トポロジー

Last update: 2023 年 2 月 9 日

目 次

1　位相空間

Last update: today

1.1　空間の基本性質

1.1.1　連結性

【定義 **1.1** (連結，連結成分，局所連結)】

i) 位相空間 X が**連結** (connected) であるとは，X の真部分閉集合 A, B で，$A \cap B = \emptyset$ かつ $A \cup B = X$ となるものが存在しないことである（C. Jordan，Cours d'analyse I，1893）．X の部分集合 S が連結であるとは S が部分空間†として連結であることをいう．

ii) X の 1 点 p に対し，p を含む連結集合全体の和集合は p を含む最大の連結集合である．これを X における p の**連結成分** (connected component) という．

iii) 位相空間 X がその 1 点 p で**局所連結** (locally connected) であるとは，p の任意の近傍† U に対し，$V \subset U$ となる p の連結な開近傍 V が存在することである．すべての点で局所連結であるとき，X は局所連結であるという．

□

【定義 **1.2** (弧状連結)】

i) 位相空間 X の 2 点 a, b に対し，$f(0) = a, f(1) = b$ である連続写像 $f : I = [0, 1] \to X$ が存在するとき，f の像を a と b を結ぶ**弧** (arc) といい，a と b は X において**弧で結べる**という．

ii) 位相空間 X の任意の 2 点が（X における）弧で結べるとき，X は**弧状連結** (arcwise connected) であるという．

iii) 位相空間 X の 1 点 p に対し p と弧で結べる点全体は p を含む最大の弧状連結集合である．それを p の**弧状連結成分** (arcwise connected component) という．

iv) 位相空間 X がその 1 点 p で**局所弧状連結** (locally arcwise connected) であるとは，p の任意の近傍 U に対し，$V \subset U$ となる p の開近傍 V で，V の任意の 2 点が U における弧で結べるものが存在することである．すべての点で局所弧状連結であるとき，X は局所弧状連結であるという．局所弧状連結かつ　連結な空間は弧状連結である．

□

【例 1.3 (連結性の間の関係)】

i) 弧状連結なら連結であるが，その逆は正しくない．例えば，次のシヌソイドは連結であるが弧状連結ではない：

$$\begin{aligned} X &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = \sin(1/x)\ (0 < x \leqslant 1)\right\} \\ &\quad \cup \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \leqslant y \leqslant 1\right\}. \end{aligned} \tag{1}$$

ii) 弧状連結でも局所連結とは限らない．例えば，次の**櫛形空間** (comb space) は，弧状連結だが，線分 $x = 0, -1 \leqslant y \leqslant 1$ 上で局所連結ではない：

$$\begin{aligned} X &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = 0, 1/n(n = 1, 2, \cdots), -1 \leqslant y \leqslant 1\right\} \\ &\quad \cup \left\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqslant x \leqslant 1\right\}. \end{aligned} \tag{2}$$

iii) 完備距離空間は，連結かつ局所連結なら弧状連結である．[K. Kuratowski, Topology II, Academic Press, 1968].

iv)

□

【定義 1.4 (単連結，n 連結)】

i) S^n を $\mathbb{R}^{n+1}$ の n 次元単位球面，D^{n+1} を $n+1$ 次元単位球体†とする．位相空間 X が n **連結** (n-connected) であるとは，各 $m = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対し，任意の連続写像 $f : S^m \to X$ が D^{m+1} へ拡張できることである．0 連結は弧状連結と同等である．1 連結であることを**単連結** (simply connected) であるという．

ii) 位相空間 X がその 1 点 p で**局所 n 連結** (locally n-connected) であるとは，p の任意の近傍 U に対し，$V \subset U$ となる p の開近傍 V で，各 $m = 0, 1, 2, \cdots, n$ に対し，任意の連続写像 $f : S^m \to V$ が U への写像として D^{m+1} へ拡張できるものが存在することである．すべての点で局所 n 連結であるとき，X は局所 n 連結であるという．局所 1 連結であることを**局所単連結**であるという．

□

【例 1.5 (n 連結空間)】

i) S^n および $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ は，$(n-1)$ 連結であるが n 連結でない．

ii) X が n 連結なら，その懸垂 SX は $(n+1)$ 連結，ループ空間 ΩX は $n-1$ 連結である．

iii) 次の**ハワイ風耳飾り** (Hawaiian earring) は，局所単連結でない．

$$X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x - 1/n)^2 + y^2 = 1/n^2 \ (n = 1, 2, \cdots)\right\} \tag{3}$$

また，この空間の錐 CX は，単連結であるが局所単連結でない．

□

1.1.2 可縮性

【定義 1.6 (（局所）可縮)】

i) 位相空間 X が**可縮** (contractible) であるとは，X の恒等写像 1_X が X のある 1 点 x_0 への定値写像 c_{x_0} とホモトピックであることである（K. Borsuk, Fund. Math., 24, 1935）．

例：n 次元単体 Δ^n, n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ の凸集合，AR.

ii) 位相空間 X がその 1 点 p で**局所可縮** (locally contractible) であるとは，p の任意の近傍 U に対し，$V \subset U$ となる p の開近傍 V で，包含写像 $i : V \to U$ と定値写像 c_p が U でホモトピックなものが存在することである．すべての点で局所可縮であるとき，X は局所可縮であるという．

例：位相多様体，多面体，ANR.

