-(e_+) = 0. \quad (3.2.118)$$

Connection form:

$$d\theta^a = -\omega^a_b \wedge \theta^b \quad (a, b = \pm, A); \quad (3.2.119)$$

$$\begin{aligned} \omega^+_- = -\omega_{--} = 0, \quad \omega^-_+ = -\omega_{++} = 0, \\ \omega^+_+ = -\omega_{-+} = \omega_{+-} = -\omega^-_- = \omega^0_1, \\ \omega^{\pm}_A = -\omega_{\mp A} = \omega_{A\mp} = \omega^A_{\mp}, \\ \omega^A_B = \omega_{AB} = -\omega_{BA} = -\omega^B_A. \end{aligned} \quad (3.2.120)$$

Curvature form:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^0_1 = \mathcal{R}^+_{+} = -\mathcal{R}^-_{-} = d\omega^0_1 + \omega^+_{+A} \wedge \omega^-_{-A}, \\ \mathcal{R}^{\pm}_A = d\omega^{\pm}_A + \omega_A^B \wedge \omega^{\pm}_B \pm \omega^0_1 \wedge \omega^{\pm}_A, \\ \mathcal{R}^A_B = d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B + \omega^+_{+A} \wedge \omega^-_{-B} + \omega^-_{-A} \wedge \omega^+_{+B}. \end{aligned} \quad (3.2.121)$$

Ricci tensor:

$$\begin{aligned} R_{++} = R^A_{+A+}, \quad R_{--} = R^A_{-A-}, \\ R_{+-} = R^0_{1+-} + R^A_{+A-}, \\ R_{AB} = R^+_{A+B} + R^-_{A-B} + R^C_{ACB}, \\ R = -2R_{+-} + R_{AA}. \end{aligned} \quad (3.2.122)$$

□



## 【公式 3.48 (Null coordinates[GR1999.9.22])]】

計量:(dim= $n + 1$ )

$$ds^2 = -2e^\lambda dud\chi - e^\lambda N du^2 + g_{ij}(dz^i - \beta^i du)(dz^j - \beta^j du). \quad (3.2.123)$$

Null frame:

$$\theta^+ = e^\lambda du, \quad \theta^- = d\chi + \frac{N}{2} du, \quad \zeta^i = dz^i - \beta^i du. \quad (3.2.124)$$

$$e_+ = l = e^{-\lambda} \left( \partial_u - \frac{N}{2} \partial_\chi + \beta^i \partial_i \right), \quad e_- = k = \partial_\chi, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial z^i}. \quad (3.2.125)$$

$$d\theta^+ = -\lambda' \theta^+ \wedge \theta^- - (D_i \lambda) \theta^+ \wedge \zeta^i, \quad (3.2.126)$$

$$d\theta^- = -\frac{1}{2} e^{-\lambda} (N' \theta^+ \wedge \theta^- + (D_i N) \theta^+ \wedge \zeta^i), \quad (3.2.127)$$

$$d\zeta^i = e^{-\lambda} [(\beta^i)' \theta^+ \wedge \theta^- + (\partial_j \beta^i) \theta^+ \wedge \zeta^j] \quad (3.2.128)$$

Connection form:

$$\omega^+_{+} = -\omega^-_{-} = -\frac{1}{2} e^{-\lambda} N' \theta^+ - \lambda' \theta^- + \omega_i \zeta^i, \quad (3.2.129)$$

$$\omega^+_{i} = \omega_{i-} = (D_i \lambda + \omega_i) \theta^+ + \chi^+_{ij} \zeta^j, \quad (3.2.130)$$

$$\omega^-_{i} = \omega_{i+} = \frac{1}{2} e^{-\lambda} (D_i N) \theta^+ - \omega_i \theta^- + \chi^-_{ij} \zeta^j, \quad (3.2.131)$$

$$\omega_{ij} = (\chi^-_{ij} - e^{-\lambda} D_j \beta_i + e^{-\lambda} \omega_{ijk} \beta^k) \theta^+ + \chi^+_{ij} \theta^- + \omega_{ijk} \zeta^k. \quad (3.2.132)$$

$$\omega^i = -\frac{1}{2} [D^i \lambda + e^{-\lambda} (\beta^i)'], \quad (3.2.133)$$

$$\chi^+_{ij} = \frac{1}{2} g'_{ij}, \quad (3.2.134)$$

$$\chi^-_{ij} = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left( \dot{g}_{ij} - \frac{N}{2} g'_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i \right), \quad (3.2.135)$$

$$\omega_{ijk} = g_{il} \Gamma^l_{jk} = \frac{1}{2} (\partial_j g_{ki} + \partial_k g_{ji} - \partial_i g_{jk}). \quad (3.2.136)$$

Curvature form:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^+_{\ +} = & \left[ \frac{1}{2}(N'' + \lambda'N' + \lambda''N)e^{-\lambda} - (\dot{\lambda}' + \beta \cdot D\lambda')e^{-\lambda} \right. \\
& - 2\omega \cdot D\lambda - 3\omega \cdot \omega] \theta^+ \wedge \theta^- \\
& + \left[ \frac{1}{2}(D_j N' + \lambda' D_j N)e^{-\lambda} + (\dot{\omega}_j - \frac{N}{2}\omega'_j + \beta \cdot D\omega_j + \omega_i D_j \beta^i)e^{-\lambda} \right. \\
& + (D_k \lambda + \omega_k)\chi^{-k}_j - \frac{1}{2}e^{-\lambda}(D_k N)\chi^{+k}_j \left. \right] \theta^+ \wedge \zeta^j \\
& + (D_j \lambda' + \omega'_j + \omega_k \chi^{+k}_j)\theta^- \wedge \zeta^j \\
& + (D_i \omega_j + \chi^{+ki}\chi^{-k}_j)\zeta^i \wedge \zeta^j, \tag{3.2.137}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^+_{\ i} = & -(D_i \lambda' + \omega'_i + \omega_j \chi^{+j}_i)\theta^+ \wedge \theta^- \\
& + [D_i \omega_j - \omega_i \omega_j + (\chi^{-ij})' + \lambda' \chi^{-ij} - \chi^{-k}_i \chi^{+jk}] \theta^+ \wedge \zeta^j \\
& + [(\chi^{+ij})' - \lambda' \chi^{+ij} - \chi^{+ik} \chi^{+k}_j] \theta^- \wedge \zeta^j \\
& + (D_j \chi^{+ik} + \omega_j \chi^{+ik})\zeta^j \wedge \zeta^k. \tag{3.2.138}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^-_{\ i} = & \left[ -\frac{1}{2}(D_i N' + \lambda' D_i N - N\omega'_i - \chi^{+j}_i D_j N)e^{-\lambda} \right. \\
& - (\dot{\omega}_i + \beta \cdot D\omega_i + \omega_j D_i \beta^j)e^{-\lambda} - \chi^{-j}_i (\omega_j + D_j \lambda) \left. \right] \theta^+ \wedge \theta^- \\
& \left[ -\frac{1}{2}e^{-\lambda}(D_i D_j N - \omega_i D_j N - \omega_j D_i N + N(\chi^{-ij})' - N' \chi^{-ij}) \right. \\
& + e^{-\lambda}(\dot{\chi}^{-ij} + \beta \cdot D\chi^{-ij} + \chi^{-ik} D_j \beta^k + \chi^{-jk} D_i \beta^k) - \chi^{-k}_i \chi^{-kj} \left. \right] \theta^+ \wedge \zeta^j \\
& + [D_j \omega_i - \omega_i \omega_j + (\chi^{-ij})' + \lambda' \chi^{-ij} - \chi^{+k}_i \chi^{-kj}] \theta^- \wedge \zeta^j \\
& + (D_j \chi^{-ik} - \omega_j \chi^{-ik})\zeta^j \wedge \zeta^k, \tag{3.2.139}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^i_{\ j} = & (D_i \omega_j - D_j \omega_i + \chi^{+ik}\chi^{-k}_j - \chi^{-ik}\chi^{+k}_j)\theta^+ \wedge \theta^- \\
& + (D_j \chi^{-ik} - D_i \chi^{-jk} - \omega_j \chi^{-ik} + \omega_i \chi^{-jk})\theta^+ \wedge \zeta^k \\
& + (D_j \chi^{+ik} - D_i \chi^{+jk} + \omega_j \chi^{+ik} - \omega_i \chi^{+jk})\theta^- \wedge \zeta^k \\
& + \left( \frac{1}{2} R_{ijkl} + \chi^{-ik}\chi^{+jl} - \chi^{-jk}\chi^{+il} \right) \zeta^k \wedge \zeta^l. \tag{3.2.140}
\end{aligned}$$

**Ricci Tensor:**

$$R_{++} = \frac{1}{2}e^{-\lambda}[D^2N - 2\omega \cdot DN - 2\dot{\chi}^- - 2\beta \cdot D\chi^- + N(\chi^-)' - N'\chi^-] - \chi^-_{ij}\chi^{-ij}, \quad (3.2.141)$$

$$R_{+-} = \frac{1}{2}e^{-\lambda}[N'' + \lambda'N' + \lambda''N - 2\dot{\lambda}' - 2\beta \cdot D\lambda'] - D \cdot \omega - 2\omega \cdot D\lambda - 2\omega \cdot \omega - (\chi^-)' - \lambda'\chi^- - \chi^-_{ij}\chi^{+ij}, \quad (3.2.142)$$

$$R_{--} = -(\chi^+)' + \lambda'\chi^+ - \chi^+_{ij}\chi^{+ij}, \quad (3.2.143)$$

$$R_{+i} = \frac{1}{2}e^{-\lambda}(D_iN' + \lambda'D_iN + 2\dot{\omega}_i - N\omega'_i + 2\beta \cdot \omega_i + 2\omega_k D_i\beta^k) + D_k\chi^{-k}_i + (D_k\lambda)\chi^{-k}_i - \frac{1}{2}e^{-\lambda}(D_kN)\chi^{+k}_i - D_i\chi^- + \omega_i\chi^-, \quad (3.2.144)$$

$$R_{-i} = -D_i\lambda' - \omega'_i + D_k\chi^{+k}_i - D_i\chi^+ - \omega_i\chi^+, \quad (3.2.145)$$

$$R_{ij} = {}^nR_{ij} + D_i\omega_j + D_j\omega_i - 2\omega_i\omega_j + \chi^- \chi^+_{ij} + \chi^+ \chi^-_{ij} + 2(\chi^-_{ij})' + 2\lambda'\chi^-_{ij} - 2(\chi^{-k}_i\chi^+_{jk} + \chi^{-k}_j\chi^+_{ik}), \quad (3.2.146)$$

$$R = -e^{-\lambda}[N'' + \lambda'N' + \lambda''N - 2\dot{\lambda}' - 2\beta \cdot D\lambda'] + 4D \cdot \omega + 4\omega \cdot D\lambda + 2\omega \cdot \omega + 4(\chi^-)' + 4\lambda'\chi^- + 2\chi^+\chi^- + 2\chi^-_{ij}\chi^{+ij} + {}^nR. \quad (3.2.147)$$

□

## 3.2.10 2次元系

## 3.2.10.1 2D 空間

【公式 3.49 (直交座標系)】

計量: 2次元空間

$$ds^2 = A(x, y)^2 dx^2 + B(x, y)^2 dy^2. \quad (3.2.148)$$

正規直交基底:

$$\theta^1 = A dx, \theta^2 = B dy \quad (3.2.149)$$

接続形式:

$$\omega^1_2 = \frac{A_y}{AB} \theta^1 - \frac{B_x}{AB} \theta^2. \quad (3.2.150)$$

曲率:

$$R = -\frac{2}{AB} \left[ \left( \frac{B_x}{A} \right)_x + \left( \frac{A_y}{B} \right)_y \right]. \quad (3.2.151)$$

□

【公式 3.50 (一般座標系 [2003.3.8])】

計量

$$ds^2 = A^2 dx^2 + B^2 (dy + C dx)^2. \quad (3.2.152)$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} A^2 + B^2 C^2 & B^2 C \\ B^2 C & B^2 \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{A^2} & -\frac{C}{A^2} \\ -\frac{C}{A^2} & \frac{A^2 + B^2 C^2}{A^2 B^2} \end{pmatrix} \quad (3.2.153)$$

## Christoffel

$$\Gamma_{xx}^x = \frac{BC^2}{A^2}[(BC)_y - B_x] + \frac{A_z + CA_y}{A}, \quad (3.2.154a)$$

$$\Gamma_{xy}^x = \frac{BC}{A^2}[(BC)_y - B_x] + \frac{A_y}{A}, \quad (3.2.154b)$$

$$\Gamma_{yy}^x = \frac{B}{A^2}[(BC)_y - B_x], \quad (3.2.154c)$$

$$\Gamma_{xx}^y = \frac{(BC)_x}{B} - \frac{C(A^2 + B^2C^2)}{A^2B}[(BC)_y - B_x] - \frac{A^2 + B^2C^2}{AB^2}A_y - \frac{CA_x}{A}, \quad (3.2.154d)$$

$$\Gamma_{xy}^y = -\frac{BC^2}{A^2}(BC)_y + \frac{A^2 + B^2C^2}{A^2B}B_x - \frac{CA_y}{A}, \quad (3.2.154e)$$

$$\Gamma_{yy}^y = \frac{B_y}{B} + \frac{BC}{A^2}B_x - \frac{BC}{A^2}(BC)_y. \quad (3.2.154f)$$

## 正規直交基底

$$\theta^1 = Adx, \quad \theta^2 = B(dy + Cdx). \quad (3.2.155)$$

## 接続形式

$$\omega^1_2 = \frac{A_y}{AB}\theta^1 + \frac{(BC)_y - B_x}{AB}\theta^2. \quad (3.2.156)$$

## スカラ曲率

$$R = \frac{2}{AB} \left[ \partial_x \left( \frac{(BC)_y - B_x}{A} \right) - \partial_y \left\{ \frac{C}{A}[(BC)_y - B_x] + \frac{A_y}{B} \right\} \right]. \quad (3.2.157)$$

□

【公式 3.51 (複素座標系 [2004.9.4])]】

## 計量

$$ds^2 = e^{2\Phi} dzd\bar{z}; \quad (3.2.158)$$

$$g_{z\bar{z}} = \frac{1}{2}e^{2\Phi}, \quad g^{\bar{z}z} = 2e^{-2\Phi}. \quad (3.2.159)$$

目次へ

接続係数

$$\partial = \partial_z, \quad \bar{\partial} = \partial_{\bar{z}} \quad (3.2.160)$$

とおくと,

$$\Gamma_{zz}^z = 2\partial\Phi, \quad \Gamma_{\bar{z}\bar{z}}^{\bar{z}} = 2\bar{\partial}\Phi. \quad (3.2.161)$$

接続形式基底

$$\theta^z = \theta := e^\Phi dz, \quad \theta^{\bar{z}} = \bar{\theta} \quad (3.2.162)$$

に関して,

$$\omega^z{}_z = \omega, \quad \omega^{\bar{z}}{}_{\bar{z}} = -\omega, \quad \omega^z{}_{\bar{z}} = \omega^{\bar{z}}{}_z = 0 \quad (3.2.163)$$

となる。ここで,

$$\omega = \partial\Phi dz - \bar{\partial}\Phi d\bar{z}. \quad (3.2.164)$$

曲率形式

$$\mathcal{R}^z{}_z = \mathcal{R}, \quad \mathcal{R}^{\bar{z}}{}_{\bar{z}} = -\mathcal{R}, \quad \mathcal{R}^z{}_{\bar{z}} = \mathcal{R}^{\bar{z}}{}_z = 0, \quad (3.2.165)$$

ここで,

$$\mathcal{R} = -2\partial\bar{\partial}\Phi dz \wedge d\bar{z}. \quad (3.2.166)$$

**Ricci 曲率**

$$R_{z\bar{z}} = R_{\bar{z}z} = -2\partial\bar{\partial}\Phi, \quad R_{zz} = R_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad (3.2.167)$$

$$R = -8e^{-2\Phi}\partial\bar{\partial}\Phi. \quad (3.2.168)$$

□

### 3.2.10.2 2D 時空

【公式 3.52】

計量: 2次元時空

$$ds^2 = -A(t, x)^2 dt^2 + B(t, x)^2 dx^2. \quad (3.2.169)$$

正規直交基底:

$$\theta^0 = A dt, \theta^1 = B dx \quad (3.2.170)$$

接続形式:

$$\omega^0_1 = \frac{A'}{AB} \theta^0 + \frac{\dot{B}}{AB} \theta^1. \quad (3.2.171)$$

曲率:

$$R = \frac{2}{AB} \left[ \left( \frac{\dot{B}}{A} \right)' - \left( \frac{A'}{B} \right)' \right]. \quad (3.2.172)$$

□

### 3.2.11 定常時空

#### 3.2.11.1 直交分解型表示

【公式 3.53】

計量:  $(n + 1)$  次元定常時空の直交分解型表示

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 &= -\epsilon e^{2U} (dt - \eta)^2 + g_{ij} dx^i dx^j; \\ U &= U(x), \eta = \eta_i(x) dx^i, g_{ij} = g_{ij}(x). \end{aligned} \quad (3.2.173)$$

ここで,  $\epsilon = \pm 1$ .

正規直交基底

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^0 &= e^U (dt - \eta), \tilde{\theta}^I = \theta^I = \theta^I_j(x) dx^j, \\ \tilde{e}_0 &= e^{-U} \partial_t, \tilde{e}_I = e_I + \eta_I \partial_t. \end{aligned}$$

接続形式

$$\tilde{\omega}^0_I = D_I U \tilde{\theta}^0 - \frac{1}{2} e^U (d\eta)_{IJ} \theta^J, \quad (3.2.174a)$$

$$\tilde{\omega}^I_J = \omega^I_J - \frac{\epsilon}{2} e^U (d\eta)^I_J \tilde{\theta}^0. \quad (3.2.174b)$$

ただし,  $D$  は  $n$  次元空間計量  $g_{ij}$  に関する共変微分,  $\omega^I_J$  は対応する接続形式.

## 曲率テンソル

$$\tilde{R}^0_{I0J} = -(D^2U)_{IJ} - D_I U D_J U - \frac{\epsilon}{4} e^{2U} (d\eta)_{IK} (d\eta)_{J^K}, \quad (3.2.175a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}^0_{IJK} = & \frac{1}{2} e^U [(Dd\eta)_{JKI} - (Dd\eta)_{KJI} - 2D_I U (d\eta)_{JK} \\ & + D_J U (d\eta)_{KI} - D_K U (d\eta)_{JI}], \end{aligned} \quad (3.2.175b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{IJKL} = & R_{IJKL} + \frac{\epsilon}{4} e^{2U} [2(d\eta)_{IJ} (d\eta)_{KL} + (d\eta)_{IK} (d\eta)_{JL} \\ & - (d\eta)_{IL} (d\eta)_{JK}]. \end{aligned} \quad (3.2.175c)$$

## Ricci テンソル

$$\tilde{R}_{00} = \epsilon (\Delta_n U + (DU)^2) + \frac{1}{4} e^{2U} (d\eta \cdot d\eta), \quad (3.2.176a)$$

$$\tilde{R}_{0I} = \frac{\epsilon}{2} e^{-2U} D_J (e^{3U} (d\eta)_I^J), \quad (3.2.176b)$$

$$\tilde{R}_{IJ} = R_{IJ} - (D^2U)_{IJ} - D_I U D_J U + \frac{\epsilon}{2} e^{2U} (d\eta)_{IK} (d\eta)_{J^K}, \quad (3.2.176c)$$

$$\tilde{R} = R - 2\Delta_n U - 2(DU)^2 + \frac{\epsilon}{4} e^{2U} (d\eta \cdot d\eta), \quad (3.2.176d)$$

$$\tilde{G}_{00} = \frac{\epsilon}{2} R + \frac{3}{8} e^{2U} (d\eta \cdot d\eta). \quad (3.2.176e)$$

□

## 3.2.11.2 (n+1) 分解型表示

## 【公式 3.54】

計量:  $(n+1)$  次元定常時空の  $(n+1)$  分解型表示

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 = & -N^2 dt^2 + g_{ij} (dx^i + \beta^i dt) (dx^j + \beta^j dt); \\ N = & N(x), \beta^j = \beta^j(x), g_{ij} = g_{ij}(x). \end{aligned} \quad (3.2.177)$$

## 正規直交基底

$$\tilde{\theta}^0 = N dt, \quad \tilde{\theta}^I = \theta^I_i(x) (dx^i + \beta^i dt) = \theta^I + \beta^I dt. \quad (3.2.178)$$



## 接続形式

$$\tilde{\omega}^0_I = \frac{1}{N} D_I N \tilde{\theta}^0 - K_{IJ} \tilde{\theta}^J = (D_I N - K_{IJ} \beta^J) dt - K_{IJ} \theta^J, \quad (3.2.179a)$$

$$\tilde{\omega}^I_J = \omega^I_J - \Omega_{IJ} \tilde{\theta}^J. \quad (3.2.179b)$$

ここで、 $D$  は  $n$  次元空間計量  $g_{ij}$  に関する共変微分、 $\omega^I_J$  は対応する基底  $\theta^I$  に関する接続形式。また、

$$K_{IJ} = \frac{1}{2N} ((D\beta)_{IJ} + (D\beta)_{JI}), \quad (3.2.180)$$

$$\Omega_{IJ} = \frac{1}{2N} ((D\beta)_{IJ} - (D\beta)_{JI}). \quad (3.2.181)$$

## 曲率テンソル

$$\begin{aligned} \tilde{R}^0_{I0J} = & -\frac{1}{N} (D^2 N)_{IJ} + \frac{1}{N} (D_\beta K)_{IJ} + K_{IL} K^L_J \\ & - K^L_I \Omega_{LJ} + \Omega_{IL} K^L_J, \end{aligned} \quad (3.2.182a)$$

$$\tilde{R}^0_{IJK} = (DK)_{KJI} - (DK)_{JKI}, \quad (3.2.182b)$$

$$\tilde{R}_{IJKL} = R_{IJKL} + K_{IK} K_{JL} - K_{IL} K_{JK}. \quad (3.2.182c)$$

## Ricci テンソル

$$\tilde{R}_{00} = \frac{1}{N} \Delta_n N - \frac{1}{N} D_\beta K - K_{IJ} K^{IJ}, \quad (3.2.183a)$$

$$\tilde{R}_{0I} = -D_J K^J_I + D_I K, \quad (3.2.183b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{IJ} = & R_{IJ} - \frac{1}{N} (D^2 N)_{IJ} + \frac{1}{N} D_\beta K_{IJ} + K K_{IJ} \\ & - K^L_I \Omega_{LJ} + \Omega_{IL} K^L_J, \end{aligned} \quad (3.2.183c)$$

$$\tilde{R} = R - \frac{2}{N} \Delta_n N + \frac{2}{N} D_\beta K + K^2 + K_{IJ} K^{IJ} \quad (3.2.183d)$$

$$\tilde{G}_{00} = \frac{1}{2} R + K^2 - K_{IJ} K^{IJ}. \quad (3.2.183e)$$

□

### 3.2.12 光的定常系

#### 3.2.12.1 非回轉的な場合

計量：

$$ds^2 = 2du \left( d\rho + \frac{a}{2} du + b_i dz^i \right) + g_{ij} dz^i dz^j. \quad (3.2.184)$$

ここで,  $a, b_i, g_{ij}$  は  $u$  と  $z^i$  のみの関数.  $u$  が

$$\nabla_\mu \nabla_\nu u = 0, \quad \nabla u \cdot \nabla u = 0 \quad (3.2.185)$$

を満たすとき, 計量は常にこの形に書ける.

接続形式: 光的基底

$$\theta^+ = du, \quad \theta^- = d\rho + \frac{a}{2} du + b_i dz^i, \quad \theta^I = \theta^I_i(u, z) dz^i \quad (3.2.186)$$

$$e_+ = \partial_u - \frac{a}{2} \partial_\rho, \quad e_- = \partial_\rho, \quad e_I = e^j_I (\partial_j - b_j \partial_\rho) \quad (3.2.187)$$

に対して,

$$d\theta^+ = 0, \quad (3.2.188a)$$

$$d\theta^- = -A_I \theta^+ \wedge \theta^I + B_{IJ} \theta^I \wedge \theta^J, \quad (3.2.188b)$$

$$d\theta^I = -\hat{\omega}^I_J \wedge \theta^J + (K_{JI} + \Omega_{JI}) \theta^+ \wedge \theta^I \quad (3.2.188c)$$

より,

$$\omega^+_{+} = \omega^-_{-} = \omega^+_{I} = 0, \quad (3.2.189a)$$

$$\omega^-_{I} = A_I \theta^+ + (B_{IJ} - K_{IJ}) \theta^J, \quad (3.2.189b)$$

$$\omega^I_J = \hat{\omega}^I_J + (\Omega_{IJ} - B_{IJ}) \theta^+. \quad (3.2.189c)$$

ここで,

$$A_i = \frac{1}{2} \partial_i a - \partial_u b_i, \quad B_{ij} = \partial_{[i} b_{j]}, \quad (3.2.190a)$$

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \partial_u g_{ij}, \quad \Omega_{IJ} = e^j_{[I} \partial_u \theta_{J]j}, \quad (3.2.190b)$$

$$\partial_u \theta_{Ij} = \theta^J_j (K_{JI} + \Omega_{JI}). \quad (3.2.190c)$$

曲率テンソル:

$$R_{-\mu\nu\lambda} = 0, \quad (3.2.191a)$$

$$R_{+i+j} = -\frac{1}{2}D_i D_j a + D_{(i} \partial_u b_{j)} - \partial_u K_{ij} \\ + B_{il} K_j^l - K_i^l B_{lj} + K_i^l K_{lj} - B_i^l B_{lj}, \quad (3.2.191b)$$

$$R_{ij+k} = -D_i K_{jk} + D_j K_{ik} + D_k B_{ij}, \quad (3.2.191c)$$

$$R_{ijkl} = \hat{R}_{ijkl}. \quad (3.2.191d)$$

Ricci テンソル:

$$R_{-\mu} = 0, \quad (3.2.192a)$$

$$R_{++} = -\frac{1}{2}D \cdot Da + D^i (\partial_u b_i) - \partial_u K - K_{ij} K^{ij} + B_{ij} B^{ij} \quad (3.2.192b)$$

$$R_{+i} = -D_i K + D_j K_i^j + D_j B_i^j, \quad (3.2.192c)$$

$$R_{ij} = \hat{R}_{ij}. \quad (3.2.192d)$$

### 3.2.13 球対称系

#### 3.2.13.1 3D Riemann

【公式 3.55 (BH1995.12.16)】

計量: 球対称 3D Riemann 多様体

$$ds^2 = \Lambda^2(\chi)d\chi^2 + r(\chi)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.2.193)$$

Christoffel symbols:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\chi\chi}^{\chi} &= \frac{\Lambda'}{\Lambda}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^{\chi} = -\frac{rr'}{\Lambda^2}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^{\chi} = -\frac{rr'}{\Lambda^2} \sin^2\theta, \\ \Gamma_{\chi\theta}^{\theta} &= \Gamma_{\chi\phi}^{\phi} = \frac{r'}{r}, \\ \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\sin\theta \cos\theta, \quad \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \cot\theta. \end{aligned} \quad (3.2.194)$$

Orthogonal basis:

$$\theta^1 = \Lambda d\chi, \quad \theta^2 = rd\theta, \quad \theta^3 = r \sin\theta d\phi. \quad (3.2.195)$$

Connection form:

$$\omega^1_2 = -\frac{r'}{r\Lambda}\theta^2, \quad \omega^1_3 = -\frac{r'}{r\Lambda}\theta^3, \quad \omega^2_3 = -\frac{\cot\theta}{r}\theta^3. \quad (3.2.196)$$

Curvature form:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^1_A &= -\frac{1}{r\Lambda} \left( \frac{r'}{\Lambda} \right)' \theta^1 \wedge \theta^A, \quad (A = 2, 3) \\ \mathcal{R}^2_3 &= \frac{1}{r^2} \left( 1 - \left( \frac{r'}{\Lambda} \right)^2 \right) \theta^2 \wedge \theta^3. \end{aligned} \quad (3.2.197)$$

Ricci tensor:

$$R_{11} = -\frac{2}{r\Lambda} \left( \frac{r'}{\Lambda} \right)', \quad (3.2.198)$$

$$R_{22} = R_{33} = -\frac{1}{r\Lambda} \left( \frac{r'}{\Lambda} \right)' + \frac{1}{r^2} \left( 1 - \left( \frac{r'}{\Lambda} \right)^2 \right), \quad (3.2.199)$$

$$R = \frac{2}{r^2 r'} \left[ r \left( 1 - \left( \frac{r'}{\Lambda} \right)^2 \right) \right]'. \quad (3.2.200)$$

□

### 3.2.13.2 $(m + 1)$ -dim Riemann

#### 【公式 3.56】

計量:  $SO(m + 1)$  対称  $(m + 1)$ D Riemann 多様体

$$ds^2 = e^{-2W(\chi)} d\chi^2 + r^2(\chi) d\Omega_m^2; \quad d\Omega_m^2 = \gamma_{AB}(z) dz^A dz^B. \quad (3.2.201)$$

Christoffel symbols:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\chi\chi}^\chi &= -W', \quad \Gamma_{AB}^\chi = -r' r e^{2W} \gamma_{AB}, \\ \Gamma_{B\chi}^A &= \frac{r'}{r} \delta_B^A, \quad \Gamma_{BC}^A = {}^m \Gamma_{BC}^A. \end{aligned} \quad (3.2.202)$$

Orthogonal basis:

$$\theta^1 = e^{-W} d\chi, \quad \theta^A = r \hat{\theta}^A. \quad (3.2.203)$$

Connection form:

$$\omega^1{}_A = -\frac{r' e^W}{r} \theta^A, \quad \omega^A{}_B = \hat{\omega}^A{}_B. \quad (3.2.204)$$

Curvature form:

$$\mathcal{R}^1{}_A = -\frac{e^{2W}}{r} (r'' + r'W') \theta^1 \wedge \theta^A, \quad (3.2.205a)$$

$$\mathcal{R}^A{}_B = \frac{1}{r^2} (1 - (r')^2 e^{2W}) \theta^A \wedge \theta^B. \quad (3.2.205b)$$

Ricci tensor:

$$R_{11} = -m \frac{e^{2W}}{r} (r'' + r'W'), \quad (3.2.206a)$$

$$R_{1A} = 0, \quad (3.2.206b)$$

$$R_{AB} = \left[ -\frac{e^{2W}}{r} (r'' + r'W') + (m - 1) \frac{1 - (r')^2 e^{2W}}{r^2} \right] \delta_{AB}, \quad (3.2.206c)$$

$$R = -2m \frac{e^{2W}}{r} (r'' + r'W') + m(m - 1) \frac{1 - (r')^2 e^{2W}}{r^2}. \quad (3.2.206d)$$

□

### 3.2.13.3 4D Static Riemannian

【公式 3.57 (BH1997.7.22)】

計量: 静的球対称 Riemann 空間

$$ds^2 = f(r)d\tau^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega_2^2. \quad (3.2.207)$$

Orthonormal basis:

$$\theta^0 = f^{1/2}d\tau, \theta^1 = f^{-1/2}dr, \theta^2 = rd\theta, \theta^3 = r \sin \theta d\phi. \quad (3.2.208)$$

Connection form:

$$\begin{aligned} \omega^0_1 &= \frac{1}{2}f^{-1/2}f'\theta^0, \quad \omega^2_3 = -\frac{\cot \theta}{r}\theta^3, \\ \omega^0_A &= 0, \quad \omega^1_A = -\frac{f^{1/2}}{r}\theta^A \quad (A = 2, 3). \end{aligned} \quad (3.2.209)$$

Curvature form:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^0_1 &= -\frac{1}{2}f''\theta^0 \wedge \theta^1, \quad \mathcal{R}^2_3 = \frac{1-f}{r^2}\theta^2 \wedge \theta^3, \\ \mathcal{R}^0_A &= -\frac{f'}{2r}\theta^0 \wedge \theta^A, \\ \mathcal{R}^1_A &= -\frac{f'}{2r}\theta^1 \wedge \theta^A, \end{aligned} \quad (3.2.210)$$

(A = 2, 3).

Ricci tensor:

$$\begin{aligned} R_{00} &= R_{11} = -\frac{1}{2}f'' - \frac{f'}{r}, \\ R_{22} &= R_{33} = -\frac{f'}{r} + \frac{1-f}{r^2}, \\ R &= -f'' - \frac{4f'}{r} + \frac{2(1-f)}{r^2}. \end{aligned} \quad (3.2.211)$$

Einstein tensor:

$$G_{00} = G_{11} = \frac{[r(f-1)]'}{r^2}, \quad G_{22} = G_{33} = \frac{(r^2 f)'}{2r^2}. \quad (3.2.212)$$

□

### 3.2.13.4 4D Lorenzian:general

【公式 3.58 (BH1995.12.17)】

計量: 球対称時空

$$ds^2 = -N^2 d\tau^2 + \Lambda^2 (d\chi + \beta d\tau)^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (3.2.213)$$

( $N, \Lambda, \beta, r$  は  $\tau, \chi$  のみの関数) .

**Extrinsic curvature:**  $\tau$  = 一定面の外部曲率は

$$K_\chi^\chi = \frac{1}{N\Lambda} \left( -\dot{\Lambda} + (\Lambda\beta)' \right), \quad (3.2.214)$$

$$K_\theta^\theta = K_\phi^\phi = \frac{1}{Nr} (-\dot{r} + r'\beta). \quad (3.2.215)$$

**Orthonormal frame:**

$$\theta^0 = Nd\tau, \quad \theta^1 = \Lambda(d\chi + \beta d\tau), \quad \theta^2 = rd\theta, \quad \theta^3 = r \sin\theta d\phi. \quad (3.2.216)$$

**Connection form:**

$$\begin{aligned} \omega^0_1 &= \frac{N'}{N\Lambda} \theta^0 - K_\chi^\chi \theta^1, \\ \omega^0_A &= -K_\theta^\theta \theta^A, \quad \omega^1_A = -\frac{r'}{r\Lambda} \theta^A \quad (A = 2, 3) \\ \omega^2_3 &= -\frac{\cot\theta}{r} \theta^3. \end{aligned} \quad (3.2.217)$$

**Curvature form:**

$$\mathcal{R}^0_1 = \left[ -\frac{1}{N\Lambda} \left( \frac{N'}{\Lambda} \right)' + (K_\chi^\chi)^2 - \frac{1}{N} (\partial_\tau - \beta \partial_\chi) K_\chi^\chi \right] \theta^0 \wedge \theta^1 \quad (3.2.218)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^0_A &= \left[ (K_\theta^\theta)^2 - \frac{1}{N} (\partial_\tau - \beta \partial_\chi) K_\theta^\theta - \frac{N'r'}{rN\Lambda^2} \right] \theta^0 \wedge \theta^A \\ &\quad - \left[ \frac{1}{r\Lambda} (rK_\theta^\theta)' - \frac{r'}{r\Lambda} K_\chi^\chi \right] \theta^1 \wedge \theta^A \quad (A = 2, 3), \end{aligned} \quad (3.2.219)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^1_A &= \left[ \frac{1}{r\Lambda} (rK_\theta^\theta)' - \frac{r'}{r\Lambda} K_\chi^\chi \right] \theta^0 \wedge \theta^A \\ &\quad + \left[ K_\theta^\theta K_\chi^\chi - \frac{1}{r\Lambda} \left( \frac{r'}{\Lambda} \right)' \right] \theta^1 \wedge \theta^A \quad (A = 2, 3), \end{aligned} \quad (3.2.220)$$

$$\mathcal{R}^2_3 = \left[ (K_\theta^\theta)^2 + \frac{1}{r^2} \left( 1 - \left( \frac{r'}{\Lambda} \right)^2 \right) \right] \theta^2 \wedge \theta^3. \quad (3.2.221)$$

**Ricci tensor:**

$$R_{00} = \frac{1}{N\Lambda} \left( \frac{N'}{\Lambda} \right)' + \frac{2N'r'}{rN\Lambda^2} - (K_\chi^\chi)^2 - 2(K_\theta^\theta)^2 + \frac{1}{N}(\partial_\tau - \beta\partial_\chi)(K_\chi^\chi + 2K_\theta^\theta), \quad (3.2.222)$$

$$R_{01} = \frac{2}{r\Lambda} [(rK_\theta^\theta)' - r'K_\chi^\chi], \quad (3.2.223)$$

$$R_{11} = -\frac{1}{N\Lambda} \left( \frac{N'}{\Lambda} \right)' - \frac{2}{r\Lambda} \left( \frac{r'}{\Lambda} \right)' + 2K_\theta^\theta K_\chi^\chi + (K_\chi^\chi)^2 - \frac{1}{N}(\partial_\tau - \beta\partial_\chi)K_\chi^\chi, \quad (3.2.224)$$

$$R_{22} = R_{33} = -\frac{N'r'}{rN\Lambda^2} - \frac{1}{r\Lambda} \left( \frac{r'}{\Lambda} \right)' + \frac{1}{r^2} \left( 1 - \left( \frac{r'}{\Lambda} \right)^2 \right) + K_\theta^\theta(K_\chi^\chi + 2K_\theta^\theta) - \frac{1}{N}(\partial_\tau - \beta\partial_\chi)K_\theta^\theta. \quad (3.2.225)$$

**Einstein tensor:**

$$G_{00} = K_\theta^\theta(K_\theta^\theta + 2K_\chi^\chi) + \frac{1}{r^2 r'} \left[ r \left( 1 - \left( \frac{r'}{\Lambda} \right)^2 \right) \right]' \quad (3.2.226)$$

$$G_{01} = \frac{2}{r\Lambda} [(rK_\theta^\theta)' - r'K_\chi^\chi], \quad (3.2.227)$$

$$G_{11} = -3(K_\theta^\theta)^2 + \frac{2}{N}(\partial_\tau - \beta\partial_\chi)K_\theta^\theta + \frac{2N'r'}{rN\Lambda^2} - \frac{1}{r^2} \left( 1 - \left( \frac{r'}{\Lambda} \right)^2 \right), \quad (3.2.228)$$

$$G_{22} = G_{33} = -(K_\chi^\chi)^2 - K_\theta^\theta K_\chi^\chi - (K_\theta^\theta)^2 + \frac{1}{N}(\partial_\tau - \beta\partial_\chi)(K_\chi^\chi + K_\theta^\theta) + \frac{1}{N\Lambda} \left( \frac{N'}{\Lambda} \right)' + \frac{N'r'}{rN\Lambda^2} + \frac{1}{r\Lambda} \left( \frac{r'}{\Lambda} \right)' \quad (3.2.229)$$

□



### 3.2.13.5 4D Weyl tensor

【公式 3.59 (Weyl tensor)】

4D 球対称時空の曲率形式を正規直交基底を用いて

$$\mathcal{R}^0_{\ 1} = A\theta^0 \wedge \theta^1, \quad (3.2.230)$$

$$\mathcal{R}^0_{\ I} = B\theta^0 \wedge \theta^I + C\theta^1 \wedge \theta^I \quad (I = 2, 3), \quad (3.2.231)$$

$$\mathcal{R}^1_{\ I} = -C\theta^0 \wedge \theta^I + D\theta^1 \wedge \theta^I \quad (I = 2, 3), \quad (3.2.232)$$

$$\mathcal{R}^2_{\ 3} = E\theta^2 \wedge \theta^3 \quad (3.2.233)$$

とおくと,

**Ricci 曲率:**

$$R^0_{\ 0} = A + 2B, \quad R^1_{\ 1} = 2C, \quad R^1_{\ 1} = A + 2D, \quad R_{IJ} = (B + D + E)\delta_{AB}, \quad (3.2.234)$$

$$R = 2A + 4B + 4D + 2E. \quad (3.2.235)$$

**Weyl 曲率:**

$$\mathcal{C}^{01} = -2\Psi_2\theta^0 \wedge \theta^1, \quad (3.2.236)$$

$$\mathcal{C}^{0I} = \Psi_2\theta^0 \wedge \theta^I \quad (I = 2, 3), \quad (3.2.237)$$

$$\mathcal{C}^{1I} = \Psi_2\theta^1 \wedge \theta^I \quad (I = 2, 3), \quad (3.2.238)$$

$$\mathcal{C}^{23} = -2\Psi_2\theta^2 \wedge \theta^3. \quad (3.2.239)$$

ここで

$$\Psi_2 = \frac{1}{6}(-A + B + D - E). \quad (3.2.240)$$

□

### 3.2.13.6 4D Lorenzian: Null frame

【公式 3.60 (Null frame[GR1998.10.12])]】

計量: 4次元球対称時空

$$ds^2 = 2A dv d\chi - B dv^2 + r^2 d\Omega_2^2. \quad (3.2.241)$$

Null tetrad:

$$\theta^+ = dv, \quad \theta^- = -A d\chi + \frac{B}{2} dv, \quad \theta^2 = r d\theta, \quad \theta^3 = r \sin \theta d\phi. \quad (3.2.242)$$

Connection form:

$$\begin{aligned} \omega^+{}_{+} &= -\omega^-{}_{-} = P\theta^+, & \omega^+{}_{-} &= \omega^-{}_{+} = 0, \\ \omega^+{}_{A} &= \frac{Q_+}{r}\theta^A, & \omega^-{}_{A} &= \frac{Q_-}{r}\theta^A, \quad (A = 2, 3) \\ \omega^2{}_{3} &= -\frac{\cot \theta}{r}\theta^3. \end{aligned} \quad (3.2.243)$$

ここで,

$$P = \frac{2\dot{A} + B'}{2A}, \quad Q_+ = -\frac{r'}{A}, \quad Q_- = \dot{r} + \frac{B}{2A}r'. \quad (3.2.244)$$

Curvature form:

$$\mathcal{R}^+{}_{+} = -\mathcal{R}^-{}_{-} = \frac{P'}{A}\theta^+ \wedge \theta^-, \quad (3.2.245)$$

$$\mathcal{R}^+{}_{A} = -\frac{Q'_+}{rA}\theta^+ \wedge \theta^A - \frac{Q'_+}{rA}\theta^- \wedge \theta^A, \quad (3.2.246)$$

$$\mathcal{R}^-{}_{A} = \frac{1}{r} \left( \dot{Q}_- + \frac{B}{2A}Q'_- - PQ_- \right) \theta^+ \wedge \theta^A - \frac{Q'_-}{rA}\theta^- \wedge \theta^A. \quad (3.2.247)$$

$$\mathcal{R}^2{}_{3} = \frac{1}{r^2}(1 + 2Q_+Q_-)\theta^2 \wedge \theta^3. \quad (3.2.248)$$

Einstein tensor:

$$G^+{}_{+} = G^-{}_{-} = \frac{2}{r^2A}(rQ_-)' - \frac{1}{r^2}, \quad (3.2.249)$$

$$G^-{}_{-} = -\frac{2Q'_+}{rA}, \quad (3.2.250)$$

$$G^+{}_{+} = \frac{2}{r} \left( \dot{Q}_- + \frac{B}{2A}Q'_- - PQ_- \right), \quad (3.2.251)$$

$$G^A{}_B = \frac{1}{A} \left( \frac{2Q'_-}{r} + P' \right) \delta^A_B. \quad (3.2.252)$$

**Energy-Momentum conservation:**

$$\begin{aligned}\nabla_a T^{+a} &= \frac{1}{(rA)^2} \partial_v [(rA)^2 T^{++}] + \frac{1}{2rA} \partial_\chi (rBT^{++}) \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \partial_- (r^2 T^{+-}) + \frac{Q_+}{r} T_A^A, \quad (3.2.253)\end{aligned}$$

$$\nabla_a T^{-a} = \frac{1}{r^2} \partial_+ (r^2 T^{+-}) + \frac{1}{r^2} \partial_- (r^2 T^{--}) + \frac{Q_-}{r} T_A^A \quad (3.2.254)$$

ここで,

$$\partial_+ = \partial_v + \frac{B}{2A} \partial_\chi, \quad \partial_- = -\frac{1}{A} \partial_\chi. \quad (3.2.255)$$

□

### 3.2.13.7 Janis-Newman-Winicour 時空

時空計量

$$ds^2 = -F^\nu dt^2 + F^{-\nu} d\chi^2 + F^{1-\nu} \chi^2 d\Omega_2^2.$$

ここで,

$$F = 1 - \frac{a}{\chi}.$$

曲率 正規直交基底

$$\theta^0 = F^{\nu/2} dt, \quad \theta^1 = F^{-\nu/2} d\chi, \quad \theta^2 = F^{(1-\nu)/2} \chi d\theta, \quad \theta^3 = F^{(1-\nu)/2} \chi \sin \theta d\phi$$

に関する成分表示のもとで, 曲率形式は

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^0_1 &= A\theta^0 \wedge \theta^1, \\ \mathcal{R}^0_I &= B\theta^0 \wedge \theta^I + C\theta^1 \wedge \theta^I \quad (I = 2, 3), \\ \mathcal{R}^1_I &= -C\theta^0 \wedge \theta^I + D\theta^1 \wedge \theta^I \quad (I = 2, 3), \\ \mathcal{R}^2_3 &= E\theta^2 \wedge \theta^3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{a\nu}{2\chi^3} \left( 2 - (\nu + 1) \frac{a}{\chi} \right) F^{\nu-2}, \\
B &= -\frac{1}{2}A, \\
C &= 0, \\
D &= -\frac{a}{4\chi^3} \left( 2\nu - (\nu + 1) \frac{a}{\chi} \right) F^{\nu-2}, \\
E &= \frac{a}{\chi^3} \left( \nu - \frac{(\nu + 1)^2 a}{4\chi} \right) F^{\nu-2}.
\end{aligned}$$

Ricci 曲率は

$$\begin{aligned}
R_0^0 &= R_1^0 = 0, \quad R_{IJ} = 0, \\
R_1^1 &= R = 2\kappa^2 \rho.
\end{aligned}$$

ここで,  $\rho$  は固有密度で

$$\kappa^2 \rho = \frac{(1 - \nu^2)a^2}{4\chi^4} F^{\nu-2}.$$

また, Weyl 曲率に対する Penrose 係数  $\Psi_2$  は

$$\Psi_2 = -\frac{a}{6\chi^3} F^{\nu-2} \left[ 2\nu - \frac{(\nu + 1)(2\nu + 1)a}{2\chi} \right].$$

注 JNW 計量およびスカラ場

$$\begin{aligned}
\kappa\Phi &= \frac{\sqrt{2}q}{a} \ln F, \\
q^2 &= \frac{a^2(1 - \nu^2)}{4}
\end{aligned}$$

は, 質量ゼロのスカラ場と重力系に対する静的球対称解となる. 全系の重力質量  $M$  は

$$M = a\nu$$

となる. この解は, 最初 Janis-Newman-Winicour[JNW68] により発見され, その後 Wyman[Wym81] により再発見された. 両解の同等性は Virbhadra[Vir97] により指摘された.

**Conformal structure**  $r$  および  $r_*$  を

$$r = F^{(1-\nu)/2}\chi,$$

$$dr_* = F^{-\nu}d\chi = \frac{F^{(1-\nu)/2}dr}{1 - \frac{\nu+1}{2}\frac{a}{\chi}}$$

により導入すると, 計量は

$$ds^2 = -F^\nu(dt^2 - dr_*^2) + r^2d\Omega_2^2$$

と表される.  $1 < \nu$  のとき,  $\chi \rightarrow a+$  で  $r_* \rightarrow -\infty$  より,  $\chi = a$  は  $\mathcal{I}^\pm$  と同じ構造の null 面となる. この面で  $r = \infty$  となるが,  $\nu \geq 2$  のとき曲率と  $\rho$  は有界,  $1 < \nu < 2$  のとき曲率と  $\rho$  は発散する. また,

$$l = \int^{\chi} F^{-\nu/2}d\chi$$

とおくと,  $l$  は  $\chi = a$  で  $\nu \geq 2$  のとき無限大,  $1 < \nu < 2$  のとき有界となる. ただし,  $1 < \nu$  では  $\rho < 0$ .

一方,  $0 < \nu < 1$  のとき,  $\rho > 0$  となるが,  $\chi \rightarrow a+$  で  $r_*$  は有界,  $\rho, \Psi_2 \rightarrow +\infty$  となるので,  $\chi = a$  は時間的特異点集合となる.  $r \rightarrow 0$  なので, この集合は時空において線的である.

時間的 Killing ベクトルを  $\xi = \partial_t$ , 動径方向の光的測地線の接ベクトルを  $k$ , アフィンパラメーターを  $\lambda$  とすると,

$$k \cdot \xi = k_t = -F^\nu \frac{dt}{d\lambda} = \omega,$$

$$dt = \pm F^{-\nu}d\chi$$

( $\omega$  は定数) より,

$$d\chi = \pm \omega d\lambda$$

となる. すなわち,  $\chi$  はアフィンパラメーターに比例する. よって, 光的測地線は  $\nu$  の値によらず有限なアフィンパラメーターで  $\chi = a$  に達する (光的不完備).

**特異点の質量** 局所質量を

$$m_L := \frac{1}{2}r [1 - (\nabla r)^2]$$

により定義すると, JNW 時空に対して,

$$m_L = \frac{a}{2F^{(\nu+1)/2}} \left[ \nu - \frac{a(1+\nu)^2}{4\chi} \right].$$

$\chi \rightarrow +\infty$  で  $m_L \rightarrow a\nu/2 = M$  となるが,  $\nu \neq 1$  のとき,  $\chi \rightarrow a+$  では  $m_L \rightarrow -\infty$ .

これに対して, Komar 質量

$$m_K = -\frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \nabla^\mu \xi^\nu dx^\lambda \wedge dx^\sigma$$

は  $\Sigma$  を  $t = r = \text{const}$  と取ると, 常に一定値  $m_K = M$  となる. これは, JNW 時空に対して

$$\nabla_\nu \nabla^\mu \xi^\nu = R_\nu^\mu \xi^\nu = 0$$

となるためである.

### 3.2.13.8 $(n+2)$ 次元球対称 Lorentz 系

計量  $D = n+2$  次元球対称系

$$ds^2 = -f(t, \chi) dt^2 + \frac{d\chi^2}{h(t, \chi)} + r(t, \chi)^2 d\Omega_n^2 \quad (3.2.256)$$

ここで,  $\dot{\Omega}_n^2 = \gamma_{ij}(z) dz^i dz^j$  は  $n$  次元単位球面の計量.