$\square$

2　ホモロジーとコホモロジー

Last update: 2011.7.18

2.1　加群についての基礎事項

【定義 2.1 (移入的（単車的）加群)】　環 R 上の加群 Q が**移入的**あるいは**単射的** (で) あるとは，任意の単射 $u : Q \to M$ に対して，M の部分加群 N が存在して $M \cong u(Q) \oplus N$ となることである． □

【定義 2.2 (射影的加群)】　環 R 上の加群 P が**射影的**であるとは，任意の全射 $v : N \to P$ に対して，N の部分加群 V が存在して，$N = \mathrm{Ker}(v) \oplus V$ となることである． □

【定義 2.3 (自由加群)】　R を可換環として，R 加群 M において元の列 $e_1, \cdots, e_n$ が存在して，M の任意の元 x が $c_1e_1 + \cdots c_ne_n (c_i \in R)$ と一意的に表されるとき，M を**自由加群**, $e_1, \cdots, e_n$ をその**基底**，n を**階数**という． □

【定義 2.4 (有限生成加群)】　可換環 R を係数とする加群 M において，元の組 $e_1, \cdots, e_n$ が存在して，$M = Re_1 + \cdots + Re_n$ となるとき，M は**有限生成**であるという．また，$e_1, \cdots, e_n$ はその生成元という．

　一般に，M の m 個の元 $u_1, \cdots, u_m$ に対して，$c_1u_1 + \cdots + c_mu_m = 0 (c_i \in R)$ なら $c_1 = \cdots = c_m = 0$ となるとき，$u_1, \cdots, u_m$ は**一次独立**であるという．有限生成加群 M に含まれる 1 次独立な元の集合の個数の最大値を M の**階数**といい，$r(M)$ で表す． □

【定義 2.5 (振れ部分加群)】　整域 R を係数とする加群 M において，M の元 x で $ax = 0$ となる R の元 $a \neq 0$ が存在するものの全体を

$$t(M) = \{x \in M \mid \ ax = 0, \exists a \in R, a \neq 0\}$$

で表し，M の**振れ部分加群**という．また，$t(M)$ のとき M には**振れがない**，$t(M)$ M のとき M は**振れ加群**という． □

【定理 2.6 (自由加群の部分加群)】

i) 自由加群の部分加群は捩れがない．

ii) 捩れがない有限生成加群は，階数が有限な自由加群の部分加群に同型である．

□

【定理 2.7 (単項イデアル整域上の加群)】 単項イデアル整域上の加群 P について，次は同値である：

a) 有限生成で捩れがない．

b) 有限生成で射影的である．

c) 階数有限の自由加群である．

□

【系 2.8 (単項イデアル整域上の加群の部分加群)】 単項イデアル整域上の加群 M に体して，

i) M の任意の部分加群は自由加群で，その階数は M の階数を超えない．

ii) M の任意の部分加群 N に対して，M の部分加群 W が存在して，$W = N \oplus W$ となる．

□

【定理 2.9 (自由加群の部分加群の標準基底)】 G を単項イデアル整域 R 上の自由加群，H をその部分加群とするとき，G の基底 $e_1, \cdots, e_n$ を適当にとると，$\theta_1 e_1, \cdots \theta_m u_m$ が H の基底になるようにできる．ただし，$\theta_1, \cdots, \theta_m$ は正の整数 $(m \leqslant n)$ で，θ_i は θ_{i+1} の約数である． □

【定理 2.10 (加群の基本定理)】 単項イデアル整域 R 上の有限生成加群 G は，巡回加群の直和

$$R/\theta_1 R \oplus \cdots \oplus R/\theta_m R$$

と同型である．ここで，$\theta_1, \cdots, \theta_m$ は，θ_i が θ_{i+1} の約数となる正の整数で，一意的に定まる． □

2.2　鎖複体のホモロジーとコホモロジー

出典

- 服部晶尾夫著: 「位相幾何学」(岩波講座基礎数学 1977)

2.2.1　ホモロジー

【定義 2.11 (チェイン複体の圏)**】**　次数付 R 加群 $C_* = (C_j)$ とその準同型 $\partial = (\partial_j)$,

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{j+2}} C_{j+1} \xrightarrow{\partial_{j+1}} C_j \xrightarrow{\partial_j} C_{j-1} \xrightarrow{\partial_{j-1}} \cdots$$

は $\partial^2 = 0$ を満たすとき，**チェイン複体**といい，$C_* = (C_j, \partial)$ と表す．2 つのチェイン複体の次数付 R 加群の準同型 $\phi : C_* \to D_*$ が $\partial\phi = \phi\partial$ を満たすとき，ϕ を**チェイン写像**といい，対象をチェイン複体，射を複体写像とする圏を**チェイン複体の圏**と呼ぶ．　□

【定義 2.12 (チェインホモトピー)**】**　チェイン複体 C_*, D_* の射 $f, g : C_* \to D_*$ に対して，R 線形写像の列 $\Phi_n : C_n \to C_{n+1}$ が存在して，

$$f - g = \partial_{n+1} \circ \Phi_n + \Phi_{n-1} \circ \partial_n$$

が成り立つとき，Φ_* を f と g を結ぶ**チェインホモトピー**という．このとき，$f_* = g_* : H_*(C_*) \to H_*(D_*)$ となる．　□

【定義 2.13 (ホモロジー関手)**】**　チェイン複体 C_* に対して，

$$H_*(C_*) = Z_*(C_*)/B_*(C_*); \quad Z_*(C_*) = \mathrm{Ker}\,\partial, \quad B_*(C_*) = \mathrm{Im}\,\partial$$

により，次数付き R 加群 $H_*(C_*) = (H_j(C_*)), Z_*(C_*) = (Z_j(C_*)), B_*(C_*) = (B_j(C_*))$ を定義する．$H_*(C_*)$ を C_* の**ホモロジー群**，その元をホモロジー類，Z_* の元をサイクル，B_* の元をバウンダリーと呼ぶ．さらに，任意のチェイン写像 $\phi : C_* \to D_*$ に対して，**ホモロジー写像**と呼ばれる R 準同型 $\phi_* : H_*(C_*) \to H_*(D_*)$ が $\phi_*([c]) = [\phi(c)]$ により誘導される．チェイン複体にそのホモロジー群を，チェイン写像にそれから誘導されるホモロジー群の R 準同型を対応させることにより定義される，チェイン複体の圏から次数付き R 加群の圏への関手を**ホモロジー関手** H_* と呼ぶ．　□

【**命題 2.14** (連結準同型とホモロジー完全系列)】

1) 3 つのチェイン複体 $(A, \partial'), (X, \partial), (Y, \partial'')$ の間の完全系列を

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y \longrightarrow 0$$

とする．このとき，$y \in Z_n(Y)$ に対して，

$$\partial_*[y] = [f^{-1} \circ \partial \circ g^{-1}(y)]$$

により R-線形写像 $\partial_* : H_n(Y) \to H_{n-1}(A)$ が定まる．この写像を，**連結準同型**という．さらに，次の完全系列が成り立つ：

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_n(A) \xrightarrow{f_*} H_n(X) \xrightarrow{g_*} H_n(Y) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \xrightarrow{f_*} \cdots$$

2) ２組の完全系列の間の可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

に対して，$\partial'_* \circ \psi_* = \phi_* \circ \partial_* : H_*(Y) \to H_*(A')$ が成り立つ．

□

2.2.2　コホモロジー

【**定義 2.15** (コチェイン複体)】　次数付 R 加群 $C^* = (C^j)$ とその準同型 $\delta = (\delta^j)$,

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{j-2}} C^{j-1} \xrightarrow{\delta^{j-1}} C^j \xrightarrow{\delta^j} C^{j+1} \xrightarrow{\delta^{j+1}} \cdots$$

は $\delta^2 = 0$ を満たすとき，**コチェイン複体** (と) いい，$C^* = (C^j, \delta)$ と表す．２つのコチェイン複体の次数付 R 加群の準同型 $\phi : C^* \to D^*$ が $\delta\phi = \phi\delta$ を満たすとき，ϕ を**コチェイン写像**といい，対象をコチェイン複体，射をコチェイン写像とする圏を**コチェイン複体の圏**と呼ぶ．　□

【**定義 2.16** (コホモロジー関手)】　コチェイン複体 C^* に対して，

$$H^*(C^*) = Z^*(C^*)/B^*(C^*); \quad Z^*(C^*) = \mathrm{Ker}\,\delta, \quad B^*(C^*) = \mathrm{Im}\,\delta$$