Christoffel 記号

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{\dot{f}}{2f}, \quad \Gamma_{t\chi}^t = \frac{f'}{2f}, \quad \Gamma_{\chi\chi}^t = -\frac{\dot{h}}{2fh^2}, \quad \Gamma_{ij}^t = \frac{r\dot{r}}{f} \gamma_{ij}, \quad (3.2.257a)$$

$$\Gamma_{tt}^\chi = \frac{hf'}{2}, \quad \Gamma_{t\chi}^\chi = -\frac{\dot{h}}{2h}, \quad \Gamma_{\chi\chi}^\chi = -\frac{h'}{2h}, \quad \Gamma_{ij}^\chi = -rr' \gamma_{ij} \quad (3.2.257b)$$

$$\Gamma_{tj}^i = \frac{\dot{r}}{r} \delta_j^i, \quad \Gamma_{\chi j}^i = \frac{r'}{r} \delta_j^i, \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i(S^n). \quad (3.2.257c)$$

## Riemann 曲率

$$R_{t\chi t\chi} = -\frac{f}{2h} {}^2R, \quad (3.2.258a)$$

$$R_{titj} = -rD_t^2 r \gamma_{ij}; \quad D_t^2 r = \left( \ddot{r} - \frac{\dot{f}}{2f} \dot{r} - \frac{hf'}{2} r' \right), \quad (3.2.258b)$$

$$R_{ti\chi j} = -rD_t D_\chi r \gamma_{ij}; \quad D_t D_\chi r = \left( \dot{r}' - \frac{f'}{2f} \dot{r} + \frac{\dot{h}}{2h} r' \right) \quad (3.2.258c)$$

$$R_{\chi i \chi j} = -rD_\chi^2 r \gamma_{ij}; \quad D_\chi^2 r = \left( r'' + \frac{\dot{h}}{2fh^2} \dot{r} + \frac{h'}{2h} r' \right) \quad (3.2.258d)$$

$$R^i{}_{jkl} = (1 - (Dr)^2) (\delta_k^i \gamma_{jl} - \delta_l^i \gamma_{jk}), \quad (3.2.258e)$$

ここで

$${}^2R = -\frac{\ddot{h}}{fh} + \frac{3\dot{h}^2}{2fh^2} + \frac{\dot{f}\dot{h}}{2f^2h} - h\frac{f''}{f} + \frac{h(f')^2}{2f^2} - \frac{h'f'}{2f} \quad (3.2.259a)$$

$$(Dr)^2 = -\frac{\dot{r}^2}{f} + h(r')^2. \quad (3.2.259b)$$

## Ricci テンソル

$$R_{ab} = \frac{1}{2} {}^2R g_{ab} - n \frac{D_a D_b r}{r}, \quad (a, b = t, \chi) \quad (3.2.260a)$$

$$R_{ai} = 0, \quad (3.2.260b)$$

$$R_{ij} = \left\{ -\frac{\square r}{r} + (n-1) \frac{1 - (Dr)^2}{r^2} \right\} g_{ij}, \quad (3.2.260c)$$

$$R = {}^2R - 2n \frac{\square r}{r} + n(n-1) \frac{1 - (Dr)^2}{r^2}. \quad (3.2.260d)$$

ここで,

$$\square r = -\frac{\ddot{r}}{f} + \frac{1}{2f} \left( \frac{\dot{f}}{f} + \frac{\dot{h}}{f} \right) \dot{r} + hr'' + \frac{h}{2} \left( \frac{f'}{f} + \frac{h'}{h} \right) r'. \quad (3.2.261)$$

3.2.13.9  $(n+2)$ 次元静的球対称系

計量  $D = n+2$ 次元静的球対称系

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{h(r)} + r^2 d\Omega_n^2 \quad (3.2.262)$$

ここで,  $\dot{\Omega}_n^2 = \gamma_{ij}(z) dz^i dz^j$  は  $n$ 次元単位球面の計量.

## Christoffel 記号

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{f'}{2f}, \quad \Gamma_{tt}^r = \frac{hf'}{2}, \quad \Gamma_{rr}^r = -\frac{h'}{2h}, \quad (3.2.263a)$$

$$\Gamma_{ij}^r = -rh\gamma_{ij}, \quad \Gamma_{rj}^i = \frac{1}{r}\delta_j^i, \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i(S^n). \quad (3.2.263b)$$

## Riemann 曲率

$$R_{trtr} = -\frac{f}{2h} {}^2R, \quad (3.2.264a)$$

$$R_{titj} = -rD_t^2 r \gamma_{ij}; \quad D_t^2 r = -\frac{hf'}{2}, \quad (3.2.264b)$$

$$R_{tirj} = -rD_t D_r r \gamma_{ij} = 0, \quad (3.2.264c)$$

$$R_{rirj} = -rD_r^2 r \gamma_{ij}; \quad D_r^2 r = \frac{h'}{2h}, \quad (3.2.264d)$$

$$R^i_{jkl} = (1-h)(\delta_k^i \gamma_{jl} - \delta_l^i \gamma_{jk}), \quad (3.2.264e)$$

ここで

$${}^2R = -h\frac{f''}{f} + \frac{h(f')^2}{2f^2} - \frac{h'f'}{2f}, \quad (3.2.265a)$$

$$(3.2.265b)$$

## Ricci テンソル

$$R_{tt} = \frac{h}{2}f'' + \left(\frac{h'}{4} + \frac{nh}{2r}\right)f' - \frac{h(f')^2}{4f}, \quad (3.2.266a)$$

$$R_{tr} = 0, \quad (3.2.266b)$$

$$R_{rr} = -\frac{f''}{2f} + \frac{(f')^2}{4f^2} - \left(\frac{n}{2r} + \frac{f'}{4f}\right)\frac{h'}{h}, \quad (3.2.266c)$$

$$R_{ai} = 0, \quad (3.2.266d)$$

$$R_{ij} = \left[-\frac{hf'}{2rf} - \frac{h'}{2r} + (n-1)\frac{1-h}{r^2}\right]g_{ij}, \quad (3.2.266e)$$

$$R = -h\frac{f''}{f} + \frac{h(f')^2}{2f^2} - \left(\frac{h'}{2h} + \frac{nh}{rf}\right)f' - \frac{n}{r}h' + \frac{n(n-1)}{r^2}(1-h). \quad (3.2.266f)$$



目次へ

特に,

$$G_{tt} = \frac{nf}{2r^n} \{r^{n-1}(1-h)\}' , \quad (3.2.267)$$

$$R_t^t - R_r^r = \frac{nf}{2r} \left(\frac{h}{f}\right)' . \quad (3.2.268)$$

### 3.2.14 静的 $SO(n+1)$ 対称系

時空計量

$$ds^2 = -e^{2U(x)} dt^2 + r(x)^2 d\Omega_n^2 + h_{ij}(x) dx^i dx^j$$

正規直交基底

$$\theta^0 = e^{U(x)} dt, \quad \theta^I = \theta^I_i(x) dx^i, \quad \theta^A = r(x) \chi_p^A(z) dz^p.$$

ここで,  $I = 1, \dots, m$ ,  $A = m+1, \dots, m+n$ .

接続形式

$$\begin{aligned} \omega^0_I &= U_I \theta^0, & \omega^0_A &= 0, \\ \omega^I_J &= \hat{\omega}^I_J(x), & \omega^I_A &= -\frac{r_I}{r} \theta^A, \\ \omega^A_B &= \hat{\omega}^A_B(z). \end{aligned}$$

ここで,  $X_I$  を  $\theta^I$  の双対基底として,  $Q_I = X^i_I \partial_i Q(x)$ .

曲率形式

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^0_I &= P_{IJ} \theta^0 \wedge \theta^J, \\ \mathcal{R}^0_A &= S \theta^0 \wedge \theta^A, \\ \mathcal{R}^I_J &= \frac{1}{2} {}^m R^I_{JKL}(x) \theta^K \wedge \theta^L, \\ \mathcal{R}^I_A &= Q_{IJ} \theta^J \wedge \theta^A, \\ \mathcal{R}^A_B &= T \theta^A \wedge \theta^B \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} P_{IJ} &= -((D^2U)_{IJ} + U_I U_J), \\ S &= -\frac{Dr \cdot DU}{r}, \\ Q_{IJ} &= -\frac{(D^2r)_{IJ}}{r}, \\ T &= \frac{K - (Dr)^2}{r^2} \end{aligned}$$

ただし,  $D$  は  $h_{ij}$  に関する共変微分. また,  $n=1$  のとき  $K=0$ .

## 曲率テンソル

$$\begin{aligned}
R^0{}_{I0J} &= P_{IJ}, \\
R^0{}_{A0B} &= S\delta_{AB}, \\
R^I{}_{JKL} &= {}^m R^I{}_{JKL}, \\
R^I{}_{AJB} &= Q_{IJ}\delta_{AB}, \\
R^A{}_{BCD} &= T(\delta_C^A\delta_{BD} - \delta_D^A\delta_{BC}).
\end{aligned}$$

## Ricci 曲率

$$\begin{aligned}
R^0{}_0 &= P + nS \\
&= -\Delta U - (DU)^2 - n\frac{Dr \cdot DU}{r}, \\
R_{IJ} &= P_{IJ} + nQ_{IJ} + {}^m R_{IJ} \\
&= -(D^2U)_{IJ} - U_I U_J - n\frac{(D^2r)_{IJ}}{r} + {}^m R_{IJ}, \\
R_{AB} &= [Q + S + (n-1)T]\delta_{AB} \\
&= \left( -\frac{\Delta r + Dr \cdot DU}{r} + (n-1)\frac{K - (Dr)^2}{r^2} \right) \delta_{AB}, \\
R &= 2P + 2n(Q + S) + n(n-1)T + {}^m R \\
&= -2(\Delta U + (DU)^2) - 2n\frac{Dr \cdot DU}{r} + {}^m R - 2n\frac{\Delta r}{r} + n(n-1)\frac{K - (Dr)^2}{r^2}.
\end{aligned}$$

ただし,  $\Delta = D^i D_i$ ,  $P = P^I{}_I$ ,  $Q = Q^I{}_I$ .

Weyl 曲率 ただし,  $n = 2$ .

$$\begin{aligned}
C^{0I}{}_{0J} &= \frac{n}{n+1}(\hat{P}_{IJ} - \hat{Q}_{IJ}) + \frac{n[n(P-2S) - (n-2)Q + 2(n-1)T - {}^2R]}{2(n+1)(n+2)}\delta_{IJ}, \\
C^{0A}{}_{0B} &= \frac{-n(P-2S) + (n-2)Q - 2(n-1)T + {}^2R}{(n+1)(n+2)}\delta_{AB}, \\
C_{IJKL} &= \frac{-2n(P-2S) - 2n^2Q + 2n(n-1)T + n(n+1)^2R}{2(n+1)(n+2)}(\delta_{IK}\delta_{JL} - \delta_{IL}\delta_{JK}), \\
C^{IA}{}_{JB} &= \left[ \frac{-\hat{P}_{IJ} + \hat{Q}_{IJ}}{n+1} + \frac{-(n-2)(P-2S) + (3n-4)Q - 4(n-1)T - n^2R}{2(n+1)(n+2)}\delta_{IJ} \right] \delta_{AB}, \\
C^{AB}{}_{CD} &= \frac{2(P-2S) - 4Q + 6T + {}^2R}{(n+1)(n+2)}(\delta_C^A\delta_D^B - \delta_D^A\delta_C^B).
\end{aligned}$$

[目次へ](#)

ただし,

$$\begin{aligned}\hat{P}_{IJ} &= P_{IJ} - \frac{1}{2}P\delta_{IJ}, \\ \hat{Q}_{IJ} &= Q_{IJ} - \frac{1}{2}Q\delta_{IJ}.\end{aligned}$$

[目次へ](#)

### 3.2.15 Cohomogeneity one

#### 3.2.15.1 単純回転型

時空計量 時空は局所的に  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times Z_n$  で,

$$ds^2 = \frac{dx^2}{4\Delta(x)} - C(x)dt^2 + B(x)(\chi - \Omega(x)dt)^2 + A(x)ds^2(Z_n). \quad (3.2.269)$$

ここで,  $ds^2(Z_n)$  は  $x, t$  によらずかつ,

$$d\chi = 2\varphi \quad (3.2.270)$$

で定義される 2 形式は  $Z_n$  上の 2 形式と見なすことができるとする.

正規直交規定

$$\theta^0 = \sqrt{C}dt, \quad \theta^1 = \frac{dx}{2\sqrt{\Delta}}, \quad \theta^2 = \sqrt{B}(\chi - \Omega dt), \quad \theta^I = \sqrt{A}\chi^I \quad (I = 3, n+2). \quad (3.2.271)$$

ただし,

$$ds^2(Z_n) = \delta_{IJ}\chi^I\chi^J. \quad (3.2.272)$$

接続形式

$$\omega_{01} = -\sqrt{\Delta}\frac{C'}{C} - \sqrt{\frac{\Delta B}{C}}\Omega'\theta^2, \quad (3.2.273a)$$

$$\omega_{02} = -\sqrt{\frac{\Delta B}{C}}\Omega'\theta^1, \quad (3.2.273b)$$

$$\omega_{0I} = 0, \quad (3.2.273c)$$

$$\omega_{12} = \sqrt{\frac{\Delta B}{C}}\Omega'\theta^0 - \sqrt{\Delta}\frac{B'}{B}\theta^2, \quad (3.2.273d)$$

$$\omega_{1I} = -\sqrt{\Delta}\frac{A'}{A}\theta^I, \quad (3.2.273e)$$

$$\omega_{2I} = \frac{\sqrt{B}}{A}\hat{\varphi}_{IJ}\theta^J, \quad (3.2.273f)$$

$$\omega_{IJ} = -\frac{\sqrt{B}}{A}\hat{\varphi}_{IJ}\theta^2 + \hat{\omega}_{IJ}. \quad (3.2.273g)$$

ここで,

$$\phi = \frac{1}{2}\hat{\varphi}_{IJ}\chi^I \wedge \chi^J, \quad (3.2.274)$$

$$d\chi^I = -\hat{\omega}^I{}_J \wedge \chi^J. \quad (3.2.275)$$

## 曲率テンソル

$$R_{0101} = 2\Delta C_2 + \Delta' C_1 - \Delta C_1^2 - 3\Delta(\Omega')^2 \frac{B}{C}, \quad (3.2.276a)$$

$$R_{0112} = \sqrt{\frac{B}{C}} (-\Delta' \Omega' - 2\Delta \Omega'' - 3\Delta \Omega' B_1 + \Delta \Omega' C_1), \quad (3.2.276b)$$

$$R_{01IJ} = -2\sqrt{\frac{\Delta B}{C A}} \Omega' \hat{\varphi}_{IJ}, \quad (3.2.276c)$$

$$R_{0202} = \Delta B_1 C_1 + \Delta(\Omega')^2 \frac{B}{C}, \quad (3.2.276d)$$

$$R_{0I0J} = \Delta A_1 C_1 \delta_{IJ}, \quad (3.2.276e)$$

$$R_{0I1J} = -\sqrt{\frac{\Delta B}{C A}} \Omega' \hat{\varphi}_{IJ}, \quad (3.2.276f)$$

$$R_{0I2J} = \sqrt{\frac{B}{C}} \Delta A_1 \Omega' \delta_{IJ}, \quad (3.2.276g)$$

$$R_{1212} = -\Delta' B_1 - 2\Delta B_2 + \Delta B_1^2 - \Delta(\Omega')^2 \frac{B}{C}, \quad (3.2.276h)$$

$$R_{12IJ} = 2\frac{\sqrt{\Delta B}}{A} (A_1 - B_1) \varphi_{IJ}, \quad (3.2.276i)$$

$$R_{1I1J} = (-\Delta' A_1 - 2\Delta A_2 + \Delta A_1^2) \delta_{IJ}, \quad (3.2.276j)$$

$$R_{1I2J} = \frac{\sqrt{\Delta B}}{A} (A_1 - B_1) \hat{\varphi}_{IJ}, \quad (3.2.276k)$$

$$R_{2I2J} = -\Delta A_1 B_1 \delta_{IJ} + \frac{B}{A^2} \hat{\varphi}_{IK} \hat{\varphi}_{J}{}^K, \quad (3.2.276l)$$

$$R_{IJKL} = \frac{1}{A} \hat{R}_{IJKL}(Z) - 2\Delta A_1^2 \delta_{I[K} \delta_{L]J} - \frac{2B}{A^2} (\hat{\varphi}_{IJ} \hat{\varphi}_{KL} - \hat{\varphi}_{I[K} \hat{\varphi}_{L]J}). \quad (3.2.276m)$$

ここで,

$$A_1 = \frac{A'}{A}, \quad A_2 = \frac{A''}{A}, \quad B_1 = \frac{B'}{B}, \quad B_2 = \frac{B''}{B}, \quad C_1 = \frac{C'}{C}, \quad C_2 = \frac{C''}{C}. \quad (3.2.277)$$

## Ricci 曲率

$$R_{00} = 2\Delta C_2 + \Delta' C_1 - \Delta C_1^2 - 2\Delta \frac{B}{C} (\Omega_1)^2 + \Delta C_1 (B_1 + nA_1), \quad (3.2.278a)$$

$$R_{01} = 0, \quad (3.2.278b)$$

$$R_{02} = \sqrt{\frac{B}{C}} \{ \Omega' \Delta' + 2\Delta \Omega'' + \Delta \Omega' (3B_1 - C_1) + n\Delta \Omega' A_1 \} \quad (3.2.278c)$$

$$R_{0I} = 0, \quad (3.2.278d)$$

$$R_{11} = -2\Delta C_2 - \Delta' C_1 + \Delta C_1^2 - \Delta' B_1 - 2\Delta B_2 + \Delta B_1^2 \\ + 2\Delta \frac{B}{C} (\Omega_1)^2 + n (-\Delta' A_1 - 2\Delta A_2 + \Delta A_1^2), \quad (3.2.278e)$$

$$R_{12} = 0, \quad (3.2.278f)$$

$$R_{1I} = 0, \quad (3.2.278g)$$

$$R_{22} = -\Delta B_1 C_1 - 2\Delta (\Omega')^2 \frac{B}{C} - \Delta' B_1 - 2\Delta B_2 + \Delta B_1^2 \\ - n\Delta A_1 B_1 + \frac{B}{A^2} \hat{\varphi}_{IJ} \hat{\varphi}^{IJ}, \quad (3.2.278h)$$

$$R_{2I} = 0, \quad (3.2.278i)$$

$$R_{IJ} = \{ -\Delta A_1 C_1 - \Delta' A_1 - 2\Delta A_2 - \Delta A_1 B_2 - (n-2)\Delta A_1^2 \} \delta_{IJ} \\ + \frac{1}{A} \hat{R}_{IJ}(Z) - 2\frac{B}{A^2} \hat{\varphi}_{IK} \hat{\varphi}_J^K. \quad (3.2.278j)$$

### 3.2.16 Warped product I型

#### 3.2.16.1 Geometry

時空計量  $M^{m+n} \approx \mathcal{N}^m \times \mathcal{K}^n$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{ab} dy^a dy^b + r(y)^2 d\sigma_n^2; \quad (3.2.279)$$

$$d\sigma_n^2 = \gamma_{ij}(z) dz^i dz^j. \quad (3.2.280)$$

以下,  $g_{ab}$  に関する共変微分を  $D_a$ ,  $\gamma_{ij}$  に関する共変微分を  $\hat{D}_i$  とする. また, ハットのついた量の添え字の上げ下げは  $\gamma_{ij}$  により行う.

接続係数

$$\Gamma_{bc}^a = {}^m\Gamma_{bc}^a(y), \quad \Gamma_{jk}^i = \hat{\Gamma}_{jk}^i(z), \quad (3.2.281a)$$

$$\Gamma_{ij}^a = -r D^a r \gamma_{ij}(z), \quad \Gamma_{ja}^i = \frac{D_a r}{r} \delta_j^i, \quad (3.2.281b)$$

他の独立な成分はゼロ.

曲率テンソル

$$R^a{}_{bcd} = {}^m R^a{}_{bcd}, \quad (3.2.282a)$$

$$R^a{}_{ibj} = -\frac{D^a D_b r}{r} g_{ij}, \quad (3.2.282b)$$

$$R^i{}_{jkl} = \hat{R}^i{}_{jkl} - (Dr)^2 (\delta_k^i \gamma_{jl} - \delta_l^i \gamma_{jk}). \quad (3.2.282c)$$

他の独立な成分はゼロ.

Ricc テンソル

$$R_{ab} = {}^m R_{ab} - n \frac{D_a D_b r}{r}, \quad (3.2.283a)$$

$$R_{ai} = 0, \quad (3.2.283b)$$

$$R_{ij} = \hat{R}_{ij} - \left( \frac{\square r}{r} + (n-1) \frac{(Dr)^2}{r^2} \right) g_{ij}, \quad (3.2.283c)$$

$$R = {}^m R + \frac{\hat{R}}{r^2} - n \left( 2 \frac{\square r}{r} + (n-1) \frac{(Dr)^2}{r^2} \right). \quad (3.2.283d)$$



Weyl テンソル 特に,  $m = 2$  のとき

$$\mathcal{C}^{ab} = \frac{n-1}{n+1} X dy^a \wedge dy^b, \quad (3.2.284a)$$

$$\mathcal{C}^{ai} = -\frac{1}{nr^2} dy^a \wedge \hat{S}^i - \frac{n-1}{n(n+1)} X dy^a \wedge dz^i, \quad (3.2.284b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{ij} &= \frac{1}{r^2} \hat{\mathcal{C}}^{ij} + \frac{4}{n(n-2)} \hat{S}^{[i} \wedge dz^{j]} \\ &\quad + \frac{2}{n(n+1)} X dz^i \wedge dz^j. \end{aligned} \quad (3.2.284c)$$

ここで,

$$\hat{S}^i := \hat{S}_j^i dz^j; \quad \hat{S}_j^i = \hat{R}_j^i - \frac{1}{n} \hat{R} \delta_j^i, \quad (3.2.285)$$

$$X := \frac{1}{2} {}_2R + \frac{\square r}{r} + \frac{K - (Dr)^2}{r^2}; \quad K := \frac{1}{n(n-1)} \hat{R}. \quad (3.2.286)$$

### 3.2.16.2 保存エネルギー束

【定理 3.61】  $d\sigma_n^2 = \gamma_{ij}(z) dz^i dz^j$  をその Ricci 曲率が

$$\hat{R}_{ij} = (n-1)K \gamma_{ij} \quad (3.2.287)$$

で与えられる Einstein 空間  $\mathcal{K}^n$  の計量とすると, 計量

$$ds^2 = g_{ab} dy^a dy^b + r^2(y) d\sigma_n^2 \quad (3.2.288)$$

に対して

$$K_\mu = \epsilon_{\mu\nu} \nabla^\nu r, \quad (3.2.289)$$

$$S^\mu = G^{\mu\nu} K_\nu \quad (3.2.290)$$

とおくとき,

$$S_\mu = \frac{n}{2r^n} \epsilon_{\mu\nu} \nabla^\nu [r^{n-1} ((Dr)^2 - K)] \quad (3.2.291)$$

となる. これより,

$$\nabla_\mu S^\mu = 0 \quad (3.2.292)$$

が成り立つ. また,

$$S_\mu dx^\mu = \frac{n}{2} * \{ d[r^{n-1} ((Dr)^2 - K)] \wedge \Omega_n \} \quad (3.2.293)$$

が成り立つ. ここで  $\Omega_n$  は  $\mathcal{K}^n$  の体積要素. \_\_\_\_\_ □

### 3.2.17 Warped product $I^p$ 型

計量： 時空  $M = \mathcal{N}^m \times \mathcal{K}^{n_1} \times \dots \times \mathcal{K}^{n_p}$  において,

$$d\tilde{s}^2 = g_{ab}(x)dx^a dx^b + \sum_{I=1}^p S_I(x)^2 d\sigma_I^2; \quad (3.2.294)$$

$$d\sigma_I^2 = \sum_{i,j \in I} \gamma_{(I)ij}(y_I) dy^i dy^j. \quad (3.2.295)$$

ここで,  $y_I = (y^i; i \in I)$ . 以下,  $g_{ab}$  に関する共変微分を  $D_a$  と表す.

Christoffel 記号：

$$\tilde{\Gamma}_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a, \quad \tilde{\Gamma}_{jk}^i = {}^I\Gamma_{jk}^i \quad (i, j, k \in I), \quad (3.2.296a)$$

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^a = -\frac{D^a S_I}{S_I} g_{ij}, \quad \tilde{\Gamma}_{aj}^i = \frac{D_a S_I}{S_I} \delta_j^i \quad (i, j \in I). \quad (3.2.296b)$$

他の成分は対称性から決まるものを除いてゼロ.

接続形式： 正規直交基底を

$$d\tilde{s}^2 = \eta_{AB}\theta^A\theta^B + \delta_{PQ}\theta^P\theta^Q; \quad (3.2.297)$$

$$\theta^P = S_I\theta_{(I)}^P \quad (P \in I) \quad (3.2.298)$$

ととると,

$$\tilde{\omega}^A{}_B = \omega^A{}_B, \quad (3.2.299a)$$

$$\tilde{\omega}^A{}_P = -\frac{D^A S_I}{S_I} \theta^P \quad (P \in I), \quad (3.2.299b)$$

$$\tilde{\omega}^P{}_Q = \omega_{(I)}{}^P{}_Q \quad (P, Q \in I). \quad (3.2.299c)$$

他の成分はゼロ.

曲率テンソル：

$$\tilde{R}_{abcd} = R_{abcd}, \quad (3.2.300a)$$

$$\tilde{R}_{aibj} = -\frac{D_a D_b S_I}{S_I} g_{ij} \quad (i, j \in I), \quad (3.2.300b)$$

$$\tilde{R}_{ijkl} = S_I^2 R_{(I)ijkl} - \frac{(DS_I)^2}{S_I^2} (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \quad (i, j, k, l \in \mathbf{I}), \quad (3.2.300c)$$

$$\tilde{R}_{ij'kl'} = -\frac{DS_I \cdot DS_J}{S_I S_J} g_{ik}g_{j'l'} \quad (i, k \in I, j', l' \in J). \quad (3.2.300d)$$

**Ricci テンソル :**

$$\tilde{R}_{ab} = R_{ab} - \sum_I n_I \frac{D_a D_b S_I}{S_I}, \quad (3.2.301a)$$

$$\tilde{R}_{ai} = 0, \quad (3.2.301b)$$

$$\tilde{R}_{ij} = R_{(I)ij} - \left[ \frac{\Delta S_I}{S_I} - \frac{(DS_I)^2}{S_I^2} + \sum_J n_J \frac{DS_I \cdot DS_J}{S_I S_J} \right] g_{ij} \quad (3.2.301c)$$

$$\tilde{R}_{ij'} = 0 \quad (i \in I, j' \in J, I \neq J). \quad (3.2.301d)$$

**スカラ曲率 :**

$$\tilde{R} = R + \sum_I \left( \frac{1}{S_I^2} S_{(I)} - 2n_I \frac{\Delta S_I}{S_I} + n_I \frac{(DS_I)^2}{S_I^2} \right) - \left( \sum_I n_I \frac{DS_I}{S_I} \right)^2. \quad (3.2.302)$$

### 3.2.18 Warped product II 型

計量： 時空  $M^{m+n} = \mathcal{N}^m \times \mathcal{K}^n$  において,

$$ds^2 = A(x, y)^2 g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + B(x, y)^2 \gamma_{ij}(y) dy^i dy^j. \quad (3.2.303)$$

接続形式： 正規直交基底

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^A : \quad \tilde{\alpha}^a &= A\alpha^a; & g_{\mu\nu} &= \eta_{ab}\alpha_\mu^a\alpha_\nu^b, \\ \tilde{\beta}^p &= B\beta^p; & \gamma_{ij} &= \eta_{pq}\beta_i^p\beta_j^q \end{aligned} \quad (3.2.304)$$

に対して,

$$d\alpha^a = -\omega^a{}_b\alpha^b, \quad d\beta^p = -\hat{\omega}^p{}_q\beta^q \quad (3.2.305)$$

とおくと,

$$d\tilde{\theta}^A = -\tilde{\omega}^A{}_B\tilde{\theta}^B \quad (3.2.306)$$

は

$$\tilde{\omega}^a{}_b = \omega^a{}_b + A^{-1} (D_b A \alpha^a - D^a A \alpha_b), \quad (3.2.307a)$$

$$\tilde{\omega}_p^a = B^{-1} \hat{D}_p A \alpha^a - A^{-1} D^a B \beta_p, \quad (3.2.307b)$$

$$\tilde{\omega}^p{}_q = \hat{\omega}^p{}_q + B^{-1} (\hat{D}_q B \beta^p - \hat{D}^p B \beta_q). \quad (3.2.307c)$$

ここで,

$$g_{ab} \rightarrow D_a, \quad \gamma_{pq} \rightarrow \hat{D}_p. \quad (3.2.308)$$

曲率テンソル：

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{abcd} &= A^{-2} R_{abcd} + 2A^{-1} D_a D_{[c} A^{-1} \eta_{d]b} - 2A^{-1} D_b D_{[c} A^{-1} \eta_{d]a} \\ &\quad - \left( (DA^{-1})^2 + A^2 B^{-2} (\hat{D}A^{-1})^2 \right) (\eta_{ac}\eta_{bd} - \eta_{ad}\eta_{bc}) \end{aligned} \quad (3.2.309a)$$

$$\tilde{R}_{abcp} = 2A^{-1} D_{[a} \left( A^{-1} B^{-1} \hat{D}_p A \right) \eta_{b]c}, \quad (3.2.309b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{apbq} &= A^{-1} B^{-3} \left( -B \hat{D}_p \hat{D}_q A + \hat{D}_p A \hat{D}_q B + \hat{D}_q A \hat{D}_p B \right) \eta_{ab} \\ &\quad + A^{-3} B^{-1} \left( -A D_a D_b B + D_a A D_b B + D_b A D_a B \right) \eta_{pq} \\ &\quad - A^{-1} B^{-1} \left( A^{-2} DA \cdot DB + B^{-2} \hat{D}A \cdot \hat{D}B \right) \eta_{ab} \eta_{pq} \end{aligned} \quad (3.2.309c)$$

$$\tilde{R}_{pqra} = 2B^{-1} \hat{D}_{[p} \left( A^{-1} B^{-1} D_a B \right) \eta_{q]r}, \quad (3.2.309d)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{pqrs} &= B^{-2} R_{pqrs} + 2B^{-1} \hat{D}_p \hat{D}_{[r} B^{-1} \eta_{s]q} - 2B^{-1} \hat{D}_q \hat{D}_{[r} B^{-1} \eta_{s]p} \\ &\quad - \left( (\hat{D}B^{-1})^2 + B^2 A^{-2} (DB^{-1})^2 \right) (\eta_{pr}\eta_{qs} - \eta_{ps}\eta_{qr}) \end{aligned} \quad (3.2.309e)$$

座標成分で表すと,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mu\nu\lambda\sigma} = & A^2 R_{\mu\nu\lambda\sigma} + 2A^3 D_\mu D_{[\lambda} A^{-1} g_{\sigma]\nu} - 2A^3 D_\nu D_{[\lambda} A^{-1} g_{\sigma]\mu} \\ & - \left( (DA)^2 + A^2 B^{-2} (\hat{D}A)^2 \right) (g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda}), \end{aligned} \quad (3.2.310a)$$

$$\tilde{R}_{\mu\nu\lambda i} = 2A^2 B D_{[\mu} \left( A^{-1} B^{-1} \hat{D}_i A \right) g_{\nu]\lambda}, \quad (3.2.310b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mu i \nu j} = & AB^{-1} \left( -B \hat{D}_i \hat{D}_j A + \hat{D}_i A \hat{D}_j B + \hat{D}_j A \hat{D}_i B \right) g_{\mu\nu} \\ & + A^{-1} B \left( -A D_\mu D_\nu B + D_\mu A D_\nu B + D_\nu A D_\mu B \right) \gamma_{ij} \\ & - AB \left( A^{-2} DA \cdot DB + B^{-2} \hat{D}A \cdot \hat{D}B \right) g_{\mu\nu} \gamma_{ij}, \end{aligned} \quad (3.2.310c)$$

$$\tilde{R}_{ijk\mu} = 2AB^2 \hat{D}_{[i} \left( A^{-1} B^{-1} D_\mu B \right) \gamma_{j]k}, \quad (3.2.310d)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ijkl} = & B^2 R_{ijkl} + 2B^3 \hat{D}_i \hat{D}_{[k} B^{-1} \gamma_{l]j} - 2B^3 \hat{D}_j \hat{D}_{[k} B^{-1} \gamma_{l]i} \\ & - \left( (\hat{D}B)^2 + B^2 A^{-2} (DB)^2 \right) (\gamma_{ik} \gamma_{jl} - \gamma_{il} \gamma_{jk}). \end{aligned} \quad (3.2.310e)$$

Ricci テンソル:

$$\begin{aligned}
A^2 \tilde{R}_{ab} = & R_{ab} - (m-2) \left( \frac{D_a D_b A}{A} - \frac{2D_a A D_b A}{A^2} \right) \\
& - n \left( \frac{D_a D_b B}{B} - \frac{D_a A D_b B + D_b A D_a B}{AB} \right) \\
& - \left[ \frac{\Delta A}{A} + (m-3) \frac{(DA)^2}{A^2} + n \frac{DA \cdot DB}{AB} \right. \\
& \left. + \frac{A^2}{B^2} \left( \frac{\hat{\Delta} A}{A} + (n-2) \frac{\hat{D}A \cdot \hat{D}B}{AB} + (m-1) \frac{(\hat{D}A)^2}{A^2} \right) \right] \eta_{ab},
\end{aligned} \tag{3.2.311a}$$

$$\begin{aligned}
AB \tilde{R}_{ap} = & (m-1) \left[ -\frac{D_a \hat{D}_p A}{A} + \frac{\hat{D}_p A D_a (AB)}{A^2 B} \right] \\
& + (n-1) \left[ -\frac{\hat{D}_p D_a B}{B} + \frac{D_a B \hat{D}_p (AB)}{AB^2} \right],
\end{aligned} \tag{3.2.311b}$$

$$\begin{aligned}
B^2 \tilde{R}_{pq} = & \hat{R}_{pq} - (n-2) \left( \frac{\hat{D}_p \hat{D}_q B}{B} - \frac{2\hat{D}_p B \hat{D}_q B}{B^2} \right) \\
& - m \left( \frac{\hat{D}_p \hat{D}_q A}{A} - \frac{\hat{D}_p A \hat{D}_q B + \hat{D}_q A \hat{D}_p B}{AB} \right) \\
& - \left[ \frac{\hat{\Delta} B}{B} + (n-3) \frac{(\hat{D}B)^2}{B^2} + m \frac{\hat{D}A \cdot \hat{D}B}{AB} \right. \\
& \left. + \frac{B^2}{A^2} \left( \frac{\Delta B}{B} + (m-2) \frac{DA \cdot DB}{AB} + (n-1) \frac{(DB)^2}{B^2} \right) \right] \eta_{pq},
\end{aligned} \tag{3.2.311c}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{R} = & \frac{1}{A^2} R - \frac{m-2}{A^2} \left( \frac{\Delta A}{A} - \frac{2(DA)^2}{A^2} \right) - \frac{n}{A^2} \left( \frac{\Delta B}{B} - \frac{2DA \cdot DB}{AB} \right) \\
& - m \left[ \frac{1}{A^2} \left( \frac{\Delta A}{A} + (m-3) \frac{(DA)^2}{A^2} + n \frac{DA \cdot DB}{AB} \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{B^2} \left( \frac{\hat{\Delta} A}{A} + (m-1) \frac{(\hat{D}A)^2}{A^2} + (n-2) \frac{\hat{D}A \cdot \hat{D}B}{AB} \right) \right] \\
& + \frac{1}{B^2} \hat{R} - \frac{n-2}{B^2} \left( \frac{\hat{\Delta} B}{B} - \frac{2(\hat{D}B)^2}{B^2} \right) - \frac{m}{B^2} \left( \frac{\hat{\Delta} A}{A} - \frac{2\hat{D}A \cdot \hat{D}B}{AB} \right) \\
& - n \left[ \frac{1}{B^2} \left( \frac{\hat{\Delta} B}{B} + (n-3) \frac{(\hat{D}B)^2}{B^2} + m \frac{\hat{D}A \cdot \hat{D}B}{AB} \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{A^2} \left( \frac{\Delta B}{B} + (n-1) \frac{(DB)^2}{B^2} + (m-2) \frac{DA \cdot DB}{AB} \right) \right] \tag{3.2.311d}
\end{aligned}$$

特に,

$$m = 4, \quad n = 6, \quad A = h^{-1/4}, \quad B = h^{1/4} \quad (3.2.312)$$

のとき,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}R_{\lambda}^{\lambda}g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}(X) - \frac{1}{4}R(X)g_{\mu\nu}(X) - \frac{1}{h} \left( D_{\mu}D_{\nu}h - \frac{1}{4}\Delta h g_{\mu\nu}(X) \right), \quad (3.2.313a)$$

$$h^{-1/2}R_{\mu}^{\mu} = R(X) + \frac{1}{h^2}\hat{\Delta}h - \frac{1}{h^3}(\hat{D}h)^2, \quad (3.2.313b)$$

$$R_{\mu p} = -\frac{1}{2h}D_{\mu}\hat{D}_p h, \quad (3.2.313c)$$

$$R_{pq} - \frac{1}{6}R_r^r g_{pq} = R_{pq}(Y) - \frac{1}{6}R(Y)g_{pq}(Y) - \frac{1}{2h^2} \left( \hat{D}_p h \hat{D}_q h - \frac{1}{6}(\hat{D}h)^2 g_{pq}(Y) \right), \quad (3.2.313d)$$

$$h^{1/2}R_p^p = R(Y) + \frac{(\hat{D}h)^2}{h^2} - \frac{3}{2}\frac{\hat{\Delta}h}{h} - \frac{3}{2}\Delta h. \quad (3.2.313e)$$

また,

$$m = 5, \quad n = 6, \quad A = h^{-1/3}(x), \quad B = h^{1/6}(x) \quad (3.2.314)$$

のとき,

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}(X_5) - \frac{1}{2h^2}D_{\mu}D_{\nu}h + \frac{1}{3} \left( \frac{D^2h}{h} - \frac{(Dh)^2}{h^2} \right) g_{\mu\nu}(X_5), \quad (3.2.315a)$$

$$R_{\mu p} = 0, \quad (3.2.315b)$$

$$R_{pq} = R_{pq}(Y_6) + \frac{1}{6} \left( -D^2h + \frac{(Dh)^2}{h^2} \right) g_{pq}(Y), \quad (3.2.315c)$$

$$R = h^{2/3}R(X_5) + h^{-1/3}R(Y_6) + \frac{2D^2h}{3h^{1/3}} - \frac{7(Dh)^2}{6h^{4/3}}. \quad (3.2.315d)$$

### 3.2.19 空間的に一様な系

$n$ 次元 Lie 群  $G$  が  $D = n + 1$ 次元時空に自由に作用し, その軌道が  $n$ 次元空間  $\Sigma(t) \cong \Sigma_0$  となるとする.  $G$  に対応する Killing ベクトルの基底を  $\xi_i$  とするとき,  $G$  の Lie 代数の構造定数が

$$[\xi_i, \xi_j] = C^k_{ij} \xi_k \quad (i, j, k = 1, \dots, n) \quad (3.2.316)$$

で表されるとする. このとき, 対応する  $\Sigma_0$  の不変基底を  $\chi^i (i = 1, \dots, n)$  を適当にとると, Maurer-Cartan 方程式

$$d\chi^i = C^i_{jk} \chi^j \wedge \chi^k \quad (3.2.317)$$

が成り立つ.

#### 時空計量

$$ds^2 = -dt^2 + q_{ij}(t)(\chi^i + \beta^i(t)dt)(\chi^j + \beta^j(t)dt). \quad (3.2.318)$$

接続形式  $\Omega^I_i(t)$  を

$$q_{ij}(t) = \delta_{IJ} \Omega^I_i \Omega^J_j = (\mathcal{T}\Omega)_{ij} \quad (3.2.319)$$

を満たす正則行列として, 時空  $M$  の正規直交基底を

$$\theta^a : \theta^0 = dt, \quad \theta^I = \Omega^I_i(\chi^i + \beta^i dt) \quad (3.2.320)$$

と取る. このとき, 接続形式は

$$\omega^0_I = h_{IJ} \theta^J, \quad \omega_{IJ} = \pi_{IJ} \theta^0 + \omega_{KIJ} \theta^K. \quad (3.2.321)$$

ここで,

$$h_{IJ} = (\dot{\Omega}\omega^{-1})_{(IJ)} + D_{(IJ)K} \beta^K, \quad (3.2.322)$$

$$\pi_{IJ} = -(\dot{\Omega}\omega^{-1})_{[IJ]} - D_{[I]K} \beta^K, \quad (3.2.323)$$

$$\omega_{IJK} = \frac{1}{2}(D_{IJK} - 2D_{[JK]I}), \quad (3.2.324)$$

$$D_{IJK} = \Omega^I_i C^i_{jk} (\Omega^{-1})^j_J (\Omega^{-1})^k_K \quad (3.2.325)$$

$h_{IJ}$  の  $\tilde{\theta}^i = \chi^i + \beta^i dt$  に関する成分表示は

$$h_{ij} \equiv h_{IJ} \Omega^I_i \Omega^J_j = \frac{1}{2} (\dot{q}_{ij} + 2C_{(ij)k} \beta^k). \quad (3.2.326)$$

ただし,  $C^i_{jk}$  の添え字の上げ下げは  $q_{ij}$  で行うものとする. 例えば,  $C_{ijk} = q_{il} C^l_{jk}$ .



## 曲率テンソル

$$R^0_{I0J} = \dot{h}_{IJ} + h_{IK}h^K_J + \pi_{IK}h^K_J + \pi_{JK}h^K_I, \quad (3.2.327a)$$

$$R^0_{IJK} = h_{IL}D^L_{JK} + 2h^L_{[J}\omega_{K]LI}, \quad (3.2.327b)$$

$$R^I_{J0K} = -R^0_{KIJ}, \quad (3.2.327c)$$

$$R^I_{JKL} = 2h^I_{[K}h_{L]J} + 2\omega_{[K}{}^{IM}\omega_{L]MJ} - \omega_M{}^I{}_J D^M{}_{KL}. \quad (3.2.327d)$$

基底  $\tilde{\theta}^\mu$  ( $\tilde{\theta}^0 = \theta^0$ ) に関する成分表示では

$$R^0_{i0j} = \dot{h}_{ij} - h^k_i h_{jk} + (h^k_i C_{(kj)m} + h^k_j C_{(ki)m}) \beta^m, \quad (3.2.328a)$$

$$R^0_{ijk} = h_{il} C^l_{jk} + 2h^l_{[j} \omega_{k]li}, \quad (3.2.328b)$$

$$R_{ijkl} = 2h_{i[k} h_{l]j} - 2\omega_{kim} \omega_{lj}{}^m - \omega_{mij} C^m{}_{kl}. \quad (3.2.328c)$$

ここで,  $\omega_{ijk}$  は

$$\omega_{ijk} = \frac{1}{2} (C_{ijk} - C_{kij} - C_{jki}) \quad (3.2.329)$$

で, 添え字の上げ下げは  $q_{ij}$  により行う.

## Ricci テンソル

$$R_{00} = -\dot{h} - h_{IJ}h^{IJ}, \quad (3.2.330a)$$

$$R_{0I} = D_{JKI}h^{JK} + D_K h^{KI}, \quad (3.2.330b)$$

$$R_{IJ} = \dot{h}_{IJ} + h h_{IJ} - h^K_I \pi_{KJ} - h^K_J \pi_{KI} - U_{IJ}, \quad (3.2.330c)$$

$$R_s = 2\dot{h} + h^2 + h_{IJ}h^{IJ} - U. \quad (3.2.330d)$$

また,  $\tilde{\theta}^\mu$  に関する成分は,

$$R_{00} = -\dot{h} - h_{ij}h^{ij}, \quad (3.2.331a)$$

$$R_{0i} = C_{jki}h^{jk} + C_k h^k_i, \quad (3.2.331b)$$

$$R_{ij} = \dot{h}_{ij} + h h_{ij} - 2h^k_i h_{jk} + h^k_i C_{(kj)\beta} + h^k_j C_{(ki)\beta} - U_{ij} \quad (3.2.331c)$$

$$R_s = 2\dot{h} + h^2 + h_{ij}h^{ij} - U. \quad (3.2.331d)$$

ここで,

$$U_{IJ} = -D^M D_{(IJ)M} - \frac{1}{4} D_{IKL} D_J{}^{KL} + D^{KL}{}_I D_{(KL)J}, \quad (3.2.332a)$$

$$U_{ij} = -C^m C_{(ij)m} - \frac{1}{4} D_{ikl} D_j{}^{kl} + D^{kl}{}_i D_{(kl)j}, \quad (3.2.332b)$$

$$\begin{aligned} U &= U^I{}_I = D_K D^K + \frac{1}{4} D^{IJK} D_{IJK} + \frac{1}{2} D^{IJK} D_{JIK} \\ &= C_k C^k + \frac{1}{4} C_{ijk} C^{ijk} + \frac{1}{2} C^{ijk} C_{jik}. \end{aligned} \quad (3.2.332c)$$

[目次へ](#)

### Einstein テンソル

$$G_{00} = \frac{1}{2} (h^2 - h_{IJ}h^{IJ} - U), \quad (3.2.333a)$$

$$G_{0I} = D_{JKI}h^{JK} + D_Kh^{IK}, \quad (3.2.333b)$$

$$G_{IJ} = R_{IJ} - \frac{1}{2}R_s\delta_{IJ}. \quad (3.2.333c)$$

[目次へ](#)

### 3.2.20 定常軸対称系

時空計量

$$ds^2 = -e^{2U}(dt + Ad\phi)^2 + e^{-2U}[\rho^2 d\phi^2 + e^{2k}(d\rho^2 + dz^2)].$$

正規直交基底

$$\begin{aligned}\theta^0 &= e^U(dt + Ad\phi), \quad \theta^1 = e^{-U}\rho d\phi, \quad \theta^2 = e^{k-U}d\rho, \quad \theta^3 = e^{k-U}dz, \\ e_0 &= e^{-U}\partial_t, \quad e_1 = \frac{1}{\rho}e^U(\partial_\phi - A\partial_t), \quad e_2 = e^{U-k}\partial_\rho, \quad e_3 = e^{U-k}\partial_z.\end{aligned}$$

接続形式 ( $j = 2/\rho, 3/z$ )

$$\begin{aligned}\omega^0_1 &= -\frac{1}{2\rho}e^{3U-k}(A_\rho\theta^2 + A_z\theta^3) = -\frac{1}{2\rho}e^{2U}dA, \\ \omega^0_j &= e^{U-k}u_j\theta^0 + \frac{1}{2\rho}e^{3U-k}A_j\theta^1, \\ \omega^1_j &= -\frac{1}{2\rho}e^{3U-k}A_j\theta^0 - \rho(U/\rho)_je^{U-k}\theta^1, \\ \omega^2_3 &= e^{U-k}(k_z - U_z)\theta^2 - e^{U-k}(k_\rho - U_\rho)\theta^3.\end{aligned}$$

## 曲率テンソル

$$\begin{aligned}
R_{0101} &= -e^{2U-2k} \left[ U_\rho^2 - \frac{1}{\rho} U_\rho + U_z^2 - \frac{1}{4\rho^2} e^{4U} (A_\rho^2 + A_z^2) \right], \\
R_{0123} &= \frac{1}{\rho} e^{4U-2k} \left[ A_z \left( U_\rho - \frac{1}{2\rho} \right) - A_\rho U_z \right], \\
R_{2323} &= e^{2U-2k} (U_{\rho\rho} + U_{zz} - k_{\rho\rho} - k_{zz}), \\
R_{0202} &= e^{2U-2k} \left( U_{\rho\rho} + 2U_\rho^2 - U_z^2 - U_\rho k_\rho + U_z k_z + \frac{1}{4\rho^2} e^{4U} A_\rho^2 \right), \\
R_{1212} &= e^{2U-2k} \left( U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} U_\rho - U_z^2 - U_\rho k_\rho + U_z k_z + \frac{1}{\rho} k_\rho + \frac{3}{4\rho^2} e^{4U} A_\rho^2 \right), \\
R_{0203} &= e^{2U-2k} \left( U_{\rho z} + 3U_\rho U_z - U_\rho k_z - U_z k_\rho + \frac{1}{4\rho^2} e^{4U} A_\rho A_z \right), \\
R_{1213} &= e^{2U-2k} \left( U_{\rho z} + U_\rho U_z - U_\rho k_z - U_z k_\rho + \frac{1}{\rho} k_z + \frac{3}{4\rho^2} e^{4U} A_\rho A_z \right), \\
R_{0303} &= e^{2U-2k} \left( U_{zz} + 2U_z^2 - U_\rho^2 + U_\rho k_\rho - U_z k_z + \frac{1}{4\rho^2} e^{4U} A_z^2 \right), \\
R_{1313} &= e^{2U-2k} \left( U_{zz} - U_\rho^2 + \frac{1}{\rho} U_\rho + U_\rho k_\rho - U_z k_z - \frac{1}{\rho} k_\rho + \frac{3}{4\rho^2} e^{4U} A_z^2 \right), \\
R_{0212} &= \frac{1}{2\rho} e^{4U-2k} \left( A_{\rho\rho} - \frac{1}{\rho} A_\rho + 5U_\rho A_\rho - A_z U_z - A_\rho k_\rho + A_z k_z \right), \\
R_{0313} &= \frac{1}{2\rho} e^{4U-2k} (A_{zz} + 5U_z A_z - A_\rho U_\rho + A_\rho k_\rho - A_z k_z), \\
R_{0213} &= \frac{1}{2\rho} e^{4U-2k} \left( A_{\rho z} - \frac{1}{\rho} A_z + 2U_z A_\rho + 4U_\rho A_z - A_\rho k_z - A_\rho k_z \right), \\
R_{0312} &= \frac{1}{2\rho} e^{4U-2k} (A_{\rho z} + 4U_z A_\rho + 2U_\rho A_z - A_\rho k_z - A_\rho k_z).
\end{aligned}$$

## Ricci テンソル

$$\begin{aligned}
R_{00} &= e^{2U-2k} \left( \partial^2 U + \frac{1}{\rho} U_\rho + \frac{1}{2\rho^2} e^{4U} (\partial A)^2 \right), \\
R_{01} &= \frac{\rho}{2} e^{-2k} \partial \cdot \left( \frac{e^{4U}}{\rho} \partial A \right), \\
R_{11} &= R_{00}, \quad R_{02} = R_{03} = R_{12} = R_{13} = 0, \\
R_{22} &= e^{2U-2k} \left( \partial^2 U + \frac{1}{\rho} U_\rho - 2U_\rho^2 - \partial^2 k + \frac{1}{\rho} k_\rho + \frac{1}{2\rho^2} e^{4U} A_\rho^2 \right), \\
R_{33} &= e^{2U-2k} \left( \partial^2 U + \frac{1}{\rho} U_\rho - 2U_z^2 - \partial^2 k - \frac{1}{\rho} k_\rho + \frac{1}{2\rho^2} e^{4U} A_z^2 \right), \\
R_{33} &= e^{2U-2k} \left( \partial^2 U + \frac{1}{\rho} U_\rho - 2U_z^2 - \partial^2 k - \frac{1}{\rho} k_\rho + \frac{1}{2\rho^2} e^{4U} A_z^2 \right), \\
R_{23} &= e^{2U-2k} \left( 2U_z U_\rho - \frac{1}{\rho} k_z - \frac{1}{2\rho^2} e^{4U} A_z A_\rho \right), \\
R &= 2e^{2U-2k} \left( \partial^2 U + \frac{1}{\rho} U_\rho - (\partial U)^2 - \partial^2 k + \frac{1}{4\rho^2} e^{4U} (\partial A)^2 \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R &= 2(R_{0101} + R_{2323}), \\
2R_{0101} &= -R_{0202} - R_{0303} + R_{1212} + R_{1313}.
\end{aligned}$$