により，次数付き R 加群 $H^*(C^*) = (H^j(C^*)), Z^*(C^*) = (Z^j(C^*)), B^*(C^*) = (B^j(C^*))$ を定義する．$H^*(C^*)$ を C^* の**コホモロジー群** (，) その元をコホモロジー類，Z^* の元をコサイクル，B^* の元をコバウンダリーと呼ぶ．さらに，コチェイン写像 $\phi : C^* \to D^*$ は，$\phi_*[u] = [\phi(u)]$ によりコホモロジー群の間の R 準同型 $\phi^* : H^*(C^*) \to H^*(D^*)$ を誘導する．コチェイン複体にそのコホモロジー群を，コチェイン写像にそれから誘導されるコホモロジー群の R 準同型を対応させることにより定義される，コチェイン複体の圏から次数付き R 加群の圏への関手を**コホモロジー関手** H^* と呼ぶ．□

【**命題 2.17** (連結準同型とコホモロジー完全系列)】

1) 3 つのコチェイン複体 $(Y, \delta'), (X, \delta), (A, \delta'')$ の間の完全系列を

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$$

とする．このとき，$a \in Z^n(A)$ に対して，

$$\delta_*[a] = [f^{-1} \circ \delta \circ g^{-1}(a)]$$

により R-線形写像 $\delta_* : H^n(A) \to H^{n+1}(Y)$ が定まる．この写像を，**連結準同型**という．さらに，次の完全系列が成り立つ：

$$\cdots \xrightarrow{\delta_*} H^n(Y) \xrightarrow{f_*} H^n(X) \xrightarrow{g_*} H^n(A) \xrightarrow{\delta_*} H^{n+1}(Y) \xrightarrow{f_*} \cdots$$

2) 2 組の完全系列の間の可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & X \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y' \arrow[r] & X' \arrow[r] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

に対して，$\delta'_* \circ \psi_* = \phi_* \circ \delta_* : H^*(A) \to H^*(Y)$ が成り立つ．

□

2.3 普遍係数定理と Kunneth の定理

2.3.1 Tor と Ext

【**定義 2.18** (加群のねじれ積)】 R を単項イデアル整域とする.

1) R-加群 A に対して，R-自由加群 F_0, F_1 と R 線形写像 $d : F_1 \to F_0, \epsilon : F_0 \to A$ が存在して，

$$0 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d} F_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

が完全系列となるとき，この短完全系列を A の左自由分解という.

2) R 加群 A, B および A の左自由分解 1) に対して，チェイン複体

$$0 \longrightarrow F_1 \otimes_R B \xrightarrow{d \otimes 1} F_0 \otimes_R B \longrightarrow 0$$

の 1 次ホモロジー群を A と B の**ねじれ積**とよび，$\mathrm{Tor}^R(A, B)$ と表す:

$$\mathrm{Tor}^R(A, B) = \ker d \otimes 1$$

このとき，次の完全系列が成り立つ.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}^R(A, B) \longrightarrow F_1 \otimes_R B \longrightarrow F_0 \otimes_R B \longrightarrow A \otimes_R B \longrightarrow 0$$

ねじれ積は自由分解の取り方によらず同型を除いて一意的である.

□

【**命題 2.19** (加群のねじれ積の性質)】 加群のねじれ積は次の性質を持つ.

i) $\mathscr{C}$ を R 加群の圏とするとき，Tor は $\mathscr{C} \times \mathscr{C}$ から $\mathscr{C}$ への関手で，いずれの変数についても共変的である.

ii) $\mathrm{Tor}(A, B) = \mathrm{Tor}(B, A)$.

iii) $\mathrm{Tor}(A \oplus B, C) = \mathrm{Tor}(A, C) \oplus \mathrm{Tor}(B, C)$.

iv) A が自由加群の時，$\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$.

v) K が標数 0 の体，A が有限生成加群のとき，$\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(K, A) = 0$.

vi) $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_d$ $(m, n > 0,\ d = \mathrm{GCD}(m, n))$.

vii) K が体の時，$\mathrm{Tor}^K(A, B) = 0$.

$\square$

【**定義 2.20** (Ext)】　R を単項イデアル整域，A, B を R 加群とする．A の左自由分解

$$0 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d} F_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

から誘導されるコチェイン複体

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F_0, B) \xrightarrow{{}^T d} \mathrm{Hom}_R(F_1, B) \longrightarrow 0$$

の 1 次コホモロジー群を $\mathrm{Ext}_R(A, B)$ と定義する：

$$\mathrm{Ext}_R(A, B) = \mathrm{Hom}_R(F_1, B)/\mathrm{Im}\ {}^T d.$$

このとき，次の完全系列が存在する．

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F_0, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(F_1, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R(A, B).$$