## Weyl テンソル PN 表示

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= \Psi_3 = 0, \\
2\Psi_2 &= A + iB, \\
\Psi_0 + \Psi_4 &= C + iD, \quad i(\Psi_0 - \Psi_4) = E + iF;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= R_{0101} - \frac{R}{6} \\
&= -\frac{1}{3}e^{2U-2k} \left( \partial^2 U - 2\frac{U_\rho}{\rho} + 2(\partial U)^2 - \partial^2 k - \frac{1}{2\rho^2}e^{4U}(\partial A)^2 \right), \\
B &= R_{0123}, \\
C &= -R_{0101} - R_{0303} + R_{1212} \\
&= e^{2U-2k} \left( -U_{zz} + U_{\rho\rho} - 2U_z^2 + 2U_\rho^2 - 2U_\rho k_\rho + 2U_z k_z \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\rho}k_\rho - \frac{1}{2\rho^2}e^{4U}(A_z^2 - A_\rho^2) \right), \\
D &= -R_{0213} - R_{0312} \\
&= \frac{1}{\rho}e^{4U-2k} \left( -A_{\rho z} + \frac{1}{2\rho}A_z - 3U_z A_\rho - 3U_\rho A_z + A_\rho k_z + A_z k_\rho \right), \\
E &= R_{0203} + R_{1213} \\
&= 2e^{2U-2k} \left( U_{\rho z} + 2U_\rho U_z - U_\rho k_z - U_z k_\rho + \frac{1}{2\rho}k_z + \frac{1}{2\rho^2}e^{4U}A_z A_\rho \right), \\
F &= -R_{0313} + R_{0212} \\
&= -\frac{1}{2\rho}e^{4U-2k} \left( -A_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}A_\rho + A_{zz} - 6U_\rho A_\rho + 6U_z A_z + 2A_\rho k_\rho - 2A_z k_z \right).
\end{aligned}$$

### 3.2.21 $\mathbb{R}^n$ -不変系

計量:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \tilde{g}_{MN} dx^M dx^N \\ &= g_{ij}(x) dx^i dx^j + \Phi_{ab}(x) (dy^a + A^a)(dy^b + A^b). \end{aligned} \quad (3.2.334)$$

ここで

$$A^a = A_i^a(x) dx^i. \quad (3.2.335)$$

正規直交基底:

$$\tilde{\theta}^I = \theta^I := \theta_i^I(x) dx^i, \quad \tilde{\theta}^A = \theta_a^A(x) (dy^a + A^a), \quad (3.2.336a)$$

$$\tilde{e}_I = e_i^I(x) (\partial_i - A_i^a \partial_a), \quad \tilde{e}_A = e_A^a(x) \partial_a. \quad (3.2.336b)$$

接続形式:

$$\tilde{\omega}_{IJ} = \omega_{IJ} - \frac{1}{2} F_{IJ}^a \Phi_{ab} (dy^b + A^b), \quad (3.2.337a)$$

$$\tilde{\omega}_{IA} = -\frac{1}{2} \theta_{Aa} F_{IJ}^a \theta^J - \frac{1}{2} e_A^a \nabla_I \Phi_{ab} (dy^b + A^b), \quad (3.2.337b)$$

$$\tilde{\omega}_{AB} = e_{[A}^a d\theta_{B]a}. \quad (3.2.337c)$$

ここで,

$$dA^a = \frac{1}{2} F_{IJ}^a \theta^I \wedge \theta^J. \quad (3.2.338)$$

## Riemann テンソル:

$$\tilde{R}_{IJKL} = R_{IJKL} - \frac{1}{2}\Phi_{ab}(F_{IJ}^a F_{KL}^b - F_{I[K}^a F_{L]J}^b), \quad (3.2.339a)$$

$$\tilde{R}_{IJKA} = \frac{1}{2}e_A^a [-\nabla_K(\Phi_{ab}F_{IJ}^b) + F_{K[I}^b \nabla_{J]}\Phi_{ab}], \quad (3.2.339b)$$

$$\tilde{R}_{IJAB} = -\frac{1}{2}e_{[A}^a e_{B]}^b [\Phi_{ac}\Phi_{bd}(F^c)_I{}^K(F^d)_{JK} + \Phi^{cd}\nabla_I\Phi_{ac}\nabla_J\Phi_{bd}], \quad (3.2.339c)$$

$$\tilde{R}_{IAJK} = \frac{1}{2}e_A^a [2\Phi_{ab}\nabla_{[J}F_{K]I}^b - \nabla_I\Phi_{ab}F_{JK}^b + F_{I[J}^b \nabla_{K]}\Phi_{ab}], \quad (3.2.339d)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{IAJB} = \frac{1}{4}e_A^a e_B^b [ & -2\nabla_I\nabla_J\Phi_{ab} + \Phi_{ad}\Phi_{bc}(F^c)_I{}^K(F^d)_{JK} \\ & + \Phi^{cd}\nabla_I\Phi_{bc}\nabla_J\Phi_{ad}], \end{aligned} \quad (3.2.339e)$$

$$\tilde{R}_{IABC} = \frac{1}{2}e_A^a e_{[B}^b e_{C]}^c \Phi_{bd}F_{IJ}^d \nabla^J \Phi_{ac}, \quad (3.2.339f)$$

$$\tilde{R}_{ABIJ} = -\frac{1}{2}e_{[A}^a e_{B]}^b (\Phi^{cd}\nabla_I\Phi_{ac}\nabla_J\Phi_{bd} + \Phi_{ac}\Phi_{bd}F_{IK}^c F_J^{dK}) \quad (3.2.339g)$$

$$\tilde{R}_{ABIC} = \frac{1}{2}e_{[A}^a e_{B]}^b e_C^c \Phi_{ad}F_{IJ}^d \nabla^J \Phi_{bc}, \quad (3.2.339h)$$

$$\tilde{R}_{ABCD} = -\frac{1}{2}e_{[A}^a e_{B]}^b e_C^c e_D^d \nabla_I\Phi_{ac}\nabla^I\Phi_{bd}. \quad (3.2.339i)$$

## Ricci テンソル

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{IJ} = R_{IJ} - \frac{1}{2}\Phi_{ab}F_{IK}^a (F^b)_J{}^K - \frac{1}{2}\Phi^{ab}\nabla_I\nabla_J\Phi_{ab} \\ + \frac{1}{4}\Phi^{ac}\Phi^{bd}\nabla_I\Phi_{ab}\nabla_J\Phi_{cd}, \end{aligned} \quad (3.2.340a)$$

$$\tilde{R}_{IA} = \frac{1}{4}e_A^a [-2\nabla^J(\Phi_{ab}F_{JI}^b) + \Phi_{ab}F_{IJ}^b \Phi^{cd}\nabla^J\Phi_{cd}], \quad (3.2.340b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{AB} = e_A^a e_B^b [ & -\frac{1}{2}\Delta\Phi_{ab} + \frac{1}{2}\Phi^{cd}\nabla_I\Phi_{ac}\nabla^I\Phi_{bd} - \frac{1}{4}\nabla_I\Phi_{ab}\Phi^{cd}\nabla^I\Phi_{cd}, \\ & + \frac{1}{4}\Phi_{ac}\Phi_{bd}F_{IJ}^c (F^d)^{IJ}], \end{aligned} \quad (3.2.340c)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R} = R - \frac{1}{4}\Phi_{ab}F_{IJ}^a (F^b)^{IJ} - \nabla_I(\Phi^{ab}\nabla^I\Phi_{ab}) \\ - \frac{1}{4}(\Phi^{ac}\Phi^{bd} + \Phi^{ab}\Phi^{cd})\nabla_I\Phi_{ab}\nabla^I\Phi_{cd}. \end{aligned} \quad (3.2.340d)$$



### 3.2.22 $X \times G/H$ 系

多様体  $M$  が積空間の構造をもつとする :

$$M = X \times Y \ni (x, y). \quad (3.2.341)$$

さらに, Lie 群  $G$  の  $Y$  への左作用が与えられているとする :

$$G \triangleright Y. \quad (3.2.342)$$

このとき,  $G$  の無限小変換に対応するベクトル場  $\xi$  は,  $G$  の Lie 代数から  $Y$  のベクトル場のつくる Lie 代数への線形単射と見なすことができる :

$$\xi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}(Y). \quad (3.2.343)$$

したがって,  $A, B \in \mathcal{G}$  に対して,

$$[\xi(A), \xi(B)]^M = \xi^N(A) \partial_N \xi^M(B) - \xi^N(B) \partial_N \xi^M(A) = \xi^M([A, B]) \quad (3.2.344)$$

が成り立つ.

計量 :

$$ds^2 = \Phi_{ab}(x, y)(dy^a + A^a)(dy^b + A^b) + g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu. \quad (3.2.345)$$

ここで,

$$A^a = \xi^a(A) = \xi_P^a(y) A_\mu^P(x) dx^\mu; \quad A = T_P A_\mu^P(x) dx^\mu. \quad (3.2.346)$$

また,  $\xi_P^a$  は  $\Phi$  の Killing ベクトル :

$$\mathcal{L}_{\xi} \Phi_{ab} = \partial_\xi \Phi_{ab} + 2\Phi_{c(a} \partial_{b)} \xi^c = 0 \Leftrightarrow \hat{D}_{(a} \xi_{b)} = 0. \quad (3.2.347)$$

ここで,  $\hat{D}_a$  は  $x$  を固定した場合の  $\Phi_{ab}$  に関する  $Y_x$  上の共変微分.

接続形式 : 基底を

$$\tilde{\theta}^A : \tilde{\theta}^a = dy^a + A^a, \quad \tilde{\theta}^I = \theta_\mu^I(x) dx^\mu, \quad (3.2.348a)$$

$$\tilde{e}_A : \tilde{e}_a = \partial_a, \quad \tilde{e}_I = \partial_I - A_I^a \partial_a. \quad (3.2.348b)$$

と取り,

$$d\tilde{\theta}^A = -\tilde{\omega}^A_B \wedge \tilde{\theta}^B \quad (3.2.349)$$

とおくと,

$$d\tilde{\theta}^a = \tilde{\theta}^b \wedge \partial_b A^a + F^a, \quad (3.2.350a)$$

$$d\tilde{\theta}^I = -\omega^I{}_J \wedge \theta^J. \quad (3.2.350b)$$

ここで,

$$F^a = \xi^a(F); \quad F = dA - \frac{1}{2}[A, A], \quad (3.2.351)$$

$$[A, B] = [T_P, T_Q]A^P \wedge B^Q. \quad (3.2.352)$$

よって,

$$2\tilde{\omega}_{(ab)} = d\Phi_{ab}, \quad \tilde{\omega}_{aI} + \tilde{\omega}_{Ia} = \tilde{\omega}_{(IJ)} = 0, \quad (3.2.353)$$

より,

$$\tilde{\omega}_{ab} = \omega_{ab} + \frac{1}{2}D\Phi_{ab} - \hat{D}_a A_b, \quad (3.2.354a)$$

$$\tilde{\omega}_{aI} = \frac{1}{2}D_I\Phi_{ab}\tilde{\theta}^b + \frac{1}{2}F_{aIJ}\theta^J, \quad (3.2.354b)$$

$$\tilde{\omega}_{IJ} = \omega_{IJ} - \frac{1}{2}F_{aIJ}\tilde{\theta}^a. \quad (3.2.354c)$$

ここで,

$$\omega_{ab} = \Phi_{ac}\Gamma_{bd}^c(\Phi)dy^d. \quad (3.2.355)$$

また,  $D$  は  $g_{\mu\nu}$  に関する  $X$  上の共変微分.

曲率テンソル：

$$\tilde{R}_{abcd} = \hat{R}_{abcd} - \frac{1}{4} (D\Phi_{ac} \cdot D\Phi_{bd} - D\Phi_{ad} \cdot D\Phi_{bc}), \quad (3.2.356a)$$

$$\tilde{R}_{abcI} = \hat{D}_{[a} D_I \Phi_{b]c} + \frac{1}{2} D_K \Phi_{c[a} F_{b]I}^K, \quad (3.2.356b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{abIJ} &= -\hat{D}_{[a} F_{b]IJ} - \frac{1}{2} F_{aK[I} F_{b}^K J] \\ &\quad - \frac{1}{2} \Phi^{cd} D_{[I} \Phi_{ac} D_{J]} \Phi_{bd}, \end{aligned} \quad (3.2.356c)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{aIbJ} &= -\frac{1}{2} D_I D_J \Phi_{ab} + \frac{1}{4} \Phi^{cd} D_J \Phi_{ac} D_I \Phi_{bd} \\ &\quad - \frac{1}{2} \hat{D}_a F_{bIJ} + \frac{1}{4} F_{aJK} F_{bI}^K, \end{aligned} \quad (3.2.356d)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{IJKa} &= -\frac{1}{2} \xi_a (D_K F_{IJ} - [A_K, F_{IJ}]) \\ &\quad + \frac{1}{4} [-2F_{IJ}^b D_K \Phi_{ab} + F_{JK}^b D_I \Phi_{ab} - F_{IK}^b D_J \Phi_{ab}], \end{aligned} \quad (3.2.356e)$$

$$\tilde{R}_{IJKL} = R_{IJKL} - \frac{1}{4} (2F_{aIJ} F_{KL}^a + F_{aIK} F_{JL}^a - F_{aIL} F_{JK}^a). \quad (3.2.356f)$$

Ricci テンソル

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ab} &= \hat{R}_{ab} + \frac{1}{4} F_{aIJ} F_b^{IJ} \\ &\quad - \frac{1}{2} \Delta \Phi_{ab} - \frac{1}{4} \Phi^{cd} D\Phi_{ab} \cdot D\Phi_{cd} + \frac{1}{2} \Phi^{cd} D\Phi_{ac} \cdot D\Phi_{bd}, \end{aligned} \quad (3.2.357a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{aI} &= \frac{1}{2} \hat{D}^b D_I \Phi_{ab} - \frac{1}{2} \Phi^{bc} \hat{D}_a D_I \Phi_{bc} \\ &\quad - \frac{1}{2} \tilde{D}_J F_a^J I + \frac{1}{4} \Phi^{bc} D_K \Phi_{bc} F_{aI}^K, \end{aligned} \quad (3.2.357b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{IJ} &= R_{IJ} - \frac{1}{2} F_{aIK} F^a J^K \\ &\quad - \frac{1}{2} \Phi^{ab} D_I D_J \Phi_{ab} + \frac{1}{4} \Phi^{ab} \Phi^{cd} D_I \Phi_{ac} D_J \Phi_{bd}, \end{aligned} \quad (3.2.357c)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \hat{R} + R - \frac{1}{4} F_{aIJ} F^{aIJ} - D(\Phi^{ab} D\Phi_{ab}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \Phi^{ab} \Phi^{cd} (D\Phi_{ab} \cdot D\Phi_{cd} + D\Phi_{ac} \cdot D\Phi_{bd}). \end{aligned} \quad (3.2.357d)$$

ここで,

$$\tilde{D}F = DF - [A, F]. \quad (3.2.358)$$

作用積分 作用積分を

$$S = \int d^n x d^m y |g|^{1/2} |\Phi|^{1/2} \tilde{R} \quad (3.2.359)$$

とおくと,

$$S = \int d^n x |g|^{1/2} \left[ e^\sigma R - \frac{1}{2} G^{AB} D\phi_A D\phi_B - \frac{1}{4} \gamma_{PQ} F^P \cdot F^Q + C \right]. \quad (3.2.360)$$

ここで,

$$\Phi_{ab} = \phi_A(x) \Phi_{ab}^A(y), \quad (3.2.361a)$$

$$e^\sigma = \int d^m y |\Phi|^{1/2}, \quad (3.2.361b)$$

$$G^{AB} = \int d^m y |\Phi|^{1/2} (\Phi^{ac} \Phi^{bd} - \Phi^{ab} \Phi^{cd}) \Phi_{ab}^A \Phi_{cd}^B, \quad (3.2.361c)$$

$$\gamma_{PQ} = \int d^m y |\Phi|^{1/2} \xi_P^a \xi_Q^b \Phi_{ab}, \quad (3.2.361d)$$

$$C = \int d^m y |\Phi|^{1/2} \hat{R}(\Phi). \quad (3.2.361e)$$

ここで,

$$g_{\mu\nu} \rightarrow e^{-\frac{2}{n-2}\sigma} g_{\mu\nu}, \quad (3.2.362a)$$

$$\Phi_{ab} = e^{\frac{2\sigma}{m}} \bar{\Phi}_{ab}, \quad \phi_A = e^{\frac{2\sigma}{m}} \bar{\phi}_A \quad (3.2.362b)$$

とおくと,

$$S = \int d^n x \sqrt{g} \left[ R - \alpha (D\sigma)^2 - \frac{1}{2} \bar{G}^{AB} D\bar{\phi}_A D\bar{\phi}_B + e^{-2\alpha\sigma} \bar{C} - \frac{1}{4} e^{2\alpha\sigma} \bar{\gamma}_{PQ} F^P \cdot F^Q \right]. \quad (3.2.363)$$

ここで,

$$\alpha = \frac{1}{n-2} + \frac{1}{m}, \quad (3.2.364a)$$

$$1 = \int d^m y |\bar{\Phi}|^{1/2}, \quad (3.2.364b)$$

$$\bar{G}^{AB} = \frac{1}{2} (\bar{\Phi}^{ac} \bar{\Phi}^{bd} - \bar{\Phi}^{ab} \bar{\Phi}^{cd}) \bar{\Phi}_{ab}^A \bar{\Phi}_{cd}^B, \quad (3.2.364c)$$

$$\bar{C} = \hat{R}(\bar{\Phi}), \quad (3.2.364d)$$

$$\bar{\gamma}_{PQ} = \xi_P^a \xi_Q^b \bar{\Phi}_{ab}. \quad (3.2.364e)$$

ゲージ対称性  $M = X \times Y$  の変換で次の構造をもつものを考える :

$$f(x, y) = (x, f_{g(x)}(y)). \quad (3.2.365)$$

ここで,  $f_g$  は  $g \in G$  に対応する  $Y$  の変換.  $f_g$  は  $Y_x$  の等長変換となるので,

$$f_g^* \Phi = \Phi \Leftrightarrow \Phi_{ab}(x, y) = \Phi_{cd}(x, f_g(y)) ((f_g)_*)^c{}_a ((f_g)_*)^d{}_b. \quad (3.2.366)$$

また,

$$\begin{aligned} [f^*(dy^a + A^a)]_p &= d(y^a(f_g(p))) + \xi_{f_g(p)}^a(A) \\ &= ((f_g)_*)^a{}_b dy^b + d_x(y^a(f_g(p))) + \xi_{f_g(p)}^a(A). \end{aligned} \quad (3.2.367)$$

ここで,

$$d_x(y^a(f_g(p))) = dx^\mu \frac{\partial}{\partial \epsilon^\mu} y^a(f_{g(x)} f_{g(x)^{-1}g(x+\epsilon)}(p)) = ((f_g)_*)^a{}_b \xi_p^b(g^{-1}dg). \quad (3.2.368)$$

また,

$$\frac{d}{d\epsilon} f_{g(\epsilon)}(p) = \xi_p \left( \frac{dg}{d\epsilon} \right), \quad (3.2.369)$$

$$\frac{d}{d\epsilon} f_a f_{g(\epsilon)}(p) = \frac{d}{d\epsilon} f_{ag(\epsilon)a^{-1}}(f_a(p)) = \xi_{f_a(p)} \left( \text{Ad}_a \left( \frac{dg}{d\epsilon} \right) \right). \quad (3.2.370)$$

より,

$$((f_{g^{-1}})_*)^a{}_b \xi_{f_g(p)}(A) = \xi_p(\text{Ad}_{g^{-1}}(A)). \quad (3.2.371)$$

よって,

$$f^* ds^2 = \Phi_{ab}(y, x) (dy^a + \xi^a(\bar{A})) (dy^b + \xi^b(\bar{A})) + g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.2.372)$$

ここで,

$$\bar{A} = g^{-1} A g + g^{-1} dg. \quad (3.2.373)$$

したがって, 変換  $f$  は  $A$  に対するゲージ変換として表される.

### 3.3 球対称解

#### 3.3.1 4次元

##### 3.3.1.1 Schwarzschild 解

Schwarzschild 形式:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega_2^2. \quad (3.3.1)$$

等方座標系  $\rho$  を

$$r - M = \rho + \frac{M^2}{4\rho} \quad (3.3.2)$$

により定義すると,

$$ds^2 = - \left(\frac{\rho - \frac{M}{2}}{\rho + \frac{M}{2}}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_2^2). \quad (3.3.3)$$

ただし,

$$r \rightarrow 2M \Rightarrow \rho \rightarrow M/2, \quad \rho \geq M/2. \quad (3.3.4)$$

Eddington-Finkelstein 形式: 時間座標

$$\bar{t} = t + 2M \ln |r - 2M| \quad (3.3.5)$$

を用いると,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\bar{t}^2 + \frac{4M}{r} d\bar{t} dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega_2^2. \quad (3.3.6)$$

Painlevé 形式: 自由落下時間座標

$$\tau = \bar{t} + 2(2Mr)^{1/2} - 4M \ln \left(1 + \left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2}\right) \quad (3.3.7)$$

を用いると,

$$ds^2 = -d\tau^2 + \left(dr + \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} d\tau\right)^2 + r^2 d\Omega_2^2. \quad (3.3.8)$$

**Kasner Embedding:** 6次元擬 Euclid 空間  $E^{4,2}$

$$ds^2 = -dY_1^2 - dY_2^2 + dY_3^2 + \cdots + dY_6^2 \quad (3.3.9)$$

への埋め込み [Kasner E 1965[Kas65]] :

$$(Y_1, Y_2) := 2M \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} (\cos(t/2M), \sin(t/2M)) \quad (3.3.10a)$$

$$Y_3 := \int dr \left( \frac{2M(2M^3 + r^3)}{r^3(r - 2M)} \right)^{1/2}, \quad (3.3.10b)$$

$$(Y_4, Y_5, Y_6) := r\Omega_2. \quad (3.3.10c)$$

**Kasner Embedding:** 6次元擬 Euclid 空間  $E^{5,1}$

$$ds^2 = -dY_1^2 + dY_2^2 + dY_3^2 + \cdots + dY_6^2 \quad (3.3.11)$$

への埋め込み [Fronsdal C 1959[Fro59]] :

$$(Y_1, Y_2) := 4M \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} (\sinh(t/4M), \cosh(t/2)) \quad (3.3.12a)$$

$$Y_3 := \int dr \left( \frac{2M(r^2 + 2Mr + 4M^2)}{r^3} \right)^{1/2}, \quad (3.3.12b)$$

$$(Y_4, Y_5, Y_6) := r\Omega_2. \quad (3.3.12c)$$

### 3.3.2 高次元解 (Einstein 理論)

$(n + 2)$  次元静的球対称計量

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{h(r)} + r^2 d\Omega_n^2 \quad (3.3.13)$$

に対して, Einstein 方程式は

$$G_{tt} = \frac{nf}{2r^n} [r^{n-1}(1-h)]' = \kappa_n'^2 f \rho(r), \quad (3.3.14a)$$

$$R_t^t - R_r^r = \frac{nf}{2r} \left(\frac{h}{f}\right)' = \kappa_n'^2 \{P(r) - \rho(r)\}, \quad (3.3.14b)$$

$$\nabla_\mu T_r^\mu = P' + \frac{f'}{2f}(\rho + P) = 0. \quad (3.3.14c)$$

ここで,

$$\kappa_n'^2 := n\Omega_n G' = 8\pi G. \quad (3.3.15)$$

( $\Omega_n$  は  $S^n$  の面積).

これより,

$$h = 1 - \frac{2G'M(r)}{r^{n-1}}. \quad (3.3.16)$$

ここで,

$$M(r) := \Omega_n \int_0^r dr r^n \rho(r). \quad (3.3.17)$$

真空解 Kretschmann 不変量は

$$R_{abcd}R^{abcd} = n^2(n^2 - 1) \frac{a^{2n-2}}{r^{2n+2}}, \quad 2G'M = a^{n-1}. \quad (3.3.18)$$

### 3.3.3 高次元解 (Einstein-Maxwell)

#### Einstein-Maxwell 系

作用積分

$$S = \int d^{n+2}x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{2} F \cdot F \right] \quad (3.3.19)$$

場の方程式

$$dF = 0, \quad *d*F = -J = 0, \quad (3.3.20a)$$

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}; \quad (3.3.20b)$$

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu*} F_{\nu}^* - \frac{1}{2} F \cdot F g_{\mu\nu}. \quad (3.3.20c)$$

#### $\Lambda$ -Reissner-Nordström 解

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 g(S^n); \quad (3.3.21a)$$

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r^{n-1}} + \frac{Q^2}{r^{2n-2}} - \frac{2\Lambda}{n(n+1)} r^2, \quad (3.3.21b)$$

$$F = \phi' dt \wedge dr, \quad A = -\phi(r) dt; \quad \phi = \frac{q}{\text{vol}(S^n) r^{n-1}}, \quad (3.3.21c)$$

$$M = \frac{8\pi G}{n \text{vol}(S^n)} E, \quad Q^2 = \frac{n}{n-1} \frac{8\pi G q^2}{\text{vol}(S^n)^2}. \quad (3.3.21d)$$



### 3.3.4 高次元解 (Einstein-Gauss-Bonnet)

#### Einstein-Gauss-Bonnet 理論

作用積分

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^n x \sqrt{-g} \left[ R - 2\Lambda + \frac{c}{2} L_{\text{GB}} \right] + \frac{1}{8\pi G} \int d^{n-1} x \sqrt{h} K,$$

$$L_{\text{GB}} = R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd} \quad (3.3.22)$$

#### Boulware-Deser 解

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{n-2}^2, \quad (3.3.23a)$$

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{c(n-3)(n-4)} \left[ 1 + \epsilon \sqrt{1 + \frac{4c(n-3)(n-4)}{(n-1)(n-2)} \left\{ \frac{(n-1)\mu}{r^{n-1}} + \Lambda \right\}} \right] \quad (3.3.23b)$$

ここで,  $\epsilon = \pm 1$ . また,  $\mu$  とブラックホール質量は

$$M = \frac{\mu \Omega_{n-2}}{8\pi G} \quad (3.3.24)$$

の関係にある.

### 3.3.5 測地線

測地線は平面曲線となるので, その平面を  $\theta = \pi/2$  と選ぶと, 測地線の方程式は次の 1 階系に帰着される:

$$-f\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{h} + r^2\dot{\phi}^2 = -\epsilon, \quad (3.3.25a)$$

$$E = f\dot{t}, \quad (3.3.25b)$$

$$L = r^2\dot{\phi}. \quad (3.3.25c)$$

ここで, 時間的な測地線に対して  $\epsilon = 1$ , 光的な測地線に対して  $\epsilon = 0$ . これより,

$$\dot{r}^2 = \frac{h}{f} \left\{ E^2 - f \left( \epsilon + \frac{L^2}{r^2} \right) \right\}, \quad (3.3.26a)$$

$$\dot{t} = \frac{E}{f}, \quad (3.3.26b)$$

$$\dot{\phi} = \frac{L^2}{r^2}. \quad (3.3.26c)$$

特に，軌道の方程式は，

$$d\phi = \pm L \frac{dr}{r^2} \left[ \frac{h}{f} \left\{ E^2 - f \left( \epsilon + \frac{L^2}{r^2} \right) \right\} \right]^{-1/2}. \quad (3.3.27)$$

### 3.3.5.1 円軌道

円軌道の半径を決める方程式は， $f = h$  のとき（真空），

$$\frac{f'}{f} = \frac{2L^2}{r(\epsilon r^2 + L^2)}. \quad (3.3.28)$$

光線 光線の円軌道半径  $r_{cp}$  は， $f = h = 1 - (r_h/r)^{n-1}$  のとき，

$$r_{cp} = \left( \frac{n+1}{2} \right)^{\frac{1}{n-1}} r_h. \quad (3.3.29)$$

### 3.4 3次元解

#### 3.4.1 真空解

【定理 3.62 (3次元真空解の局所自明性)】 3次元時空における Einstein 方程式の真空解は、定曲率である。特に、宇宙項  $\Lambda = 0$  なら局所平坦、 $\Lambda > 0$  なら局所 dS、 $\Lambda < 0$  なら局所 adS. \_\_\_\_\_□

**Proof.** 3次元では、Riemann 曲率が Ricci 曲率で完全に決まってしまうため。 Q.E.D.

【定理 3.63 (質点の質量と欠損角の関係)】  $\Lambda = 0$  のとき、真空解は各質点において円錐特異性を持ち、欠損角  $\Delta\varphi$  は質点の質量  $m$  を用いて、 $\kappa^2 m = \Delta\varphi$  と表される。 \_\_\_\_\_□

**Proof.** 一般に、物質分布が回転対称で静的なとき、計量は、

$$ds^2 = -e^{2\phi(\rho)} dt^2 + e^{2\xi(\rho)} d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 \quad (3.4.1)$$

と表される。この計量に対する Hamiltonian 拘束条件

$${}^2R = 2\kappa^2 \mu \quad (3.4.2)$$

において、空間のスカラ曲率は

$${}^2R = \frac{2\xi'}{\rho} e^{-2\xi}. \quad (3.4.3)$$

よって、物質が  $\rho < \rho_0$  に confine されているとき

$$\kappa^2 m = \kappa^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\rho_0} d\rho \rho e^\xi \mu = [-2\pi e^{-\xi}]_0^{\rho_0} = 2\pi(1 - \alpha). \quad (3.4.4)$$

ここで、 $\alpha = e^{-\xi(\rho_0)}$ .  $\rho > \rho_0$  では  $\xi$  は定数となるので、 $\rho/\alpha = \tilde{\rho}$ ,  $\alpha\varphi = \tilde{\varphi}$  とおくと、 $ds^2 = -dt^2 + d\tilde{\rho}^2 + \tilde{\rho}^2 d\tilde{\varphi}^2$  となるが、 $0 \leq \varphi < 2\pi$  のとき  $0 \leq \tilde{\varphi} < 2\pi\alpha$ . よって、欠損角は  $2\pi - 2\pi\alpha = \kappa^2 m$ . Q.E.D.

### 3.4.2 BTZ ブラックホール

【公式 3.64 (BTZ 解)】

1.  $E^{2,2}$  の 2 次超曲面として実現された  $\text{adS}^3$

$$-(y^0)^2 - (y^3)^2 + (y^1)^2 + (y^2)^2 = -\ell^2 \quad (3.4.5)$$

の計量を, 静的双曲チャート

$$\begin{aligned} y^0 &= \sqrt{R^2 - \ell^2} \sinh(T/\ell), & y^1 &= \sqrt{R^2 - \ell^2} \cosh(T/\ell), \\ y^2 &= R \sinh \theta, & y^3 &= R \cosh \theta \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

で表すと, BTZ 解

$$ds^2 = -(R^2/\ell^2 - 1)dT^2 + \frac{dR^2}{R^2/\ell^2 - 1} + R^2 d\theta^2 \quad (3.4.7)$$

が得られる. この解は,  $\text{adS}^3$  の  $y^1 > |y^0|$  で定義される領域を覆う. ただし,  $\theta + 2\pi \sim \theta$  の同一視が必要である.

2. 時間座標  $v$  を

$$v = T + R_*; \quad (3.4.8)$$

$$\begin{aligned} R_* &= \int \frac{dR}{R^2/\ell^2 - 1} = \frac{\ell}{2} \ln \left| \frac{R - \ell}{R + \ell} \right| \\ \Leftrightarrow R &= \ell \coth(R_*/\ell) \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

により導入すると, BTZ BH の  $R > \ell$  の領域は, 標準の静的全域チャート  $(t, r, \phi)$  を用いて

$$r \cos \phi = R \cosh(v/\ell) + \ell \sinh(v/\ell), \quad (3.4.10a)$$

$$r \sin \phi = R \sinh \theta, \quad (3.4.10b)$$

$$\tan(t/\ell) = \frac{R \sinh(v/\ell) + \ell \cosh(v/\ell)}{R \cosh \theta}. \quad (3.4.10c)$$

と表され, future horizon  $\mathcal{H}^+$  は

$$r \cos \phi = \ell e^{v/\ell}, \quad (3.4.11a)$$

$$r \sin \phi = \ell \sinh \theta, \quad (3.4.11b)$$

$$\tanh(t/\ell) = \frac{e^{v/\ell}}{\cosh \theta} \quad (3.4.11c)$$

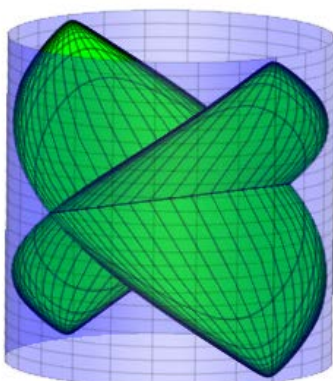


図 1: BTZ ブラックホールのホライズン. 外の円筒は  $(t, \chi, \phi)$  座標系での 3次元反 de Sitter 時空の無限遠  $\mathcal{I} : \chi = \pi/2$ . BTZ ブラックホールは,  $\theta = \pm\pi$  に対応する葉っぱ型のホライズンの 2つの端を同一視して得られる.

と表される. 同様に, 時間座標  $u$  を

$$u = T - R_* \quad (3.4.12)$$

により導入すると, BTZ BH の  $R > \ell$  の領域は,

$$r \cos \phi = R \cosh(u/\ell) - \ell \sinh(u/\ell), \quad (3.4.13a)$$

$$r \sin \phi = R \sinh \theta, \quad (3.4.13b)$$

$$\tan(t/\ell) = \frac{R \sinh(u/\ell) - \ell \cosh(u/\ell)}{R \cosh \theta}. \quad (3.4.13c)$$

と表され, past horizon  $\mathcal{H}^-$  が  $(t, r, \phi)$  座標系で

$$r \cos \phi = \ell e^{-u/\ell}, \quad (3.4.14a)$$

$$r \sin \phi = \ell \sinh \theta, \quad (3.4.14b)$$

$$\tanh(t/\ell) = -\frac{e^{-u/\ell}}{\cosh \theta} \quad (3.4.14c)$$

と表される.

□

### 3.5 4次元円筒対称解

#### 3.5.1 4次元静的円筒対称真空解

【命題 3.65】 4次元静的円筒対称真空解は次の計量で与えられる：

$$ds^2 = -\rho^{2n} dt^2 + \rho^{\frac{2n^2}{n+1}} d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + \rho^{-\frac{2n}{n+1}} dz^2. \quad (3.5.1)$$

これは、Banchi モデルの vacuum Kasner に対応。 \_\_\_\_\_□

**Proof.** 静的円筒対称時空は適当な座標変換により

$$ds^2 = -e^{2U(\rho)} dt^2 + e^{2W(\rho)} d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + e^{2S(\rho)} dz^2 \quad (3.5.2)$$

と表される。Einstein 方程式は

$$G_\rho^\rho = e^{-2W} \left[ S'U' + \frac{1}{\rho}(U' + S') \right] = 0, \quad (3.5.3a)$$

$$G_z^z = e^{-2W} \left[ U'' + (U')^2 - U'W' + \frac{1}{\rho}(U' - W') \right] = 0, \quad (3.5.3b)$$

$$G_t^t = e^{-2W} \left[ S'' + (S')^2 - S'W' + \frac{1}{\rho}(S' - W') \right] = 0, \quad (3.5.3c)$$

$$G_\phi^\phi = e^{-2W} (U'' + S'' + (U')^2 + (S')^2 + U'S' - S'W' - U'W') \quad (3.5.3d)$$

$G_z^z + G_t^t - G_\phi^\phi - G_\rho^\rho$  より,  $W' = U' + S'$ . よって,  $W = U + S$  とおいて良い. このとき,  $G_z^z$  と  $G_t^t$  は,  $(\rho U')' = (\rho S')' = 0$  となるので,

$$U = n \log \rho + \text{const}, \quad S = m \log \rho + \text{const}, \quad W = (n + m) \log \rho + \text{const}. \quad (3.5.4)$$

これを  $G_\rho^\rho$  に代入して,

$$nm + n + m = 0 \Rightarrow m = -\frac{n}{n+1} \quad (3.5.5)$$

Q.E.D.

## 3.6 4次元定常軸対称解

### 3.6.1 Ernst Formalism

### 3.6.2 $(\rho, z)$ 座標系での表示

計量:

$$ds^2 = -f(dt + Ad\phi)^2 + f^{-1}[\rho^2 d\phi^2 + e^{2k}(d\rho^2 + dz^2)] \quad (3.6.1)$$

キリングベクトルは

$$\xi = \partial_t, \quad \eta = \partial_\phi. \quad (3.6.2)$$

対応する 1 形式は

$$\xi_* = -f(dt + Ad\phi), \quad \eta_* = f^{-1}\rho^2 d\phi + A\xi_*. \quad (3.6.3)$$

以下, 向き付けを

$$\epsilon_{t\phi\rho z} = \sqrt{-g} > 0 \quad (3.6.4)$$

に取る.

電磁場 :

$$\mathcal{F} = \sqrt{G}(F + i * F), \quad (3.6.5)$$

$$d\Phi = I_\xi \mathcal{F}, \quad (3.6.6)$$

$$\mathcal{F} = f^{-1}[d\Phi \wedge \xi_* + i*(d\Phi \wedge \xi_*)] \quad (3.6.7)$$

$(\rho, z)$  座標では

$$G^{-1/2}d\Phi = \left(F_{t\rho} - i\frac{f}{\rho}F_{\phi z}\right) d\rho + \left(F_{tz} + i\frac{f}{\rho}F_{\phi\rho}\right) dz \quad (3.6.8)$$

Ernst ポテンシャル : Killing ベクトル  $\xi$  の回転を

$$\omega = -I_\xi * d\xi_* = *(\xi_* \wedge d\xi_*) \quad (3.6.9)$$

とおくとき,

$$d\mathcal{E} = df + i\omega - 2\bar{\Phi}d\Phi. \quad (3.6.10)$$

$(\rho, z)$  座標では  $\omega$  は

$$\omega = \frac{f^2}{\rho}(-A_\rho dz + A_z d\rho). \quad (3.6.11)$$

Ernst ポテンシャルを用いて計量成分を表すと,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + i\mathcal{E}_2$  として,

$$f = \mathcal{E}_1 + |\Phi|^2, \quad (3.6.12a)$$

$$\partial_\zeta A = f^{-2} \rho [i\partial_\zeta \mathcal{E}_2 + \bar{\Phi}\partial_\zeta \Phi - \Phi\partial_\zeta \bar{\Phi}], \quad (3.6.12b)$$

$$\begin{aligned} \partial_\zeta k &= \frac{\rho}{2f^2} (\partial_\zeta \mathcal{E} + 2\bar{\Phi}\partial_\zeta \Phi) (\partial_\zeta \bar{\mathcal{E}} + 2\Phi\partial_\zeta \bar{\Phi}) - 2\frac{\rho}{f} \partial_\zeta \Phi \partial_\zeta \bar{\Phi} \\ &= \frac{\rho}{2f^2} (\partial_\zeta f)^2 - \frac{f^2}{2\rho} (\partial_\zeta A)^2 - 2\frac{\rho}{f} \partial_\zeta \Phi \partial_\zeta \bar{\Phi}. \end{aligned} \quad (3.6.12c)$$

ここで,

$$\partial_\zeta = \frac{1}{2}(\partial_\rho - i\partial_z). \quad (3.6.13)$$

Ernst 方程式 :  $\partial = (\partial_\rho, \partial_z)$  として,

$$f\rho^{-1}\partial \cdot (\rho\partial\mathcal{E}) = \partial\mathcal{E} \cdot (\partial\mathcal{E} + 2\bar{\Phi}\partial\Phi), \quad (3.6.14a)$$

$$f\rho^{-1}\partial \cdot (\rho\partial\Phi) = \partial\Phi \cdot (\partial\mathcal{E} + 2\bar{\Phi}\partial\Phi). \quad (3.6.14b)$$

### 3.6.2.1 $(x, y)$ 座標での表示

$(\rho, z)$  座標との関係 :

$$\rho^2 = \sigma^2(x^2 - 1)(1 - y^2), \quad z = \sigma xy. \quad (3.6.15)$$

計量は

$$d\rho^2 + dz^2 = \sigma^2(x^2 - y^2) \left( \frac{dx^2}{x^2 - 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right). \quad (3.6.16)$$

また,

$$\rho d\rho \wedge dz = \sigma^3(x^2 - y^2) dx \wedge dy \quad (3.6.17)$$

$A$  の表式 :

$$\partial_x A = \frac{\sigma(1 - y^2)}{f^2} [\partial_y \mathcal{E}_2 + i(\Phi\partial_y \bar{\Phi} - \bar{\Phi}\partial_y \Phi)], \quad (3.6.18a)$$

$$\partial_y A = -\frac{\sigma(x^2 - 1)}{f^2} [\partial_x \mathcal{E}_2 + i(\Phi\partial_x \bar{\Phi} - \bar{\Phi}\partial_x \Phi)]. \quad (3.6.18b)$$



$k$  の表式 :

$$\partial_x k = \frac{1-y^2}{x^2-y^2} \left[ \frac{xB - 2y(x^2-1)C}{4f^2} - \frac{xD - 2y(x^2-1)E}{f} \right] \quad (3.6.19a)$$

$$\partial_y k = \frac{x^2-1}{x^2-y^2} \left[ \frac{yB + 2x(1-y^2)C}{4f^2} - \frac{yD + 2x(1-y^2)E}{f} \right] \quad (3.6.19b)$$

ここで,

$$\begin{aligned} B &= (x^2-1)|\partial_x \mathcal{E} + 2\bar{\Phi}\partial_x \Phi|^2 - (1-y^2)|\partial_y \mathcal{E} + 2\bar{\Phi}\partial_y \Phi|^2 \\ &= (x^2-1)(\partial_x f)^2 - (1-y^2)(\partial_y f)^2 \\ &\quad - \frac{f^4}{\sigma^2(x^2-1)(1-y^2)} [(x^2-1)(\partial_x A)^2 - (1-y^2)(\partial_y A)^2] \end{aligned} \quad (3.6.20a)$$

$$\begin{aligned} C &= \text{Re} \{ (\partial_x \mathcal{E} + 2\bar{\Phi}\partial_x \Phi)(\partial_y \bar{\mathcal{E}} + 2\Phi\partial_y \bar{\Phi}) \} \\ &= \partial_x f \partial_y f - \frac{f^4}{\sigma^2(x^2-1)(1-y^2)} \partial_x A \partial_y A, \end{aligned} \quad (3.6.20b)$$

$$D = (x^2-1)|\partial_x \Phi|^2 - (1-y^2)|\partial_y \Phi|^2, \quad (3.6.20c)$$

$$E = \text{Re}(\partial_x \Phi \partial_y \bar{\Phi}). \quad (3.6.20d)$$

### 3.6.3 Weyl 解

計量

$$ds^2 = -e^{2U} dt^2 + e^{-2U} \left[ e^{2k}(x^2-y^2) \left( \frac{dx^2}{x^2-1} + \frac{dy^2}{1-y^2} \right) + \rho^2 d\phi^2 \right]; \quad (3.6.21)$$

$$e^{2U} = \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^\delta, \quad (3.6.22a)$$

$$e^{2k} = m^2 \left( \frac{x^2-1}{x^2-y^2} \right)^{\delta^2}, \quad (3.6.22b)$$

$$\rho^2 = m^2(x^2-1)(1-y^2). \quad (3.6.22c)$$

この計量は,  $\delta = 0$  のとき Minkowski 時空を,  $\delta = 1$  のとき正質量 Schwarzschild BH を,  $\delta = -1$  のとき負質量 Schwarzschild BH を表す.

Weyl テンソル 基底

$$\theta^0 = e^U dt, \quad \theta^1 = e^{-U} \rho d\phi, \quad \theta^2 = e^{k-U} d\rho, \quad \theta^3 = e^{k-U} dz \quad (3.6.23)$$

に関して,

$$\Psi_2 = \frac{\delta(x-\delta)(x^2-y^2)^{\delta^2-1}}{2(x-1)^{\delta^2-\delta+1}(x+1)^{\delta^2+\delta+1}}, \quad (3.6.24a)$$

$$\begin{aligned} \Psi_0 + \Psi_4 = & \frac{\delta(x^2-y^2)^{\delta^2-3}}{(x-1)^{\delta^2-\delta+1}(x+1)^{\delta^2+\delta+1}} \left[ 3(x-1)(x^2-y^2)(2x^2y^2-x^2-y^2) \right. \\ & + (\delta-1) \{ (-8(\delta+1)x^3 + 6x^2 + 6(\delta+1)x - 3) y^4 \\ & \left. + (-6x^3 + 10(\delta+1)x^2 - 6(\delta+1)) xy^2 + 3x^4 - 2(\delta+1)x^3 \} \right], \quad (3.6.24b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i(\Psi_0 - \Psi_4) = & -\frac{2\delta\rho y(x^2-y^2)^{\delta^2-3}}{(x-1)^{\delta^2-\delta+1}(x+1)^{\delta^2+\delta+1}} \left[ 3x(x-1)(x^2-y^2) \right. \\ & \left. + (\delta-1) \{ (-4(\delta+1)x^2 + 3x + \delta + 1) y^2 - 3x^3 + 3(\delta+1)x^2 \} \right]. \quad (3.6.24c) \end{aligned}$$

基底によらない不変量 ( ${}^+C_{0I0J}$  の固有値) は,

$$-2\Psi_2, \quad \Psi_2 \pm \sqrt{\Psi_0\Psi_4}. \quad (3.6.25)$$

特に,

$$9\Psi_2^2 - \Psi_0\Psi_4 = \frac{\delta^2(\delta^2-1)(x^2-y^2)^{2\delta^2-3}(y^2-1)(3x^2-3\delta x+\delta^2-1)}{[(x-1)^{\delta^2-\delta+1}(x+1)^{\delta^2+\delta+1}]^2}. \quad (3.6.26)$$

また,

$$\begin{aligned} \Psi_0\Psi_4 = & \frac{\delta^2(x^2-y^2)^{2\delta^2-3}}{4[(x-1)^{\delta^2-\delta+1}(x+1)^{\delta^2+\delta+1}]^2} \times \left[ 9(x-1)^2(x^2-y^2) \right. \\ & + (\delta-1) \{ [-12(\delta+1)x^2 + 6(2\delta^2+2\delta+3)x - \delta - 1 - 4(\delta+1)(\delta^2+1)] y^2 \\ & \left. - 18x^2 + 21(\delta+1)x^2 - 12\delta(\delta+1)x + 4(\delta-1)(\delta+1)^2 \} \right]. \quad (3.6.27) \end{aligned}$$

これらの量のいずれかがゼロとなることと Petrov 型 D となることは同等.

基底

$$\tilde{\theta}^0 = \theta^0, \quad \tilde{\theta}^1 = \frac{e^{k-U}\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2-1}}dx, \quad \tilde{\theta}^2 = \frac{e^{k-U}\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-y^2}}dy, \quad \tilde{\theta}^3 = \theta^1 \quad (3.6.28)$$

に関する Weyl 曲率の成分は

$$\tilde{\Psi}_2 = -\frac{\delta(x^2 - y^2)^{\delta^2-2} [2x^3 - 2\delta x^2 + (\delta^2 - 1)x + (-x - \delta^2 x + 2\delta)y^2]}{2(x-1)^{\delta^2-\delta+1}(x+1)^{\delta^2+\delta+1}}, \quad (3.6.29a)$$

$$\tilde{\Psi}_1 = -\tilde{\Psi}_3 = \frac{\delta(\delta^2 - 1)y\sqrt{1-y^2}(x^2 - y^2)^{\delta^2-2}}{2(x-1)^{\delta^2-\delta+1/2}(x+1)^{\delta^2+\delta+1/2}}, \quad (3.6.29b)$$

$$\tilde{\Psi}_0 = \tilde{\Psi}_4 = \frac{\delta(\delta^2 - 1)x(1-y^2)(x^2 - y^2)^{\delta^2-2}}{2(x-1)^{\delta^2-\delta+1}(x+1)^{\delta^2+\delta+1}}. \quad (3.6.29c)$$

不変量は,

$$-(\tilde{\Psi}_2 + \tilde{\Psi}_0), \quad \{\tilde{\Psi}_0 + \tilde{\Psi}_2 \pm [(\tilde{\Psi}_0 - 3\tilde{\Psi}_2)^2 + 16\tilde{\Psi}_1^2]^{1/2}\}/2. \quad (3.6.30)$$

### 3.6.4 Kerr 解

#### 3.6.4.1 計量

$\rho, \Delta, \Gamma, \Omega$  を

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (3.6.31a)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad (3.6.31b)$$

$$\Gamma = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta, \quad (3.6.31c)$$

$$\Omega = \frac{2aMr}{\Gamma} \quad (3.6.31d)$$

とする.

#### Kerr-Schild 形式

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\rho^2}{r^2 + a^2} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{2Mr}{\rho^2} k_*^2. \quad (3.6.32)$$

ここで,  $k_*$  は次の 1 形式

$$k_* = -dt - \frac{\rho^2}{r^2 + a^2} dr + a \sin^2 \theta d\phi. \quad (3.6.33)$$

対応するベクトルは，PND となる．2つの PND を含む null tetrad は

$$k = \frac{\Delta + 4Mr}{\Delta} \left( \partial_t + \frac{a}{r^2 + a^2} \partial_\phi \right) + \partial_r, \quad (3.6.34a)$$

$$l = \frac{\Delta}{2\rho^2} \left( \partial_t + \frac{a}{r^2 + a^2} \partial_\phi - \partial_r \right), \quad (3.6.34b)$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}\rho} \left\{ \partial_\theta + i \left( a \sin \theta \partial_t + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi \right) \right\}. \quad (3.6.34c)$$

また， $\Psi_a$  は

$$\Psi_0 = \Psi_1 = 0, \quad \Psi_2 = -\frac{M}{(r - Ia \cos \theta)^3}, \quad \Psi_3 = \Psi_4 = 0. \quad (3.6.35)$$

### Boyer-Lindquist 座標

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\Delta \rho^2}{\Gamma} dt^2 + \frac{\Gamma \sin^2 \theta}{\rho^2} (d\phi - \Omega dt)^2 + \rho^2 \left( \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) \\ &= -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} dt^2 - \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi \\ &\quad + \left\{ r^2 + a^2 + \frac{2a^2 Mr}{\rho^2} \right\} \sin^2 \theta d\phi^2 + \rho^2 \left( \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) \end{aligned} \quad (3.6.36)$$

2つの PND と対応する null 基底のこの座標系での表示は，

$$k_* = -dt + a \sin^2 \theta d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr, \quad (3.6.37a)$$

$$k = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \left( \partial_t + \frac{a}{r^2 + a^2} \partial_\phi \right) + \partial_r, \quad (3.6.37b)$$

$$l = \frac{1}{2\rho^2} \left( (r^2 + a^2) \partial_t + a \partial_\phi - \Delta \partial_r \right), \quad (3.6.37c)$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}\rho} \left\{ \partial_\theta + i \left( a \sin \theta \partial_t + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi \right) \right\}. \quad (3.6.37d)$$

**Doran 座標**： [Dor00] 新しい時間座標と角度座標を

$$d\tau = du_+ - \frac{dr}{1 + (2Mr)^{1/2}/(r^2 + a^2)^{1/2}}, \quad (3.6.38a)$$

$$d\tilde{\phi} = d\phi_+ - \frac{adr}{(r^2 + a^2)[1 + (2Mr)^{1/2}/(r^2 + a^2)^{1/2}]}, \quad (3.6.38b)$$

$$(3.6.38c)$$

とおくと,

$$ds^2 = -d\tau^2 + \left( \frac{\rho dr}{(r^2 + a^2)^{1/2}} + \alpha(d\tau - a \sin^2 \theta d\tilde{\phi}) \right)^2 + \rho^2 d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\tilde{\phi}^2. \quad (3.6.39)$$

ここで,

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (3.6.40a)$$

$$\alpha = \frac{(2Mr)^{1/2}}{\rho} \quad (3.6.40b)$$

### 3.6.4.2 horizon

ホライズン半径

$$\Delta = 0 \Rightarrow r = r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (3.6.41)$$

ホライズン面積

$$A = 4\pi(r_h^2 + a^2) = 8\pi Mr_h. \quad (3.6.42)$$

表面重力

$$\kappa = \frac{r_h - M}{r_h^2 + a^2} = \pm \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{2Mr_h} \quad (3.6.43)$$

### 3.6.4.3 測地線

測地線の方程式

$$-E = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{t} - \frac{2aMr \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{\phi}, \quad (3.6.44a)$$

$$L = -\frac{2aMr \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{t} + \frac{\Gamma \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{\phi}, \quad (3.6.44b)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho^2}{\Delta} \dot{r}\right)' &= \frac{M(-r^2 + a^2 \cos^2 \theta)}{\rho^4} \dot{t}^2 - \frac{2aM(-r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta}{\rho^4} \dot{t} \dot{\phi} \\ &\quad + \left(r + \frac{a^2 M(-r^2 + a^2 \cos^2 \theta)}{\rho^4} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \\ &\quad + \frac{M(-r^2 + a^2 \cos^2 \theta) + ra^2 \sin^2 \theta}{\Delta^2} \dot{r}^2 + r \dot{\theta}^2, \end{aligned} \quad (3.6.44c)$$

$$\begin{aligned} (\rho^2 \dot{\theta})' &= \sin \theta \cos \theta \left[ \frac{2a^2 Mr}{\rho^4} \dot{t}^2 - \frac{4Mar(r^2 + a^2)}{\rho^4} \dot{t} \dot{\phi} \right. \\ &\quad \left. + \left(\Delta - \frac{2Mr(r^2 + a^2)}{\rho^4}\right) \dot{\phi}^2 - \frac{a^2}{\Delta} \dot{r}^2 - a^2 \dot{\theta}^2 \right], \end{aligned} \quad (3.6.44d)$$

$$-\epsilon = -\frac{\Delta \rho^2}{\Gamma} \dot{t}^2 + \frac{\Gamma \sin^2 \theta}{\rho^2} (\dot{\phi} - \Omega \dot{t})^2 + \rho^2 \left( \frac{\dot{r}^2}{\Delta} + \dot{\theta}^2 \right) \quad (3.6.44e)$$

光的円軌道  $\dot{r} = 0$ ,  $\theta = \pi/2$  とおくと, 測地線の方程式は

$$-\{r(r^2 + a^2) + 2a^2 M\} E^2 + 4aMrEL + (r - 2M)L^2 = \quad (3.6.45a)$$

$$\begin{aligned} &(4a^2 Mr - r^4 - 2a^2 r^2 - a^4) E^2 - 2a(4Mr - 3r^2 - a^2) LE \\ &\quad + (4M^2 r - 4Mr^2 + r^3 - Ma^2) \frac{L^2}{M} = 0. \end{aligned} \quad (3.6.45b)$$

これらは次の2式と同等:

$$r(r - 3M)^2 = 4Ma^2, \quad (3.6.46a)$$

$$\frac{L}{E} = \frac{3r(3M - r)}{2a} - a. \quad (3.6.46b)$$

時間的円軌道  $\dot{r} = 0$ ,  $\theta = \pi/2$  とおくと, 測地線の方程式は

$$-\{r(r^2 + a^2) + 2a^2 M\} E^2 + 4aMrEL + (r - 2M)L^2 = \quad (3.6.47a)$$

$$\begin{aligned} &(4a^2 Mr - r^4 - 2a^2 r^2 - a^4) E^2 - 2a(4Mr - 3r^2 - a^2) LE \\ &\quad + (4M^2 r - 4Mr^2 + r^3 - Ma^2) \frac{L^2}{M} = 0. \end{aligned} \quad (3.6.47b)$$

これらより，円軌道の半径は次の方程式の解：

$$\begin{aligned}
& (E^4 - 8E^2 + 16)r^6 + M(-6E^4 + 56E^2 - 128)r^5 \\
& + M^2(9E^4 - 128E^2 + 384)r^4 \\
& + \{M^3(96E^2 - 512) + Ma^2(-4E^4 + 24E^2 - 32)\}r^3 \\
& + M^2\{256M^2 + a^2(-40E^2 + 128)\}r^2 \\
& - 128M^3a^2r + 16M^2a^4 = 0.
\end{aligned} \tag{3.6.48}$$

対応する  $L$  は

$$\begin{aligned}
L = \frac{1}{2aME} \{ & (4 - E^2)r^3 + (3E^2 - 16)Mr^2 + 16M^2r \\
& + (2E^2 - 4)Ma^2 \}
\end{aligned} \tag{3.6.49}$$

#### 3.6.4.4 スピン接続係数

**Null tetrad** Boyer-Lindquist 座標で

$$k = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \left( \partial_t + \frac{a}{r^2 + a^2} \partial_\phi \right) + \partial_r, \tag{3.6.50a}$$

$$l = \frac{1}{2\Sigma^2} \{ (r^2 + a^2)\partial_t + a\partial_\phi - \Delta\partial_r \}, \tag{3.6.50b}$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}\Sigma} \left\{ \partial_\theta + i \left( a \sin\theta \partial_t + \frac{1}{\sin\theta} \partial_\phi \right) \right\}. \tag{3.6.50c}$$

対応する微分形式の基底は

$$k_* = -dt + a \sin^2\theta d\phi + \frac{\Sigma^2}{\Delta} dr, \tag{3.6.51a}$$

$$l_* = \frac{\Delta}{2\Sigma^2} (-dt + a \sin^2\theta d\phi) - \frac{1}{2} dr, \tag{3.6.51b}$$

$$m_* = \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos\theta)} \{ \Sigma^2 d\theta - ia \sin\theta dt + i(r^2 + a^2) \sin\theta d\phi \}. \tag{3.6.51c}$$

この基底に対応する曲率テンソルの NP 係数は

$$\Psi_2 = -\frac{M}{(r - ia \cos\theta)^3}, \quad \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0. \tag{3.6.52}$$

Finkelstein 座標系  $(u_\pm, \phi_\pm, r, \theta)$

$$du_\pm = dt \pm \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad d\phi_\pm = d\phi \pm \frac{a}{\Delta} dr \tag{3.6.53}$$

では,

$$\partial_t = \partial_{u_{\pm}}, \quad \partial_{\phi} = \partial_{\phi_{\pm}}, \quad \partial_{\theta} = \partial_{\theta}, \quad (3.6.54a)$$

$$\partial_r = \partial_r^{\pm} \pm \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \partial_{u_{\pm}} \pm \frac{a}{\Delta} \partial_{\phi_{\pm}} \quad (3.6.54b)$$

より,  $\mathcal{H}^+$  近傍で

$$k = \frac{2(r^2 + a^2)}{\Delta} \partial_{u_+} + \frac{2a}{\Delta} \partial_{\phi_+} + \partial_r^+, \quad (3.6.55a)$$

$$l = -\frac{\Delta}{2\Sigma^2} \partial_r^+, \quad (3.6.55b)$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}\Sigma} \left\{ \partial_{\theta} + i \left( a \sin \theta \partial_{u_+} + \frac{1}{\sin \theta} \partial_{\phi_+} \right) \right\}, \quad (3.6.55c)$$

$\mathcal{H}^-$  近傍で

$$k = \partial_r^-, \quad (3.6.56a)$$

$$l = \frac{r^2 + a^2}{\Sigma^2} \partial_{u_-} + \frac{a}{\Sigma^2} \partial_{\phi_-} - \frac{\Delta}{2\Sigma^2} \partial_r^-, \quad (3.6.56b)$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}\Sigma} \left\{ \partial_{\theta} + i \left( a \sin \theta \partial_{u_-} + \frac{1}{\sin \theta} \partial_{\phi_-} \right) \right\}, \quad (3.6.56c)$$

共変微分

$$\nabla_k k = 0, \quad (3.6.57a)$$

$$\nabla_k l = iAm - i\bar{A}\bar{m}, \quad (3.6.57b)$$

$$\nabla_k m = -iAk - \frac{ia \cos \theta}{\Sigma^2} m, \quad (3.6.57c)$$

$$\nabla_l k = Bk - iAm + i\bar{A}\bar{m}, \quad (3.6.57d)$$

$$\nabla_l l = -Bl, \quad (3.6.57e)$$

$$\nabla_l m = i\bar{A}l - \frac{i\Delta a \cos \theta}{2\Sigma^4} m, \quad (3.6.57f)$$

$$\nabla_m k = -iAk - \bar{\rho}m, \quad (3.6.57g)$$

$$\nabla_m l = iAl - Cm, \quad (3.6.57h)$$

$$\nabla_m m = \frac{r^2 + a^2}{\sqrt{2}\Sigma^3} \cot \theta m, \quad (3.6.57i)$$

$$\nabla_m \bar{m} = -Ck + \bar{\rho}l - \frac{r^2 + a^2}{\sqrt{2}\Sigma^3} \cot \theta \bar{m}. \quad (3.6.57j)$$



ここで,

$$A := \frac{a \sin \theta}{\sqrt{2}\Sigma(r + ia \cos \theta)}, \quad (3.6.58a)$$

$$B := \frac{Mr^2 - a^2r \sin^2 \theta - a^2M \cos^2 \theta}{\Sigma^4}, \quad (3.6.58b)$$

$$C := \frac{\Delta}{2\Sigma^2(r - ia \cos \theta)}, \quad (3.6.58c)$$

$$\rho = \frac{1}{r - ia \cos \theta}. \quad (3.6.58d)$$

### Spin 係数

$$\alpha = \frac{-(r^2 + a^2) \cos \theta + ia(r + ia \cos \theta) \sin^2 \theta}{2\sqrt{2}\Sigma^3 \sin \theta}, \quad (3.6.59a)$$

$$\beta = \frac{(r^2 + a^2) \cos \theta - ia(r - ia \cos \theta) \sin^2 \theta}{2\sqrt{2}\Sigma^3 \sin \theta}, \quad (3.6.59b)$$

$$\epsilon = -i \frac{a \cos \theta}{2\Sigma^2}, \quad (3.6.59c)$$

$$\gamma = \frac{2M(r^2 - a^2 \cos^2 \theta) - 2a^2r \sin^2 \theta - ia\Delta \cos \theta}{4\Sigma^4}, \quad (3.6.59d)$$

$$\rho = \frac{1}{r - ia \cos \theta}, \quad (3.6.59e)$$

$$\mu = \frac{\Delta}{2\Sigma^2} \rho, \quad (3.6.59f)$$

$$\tau = i \frac{a \sin \theta}{\sqrt{2}\Sigma} \rho, \quad (3.6.59g)$$

$$\pi = \bar{\tau}, \quad (3.6.59h)$$

$$\sigma = \lambda = \kappa = \nu = 0. \quad (3.6.59i)$$

これより, 特に,

$$\alpha + \bar{\beta} = -\tau. \quad (3.6.60)$$

これらを用いると, null tetrad の共変微分は,

$$\begin{aligned}\nabla k &= -(\gamma + \bar{\gamma})k \otimes k + \bar{\tau}(k \otimes m - \bar{m} \otimes k) + \tau(k \otimes \bar{m} - m \otimes k) \\ &\quad - \rho m \otimes \bar{m} - \bar{\rho} \bar{m} \otimes m,\end{aligned}\quad (3.6.61a)$$

$$\begin{aligned}\nabla l &= (\gamma + \bar{\gamma})k \otimes l + \bar{\tau}(-l \otimes m + \bar{m} \otimes l) + \tau(-l \otimes \bar{m} + m \otimes l) \\ &\quad + \bar{\mu} m \otimes \bar{m} + \mu \bar{m} \otimes m,\end{aligned}\quad (3.6.61b)$$

$$\begin{aligned}\nabla m &= \tau k \otimes l - \bar{\tau} l \otimes k + \bar{\mu} m \otimes k - (\gamma - \bar{\gamma})k \otimes m \\ &\quad - \rho m \otimes l - (\epsilon - \bar{\epsilon})l \otimes m + (\alpha - \bar{\beta})m \otimes m - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{m} \otimes m.\end{aligned}\quad (3.6.61c)$$

さらに□の作用は

$$\square k = -\frac{E}{\Sigma^6}k + \frac{2}{\Sigma^2}l + \frac{\sqrt{2}ia \sin \theta}{\Sigma^3}(m - \bar{m}),\quad (3.6.62a)$$

$$\begin{aligned}\square l &= -\frac{\Delta^2}{2\Sigma^6}k + \frac{-\Delta + 2a^2(1 + \cos^2 \theta)}{\Sigma^4}l \\ &\quad + \frac{a \sin \theta}{\sqrt{2}\Sigma^5} \{2a(M - r) \cos \theta + i(r^2 - a^2)\} m \\ &\quad + \frac{a \sin \theta}{\sqrt{2}\Sigma^5} \{2a(M - r) \cos \theta - i(r^2 - a^2)\} \bar{m},\end{aligned}\quad (3.6.62b)$$

$$\begin{aligned}\square m &= -\frac{\Delta \cos \theta}{\sqrt{2}\Sigma^3(r + ia \cos \theta) \sin \theta}k + \frac{\sqrt{2} \cos \theta}{\Sigma(r - ia \cos \theta)}l \\ &\quad - \frac{F}{\Sigma^6 \sin^2 \theta}m - \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma^4}\bar{m}.\end{aligned}\quad (3.6.62c)$$

ここで,

$$\begin{aligned}E &= r^4 - 2Mr^3 + a^2(3 \cos^2 \theta - 1)r^2 + 2Ma^2r \cos^2 \theta \\ &\quad + a^4 \cos^2 \theta(2 \cos^2 \theta - 1),\end{aligned}\quad (3.6.63a)$$

$$\begin{aligned}F &= r^4 - 2Mr^3 \sin^2 \theta + a^2(1 + \cos^2 \theta) \cos^2 \theta r^2 + 4a^2Mr \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &\quad + a^4 \cos^6 \theta.\end{aligned}\quad (3.6.63b)$$

**Chiral basis** Chiral basis

$$V = k \wedge m, \quad U = -l \wedge \bar{m}, \quad W = -k \wedge l + m \wedge \bar{m} \quad (3.6.64)$$

に対し，共変微分は

$$\nabla_k V = -A'V, \quad \nabla_l V = B'V - C'W, \quad (3.6.65a)$$

$$\nabla_m V = D'V, \quad \nabla_{\bar{m}} V = E'V - \rho W, \quad (3.6.65b)$$

$$\nabla_k U = A'U - C'W, \quad \nabla_l U = -B'U, \quad (3.6.65c)$$

$$\nabla_m U = -D'U + F'W, \quad \nabla_{\bar{m}} U = -E'U, \quad (3.6.65d)$$

$$\nabla_k W = -2C'V, \quad \nabla_l W = -2C'U, \quad (3.6.65e)$$

$$\nabla_m W = 2F'V, \quad \nabla_{\bar{m}} W = -2\rho U. \quad (3.6.65f)$$

ここで，

$$A' = \frac{ia \cos \theta}{\Sigma^2}, \quad (3.6.66a)$$

$$B' = \frac{2Mr^2 - 2(M \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta)a^2 - ia\Delta \cos \theta}{2\Sigma^4}, \quad (3.6.66b)$$

$$C' = \frac{ia \sin \theta}{\sqrt{2}\Sigma(r - ia \cos \theta)}, \quad (3.6.66c)$$

$$D' = \frac{\Sigma^2 \cos \theta - iar \sin^2 \theta}{\sqrt{2}\Sigma^3 \sin \theta}, \quad (3.6.66d)$$

$$E' = \frac{-\cos \theta(r^2 + 2a^2 - a^2 \cos^2 \theta) + iar \sin^2 \theta}{\sqrt{2}\Sigma^3 \sin \theta}, \quad (3.6.66e)$$

$$F' = \frac{\Delta}{2\Sigma^2(r - ia \cos \theta)}. \quad (3.6.66f)$$

□の作用は，

$$\square V = -\frac{A''}{\Sigma^6 \sin^2 \theta} V - \frac{\sqrt{2}[r \cos \theta + ia(2 \cos^2 \theta - 1)]}{\Sigma^3 \sin \theta} W \quad (3.6.67a)$$

$$\square U = -\frac{B''}{\Sigma^6 \sin^2 \theta} U + \frac{C''}{\sqrt{2}\Sigma^5 \sin \theta} W, \quad (3.6.67b)$$

$$\square W = -\frac{2(r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta)}{\Sigma^2(r - ia \cos \theta)^2} W. \quad (3.6.67c)$$

ここで,

$$A'' = r^4 - 2Mr^3 \sin^2 \theta - a^2 r^2 (1 - 5 \cos^2 \theta + 2 \cos^4 \theta) \\ 8a^2 Mr \cos^2 \theta \sin^2 \theta - a^4 (1 - 4 \cos^2 \theta + 2 \cos^4 \theta) \cos^2 \theta \\ + 2iaM \sin^2 \theta \cos \theta (a^2 \cos^2 \theta - 3r^2), \quad (3.6.68a)$$

$$B'' = A'' - 4a^2 (r^2 + 2Mr + a^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \quad (3.6.68b)$$

$$C'' = \{r^3 - 2Mr^2 - a^2 (2 \cos^2 \theta - 3)r - 2Ma^2 \sin^2 \theta\} \cos \theta \\ - ia \{r^2 - a^2 + 2r(M - r) \cos^2 \theta\}. \quad (3.6.68c)$$

### 3.6.5 Kerr-Newman 解

Ernst ポテンシャルと電磁ポテンシャル

$$\mathcal{E} = \frac{(1 - |\mu|^2)(px - iqy) - (1 + |\mu|^2)}{(1 - |\mu|^2)(px - iqy) + (1 + |\mu|^2)}, \quad (3.6.69a)$$

$$\Phi = -\frac{2\mu}{(1 - |\mu|^2)(px - iqy) + (1 + |\mu|^2)}. \quad (3.6.69b)$$

$(x, y)$  座標での計量成分

$$f = \frac{(1 - |\mu|^2)^2 (p^2 x^2 + q^2 y^2 - 1)}{(1 - |\mu|^2)^2 (p^2 x^2 + q^2 y^2) + 2(1 - |\mu|^4)px + (1 + |\mu|^2)^2} \quad (3.6.70a)$$

$$A = \frac{2\sigma q (1 - y^2) [(1 - |\mu|^4)px + 1]}{p (1 - |\mu|^2)^2 (p^2 x^2 + q^2 y^2 - 1)}, \quad (3.6.70b)$$

$$e^{2k} = \frac{p^2 x^2 + q^2 y^2 - 1}{p^2 (x^2 - y^2)}. \quad (3.6.70c)$$

標準パラメーターとの関係

$$p = \frac{\sigma}{\sqrt{m^2 - e^2}}, \quad (3.6.71a)$$

$$q = \frac{a}{\sqrt{m^2 - e^2}}, \quad (3.6.71b)$$

$$\mu = -\frac{e}{m + \sqrt{m^2 - e^2}}, \quad (3.6.71c)$$

$$\sigma = \sqrt{m^2 - a^2 - e^2}. \quad (3.6.71d)$$

$(r, \theta)$  座標での表示

$$\sigma x = r - m, \quad y = \cos \theta. \quad (3.6.72)$$

$$\mathcal{E} = 1 - \frac{2m}{r - ia \cos \theta}, \quad \Phi = \frac{e}{r - ia \cos \theta}. \quad (3.6.73)$$

$$ds^2 = -\frac{\Delta \rho^2}{\Gamma} dt^2 + \frac{\Gamma \sin^2 \theta}{\rho^2} (d\phi - \Omega dt)^2 + \rho^2 \left( \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) \quad (3.6.74)$$

ここで,

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 + e^2, \quad (3.6.75a)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (3.6.75b)$$

$$\Gamma = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta, \quad (3.6.75c)$$

$$\Omega = \frac{a(2mr - e^2)}{\Gamma} \quad (3.6.75d)$$

**Future Finkelstein 座標**

$$dv = dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad (3.6.76a)$$

$$d\phi_+ = d\phi + \frac{a}{\Delta} dr. \quad (3.6.76b)$$

Future Finkelstein 座標での座標基底を  $\partial_v^+, \partial_r^+, \partial_\phi^+, \partial_\theta^+$  と表すと,

$$\partial_t = \partial_v^+, \quad \partial_r = \partial_r^+ + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \partial_v^+ + \frac{a}{\Delta} \partial_\phi^+, \quad \partial_\phi = \partial_\phi^+, \quad \partial_\theta = \partial_\theta^+. \quad (3.6.77)$$

**Surface gravity**

$$\nabla_\xi \xi = -\frac{1}{2} \nabla(\xi \cdot \xi) = \kappa \xi. \quad (3.6.78)$$

Kerr-Newman 解に対しては,

$$\xi = \partial_t + \Omega_H \partial_\phi, \quad (3.6.79)$$

$$\Omega_H = \frac{a}{r_H^2 + a^2}. \quad (3.6.80)$$

より,

$$\xi \cdot \xi = -\frac{\Delta \rho^2}{\Gamma}. \quad (3.6.81)$$

この量は、ホライズン上で正則。一般に、ホライズン上で正則な量  $X$  に対して、

$$\begin{aligned}\nabla X &= \frac{\partial_r X}{\rho^2} [\Delta \partial_r^+ + (r^2 + a^2) \partial_v^+ + a \partial_\phi^+] + \frac{\partial_\theta X}{\rho^2} \partial_\theta^+ \\ &\rightarrow \frac{r_H^2 + a^2}{\rho^2} \partial_r X \xi + \frac{\partial_\theta X}{\rho^2} \partial_\theta^+\end{aligned}\quad (3.6.82)$$

より、

$$\nabla(\xi \cdot \xi)|_H = \frac{(r_H^2 + a^2) \partial_r(\xi \cdot \xi)}{\rho^2} \xi = -\frac{r_H^2 + a^2}{\Gamma} \partial_r \Delta \xi. \quad (3.6.83)$$

よって、

$$\kappa = \frac{r_H - m}{r_H^2 + a^2}. \quad (3.6.84)$$

### Area formula

$$A = 4\pi(r_+^2 + a^2) = 4\pi(2mr_+ - e^2) \quad (3.6.85)$$

$$\frac{\kappa}{8\pi} dA = dm - \Omega_H dJ - \Phi_H de. \quad (3.6.86)$$

ここで、

$$\Phi_H = \Phi(r = r_+, \theta = 0) = \frac{er_+}{r_+^2 + a^2}. \quad (3.6.87)$$

(注) 単位系は  $G = c = 1$ .

### 漸近挙動 Descartes 座標を

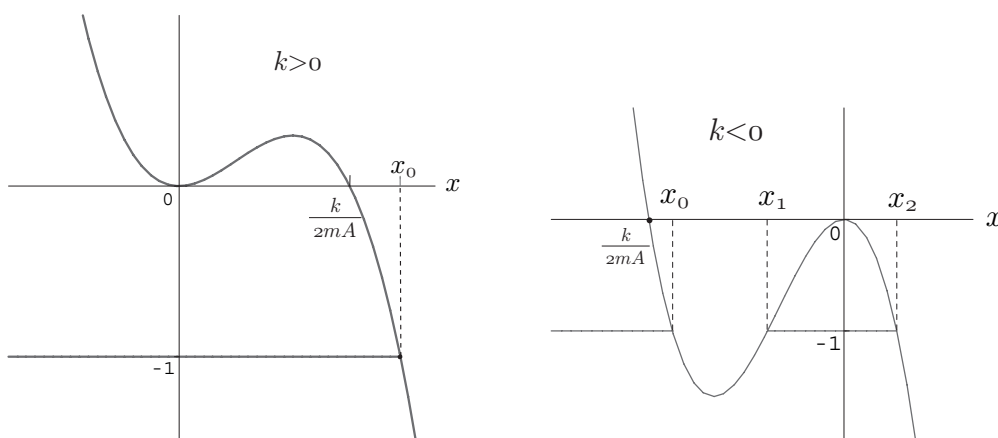
$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

により導入すると、計量の  $r \rightarrow \infty$  での漸近挙動は

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2m}{r} ds_1^2 + \frac{ds_2^2}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (3.6.88a)$$

$$\begin{aligned}ds_1^2 &= dt^2 + \sin^2 \theta (\cos^2 \phi dx^2 + \sin^2 \phi dy^2) + \cos^2 \theta dz^2 \\ &\quad + \sin^2 \theta (\sin 2\phi dx dy + 2 \cos \phi dx dz + 2 \sin \phi dy dz), \quad (3.6.88b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ds_2^2 &= -e^2 dt^2 + 4am \sin \theta (\sin \phi dx - \cos \phi dy) dt \\ &\quad + \{(4m^2 - e^2) \cos^2 \phi \sin^2 \theta + a^2(1 - 2 \cos^2 \phi \sin^2 \theta)\} dx^2 \\ &\quad + \{(4m^2 - e^2) \sin^2 \phi \sin^2 \theta + a^2(1 - 2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta)\} dy^2 \\ &\quad + (4m^2 - e^2) \cos^2 \theta dz^2 - (e^2 + 2a^2 - 4m^2) \sin 2\phi \sin^2 \theta dx dy \\ &\quad - (e^2 + a^2 - 4m^2) \sin 2\theta (\cos \phi dx + \sin \phi dy) dz. \quad (3.6.88c)\end{aligned}$$



### 3.6.6 C-metric

計量

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(x-y)^2} \left[ H(y)dt^2 - \frac{dy^2}{H(y)} + \frac{dx^2}{G(x)} + G(x)d\phi^2 \right]. \quad (3.6.89)$$

ここで,

$$H(y) = -\lambda - Ky^2 - 2mAy^3, \quad (3.6.90a)$$

$$G(x) = 1 - Kx^2 - 2mA x^3. \quad (3.6.90b)$$

$A \geq 0$ ,  $m \geq 0$  としても一般性を失わない. この計量は, 宇宙項

$$\Lambda = -3A^2(\lambda + 1) \quad (3.6.91)$$

をもつ Einstein 方程式に対する, Petrov 型 D の静的軸対称真空解となる.

座標の範囲:

**Weyl class** 特に,  $\Lambda = 0$  ( $\lambda = -1$ ) のとき,

$$\rho = \frac{\sqrt{-H(y)G(x)}}{A^2(x-y)^2}, \quad z = \frac{xy[-K + mA(x+y)] - 1}{A^2(x-y)^2} \quad (3.6.92)$$

と定義すると, 計量は Weyl 形式で表され, ポテンシャルは

$$e^{2U} = -\frac{H(y)}{A^2(x-y)^2}, \quad (3.6.93)$$

$$e^{2k} = -\frac{H(y)}{A^4(x-y)^4 G(x) (\rho_x^2 + z_x^2)} \quad (3.6.94)$$

で与えられる.

## Christoffel

$$\Gamma_{tx}^t = -\frac{1}{x-y}, \quad \Gamma_{ty}^t = \frac{2H + (x-y)H'}{2(x-y)H}, \quad (3.6.95a)$$

$$\Gamma_{\phi x}^{\phi} = \frac{-2G + (x-y)G'}{2(x-y)G}, \quad \Gamma_{\phi y}^{\phi} = \frac{1}{x-y}, \quad (3.6.95b)$$

$$\Gamma_{tt}^x = \frac{GH}{x-y}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^x = \frac{G(2G - (x-y)G')}{2(x-y)},$$

$$\Gamma_{xx}^x = -\frac{2G + (x-y)G'}{2(x-y)G}, \quad \Gamma_{xy}^x = \frac{1}{x-y}, \quad \Gamma_{yy}^x = \frac{G}{(x-y)H}, \quad (3.6.95c)$$

$$\Gamma_{tt}^y = \frac{H(2H + (x-y)H')}{2(x-y)}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^y = \frac{GH}{x-y},$$

$$\Gamma_{xx}^y = \frac{H}{(x-y)G}, \quad \Gamma_{xy}^y = -\frac{1}{x-y}, \quad \Gamma_{yy}^y = \frac{2H - (x-y)H'}{2(x-y)H} \quad (3.6.95d)$$

## 接続形式 正規直交基底

$$\theta^0 = \frac{\sqrt{-H}}{A(x-y)} dt, \quad \theta^1 = \frac{dy}{A(x-y)\sqrt{-H}}, \quad \theta^2 = \frac{dx}{A(x-y)\sqrt{G}}, \quad \theta^3 = \frac{\sqrt{G}}{A(x-y)} d\phi, \quad (3.6.96)$$

に関して,

$$\omega_{10}^0 = \omega_{01}^1 = A\sqrt{-H} \left( 1 + \frac{(x-y)H'}{2H} \right) \theta^0, \quad (3.6.97a)$$

$$\omega_{02}^0 = \omega_{20}^0 = -A\sqrt{G}\theta^0, \quad (3.6.97b)$$

$$\omega_{12}^1 = -\omega_{21}^1 = -A\sqrt{G}\theta^1 - A\sqrt{-H}\theta^2, \quad (3.6.97c)$$

$$\omega_{13}^1 = -\omega_{31}^1 = -A\sqrt{-H}\theta^3, \quad (3.6.97d)$$

$$\omega_{23}^2 = -\omega_{32}^2 = -A\sqrt{G} \left( 1 - \frac{(x-y)G'}{2G} \right) \theta^3. \quad (3.6.97e)$$

## 曲率形式

$$\mathcal{R}^0_1 = X\theta^0 \wedge \theta^1, \quad (3.6.98a)$$

$$\mathcal{R}^2_3 = X\theta^2 \wedge \theta^3, \quad (3.6.98b)$$

$$\mathcal{R}^0_C = Y\theta^0 \wedge \theta^C, \quad (C = 2, 3) \quad (3.6.98c)$$

$$\mathcal{R}^1_C = Y\theta^1 \wedge \theta^C, \quad (C = 2, 3). \quad (3.6.98d)$$



ここで,

$$X = -(1 + \lambda)A^2 + 2mA^3(x - y)^3, \quad (3.6.99a)$$

$$Y = -(1 + \lambda)A^2 - mA^3(x - y)^3. \quad (3.6.99b)$$

### Ricci テンソル

$$R_b^a = -3(1 + \lambda)A^2\delta_b^a, \quad (3.6.100a)$$

$$R = -12(1 + \lambda)A^2, \quad (3.6.100b)$$

$$G_b^a = 3(1 + \lambda)A^2\delta_b^a. \quad (3.6.100c)$$

特に, C-metric は

$$\Lambda = -3(1 + \lambda)A^2 \quad (3.6.101)$$

の宇宙項に対応する真空解.

### Weyl テンソル

$$\mathcal{C}^{01} = 2mA^3(x - y)^3\theta^0 \wedge \theta^1, \quad (3.6.102a)$$

$$\mathcal{C}^{23} = 2mA^3(x - y)^3\theta^2 \wedge \theta^3, \quad (3.6.102b)$$

$$\mathcal{C}^{0C} = -mA^3(x - y)^3\theta^0 \wedge \theta^C, \quad (C = 2, 3) \quad (3.6.102c)$$

$$\mathcal{C}^{1C} = -mA^3(x - y)^3\theta^1 \wedge \theta^C, \quad (C = 2, 3). \quad (3.6.102d)$$

$${}^+\mathcal{C}_{01} = -2mA^3(x - y)^3 + \Sigma^{01}, \quad (3.6.103a)$$

$${}^+\mathcal{C}_{0C} = mA^3(x - y)^3 + \Sigma^{0C}, \quad (C = 2, 3). \quad (3.6.103b)$$

特に, C-metric は Petrov 型 D :

$$\Psi_2 = -mA^3(x - y)^3. \quad (3.6.104)$$

$m = 0$  の場合 : このとき定曲率時空を表し, 変換

$$r = \frac{\sqrt{\pm(y^2 + \lambda x^2)}}{A|x - y|}, \quad \rho = \sqrt{\frac{1 - Kx^2}{\pm(y^2 + \lambda x^2)}} \quad (3.6.105)$$

により, C 計量は

$$ds^2 = \frac{dr^2}{-\Lambda r^2/3 \mp \lambda} + r^2 \left[ \mp(\pm\lambda\rho^2 + K)dt^2 + \frac{d\rho^2}{\pm\lambda\rho^2 + K} + \rho^2 d\phi^2 \right] \quad (3.6.106)$$

と表される。これより、 $t, \rho, \phi$  のリスケールにより  $K = 0, \pm 1$  と規格化すると、 $-\lambda$  が  $\square$  内の計量で表される 3 次元時空スライス ( $r = \text{一定}$ ) の断面曲率を表すことが分かる。

**Flat case** 特に、 $\lambda = -1$  のとき、upper sign に対しては  $K = 1$  のみが可能で、 $\rho = \sin \theta$  とおいて、 $(r, \theta, \phi)$  に対応するデカルト座標  $(x, y, z)$  を導入すると、計量は

$$ds^2 = -z^2 dt^2 + dz^2 + dx^2 + dy^2 \quad (3.6.107)$$

となる。これは、Minkowski 計量の Rindler 座標での表示である。実際、

$$T = z \sinh t, \quad Z = z \cosh t, \quad X = x, \quad Y = y, \quad (3.6.108)$$

とおくと、計量は

$$ds^2 = -dT^2 + dZ^2 + dX^2 + dY^2 \quad (3.6.109)$$

と表される。

一般に、 $m = 0, \lambda = -1$  のとき、C-metric は Minkowski 時空を表し、Minkowski 座標系  $(T, X, Y, Z)$  と  $(x, y, t, \phi)$  との関係は次のように与えられる。

i)  $K = 0$  のとき :

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(x-y)^2} (dt^2 - dy^2 + dx^2 + d\phi^2). \quad (3.6.110)$$

$$A(Z+T) = \frac{1}{x-y}, \quad (3.6.111a)$$

$$A(Z-T) = x+y + \frac{t^2 + \phi^2}{x-y}, \quad (3.6.111b)$$

$$AX = \frac{t}{x-y}, \quad AY = \frac{\phi}{x-y}. \quad (3.6.111c)$$

この逆変換は、

$$x-y = \frac{1}{A(Z+T)}, \quad (3.6.112a)$$

$$x+y = A(Z-T) - A \frac{X^2 + Y^2}{Z+T}, \quad (3.6.112b)$$

$$t = \frac{X}{Z+T}, \quad \phi = \frac{Y}{Z+T}. \quad (3.6.112c)$$

この変換は,  $x > y(x < y)$  を  $T > -Z(T < -Z)$  に一対一に写す :

$$A^4 dZ \wedge dT \wedge dX \wedge dY = \frac{dx \wedge dy \wedge dt \wedge d\phi}{(x-y)^4}. \quad (3.6.113)$$

また, Killing ベクトルは

$$\partial_t = (T+Z)\partial_X - X(\partial_T - \partial_Z), \quad (3.6.114a)$$

$$\partial_\phi = (T+Z)\partial_Y - Y(\partial_T - \partial_Z). \quad (3.6.114b)$$

ii)  $K = 1$ :

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(x-y)^2} \left[ (1-y^2)dt^2 - \frac{dy^2}{1-y^2} + \frac{dx^2}{1-x^2} + (1-x^2)d\phi^2 \right]. \quad (3.6.115)$$

$$(T, Z) = \frac{\sqrt{1-y^2}}{A(x-y)} (\cosh t, \sinh t), \quad (3.6.116a)$$

$$(Z, T) = \frac{\sqrt{y^2-1}}{A(x-y)} (\cosh t, \sinh t), \quad (3.6.116b)$$

$$(X, Y) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{A(x-y)} (\cos \phi, \sin \phi). \quad (3.6.116c)$$

逆変換は

$$y = -\frac{A^2(R^2 - T^2) + 1}{\sqrt{F}}, \quad (3.6.117a)$$

$$x = -\frac{A^2(R^2 - T^2) - 1}{\sqrt{F}}, \quad (3.6.117b)$$

$$\tanh t = Z/T, T/Z, \quad (3.6.117c)$$

$$\tan \phi = Y/X. \quad (3.6.117d)$$

ここで,  $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ . また,

$$F := \{A^2(R^2 - T^2) + 1\}^2 + 4A^2(T^2 - Z^2) > 0 \quad (3.6.118)$$

変換の Jacobian は

$$dx \wedge dy \wedge dt \wedge d\phi = \frac{16A^4}{F^2} dT \wedge dX \wedge dY \wedge dZ \quad (3.6.119)$$

目次へ

ただし,  $d\phi = (XdY - YdX)/(X^2 + Y^2)$ ,  $dt = (TdZ - ZdT)/(T^2 - Z^2)$  より,  $T - Z$  平面および  $T = \pm Z$  平面で変換は特異. Killing ベクトルの対応は,

$$\partial_t = Z\partial_T + Z\partial_Z, \quad (3.6.120a)$$

$$\partial_\phi = -Y\partial_X + X\partial_Y. \quad (3.6.120b)$$

iii)  $K = -1$ :

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(x-y)^2} \left[ (1+y^2)dt^2 - \frac{dy^2}{1+y^2} + \frac{dx^2}{1+x^2} + (1+x^2)d\phi^2 \right]. \quad (3.6.121)$$

$$(T, Z) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{A(x-y)} (\cosh \phi, \sinh \phi), \quad (3.6.122a)$$

$$(X, Y) = \frac{\sqrt{1+y^2}}{A(x-y)} (\cos t, \sin t). \quad (3.6.122b)$$

逆変換は

$$x = \frac{A^2(T^2 - R^2) + 1}{\sqrt{F}}, \quad (3.6.123a)$$

$$y = \frac{A^2(T^2 - R^2) - 1}{\sqrt{F}}, \quad (3.6.123b)$$

$$\tan t = Y/X, \quad (3.6.123c)$$

$$\tanh \phi = Z/T. \quad (3.6.123d)$$

ここで,  $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ . また,

$$F := -\{A^2(T^2 - R^2) + 1\}^2 + 4A^2(T^2 - Z^2) \quad (3.6.124)$$

$F > 0$  より, このチャートは Minkowski 時空の部分領域

$$\left[ Z^2 + (\sqrt{X^2 + Y^2} - 1)^2 \right]^{1/2} < T^2 < \left[ Z^2 + (\sqrt{X^2 + Y^2} + 1)^2 \right]^{1/2} \quad (3.6.125)$$

を覆う. Killing ベクトルは

$$\partial_\phi = Z\partial_T + Z\partial_Z, \quad (3.6.126a)$$

$$\partial_t = -Y\partial_X + X\partial_Y. \quad (3.6.126b)$$

したがって、このチャートと ii) のチャートは本質的に同じもので、ii) の表式を与える  $(x, y, t, \phi)$  と iii) の表式を与える  $(x', y', t', \phi')$  の関係は

$$x' + iy' = \frac{x + iy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad t' = \phi, \quad \phi' = t \quad (3.6.127)$$

で与えられる。

### 3.6.7 TS 解

#### 計量の構造

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f(dt - \omega d\phi)^2 + f^{-1} [\rho^2 d\phi^2 + e^{2k}(d\rho^2 + dz^2)], \\ &= -\frac{\rho^2}{R^2} dt^2 + R^2(dt - \Omega d\phi)^2 + \Sigma^2 \left( \frac{dx^2}{x^2 - 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.6.128)$$

$$f = -\xi \cdot \xi = \frac{A}{B}, \quad (3.6.129a)$$

$$f\omega = \xi \cdot \eta = -R^2\Omega = \frac{2\delta\sigma q(1 - y^2)C}{pB}, \quad (3.6.129b)$$

$$R^2 = \eta \cdot \eta = \frac{\sigma^2(1 - y^2)D}{p^2B}, \quad (3.6.129c)$$

$$f^{-1}e^{2k} = \frac{\Sigma^2}{\sigma^2(x^2 - y^2)} = \frac{B}{p^{2\delta}(x^2 - y^2)^{\delta^2}}. \quad (3.6.129d)$$

ここで、

$$(\eta \cdot \xi)^2 - (\xi \cdot \xi)(\eta \cdot \eta) = f^2\omega^2 + fR^2 = \rho^2, \quad (3.6.130)$$

$$AD = p^2(x^2 - 1)B^2 - 4\delta^2q^2(1 - y^2)C^2. \quad (3.6.131)$$

ただし、 $A$  は  $x^2 - 1, y^2 - 1$  に関して  $\delta^2$  次の同次多項式、 $B - A$  と  $C$  は  $x, y$  に関して、それぞれ  $2\delta^2 - 1$  次および  $2\delta^2 - 2$  次の多項式。また、 $D$  は  $\delta = 1, 2, 3, 4$  のとき、 $x, y$  に関して  $2\delta^2 + 2$  次の多項式。

計量関数の表式 一般に、Ernst ポテンシャルを

$$\mathcal{E} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \quad (3.6.132)$$

とおくとき, TS 解では  $\alpha$  と  $\beta$  が  $x, y$  に関してそれぞれ  $\delta^2$  次および  $\delta^2 - 1$  次の多項式となる. また,

$$A = |\alpha|^2 - |\beta|^2, \quad B = |\alpha + \beta|^2, \quad (3.6.133a)$$

$$H = \operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta}), \quad I = \operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta}), \quad G = |\beta|^2 \quad (3.6.133b)$$

とおくと

$$\xi = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{H + iI}{G}, \quad (3.6.134a)$$

$$H^2 + I^2 = (A + G)G \quad (3.6.134b)$$

が成り立つ.

$a, b$  を

$$a = x^2 - 1, \quad b = y^2 - 1, \quad (3.6.135)$$

$D$  と  $\Delta$  を

$$f_k(a, b) = p^2 a^k + q^2 b^k, \quad (3.6.136)$$

$$D = \det \left( \frac{f_{i+j-1}}{i+j-1} \right)_{i,j=1,\dots,\delta}, \quad (3.6.137)$$

$$\Delta = \det \left( \frac{1}{i+j-1} \right)_{i,j=1,\dots,\delta} = \frac{[2!3!\dots(\delta-1)!]^3}{\delta!(\delta+1)!\dots(2\delta-1)!} \quad (3.6.138)$$

$D_j$  と  $\Delta_j$  をそれぞれ行列式  $D, \Delta$  の  $(1, j)$ -要素に対する余因子として,

$$F_{\delta^2-j} = \frac{D_j}{\Delta_j} \quad (3.6.139)$$

とおく.  $D$  と  $F_{\delta^2-j}$  は  $a, b$  に関して,  $\delta^2$  次および  $\delta^2 - j$  次の同次多項式で

ある。このとき、

$$A = \frac{D}{\Delta} = 2 \sum_{j=1}^{\delta} d_{j+1} c_j(\delta) f_j(a, b) F_{\delta^2-j}(a, b), \quad (3.6.140a)$$

$$B = A + 2(G + H), \quad (3.6.140b)$$

$$C = - \sum_{j,k=1}^{\delta} \{pxg_{j,k}(\delta) - h_{j,k}(\delta)\} a^{1-k} b^{j-1} F_{\delta^2-j}(a, b) \quad (3.6.140c)$$

$$G = \sum_{j=1}^{\delta} c_j(\delta) F_{\delta^2-j}(a, b), \quad (3.6.140d)$$

$$H = px \sum_{j=1}^{\delta} \left( \sum_{k=1}^j d_k (-a)^{k-1} \right) c_j(\delta) F_{\delta^2-j}(a, b), \quad (3.6.140e)$$

$$I = -qy \sum_{j=1}^{\delta} \left( \sum_{k=1}^j d_k (-b)^{k-1} \right) c_j(\delta) F_{\delta^2-j}(a, b). \quad (3.6.140f)$$

ここで、

$$c_j(\delta) = \frac{2^{2j-1} \delta (\delta + j - 1)!}{(\delta - j)! (2j)!}, \quad (3.6.141a)$$

$$d_j = \frac{(2j - 3)!!}{(2(j - 1))!!}, \quad (3.6.141b)$$

$$g_{j,k}(\delta) = \frac{(-1)^{j-1} 2^{2k-2}}{j!(j-1)!(2k-2)!} \sum_{l=\max(j,k)}^{\delta} \frac{(l+j-2)!(l+k-2)!}{(l-j)!(l-k)!} \quad (3.6.141c)$$

$$h_{j,k}(\delta) = \frac{(-1)^{j-1} 2^{2k-2} (\delta + j - 1)! (\delta + k - 1)!}{(j + k - 1) (\delta - j)! j! (j - 1)! (\delta - k)! (2k - 1)!} \quad (3.6.141d)$$

静的極限 TS 解は静的極限 ( $q = 0$ ) で ZVW 解に一致する。これより  $q = 0$  のとき、

$$A|_{q=0} = a^{\delta^2}, \quad (3.6.142a)$$

$$B|_{q=0} = a^{\delta^2-\delta} (a + 2x + 2)^{\delta}, \quad (3.6.142b)$$

$$4G|_{q=0} = a^{\delta^2-\delta} [(a + 2x + 2)^{\delta} + (a - 2x + 2)^{\delta} - 2a^{\delta}] \quad (3.6.142c)$$

$$4H|_{q=0} = a^{\delta^2-\delta} [(a + 2x + 2)^{\delta} - (a - 2x + 2)^{\delta}], \quad (3.6.142d)$$

$$4I|_{q=0} = 0. \quad (3.6.142e)$$

線分 I での値  $I: a = 0, b < 0$  では,

$$A(x = 1, y) = (-1)^\delta q^{2\delta} (1 - y^2)^{\delta^2}, \quad (3.6.143a)$$

$$B(x = 1, y) = \frac{p+1}{2} q^{2\delta-2} \left[ q^2 (1+y)^{2\delta} + \{(1-y)^\delta - (-1)^\delta p(1-y)^{\delta-1}\}^2 \right]$$

$$R^2(x = 1, y) = -\frac{4\sigma^2 \delta^2 q^2 (1-y^2)^2 C^2}{p^2 AB}. \quad (3.6.143c)$$

### 3.6.7.1 TS2

#### Ernst Potential

$$\alpha = p^2(x^4 - 1) - 2ipqxy(x^2 - y^2) - q^2(1 - y^4), \quad (3.6.144a)$$

$$\beta = 2px(x^2 - 1) - 2iqy(1 - y^2). \quad (3.6.144b)$$

解の表式

$$A = (1 - y^2)^4 g(Z)g(-Z), \quad (3.6.145a)$$

$$B = (g(x) + q^2 y^4)^2 + 4q^2 y^2 [px^3 + 1 - (px + 1)y^2]^2, \quad (3.6.145b)$$

$$C = q^2 (px + 1)y^4 (-y^2 + 3) + \{-2q^2(px^3 + 1) + (px + 1)g(x)\} y^2 - (2px^3 - px + 1)g(x), \quad (3.6.145c)$$

$$D = p^2 q^2 (x^2 - 1)y^8 + 4q^2 (px + 1)(p^3 x^3 + 3p^2 x^2 - p^3 x + 4px - 3p^2 + 4)y^6 - 2q^2 (3p^4 x^6 + 4p^3 x^5 - 3p^4 x^4 + 8p^3 x^3 + 37p^2 x^2 - 12p^3 x + 48px - 13p^2 + 24)y^4 + 4q^2 (p^4 x^8 - p^4 x^6 + 4p^3 x^5 - 4p^3 x^3 + 15p^2 x^2 + 24px - 3p^2 + 12)y^2 + g(x)(p^4 x^6 + 6p^3 x^5 - p^4 x^4 + 16p^2 x^4 - 12p^3 x^3 + 32px^3 + 15p^2 x^2 + 6p^3 x - 15p^2 + 16). \quad (3.6.145d)$$

ここで,

$$g(x) = p^2 x^4 + 2px^3 - 2px - 1, \quad (3.6.146)$$

$$Z^2 := \frac{x^2 - y^2}{1 - y^2} = \frac{1}{X^2} + 1. \quad (3.6.147)$$



### 3.6.8 Toroidal ブラックホール

#### 3.6.8.1 Lemos-Zanchin 解

計量

$$ds^2 = -f(r) \left( \lambda dt - \frac{\omega}{\alpha^2} d\phi \right)^2 + r^2 (\lambda d\phi - \omega dt)^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + \alpha^2 \frac{dz^2}{f(r)} \quad (3.6.148)$$

$$f(r) = \alpha^2 r^2 - \frac{b}{\alpha r}. \quad (3.6.149)$$

質量と角運動量

$$M = bc \left( 2\lambda^2 + \frac{\omega^2}{\alpha^2} \right), \quad (3.6.150)$$

$$J = 3bc\lambda \frac{\omega}{\alpha^2}. \quad (3.6.151)$$

#### 3.6.8.2 Klemm-Morette-Vanzo 解

計量

$$ds^2 = -\frac{\rho^2 \Delta_z \Delta_r}{\Sigma^2} dt^2 + \frac{\Sigma^2}{\rho^2} (d\phi - \Omega dt)^2 + \rho^2 \left( \frac{dr^2}{\Delta_r} + \frac{dz^2}{\Delta_z} \right) \quad (3.6.152)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 * z^2, \quad (3.6.153)$$

$$\Delta_r = a^2 - 2 * M * r + l^{-2} r^4, \quad (3.6.154)$$

$$\Delta_z = 1 + \frac{a^2 z^2}{L^2}, \quad (3.6.155)$$

$$\Sigma^2 = r^4 * \Delta_z - a^2 z^4 \Delta_r, \quad (3.6.156)$$

$$\Omega = a \frac{z^2 \Delta_r + r^2 \Delta_z}{\Sigma^2}. \quad (3.6.157)$$

Ricci

$$R_{\nu}^{\mu} = -\frac{3}{l^2} \delta_{\nu}^{\mu} \quad \Lambda = -\frac{3}{l^2}. \quad (3.6.158)$$

NP 係数

$$\Psi_2 = \frac{iM}{2(az - ir)^3}, \quad (3.6.159)$$

$$\Psi_0 \Psi_4 = -\frac{9M^2}{4(az - ir)^6}. \quad (3.6.160)$$

Klemm-Moretti-Vanzo の論文 [Klemm D, Moretti V & Vanzo L, PRD57:6127(1998)]  
では、適当な  $z$  に関する同一視によりホライズンがトーラスとなるよう  
にできるとあるが、上記の NP 係数の振る舞いよりこれは間違い。

### 3.6.9 Einstein-Maxwell-dilaton 系

作用積分

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{2} - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{4}e^{-\sqrt{2}a\phi} F \cdot F \right]. \quad (3.6.161)$$

双対変換

$$F \rightarrow e^{-\sqrt{2}a\phi} *F, \quad \phi \rightarrow -\phi. \quad (3.6.162)$$

静的球対称解 [Gibbons GW, Maeda K (1988)]

$$ds^2 = -\lambda^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\lambda^2} + R(r)^2 g(S^2), \quad (3.6.163a)$$

$$e^{-\sqrt{2}a\phi} = \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{2a^2/(1+a^2)}, \quad (3.6.163b)$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{2}q(1 - \cos\theta)d\varphi. \quad (3.6.163c)$$

ここで

$$\lambda^2 = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{(1-a^2)/(1+a^2)}, \quad (3.6.164)$$

$$R^2 = r^2 \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{2a^2/(1+a^2)}, \quad (3.6.165)$$

$$q = \left(\frac{r_+ r_-}{1 + a^2}\right)^{1/2}. \quad (3.6.166)$$

BH 質量は

$$m = \frac{r_+}{2} + \frac{1 - a^2 r_-}{1 + a^2} \frac{r_-}{2}. \quad (3.6.167)$$

荷電ディラトン C 計量解 [Dowker F, Gauntlett JP, Kastor DA, Traschen J (1994); Kinnersley W, Walker M (1970)]

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(x-y)^2} \left[ F(x) \left( G(y)dt^2 - \frac{dy^2}{G(y)} \right) + F(y) \left( \frac{dx^2}{G(x)} + G(x)d\varphi^2 \right) \right], \quad (3.6.168a)$$

$$e^{-\sqrt{2}a\phi} = \frac{F(y)}{F(x)}, \quad (3.6.168b)$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{2}qx d\varphi. \quad (3.6.168c)$$

ここで,

$$F(\xi) = (1 + r_- A\xi)^{2a^2/(1+a^2)}, \quad (3.6.169a)$$

$$G(\xi) = \{1 - \xi^2(1 + r_+ A\xi)\} (1 + r_- A\xi)^{(1-a^2)/(1+a^2)} \quad (3.6.169b)$$

この解で, 加速度  $A \rightarrow 0$  極限を取ると, 上記の静的球対称解に帰着.