$\mathrm{Ext}_R(A, B)$ は，A の自由分解の取り方によらず同型を除いて一意的に定まる．

$\square$

【**命題 2.21** (Ext の性質)】　加群の Ext 積は次の性質をもつ．

i) $\mathscr{C}$ を R 加群の圏とするとき，Ext は $\mathscr{C} \times \mathscr{C}$ から $\mathscr{C}$ への関手を与え，第 1 変数について反変的，第 2 変数について共変的である．

ii) 任意の R 加群 A, B, C に対して，

$$\mathrm{Ext}_R(A \oplus B, C) \cong \mathrm{Ext}_R(A, C) \oplus \mathrm{Ext}_R(B, C),$$
$$\mathrm{Ext}_R(A, B \oplus C) \cong \mathrm{Ext}_R(A, B) \oplus \mathrm{Ext}_R(A, C).$$

iii) 任意の加群 A に対して，

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B) = 0, \quad \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, B) \cong B/mB\ (m > 0).$$

$\square$

目次へ

2.3.2 普遍係数定理

【**定理 2.22** (普遍係数定理 (ホモロジー))】　R を単項イデアル整域，C_* を自由 R 加群のチェイン複体，G を R 加群とするとき，自然な短完全系列が存在する：

$$0 \longrightarrow H_n(C_*) \otimes G \longrightarrow H_n(C_* \otimes G) \longrightarrow \mathrm{Tor}^R(H_{n-1}(C_*), G) \longrightarrow 0.$$

この完全系列は分解する．

これより，空間対 (X, A) と加群 G に対して，自然な完全系列

$$0 \longrightarrow H_n(X, A; \mathbb{Z}) \otimes G \longrightarrow H_n(X, A; G) \longrightarrow \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X, A; \mathbb{Z}), G) \longrightarrow 0$$

が成り立つ．この短完全系列は分解する． $\square$

【**定理 2.23** (普遍係数定理 (コホモロジー))】　R を単項イデアル整域，C_* を自由 R 加群のチェイン複体，G を R 加群とするとき，次の短完全系列が存在する：

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathrm{Ext}_R(H_{n-1}(C_*), G) \longrightarrow H^n(\mathrm{Hom}_R(C_*, G)) \\ &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(H_n(C_*), G) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

この短完全系列は分解する．

これより，空間対 (X, A) と加群 G に対して，自然な完全系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X, A; \mathbb{Z}), G) \longrightarrow H^n(X, A; G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n(X, A; \mathbb{Z}), G) \longrightarrow 0$$

が存在する．この短完全系列は分解する． $\square$

2.3.3 Kunneth の定理

【**定理 2.24** (Künneth の定理 (ホモロジー))】　R は単項イデアル整域，C_* は自由 R 加群のチェイン複体，D_* は R 加群のチェイン複体とする．このとき，短完全系列

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \textstyle\sum_{p+q=n} H_p(C_*) \otimes_R H_q(D_*) \xrightarrow{\times} H_n(C_* \otimes_R D_*) \\ &\longrightarrow \textstyle\sum_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}^R(H_p(C_*), H_q(D_*)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

が存在する．D_* も自由 R 加群のチェイン複体のときには，この間全系列は分解する． $\square$

【**定理 2.25** (Künneth の定理 (コホモロジー))】　R は単項イデアル整域，C^* は自由 R 加群のコチェイン複体，D^* は R 加群のコチェイン複体とする．このとき，短完全系列

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \textstyle\sum_{p+q=n} H^p(C^*) \otimes_R H^q(D^*) &\xrightarrow{\times} H^n(C^* \otimes_R D^*) \\ \longrightarrow \textstyle\sum_{p+q=n+1} \mathrm{Tor}^R(H^p(C^*), H^q(D^*)) &\longrightarrow 0\end{aligned}$$

が存在する．D^* も自由 R 加群のコチェイン複体のときには，この間全系列は分解する．　□

2.4　位相空間のホモロジーとコホモロジー

出典

- 服部晶尾夫著: 「位相幾何学」(岩波講座基礎数学 1977)

2.4.1　単体的（コ）ホモロジー

出典

- 田村一郎著 「トポロジー」(岩波全書，1972)

2.4.1.1　定義

【**定義 2.26** (単体複体)】

1) 集合 K とその部分集合の属 Σ が次の 2 条件を満たすとき，組 (K, Σ) を**単体複体**という：

   i) $s \in \Sigma$ に対して，$s' \subset s (s' \neq \emptyset)$ なら，$s' \in \Sigma$.

   ii) 任意の $v \in K$ に対して，$\{v\} \in \Sigma$．さらに，$\emptyset \notin \Sigma$.