**背景磁場を変化させる変換** [Dowker F, Gauntlett JP, Kastor DA, Traschen J (1994)]

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j + g_{\varphi\varphi}(x)d\varphi^2 \quad (3.6.170)$$

とおくとき,  $B$  を任意パラメータとする次の変換は EMD 系に対する軸対称解を再び軸対称解に移す:

$$g'_{ij} = \Lambda^{2/(1+a^2)} g_{ij}. \quad (3.6.171a)$$

$$g'_{\varphi\varphi} = \Lambda^{-2/(1+a^2)} g_{\varphi\varphi}, \quad (3.6.171b)$$

$$e^{-\sqrt{2}a\phi'} = e^{-\sqrt{2}a\phi} \Lambda^{2a^2/(1+a^2)}, \quad (3.6.171c)$$

$$A'_\varphi = \frac{-2}{(1+a^2)B\Lambda} \left( +\frac{1+a^2}{2} B A_\varphi \right). \quad (3.6.171d)$$

ここで,

$$\Lambda = \left( 1 + \frac{1+a^2}{2} B A_\varphi \right)^2 + \frac{1+a^2}{2} B^2 g_{\varphi\varphi} e^{\sqrt{2}a\phi}. \quad (3.6.172)$$

**Dilaton Melvin 解** [Gibbons GW, Maeda K (1988)]

平坦な計量に上記の変換を施すと,

$$ds^2 = \Lambda^{2/(1+a^2)} (-dt^2 + d\rho^2 + dz^2) + \Lambda^{-2/(1+a^2)} \rho^2 d\varphi^2 \quad (3.6.173a)$$

$$e^{-\sqrt{2}a\phi} = \Lambda^{2a^2/(1+a^2)}, \quad (3.6.173b)$$

$$\mathcal{A} = -\frac{2}{(1+a^2)B\Lambda} d\varphi. \quad (3.6.173c)$$

ここで,

$$\Lambda = 1 + \frac{1+a^2}{2} B^2 \rho^2. \quad (3.6.174)$$

磁場中で加速する磁化をもつ BH 対を表す解 [Dowker F, Gauntlett JP, Kastor DA, Traschen J (1994)]

上記の荷電ディラトン C 計量解に変換を施すと,

$$ds^2 = \frac{\Lambda^{2/(1+a^2)}}{A^2(x-y)^2} \left[ F(x) \left( G(y) dt^2 - \frac{dy^2}{G(y)} \right) + \frac{F(y)}{G(x)} dx^2 \right] + \frac{(x-y)^2}{A^2} \Lambda^{-2/(1+a^2)} F(y) G(x) d\varphi^2, \quad (3.6.175a)$$

$$e^{-\sqrt{2}a\phi} = \Lambda^{2a^2/(1+a^2)} \frac{F(y)}{F(x)}, \quad (3.6.175b)$$

$$\mathcal{A} = -\frac{2}{(1+a^2)B\Lambda} \left( 1 + \frac{1+a^2}{\sqrt{2}} Bqx \right) d\varphi. \quad (3.6.175c)$$

ここで,

$$\Lambda = \left( 1 + \frac{1+a^2}{\sqrt{2}} Bqx \right)^2 + \frac{(1+a^2)B^2}{2A^2(x-y)^2} (1-x^2-r_+Ax^3)(1+r_-Ax). \quad (3.6.176)$$

### 3.7 5次元軸対称解

#### 3.7.1 KK タイプの真空解

4次元 Einstein-Maxwell-Dilaton 系の解  $(g_{\mu\nu}, A_\mu, \phi)$  は, Dilaton 結合係数  $(e^{-\sqrt{2}a\phi} F \cdot F/2)$  を  $a = \sqrt{3}$  と取り

$$ds^2 = e^{-2\sqrt{2/3}\phi}(dx_5 + \sqrt{2}A_\mu dx^\mu)^2 + e^{\sqrt{2/3}\phi}g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (3.7.1)$$

とおくと, KK 型の5次元真空解が得られる.

**KK ブラックホール/モノポール解** [Sorkin R (1983); Gross D, Perry MJ (1983)]

4次元 EMD 系の静的球対称 Gibbons-Maeda 解の KK uplift は

$$ds^2 = -\frac{1-r_+/r}{1-r_-/r}dt^2 + \frac{dr^2}{1-r_+/r} + \left(1 - \frac{r_-}{r}\right) [2q \{d\psi + (1 - \cos\theta)d\varphi\}^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]. \quad (3.7.2)$$

この解は, 一般に KK 型ブラックホールを表すが,  $r = r_-$  で特異.

Extremal 極限 ( $r_+ = r_-$ ) を取ると

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{1-r_+/r} + \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) [r_+ \{d\psi + (1 - \cos\theta)d\varphi\}^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]. \quad (3.7.3)$$

この解は,  $\rho = 2r_+^{1/2}(r - r_+)^{1/2}$  とおくと,  $\rho \approx 0$  近傍で

$$ds^2 \approx -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 g(S^3) \quad (3.7.4)$$

となるので, 至る所正則な KK モノポール解となる.

**ブラックリング型解** [Dowker F, Gauntlett JP, Giddings SB, Horowitz GT (1994)]

磁場中の加速する磁荷をもつブラックホール対を表す C 計量型の解の KK uplift は

$$ds^2 = \frac{e^{-4\phi_0} \Lambda \bar{F}(y)}{\bar{F}(x)} (dx_5 + \sqrt{2}A_\varphi d\varphi)^2 + \frac{e^{2\phi_0}}{A^2(x-y)^2} \times \left[ \bar{F}(x)^2 \left( \frac{\bar{G}(y)dt^2}{\bar{F}(y)} - \frac{dy^2}{\bar{G}(y)} \right) + \bar{F}(y) \left( \frac{\bar{F}(x)dx^2}{\bar{G}(x)} + \frac{\bar{G}(x)d\varphi^2}{\Lambda} \right) \right]. \quad (3.7.5)$$

ここで,

$$A_\varphi = -\frac{e^{3\phi_0}}{2B\Lambda}(1 + 2\sqrt{2}Bqx) + k, \quad (3.7.6a)$$

$$\Lambda = (1 + 2\sqrt{2}Bqx)^2 + \frac{2B^2\bar{G}(x)\bar{F}(x)}{A^2(x-y)^2}, \quad (3.7.6b)$$

$$\bar{F}(\xi) = 1 + r_-A\xi, \quad (3.7.6c)$$

$$\bar{G}(\xi) = 1 - \xi^2 - r_+\xi^3. \quad (3.7.6d)$$

この解において, 次の置き換え

$$\begin{aligned} B &\rightarrow 0, & A &\rightarrow iA, & 2q &\rightarrow i\frac{1}{A}\sqrt{\frac{\nu}{\xi_1}}, \\ r_-A &\rightarrow -1/\xi_1, & r_+A &\rightarrow -\nu, \\ x &\leftrightarrow y, \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

と double Wick rotation

$$(t, x_5, \phi) \rightarrow (i\phi, it, \psi) \quad (3.7.8)$$

を行うと, ブラックリング解

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{F(x)}{F(y)} \left( dt + \sqrt{\frac{\nu}{\xi_1}} \frac{\xi_2 - y}{A} d\psi \right)^2 + \frac{1}{A^2(x-y)^2} \\ &\times \left[ -F(x) \left( G(y)d\psi^2 + \frac{F(y)}{G(y)} dy^2 \right) + F(y)^2 \left( \frac{dx^2}{G(x)} + \frac{G(x)}{F(x)} d\varphi^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.7.9)$$

が得られる. ここでの  $F(\xi)$ ,  $G(\xi)$  は前のものと違い,

$$F(\xi) = 1 - \frac{\xi}{\xi_1}, \quad G(\xi) = 1 - \xi^2 + \nu\xi^3. \quad (3.7.10)$$

この解は,  $B = 0$  である荷電ディラトン C 計量解からの double Wick 回転によっても直接得られる.

## 3.8 5次元ブラックリング解

### 3.8.1 Emparan-Reall 解

#### Reference

- Emparan R, Reall HS (2002) PRD65:084025  
”Generalized Weyl solutions”
- Emparan R, Reall HS (2002) PRL88:101101  
”A rotating black ring in five dimensions”
- Emparan R, Reall HS (2006) CQG23: R169  
”Black Rings”
- Emparan R, Reall HS (2008) LLR11: 6  
”Black Holes in Higher Dimensions”

#### 3.8.1.1 計量

計量の一般型:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & -\frac{F(y)}{F(x)} \left( dt - CR \frac{1+y}{F(y)} d\psi \right)^2 \\
 & + \frac{R^2}{(x-y)^2} F(x) \left[ -\frac{G(y)}{F(y)} d\psi^2 - \frac{dy^2}{G(y)} + \frac{dx^2}{G(x)} + \frac{G(x)}{F(x)} d\phi^2 \right].
 \end{aligned}
 \tag{3.8.1}$$

ここで, 一般に

$$F(\xi) = 1 + \lambda\xi, \tag{3.8.2a}$$

$$G(\xi) = g_0 + g_1\xi + g_2\xi^2 + g_3\xi^3, \tag{3.8.2b}$$

$$C = \pm \frac{\sqrt{-\lambda^4 G(-1/\lambda)}}{1 - \lambda} \tag{3.8.2c}$$

のとき, この計量は真空 Einstein 方程式の解となる. ただし,  $G(\xi)$  の係数のうち 2 個は  $\xi$  の線形変換, パラメータの線形変換, 座標の線形変換により適当な値に固定できる.

Kretschmann 不変量は

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{3(x-y)^4 P(x,y)}{2R^4 F(x)^6}. \quad (3.8.3)$$

ここで,  $P$  は次の多項式:

$$\begin{aligned} P = & (8\lambda^4 g_3^2 x^4 + 32\lambda^3 g_3^2 x^3 + 32\lambda g_3^2 x + 48\lambda^2 g_3^2 x^2 + 8g_3^2) y^2 \\ & + \{-4\lambda^4 g_3^2 x^5 + 4\lambda^3 g_3(-4g_3 + g_2\lambda)x^4 \\ & - 4\lambda^2 g_3(9g_3 + g_1\lambda^2 - 6g_2\lambda)x^3 - 4g_3\lambda(10g_3 + 3g_0\lambda^3 - 9g_2\lambda)x^2 \\ & - 4g_3(4g_3 - 4g_2\lambda - 3g_1\lambda^2 + 6g_0\lambda^3)x - 4g_3\lambda(3g_0\lambda - 2g_1)\} y \\ & + 3\lambda^4 g_3^2 x^6 + 14\lambda^3 g_3^2 x^5 + \lambda^2 g_3(27g_3 + 2g_1\lambda^2)x^4 \\ & + 4g_3\lambda(2g_3 + 2g_0\lambda^3 - g_1\lambda^2 + 4g_2\lambda)x^3 \\ & + (8g_3^2 - 16\lambda g_2 g_3 - 16\lambda^3 g_2 g_1 + 16\lambda^2 g_2^2 + 3\lambda^4 g_1^2 + 4g_0\lambda^4 g_2 + 18\lambda^2 g_3 g_1)x^2 \\ & + 2\lambda(8g_0 g_1 \lambda^3 - 5\lambda^2 g_1^2 - 12g_0 g_2 \lambda^2 + 12\lambda g_0 g_3 + 8\lambda g_2 g_1 - 4g_1 g_3)x \\ & + \lambda^2(16g_0^2 \lambda^2 - 16g_0 g_1 \lambda + 3g_1^2 + 4g_0 g_2). \end{aligned} \quad (3.8.4)$$

ただし,

$$P(-1/\lambda, y) = 16\lambda^4 G(-1/\lambda)^2. \quad (3.8.5)$$

特に,  $x = -1/\lambda$  で Kretschmann 不変量が有界であるためには,  $G(\xi) = cF(\xi)^2$  となることが必要十分であることが示される. よって, この場合を除くと,  $\lambda \neq 0$  なら,  $x = -1/\lambda$  は曲率特異点.

また, Killing 軌道に誘導される計量  $h_{ij} := g(\xi_i, \xi_j)$  ( $\xi_0 = \partial_t, \xi_1 = \partial_\psi, \xi_2 = \partial_\phi$ ) は,

$$\partial_t \cdot \partial_t = -\frac{F(y)}{F(x)}, \quad (3.8.6a)$$

$$\partial_t \cdot \partial_\psi = C \frac{1+y}{RF(x)}, \quad (3.8.6b)$$

$$\partial_t \cdot \partial_\phi = 0, \quad (3.8.6c)$$

$$\partial_\psi \cdot \partial_\psi = \frac{R^2 Q(x,y)}{(1-\lambda)^2 (x-y)^2 F(x)}, \quad (3.8.6d)$$

$$\partial_\psi \cdot \partial_\phi = 0, \quad (3.8.6e)$$

$$\partial_\phi \cdot \partial_\phi = \frac{R^2 G(x)}{(x-y)^2}. \quad (3.8.6f)$$



ここで,  $Q$  は

$$\begin{aligned}
Q = & (\lambda^3 g_0 - \lambda^2 g_1 + \lambda g_2 - g_3) y^3 \\
& + \{(2\lambda^2 g_3 - \lambda^3 g_3 - \lambda g_3) x^2 \\
& + (-2\lambda^3 g_0 + (2g_1 - 2g_3)\lambda^2 + (-2g_2 + 4g_3)\lambda) x \\
& + 2\lambda^3 g_0 + (-2g_1 - g_0)\lambda^2 + (2g_2 - g_3 + g_1)\lambda - g_2\} y^2 \\
& + \{((-g_2 + g_0)\lambda^3 + (g_3 + 2g_2 - g_1)\lambda^2 - 2\lambda g_3) x^2 \\
& + (-4\lambda^3 g_0 + (-2g_2 + 4g_1 + 2g_0)\lambda^2 + (-2g_1 + 2g_3)\lambda) x \\
& + \lambda^3 g_0 + (-2g_0 - g_1)\lambda^2 + (2g_1 + g_0)\lambda - g_1\} y \\
& + ((-g_1 + 2g_0)\lambda^3 + (g_2 - g_0)\lambda^2 - \lambda g_3) x^2 \\
& + (4\lambda^2 g_0 - 2\lambda g_0 - 2\lambda^3 g_0) x + 2\lambda g_0 - \lambda^2 g_0 - g_0. \tag{3.8.7}
\end{aligned}$$

また, その行列式は

$$\Delta := \det h = \frac{R^4 G(x) G(y)}{(x - y)^4}. \tag{3.8.8}$$

これより, 特に, CTC が存在しないための必要条件は  $G(x) > 0$ . このとき, 計量の各 (直交) 成分の符号は

$F(x)$	$F(y)$	$[t]$	$[\psi]$	$[\phi]$	$[y]$	$[x]$	$G(y)$	
+	+	-	+	+	+	+	-	○
		-	-	+	-	+	+	×
+	-	+	-	+	+	+	-	○
		+	+	+	-	+	+	○
-	+	+	-	+	-	-	-	×
		+	+	+	+	-	+	○
-	-	-	+	+	-	-	-	×
		-	-	+	+	-	+	×

以上より, 漸近的に平坦な領域があるとする, 無限遠では,

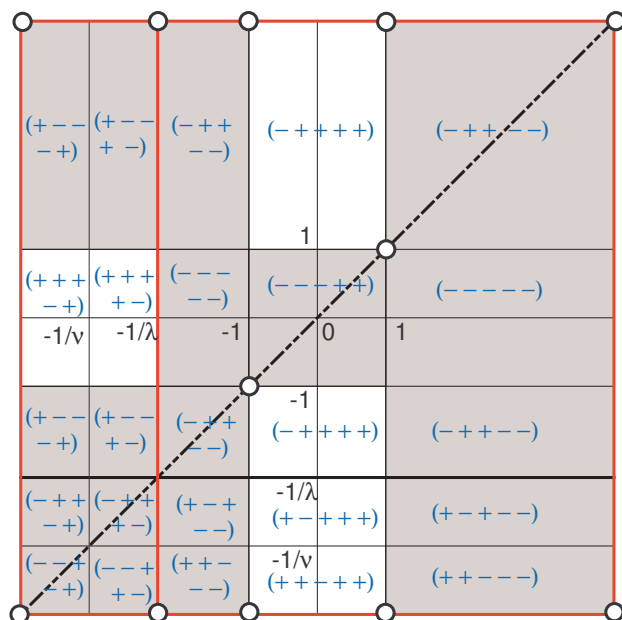
$$x = y, \quad G(x) = G(y) = 0, \quad F(x) = F(y) > 0. \tag{3.8.9}$$

よって, 漸近的に平坦な DOC では, CTC が無いとすると

$$F(x) > 0, \quad G(x) > 0, \quad G(y) < 0 \tag{3.8.10}$$

で無限遠の近傍では  $F(y) > 0$ . また,  $F(y) < 0$  の領域はエルゴ領域で, ホライズンでは  $G(y) = 0$ .

Black Ring: x-y plane  
 ( $0 < \lambda < \nu < 1$ )



正則解  $G(\xi)$  のパラメータを

$$G(\xi) = (1 - \xi^2)(1 + \nu\xi), \quad (3.8.11)$$

( $1 > \nu > 0$ ) と選ぶと,

$$C(\nu, \lambda) = \sqrt{\lambda(\lambda - \nu) \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}}. \quad (3.8.12)$$

このとき、正質量の漸近的平坦な領域およびそれに接する物理領域は、

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -\infty < y \leq -1. \quad (3.8.13)$$

パラメータ  $\lambda, \nu$  の変域は

$$0 < \nu \leq \lambda < 1. \quad (3.8.14)$$

このときに、計量が Lorentz 型となる領域は図のようになる。

**Conical singularity:** 2次元面  $x = -1$  および  $y = -1$  で conical singularity を持たない条件は

$$\Delta\psi = \Delta\phi = 2\pi \frac{\sqrt{1-\lambda}}{1-\nu}. \quad (3.8.15)$$

さらに, 2次元面  $x = 1$  で conical singularity を持たない条件は,

$$\lambda = \frac{2\nu}{1+\nu^2} \quad (3.8.16)$$

特殊な場合 :

- 静的ブラックリング解 :  $\lambda = \nu$ .
- 正則回転ブラックリング解 (ER 解) :  $\lambda = \frac{2\nu}{1+\nu^2}$ .
- 特殊 MP 解: 次式で定義される  $m, a$  を一定に保って,  $\lambda, \nu \rightarrow 1, R \rightarrow 0$  の極限をとる.

$$m = \frac{2R^2}{1-\nu}, \quad a^2 = 2R^2 \frac{\lambda-\nu}{(1-\nu)^2} \quad (3.8.17)$$

### 3.8.1.2 回転正則ブラックリング解

物理パラメーター: 質量  $M$ , 角運動量  $J$ , ホライズン面積  $\mathcal{A}_H$ , 表面重力  $\kappa$  は [ER06]

$$M = \frac{3\pi R^2}{4G} \frac{\lambda}{1-\nu}, \quad (3.8.18a)$$

$$J = \frac{\pi R^3}{2G} \frac{\sqrt{\lambda(\lambda-\nu)(1+\lambda)}}{(1-\nu)^2}, \quad (3.8.18b)$$

$$\mathcal{A}_H = 8\pi^2 R^3 \frac{\nu^{3/2} \sqrt{\lambda(1-\lambda^2)}}{(1-\nu)^2(1+\nu)}, \quad (3.8.18c)$$

$$\kappa = 2\pi T_H = \frac{1+\nu}{2R} \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda\nu(1+\lambda)}}. \quad (3.8.18d)$$

$M, J, \mathcal{A}_H$  から無次元量

$$j^2 := \frac{27\pi J^2}{32G M^3}, \quad a_H := \frac{3\sqrt{3}}{16\sqrt{\pi}} \frac{\mathcal{A}_H}{(GM)^{3/2}} \quad (3.8.19)$$

を定義すると,

$$a_H = 2\sqrt{\nu(1-\nu)}, \quad j^2 = \frac{(1+\nu)^3}{8\nu}. \quad (3.8.20)$$

## Kretchman 不変量

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{6\nu^2(1+\nu^2)^2(x-y)^4P}{R^4(1+\nu^2+2\nu x)^6}, \quad (3.8.21)$$

$$\begin{aligned} P := & \{32\nu^4x^4 + 64\nu^3(1+\nu^2)x^3 + 48\nu^2(1+\nu^2)^2x^2 \\ & + 16\nu(1+\nu^2)^3x + 2(1+\nu^2)^4\}y^2 \\ & + \{-16\nu^4x^5 - 16\nu^3(2\nu^2+1)x^4 - 4\nu^2(-3+9\nu^4+2\nu^2)x^3 \\ & - 4\nu(5\nu^6+6\nu^4-4-15\nu^2)x^2 - 4(1+\nu^2)(\nu^6+4\nu^4-10\nu^2-1)x \\ & - 4\nu(\nu^2-2)(1+\nu^2)^2\}y \\ & + 12\nu^4x^6 + 28\nu^3(1+\nu^2)x^5 + \nu^2(46\nu^2+27\nu^4+27)x^4 \\ & + 4\nu(5\nu^2+\nu^6+5+9\nu^4)x^3 + (10+2\nu^8+14\nu^2-18\nu^6+12\nu^4)x^2 \\ & + 4\nu(3+6\nu^2-12\nu^4+\nu^6)x - 4-30\nu^4+3\nu^6+27\nu^2. \end{aligned} \quad (3.8.22)$$

## 3.8.1.3 MP 極限

座標変換

$$x = -1 + 2\delta \frac{R^2 \cos^2 \theta}{r^2 - m\delta \cos^2 \theta}, \quad (3.8.23a)$$

$$y = -1 - 2\delta \frac{R^2 \sin^2 \theta}{r^2 - m\delta \cos^2 \theta}, \quad (3.8.23b)$$

$$(\psi, \phi) \rightarrow \frac{\sqrt{2m\delta}}{2R}(\psi, \phi), \quad (3.8.23c)$$

$$m = \frac{2R^2}{1-\nu}, \quad a^2 = 2R^2 \frac{\lambda-\nu}{(1-\nu)^2}, \quad \delta = 1 - \frac{a^2}{m} \quad (3.8.23d)$$

の後,  $m, a$  を一定にして,  $R \rightarrow 0$  の極限を取ると, 単純回転 MP 解

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\left(1 - \frac{m}{\Sigma}\right) \left(dt - \frac{ma \sin \theta}{\Sigma - m} d\psi\right)^2 + \frac{\Delta \sin^2 \theta}{1 - m/\Sigma} d\psi^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \\ & + \Sigma \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\right), \end{aligned} \quad (3.8.24)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (3.8.25)$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - m \quad (3.8.26)$$

を得る.

### 3.8.2 Pommeransky-Senkov 解

**Ref:** Pommeransky AA, Sen'kov RA: "Black ring with two angular momenta", hep-th/0612005.

計量:

$$ds^2 = -\frac{H(y,x)}{H(x,y)}(dt + \Omega)^2 - \frac{F(x,y)}{H(y,x)}d\phi^2 - 2\frac{J(x,y)}{H(y,x)}d\phi d\psi \\ + \frac{F(y,x)}{H(y,x)}d\psi^2 + \frac{2k^2H(x,y)}{(1-\sigma)^2(x-y)^2} \left( \frac{dx^2}{G(x)} - \frac{dy^2}{G(y)} \right) \quad (3.8.27)$$

ここで,

$$G(x) = (1-x^2)(1+\nu x + \sigma x^2), \quad (3.8.28a)$$

$$H(x,y) = 1 + \nu^2 - \sigma^2 + 2\nu\sigma(1-x^2)y + 2\nu x(1-\sigma^2y^2) \\ + \sigma(1-\nu^2-\sigma^2)x^2y^2, \quad (3.8.28b)$$

$$J(x,y) = \frac{2k^2\nu\sqrt{\sigma}(1-x^2)(1-y^2)}{(1-\sigma)^2(x-y)} \{1 + \nu^2 - \sigma^2 \\ + 2\nu\sigma(x+y) - \sigma(1-\nu^2-\sigma^2)xy\}, \quad (3.8.28c)$$

$$F(x,y) = \frac{2k^2}{(1-\sigma)^2(x-y)^2} \left[ G(x)(1-y^2) \{ ((1-\sigma)^2 - \nu^2)(1+\sigma) \right. \\ \left. + \nu(1+2\sigma-3\sigma^2-\nu^2)y \} + G(y) \{ 2\nu^2 + \nu((1-\sigma)^2 + \nu^2)x \right. \\ \left. + (1+\sigma)((1-\sigma)^2 - \nu^2)x^2 + \nu(1-\nu^2-3\sigma^2+2\sigma^3)x^3 \right. \\ \left. + \sigma(1-\sigma)(1-\nu^2-\sigma^2)x^4 \right], \quad (3.8.28d)$$

$$\Omega = -\frac{2k\nu\sqrt{(1+\sigma)^2-\nu^2}}{H(y,x)} \left[ \sqrt{\sigma}(1-x^2)y d\psi + \frac{1+y}{1-\nu+\sigma} \right. \\ \left. \times \{ 1 + \nu - \sigma + \sigma(1-\nu-\sigma)x^2y + 2\sigma x(1-y) \} d\phi \right] \quad (3.8.28e)$$

計量を

$$ds^2 = \Phi_{ab}(x,y) dz^a dz^b + k^2(x,y) \left( \frac{dx^2}{G(x)} - \frac{dy^2}{G(y)} \right) \quad (3.8.29)$$

と表記するとき  $((z^a) = (t, \phi, \psi))$ ,

$$\rho^2 := \det(\Phi_{ab}) = -\frac{4k^4G(x)G(y)}{(1-\sigma)^2(y-x)^4}, \quad (3.8.30)$$

$$-g = \frac{16k^8H(x,y)^2}{(1-\sigma)^6(y-x)^8}. \quad (3.8.31)$$

### 3.8.3 双極子型ブラックリング解

**Ref:** Emparan R (2004)[Emp04]

作用積分: Einstein-Maxwell-Dilaton 系とみたとき,

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^5x \sqrt{-g} \left( R - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}e^{-\alpha\phi}|\mathcal{F}_{[2]}|^2 \right). \quad (3.8.32)$$

変換

$$\tilde{\phi} = -\phi, \quad \mathcal{H}_{[3]} = dB_{[2]} = e^{-\alpha\phi} * \mathcal{F}_{[2]} \quad (3.8.33)$$

により,

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^5x \sqrt{-g} \left( R - \frac{1}{2}(\nabla\tilde{\phi})^2 - \frac{1}{2}e^{-\alpha\phi}|\mathcal{H}_{[3]}|^2 \right). \quad (3.8.34)$$

以下,  $N$  を

$$\alpha^2 = \frac{4}{N} - \frac{4}{3}, \quad (0 < N \leq 3) \quad (3.8.35)$$

により定義する.

計量の一般型:

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{F(y)}{F(x)} \left( \frac{H(x)}{H(y)} \right)^{N/3} \left( dt + C(\nu, \lambda) R \frac{1+y}{F(y)} d\psi \right)^2 \\ & + \frac{R^2}{(x-y)^2} F(x) (H(x)H(y)^2)^{N/3} \\ & \times \left[ -\frac{G(y)}{F(y)H(y)^N} d\psi^2 - \frac{dy^2}{G(y)} + \frac{dx^2}{G(x)} + \frac{G(x)}{F(x)H(x)^N} d\psi^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.8.36)$$

ここで,

$$F(\xi) = 1 + \lambda\xi, \quad G(\xi) = (1 - \xi^2)(1 + \nu\xi), \quad H(\xi) = 1 - \mu\xi \quad (3.8.37a)$$

$$C(\nu, \lambda) = \sqrt{\lambda(\lambda - \nu) \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}}. \quad (3.8.37b)$$

変数  $x, y$  の変域は

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -\infty < y \leq -1. \quad (3.8.38)$$

パラメータ  $\lambda, \nu, \mu$  の変域は

$$0 < \nu \leq \lambda < 1, \quad 0 \leq \mu < 1. \quad (3.8.39)$$

**Conical singularity:** 2次元面  $x = -1$  および  $y = -1$  で conical singularity を持たない条件は

$$\Delta\psi = \Delta\phi = 4\pi \frac{H(-1)^{N/2} \sqrt{F(-1)}}{|G'(-1)|} = 2\pi \frac{(1+\mu)^{N/2} \sqrt{1-\lambda}}{1-\nu}. \quad (3.8.40)$$

さらに, 2次元面  $x = 1$  で conical singularity を持たない条件は,

$$\Delta\phi = 4\pi \frac{H(1)^{N/2} \sqrt{F(1)}}{|G'(1)|} \Leftrightarrow \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \left( \frac{1+\mu}{1-\mu} \right)^N = \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} \right)^2. \quad (3.8.41)$$

物理パラメーター

$$M = \frac{3\pi R^2 (1+\mu)^N}{4G} \left( \lambda + \frac{N}{3} \frac{\mu(1-\lambda)}{1+\mu} \right), \quad (3.8.42a)$$

$$J = \frac{\pi R^3 (1+\mu)^{3N/2} \sqrt{\lambda(\lambda-\nu)(1+\lambda)}}{2G (1-\nu)^2}, \quad (3.8.42b)$$

$$\mathcal{A}_H = 8\pi^2 R^3 \frac{(1+\mu)^N \nu^{(3-N)/2} (\mu+\nu)^{N/2} \sqrt{\lambda(1-\lambda^2)}}{(1-\nu)^2 (1+\nu)}, \quad (3.8.42c)$$

$$T_H = \frac{1}{4\pi R} \frac{\nu^{(N-1)/2} (1+\nu)}{(\mu+\nu)^{N/2}} \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda(1+\lambda)}}, \quad (3.8.42d)$$

$$\Omega_H = \frac{1}{R(1+\mu)^{N/2}} \sqrt{\frac{\lambda-\nu}{\lambda(1+\lambda)}}, \quad (3.8.42e)$$

$$\mathcal{Q} = R\sqrt{N} \frac{(1+\mu)^{(N-1)/2} \sqrt{\mu(\mu+\nu)(1-\lambda)}}{(1-\nu)\sqrt{1-\mu}}, \quad (3.8.42f)$$

$$\Phi_H = \frac{\pi R\sqrt{N}}{2G} \frac{(1+\mu)^{(N-1)/2} \sqrt{\mu(1-\mu)(1-\lambda)}}{\sqrt{\mu+\nu}}. \quad (3.8.42g)$$

ここで,

$$\mathcal{Q} := \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} e^{-\alpha\tilde{\phi}} * \mathcal{H}, \quad (3.8.43)$$

$$\Phi_H := \frac{\pi}{2G} [B_{t\tilde{\psi}}(x=y=-1) - B_{t\tilde{\psi}}(y=-1/\nu)], \quad \tilde{\psi} := \frac{2\pi}{\Delta\psi}. \quad (3.8.44)$$

熱力学関係式: Smarr 関係式は

$$M = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{4G} \mathcal{A}_H T_H + \Omega_H J \right) + \frac{1}{2} \mathcal{Q} \Phi_H. \quad (3.8.45)$$

[目次へ](#)

微分関係式は

$$dM = \frac{1}{4G} T_H d\mathcal{A}_H + \Omega_H dJ + \Phi_H d\mathcal{Q}. \quad (3.8.46)$$

[目次へ](#)



### 3.9 一様系

#### 3.9.1 群の不変計量

群  $G$  の左不変ベクトル場の基底を  $\xi_a$  とする :

$$[\xi_a, \xi_b] = C_{ab}^c \xi_c. \quad (3.9.1)$$

このとき, 右不変ベクトル場の基底  $X_a$  は

$$[X_a, X_b] = -C_{ab}^c X_c \quad (3.9.2)$$

その双対基底  $\chi^a$  は

$$d\chi^a = \frac{1}{2} C_{bc}^a \chi^b \wedge \chi^c \quad (3.9.3)$$

を満たす.

不変計量:  $G$  の右不変計量は定数行列  $g_{ab}$  を用いて

$$ds^2 = g_{ab} \chi^a \chi^b \quad (3.9.4)$$

と表される. 以下, 添え字の上げ下げは  $g_{ab}$  で行うものとする.

接続形式:  $\chi^a$  に関する接続形式は

$$\omega_{ab} = \frac{1}{2} (C_{abc} - C_{bac} - C_{cab}) \chi^c \quad (3.9.5)$$

Riemann 曲率 :

$$R_{abcd} = \frac{1}{2} (C_{[ab]p} C_{cd}^p + C_{[cd]p} C_{ab}^p) - \frac{1}{2} (C_{pab} C_{cd}^p + C_{pa[c} C_{|b|d]}^p) \\ - C_{(ac)^p} C_{(bd)p} + C_{(ad)^p} C_{(bc)p}. \quad (3.9.6)$$

Ricci 曲率, スカラ曲率 :

$$R_{ab} = -C^{(pq)}_a C_{(pq)b} + \frac{1}{4} C_{apq} C_b{}^{pq} + C^p C_{(ab)p}, \quad (3.9.7)$$

$$R = -\frac{1}{2} C_{abc} C^{bac} - \frac{1}{4} C_{abc} C^{abc} - C_a C^a. \quad (3.9.8)$$

ここで,

$$C_a = C^c{}_{ac}. \quad (3.9.9)$$

(check: 2008.5.24)

### 3.9.2 単純一様系の分類

#### 3.9.2.1 一般論

Lie 代数  $\mathcal{L}$  の基底  $X_I$  に関する構造定数を  $C_{JK}^I$  とする ;

$$[X_I, X_J] = C_{IJ}^K X_K \quad (3.9.10)$$

このとき, 構造定数は次の関係式を満たす :

$$C_{IJ}^K = -C_{JI}^K, \quad (3.9.11a)$$

$$C_{IP}^L C_{JM}^P - C_{JP}^L C_{IM}^P = C_{IJ}^K C_{KM}^L. \quad (3.9.11b)$$

基底の変換

$$X'_I = X_J T^J{}_I \quad (3.9.12)$$

に対して, 構造定数は

$$C'^I{}_{JK} = (T^{-1})^I{}_L C_{MN}^L T^M{}_J T^N{}_K \quad (3.9.13)$$

と変換する.

#### 3.9.2.2 2次元一様系

2次元 Lie 代数 2次元 Lie 代数は次の2つのいずれかと同型である.

$$\text{I } [X_1, X_2] = 0.$$

$$\text{II } [X_1, X_2] = X_1.$$

#### II 型の一様計量

構造定数

$$C^1{}_{12} = -C^1{}_{21} = 1 \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = -1. \quad (3.9.14)$$

不変基底の座標表示

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x + \partial_y, \quad (3.9.15a)$$

$$\chi^1 = dx - xdy, \quad \chi^2 = dy. \quad (3.9.15b)$$

計量

$$\begin{aligned} ds^2 &= A(dx - xdy)^2 + 2B(dx - xdy)dy + Cdy^2 \\ &= Adx^2 + 2(B - Ax)dxdy + (Ax^2 - 2Bx + C)dy^2 \end{aligned} \quad (3.9.16)$$

スカラ曲率

$$R = -\frac{2A}{AC - B^2}. \quad (3.9.17)$$

これより,

- Riemannian のとき: 常に負曲率, すなわち,  $H^2$  と局所同相  
例えば,

$$X = xe^{-y}, \quad Y = e^{-y} \quad (3.9.18)$$

に対して,

$$ds^2 = (dx - xdy)^2 + dy^2 = \frac{dX^2 + dY^2}{Y^2}. \quad (3.9.19)$$

- Lorentzian のとき:  $A$  の符号に応じて, ゼロ, 正, 負いずれの曲率も可能.

例えば,

$$xe^{-y} = u, \quad e^y = v \quad (3.9.20)$$

とおくと,

$$ds^2 = (dx - xdy)dy = dudv. \quad (3.9.21)$$

### 3.9.2.3 3次元一様系

【命題 3.66】 3次元 Lie 代数の構造定数  $C_{JK}^I$  は,

$$N^{IJ} = \frac{1}{2}C_{MN}^{[I}\epsilon^{J]MN}, \quad (3.9.22a)$$

$$a_I = \frac{1}{2}C_{IM}^M \quad (3.9.22b)$$

により定義される 3次対称行列  $N^{IJ}$  と 3次元ベクトル  $a_I$  を用いて,

$$C_{JK}^I = N^{IM}\epsilon_{MJK} + 2a_{[J}\delta_{K]}^I \quad (3.9.23)$$

と表される. また, Jacobi 恒等式は

$$N^{IM}a_M = 0 \quad (3.9.24)$$

と同等となる.

基底の変換に対して, 行列表示のもとで  $N = (N^{IJ})$  と  $a = (a_I)$  は

$$N' = (\det T)T^{-1}N({}^T T)^{-1}, \quad a' = {}^T T a \quad (3.9.25)$$

と変換する. \_\_\_\_\_ □

**【定理 3.67 (Bianchi, Ellis-MacCallum)】** 3次元実リー代数は, ベクトル  $a$  の大きさ  $A = (a^I a_I)^{1/2}$  と行列  $N$  の3つの固有値  $N_1, N_2, N_3$  により, 表4に示した  $I \sim IX$  までの9つの方に分類される. 任意の3次元リー代数はこのいずれかと同型である. \_\_\_\_\_ □

Class	$G_3A$						$G_3B$				
	I	II	VI <sub>0</sub>	VII <sub>0</sub>	VIII	IX	V	IV	III	VI <sub>h</sub>	VII <sub>h</sub>
										$h \neq -1$	
A	0	0	0	0	0	0	1	1	1	$\sqrt{-h}$	$\sqrt{h}$
$N_1$	0	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	0
$N_2$	0	0	-1	1	1	1	0	0	-1	-1	1
$N_3$	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1

表 4: 3次元リー代数の分類

Type I:  $C_{JK}^I = 0$

$$[\xi_I, \xi_J] = 0$$

$$\xi_1 = \partial_1, \quad \xi_2 = \partial_2, \quad \xi_3 = \partial_3$$

$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3$$

$$\chi^1 = dx^1, \quad \chi^2 = dx^2, \quad \chi^3 = dx^3$$

Type II:  $C^1_{23} = -C^1_{32} = 1$

$$[\xi_2, \xi_3] = \xi_1, \quad [\xi_1, \xi_2] = 0, \quad [\xi_1, \xi_3] = 0$$

$$\xi_1 = \partial_2, \quad \xi_2 = \partial_3, \quad \xi_3 = \partial_1 + x^3 \partial_2$$

$$X_1 = \partial_2, \quad X_2 = x^1 \partial_2 + \partial_3, \quad X_3 = \partial_1$$

$$\chi^1 = dx^2 - x^2 dx^3, \quad \chi^2 = dx^3, \quad \chi^3 = dx^1$$

Type III:  $C^1_{13} = -C^1_{31} = 1$

$$[\xi_1, \xi_3] = \xi_1, \quad [\xi_1, \xi_2] = 0, \quad [\xi_2, \xi_3] = 0$$

$$\xi_1 = \partial_2, \quad \xi_2 = \partial_3, \quad \xi_3 = \partial_1 + x^2 \partial_2$$

$$X_1 = e^{x^1} \partial_2, \quad X_2 = \partial_3, \quad X_3 = \partial_1$$

$$\chi^1 = e^{-x^1} dx^2, \quad \chi^2 = dx^3, \quad \chi^3 = dx^1$$

Type IV:  $C^1_{13} = -C^1_{31} = 1, C^1_{23} = -C^1_{32} = 1, C^2_{23} = -C^2_{32} = 1$

$$[\xi_1, \xi_3] = \xi_1, \quad [\xi_2, \xi_3] = \xi_1 + \xi_2, \quad [\xi_1, \xi_2] = 0$$

$$\xi_1 = \partial_2, \quad \xi_2 = \partial_3, \quad \xi_3 = \partial_1 + (x^2 + x^3) \partial_2 + x^3 \partial_3$$

$$X_1 = e^{x^1} \partial_2, \quad X_2 = e^{x^1} (x^1 \partial_2 + \partial_3), \quad X_3 = \partial_1$$

$$\chi^1 = e^{-x^1} (dx^2 - x^1 dx^3), \quad \chi^2 = e^{-x^1} dx^3, \quad \chi^3 = dx^1$$

Type V:  $C^1_{13} = -C^1_{31} = 1, C^2_{23} = -C^2_{32} = 1.$

$$[\xi_1, \xi_3] = \xi_1, \quad [\xi_2, \xi_3] = \xi_2, \quad [\xi_1, \xi_2] = 0$$

$$\xi_1 = \partial_2, \quad \xi_2 = \partial_3, \quad \xi_3 = \partial_1 + x^2 \partial_2 + x^3 \partial_3$$

$$X_1 = e^{x^1} \partial_2, \quad X_2 = e^{x^1} \partial_3, \quad X_3 = \partial_1$$

$$\chi^1 = e^{-x^1} dx^2, \quad \chi^2 = e^{-x^1} dx^3, \quad \chi^3 = dx^1$$

Type VI<sub>h</sub>:  $C^1_{13} = -C^1_{31} = 1, C^2_{23} = -C^2_{32} = q,$

$$h = -(1+q)^2/(1-q)^2 \quad (q \neq 0, 1)$$

$$[\xi_1, \xi_3] = \xi_1, \quad [\xi_2, \xi_3] = q\xi_2, \quad [\xi_1, \xi_2] = 0$$

$$\xi_1 = \partial_2, \quad \xi_2 = \partial_3, \quad \xi_3 = \partial_1 + x^2 \partial_2 + qx^3 \partial_3$$

$$X_1 = e^{x^1} \partial_2, \quad X_2 = e^{qx^1} \partial_3, \quad X_3 = \partial_1$$

$$\chi^1 = e^{-x^1} dx^2, \quad \chi^2 = e^{-qx^1} dx^3, \quad \chi^3 = dx^1$$

Type VII<sub>h</sub>:  $C^2_{13} = -C^2_{31} = 1$ ,  $C^1_{23} = -C^1_{32} = -1$ ,  $C^2_{23} = -C^2_{32} = q$ ,  
 $h = q^2/(4 - q^2)$  ( $q^2 < 4$ )  
 $[\xi_1, \xi_3] = \xi_2$ ,  $[\xi_2, \xi_3] = -\xi_1 + q\xi_2$ ,  $[\xi_1, \xi_2] = 0$   
 $\xi_1 = \partial_2$ ,  $\xi_2 = \partial_3$ ,  $\xi_3 = \partial_1 - x^3\partial_2 + (x^2 + qx^3)\partial_3$   
 $X_1 = (A + kB)\partial_2 - B\partial_3$ ,  $X_2 = B\partial_2 + (A - kB)\partial_3$ ,  $X_3 = \partial_1$   
 $\chi^1 = (C - kD)dx^2 - Ddx^3$ ,  $\chi^2 = Ddx^2 + (C + kD)dx^3$ ,  $\chi^3 = dx^1$   
 $A = e^{kx^1} \cos(ax^1)$ ,  $B = -a^{-1}e^{kx^1} \sin(ax^1)$   
 $C = e^{-kx^1} \cos(ax^1)$ ,  $B = -a^{-1}e^{-kx^1} \sin(ax^1)$   
 $k = q/2$ ,  $a = (1 - k^2)^{1/2} = (4 - q^2)^{1/2}/2$ .

Type VIII:  $C^1_{32} = C^2_{31} = C^3_{12} = 1$ ,  $C^1_{23} = C^2_{13} = C^3_{21} = -1$   
 $[\xi_1, \xi_2] = \xi_3$ ,  $[\xi_2, \xi_3] = -\xi_1$ ,  $[\xi_3, \xi_1] = \xi_2$   
 $\xi_1 = \frac{1}{2}e^{-x^3}\partial_1 + \frac{1}{2}(e^{x^3} - (x^2)^2e^{-x^3})\partial_2 - x^2e^{-x^3}\partial_3$ ,  
 $\xi_2 = \partial_3$ ,  
 $\xi_3 = \frac{1}{2}e^{-x^3}\partial_1 - \frac{1}{2}(e^{x^3} + (x^2)^2e^{-x^3})\partial_2 - x^2e^{-x^3}\partial_3$ ,  
 $X_1 = \frac{1}{2}(1 + (x^1)^2)\partial_1 + \frac{1}{2}(1 - 2x^1x^2)\partial_2 - x^1\partial_3$ ,  
 $X_2 = -x^1\partial_1 + x^2\partial_2 + \partial_3$ ,  
 $X_3 = \frac{1}{2}(1 - (x^1)^2)\partial_1 - \frac{1}{2}(1 - 2x^1x^2)\partial_2 + x^1\partial_3$ ,  
 $\chi^1 = dx^1 + (1 + (x^1)^2)dx^2 + (x^1 - x^2 - (x^1)^2x^2)dx^3$ ,  
 $\chi^2 = 2x^1dx^2 + (1 - 2x^1x^2)dx^3$ ,  
 $\chi^3 = dx^1 + (-1 + (x^1)^2)dx^2 + (x^1 + x^2 - (x^1)^2x^2)dx^3$ ,

Type IX:  $C^1_{23} = C^2_{31} = C^3_{12} = 1$ ,  $C^1_{32} = C^2_{13} = C^3_{21} = -1$   
 $[\xi_1, \xi_2] = \xi_3$ ,  $[\xi_2, \xi_3] = \xi_1$ ,  $[\xi_3, \xi_1] = \xi_2$   
 $\xi_1 = \partial_2$ ,  
 $\xi_2 = \cos x^2\partial_1 - \cot x^1 \sin x^2\partial_2 + \frac{\sin x^2}{\sin x^1}\partial_3$ ,  
 $\xi_3 = -\sin x^2\partial_1 - \cot x^1 \cos x^2\partial_2 + \frac{\cos x^2}{\sin x^1}\partial_3$ ,  
 $X_1 = -\sin x^3\partial_1 + \frac{\cos x^3}{\sin x^1}\partial_2 - \cot x^1 \cos x^3\partial_3$ ,  
 $X_2 = \cos x^3\partial_1 + \frac{\sin x^3}{\sin x^1}\partial_2 - \cot x^1 \sin x^3\partial_3$ ,  
 $X_3 = \partial_3$ ,  
 $\chi^1 = -\sin x^3dx^1 + \sin x^1 \cos x^3dx^2$ ,  
 $\chi^2 = \cos x^3dx^1 + \sin x^1 \sin x^3dx^2$ ,  
 $\chi^3 = \cos x^1dx^2 + dx^3$

表 6: 3次元実リ一群に対する不変基底と双対基底 (2)

表 7: Thurston types and Bianchi types

Space	$G_{\max}$	$G_{\max}^+$	$G_{\min}$	Bianchi type
$E^3$	$\text{IO}(3)$	$\text{ISO}(3)$	$\mathbb{R}^3 (= \text{I})$ $\text{VII}_0^{(\pm)}$	I $\text{VII}_0$
$S^3$	$\text{O}(4)$	$\text{SO}(4)$	$\text{SU}(2) (= \text{IX})$	IX
$H^3$	$\text{O}_+(3, 1)$	$\text{PSL}_2\mathbb{C}$	$G_{\max}^+$	V, $\text{VII}_h (h \neq 0)$
Nil	$\text{Nil} \rtimes \text{O}(2)$	$G_{\max}$	Nil (= II)	II
Sol	$\text{Sol} \rtimes D_4$	$\text{Sol} \rtimes D_2$	Sol (= $\text{VI}_0$ )	$\text{VI}_0$
$\widetilde{\text{SL}}_2\mathbb{R}$	$\widetilde{\text{SL}}_2\mathbb{R} \rtimes \text{O}(2)$	$G_{\max}$	$\widetilde{\text{SL}}_2\mathbb{R} (= \text{VIII})$ $G_{\max}$	VIII III
$H^2 \times E^1$	$\text{O}_+(2, 1) \times \text{IO}(1)$	$(\text{PSL}_2\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2$	$\text{PSL}_2\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	III
$S^2 \times E^1$	$\text{O}(3) \times \text{IO}(1)$	$(\text{SO}(3) \times \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2$	$\text{SO}(3) \times \mathbb{R}$	Kantowski-Sachs models

### 3.9.3 Thurston type

### 3.9.4 行列群の不変基底

【公式 3.68 (行列群の不変基底 (2006.6.14))]  $G$  を行列群,  $x$  を局所座標系,  $\mathfrak{g}$  を  $G$  の Lie 代数に対応する行列の線形集合 ( $T_e(G)$ ) とする. このとき,  $A \in \mathfrak{g}$  に対応する左不変ベクトル場  $V(A)$  は

$$V(A)_x \equiv V(A)_x^i \partial_i U = U(x)A$$

で与えられる. 特に,  $A_I$  を  $\mathfrak{g}$  の基底とすると, 左不変ベクトル場の基底  $V_I$  は

$$V_I \equiv V_I^i \partial_i U = U A_I$$

で, また, 左不変双対基底  $\chi^I$  は

$$A_I \chi^I = U^{-1} dU$$

により決まる.

右不変ベクトル場, 双対基底の対応する表式は

$$V(A)_x \equiv V(A)_x^i \partial_i U = AU(x),$$

$$V_I \equiv V_I^i \partial_i U = A_I U,$$

$$A_I \chi^I = dUU^{-1}$$

で与えられる. □

【公式 3.69 (SU(2) の不変基底 (2006.6.14))]  $U \in \text{SU}(2)$  は Euler 角  $(\theta, \phi, \psi)$  を用いて,

$$U = D\left(\frac{\phi}{2}\right) R\left(\frac{\theta}{2}\right) D\left(\frac{\psi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\psi+\phi}{2}} & -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\psi-\phi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\psi-\phi}{2}} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\psi+\phi}{2}} \end{pmatrix}$$

と表される. ここで,

$$D(\alpha) := \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \quad R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.9.26)$$

この座標系では,  $i\sigma_I/2$  に対応する  $\text{SU}(2)$  の左不変基底  $\chi_L^I$  は

$$\chi_L^1 = \sin \psi d\theta - \cos \psi \sin \theta d\phi, \quad (3.9.27a)$$

$$\chi_L^2 = -\cos \psi d\theta - \sin \psi \sin \theta d\phi, \quad (3.9.27b)$$

$$\chi_L^3 = d\psi + \cos \theta d\phi \quad (3.9.27c)$$



目次へ

と表され, 次の Maurer-Cartan 方程式を満たす :

$$d\chi_L^I = \frac{1}{2}\epsilon_{IJK}\chi_L^J \wedge \chi_L^K. \quad (3.9.28)$$

対応する右不変基底  $\chi_R^I$  は

$$\chi_R^1 = -\sin\phi d\theta + \cos\phi \sin\theta d\psi, \quad (3.9.29a)$$

$$\chi_R^2 = -\cos\phi d\theta - \sin\phi \sin\theta d\psi, \quad (3.9.29b)$$

$$\chi_R^3 = d\phi + \cos\theta d\psi \quad (3.9.29c)$$

と表され, 次の Maurer-Cartan 方程式を満たす :

$$d\chi_R^I = -\frac{1}{2}\epsilon_{IJK}\chi_R^J \wedge \chi_R^K. \quad (3.9.30)$$

---

□

### 3.9.5 対称空間

#### 3.9.5.1 $GL(n)$ と $RH(n)$

以下、 $RH(n)$  を非退化対称  $n$  次実行列の集合、 $RS(n)$  を対称  $n$  次実行列の集合とする：

$$RS(n) := \{X \in M(n) \mid {}^T X = X\}, \quad (3.9.31a)$$

$$RH(n) := RS(n) \cap GL(n). \quad (3.9.31b)$$

**【定理 3.70 ( $RH(n)$  の位相構造)】**  $RH(n)$  の行列はその符号指数 (対角化したときの固有値の正符号の数)  $p$  により分類され、同じ符号指数  $p$  を持つものからなる部分集合を  $RH_p(n)$  とおくと、各  $RH_p(n)$  は  $RH(n)$  の連結成分となり、その位相は

$$\begin{aligned} RH_p(n) &\approx SO(n) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2} / SO(p, n-p) \\ &\approx SO(n) / (SO(p) \times SO(n-p)) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2 - p(n-p)} \end{aligned} \quad (3.9.32)$$

□

**【定理 3.71 ( $GL(n), RH(n)$ )】**  $GL(n)$  およびその上の関数  $f(\Phi)$  に対して、

$$X \in GL(n) \mapsto (\tilde{X}f)(\Phi) := \left. \frac{df(\Phi + \epsilon X)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \quad (3.9.33)$$

により  $M(n)$  から  $GL(n)$  上のベクトル場への 1 対 1 線形対応が定義される。これにより  $M(n)$  を  $GL(n)$  のベクトル場の線形部分空間と同一視すると、 $M(n)$  の基底は  $GL(n)$  上のベクトル場の基底を与える。同様にして、 $RS(n)$  の基底は  $RH(n)$  のベクトル場の基底を与える。以下、この対応により、 $GL(n)$  および  $RH(n)$  上のベクトル場を、それぞれ  $M(n)$  および  $RS(n)$  に値をとる  $GL(n)$  および  $RH(n)$  上の関数と見なす。

- 1)  $\mathcal{M}$  を  $GL(n)$  ないし  $RH(n)$  として、それぞれ  $M(n)$  および  $RS(n)$  の元  $X, Y$  に対応する  $\mathcal{M}$  上のベクトル場を  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  とすると、ベクトル場として

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0 \quad (3.9.34)$$

が成り立つ。さらに、 $\mathcal{M}$  上の Riemann 計量を

$$g_{\Phi}(\tilde{X}, \tilde{Y}) := A \text{Tr}(\Phi^{-1} X \Phi^{-1} Y) + B \text{Tr}(\Phi^{-1} X) \text{Tr}(\Phi^{-1} Y) \quad (3.9.35)$$

により定義すると, Riemann 接続は

$$\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} \mapsto -\frac{1}{2}(X\Phi^{-1}Y + Y\Phi^{-1}X) \quad (3.9.36)$$

で与えられる. 対応する Riemann 曲率は

$$R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} \mapsto \frac{1}{4}\Phi[\Phi^{-1}Z, [\Phi^{-1}X, \Phi^{-1}Y]], \quad (3.9.37a)$$

$$R(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{W}) \mapsto \frac{1}{4}\text{Tr}([\Phi^{-1}X, \Phi^{-1}Y][\Phi^{-1}Z, \Phi^{-1}W]) \quad (3.9.37b)$$

となる. これより

$$\nabla R = 0 \quad (3.9.38)$$

が示される. したがって, この計量に関して,  $GL(n)$  および  $RH(n)$  は局所対称 Riemann 空間となる.

2)  $GL(n)$  上の 1 形式の基底  $d\Phi_{ab}$  を

$$d\Phi_{ab}(\tilde{X}) = X_{ab}; \quad \tilde{X} \mapsto X \in \mathcal{M}(n) \quad (3.9.39)$$

により定義する. このとき,  $GL(n)$  上のベクトル場の基底  $\partial^{ab}$  を

$$\partial^{ab} \mapsto E^{ab} \in M(n); \quad (E^{ab})_{cd} = \delta_c^a \delta_d^b \quad (3.9.40)$$

により定義すると,  $d\Phi_{ab}$  と  $\partial^{ab}$  は互いに双対となる:

$$d\Phi_{ab}(\partial^{cd}) = \delta_a^c \delta_b^d. \quad (3.9.41)$$

□

(注)  $RH_n(n)$ (正值対称正則行列の集合) に対しては, 上の定理の計量は  $GL_+(n)$  の作用  $X \mapsto TX^T T$  ( $T \in GL_+(n)$ ) に対して不変な計量の一般形である.

**【命題 3.72 ( $RH_p(n)$  の正規直交基底)】**  $GL(n)$  のベクトル場を  $M(n)$  に値を取る  $GL(n)$  上の関数と同一視する. 同様に,  $RH_p(n)$  を符号指数が  $p$  の  $n$  次対称実正則行列の集合,  $RS(n)$  を  $n$  次対称実行列の集合として,  $RH_p(n)$  のベクトル場を  $RS(n)$  に値を取る  $RH_p(n)$  上の関数と同一視する.

$\text{RH}_p(n)$  に

$$g_\Phi(\tilde{X}, \tilde{Y}) = A\text{Tr}(\Phi^{-1}X\Phi^{-1}Y) + B\text{Tr}(\Phi^{-1}X)\text{Tr}(\Phi^{-1}Y), \quad X, Y \in \text{RS}(n); \quad C = \pm k^2 \quad (3.9.42)$$

により Riemann 計量を定義する. このとき,  $\Phi \in \text{RH}_p(n)$  を局所的に

$$\Phi_{ab} = \eta_{AB}\phi_a^A\phi_b^B, \quad \Phi^{ab} = \eta^{AB}\phi_A^a\phi_B^b \quad (3.9.43)$$

と分解し ( $\eta_{AB}$  は符号指数  $p$  の単位計量),

$$\overset{\circ}{e}^{AB} := k^{-1}\phi_a^A\phi_b^B E^{ab}, \quad (3.9.44a)$$

$$\overset{\circ}{\theta}_{AB} := k\phi_A^a\phi_B^b d\Phi_{ab} \quad (3.9.44b)$$

とおく. さらに

$$A = \epsilon k^2, \quad A + nB = \epsilon' l^2; \quad \epsilon, \epsilon' = \pm 1 \quad (3.9.45)$$

に対して,

$$\theta_{AA} := kC_A^B\eta^{BB}\overset{\circ}{\theta}_{BB} \quad (1 \leq A \leq n-1), \quad (3.9.46a)$$

$$\theta_{nn} := \frac{l}{\sqrt{n}}\eta^{AB}\overset{\circ}{\theta}_{AB}, \quad (3.9.46b)$$

$$\theta_{AB} := k\overset{\circ}{\theta}_{AB} \quad (3.9.46c)$$

および

$$e^{AA} := \frac{1}{k}C_A^B\eta_{BB}\overset{\circ}{e}^{BB} \quad (1 \leq A \leq n-1), \quad (3.9.47a)$$

$$e^{nn} := \frac{1}{l\sqrt{n}}\eta_{AB}\overset{\circ}{e}^{AB}, \quad (3.9.47b)$$

$$e^{AB} := \frac{1}{k}\overset{\circ}{e}^{AB} \quad (3.9.47c)$$

とおく. ただし,  $C_B^A (1 \leq A \leq n, 1 \leq B \leq n-1)$  は

$$C_A^C C_B^C = \delta_{AB} \quad (1 \leq A, B \leq n-1), \quad \sum_{A=1}^n C_B^A = 0 \quad (1 \leq B \leq n-1) \quad (3.9.48)$$

を満たす行列で

$$\sum_{C=1}^{n-1} C_C^A C_C^B = \delta^{AB} - \frac{1}{n} \quad (1 \leq A, B \leq n) \quad (3.9.49)$$

を満たす。このとき,  $\{e^{AA}, \sqrt{2}e^{(AB)}(A \neq B)\}$  と  $\{\theta_{AA}, \sqrt{2}\theta_{(AB)}(A \neq B)\}$  が互いに双対的な正規直交基底となる:

$$\theta_{(AB)}(e^{(CD)}) = \delta_{(A}^C \delta_{B)}^D, \quad (3.9.50a)$$

$$\begin{aligned} \eta^{(AB)(CD)}\theta_{(AB)}\theta_{CD} &= (A\Phi^{ac}\Phi^{bd} + B\Phi^{ab}\Phi^{cd})d\Phi_{(ab)}d\Phi_{(cd)} \\ &= A\text{Tr}(\Phi^{-1}d\Phi\Phi^{-1}d\Phi) + B\text{Tr}(\Phi^{-1}d\Phi)\text{Tr}(\Phi^{-1}d\Phi) \end{aligned} \quad (3.9.50b)$$

$$\begin{aligned} \eta_{(AB)(CD)}e^{(AB)}e^{(CD)} &= \frac{1}{A}\Phi_{a(c}\Phi_{d)b}E^{ab}E^{cd} \\ &\quad - \frac{B}{A(A+nB)}\Phi_{ab}\Phi_{cd}E^{ab}E^{cd}. \end{aligned} \quad (3.9.50c)$$

ここで,  $\eta_{(AB)(CD)}$  は  $\Phi = \eta$  における計量

$$\eta_{(AA)(BB)} = \epsilon\delta_{AB} \quad (1 \leq A, B \leq n-1), \quad (3.9.51)$$

$$\eta_{(nn)(AA)} = 0 \quad (1 \leq A \leq n-1), \quad (3.9.52)$$

$$\eta_{(nn)(nn)} = \epsilon', \quad (3.9.53)$$

$$\eta_{(AB)(CD)} = \epsilon(\eta_{AC}\eta_{BD} + \eta_{AD}\eta_{BC}) \quad (A \neq B \text{ or } C \neq B) \quad (3.9.54)$$

である。

これより,

$$\begin{aligned} R_{XY} &= -\frac{nA + (n^2 - 2)B}{4(A + nB)}\text{Tr}(\Phi^{-1}X\Phi^{-1}Y) \\ &\quad + \frac{A + (n-2)B}{4(A + nB)}\text{Tr}(\Phi^{-1}X)\text{Tr}(\Phi^{-1}Y), \end{aligned} \quad (3.9.55a)$$

$$R = -\frac{(n-1)[nA^2 + 2(n^2 + n + 1)AB + (n+2)(n^2 - 2)B^2]}{8A(A + nB)^2} \quad (3.9.55b)$$

が得られる。 □

**【公式 3.73】**  $\text{RH}_p(n)$  の計量

$$ds^2 = A\text{Tr}(\Phi^{-1}d\Phi\Phi^{-1}d\Phi) + B\text{Tr}(\Phi^{-1}d\Phi)\text{Tr}(\Phi^{-1}d\Phi) \quad (3.9.56)$$

に対する正規直交基底を  $e_I$  ( $I = (AB)$ ,  $A \leq B$ ) とし,

$$X_I := \Phi^{-1}e_I \quad (3.9.57)$$

とおくとき, 任意の行列  $A, B \in M(n)$  に対して次の公式が成り立つ ( $e_I \in \text{RS}(n)$  と見なしている):

$$e_I e^I = \frac{A + (n-2)B}{2A(A+nB)} \Phi^2 + \frac{1}{2A} \text{Tr}(\Phi)\Phi, \quad (3.9.58a)$$

$$e_I P e^I = \frac{1}{2A} [\Phi {}^T P \Phi + \Phi \text{Tr}(\Phi P)] - \frac{B}{A(A+nB)} \Phi P \Phi, \quad (3.9.58b)$$

$$X_I P X^I = \frac{1}{2A} [\Phi^{-1} {}^T P \Phi + \text{Tr}(\Phi P \Phi^{-1})] - \frac{B}{A(A+nB)} \Phi P \Phi, \quad (3.9.58c)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(e_I P) \text{Tr}(e^I Q) &= \frac{1}{2A} (\text{Tr}(P \Phi {}^T Q \Phi) + \text{Tr}(P \Phi Q \Phi)) \\ &\quad - \frac{B}{A(A+nB)} \text{Tr}(\Phi P) \text{Tr}(\Phi Q), \end{aligned} \quad (3.9.58d)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(X_I P) \text{Tr}(X^I Q) &= \frac{1}{2A} (\text{Tr}(P \Phi^{-1} {}^T Q \Phi) + \text{Tr}(P Q)) \\ &\quad - \frac{B}{A(A+nB)} \text{Tr}(P) \text{Tr}(Q), \end{aligned} \quad (3.9.58e)$$

$$\text{Tr}(X_I X^I P) = \frac{x}{2A} \text{Tr}(P), \quad (3.9.58f)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(X_I P X^I Q) &= \frac{1}{2A} [\text{Tr}(\Phi^{-1} {}^T P \Phi Q) + \text{Tr}(P) \text{Tr}(Q)] \\ &\quad - \frac{B}{A(A+nB)} \text{Tr}(P Q). \end{aligned} \quad (3.9.58g)$$

ここで,

$$x := \frac{(n+1)A + (n-1)(n+2)B}{A+nB}. \quad (3.9.59)$$

ただし,  $I$  については和を取るものとする. 特に,

$$\mathrm{Tr}(X_I X^I) = n \frac{x}{2A}, \quad (3.9.60a)$$

$$\mathrm{Tr}(X_I) \mathrm{Tr}(X^I) = \frac{n}{A + nB}, \quad (3.9.60b)$$

$$\mathrm{Tr}(X_I X^I X_J X^J) = n \left( \frac{x}{2A} \right)^2, \quad (3.9.60c)$$

$$\mathrm{Tr}(X_I X_J X^I X^J) = \frac{n [x^2 - (n-1)(n+2)]}{4A^2}, \quad (3.9.60d)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(X_I X_J) \mathrm{Tr}(X^I X^J) &= \frac{nx}{2A^2} - \frac{nB}{A(A+nB)^2} \\ &= \frac{n [nx^2 - (n-1)(n+2)x + (n+2)(n^2-1)]}{4A^2} \end{aligned} \quad (3.9.60e)$$

$$\mathrm{Tr}(X_I X^I X_J X^K X^K X^J) = n \left( \frac{x}{2A} \right)^3, \quad (3.9.60f)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(X_I X_J X^K X^I X^J X^K) &= \frac{1}{8A^3} [x^3 - 3(n-1)(n+2)x \\ &\quad + 2(n^2-1)(n+2)], \end{aligned} \quad (3.9.60g)$$

$$\mathrm{Tr}(X_I X^I X_J X^K X^J X^K) = \frac{nx [x^2 - (n-1)(n+2)]}{8A^3}, \quad (3.9.60h)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(X_I X_J X^I X^K X_J X^K) &= \frac{n}{8A^3} [x^2 + (n+1)x^2 \\ &\quad - 3(n-1)(n+2)x + (n+2)(n-1)^2]. \end{aligned} \quad (3.9.60i)$$

□

### 3.10 定曲率空間

#### 3.10.1 2次超曲面による実現

【公式 3.74】  $E^{n+1-k,k}$  の 2 次曲面

$$\Sigma: X \cdot X \equiv \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = \pm \ell^2 \quad (3.10.1)$$

の内部座標を  $x^A$ , 誘導計量を

$$g_{AB} = \partial_A X \cdot \partial_B X \quad (3.10.2)$$

とすると, 外部曲率および Riemann 曲率は

$$K_{AB} = \pm \frac{1}{\ell} g_{AB}, \quad (3.10.3)$$

$$R_{ABCD} = \pm \frac{1}{\ell^2} (g_{AC} g_{BD} - g_{AD} g_{BC}) \quad (3.10.4)$$

で与えられる. \_\_\_\_\_ □

**Proof.**  $\Sigma$  の単位法ベクトルは

$$n^\mu = \frac{1}{\ell} X^\mu; \quad n \cdot n = \pm 1.$$

$\Sigma$  の接ベクトル場  $V, W$  に対して, Gauss の公式

$$\partial_V W = D_V W - K(V, W)n$$

より,

$$K(V, W) = \mp \eta(n, \partial_V W) = \pm \eta(\partial_V n, W).$$

ここで,

$$\partial_V n = \frac{1}{\ell} V.$$

よって,

$$K(V, W) = \pm \frac{1}{\ell} g(V, W).$$

さらに, Gauss 方程式より

$$R_{ABCD} = \pm (K_{AC} K_{BD} - K_{AD} K_{BC}) = \pm \frac{1}{\ell^2} (g_{AC} g_{BD} - g_{AD} g_{BC}).$$

Q.E.D.



【命題 3.75 (同次座標の性質)】 (3.10.1) で与えられる 2 次曲面  $\Sigma$  に対して,  $X^\mu$  を  $\Sigma$  上の関数と見なすと,

$$D_A D_B X^\mu = \mp \frac{1}{\ell^2} g_{AB} X^\mu, \quad (3.10.5)$$

$$\Delta D_A X^\mu = \mp \frac{1}{\ell^2} D_A X^\mu. \quad (3.10.6)$$

□

**Proof.**  $g_{AB} = D_A X \cdot D_B X$  より

$$\begin{aligned} (D_A D_B X) \cdot D_C X &= D_A g_{BC} - D_B X \cdot D_C D_A X = -\frac{1}{2} D_C (D_A X \cdot D_B X) \\ &= -\frac{1}{2} D_C g_{AB} = 0. \end{aligned}$$

また,  $X \cdot D_A X = 0$  より

$$(D_A D_B X) \cdot X = -D_B X \cdot D_A X = -g_{AB}.$$

よって,

$$\eta^{\mu\nu} = \pm \frac{1}{\ell^2} X^\mu X^\nu + g^{AB} D_A X^\mu D_B X^\nu$$

より,

$$\begin{aligned} D_A D_B X^\mu &= D_A D_B X^\nu \left( \pm \frac{1}{\ell^2} X_\nu X^\mu + g^{CD} D_C X_\nu D_D X^\mu \right) \\ &= \pm \frac{1}{\ell^2} (D_A D_B X) \cdot X X^\mu = \mp \frac{1}{\ell^2} g_{AB} X^\mu. \end{aligned}$$

Q.E.D.

### 3.10.2 共形変換

【公式 3.76】  $E^{n,1}(E^{n-1,2})$  の定曲率超曲面  $M$  を

$$X \cdot X := -(X^0)^2 + (X^1)^2 + \cdots + (X^{n-1})^2 \pm (X^n)^2 = \pm \ell^2 \quad (3.10.7)$$

とする. 点  $Q(0, \dots, 0, \ell)$  における接超平面  $\Pi$  上の点は  $X = (x, \ell) (x \in \mathbb{R}^n)$  と表される.  $M$  上の点  $P(0, \dots, -\ell)$  を中心とする  $\Pi$  への射影は

$$X^\mu = \frac{\pm 4\ell^2}{x \cdot x \pm 4\ell^2} x^\mu \quad (\mu = 0, \dots, n-1), \quad X^n = -\ell \frac{x \cdot x \mp 4\ell^2}{x \cdot x \pm 4\ell^2} \quad (3.10.8)$$

$$x^\mu = -\frac{2\ell}{\ell + X^n} X^\mu \quad (\mu = 0, \dots, n-1) \quad (3.10.9)$$

で与えられる。この射影により  $M$  の計量は

$$ds^2 = dX \cdot dX = \frac{16\ell^2}{(x \cdot x \pm 4\ell^2)^2} dx \cdot dx \quad (3.10.10)$$

と表される。 \_\_\_\_\_ □

【公式 3.77 (2004.8.10)】  $\eta_{\mu\nu}$  を  $E^{p,q}$  ( $p+q=n$ ) の標準平坦計量として、 $E^{p+1,q+1}$  の原点を中心とする錘

$$C : Y \cdot Y := \eta_{\mu\nu} Y^\mu Y^\nu + \epsilon ((Y^n)^2 - (Y^{n+1})^2) = 0 \quad (\epsilon = \pm 1) \quad (3.10.11)$$

を考える。

1. この錘  $C$  の  $Y^{n+1} \neq 0$  の部分から  $\mathbb{R}^{n+1}$  への写像

$$f : Y^A \mapsto X^a = \frac{Y^a}{Y^{n+1}}, \quad a = 0, \dots, n \quad (3.10.12)$$

を考えると、 $\mathbb{R}^{n+1}$  の内積を  $X \cdot X = X_\mu X^\mu + \epsilon (X^n)^2$  とおくと、

$$X \cdot X = \epsilon, \quad (3.10.13a)$$

$$dX \cdot dX = \frac{dY \cdot dY}{(Y^{n+1})^2} \quad (3.10.13b)$$

が成り立つ。これより、特に、 $q=1$  の時、この写像により  $E^{n,2}$  の等長変換群  $SO(n,2)$  は  $dS^n(\epsilon=1)$  および  $AdS^n(\epsilon=-1)$  の共形変換群へ写される。また、一般に  $E^{p,q}$  の無限小等長変換

$$\delta Y^a = \Omega^a_b Y^b + A^a Y^{n+1}, \quad (3.10.14a)$$

$$\delta Y^{n+1} = \epsilon A_a Y^a \quad (3.10.14b)$$

に対応する 2 次曲面  $f(C)$  の無限小共形変換は

$$\delta X^a = \Omega^a_b X^b + A^a - \epsilon (A \cdot X) X^a \quad (3.10.15)$$

で与えられる。

2.  $C$  の  $Y^n + Y^{n+1} \neq 0$  の部分から  $E^{p,q}$  への写像

$$g : Y^A \mapsto x^\mu = \frac{2Y^\mu}{Y^n + Y^{n+1}}, \quad \mu = 0, \dots, n-1 \quad (3.10.16)$$

に対して,

$$dx \cdot dx = \frac{4dY \cdot dY}{(Y^n + Y^{n+1})^2} \quad (3.10.17)$$

が成り立つ. これより, 写像  $g$  は  $E^{p+1, q+1}$  の等長変換群  $\text{SO}(p+1, q+1)$  を  $E^{p, q}$  の共形変換群に写す.  $E^{p+1, q+1}$  の無限小等長変換

$$\delta Y^\mu = \omega^\mu{}_\nu Y^\nu + \frac{a^\mu}{2}(Y^n + Y^{n+1}) + \epsilon b^\mu(Y^n - Y^{n+1}) \quad (3.10.18a)$$

$$\delta Y^n = -\left(\frac{\epsilon}{2}a_\mu + b_\mu\right)Y^\mu + cY^{n+1}, \quad (3.10.18b)$$

$$\delta Y^{n+1} = \left(\frac{\epsilon}{2}a_\mu - b_\mu\right)Y^\mu + cY^n \quad (3.10.18c)$$

に対応する無限小共形変換は

$$\delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu + a_\nu + b \cdot x x^\mu - \frac{1}{2}(x \cdot x)b^\mu + cx^\mu \quad (3.10.19)$$

で与えられる.

□

### 3.10.3 様々な座標系

#### 3.10.3.1 球面

$S^p \times S^q$  型座標  $\mathbb{E}^{p+q+2} = \mathbb{E}^{p+1} \times \mathbb{E}^{q+1} \ni (\mathbf{x}_{p+1}, \mathbf{y}_{q+1})$  において, 単位球面

$$\mathbf{x}_{p+1}^2 + \mathbf{y}_{q+1}^2 = 1 \quad (3.10.20)$$

上の点は

$$\mathbf{x}_{p+1} = \sin \theta \Omega_p, \quad \Omega_p \in S^p(1) \subset \mathbb{E}^{p+1}, \quad (3.10.21a)$$

$$\mathbf{y}_{q+1} = \cos \theta \Omega_q, \quad \Omega_q \in S^q(1) \subset \mathbb{E}^{q+1} \quad (3.10.21b)$$

と表される. このとき,

$$d\Omega_{p+q+1} = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_p^2 + \cos^2 \theta d\Omega_q^2. \quad (3.10.22)$$

### 3.10.3.2 Euclide 空間

ブラックリング型座標  $L$  を任意の正定数,  $p, q$  を 0 以上の整数として,

$$ds^2 = \frac{L^2}{(x-y)^2} \left[ \frac{dy^2}{y^2-1} + (y^2-1)d\Omega_p^2 + \frac{dx^2}{1-x^2} + (1-x^2)d\Omega_q^2 \right] \quad (3.10.23)$$

いま,  $r, \theta$  を

$$r \sin \theta = L \frac{\sqrt{y^2-1}}{x-y}, \quad r \cos \theta = L \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-y}, \quad (3.10.24)$$

により導入すると,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_p^2 + \cos^2 \theta d\Omega_q^2). \quad (3.10.25)$$

### 3.10.3.3 双曲空間

以下, 断面曲率 (-1) の  $n$  次元双曲空間  $H^n$  を考える.

**Gauss 型座標** 基準点  $O$  からの距離を  $\chi$  として,  $O$  に関する Gauss 正規座標系で

$$ds^2 = d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega_{n-1}^2 \quad (3.10.26)$$

**Poincare 型座標**  $H^n$  を共形変換で  $E^n$  の単位球

$$R^2 = \mathbf{X}^2 \leq 1 \quad (3.10.27)$$

に写すと,

$$ds^2 = \frac{4}{(1-R^2)^2} d\mathbf{X}^2 = \frac{4}{(1-R^2)^2} (dR^2 + R^2 d\Omega_{n-1}^2). \quad (3.10.28)$$

極座標表示のもとで, Gauss 型座標系との関係は

$$e^\chi = \frac{1+R}{1-R}. \quad (3.10.29)$$

上半面座標 Poincare 型座標系において,

$$X_n = \frac{\mathbf{x}^2 + y^2 - 1}{\mathbf{x}^2 + (1 + y)^2}, \quad (X_1, \dots, X_{n-1}) = \frac{2\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2 + (1 + y)^2} \quad (3.10.30)$$

により, 座標系  $(\mathbf{x}, y)$  ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ ) を導入すると, 単位球は  $\mathbb{R}^n$  の上半面  $y > 0$  に共形的に写される:

$$ds^2 = \frac{dy^2 + d\mathbf{x}^2}{y^2}, \quad (3.10.31)$$

### 3.10.3.4 de Sitter 時空

$dS^n$ :

$$-(y^0)^2 + (y^1)^2 + \dots + (y^n)^2 = \ell^2. \quad (3.10.32)$$

**Killing ベクトル:**  $dS^n$  を  $E^{n,1}$  の 2 次超曲面と見なすとき,  $\text{Isom}(dS^n)$  は  $O(n, 1)$  より誘導される. よって, Killing ベクトルは反対称定数テンソル  $A_{MN}$  を用いて

$$\xi^M = A^M_N y^N \quad (3.10.33)$$

と表され, そのノルムは

$$\xi \cdot \xi = A_{NL} A^N_M y^L y^M =: B_{LM} y^L y^M \quad (3.10.34)$$

で与えられる.

**【命題 3.78 (Killing ホライズンの存在)】** de Sitter 時空には至る所時間的な Killing ベクトルは存在しない. □

**Static chart:** 座標系  $(t, r, \Omega_{n-2})$  ( $|\Omega_{n-2}| = 1$ ) を

$$\begin{aligned} y^0 &= \sqrt{\ell^2 - r^2} \sinh(t/\ell), & y^n &= \sqrt{\ell^2 - r^2} \cosh(t/\ell), \\ y^j &= r \Omega_{n-2}^j \quad (j = 1, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (3.10.35)$$

により導入すると,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r^2}{\ell^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\Omega_{n-2})^2. \quad (3.10.36)$$

ここで,  $r = a$  は Killing ベクトル  $\xi = \partial_t$  が光的となる ( $\xi \cdot \xi = 0$ ) 面で, Killing ホライズンと呼ばれる.

**Complete chart:** 座標系  $(\tau, \Omega_{n-1}) (|\Omega_{n-1}| = 1)$  を

$$y^0 = \ell \sinh \tau, \quad y^j = \ell \cosh \tau \Omega_{n-1}^j \quad (j = 1, \dots, n) \quad (3.10.37)$$

により導入すると,

$$ds^2 = \ell^2 [-d\tau^2 + \cosh^2 \tau (d\Omega_{n-1})^2]. \quad (3.10.38)$$

**Flat chart:** 座標系  $(\tau_1, \mathbf{x}_{n-1}) (\mathbf{x}_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1})$  を

$$y^0 + y^n = \ell e^{\tau_1}, \quad y^j = \ell e^{\tau_1} x_{n-1}^j \quad (j = 1, \dots, n-1) \quad (3.10.39)$$

により導入すると,

$$ds^2 = \ell^2 [-d\tau_1^2 + e^{2\tau_1} (d\mathbf{x}_{n-1})^2]. \quad (3.10.40)$$

**Open chart:** 座標系  $(\tau_2, z^0, \dots, z^{n-1})$  を

$$\begin{aligned} y^n &= \ell \cosh \tau_2, \quad y^j = \ell \sinh \tau_2 z^j \quad (j = 0, \dots, n-1) : \\ -(z^0)^2 + (z^1)^2 + \dots + (z^{n-1})^2 &= -1. \end{aligned} \quad (3.10.41)$$

により導入すると,

$$ds^2 = \ell^2 [-d\tau_2^2 + \sinh^2 \tau_2 dH_{n-1}^2]. \quad (3.10.42)$$

### 3.10.3.5 Anti de Sitter 時空

$AdS^n$ :

$$-(y^0)^2 - (y^n)^2 + (y^1)^2 + \dots + (y^{n-1})^2 = -\ell^2. \quad (3.10.43)$$

**Global static chart:** 座標系  $(t, r, \Omega_{n-2}) (|\Omega_{n-2}| = 1)$  を

$$\begin{aligned} y^0 &= \sqrt{r^2 + \ell^2} \sin(t/\ell), \quad y^n = \sqrt{r^2 + \ell^2} \cos(t/\ell), \\ y^j &= r \Omega_{n-2}^j \quad (j = 1, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (3.10.44)$$

により導入すると,

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\Omega_{n-2})^2. \quad (3.10.45)$$

## 【命題 3.79】

反 de Sitter 時空は大域的な双曲型でない。

□

**Open chart:** 座標系  $(\tau, z^1, \dots, z^n)$  を

$$\begin{aligned} y^0 &= \ell \sin \tau, & y^j &= \ell \cos \tau z^j \quad (j = 1, \dots, n); \\ (z^1)^2 + \dots + (z^{n-1})^2 - (z^n)^2 &= -1 \end{aligned} \quad (3.10.46)$$

により導入すると,

$$ds^2 = \ell^2(-d\tau^2 + \cos^2 \tau dH_{n-1}^2). \quad (3.10.47)$$

**Quasi-flat chart:** 座標系  $(y, x^0, \dots, x^{n-2})$  を

$$y^n - y^{n-1} = \ell e^y, \quad y^\mu = \ell e^y x^\mu \quad (\mu = 0, \dots, n-2) \quad (3.10.48)$$

により導入すると,

$$ds^2 = \ell^2 [dy^2 + e^{2y} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu]. \quad (3.10.49)$$

ここで,  $\eta_{\mu\nu}$  は Minkowski 計量.

**de Sitter chart:** 座標系  $(y, w^0, \dots, w^{n-1})$  を

$$\begin{aligned} y^n &= \ell \cosh y, & y^j &= \ell w^j \sinh y; \\ -(w^0)^2 + (w^1)^2 + \dots + (w^{n-1})^2 &= 1 \end{aligned} \quad (3.10.50)$$

により導入すると,

$$ds^2 = \ell^2 [dy^2 + \sinh^2 y d\sigma_{dS^{n-1}}^2]. \quad (3.10.51)$$

**Anti de Sitter chart:** 座標系  $(y, z^0, \dots, z^{n-1})$  を

$$\begin{aligned} y^{n-1} &= \ell \sinh y, & y^n &= \ell \cosh y z^{n-1}, & y^j &= \ell \cosh y z^j \quad (j = 0, \dots, n-2); \\ -(z^0)^2 - (z^{n-1})^2 + (z^1)^2 + \dots + (z^{n-2})^2 &= -1, \end{aligned} \quad (3.10.52)$$

により導入すると,

$$ds^2 = \ell^2 [dy^2 + \cosh^2 y d\sigma_{AdS^{n-1}}^2]. \quad (3.10.53)$$

**Static hyperbolic chart:** 座標系  $(T, R, Y^0, \dots, Y^{n-2})$  を

$$\begin{aligned} y^0 &= \sqrt{R^2 - \ell^2} \sinh\left(\frac{T}{\ell}\right), & y^{n-1} &= \sqrt{R^2 - \ell^2} \cosh\left(\frac{T}{\ell}\right), \\ y^n &= RY^0, & y^i &= RY^i \quad (i = 1, \dots, n-2); \\ & & & -(Y^0)^2 + (Y^1)^2 + \dots + (Y^{n-2})^2 = -1 \end{aligned} \quad (3.10.54)$$

により導入すると,

$$ds^2 = -\left(\frac{R^2}{\ell^2} - 1\right) dT^2 + \frac{dR^2}{\frac{R^2}{\ell^2} - 1} + R^2 dY^2 \quad (3.10.55)$$

ここで,  $dY^2$  は曲率  $-1$  の  $n-2$  次元定曲率空間の計量.

### 3.10.3.6 (a)dS<sup>3</sup>

標準的な (a)dS<sup>3</sup> 計量の表式

$$ds^2 = -(1 - \lambda r^2) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \lambda r^2} + r^2 d\phi^2 \quad (3.10.56)$$

において,  $\lambda \neq 0$  のとき,  $r, \phi$  の代わりに,  $x, y$  座標を

$$r^2 = \frac{c^2 + xy}{c^2 \lambda}, \quad (3.10.57a)$$

$$e^{-2i\phi} = \frac{(xy - c^2)a + 2c^2 \lambda(x + y) + 2ic\sqrt{g(x)g(y)}}{(xy + c^2)(a^2 + 4c^2 \lambda^2)^{1/2}} \quad (3.10.57b)$$

$$g(x) = c^2 \lambda + ax - \lambda x^2 \quad (3.10.57c)$$

とおくと,

$$ds^2 = xy dt^2 + \frac{x-y}{4} \left( \frac{dx^2}{xg(x)} - \frac{dy^2}{yg(y)} \right). \quad (3.10.58)$$

## 3.10.4 場の振る舞い

### 3.10.4.1 反 de Sitter 時空

スカラ場 静的チャート

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + f(r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_n^2, \quad (3.10.59)$$

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{\ell^2} \quad (3.10.60)$$



のもとで、場の方程式は

$$\square\Phi = -\frac{1}{f}\partial_t^2\Phi + \frac{1}{r^n}\partial_r(r^n f\partial_r\Phi) + \frac{1}{r^2}\Delta_n\Phi = 0. \quad (3.10.61)$$

$\Phi$  が

$$\Phi \propto e^{-i\omega t} Y_l(\Omega) \quad (3.10.62)$$

のとき、場の方程式は

$$\frac{1}{r^n}D(r^n D\Phi) + \left\{ \omega^2 - \frac{l(l+n-1)}{r^2}f \right\} \Phi = 0. \quad (3.10.63)$$

以下、 $l=1$ の単位系を用いる。

基本解の漸近挙動は、

$$\begin{aligned} r \rightarrow \infty: & 1, \frac{1}{r^{n+1}} \\ r \rightarrow 0: & r^l, \frac{1}{r^{l+n-1}}. \end{aligned}$$

基本解に対する厳密な表示は

$$\begin{aligned} X_1 &= r^l(1+r^2)^{-\omega/2} F\left(\frac{l}{2} - \frac{\omega}{2}, \frac{l+n+1}{2} - \frac{\omega}{2}, l + \frac{n+1}{2}; -r^2\right) \\ &= r^l(1+r^2)^{-l/2} F\left(\frac{l}{2} - \frac{\omega}{2}, \frac{l}{2} + \frac{\omega}{2}, l + \frac{n+1}{2}; \frac{r^2}{1+r^2}\right), \end{aligned} \quad (3.10.64a)$$

$$\begin{aligned} X_2 &= r^{-l-n+1}(1+r^2)^{-\omega/2} F\left(1 - \frac{l}{2} - \frac{\omega}{2}, -\frac{l+n-1}{2} - \frac{\omega}{2}, -l - \frac{n-3}{2}; -r^2\right) \\ &= r^{-l-n+1}(1+r^2)^{l/2-1} F\left(1 - \frac{l}{2} - \frac{\omega}{2}, 1 - \frac{l}{2} + \frac{\omega}{2}, -l - \frac{n-3}{2}; \frac{r^2}{1+r^2}\right) \end{aligned} \quad (3.10.64b)$$

または、

$$Y_1 = \left(\frac{r^2}{1+r^2}\right)^{\omega/2} F\left(\frac{l}{2} - \frac{\omega}{2}, -\frac{l+n+1}{2} - \frac{\omega}{2}, -\frac{n-1}{2}; -\frac{1}{r^2}\right), \quad (3.10.65a)$$

$$Y_2 = \frac{1}{r^{n+1}} \left(\frac{r^2}{1+r^2}\right)^{\omega/2} F\left(1 - \frac{l}{2} - \frac{\omega}{2}, \frac{l+n+1}{2} - \frac{\omega}{2}, \frac{n+3}{2}; -\frac{1}{r^2}\right). \quad (3.10.65b)$$

### 3.11 Einstein 空間

$$R_{ij} = (n - 1)Kg_{ij}. \quad (3.11.1)$$

#### 3.11.1 モジュライ

【命題 3.80 (無限小モジュライ変形 [2004.9.4])】  $n$  次元 Einstein 空間の無限小モジュライ変形  $h_{ij} = \delta g_{ij}$  は, ゲージ条件

$$h_i^i = 0, \quad D^j h_{ij} = 0 \quad (3.11.2)$$

のもとで, 方程式

$$\Delta h_{ij} + 2R_{ipjq}h^{pq} = 0 \quad (3.11.3)$$

に従う. 特に, 等曲率空間では

$$\Delta h_{ij} = 2Kh_{ij}. \quad (3.11.4)$$

---

□

## 3.12 複素多様体

### 3.12.1 Kähler 多様体

#### 3.12.1.1 代数多様体

【公式 3.81 (Conifold)]  $\mathbb{C}^4$  内の 2 次超曲面

$$C_2^3 : z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0 \quad (3.12.1)$$

において, 計量

$$ds^2 = |dz_1|^2 + |dz_2|^2 + |dz_3|^2 + |dz_4|^2$$

を考える. この計量は, 座標系

$$z_1 + iz_2 = \sqrt{2}r \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} e^{i(\psi - \phi_1 - \phi_2)/2}, \quad (3.12.2a)$$

$$z_1 - iz_2 = \sqrt{2}r \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} e^{i(\psi + \phi_1 + \phi_2)/2}, \quad (3.12.2b)$$

$$z_3 + iz_4 = \sqrt{2}r \cos \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} e^{i(\psi - \phi_1 + \phi_2)/2}, \quad (3.12.2c)$$

$$z_3 - iz_4 = -\sqrt{2}r \sin \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} e^{i(\psi + \phi_1 - \phi_2)/2} \quad (3.12.2d)$$

において,

$$ds^2 = dr^2 + \frac{r^2}{4} [(d\psi - d\phi_1 \cos \theta_1 - d\phi_2 \cos \theta_2)^2 \quad (3.12.3)$$

$$+ d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\phi_1^2 + d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_2 d\phi_2^2] \quad (3.12.4)$$

□

### 3.13 ブレイン解

#### 3.13.1 ブラックストリング

【公式 3.82 (真空ブラックストリング解)]  $D = n + 1$  次元計量

$$d\tilde{s}^2 = dy^2 + \rho(y)^2 ds^2(X_n); \quad ds^2(X_n) = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

が真空 Einstein 方程式

$$\tilde{G}_{MN} + \tilde{\Lambda} \tilde{g}_{MN} = 0$$

の解となる条件は

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{yy} &= -\frac{R}{2\rho^2} + \frac{n(n-1)(\rho')^2}{2\rho^2} = -\tilde{\Lambda}, \\ \tilde{G}_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu} + (n-1) \left[ \rho\rho'' + \frac{n-2}{2}(\rho')^2 \right] g_{\mu\nu} = -\tilde{\Lambda}\rho^2 g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

これらは

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= -\Lambda g_{\mu\nu}, \\ (\rho')^2 &= -\frac{2\tilde{\Lambda}}{n(n-1)}\rho^2 + \frac{2\Lambda}{(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

と同値. 許される解は,

$$\frac{2|\tilde{\Lambda}|}{n(n-1)} = \frac{1}{L^2}$$

として次のようになる:

1.  $\tilde{\Lambda} = 0$ . このとき,  $\Lambda \geq 0$ .

$$\Lambda = 0 : ds^2 = dy^2 + ds^2(X), \quad R_{\mu\nu}(X) = 0.$$

$$\Lambda > 0 : ds^2 = dy^2 + y^2 ds^2(X), \quad R_{\mu\nu}(X) = -(n-1)g_{\mu\nu}.$$

2.  $\tilde{\Lambda} > 0$ . このとき  $\Lambda > 0$  のみ許される.

$$\Lambda > 0 : ds^2 = dy^2 + L^2 \sin^2(Ly) ds^2(X), \quad R_{\mu\nu}(X) = -(n-1)g_{\mu\nu}.$$

3.  $\tilde{\Lambda} < 0$ . このとき  $\Lambda$  は任意.

$$\Lambda = 0 : ds^2 = dy^2 + e^{2y/L} ds^2(X), \quad R_{\mu\nu}(X) = 0.$$

$$\Lambda > 0 : ds^2 = dy^2 + l^2 \sinh^2(Ly) ds^2(X), \quad R_{\mu\nu}(X) = -(n-1)g_{\mu\nu}.$$

$$\Lambda < 0 : ds^2 = dy^2 + l^2 \cosh^2(Ly) ds^2(X), \quad R_{\mu\nu}(X) = (n-1)g_{\mu\nu}.$$

□

### 3.14 回転ブラックホール解

#### 3.14.1 GLPP 解

Ref:

- Gibbons GW, Lü H, Page DN, Pope CN(2004)

##### 3.14.1.1 GLPP 解の Kerr-Schild 形:

$$ds^2 = d\bar{s}^2 + \frac{2M}{U} k_* \otimes k_*; \quad (3.14.1)$$

$$d\bar{s}^2 = -(1 - \lambda r^2)W dt^2 + \frac{F dr^2}{1 - \lambda r^2} + \sum_{i=1}^{N+\epsilon} \frac{r^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} d\mu_i^2 + \sum_{i=1}^N \frac{r^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} \mu_i^2 d\phi_i^2 \\ + \frac{\lambda}{(1 - \lambda r^2)W} \left( \sum_{i=1}^{N+\epsilon} \frac{r^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} \mu_i d\mu_i \right)^2, \quad (3.14.2)$$

$$k_* = W dt + \frac{F dr}{1 - \lambda r^2} - \sum_{i=1}^N \frac{a_i \mu_i^2}{1 + \lambda a_i^2} d\phi_i, \quad (3.14.3)$$

$$U = r^{\epsilon-2} F \prod_{j=1}^N (r^2 + a_j^2), \quad (3.14.4)$$

$$W = \sum_{i=1}^{N+\epsilon} \frac{\mu_i^2}{1 + \lambda a_i^2}, \quad (3.14.5)$$

$$F = r^2 \sum_{i=1}^{N+\epsilon} \frac{\mu_i^2}{r^2 + a_i^2}. \quad (3.14.6)$$

ここで,

$$D = 2N + 1 + \epsilon; \quad \epsilon = 0, 1, \quad (3.14.7)$$

で,  $\epsilon = 1$  のとき,  $a_{N+1} = 0$ . また,  $\mu_i$  は

$$\sum_{i=1}^{N+\epsilon} \mu_i^2 = 1 \quad (3.14.8)$$

を満たす。(注:  $F$  の定義は, Gibbons-Lu-Page-Pope と少し異なる.)

### 3.14.1.2 Boyer-Lindquist 形

Kerr-Schild 形の座標系に対して変換

$$dt' = dt - \frac{2Mr^{2-\epsilon}}{(1-\lambda r^2)f(r)\Pi'_i(r^2+a_i^2)}, \quad (3.14.9a)$$

$$d\phi'_i = d\phi_i - \frac{2Ma_i r^{2-\epsilon}}{(r^2+a_i^2)f(r)\Pi'_j(r^2+a_j^2)} \quad (3.14.9b)$$

を施す．ここで、 $\Pi'_i = \Pi'_{i=1}^N$  で、 $f(r)$  は次式で与えられる  $r$  のみの関数．

$$f(r) := 1 - \lambda r^2 - \frac{2Mr^{2-\epsilon}}{\Pi'_i(r^2+a_i^2)}. \quad (3.14.10)$$

変換後  $t' \rightarrow t, \phi' \rightarrow \phi$  と書き換えると、計量は次の形になる：

$$\begin{aligned} ds^2 = & -(1-\lambda r^2)W dt^2 + \sum_i' \frac{r^2+a_i^2}{1+\lambda a_i^2} \mu_i^2 d\phi_i^2 \\ & + \frac{2M}{U} \left( W dt - \sum_i \frac{a_i}{1+\lambda a_i^2} \mu_i^2 d\phi_i \right)^2 \\ & + \frac{F}{f(r)} dr^2 + \sum_i \frac{r^2+a_i^2}{1+\lambda a_i^2} d\mu_j^2, \\ & + \frac{\lambda}{(1-\lambda r^2)W} \left( \sum_i \frac{r^2+a_i^2}{1+\lambda a_i^2} \mu_i d\mu_i \right)^2. \end{aligned} \quad (3.14.11)$$

一様セクター  $(t, \phi_1, \dots, \phi_N)$  の計量を  $g_{pq} dy^p dy^q$  とおくと、

$$\bar{\Delta} = -\det(g_{pq}) = f(r)W\Pi'_i \frac{r^2+a_i^2}{1+\lambda_i a_i^2} \mu_i^2. \quad (3.14.12)$$

よって、ホライズンの位置は

$$f(r) = 0 \quad (3.14.13)$$

の解として決まる．また、体積要素は

$$\sqrt{-g} d^D x = dt dr \frac{F}{\mu_{N+\epsilon}} \left( \prod_{i=1}^N \frac{r^2+a_i^2}{1+\lambda a_i^2} \mu_i d\phi_i d\mu_i \right) \left( \frac{1}{rd\mu_{N+\epsilon}} \right)^{1-\epsilon} \quad (3.14.14)$$

次に、

$$k = \xi + c^i \eta_i \quad (3.14.15)$$

に対して,

$$k \cdot k = \sum'_i \frac{r^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} \mu_i^2 (c^i - \Omega^i)^2 + \frac{2M}{U} \left( \sum'_i \frac{a_i \mu_i^2}{1 + \lambda a_i^2} (c^i - \Omega^i) \right)^2 - \frac{f(r)W}{X} \quad (3.14.16)$$

ここで,

$$X = 1 + \frac{2M}{U} \sum'_i \frac{a_i^2 \mu_i^2}{(r^2 + a_i^2)(1 + \lambda a_i^2)} = \frac{f + \frac{2MW}{U}}{1 - \lambda r^2}, \quad (3.14.17)$$

$$\Omega^i = \frac{2MW}{UX} \frac{a_i}{r^2 + a_i^2}. \quad (3.14.18)$$

これより, ホライズンの null geodesic generator は

$$k = \xi + \Omega_h^i \eta_i, \quad (3.14.19)$$

$$\Omega_h^i = (1 - \lambda r_h^2) \frac{a_i}{r_h^2 + a_i^2}. \quad (3.14.20)$$

また, 計量は次のように書き換えられる:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\Delta \Sigma^2}{\Gamma} dt^2 + \frac{\Sigma^2}{\Delta} dr^2 \\ &+ \frac{\lambda}{(1 - \lambda r^2)W} \left( \sum \frac{r^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} \mu_i d\mu_i \right)^2 + \sum_i \frac{r^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} d\mu_j^2 \\ &+ \sum'_i \frac{r^2 + a_i^2}{1 + \lambda a_i^2} \mu_i^2 (d\phi_i - \Omega^i dt)^2 \\ &+ \frac{2M}{U} \left\{ \sum'_i \frac{a_i \mu_i^2}{1 + \lambda a_i^2} (d\phi_i - \Omega^i dt) \right\}^2. \end{aligned} \quad (3.14.21)$$

ここで,

$$\Delta := r^2 f(r), \quad \Sigma^2 := r^2 F, \quad (3.14.22a)$$

$$\Gamma := \frac{UX}{W} \frac{r^{6-\epsilon}}{\Pi'_i(r^2 + a_i^2)}. \quad (3.14.22b)$$

$\Gamma$  はホライズン状では定数となる:

$$\Gamma_0 := \Gamma|_{r=r_h} = \frac{2M}{1 - \lambda r_h^2} \frac{r_h^{6-\epsilon}}{\Pi'(r_h^2 + a_i^2)}. \quad (3.14.23)$$

したがって,

$$\tilde{\phi}_i = \phi - \Omega_h t, \quad (3.14.24a)$$

$$du_{\pm} = dt \pm \frac{\Gamma_0^{1/2}}{\Delta} dr \quad (3.14.24b)$$

とおくと, 座標系  $(u_{\pm}, \tilde{\phi}_i, r, \mu_i)$  は未来 (過去) のホライズンで正則な座標系を与える.