   $s \in \Sigma$ が K の $(n+1)$ この元からなるとき，s を n(次元) 単体，とくに 0 単体を頂点という．また，K の濃度が有限，可算，任意の頂点を含む単体が有限個，可算個のとき，それぞれ有限，可算，局所有限，局所可算単体複体という．

2) 単体複体 $(K,\Sigma),(K_0,\Sigma_0)$ に対して，$K_0\subset K$ かつ $\Sigma_0\subset\Sigma$ が成り立つとき，K_0 を K の**部分複体**という．

3) K,L を単体複体とし，$\phi:K\to L$ を頂点集合の写像とする．K の任意の単体 $s=\{v_0,\cdots,v_n\}$ に対して，$\{\phi(v_0),\cdots,\phi(v_n)\}$ から重複する頂点を取り除いたものが L の単体となるとき，ϕ を**単体写像**という．さらに，単体複体 K,L の間の全単射 ϕ で，ϕ と ϕ^{-1} が共に単体写像となるものが存在するとき，K と L は同型であるという．

3) K を単体複体とし，その q 単体 s とする．s の頂点の列の集合において偶置換で移り合うものは同値という同値関係を与えたとき，各同値類を s の向きという．向きの与えられた q 単体を向きのついた q 単体と呼び，σ と表す．s の頂点が $\{v_0,\cdots,v_q\}$ のとき，対応する向きのついた単体を $\sigma=[v_0,\cdots,v_q]$ と表記しする．

□

【**定義 2.27** (単体的ホモロジーとコホモロジー)】

1) 単体複体 K の各単体に向きを与え，向きのついた q 単体全体から生成される自由 Abel 群を $C_q(K)$ とする．さらに，線形写像 ∂_q : $C_q(K)\to C_{q-1}(K)$ を

$$\partial_q([v_0,\cdots,v_q])=\sum_{k=0}^{q}(-1)^k[v_0,\cdots,v_{k-1},v_{k+1},\cdots,v_q]$$

により定義する．ただし，σ^q の向きを反転した単体は $-\sigma^q$ と同一視する．これにより定義されるチェイン複体 $C_*=(C_q,\partial_q)$ のホモロジー群を $H_q(K)$ と表し，単体複体 K の**整係数ホモロジー群**という．また，R 加群 G に対して，R 加群のチェイン複体 $C_*\otimes_{\mathbb{Z}}G$ から定義されるホモロジー群 $H_*(K;G)$ を K の G **係数ホモロジー群**という．さらに，R 加群のコチェイン複体 $C^*=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*,G)$ のコホモロジー群 $H^*(K;G)$ を G **係数コホモロジー群**という．

2) 単体分割可能な位相空間 X に対して，K をその単体分割とするとき，$H_*(K;G),H^*(K;G)$ は単体分割 K の取り方によらない．$H_*(K;G)$ および $H^*(K;G)$ を X の**単体的ホモロジー群**，**単体的コホモロジー群**という．

□

2.4.1.2 Mayer-Vietoris 完全系列

【命題 2.28】 K_1, K_2 を $K = K_1 \cup K_2$ となる単体複体 K の部分複体とするとき，$K_1 \cap K_2$ は K_1, K_2, K の共通の複体となる．いま，鎖複体 $C_*(K_1 \cap K_2)$, $C_*(K_1) \oplus C? * (K_2)$，$C_*(K)$ の間の鎖準同形を

$$\psi_q : C_q(K_1 \cap K_2) \ni c \mapsto c \oplus (-c) \in C_q(K_1) \oplus C_q(K_2),$$
$$\phi_q : C_q(K_1) \oplus C_q(K_2) \ni c_1 \oplus c_2 \mapsto c_1 + c_2 \in C_q(K)$$

により定義すると，次の鎖準同形の短系列は完全となる：

$$0 \longrightarrow C_*(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{\psi_*} C_*(K_1) \oplus C^*(K_2) \xrightarrow{\phi_*} C_*(K) \longrightarrow 0$$

□

Proof. まず，$c \in C_q(K_1 \cap K_2)$ に対して，$\psi_*(c) = c \oplus (-c) = 0$ なら $c = 0$ となるので，ψ_* は単射である．次に，任意の $c \in C_q(K)$ に対して，c は K_1 ないし K_2 の単体の線形結合なので，適当な $c_1 \in C_q(K_1)$ と $c_2 \in C_q(K_2)$ を用いて $c = c_1 + c_2$ と表される．よって，$c = \phi_q(c_1 \oplus c_2)$ となるので，ϕ_* は全射である．最後に，$c \in C_q(K_1 \cap K_2)$ に対して，$\phi_q\psi_q(c) = \phi_q(c \oplus (-c)) = c + (-c) = 0$ および，$c_1 \oplus c_2 \in C_q(K_1) \oplus C_q(K_2)$ に対して，$\phi_q(c_1 \oplus c_2) = c_1 + c_2 = 0$ ならが，$\psi_q(c_1) = c_1 \oplus (-c_1) = c_1 \oplus c_2$ となるので，$\mathrm{Ker}(\phi_*) = \mathrm{Im}\,(\psi_*)$ となる． Q.E.D.

【定理 2.29 (単体複体に対する Mayer-Vietoris 完全系列)】 K を単体的複体，K_1, K_2 を $K_1 \cup K_2 = K$ となるその部分複体とするとき，前命題より，次のホモロジー完全系列が成り立つ：

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \xrightarrow{\Delta_{q+1}} & H_q(K_1 \cap K_2) & \xrightarrow{\psi_q} & H_q(K_1) \oplus H_q(K_2) & \xrightarrow{\psi_q} & H_q(K) \\
\xrightarrow{\Delta_q} & H_{q-1}(K_1 \cap K_2) & \xrightarrow{\psi_{q-1}} & \cdots & \xrightarrow{\Delta_1} & H_0(K_1 \cap K_2) \\
\xrightarrow{\psi_0} & H_0(K_1) \oplus H_0(K_2) & \xrightarrow{\phi_0} & H_0(K) & \xrightarrow{\Delta_0} & 0
\end{array}$$

□

【系 2.30 (重心細分のホモロジー)】 単体複体 K とその重心細分 $Sd(K)$ のホモロジーは同型となる：

$$H_*(K) \cong H_*(Sd(K))$$

□

Proof. K の次元に対する数学的帰納法により証明する．まず，$\dim K = 0$ のとき，$Sd(K) = K$ なので明らかに成立．次に，$m-1$ 次元以下の任意の複体に対して成り立つとして，m 次元の複体 K を考える．K_0 を K の $m-1$ 次元以下の単体全体からなる部分複体，K の m 次元単体を $\sigma_i^m (i = 1, \cdots, k)$, $K_i = K_0 \cup \sigma_1^m \cdots \cup \sigma_i^m$ とする．このとき，$H_*(K_i) \cong H_*(Sd(K_i))$ となることを，i についての数学的帰納法により示す．まず，$i = 0$ に対しては仮定より成立する．いま，$i = j$ に対して成り立つとすると，(K_j, σ_{j+1}^m) に対する Mayer-Vietoris 系列から $(Sd(K_j), Sd(\sigma_{j+1}^m)$ に対する Mayer-Vietoris 系列への準同型 Sd_* は，帰納法の仮定より $H_*(\sigma_{j+1}^m \cap K_j)(\dim = m-1)$, $H_*(sigma_{j+1}^m) \oplus H_*(K_j)$ に対して同型となるので，5 項補題より，$Sd_* : H_*(K_{j+1}) \to H_*(Sd(K_{j+1}))$ も同型となる．したがって，$j = m-1$ として，$H_*(K) = H_*(Sd(K))$ が次元 m でも成立． Q.E.D.

2.4.1.3 鎖ホモトピー

【定義 2.31 ($K \times I$ の単体分割)】 K を単体複体，I を線分 $[0, 1]$ とするとき，K の頂点全体に順序をつけた列を $a_1, a_2, \cdots, a_N$ とする．K の単体 $\sigma = \left\langle a_{i_0}, \cdots, a_{i_q} \right\rangle$ $(i_0 < \cdots i_q)$ に対して，単体

$$|(a_{i_0}, 0), \cdots, (a_{i_r}, 0), (a_{i_r}, 1), \cdots, (a_{i_q}, 1)|, \quad r = 0, 1, \cdots, q$$

とその辺の全体 $K(\sigma \times I)$ は複体で，$|K(\sigma \times I)| = \sigma \times I$ となる．

したがって，

$$K \times I = \cup_{\sigma \in K} K(\sigma \times I)$$

は複体で $|K \times I| = |K| \times I$ となる．この複体を K と I の**積複体**という． □

【定理 2.32 (鎖ホモトピー定理)】 K, K' を単体複体，$K \times I$ を K と I の積複体とする．このとき，単体写像 $\Phi : K \times I \to K'$ が存在すると，K から K' への単体写像 $\phi_0(x) = \Phi(x, 0)$ と $\phi_1(x) = \Phi(x, 1)$ から誘導されるホモロジー群の準同型 $\phi_{0*}, \phi_{1*} : H_*(K) \to H_*(K')$ は一致する． □

Proof. K の q 単体 σ^q と I の積複体を $\sigma^q \times I$ として，その各単体に σ^q の向きから誘導される自然な向きを与え，$\sigma^q \times I$ の向きづけられた $q+1$ 単体の和を $\langle \sigma^q \times I \rangle$ で表す．このとき，Φ は単体写像なので，$\Phi_{\sharp q} : C_q(K \times I) \to$