計量に現れる諸関数の  $r \rightarrow \infty$  での漸近挙動は

$$F \rightarrow 1 - \sum'_i \frac{\mu_i^2 a_i^2}{r^2} + \dots, \quad (3.14.25a)$$

$$U \rightarrow r^{2(N-1)+\epsilon} \left( 1 + \sum'_i \frac{(1 - \mu_i^2) a_i^2}{r^2} + \dots \right), \quad (3.14.25b)$$

$$X \rightarrow 1 + \frac{2M}{r^{2N+\epsilon}} \sum'_i \frac{a_i^2 \mu_i^2}{1 + \lambda a_i^2} + \dots, \quad (3.14.25c)$$

$$\Omega^i \rightarrow \frac{2M a_i W}{r^{2N+\epsilon}}. \quad (3.14.25d)$$

これより一般に, Killing ベクトル  $k$  のノルムの無限遠での漸近挙動は

$$\begin{aligned} k \cdot k &= r^2 \left( \sum'_i \frac{\mu_i^2 c_i^2}{1 + \lambda a_i^2} + \lambda W \right) \\ &+ \sum'_i \frac{\mu_i^2 a_i^2 c_i^2}{1 + \lambda a_i^2} - W + O\left(\frac{1}{r^{2(N-1)+\epsilon}}\right). \end{aligned} \quad (3.14.26)$$

これより, 時空次元  $D$  が奇数で  $\lambda = -1/\ell^2 < 0$  のときには,

$$c_i^2 = \frac{1}{\ell^2} \quad (3.14.27)$$

に対して (かつその時のみ)  $k^2$  は無限遠で有界となる. このとき, その漸近値は

$$k^2 \rightarrow -1 \quad (3.14.28)$$

となる. 一方, 時空次元  $D$  が偶数の時には  $k^2$  の漸近挙動における  $r^2$  の係数が

$$\lambda + \sum'_i \frac{(c_i^2 - \lambda^2 a_i^2) \mu_i^2}{1 + \lambda a_i^2} \quad (3.14.29)$$

となるので, この係数をゼロとすることはできない. しかし,

$$c_i^2 = \lambda^2 a_i^2 \quad (3.14.30)$$

と取れば,  $\mu_i$  に依存しなくなる. このとき,

$$k^2 \rightarrow \lambda r^2 + \lambda \sum'_i a_i^2 \mu_i^2 - 1 + O\left(\frac{1}{r^{2(N-1)+\epsilon}}\right). \quad (3.14.31)$$



### 3.14.2 単純 GLPP 解

#### 3.14.2.1 Kerr-Schild 形

一般 GLPP 解で,

$$a_1 = a, a_2 = \cdots = a_{[(D-1)/2]} = 0 \quad (3.14.32)$$

のとき,  $D = n + 4$  として,

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{(1 + \lambda a^2 \cos^2 \theta)(1 - \lambda r^2)}{1 + \lambda a^2} dt^2 + \frac{\rho^2 dr^2}{(1 - \lambda r^2)(r^2 + a^2)} \\ & + \frac{\rho^2 d\theta^2}{1 + \lambda a^2 \cos^2 \theta} + \frac{r^2 + a^2}{1 + \lambda a^2} \sin^2 \theta d\phi^2 + r^2 \cos^2 \theta d\Omega_n^2 \\ & + \frac{2M}{r^{n-1} \rho^2} \left( \frac{1 + \lambda a^2 \cos^2 \theta}{1 + \lambda a^2} dt + \frac{\rho^2 dr}{(1 - \lambda r^2)(r^2 + a^2)} - \frac{a \sin^2 \theta}{1 + \lambda a^2} d\phi \right)^2. \end{aligned} \quad (3.14.33)$$

ここで,

$$\rho^2 := r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (3.14.34)$$

この計量は,  $a, b = t, \phi, r, \theta$  として,

$$ds^2 = g_{ab}(y) dy^a dy^b + S(y)^2 d\Omega_n^2 \quad (3.14.35)$$

とまとめられる. ここで,

$$S(y) = r \cos(\theta). \quad (3.14.36)$$

また,

$$\det(g_{ab})^{1/2} = (1 + \lambda a^2)^{-1} \rho^2 \sin \theta. \quad (3.14.37)$$

具体的な計量成分は

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -(1 - \lambda r^2)\sigma + \frac{2M\sigma^2}{\rho^2 r^{n-1}} \\ &= -\frac{\sigma^2}{\rho^2} \left[ \Delta - \frac{a^2 \sin^2 \theta}{1 + \lambda a^2 \cos^2 \theta} (1 - \lambda r^2)^2 \right], \end{aligned} \quad (3.14.38a)$$

$$\begin{aligned} g_{t\phi} &= -\frac{2aM\sigma \sin^2 \theta}{\rho r^{n-1}(1 + \lambda a^2)} \\ &= -\frac{a(1 - \lambda r^2)(r^2 + a^2)\sigma \sin^2 \theta}{(1 + \lambda a^2)\rho^2} \left[ 1 - \frac{\Delta}{(1 - \lambda r^2)(r^2 + a^2)} \right], \end{aligned} \quad (3.14.38b)$$

$$\begin{aligned} g_{\phi\phi} &= \left( r^2 + a^2 + \frac{2a^2 M \sin^2 \theta}{\rho^2 r^{n-1}} \right) \frac{\sin^2 \theta}{1 + \lambda a^2} \\ &= \frac{(r^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta}{(1 + \lambda a^2)^2 \rho^2} \left[ 1 + \lambda a^2 \cos^2 \theta - \frac{\Delta a^2 \sin^2 \theta}{(r^2 + a^2)^2} \right], \end{aligned} \quad (3.14.38c)$$

$$\begin{aligned} g_{tr} &= \frac{2M\sigma}{r^{n-1}(1 - \lambda r^2)(r^2 + a^2)} \\ &= \sigma \left[ 1 - \frac{\Delta}{(1 - \lambda r^2)(r^2 + a^2)} \right], \end{aligned} \quad (3.14.38d)$$

$$g_{\phi r} = -\frac{a \sin^2 \theta}{1 + \lambda a^2 \cos^2 \theta} g_{tr}, \quad (3.14.38e)$$

$$\begin{aligned} g_{rr} &= \frac{\rho^2}{(r^2 + a^2)(1 - \lambda r^2)} \left[ 1 + \frac{2M}{r^{n-1}(r^2 + a^2)(1 - \lambda r^2)} \right] \\ &= \frac{\rho^2}{(1 - \lambda r^2)(r^2 + a^2)} \left[ 2 - \frac{\Delta}{(1 - \lambda r^2)(r^2 + a^2)} \right], \end{aligned} \quad (3.14.38f)$$

$$g_{\theta\theta} = \frac{\rho^2}{1 + \lambda a^2 \cos^2 \theta}. \quad (3.14.38g)$$

ここで,

$$\sigma := \frac{1 + \lambda a^2 \cos^2 \theta}{1 + \lambda a^2}, \quad (3.14.39a)$$

$$\Delta := (r^2 + a^2)(1 - \lambda r^2) - \frac{2M}{r^{n-1}}. \quad (3.14.39b)$$

また,  $g^{\mu\nu}$  は

$$\begin{aligned} g^{tt} &= -\frac{1}{(1-\lambda r^2)\sigma} - \frac{2M}{r^{n-1}\rho^2(1-\lambda r^2)^2} \\ &= -\frac{r^2(2+\lambda a^2) + a^2 + a^2(1+\lambda r^2 + 2\lambda a^2)\cos^2\theta}{(1-\lambda r^2)\rho^2(1+\lambda a^2\cos^2\theta)} + \frac{\Delta}{(1-\lambda r^2)^2\rho^2}, \end{aligned} \quad (3.14.40a)$$

$$\begin{aligned} g^{t\phi} &= -\frac{2aM}{r^{n-1}\rho^2(r^2+a^2)(1-\lambda r^2)} \\ &= -\frac{a}{\rho^2} \left[ 1 - \frac{\Delta}{(r^2+a^2)(1-\lambda r^2)} \right], \end{aligned} \quad (3.14.40b)$$

$$\begin{aligned} g^{\phi\phi} &= \frac{1+\lambda a^2}{(r^2+a^2)\sin^2\theta} - \frac{2a^2M}{r^{n-1}(r^2+a^2)^2\rho^2} \\ &= \frac{(1+2\lambda a^2)r^2 - a^2 + a^2(2+\lambda a^2 - \lambda r^2)\cos^2\theta}{(r^2+a^2)\rho^2\sin^2\theta} + \frac{a^2\Delta}{(r^2+a^2)^2\rho^2}, \end{aligned} \quad (3.14.40c)$$

$$g^{tr} = \frac{2M}{r^{n-1}\rho^2(1-\lambda r^2)} = \frac{r^2+a^2}{\rho^2} - \frac{\Delta}{\rho^2(1-\lambda r^2)}, \quad (3.14.40d)$$

$$g^{\phi r} = \frac{2aM}{r^{n-1}(r^2+a^2)\rho^2} = \frac{a}{\rho^2} \left( 1 - \lambda r^2 - \frac{\Delta}{r^2+a^2} \right), \quad (3.14.40e)$$

$$g^{rr} = \frac{(r^2+a^2)(1-\lambda r^2)}{\rho^2} - \frac{2M}{r^{n-1}\rho^2} = \frac{\Delta}{\rho^2}, \quad (3.14.40f)$$

$$g^{\theta\theta} = \frac{1+\lambda a^2\cos^2\theta}{\rho^2}. \quad (3.14.40g)$$

### 3.14.2.2 Boyer-Lindquist 形

Boyer-Lindquist 型座標を

$$dt' = dt - \frac{2M}{r^{n-1}\Delta} \frac{dr}{1-\lambda r^2}, \quad (3.14.41a)$$

$$d\phi' = d\phi - \frac{2M}{r^{n-1}\Delta} \frac{adr}{r^2+a^2} \quad (3.14.41b)$$

により導入し,  $dt' \rightarrow dt, d\phi' \rightarrow d\phi$  と置くと, 計量は

$$g_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta}, \quad (3.14.42a)$$

$$g_{\theta\theta} = \frac{\rho^2}{X}, \quad (3.14.42b)$$

$$g_{tt} = \frac{X}{C^2\rho^2} \left\{ \frac{2M}{r^{n-1}}X - C(1 - \lambda r^2)\rho^2 \right\}, \quad (3.14.42c)$$

$$g_{t\phi} = -\frac{2aMX}{C^2\rho^2r^{n-1}} \sin^2\theta, \quad (3.14.42d)$$

$$g_{\phi\phi} = \frac{\sin^2\theta}{C^2\rho^2} \left\{ C(r^2 + a^2)\rho^2 + \frac{2a^2M}{r^{n-1}} \sin^2\theta \right\}. \quad (3.14.42e)$$

ここで,

$$C = 1 + \lambda a^2, \quad X = 1 + \lambda a^2 \cos^2\theta. \quad (3.14.43)$$

すなわち,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{X}{C^2\rho^2} \left[ \frac{2M}{r^{n-1}}X - C(1 - \lambda r^2)\rho^2 \right] dt^2 - \frac{4aMX \sin^2\theta}{C^2\rho^2r^{n-1}} dt d\phi \\ &\quad + \frac{\sin^2\theta}{C^2\rho^2} \left[ C(r^2 + a^2)\rho^2 + \frac{2a^2M}{r^{n-1}} \sin^2\theta \right] d\phi^2 \\ &\quad + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \frac{\rho^2}{X} d\theta^2 + r^2 \cos^2\theta d\Omega_n^2. \end{aligned} \quad (3.14.44)$$

さらに,  $\phi$  座標を

$$\phi + \lambda at \rightarrow \phi \quad (3.14.45)$$

と変換すると, 計量は次のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\Delta}{\rho^2} \left( dt - \frac{a}{C} \sin^2\theta d\phi \right)^2 + \frac{X \sin^2\theta}{\rho^2} \left( a dt - \frac{r^2 + a^2}{C} d\phi \right)^2 \\ &\quad + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \frac{\rho^2}{X} d\theta^2 + r^2 \cos^2\theta d\Omega_n^2 \\ &= -\frac{\Delta - a^2X \sin^2\theta}{\rho^2} dt^2 - \frac{2a \sin^2\theta}{C\rho^2} \left\{ \lambda\rho^2(r^2 + a^2) + \frac{2M}{r^{n-1}} \right\} dt d\phi \\ &\quad + \frac{\sin^2\theta}{C^2\rho^2} \left[ C(r^2 + a^2)\rho^2 + \frac{2a^2M}{r^{n-1}} \sin^2\theta \right] d\phi^2 \\ &\quad + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \frac{\rho^2}{X} d\theta^2 + r^2 \cos^2\theta d\Omega_n^2. \end{aligned} \quad (3.14.46)$$

この最後の座標系において

$$\xi = \partial_t, \quad \eta = \partial_\phi \quad (3.14.47)$$

とおくと,  $r \rightarrow \infty$  ( $\Lambda < 0$  で)

$$g(\xi, \xi) \rightarrow \lambda(r^2 + a^2). \quad (3.14.48)$$

これに対して, 一つ前の座標系において  $g(\partial_t, \partial_t)$  の  $r \rightarrow \infty$  での極限は  $\theta$  に依存する. このような角度依存性がなくなるのは,  $\xi$  ないし  $\xi + 2\lambda a\eta$  のみ.

### 3.14.2.3 共通の性質

**Horizon** ホライズンは,

$$g(\xi, \xi)g(\eta, \eta) - g(\xi, \eta)^2 = -\frac{1}{C^2}\Delta X \sin^2 \theta \quad (3.14.49)$$

より,

$$\Delta = 0. \quad (3.14.50)$$

未来のホライズン近傍で正則な座標は

$$du_+ = dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad d\phi_+ = d\phi + \frac{aC}{\Delta} dr. \quad (3.14.51)$$

この座標を用いると, 計量は

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{\Delta}{\rho^2} \left( du_+ - \frac{a}{C} \sin^2 \theta d\phi_+ \right)^2 + 2dr \left( du_+ - \frac{a}{C} \sin^2 \theta d\phi_+ \right) \\ & + \frac{X \sin^2 \theta}{\rho^2} \left( adu_+ - \frac{r^2 + a^2}{C} d\phi_+ \right)^2 \\ & + \frac{\rho^2}{X} d\theta^2 + r^2 \cos^2 \theta d\Omega_n^2. \end{aligned} \quad (3.14.52)$$

これより, ホライズンの面積は

$$A_h = \Omega_{n+2} r_h^n \frac{r_h^2 + a^2}{C} \quad (3.14.53)$$

ここで,  $\Omega_{n+2}$  は  $n+2$  次元単位球面の面積.

角速度と表面重力 一般に,

$$k = \xi + A\eta \quad (3.14.54)$$

に対して,

$$g(k, k) = -\frac{(C - aA \sin^2 \theta)^2}{C^2 \rho^2} \Delta + \frac{X \sin^2 \theta}{C^2 \rho^2} \{aC - A(r^2 + a^2)\}^2. \quad (3.14.55)$$

これより, ブラックホールの角速度は

$$\Omega_h = \frac{aC}{r_h^2 + a^2}. \quad (3.14.56)$$

また,

$$\nabla_k k = -\frac{1}{2} \nabla g(k, k) \quad (3.14.57)$$

より,  $r \rightarrow r_h$  で

$$\nabla_k k \rightarrow \frac{\rho^2 \Delta'}{2(r_h^2 + a^2)^2} \nabla r. \quad (3.14.58)$$

一方,

$$du_+(k) = 1, \quad du_+(\nabla r) = \frac{r^2 + a^2}{\rho^2} \quad (3.14.59)$$

より,  $r \rightarrow r_h$  で

$$\nabla r \rightarrow \frac{r_h^2 + a^2}{\rho^2} k. \quad (3.14.60)$$

よって,

$$\nabla_k k \rightarrow \frac{\Delta'}{2(r_h^2 + a^2)} k. \quad (3.14.61)$$

すなわち, 表面重力は

$$\kappa = \frac{\Delta'}{2(r_h^2 + a^2)} = \frac{-3\lambda r_h^4 + (1 - \lambda a^2)r_h^2 - a^2}{2(r_h^2 + a^2)}. \quad (3.14.62)$$

特異点 見かけ上,

$$-g = \frac{\rho^4}{C^2} \sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta)^n \quad (3.14.63)$$

も考慮すると, 計量は

$$\Delta = 0, \quad \rho^2 = 0, \quad r = 0 \quad (3.14.64)$$

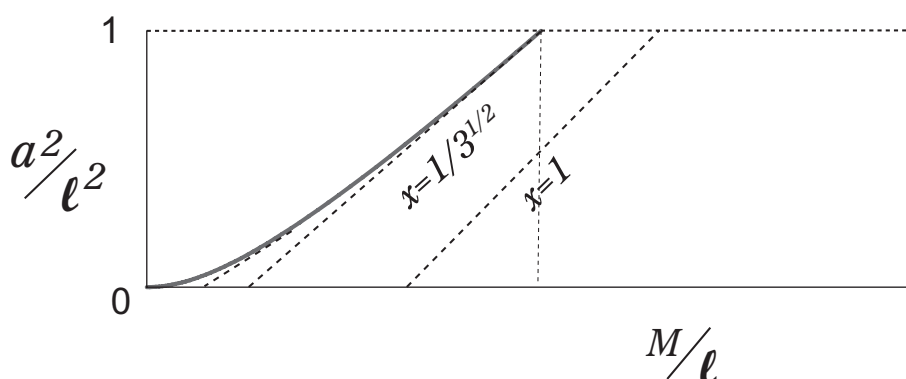


図 2: 4次元 AdS-Kerr がホライズンをもつ条件

で特異となる. ここで,  $\Delta = 0$  はホライズン. また,  $r = 0$  は  $n = 1 (D = 5)$  のとき,  $\rho^2 \neq 0$  なら座標特異点,  $n > 1$  では曲率特異点となる ( $n$  が奇数のとき, 計量は  $r^2$  の有理関数となるが,  $-g \geq 0$  を要求すると,  $r^2 \geq 0$  の制限が得られる). よって, 特異点は  $D = 5$  のとき,

$$\mathcal{S}_{\text{sing}}^{D=5} = \{\rho^2 = 0\} \cup \{r = \cos \theta = 0\}, \quad (3.14.65)$$

$D > 5$  のとき,

$$\mathcal{S}_{\text{sing}}^{D \geq 6} = \{r = 0\} \quad (3.14.66)$$

### 3.14.2.4 AdS ブラックホール

以下,

$$\lambda = -\frac{1}{\ell^2} \quad (3.14.67)$$

とおく.

**Horizon radius**  $\Delta$  の振る舞いは  $n$  により大きく代わる.

1 .  $n = 0 (D = 4)$  の場合 :

この場合, 固定した  $a/\ell$  の値に対し,  $M/\ell$  がある臨界値を超えるとホライズンが存在する. 臨界値は  $\Delta = 0$  が重解を持つ条件

$$\Delta(r_h) = 0, \quad \Delta'(r_h) = 0 \quad (3.14.68)$$

より,  $x = r_h/\ell$  によるパラメーター表示で

$$\frac{a^2}{\ell^2} = \frac{x^2(1+3x^2)}{1-x^2}, \quad \frac{M}{\ell} = \frac{x(1+x^2)^2}{1-x^2}. \quad (3.14.69)$$

この臨界値は, 図の実線に対応し, この線の下かつ  $a^2/\ell^2 < 1$  でホライズンが存在 ( $\Delta = 0$  が 2 つの実根  $r = r_+, r_-$  をもち,  $r_h = r_+$ ). この図で,  $x = r_h/\ell$  の等高線は直線群

$$\frac{M}{\ell} = \frac{x(1+x^2)}{2} + \frac{1+x^2}{2x} \frac{a^2}{\ell^2} \quad (3.14.70)$$

となり, 実線はその包絡線となっている. この実線と  $a/\ell = 1$  との交わりは

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad M/\ell = \frac{8}{3\sqrt{3}} \quad (3.14.71)$$

に対応. 実線上で  $x$  は  $1/\sqrt{3}$  からゼロまで単調に変化.



### 3.15 $F(R)$ 重力

#### 3.15.1 一般論

##### 3.15.1.1 基礎方程式

作用積分

$$S_G = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2\kappa^2} F(R).$$

場の方程式

$$F^{(1)} R_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu F^{(1)} + \left( \square F^{(1)} - \frac{1}{2} F \right) g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}.$$

#### 3.15.2 厳密解

##### 3.15.2.1 静的球対称真空解

計量

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{h(r)} + r^2 d\Omega^2.$$

基礎方程式

$$\left( \frac{f'}{f} - \frac{h'}{h} \right) \left\{ \frac{F^{(1)}}{r} - \frac{F^{(2)}}{2} R' \right\} = (F^{(1)})'', \quad (3.15.1)$$

$$(F^{(1)})'' + \frac{1}{2} \left( \frac{f'}{f} + \frac{h'}{h} \right) (F^{(1)})' + \frac{1}{3h} (F^{(1)} R - 2F) = 0, \quad (3.15.2)$$

$$\frac{F^{(1)}}{r^2} \{r(1-h)\}' = -\frac{hf'}{2f} F^{(2)} R' + \frac{1}{6} (RF^{(1)} + F). \quad (3.15.3)$$

ここで,

$$R = -h \frac{f''}{f} + \frac{f'}{2f} \left( h \frac{f'}{f} - h' \right) - \frac{2h}{r} \left( \frac{f'}{f} + \frac{h'}{h} \right) + \frac{2}{r^2} (1-h). \quad (3.15.4)$$

### 3.16 超重力理論

#### 3.16.1 5次元 IIA/ $K3 \times S^1$

##### 3.16.1.1 理論内容

基本変数

- 計量 :  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$
- スカラ場 : dilaton  $\phi$ , moduli  $\sigma$
- ゲージ場  $A_{[1]}^{(j)} : V_{[1]}, X_{[1]}, \tilde{B}_{[1]}, \tilde{A}_{[1]}$   
対応するフラックスは

$$G^{(j)} = dA^{(j)} : \quad V_{[2]} = dV_{[1]}, \quad X_{[2]} = dX_{[1]}, \quad \tilde{H}_{[2]} = d\tilde{B}_{[1]}, \quad F_{[2]} = dA_{[1]}.$$

作用積分

$$2\kappa^2 S = \int_{M_5} \left\{ R - \frac{4}{3}(\nabla\phi)^2 - (\nabla\sigma)^2 \right\} *1 - \frac{1}{2} \sum_j C_j *G^{(j)} \wedge G^{(j)} \\ \pm \frac{1}{2} \left( X_{[1]} \wedge V_{[2]} \wedge \tilde{H}_{[2]} + \tilde{B}_{[1]} \wedge F_{[2]} \wedge F_{[2]} \right). \quad (3.16.1)$$

ここで,

$$C_V = e^{2\sigma-4\phi/3}, \quad C_X = e^{8\pi/3}, \quad C_H = e^{-2\sigma-4\phi/3}, \quad C_F = e^{\sigma+2\phi/3}. \quad (3.16.2)$$

場の方程式

$$8\Box\phi + 2C_V V \cdot V - 4C_X X \cdot X + 2C_H \tilde{H} \cdot \tilde{H} - C_F F \cdot F = 0, \quad (3.16.3a)$$

$$4\Box\sigma - 2C_V V \cdot V + 2C_H \tilde{H} \cdot \tilde{H} - C_F F \cdot F = 0, \quad (3.16.3b)$$

$$d(C_V *V_{[2]}) \pm \frac{1}{2} X_{[2]} \wedge {}^t H = 0, \quad (3.16.3c)$$

$$d(C_X *X_{[2]}) \pm \frac{1}{2} V_{[2]} \wedge \tilde{H} = 0, \quad (3.16.3d)$$

$$d(C_H *\tilde{H}) \pm \frac{1}{2} (X_{[2]} \wedge V_{[2]} + F \wedge F) = 0, \quad (3.16.3e)$$

$$d(C_F *F) \pm \tilde{H} \wedge F = 0, \quad (3.16.3f)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{4}{3} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma + \frac{1}{2} \sum_j C_j \left( G_{\mu*}^{(j)} G_\nu^{(j)*} - \frac{1}{3} g_{\mu\nu} G^{(j)} \cdot G^{(j)} \right). \quad (3.16.3g)$$

### 3.16.1.2 BMPV 解

- Breckenridge, Myers, Peet, Vafa

## 計量

$$ds^2 = -\Delta^2 (dt - \Omega\chi_3)^2 + \frac{dr^2}{\Delta^2} + r^2 ds^2(S^3),$$

$$\Delta = 1 - \frac{\mu}{r^2}, \quad \Omega = \frac{\mu\omega}{r^2 - \mu}. \quad (3.16.4)$$

ここで,  $S^3 \in (e^{i\phi_1} \sin \theta, e^{i\phi_2} \cos \theta)$  の不変基底を

$$\chi^1 + i\chi^2 = -\frac{1}{2}e^{-i\psi} (2d\theta + id\phi \cos(2\theta)), \quad (3.16.5a)$$

$$\chi^3 = d\phi_1 \sin^2 \theta + d\phi_2 \cos^2 \theta = \frac{1}{2} (d\psi + d\phi \cos(2\theta)) \quad (3.16.5b)$$

とおくとき,

$$ds^2(S^3) = (\chi^1)^2 + (\chi^2)^2 + (\chi^3)^2$$

$$= d\theta^2 + d\phi_1^2 \sin^2 \theta + d\phi_2^2 \cos^2 \theta. \quad (3.16.6)$$

## スカラ場

$$\sigma = \phi = \text{const}. \quad (3.16.7)$$

## ゲージ場

$$X = V = 0, \quad (3.16.8a)$$

$$\tilde{B} = \frac{\lambda^3}{\sqrt{2}} A, \quad (3.16.8b)$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \frac{\mu}{r^2} dt + \frac{\sqrt{2}\omega\mu}{\lambda r^2} \chi^3. \quad (3.16.8c)$$

## Killing ベクトル

$$\mathbb{R} \times U(2) \cong \mathbb{R} \times SU(2) \times U(1)$$

## 漸近荷

$$M = \frac{3\pi\mu}{4G_5}, \quad (3.16.9)$$

$$J_1 = J_2 = \frac{\pi\omega\mu}{4G_5}. \quad (3.16.10)$$

## 3.17 ブラックホール熱力学

### 3.17.1 4次元ブラックホール

#### 3.17.1.1 球対称ブラックホール

##### adS ブラックホール

計量

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_2^2, \quad (3.17.1)$$

$$f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{\ell^2}, \quad (3.17.2)$$

熱力学量  $r_h$  を独立パラメーターとすると,

$$M = \frac{r_h}{2} + \frac{r_h^3}{2\ell^2}, \quad (3.17.3a)$$

$$S = \frac{A}{4} = \pi r_h^2, \quad (3.17.3b)$$

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad \kappa = \frac{1}{2r_h} + \frac{3r_h}{2\ell^2}. \quad (3.17.3c)$$

特徴  $M$  と  $S$  は  $r_h$  の単調増加関数であるが,  $T$  は  $r_h = \ell/\sqrt{3}$  で最小値  $T_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{\ell}$  をもつ.

#### 3.17.1.2 回転ブラックホール

##### Kerr BH

- ホライズン半径:  $r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$
- ホライズン面積:  $A = 4\pi(r_+^2 + a^2) = 8\pi M r_+$
- 回転角速度:  $\Omega_h = \frac{a}{2Mr_+}$
- 表面重力:  $\kappa = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{2Mr_+}$
- 第2法則:

$$\frac{\kappa}{8\pi} dA = dM - \Omega_h dJ. \quad (3.17.4)$$

- Smarr 公式

$$\frac{\kappa}{4\pi} A = M - 2\Omega_h J. \quad (3.17.5)$$

## 3.18 光学

### 3.18.1 一般論

【公式 3.83 (BH1995.12.16)】

時空内の空間的面  $\Sigma$  とそれに含まれる 2次元面  $\mathcal{F}$  を考える.  $\Sigma$  の未来向きの単位法ベクトルを  $n$ ,  $\mathcal{F}$  の  $\Sigma$  内での外向き単位法ベクトルを  $m$ ,  $\Sigma$  の平均曲率を  $K$ ,  $\mathcal{F}$  の  $\Sigma$  内での平均曲率を  $k$  とする. このとき,  $\mathcal{F}$  を通過する外向きおよび内向き光的面の膨張率  $\theta_{\pm}$  は

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-K + K_{jk}m^j m^k \pm k). \quad (3.18.1)$$

□

### 3.18.2 球対称系

【公式 3.84 (BH1995.12.16)】

計量: 球対称時空

$$ds^2 = -N^2 d\tau^2 + \Lambda^2 (d\chi + \beta d\tau)^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (3.18.2)$$

( $N, \Lambda, \beta, r$  は  $\tau, \chi$  のみの関数).

$\Sigma_{\tau}$  内の 2-surface  $\chi = \text{const}$  の外部曲率は

$$k_{jk} = \frac{r'}{r\Lambda} \gamma_{jk}, \quad k = \frac{2r'}{r\Lambda}. \quad (3.18.3)$$

この 2-surface を通過する光的面の膨張率は

$$\theta_{\pm} = \sqrt{2} \left( -K_{\theta}^{\theta} \pm \frac{r'}{r\Lambda} \right). \quad (3.18.4)$$

□

## 3.19 正準理論

### 3.19.1 スカラ場系

#### 3.19.1.1 球対称系

【公式 3.85 (BH1995.12.16)】

計量: 球対称時空

$$ds^2 = -N^2 d\tau^2 + \Lambda^2 (d\chi + \beta d\tau)^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (3.19.1)$$

( $N, \Lambda, \beta, r$  は  $\tau, \chi$  のみの関数). 上の球対称スカラ場  $\phi(\tau, \chi)$  に対して, 拘束関数は

$$\frac{\kappa^2}{\sqrt{q}} \mathcal{H}_\chi = \frac{2r'}{r} K_\chi^\chi - \frac{2}{r} (r K_\theta^\theta)' + \frac{\kappa^2}{\sqrt{q}} \pi \cdot \phi', \quad (3.19.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^2}{\sqrt{q}} \mathcal{H}_\perp = & -K_\theta^\theta (K_\theta^\theta + 2K_\chi^\chi) - \frac{2}{r^2 r'} \left[ r \left( 1 - \left( \frac{r'}{\Lambda} \right)^2 \right) \right]' \\ & + \frac{\kappa^2}{2} \left[ \frac{\pi^2}{q} + \Lambda^{-2} (\phi')^2 + 2V(\phi) \right]. \end{aligned} \quad (3.19.3)$$

□

## 3.20 摂動論

### 3.20.1 1次摂動

#### 3.20.1.1 計量・接続・曲率

【公式 3.86】 計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  の変分

$$\delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$$

に対して、接続係数、曲率テンソルなどの幾何学的諸量の 1 次変分は次のようになる：

$$\begin{aligned}
\delta g^{\mu\nu} &= -h^{\mu\nu}, \\
\delta|g| &= |g|h; \quad h = g^{\mu\nu}h_{\mu\nu}, \\
\delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} &= \frac{1}{2}(\nabla_{\nu}h_{\lambda}^{\mu} + \nabla_{\lambda}h_{\nu}^{\mu} - \nabla^{\mu}h_{\nu\lambda}), \\
\delta R^{\mu}{}_{\nu\lambda\sigma} &= \nabla_{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} - \nabla_{\sigma}\delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} \\
&= \frac{1}{2}(\nabla_{\lambda}\nabla_{\nu}h_{\sigma}^{\mu} - \nabla_{\sigma}\nabla_{\nu}h_{\lambda}^{\mu} - \nabla_{\lambda}\nabla^{\mu}h_{\nu\sigma} + \nabla_{\sigma}\nabla^{\mu}h_{\nu\lambda} \\
&\quad + R_{\lambda\sigma}{}^{\mu}{}_{\beta}h_{\nu}^{\beta} + R_{\lambda\sigma\nu}{}^{\beta}h_{\beta}^{\mu}), \\
\delta R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(-\nabla^2 h_{\mu\nu} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}h + \nabla_{\mu}\nabla_{\alpha}h_{\nu}^{\alpha} + \nabla_{\nu}\nabla_{\alpha}h_{\mu}^{\alpha} \\
&\quad + R_{\mu\alpha}h_{\nu}^{\alpha} + R_{\nu\alpha}h_{\mu}^{\alpha} - 2R_{\mu\alpha\nu\beta}h^{\alpha\beta}), \\
\delta R &= -h_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \nabla^{\mu}\nabla^{\nu}h_{\mu\nu} - \nabla^2 h.
\end{aligned}$$

□

【公式 3.87】 正規直交 1 形式基底  $\theta^a$  の摂動  $\delta\theta^a = \chi^a$  に対し、

$$\delta\omega_{ab} = \frac{1}{2}[(D\chi_a)_{bc} - (D\chi_b)_{ac} - (D\chi_c)_{ab}] \theta^c$$

□

### 3.20.1.2 Einstein 方程式

【公式 3.88 (Lichnerowicz 作用素)】 Lichnerowicz 作用素  $\Delta_L$  を次式で定義する：

$$(\Delta_L h)_{\mu\nu} := -\nabla \cdot \nabla h_{\mu\nu} + 2R_{(\mu}^{\alpha} h_{\nu)\alpha} - 2R_{\mu\alpha\nu\beta} h^{\alpha\beta}. \quad (3.20.1)$$

この作用素について次の式が成り立つ：

$$\begin{aligned}
(\Delta_L h)_{\alpha}^{\alpha} &= -\Delta h, \\
\nabla^{\alpha}(\Delta_L h)_{\mu\alpha} &= -\nabla \cdot \nabla(\nabla^{\alpha} h_{\mu\alpha}) + R_{\mu}^{\alpha}\nabla^{\beta} h_{\alpha\beta} + (2\nabla_{\alpha}R_{\mu\beta} - \nabla_{\mu}R_{\alpha\beta})h^{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

また,  $h_{\mu\nu}$  の分解

$$h_{\mu\nu} = tg_{\mu\nu} + \left( \nabla_\mu \nabla_\nu - \frac{1}{n} g_{\mu\nu} \square \right) s + 2\nabla_{(\mu} v_{\nu)} + w_{\mu\nu}; \quad (3.20.2)$$

$$\nabla_\mu v^\mu = 0, \quad (3.20.3)$$

$$w_\mu^\mu = 0, \quad \nabla^\nu w_{\nu\mu} = 0, \quad (3.20.4)$$

$$\nabla^\nu h_{\mu\nu} = \nabla_\mu \left( t + \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \Delta s \right) + R_\mu^\nu \nabla_\nu s + \Delta v_\mu + R_\mu^\nu v_\nu \quad (3.20.5)$$

に対し,

$$\begin{aligned} \Delta_L h_{\mu\nu} &= -\Delta t g_{\mu\nu} - \left( \nabla_\mu \nabla_\nu - \frac{1}{n} g_{\mu\nu} \square \right) \square s + 2\nabla_{(\mu} \Delta_{[1]} v_{\nu)} + \Delta_L w_{\mu\nu} \\ &\quad + \left( \nabla^\alpha R_{\mu\nu} - 2\nabla_{(\mu} R_{\nu)}^\alpha \right) (\nabla_\alpha s + 2v_\alpha); \end{aligned} \quad (3.20.6)$$

$$\Delta_{[1]} v_\mu \equiv -\Delta v_\mu + R_\mu^\nu v_\nu, \quad (3.20.7)$$

$$\nabla^\nu \Delta_L w_{\mu\nu} = - \left( \nabla_\mu R_{\alpha\beta} - 2\nabla_{(\alpha} R_{\beta)\mu} \right) w^{\alpha\beta}. \quad (3.20.8)$$

したがって, Einstein 時空では,  $h_{\mu\nu}$  のテンソル分解の構造は  $\Delta_L$  により保たれ,

$$t \rightarrow -\square t, \quad (3.20.9a)$$

$$s \rightarrow -\square s, \quad (3.20.9b)$$

$$v_\mu \rightarrow \Delta_{[1]} v_\mu, \quad (3.20.9c)$$

$$w_{\mu\nu} \rightarrow \Delta_L w_{\mu\nu} \quad (3.20.9d)$$

と対応する. □

**【公式 3.89】**  $(n+2)$  次元時空における Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}$$

の線形摂動は, Lichnerowicz 作用素  $\Delta_L$  を用いて, 次のように表される:

$$\begin{aligned} (\Delta_L h)_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu h + 2\nabla_{(\mu} \nabla^\alpha h_{\nu)\alpha} + (-\nabla^\alpha \nabla^\beta h_{\alpha\beta} + \Delta h + R^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}) g_{\mu\nu} \\ + (2\Lambda - R) h_{\mu\nu} = 2\kappa^2 \delta T_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

ここで,  $\psi_{\mu\nu}$  を

$$\psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h g_{\mu\nu}$$



により定義すると,

$$h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \frac{1}{n}\psi g_{\mu\nu},$$

$$h = -\frac{2}{n}\psi$$

および

$$R_{\mu\nu} = \kappa^2 \left( T_{\mu\nu} - \frac{T}{n} g_{\mu\nu} \right) + \frac{2\Lambda}{n} g_{\mu\nu},$$

$$R = \frac{2(n+2)}{n} \Lambda - \frac{2\kappa^2}{n} T$$

より,

$$\begin{aligned} \Delta_L \psi_{\mu\nu} - \frac{4\Lambda}{n} \psi_{\mu\nu} + 2\nabla_{(\mu} \nabla^{\alpha} \psi_{\nu)\alpha} - \nabla^{\alpha} \nabla^{\beta} \psi_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \\ = 2\kappa^2 \delta T_{\mu\nu} - \frac{2\kappa^2}{n} T \psi_{\mu\nu} - \kappa^2 \left( T_{\alpha\beta} \psi^{\alpha\beta} - \frac{T}{n} \psi \right) g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

□

### 3.20.1.3 摂動の $(m+n)$ 分解

背景時空の計量が

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = g_{ab}(y) dy^a dy^b + r(y)^2 \gamma_{ij}(z) dz^i dz^j \quad (3.20.10)$$

で与えられるとし, 共変微分を

$$g_{\mu\nu} \Rightarrow \nabla_{\mu}, \quad R^{\mu}{}_{\nu\lambda\sigma}, \quad (3.20.11a)$$

$$g_{ab} \Rightarrow D_a, \quad R^a{}_{bcd} = {}^m R^a{}_{bcd}, \quad (3.20.11b)$$

$$\gamma_{ij} \Rightarrow \hat{D}_i, \quad \hat{R}^i{}_{jkl} \quad (3.20.11c)$$

と表す. 対応して, 曲率テンソルと Ricci 曲率の非ゼロ成分は

$$R^a{}_{bcd} = {}^m R^a{}_{bcd}, \quad (3.20.12a)$$

$$R^a{}_{ibj} = -\frac{D^a D_b r}{r} g_{ij}, \quad (3.20.12b)$$

$$R^i{}_{jkl} = \hat{R}^i{}_{jkl} - (Dr)^2 (\delta_k^i \gamma_{jl} - \delta_l^i \gamma_{jk}). \quad (3.20.12c)$$

と

$$R_{ab} = {}^m R_{ab} - n \frac{D_a D_b r}{r}, \quad (3.20.13a)$$

$$R_{ai} = 0, \quad (3.20.13b)$$

$$R_{ij} = \hat{R}_{ij} - \left( \frac{\square r}{r} + (n-1) \frac{(Dr)^2}{r^2} \right) g_{ij}, \quad (3.20.13c)$$

$$R = {}^m R + \frac{\hat{R}}{r^2} - n \left( 2 \frac{\square r}{r} + (n-1) \frac{(Dr)^2}{r^2} \right). \quad (3.20.13d)$$

で与えられる.

この背景時空での計量の摂動を

$$h_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} \quad (3.20.14)$$

とおくとき以下の公式が成り立つ.

【公式 3.90 ( $\nabla h$  の分解)】

$$\nabla_a h_c^b = D_a h_c^b, \quad (3.20.15a)$$

$$\nabla_a h_i^b = r D_a \left( \frac{1}{r} h_i^b \right), \quad (3.20.15b)$$

$$\nabla_a h_b^i = \frac{1}{r} D_a (r h_b^i), \quad (3.20.15c)$$

$$\nabla_a h_j^i = D_a h_j^i, \quad (3.20.15d)$$

$$\nabla_i h_b^a = \hat{D}_i h_b^a - \frac{D^a r}{r} h_{ib} - \frac{D_b r}{r} h_i^a, \quad (3.20.15e)$$

$$\nabla_i h_j^a = \hat{D}_i h_j^a - r D^a r \gamma_{ik} h_j^k + r D^b r \gamma_{ij} h_b^a, \quad (3.20.15f)$$

$$\nabla_i h_a^j = \hat{D}_i h_a^j + \frac{D_b r}{r} \delta_i^j h_a^b - \frac{D_a r}{r} h_i^j, \quad (3.20.15g)$$

$$\nabla_i h_k^j = \hat{D}_i h_k^j + \frac{D_a r}{r} \delta_i^j h_k^a + \frac{D_a r}{r} \gamma_{ik} \gamma^{jm} h_m^a. \quad (3.20.15h)$$

□

【公式 3.91 ( $\nabla^2 h$  の分解)】

$$\begin{aligned}
\nabla_a \nabla_b h_d^c &= D_a D_b h_d^c, & \nabla_a \nabla_b h_j^i &= D_a D_b h_j^i, \\
\nabla_a \nabla_b h_i^c &= r D_a D_b \left( \frac{1}{r} h_i^c \right), \\
\nabla_a \nabla_b h_c^i &= \frac{1}{r} D_a D_b (r h_c^i), \\
\nabla_a \nabla_i h_c^b &= r D_a \left( \frac{1}{r} \hat{D}_i h_c^b \right) + r D_a \left( -\frac{D^b r}{r^2} h_{ic} - \frac{D_c r}{r^2} h_i^b \right), \\
\nabla_a \nabla_i h_j^b &= r^2 D_a \left( \frac{1}{r^2} \hat{D}_i h_j^b \right) + r^2 D_a \left( -\frac{D^b r}{r} \gamma_{ik} h_j^k + \frac{D^c r}{r} \gamma_{ij} h_c^b \right), \\
\nabla_a \nabla_i h_b^j &= D_a \hat{D}_i h_b^j + D_a \left( -\frac{D^b r}{r} h_i^j + \frac{D_c r}{r} \delta_i^j h_b^c \right), \\
\nabla_a \nabla_i h_k^j &= r D_a \left( \frac{1}{r} \hat{D}_i h_k^j \right) + r D_a \left( \frac{D^b r}{r^2} \gamma_{ik} \gamma^{jm} h_{mb} + \frac{D_b r}{r^2} \delta_i^j h_k^b \right), \\
\nabla_i \nabla_a h_c^b &= r D_a \left( \frac{1}{r} \hat{D}_i h_c^b \right) - r D_c r D_a \left( \frac{1}{r^2} h_i^b \right) - r D^b r D_a \left( \frac{1}{r^2} h_{ic} \right), \\
\nabla_i \nabla_a h_j^b &= r^2 D_a \left( \frac{1}{r^2} \hat{D}_i h_j^b \right) + r^2 D_c r \gamma_{ij} D_a \left( \frac{1}{r} h_c^b \right) - r^2 D^b r \gamma_{ik} D_a \left( \frac{1}{r} h_j^k \right), \\
\nabla_i \nabla_a h_b^j &= D_a \hat{D}_i h_b^j + D_c r \delta_i^j D_a \left( \frac{1}{r} h_b^c \right) - D_b r D_a \left( \frac{1}{r} h_j^i \right), \\
\nabla_i \nabla_a h_k^j &= r D_a \left( \frac{1}{r} \hat{D}_i h_k^j \right) + D_b r \delta_i^j D_a \left( \frac{1}{r^2} h_k^b \right) + r D^b r \gamma_{ik} \gamma^{jm} D_a \left( \frac{1}{r^2} h_{mb} \right), \\
\nabla_i \nabla_j h_b^a &= \hat{D}_i \hat{D}_j h_b^a + \gamma_{ij} (r D^c r D_c h_b^a - D^a r D_c r h_b^c - D_b r D^c r h_c^a) \\
&\quad - 2r D^a r \gamma_{k(i} \hat{D}_{j)} h_b^k - 2 \frac{D_b r}{r} \hat{D}_{(i} h_{j)}^a + 2 D^a r D_b r \gamma_{k(i} h_{j)}^k, \\
\nabla_i \nabla_j h_k^a &= \hat{D}_i \hat{D}_j h_k^a + \gamma_{ij} \left\{ r^2 D^b r D_b \left( \frac{1}{r} h_k^a \right) - D^a r D_b r h_k^b \right\} - (Dr)^2 \gamma_{ik} h_j^a \\
&\quad - 2 D^a r D^b r \gamma_{k(i} h_{j)b} + 2r D^b r \gamma_{k(i} \hat{D}_{j)} h_b^a - 2r D^a r \gamma_{l(i} \hat{D}_{j)} h_k^l, \\
\nabla_i \nabla_j h_a^k &= \hat{D}_i \hat{D}_j h_a^k - \frac{(Dr)^2}{r^2} \delta_i^k h_{ja} + \gamma_{ij} \{ D^b r D_b (r h_a^k) - D_a r D^b r h_b^k \} \\
&\quad - 2 \frac{D_a r D_b r}{r^2} \delta_{(i}^k h_{j)}^b + 2 \frac{D_b r}{r} \delta_{(i}^k \hat{D}_{j)} h_a^b - 2 \frac{D_a r}{r} \hat{D}_{(i} h_{j)}^k, \\
\nabla_i \nabla_j h_l^k &= \hat{D}_i \hat{D}_j h_l^k + r D^a r \gamma_{ij} D_a h_l^k - (Dr)^2 (\gamma_{il} h_j^k + \delta_i^k \gamma_{jm} h_l^m) \\
&\quad + 2 \frac{D_a r}{r} \delta_{(i}^k \hat{D}_{j)} h_l^a + 2r D^a r \gamma_{l(i} \hat{D}_{j)} h_a^k + 2 D^a r D_b r \gamma_{l(i} \delta_{j)}^k h_a^b.
\end{aligned}$$

□

【公式 3.92 ( $\square h$  の分解)】

$$\begin{aligned} \square h_b^a &= D^2 h_b^a + n \left( \frac{D^c r}{r} D_c h_b^a - \frac{D^a r D_c r}{r^2} h_b^c - \frac{D_b r D^c r}{r^2} h_c^a \right) \\ &+ \frac{1}{r^2} \hat{\Delta} h_b^a - 2 \frac{D^a r}{r} \hat{D}_k h_b^k - 2 \frac{D_b r}{r^3} \gamma^{ij} \hat{D}_i h_j^a \\ &+ 2 \frac{D^a r D_b r}{r^2} h_k^k, \end{aligned} \quad (3.20.16a)$$

$$\begin{aligned} \square h_i^a &= 2 \frac{D^b r}{r} \hat{D}_i h_b^a \\ &+ \frac{1}{r^2} \hat{\Delta} h_i^a + D^2 h_i^a + (n-2) \frac{D^b r}{r} D_b h_i^a \\ &- \left\{ (n-1) \frac{(Dr)^2}{r^2} + \frac{\square r}{r} \right\} h_i^a - (n+2) \frac{D^a r D_b r}{r^2} h_i^b \\ &- 2 \frac{D^a r}{r} \hat{D}_j h_i^j, \end{aligned} \quad (3.20.16b)$$

$$(3.20.16c)$$

$$\begin{aligned} \square h_a^i &= 2 \frac{D_a r}{r} \gamma^{ik} \hat{D}_k h_a^b \\ &+ \frac{1}{r^2} \hat{\Delta} h_a^i + D^2 h_a^i + (n+2) \frac{D^b r}{r} D_b h_a^i \\ &+ \left\{ \frac{D^2 r}{r} + (n-1) \frac{(Dr)^2}{r^2} \right\} h_a^i - (n+2) \frac{D_a r D^b r}{r^2} h_b^i \\ &- 2 \frac{D_a r}{r^3} \gamma^{jk} \hat{D}_j h_k^i, \end{aligned} \quad (3.20.16d)$$

$$(3.20.16e)$$

$$\begin{aligned} \square h_j^i &= 2 \frac{D_a r D^b r}{r^2} h_b^a \delta_j^i \\ &+ 2 \frac{D_a r}{r} \left( g^{ik} \hat{D}_k h_j^a + \hat{D}_j h_a^i \right) \\ &+ D^2 h_j^i + \frac{1}{r^2} \hat{\Delta} h_j^i + n \frac{D^a r}{r} D_a h_j^i - 2 \frac{(Dr)^2}{r^2} h_j^i. \end{aligned} \quad (3.20.16f)$$

□

【公式 3.93 ( $\delta R$  の分解)】

$$\delta R^{ab}_{cd} = -2D_{[c}D^{[a}h_{d]}^b + R^{f[a}{}_{cd}h_f^b], \quad (3.20.17a)$$

$$\begin{aligned} \delta R^{ab}_{ci} &= -D_c \left\{ rD^{[a} \left( \frac{1}{r}h_i^{b]} \right) \right\} + \left( \frac{D^c D^{[a}r}{r} + \frac{D^c r D^{[a}r}{r^2} \right) h_i^{b]} \\ &\quad + D^{[a}r D^{b]} \left( \frac{1}{r}h_{ic} \right) + rD^{[a} \left( \frac{1}{r}\hat{D}_i h_c^{b]} \right), \end{aligned} \quad (3.20.17b)$$

$$\delta R^{ab}_{ij} = -2r^2 D^{[a} \left( \frac{1}{r^2}\hat{D}_{[i}h_{j]}^b \right), \quad (3.20.17c)$$

$$\begin{aligned} \delta R^{ai}_{cd} &= \frac{1}{r}D_{[c} \left( \frac{1}{r}\hat{D}^i h_{d]}^a \right) \\ &\quad + \gamma^{ij} \left[ -\frac{1}{r}D_{[c} \left( \frac{1}{r}D^a h_{d]}j \right) - \frac{D_{[d}r}{r^3}D_{c]}h_j^a - \frac{1}{2r^2}R^{ab}{}_{cd}h_j^a \right] \end{aligned} \quad (3.20.17d)$$

$$\begin{aligned} \delta R^{ai}_{bj} &= -\frac{1}{2r^2}\hat{D}_j \hat{D}^i h_b^a + \delta_j^i \left\{ \frac{D^c r}{r}D_{[b}h_{c]}^a + \frac{1}{r}D^c D_{br}h_c^a + \frac{D_c r}{2r}D^a h_b^c \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2r}D^a (r\hat{D}_j h_b^i) + \frac{1}{2r}D_b \left( \frac{1}{r}\hat{D}^i h_j^a \right) + \frac{D^a r}{2r^3}\hat{D}^i h_{jb} + \frac{D_b r}{2r}\hat{D}_j h^{ia} \\ &\quad - \frac{1}{2}D_b D^a h_j^i - \frac{1}{2r}(D^a r D_b + D_b r D^a)h_j^i, \end{aligned} \quad (3.20.17e)$$

$$\begin{aligned} \delta R^{ai}_{jk} &= \frac{D_b r}{r}\delta_{[k}^i \hat{D}_{j]}h_b^a - D_b D^a \left( \frac{1}{r^2}\delta_{[j}^i h_{k]}^b \right) + D^b r D_b \left( \frac{1}{r}\delta_{[j}^i h_{k]}^a \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2}\hat{D}_{[j}\hat{D}^i h_{k]}^a + \frac{1}{2r^2} \left\{ \hat{R}^{il}{}_{jk} - 2(Dr)^2 \delta_{[j}^i \delta_{k]}^l \right\} h_l^a \\ &\quad - D^a \hat{D}_j h_k^i, \end{aligned} \quad (3.20.17f)$$

$$\delta R^{ij}_{ab} = -\frac{2}{r^2}D_{[a}\hat{D}^{[i}h_{b]}^j], \quad (3.20.17g)$$

$$\begin{aligned} \delta R^{ij}_{ak} &= \frac{D_b r}{r^3}\delta_k^{[j}\hat{D}^{i]}h_a^b \\ &\quad + 2\frac{D_b r}{r}\delta_k^{[i}D_{[b}h_{a]}^{j]} + \frac{(Dr)^2}{r^2}\delta_k^{[i}h_a^{j]} + \frac{1}{r^2}\hat{D}_k \hat{D}^{[i}h_a^{j]} - 2\frac{D^b D_a r}{r}\delta_k^{[i}h_b^{j]} \\ &\quad - \frac{1}{r^2}D_a \left( \hat{D}^{[i}h_k^{j]} \right), \end{aligned} \quad (3.20.17h)$$

$$\begin{aligned} \delta R^{ij}_{kl} &= 2\frac{D^a r D_b r}{r^2}\delta_k^{[i}\delta_l^{j]}h_b^a + 2\frac{D_a r}{r^3} \left( \delta_{[k}^{[i}\hat{D}^{j]}h_{l]}^a - \delta_{[l}^{[i}\gamma^{j]m}\hat{D}_{k]}h_m^a \right) \\ &\quad - 2\frac{D^a r}{r}\delta_{[k}^{[i}D_{a]}h_{l]}^j - \frac{2}{r^2}\hat{D}_{[k}\hat{D}^{[i}h_{l]}^j] + \frac{1}{r^2}\hat{R}^{m[i}{}_{kl}h_m^j]. \end{aligned} \quad (3.20.17i)$$

□

### 3.20.1.4 諸公式

【公式 3.94 (Laplacian の共形変換)】  $(n+2)$  次元時空における計量  $g_{\mu\nu}$  および 2 階対称テンソル  $h_{\mu\nu}$  の共形変換

$$\hat{g}_{\mu\nu} = e^{2\Omega} g_{\mu\nu}, \quad \hat{h}_{\mu\nu} = e^{2\Omega} h_{\mu\nu}$$

に対して,

$$\begin{aligned} \hat{\nabla} \cdot \hat{\nabla} \hat{h}_{\mu\nu} = & \nabla \cdot \nabla h_{\mu\nu} + n \nabla \Omega \cdot \nabla h_{\mu\nu} - 2(\nabla \Omega)^2 h_{\mu\nu} - 4h_{\alpha(\mu} \nabla_{\nu)} \nabla^\alpha \Omega \\ & + 4\nabla_{(\mu} (h_{\nu)\alpha} \nabla^\alpha \Omega) - 2(n+2) \nabla_{(\mu} \Omega h_{\nu)\alpha} \nabla^\alpha \Omega \\ & + 2h_\alpha^\alpha \nabla_\mu \Omega \nabla_\nu \Omega + 2g_{\mu\nu} h_{\alpha\beta} \nabla^\alpha \Omega \nabla^\beta \Omega - 4\nabla^\alpha h_{\alpha(\mu} \nabla_{\nu)} \Omega. \end{aligned}$$

□

## 3.20.2 2 次摂動

### 3.20.2.1 計量・接続・曲率

【公式 3.95 (計量・接続・曲率の 2 次摂動)】 (擬) Riemann 多様体の計量の摂動

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (3.20.18)$$

に対して,

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h_\alpha^\mu h^{\nu\alpha} + O(h^3), \quad (3.20.19a)$$

$$\tilde{g} = g \left[ 1 + h + \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + O(h^3) \right], \quad (3.20.19b)$$

$$\sqrt{-\tilde{g}} = \sqrt{-g} \left[ 1 + \frac{1}{2} h + \frac{1}{8} h^2 - \frac{1}{4} h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + O(h^3) \right] \quad (3.20.19c)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu = \Gamma_{\nu\lambda}^\mu + H^\mu_{\nu\lambda} - h_\alpha^\mu H^\alpha_{\nu\lambda} + O(h^3). \quad (3.20.19d)$$

ここで,

$$H^\mu{}_{\nu\lambda} := g^{\mu\alpha} H_{\alpha\nu\lambda}, \quad (3.20.20a)$$

$$H_{\mu\nu\lambda} := \frac{1}{2} (\nabla_\nu h_{\mu\lambda} + \nabla_\lambda h_{\mu\nu} - \nabla_\mu h_{\nu\lambda}), \quad (3.20.20b)$$

$$H^\alpha{}_{\alpha\mu} = \frac{1}{2} \nabla_\mu h, \quad (3.20.20c)$$

$$H^\mu := H^{\mu\alpha}{}_\alpha = \nabla^\alpha h_\alpha^\mu - \frac{1}{2} \nabla^\mu h, \quad (3.20.20d)$$

$$\nabla^\alpha H_{(\mu\nu)\alpha} = \frac{1}{2} \square h_{\mu\nu}, \quad (3.20.20e)$$

$$\nabla_\alpha H^\alpha{}_{\mu\nu} = \nabla_\alpha \nabla_{(\mu} h_{\nu)}^\alpha - \frac{1}{2} \square h_{\mu\nu}. \quad (3.20.20f)$$

これより,

$$\begin{aligned} \tilde{R}^\mu{}_{\nu\lambda\sigma} &= R^\mu{}_{\nu\lambda\sigma} + 2\nabla_{[\lambda} H^\mu{}_{\sigma]\nu} \\ &\quad - 2h_\alpha^\mu \nabla_{[\lambda} H^\alpha{}_{\sigma]\nu} - 2\nabla_{[\lambda} h_{\alpha]}^\mu H^\alpha{}_{\sigma]\nu} \\ &\quad + H^\mu{}_{\lambda\alpha} H^\alpha{}_{\nu\sigma} - H^\mu{}_{\sigma\alpha} H^\alpha{}_{\nu\lambda} + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned} \quad (3.20.21)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + \nabla_\alpha H^\alpha{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla_\mu \nabla_\nu h \\ &\quad + h^{\alpha\beta} (-\nabla_\beta H_{\alpha\mu\nu} + \nabla_\nu H_{\alpha\beta\mu}) - \nabla_\beta h_\alpha^\beta H^\alpha{}_{\mu\nu} + \nabla_\nu h_\alpha^\beta H^\alpha{}_{\beta\mu} \\ &\quad + \frac{1}{2} \nabla_\alpha h H^\alpha{}_{\mu\nu} - H_{\alpha\mu\beta} H^{\beta\nu\alpha} + \mathcal{O}(h^3), \\ &= R_{\mu\nu} + \nabla_\alpha H^\alpha{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla_\mu \nabla_\nu h \\ &\quad - \nabla_\alpha (h_\beta^\alpha H^\beta{}_{\mu\nu}) + \frac{1}{4} \nabla_\mu \nabla_\nu (h_\beta^\alpha h_\alpha^\beta) \\ &\quad + \frac{1}{2} \nabla_\alpha h H^\alpha{}_{\mu\nu} - H^\alpha{}_{\beta\mu} H^\beta{}_{\alpha\nu}. \end{aligned} \quad (3.20.22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= R + \nabla_\alpha \nabla_\beta h^{\alpha\beta} - \square h - h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \\ &\quad + h^{\alpha\beta} (\nabla_\alpha \nabla_\beta h - \nabla_\alpha \nabla_\mu h_\beta^\mu + \square h_{\alpha\beta} - \nabla_\mu \nabla_\alpha h_\beta^\mu) \\ &\quad - H_\alpha H^\alpha + H_{\alpha\beta\gamma} H^{\alpha\beta\gamma} + h_\alpha^\mu h^{\alpha\nu} R_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^3) \\ &= R + \nabla_\mu H^\mu - R_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \square h \\ &\quad - \nabla_\alpha \left\{ h^{\mu\nu} H^\alpha{}_{\mu\nu} + h^{\alpha\mu} (\nabla_\beta h_\mu^\beta - \nabla_\mu h) + \frac{1}{4} \square (h_\beta^\alpha h_\alpha^\beta) \right\} \\ &\quad + \nabla_\alpha h^{\mu\nu} H^\alpha{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla_\alpha h \nabla^\alpha h - H_{\alpha\beta\gamma} H^{\beta\alpha\gamma} + R_{\mu\nu} h_\alpha^\mu h^{\alpha\nu} \end{aligned} \quad (3.20.23)$$

□

### 3.20.2.2 Einstein-Hilbert 作用

【公式 3.96 (Einstein-Hilbert 作用)】 Einstein-Hilbert タイプ作用密度の計量に関する 2 次摂動は

$$\begin{aligned}
\tilde{R} \approx 1 &= *1 \left[ R + \nabla_\mu \nabla_\nu h^{\mu\nu} - \square h - h^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \right. \\
&\quad + h^{\mu\nu} (\nabla_\mu \nabla_\nu h - \nabla_\mu \nabla_\alpha h_\nu^\alpha - \nabla_\alpha \nabla_\mu h_\nu^\alpha + \square h_{\mu\nu}) \\
&\quad + \frac{h}{2} (\nabla_\mu \nabla_\nu h^{\mu\nu} - \square h) - H^\alpha H_\alpha + H_{\alpha\beta\gamma} H^{\alpha\beta\gamma} \\
&\quad + h_\alpha^\mu h^{\alpha\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h h^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} R + \frac{h^2}{8} R \\
&\quad \left. + O(h^3) \right] \\
&= *1 \left[ R + \nabla_\mu \nabla_\nu h^{\mu\nu} - \square h - h^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \right. \\
&\quad + \frac{1}{4} h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\mu h_\nu^\alpha + \frac{1}{2} h \nabla_\alpha \nabla_\beta h^{\alpha\beta} - \frac{1}{4} h \square h \\
&\quad + h_\alpha^\mu h^{\alpha\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h h^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} R + \frac{h^2}{8} R \\
&\quad \left. + O(h^3) \right]. \tag{3.20.24}
\end{aligned}$$

(注：2015/8/2 に 2 次項から得られる線形方程式と Einstein 方程式より直接得られる線形摂動方程式が一致することを確認.)

この  $h_{\mu\nu}$  についての 1 次変分は

$$\frac{2\kappa^2}{*1} \frac{\delta}{\delta h_{\mu\nu}} \int *1 \frac{1}{2\tilde{\kappa}^2} \tilde{R} = \kappa^2 (\nabla^\mu \nabla^\nu - g^{\mu\nu} \square - G^{\mu\nu}) \left( \frac{1}{\tilde{\kappa}^2} \right) - \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta_h (\sqrt{-g} G^{\mu\nu}). \tag{3.20.25}$$

□

### 3.20.2.3 理想流体の作用

【公式 3.97 (理想流体の作用)】 理想流体の作用密度の 1 次変分は

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}_M &= \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} *1 \\
T^{\mu\nu} &= (\rho + P) u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu} \tag{3.20.26}
\end{aligned}$$



と表されるので, 2次変分は

$$\begin{aligned} \delta^{(2)} \mathcal{L}_M &= \frac{1}{4} h_{\mu\nu} \{ \delta \rho u^\mu u^\nu + \delta P (u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu}) + 2(\rho + P) \delta u^\nu u^\mu \} *1 \\ &\quad + \left( -\frac{P}{4} h_\nu^\mu h_\mu^\nu + \frac{1}{8} T^{\mu\nu} h h_{\mu\nu} \right) *1. \end{aligned} \quad (3.20.27)$$

□

### 3.20.2.4 Chern-Simons 型作用 (4D)

【公式 3.98 (Chern-Simons 型作用 (4D))] Chern-Simons 型作用密度

$$\mathcal{C}_{\text{CS}} = \sigma(\phi) \text{Tr}(\mathcal{R} \wedge \mathcal{R}) = 2\sigma(*R)_{abcd} R^{abcd} *1 \quad (3.20.28)$$

に対して,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}}_{\text{CS}} &= \mathcal{C}_{\text{CS}} - 2\nabla_\alpha (\sigma(*R)^{\mu\nu\alpha\beta} H_{\nu\mu\beta}) *1 + 2\nabla_\alpha \sigma(*R)^{\mu\nu\alpha\beta} \nabla_\mu h_{\nu\beta} *1 \\ &\quad + 2\nabla_\alpha (\sigma(*R)^{\mu\nu\alpha\beta} h_{\nu\gamma} H^\gamma_{\mu\beta}) *1 \\ &\quad - \left[ \sigma \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\alpha H^{\mu\nu}{}_\beta \nabla_\gamma H_{\nu\mu\delta} + 2\sigma(*R)^{\mu\nu\alpha\beta} H_{\nu\alpha\gamma} H^\gamma_{\mu\beta} \right. \\ &\quad \left. + 2\nabla_\alpha \sigma(*R)^{\mu\nu\alpha\beta} h_{\nu\gamma} H^\gamma_{\mu\beta} \right] *1 + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned} \quad (3.20.29)$$

これより,

$$\begin{aligned} T^{\text{CS}\mu\nu} &:= \frac{2}{*1} \frac{\delta}{\delta h_{\mu\nu}} \int \mathcal{C}_{\text{CS}} \\ &= -\frac{1}{4} (*R)^{\mu\alpha\nu\beta} R_{\alpha\beta} \delta \sigma^{(1)} \\ &\quad - \frac{1}{4} \nabla_\gamma \nabla_\delta \sigma \left( \epsilon^{\alpha\beta\gamma(\nu} \nabla_\alpha \nabla^\mu h_{\beta}^\delta - \epsilon^{\alpha\beta\gamma(\nu} \nabla_\alpha \nabla^{|\delta|} h_{\beta}^\mu \right) \\ &\quad \quad - (*R)^{\delta\alpha\gamma(\nu} h_{\alpha}^\mu + (*R)^{\alpha(\mu\nu)\gamma} h_{\alpha}^\delta) \\ &\quad - \frac{1}{4} \nabla_\gamma \sigma \left\{ (-(*R)^{\alpha(\nu|\beta\gamma|} + (*R)^{\alpha\beta(\nu|\gamma|} - (*R)^{\beta(\nu|\alpha\gamma|}) \nabla_\alpha h_{\beta}^\mu \right. \\ &\quad \quad + (*R)^{\alpha(\nu|\beta\gamma|} \nabla^\mu h_{\alpha\beta} + (*R)^{\alpha(\mu\nu)\gamma} \nabla_\beta h_{\alpha}^\beta \\ &\quad \quad - \epsilon^{\gamma\beta\delta(\nu} \nabla_\beta R_{\delta\alpha} h^{\mu)\alpha} + (\nabla_\delta *R^{\alpha(\mu\nu)\gamma}) h_{\alpha}^\delta \\ &\quad \quad \left. + \epsilon^{\alpha\beta\gamma(\nu} (\nabla_\delta \nabla_\alpha \nabla^\mu h_{\beta}^\delta - \nabla_\delta \nabla_\alpha \nabla^{|\delta|} h_{\beta}^\mu) \right\}. \end{aligned} \quad (3.20.30)$$

(2010.7.23:場の方程式との摂動から方程式と一致することを確認.) □

## 3.21 諸定理

### 3.21.1 共形 Killing ベクトル

【命題 3.99 (CK 場の最大数)】 多様体の次元を  $n$  とするとき, 共形 Killing 方程式

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 2\omega g_{\mu\nu}, \quad \omega = \frac{1}{n} \nabla \cdot \xi \quad (3.21.1)$$

の解  $\xi$  に対し,

$$F_{\mu\nu} = \nabla_{[\mu} \xi_{\nu]}, \quad \omega_\mu = \nabla_\mu \omega \quad (3.21.2)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} (n-2)\nabla_\mu \nabla_\nu \omega &= -\omega \left( 2R_{\mu\nu} - \frac{R}{n-1} g_{\mu\nu} \right) - 2R_{(\mu}^\alpha F_{\nu)\alpha} \\ &\quad - \left( \nabla^\alpha R_{\mu\nu} - \frac{1}{2(n-1)} \nabla^\alpha R g_{\mu\nu} \right) \xi_\alpha \end{aligned} \quad (3.21.3)$$

が成り立つ. これより, 任意の曲線  $C$  にそって次の常微分方程式が成り立つ:

$$\nabla_u \xi_\mu = u_\mu \omega + u^\nu F_{\nu\mu}, \quad (3.21.4a)$$

$$\nabla_u F_{\mu\nu} = -R_{\mu\nu\lambda\sigma} u^\lambda \xi^\sigma - 2u_{[\mu} \omega_{\nu]}, \quad (3.21.4b)$$

$$\nabla_u \omega = u^\mu \omega_\mu, \quad (3.21.4c)$$

$$\begin{aligned} \nabla_u \omega_\mu &= -\frac{1}{n-2} \left( 2R_{\mu\nu} u^\nu - \frac{1}{n-1} R u_\mu \right) \omega - \frac{2}{n-2} u^\nu R_{(\mu}^\alpha F_{\nu)\alpha} \\ &\quad - \frac{1}{n-2} \left( u^\nu \nabla_\alpha R_{\mu\nu} - \frac{1}{2(n-1)} u_\mu \nabla_\alpha R \right) \xi^\alpha. \end{aligned} \quad (3.21.4d)$$

ここで,  $u$  は  $C$  の接ベクトル. これより,  $n > 2$  のとき, 共形 Killing 方程式の線形独立な解の個数は, 高々,  $(n+1)(n+2)/2$ .  $\square$

【命題 3.100 (定曲率空間の CKV)】 次元  $D$  の定曲率空間  $(E^D, S^D, H^D)$  の共形 Killing ベクトルの作る Lie 代数は,  $SO(D+1, 1)$  の Lie 代数と同型となる. また, 定曲率時空  $(E^{D-1,1}, dS^D, adS^D)$  の共形 Killing ベクトルの作る Lie 代数は,  $SO(D, 2)$  の Lie 代数と同型となる. 具体的な共形 Killing ベクトルの表式は

1.  $E^D, E^{D-1,1}$ : 生成元は次の表式で定義されるベクトル場  $P_a, M_{ab}, D$ ,

$Q_a$  :

$$P_a = \partial_a, \quad (3.21.5a)$$

$$M_{ab} = x_b \partial_a - x_a \partial_b, \quad (3.21.5b)$$

$$D = x^a \partial_a, \quad (3.21.5c)$$

$$Q_a = x_a x \cdot \partial - \frac{1}{2} x^2 \partial_a \quad (3.21.5d)$$

Lie 代数は

$$\begin{aligned} [M_{ab}, M_{cd}] &= 2\eta_{a[c} M_{e]b} - 2\eta_{b[d} M_{e]a}, \\ [M_{ab}, P_c] &= 2\delta_{a[c} P_{b]}, [M_{ab}, Q_c] = 2\eta_{c[a} Q_{b]}, \\ [D, P_a] &= -P_a, [D, Q_a] = Q_a, [D, M_{ab}] = 0, \\ [P_a, P_b] &= 0, [Q_a, Q_b] = 0 \\ [P_a, Q_b] &= \eta_{ab} D + M_{ab}. \end{aligned} \quad (3.21.6)$$

これらの生成元は  $SO(D+1, 1)$  ないし  $SO(D, 2)$  の Lie 代数の基底と次の様に対応 :

$$D \mapsto M_{+-}, \quad P_a \mapsto M_{+a}, \quad Q_a \mapsto M_{-a}. \quad (3.21.7)$$

2.  $S^D, H^D, dS^D, adS^D$ : これらを  $E^{p,q}(p+q=D+1)$  の 2 次超曲面

$$\eta_{AB} X^A X^B = \epsilon (= \pm 1) \quad (3.21.8)$$

として実現する. ただし,  $S^D \subset E^{D+1}$ ,  $H^D, dS^D \subset E^{D,1}$ ,  $adS^D \subset E^{D-1,2}$  で,  $\epsilon$  は曲率. このとき, 等長変換群  $O(p, q)$  に含まれない  $(D+1)$  個の非等長共形 Killing ベクトルが次の表式で与えられる :

$$\xi^\mu : \delta X^A = l^A - \epsilon(l \cdot X) X^A \quad (3.21.9)$$

ここで,  $l^A$  は  $E^{p,q}$  の勝手な定数ベクトル.

□

**【命題 3.101】**  $E^D$  および  $E^{D-1,1}$  の非等長共形 Killing ベクトル

$$l^a Q_a = l^a (x_a x \cdot \partial - \frac{1}{2} x^2 \partial_a) \quad (3.21.10)$$

の生成する局所 1 径数変換は

$$\Phi_s(x_0) : x^a = \frac{x_0^a - \frac{s}{2}x_0^2 l^a}{\frac{s^2}{4}l^2 x_0^2 - s x_0 \cdot l + 1} \quad (3.21.11)$$

$S^D, H^D, dS^D, adS^D$  の非等長共形 Killing ベクトル

$$\delta X^A = l^A - \epsilon(l \cdot X)X^A \quad (3.21.12)$$

が生成する局所 1 径数変換は

$$X^A = \frac{X_a^A + l^A \left\{ \frac{1}{c} \sinh(cs) + \frac{l \cdot X_0}{l^2} (\cosh(cs) - 1) \right\}}{\cosh(cs) + \epsilon \frac{l \cdot X_0}{c} \sinh(cs)}. \quad (3.21.13)$$

ここで,

$$c = \sqrt{\epsilon l^2}. \quad (3.21.14)$$

ただし,  $l^2 = 0$  の時には,

$$X^A = \frac{X_0^A + \left\{ s + \frac{1}{2}s^2(l \cdot X_0) \right\} l^A}{1 + \epsilon s(l \cdot X_0)}. \quad (3.21.15)$$

この変換族は,  $l^A$  が光的ないし時間的な場合は特異点をもち, 全空間 (時空) に正則に拡張できない. しかし,  $S^D$  の場合のみ,  $SO(D+1, 1)$  が大域の変換群として実現される. □

T2<sub>l</sub>共形変換

### 3.21.2 共形変換

【命題 3.102 (E 定数を変える共形変換 [DG2005.10.6])]  $n$  次元多様体上の計量  $g_{\mu\nu}$  が

$$R_{\mu\nu} = (n-1)\lambda g_{\mu\nu} \quad (3.21.16)$$

を満たす. このとき,  $g_{\mu\nu}$  から Weyl 変換で得られる計量

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \phi^{-2} g_{\mu\nu} \quad (3.21.17)$$

に対して,

$$\hat{R}_{\mu\nu} = (n-1)\hat{\lambda}\hat{g}_{\mu\nu} \quad (3.21.18)$$

が成り立つなら,  $\phi$  は, ある定数  $c$  に対して

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \phi = (c - \lambda\phi)g_{\mu\nu} \quad (3.21.19)$$

を満たす.

逆に, この方程式を満たす  $\phi$  が存在すると, Weyl 変換

$$\hat{g}_{\mu\nu} = k^{-2}(\phi + b)^{-2}g_{\mu\nu} \quad (3.21.20)$$

に対して

$$\hat{R}_{\mu\nu} = (n-1)\hat{\lambda}\hat{g}_{\mu\nu}; \quad (3.21.21)$$

$$\hat{\lambda} = k^2 [-\lambda\phi^2 + 2c\phi - (\nabla\phi)^2 + \lambda b^2 + 2cb] (= \text{const}) \quad (3.21.22)$$

が成り立つ. □

**【命題 3.103 (Scalar Killing)[DG2005.10.5]】**  $n$  次元 (擬) Riemann 多様体  $X$  上で

$$\nabla_\mu \nabla_\nu u = ag_{\mu\nu}, \quad du \neq 0 \quad (3.21.23)$$

を満たす関数  $u$  が存在する. このとき,  $R_{\mu\nu}\nabla^\nu u = 0$  が成り立つ.

- 1)  $(\nabla u)^2 \neq 0$  のとき: このとき, 局所的に  $X = \mathbb{R} \times Y$  で計量は,  $b$  を定数,  $q_{ij}$  を  $Y$  上の計量として,

$$ds^2 = |2au + b| \left[ \pm \frac{du^2}{(2au + b)^2} + q_{ij}(y)dy^i dy^j \right] \quad (3.21.24)$$

と表される. また,  $X$  と  $Y$  の Ricci 曲率は次の関係で結ばれる:

$$R_{ij}(Y) = R_{ij}(X) \pm (n-2)a^2 q_{ij}(Y). \quad (3.21.25)$$

- 2)  $(\nabla u)^2 \equiv 0$  のとき: このとき,  $a = 0$  で, 局所的に計量は

$$ds^2 = 2du(dp + adu + b_i dz^i) + g_{ij} dz^i dz^j \quad (3.21.26)$$

と書かれる. ここで,  $a, b_i, g_{ij}$  は  $\rho$  に依存しない関数.

□

【命題 3.104 (共形スカラ Killing[GR2005.10.6])]  $n$  次元 (擬) Riemann 多様体  $(M, g_{\mu\nu})$  において,

$$\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi = \frac{1}{n}\nabla^2\phi g_{\mu\nu}, \quad (\nabla\phi)^2 \neq 0 \quad (3.21.27)$$

を満たす関数  $\phi$  が存在するとする. このとき,  $\nabla^2\phi$  および  $(\nabla\phi)^2$  は  $\phi$  のみの関数となる. さらに,  $\nabla^{\mu}\phi$  は計量

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{1}{|(\nabla\phi)^2|} g_{\mu\nu} \quad (3.21.28)$$

に対するスカラ Killing ベクトルとなる:

$$\tilde{\nabla}_{\mu}\tilde{\nabla}_{\nu}\tilde{\phi} = 0, \quad (3.21.29)$$

$$d\tilde{\phi} = \frac{d\phi}{(\nabla\phi)^2}. \quad (3.21.30)$$

したがって, もとの計量  $g_{\mu\nu}$  は

$$ds^2 = \frac{d\phi^2}{(\nabla\phi)^2} + |(\nabla\phi)^2| g_{ij}(y) dy^i dy^j \quad (3.21.31)$$

と表される. □

【命題 3.105 (共形 Killing スカラに対する球面定理)]  $(n+1)$  次元 (擬) Riemann 多様体  $M$  上に

$$\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi + m^2 g_{\mu\nu}\phi = 0 \quad (3.21.32)$$

を満たすスカラ場が存在すると, 計量と  $\phi$  は

$$ds^2 = \frac{1}{m^2} d\chi^2 + m^2 \phi_0^2 \sin^2 \chi g(Y_n), \quad (3.21.33a)$$

$$\phi = \phi_0 \cos \chi \quad (3.21.33b)$$

と表される.

特に,  $M$  がコンパクト閉の滑らかな Riemann 多様体なら,  $M$  は半径  $1/m$  の球面  $S^{n+1}$  となる. □

【系 3.106]  $(n+1)$  次元コンパクト閉 Einstein 空間  $M$  ( $R_{ab} = nm^2 g_{ab}$ ) において, スカラ場が

$$\Delta_{n+1}\phi = -(n+1)m^2\phi \quad (3.21.34)$$

の至る所正則な解なら, 方程式

$$\nabla_a\nabla_b\phi + m^2 g_{ab}\phi = 0 \quad (3.21.35)$$

を満たす. したがって,  $M$  は球面  $S^{n+1}$  となる. □

### 3.21.3 保存則

【定理 3.107 (一般 Noether 公式)】 場の組  $\phi$  の作用積分が

$$S = \int d^n x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_{\mu\nu} \phi, \dots; \omega)$$

で与えられるとする. ここで,  $\omega$  は非力学的背景場である. いま, 時空および場に対して作用する変換族

$$f = f_\epsilon : x \mapsto x' = f(x), \quad \phi \mapsto f_* \phi$$

に対して,

$$f^*(d^n x \mathcal{L}(f_* \phi, \partial_\mu(f_* \phi), \dots; \omega)) = d^n x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \dots; \omega)$$

が成り立つとすると, current

$$\begin{aligned} \epsilon J^\mu := & \delta x^\mu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \bar{\delta} \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\mu\nu}} \partial_\nu \bar{\delta} \phi - \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu\nu} \right) \bar{\delta} \phi \\ & + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\mu\nu\lambda}} \partial_\nu \partial_\lambda \bar{\delta} \phi - \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\mu\nu\lambda}} \right) \partial_\lambda \bar{\delta} \phi + \partial_\nu \partial_\lambda \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\mu\nu\lambda}} \right) \bar{\delta} \phi \\ & + \dots \end{aligned}$$

が保存される:

$$\partial_\mu J^\mu = 0.$$

ここで,

$$x' = x + \delta x, \quad f_* \phi = \phi + \bar{\delta} \phi$$

である. ( $\bar{\delta} \phi = -\mathcal{L}_{\delta x} \phi + \dots$ ) □

## 3.22 公式・命題・定理の証明

公式 3.2.4.2 の証明. 定義より,

$$\begin{aligned} F_{0I}^{(\pm)'} &= \frac{1}{2} \left( \Lambda_0^a \Lambda_I^b F_{ab} \mp \frac{i}{2} \epsilon_{IJK} \Lambda^J{}_a \Lambda^K{}_b F^{ab} \right) \\ &= \frac{1}{2} \Lambda^{(\pm)}{}_I{}^J F_{0J} \mp \frac{i}{4} \epsilon_{IJK} \Lambda^J{}_L \Lambda^K{}_M F^{LM} + \frac{1}{2} \Lambda_0^J \Lambda_I^K F_{JK} \\ &= \frac{1}{2} \Lambda^{(\pm)}{}_I{}^J F_{0J}^{(\pm)} \\ &\quad \mp \frac{i}{4} \epsilon_{IJK} \Lambda^J{}_L \Lambda^K{}_M F^{LM} \pm \frac{i}{4} (\Lambda_0^0 \Lambda_I^J - \Lambda_I^0 \Lambda_0^J) \epsilon_{JKL} F^{KL} \\ &\quad + \frac{1}{2} \Lambda_0^J \Lambda_I^K F_{JK} - \frac{1}{4} \epsilon_{IKL} \Lambda^K{}_0 \Lambda^L{}_J \epsilon_{JMP} F^{MP} \end{aligned}$$

ここで,

$$\epsilon_{abcd}\Lambda_p^c\Lambda_q^d\Lambda_r^a\Lambda_s^b = \epsilon_{pqrs} (\det \Lambda = 1) \Leftrightarrow \epsilon_{abcd}\Lambda_p^c\Lambda_q^d = \Lambda_a^r\Lambda_b^s\epsilon_{rspq}$$

において,  $a = 0, b = I$  とおくと,

$$\begin{aligned} p = 0, q = J &\Rightarrow \epsilon_{IKL}\Lambda_0^K\Lambda_J^L = \Lambda_0^K\Lambda_I^L\epsilon_{KLJ}, \\ p = K, q = L &\Rightarrow \epsilon_{IJK}\Lambda_L^J\Lambda_M^K = (\Lambda_0^0\Lambda_I^J - \Lambda_0^J\Lambda_I^0)\epsilon_{JLM} \end{aligned}$$

が成り立つ. これらを上式に代入して, 題意の変換式を得る.

次に,  $\Lambda^{(\pm)} \in \text{SO}(3, \mathbb{C})$  を示す. まず, 一般に,  $F^{(\pm)} \in \mathcal{A}_{\pm}^2$  に対して,

$$F_{ab}^{(\pm)} F^{(\pm)ab} = 4F_{0I}^{(\pm)} F^{(\pm)0I}$$

また,

$$(1 \mp *)^{pq}_{ab} (1 \mp *)^{cd}_{pq} = -2(1 \mp *)^{cd}_{ab}$$

よって,

$$\begin{aligned} \Lambda^{(\pm)I^K}\Lambda^{(\pm)JK} &= 4(1 \mp i^*)^{0K}_{ab}\Lambda_0^a\Lambda_I^b(1 \mp i^*)_{0Kcd}\Lambda_0^c\Lambda_J^d \\ &= (1 \mp i^*)^{pq}_{ab}(1 \mp i^*)_{pqcd}\Lambda_0^a\Lambda_I^b\Lambda_0^c\Lambda_J^d \\ &= -2(1 \mp *)_{abcd}\Lambda_0^a\Lambda_I^b\Lambda_0^c\Lambda_J^d = \delta_{IJ}. \end{aligned}$$

Q.E.D.

[【公式 3.2.4.2 に戻る】](#)



## 4 公式集：物理一般

Last update: 2009年6月23日

### 4.1 電磁気学

#### 4.1.1 単位系

##### 4.1.1.1 真空中の電磁気学

真空中の電磁気学で用いられる単位系のほとんどは、次の法則に含まれる2つの定数  $k_1, k_3$  で分類される：

- Coulomb の法則： $F = qE = k_1 \frac{qq'}{r^2}$ .
- Ampere の法則： $\frac{dF}{dt} = IB = \frac{2k_1}{ck_3} \frac{II'}{d}$ .  $I = \int_{\Sigma} d\Sigma n \cdot J$
- 真空中の電磁波が光速  $c$  で伝播する.
- 荷電保存則： $\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$

これらの要請より、Maxwell 方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k_1 \rho, \quad (4.1.1a)$$

$$ck_3 \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} = \frac{4\pi k_1}{c} \mathbf{j}, \quad (4.1.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + k_3 \partial_t \mathbf{B} = 0, \quad (4.1.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.1.1d)$$

電磁テンソルと電流密度4元ベクトルを

$$F^{0i} = E^i, \quad F_{ij} = ck_3 \epsilon_{ijk} B^k, \quad (4.1.2a)$$

$$J^0 = \rho, \quad J^i = \frac{1}{c} j^i \quad (4.1.2b)$$

と定義すると、対応する Lorentz 不変形式は

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0, \quad \partial_{\nu} F^{\mu\nu} = 4\pi k_1 J^{\mu}. \quad (4.1.3)$$

作用積分は

$$S = \int -mc ds + qA_{\mu} dx^{\mu} - \int d^4x \frac{1}{16\pi k_1} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.1.4)$$

また、エネルギー運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi k_1} \left\{ F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right\}. \quad (4.1.5)$$

電場、磁場を用いて表すと

$$\rho := T_{00} = \frac{1}{8\pi k_1} \{ \mathbf{E}^2 + (ck_3)^2 \mathbf{B}^2 \}, \quad (4.1.6a)$$

$$\mathbf{S} := (T_0^i) = -\frac{ck_3}{4\pi k_1} \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (4.1.6b)$$

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi k_1} \left\{ -E_i E_j - (ck_3)^2 B_i B_j + \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + (ck_3)^2 \mathbf{B}^2) \delta_{ij} \right\} \quad (4.1.6c)$$

Heaviside-Lorentz 単位系での電磁場に関する物理量の次元は以下のようになる：

$$[E] = [B] = \left[ \frac{\sqrt{\hbar c}}{L^2} \right], \quad (4.1.7a)$$

$$[Q] = [\sqrt{\hbar c}] \Rightarrow [J] = \left[ \frac{\sqrt{\hbar c}}{L^3} \right], \quad [I] = \left[ \frac{\sqrt{\hbar c}}{L} \right]. \quad (4.1.7b)$$

なお、磁荷が存在するとする場合、

$$B = k_1 \frac{Q_m}{r^2} \quad (4.1.8)$$

を要請するのが自然である。このとき、

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi k_1 \rho_m \quad (4.1.9)$$

となる。ただし、磁場が磁気単極子に及ぼす力は、作用反作用の法則を考慮しても、比例係数を除いてしか決まらない：

$$F = k_4 Q_m B \quad (4.1.10)$$

## 4.2 量子論

### 4.2.1 井戸型ポテンシャル

$$\left( -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \Psi(x) = E \Psi(x) \quad (4.2.1)$$

単位系	$4\pi k_1$	$ck_3$	$Q_e$	$E$	$I$	$B$
Heaviside-Lorentz	1	1	1	1	1	1
Gauss	$4\pi$	1	$1/\sqrt{4\pi}$	$\sqrt{4\pi}$	$1/\sqrt{4\pi}$	$\sqrt{4\pi}$
esu	$4\pi$	$c$	$1/\sqrt{4\pi}$	$\sqrt{4\pi}$	$\sqrt{c/(4\pi)}$	$\sqrt{4\pi/c}$
emu	$4\pi c^2$	$c$	$1/\sqrt{4\pi c}$	$\sqrt{4\pi c}$	$1/\sqrt{4\pi c}$	$\sqrt{4\pi c}$
有理 MKSA	$\frac{1}{\epsilon_0}$	$c$	$\sqrt{\epsilon_0}$	$1/\sqrt{\epsilon_0}$	$\sqrt{c\epsilon_0}$	$1/\sqrt{c\epsilon_0}$

表 8: 主要単位系での  $k_1$  と  $k_3$ .  $1/\epsilon_0 = 4\pi \times 10^{-7} c^2$ 

## 4.2.1.1 階段ポテンシャル

ポテンシャル :

$$V = \begin{cases} V_0 (= \text{const}) & ; x > 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases} \quad (4.2.2)$$

正規直交基底 :  $p, k, \kappa$  を

$$2mE = p^2, \quad 2m(E - V) = k^2 = -\kappa^2 \quad (4.2.3)$$

により定義する. このとき,  $E > V_0$  に対し,

$$\Psi_E^{(1)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{k}{\pi p(p+k)}} \cos(px) & ; x < 0, \\ \sqrt{\frac{k}{\pi p(p+k)}} \cos(kx) & ; x > 0 \end{cases}, \quad (4.2.4a)$$

$$\Psi_E^{(2)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\pi(p+k)}} \sin(px) & ; x < 0, \\ \frac{p}{k} \sqrt{\frac{1}{\pi(p+k)}} \sin(kx) & ; x > 0 \end{cases}, \quad (4.2.4b)$$

 $E < V_0$  に対し

$$\Psi_E^{(B)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{p}{2\pi m V_0}} e^{-\kappa x} & ; x > 0, \\ \sqrt{\frac{p}{2\pi m V_0}} \left( \cos(px) - \frac{\kappa}{p} \sin(px) \right) & ; x < 0 \end{cases}, \quad (4.2.5a)$$

$$\Psi_E^{(U)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{p}{2\pi m V_0}} e^{\kappa x} & ; x > 0, \\ \sqrt{\frac{p}{2\pi m V_0}} \left( \cos(px) + \frac{\kappa}{p} \sin(px) \right) & ; x < 0 \end{cases}, \quad (4.2.5b)$$

(4.2.5c)

とおくと,  $\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \Psi^{(B)}$  がエネルギー固有値問題の正規直交基底を与える :

$$\left( \Psi_{E'}^{(i)}, \Psi_E^{(j)} \right) = \delta^{ij} \delta(E - E'). \quad (4.2.6)$$

反射率と透過率：  $E > V_0$  に対し

$$\Psi_E^{(R)} := \sqrt{\pi(p+k)} \left( \sqrt{\frac{p}{k}} \Psi_E^{(1)} + i \frac{k}{p} \Psi_E^{(2)} \right) \quad (4.2.7)$$

とおくと,

$$\Psi_E^{(R)} = \begin{cases} e^{ikx} & ; x > 0 \\ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{k}{p} \right) e^{ipx} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{k}{p} \right) e^{-ipx} & ; x < 0 \end{cases} \quad (4.2.8)$$

より,  $x < 0$  で右に伝わる波の反射率  $R$  と透過率  $T$  は,

$$R = \frac{(p-k)^2}{(p+k)^2}, \quad T = \frac{2pk}{(p+k)^2}. \quad (4.2.9)$$

#### 4.2.1.2 簡単な井戸型ポテンシャル

ポテンシャル：

領域 I  $x > L$ :  $V = V_1 = \text{const}$

領域 II  $x < 0 < L$ :  $V = 0$

領域 III  $x < 0$ :  $V = V_3 = \text{const}$

拘束状態

領域 I

$$\Phi = C_1 e^{-\kappa_1 x}, \quad \kappa_1 = \sqrt{2m(V_1 - E)}. \quad (4.2.10)$$

領域 II

$$\Phi = A_2 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx}, \quad k = \sqrt{2mE}. \quad (4.2.11)$$

領域 III

$$\Phi = D_3 e^{\kappa_3 x}, \quad \kappa_3 = \sqrt{V_3 - E} \quad (4.2.12)$$

接続条件より,

$$A_2 = \frac{C_1}{2} \left( 1 + \frac{i\kappa_1}{k} \right) e^{-(ik+\kappa_1)L}, \quad (4.2.13a)$$

$$B_2 = \frac{C_1}{2} \left( 1 - \frac{i\kappa_1}{k} \right) e^{-(-ik+\kappa_1)L}, \quad (4.2.13b)$$

および,

$$A_2 + B_2 = D_3, \quad ik(A_2 - B_2) = \kappa_3 D_3 \quad (4.2.14)$$

を得る.

## 4.3 素粒子物理

### 4.3.1 散乱断面積

#### 4.3.1.1 一般論

## 4.4 統計物理

### 4.4.1 熱力学関係式

#### 4.4.1.1 熱力学的ポテンシャル

- エントロピー

断熱微分関係式

$$TdS = dE + PdV - \mu dN \quad (4.4.1)$$

- 自由エネルギー

定義：

$$F := E - TS \quad (4.4.2)$$

断熱微分関係式

$$dF = -SdT - PdV + \mu dN \quad (4.4.3)$$

- 熱力学ポテンシャル

定義:

$$\Omega := E - TS - \mu N \quad (4.4.4)$$

恒等関係式

$$\Omega = -PV \quad (4.4.5)$$

断熱微分関係式

$$d\Omega = -SdT - PdV - Nd\mu \quad (4.4.6)$$

## 4.4.2 自由粒子

### 4.4.2.1 一般公式

- 熱力学的ポテンシャル

$$\Omega \equiv -PV = \pm gTV \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \ln(1 \mp e^{-\beta(\omega-\mu)}). \quad (4.4.7)$$

- 粒子数密度

$$n \equiv -\frac{1}{V} \frac{\partial \Omega}{\partial V} = g \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{\beta(\omega-\mu)} \pm 1} \quad (4.4.8)$$

- エネルギー密度

$$\rho \equiv \frac{\Omega + TS + \mu N}{V} = g \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\omega}{e^{\beta(\omega-\mu)} \pm 1} \quad (4.4.9)$$

- エントロピー密度

$$\begin{aligned} s &\equiv -\frac{1}{V} \frac{\partial \Omega}{\partial T} = \frac{P + \rho - \mu n}{T} \\ &= g \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \left[ \mp \ln(1 \mp e^{-\beta(\omega-\mu)}) + \frac{\beta(\omega-\mu)}{e^{\beta(\omega-\mu)} \pm 1} \right] \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

### 4.4.2.2 近似式

- Boltzmann 近似 :  $mc^2 - \mu \gg T$  粒子数密度は

$$n \simeq g e^{\beta(\mu-mc^2)} \left( \frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} F_1(T/mc^2), \quad (4.4.11a)$$

$$P \simeq nT, \quad (4.4.11b)$$

$$\rho \simeq nmc^2 F_2(T/mc^2) / F_1(T/mc^2), \quad (4.4.11c)$$

$$Ts = \rho + P - \mu n. \quad (4.4.11d)$$

ここで,

$$F_n(\alpha) = \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^\infty dt (1 + \alpha t)^n \sqrt{t(2 + \alpha t)} e^{-t}. \quad (4.4.12)$$

– 非相対論的:  $T \ll mc^2$

$$n \simeq g \left( \frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{\beta(\mu - mc^2)}, \quad (4.4.13a)$$

$$P \simeq nT, \quad (4.4.13b)$$

$$\rho \simeq n \left( mc^2 + \frac{3}{2}T \right), \quad (4.4.13c)$$

$$s \simeq n \left( \frac{5}{2} + \ln \frac{g(mT/2\pi)^{3/2}}{n\hbar^3} \right). \quad (4.4.13d)$$

– 相対論的:  $T \gg mc^2$

$$n \simeq \frac{g}{\pi^2} \left( \frac{T}{\hbar c} \right)^3 e^{\beta\mu}, \quad (4.4.14a)$$

$$P \simeq nT, \quad (4.4.14b)$$

$$\rho \simeq 3P, \quad (4.4.14c)$$

$$s \simeq n \left( 4 + \ln \frac{gT^3}{\pi^2 n (\hbar c)^3} \right) = \frac{g}{\pi^2} \left( \frac{T}{\hbar c} \right)^3 \left( 4 - \frac{\mu}{T} \right) e^{\beta\mu} \quad (4.4.14d)$$

• 光子型相対論極限:  $T \gg |\mu|, mc^2$  (ボゾンの場合は,  $\mu \leq 0$ )

$$n \simeq \frac{g\zeta(3)}{\pi^2} \left( \frac{T}{\hbar c} \right)^3 (\times 3/4 \text{ for fermion}), \quad (4.4.15a)$$

$$\rho \simeq \frac{g\pi^2}{30(\hbar c)^3} T^4 (\times 7/8 \text{ for fermion}), \quad (4.4.15b)$$

$$P \simeq \frac{1}{3}\rho, \quad (4.4.15c)$$

$$s \simeq \frac{4}{3}P. \quad (4.4.15d)$$

注: 光子のエネルギー分布関数  $\propto E^3/(e^{E/T} - 1)$  が最大となるのは,  $E \simeq 2.82T$ . 対応する波長は  $\lambda = ch/(2.82T)$ .

• 非相対論縮退低温極限:  $mc^2 \gg \mu - mc^2 \gg T$

$$n \simeq \frac{g}{6\pi^2} \frac{p_F^3}{\hbar^3}, \quad (4.4.16a)$$

$$P = \frac{g}{30\pi^2} \frac{p_F^5}{m\hbar^3} \left( 1 + O\left( \frac{m^2 T^2}{p_F^4} \right) \right) \quad (4.4.16b)$$

- 相対論縮退低温極限:  $\mu - mc^2 \gg T, mc^2$

$$n \simeq \frac{g}{6\pi^2} \frac{p_F^3}{\hbar^3}, \quad (4.4.17a)$$

$$P = \frac{g}{24\pi^2} \frac{cp_F^4}{\hbar^3} \left( 1 + O\left(\frac{T^2}{c^2 p_F^2}\right) \right) \quad (4.4.17b)$$

## 4.5 宇宙物理

### 4.5.1 宇宙論

#### 4.5.1.1 CMB

- 温度  $T_{\text{CMB}} = 2.728 \pm 0.004(95\% \text{CL})$  [COBE 1996].
- Peak 波長  $\lambda = 1.87\text{mm}$ , Peak 振動数  $\nu = 160\text{GHz}$ .

#### 4.5.1.2 水素再結合

バリオンと輻射の摩擦係数 :  $v$  を輻射に対するバリオンの相対速度として

$$\dot{v} = -\gamma v; \quad (4.5.1)$$

$$\frac{\gamma}{H} = \frac{\rho_\gamma n_e \sigma_T}{\rho_b H} \simeq 1.3 \times 10^4 X_e \left( \frac{T}{2700\text{K}} \right)^{5/2} \left( \frac{0.02}{\Omega_{\text{b}0} h^2} \right) \left( \frac{\Omega_0 h^2}{0.2} \right)^{1/2} \quad (4.5.2)$$

#### 4.5.1.3 Hubble ホライズンサイズ

輻射優勢時 Hubble 方程式

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3c^2} \rho = \frac{8\pi G}{3c^2} g_e \frac{\pi^2}{30(\hbar c)^3} T^4 \\ &= g_e \frac{4\pi G}{45c^2} \frac{T^4}{(\hbar c)^3} = \frac{4\pi g_e}{45} \left( \frac{T}{M_{\text{pl}}} \right)^4 t_{\text{pl}}. \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

より, 温度  $T$  の時刻での Hubble ホライズン半径は

$$l_H = \frac{c}{H} = \left( \frac{45}{4\pi g_e} \right)^{1/2} \left( \frac{M_{\text{pl}}}{T} \right)^2 L_{\text{pl}}. \quad (4.5.4)$$



対応する現在のサイズは

$$a^3 g_s T^3 = 2T_{\text{CMB}}^3 + 6T_\nu^3 = \left( 2 + \left( \frac{7}{11} \right)^3 \right) T_{\text{CMB}}^3 \quad (4.5.5)$$

より,

$$\begin{aligned} L_H &= \left( \frac{g_s}{2 + (7/11)^3} \right)^{1/3} \left( \frac{45}{4\pi g_e} \right)^{1/2} \frac{M_{\text{pl}}^2}{TT_{\text{CMB}}} L_{\text{pl}} \\ &= 1.44 \frac{g_s^{1/3}}{g_e^{1/2}} \frac{M_{\text{pl}}^2}{TT_{\text{CMB}}} L_{\text{pl}} = 0.13 \text{cm} \frac{g_s^{1/3}}{g_e^{1/2}} \frac{M_{\text{pl}}}{T} \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

## 4.5.2 ブラックホール

### 4.5.2.1 成長

球対称降着 エネルギー密度  $\rho$  のガスが質量  $M$  の球対称ブラックホールに球対称に降着するとき, ガスの音速を  $c_s$  として,

$$c^2 \dot{M} \approx c_s \rho \times 4\pi (2GM/c^2)^2. \quad (4.5.7)$$

よって,

$$\frac{1}{M_0} - \frac{1}{M} \approx 16\pi G^2 \frac{c_s \rho}{c^6} (t - t_0). \quad (4.5.8)$$

よって,  $M = M_0 \rightarrow M_1$  となる時間  $\Delta t$  は

$$\Delta t \approx \frac{c^6}{16\pi G^2 M_0 c_s \rho} \left( 1 - \frac{M_0}{M_1} \right). \quad (4.5.9)$$

特に,  $M_0 \ll M_1$  のとき, この時間は  $M_0$  のみで決まり,

$$\Delta t \approx \frac{c^6}{16\pi G^2 M_0 c_s \rho} \approx 10^9 \text{yr} \left( \frac{10^{15} \text{g}}{M_0} \right) \left( \frac{0.01c}{c_s} \right) \left( \frac{2.8 \times 10^{14} \text{g/cm}^3}{\rho/c^2} \right). \quad (4.5.10)$$

### 4.5.2.2 蒸発

温度 一般に, ブラックホールの表面重力加速度を  $\kappa$  ( $[\kappa] = L/T^2$ ) として,

$$T_H = \frac{\hbar}{2\pi c} \kappa. \quad (4.5.11)$$

例えば, Schwarzschild BH に対して,

$$\kappa = \frac{c^4}{4GM} \Rightarrow T_{\text{H}} = \frac{c^3 \hbar}{8\pi GM} = 20 \left( \frac{5 \times 10^{14} \text{g}}{M} \right) \text{MeV} = 5 \times 10^{-12} \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right) \text{eV}. \quad (4.5.12)$$

蒸発時間の評価

$$c^2 \dot{M} = -4\pi \left( \frac{2GM}{c^2} \right)^2 \times \frac{g\pi^2}{30(\hbar c)^3} T_{\text{H}}^4 \times c \quad (4.5.13)$$

より,

$$M_0^3 - M^3 = g \frac{\hbar c^4}{2560\pi G^2} t. \quad (4.5.14)$$

よって,

$$\tau \approx \frac{2560\pi G^2 M^3}{g\hbar c^4} \simeq 1.3 \times 10^{10} \text{yr} \left( \frac{12.75}{g} \right) \left( \frac{M}{5 \cdot 10^{14} \text{g}} \right)^3 \simeq 2.6 \times 10^{66} \text{yr} \left( \frac{4}{g} \right) \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^3. \quad (4.5.15)$$

### 4.5.3 磁場

#### 4.5.3.1 ジャイロ運動

静磁場中での荷電粒子の運動 静止質量を  $m$ , エネルギーを  $\mathcal{E}$ , 電荷を  $q$ , 磁場を  $B$ , 磁場方向の速度を  $v_z$ , 磁場に垂直方向の速度を  $\mathbf{v}_{\perp} = v_x + iv_y$  として, 運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E} = 0, \quad (4.5.16a)$$

$$\frac{d}{dt} (m\gamma v_{\parallel}) = 0, \quad (4.5.16b)$$

$$\frac{d}{dt} (m\gamma \mathbf{v}_{\perp}) = -i \frac{qB}{c} \mathbf{v}_{\perp} \quad (4.5.16c)$$

よって, ジャイロ角振動数は

$$\Omega = \frac{qB}{cm\gamma} = \frac{cqB}{\mathcal{E}}. \quad (4.5.17)$$

対応する速度  $v_{\perp}$  は, Lamor 半径を  $R$  として,

$$v_{\perp} = R\Omega. \quad (4.5.18)$$

$R$  について解くと

$$R = \frac{\beta_{\perp} \mathcal{E}}{qB}. \quad (4.5.19)$$

## 数値評価

ジャイロ振動数 (gyration frequency)

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{cZeB}{\mathcal{E}} = 1.43Z \left( \frac{B}{1\mu\text{G}} \right) \left( \frac{1\text{MeV}}{\mathcal{E}} \right) \text{Hz}. \quad (4.5.20)$$

Larmor 半径

$$R = \frac{\beta_{\perp}\mathcal{E}}{qB} = 1.08 \left( \frac{\beta_{\perp}\mathcal{E}}{10^6\text{GeV}} \right) \left( \frac{10^{-6}\text{G}}{ZB} \right) \text{pc} \quad (4.5.21)$$

## 参考文献

- [Dor00] Doran, C.: A new form of the Kerr solution, *Phys. Rev. D* **61**, 067503 (2000).
- [Eis49] Eisenhart, L.: Princeton Univ. Press (1949).
- [Emp04] Emparan, R.: Rotating Circular Strings, and Infinite Non-Uniqueness of Black Rings, *JHEP* **0403**, 064 (2004).
- [ER06] Emparan, R. and Reall, H.: Black Rings, *Class. Quantum Grav.* **23**, R169 (2006).
- [Fro59] Fronsdal, C.: Completion and embedding of the Schwarzschild solution, *Phys. Rev.* **116**, 778–81 (1959).
- [JNW68] Janis, A. I., Newman, E. T. and Winicour, J.: *Phys. Rev. Lett.* **20**, 878 (1968).
- [Kas65] Kasner, E.: Finite representation of the solar gravitational field in flat space of six dimensions, *Amer. J. Math.* **43**, 130–3 (1965).
- [Vir97] Virbhadra, K. S.: Janis-Newman-Winicour and Wyman solutions are the same, *Int. J. Mod. Phys. A* **12**, 4831 (1997).
- [Wym81] Wyman, M.: *Phys. Rev. D* **24**, 839 (1981).