$C_q(K')$ に対して，$\partial'_q \Phi_{\sharp q} = \Phi_{\sharp q-1}\partial_q$ が成り立つ．よって，

$$
\begin{aligned}
\partial' \Phi_\sharp \langle \sigma^q \times I \rangle &= \Phi_\sharp \partial \langle \sigma^q \times I \rangle \\
&= \Phi_\sharp \langle \partial \sigma^q \times I \rangle + (-1)^{q+1} \Phi_\sharp (\sigma^q \times \{1\} - \sigma^q \times \{0\})
\end{aligned}
$$

となる．そこで，

$$C_q(K) \ni \sigma^q \mapsto D_q(\sigma^q) = (-1)^{q+1} \Phi_\sharp \langle \sigma^q \times I \rangle \in C_{q+1}(K')$$

により線形写像 $D_q : C_q(K) \to C_{q+1}(K')$ を定義すると，

$$\partial'_{q+1} D_q + D_{q-1} \partial_q = \phi_{1\sharp} - \phi_{0\sharp}, \quad \phi_{i\sharp}(\sigma) = \Phi_\sharp(\sigma \times \{i\})$$

を得る．これは，任意の $z_q \in Z_q(K)$ に対し，$\phi_{1\sharp}(z_q) - \phi_{0\sharp}(z_q) \in B_{q+1}(K)$ を意味するので，$\phi_{1*}, \phi_{0*} : H_*(K) \to H_*(K')$ は一致する．　　Q.E.D.

2.4.1.4　単体近似

【定義 2.33 (単体分割)】　位相空間 X に対して，単体複体 K と多面体 $|K|$ から X への同相写像 $t : |K| \to X$ が存在するとき，(K, t) を X の**単体分割**という．　□

【定義 2.34 (星状体)】　K を単体複体とするとき，多面体 $|K|$ の任意の点 p に対し，p を含む K の単体およびその辺の全体からなる K の部分複体を p の**星状体**と喚び，$S_K(p)$ で表す．また，$S_K(p)$ の単体のうち p を含まない単体からなる部分複体を p の**絡み複体** (Link complex) と喚び，$L_K(p)$ で表す．

K の頂点 a に対し，a を頂点とする単体の内部の和集合を K における a の**開星状体**といい，$O_K(a)$ と書く．　□

【命題 2.35 (頂点集合が単体を張る条件)】　単体複体 K の頂点の集合 $\{a_0, \cdots, a_q\}$ がある q 単体の頂点となるための必要十分条件は

$$O_K(a_0) \cap \cdots O_K(a_q) \neq \emptyset$$

となることである．　□

Proof. $q^q = |a_0, \cdots, a_q| \in K$ のとき，$(\sigma^q)^\circ \subset O_K(a_i)$ より題意の条件が成り立つ．逆に，$p \in O_K(a_i)\,(i = 0, \cdots, q)$ 存在すると，$O_K(a_i)$ は a_i を頂点とする単体の内部の和集合なのでそれらの共通部分はすべての a_i を頂点として含む単体となる．その辺はすべて K に含まれるので，$|a_0, \cdots, a_q|$ も単体として K に含まれる． Q.E.D.

【定義 2.36 (単体写像と単体近似)】 複体 K の頂点集合から別の複体 K' の超点集合への写像 ϕ に対して，$\{p_0, \cdots, p_k\}$ が K の単体ならば，常に $\{\phi(p_0), \cdots, \phi(p_k)\}$ が K' の単体となっているとき，ϕ を K から K' への**単体写像**という．

K, K' を単体複体として，多面体 $|K|$ から多面体 $|K'|$ への連続写像 $f : |K| \to |K'|$ に対して，単体写像 $\phi : K \to K'$ が存在して，K の任意の頂点 a について，常に

$$f(O_K(a)) \subset O_{K'}(\phi(a))$$

となるとき，ϕ を f の**単体近似**という． □

【定理 2.37 (単体近似のホモトピー同値性)】 単体複体 K, K' に対し，連続写像 $f : |K| \to |K'|$ の単体近似を $\phi : K \to K'$，対応する連続写像を $\bar{\phi} : |K| \to |K'|$ とすると，$f \simeq \bar{\phi}$ である． □

Proof. 任意の点 $x \in |K|$ に対し，x を内点として含む単体を $\sigma = |a_0 \cdots a_q|$ とすると，単体近似の定義より，$f(x) \in O_{a_0}(K') \cap \cdots O_{a_q}(K')$ となるので，$f(x)$ と $\bar{\phi}(x)$ が同じ K' の単体に含まれるため． Q.E.D.

【定義 2.38 (重心細分からの単体写像)】 K を単体複体，$Sd(K)$ をその重心細分とする．このとき，K の各単体 σ に対して，その頂点を一つ選び，$\pi([\sigma])$ とする．このとき，$Sd(K)$ の任意の q 単体 $\pi : |[\sigma_0] \cdots [\sigma_q]|$ $(\sigma_0 \lneq \cdots \lneq \sigma_q)$ に対して， $\pi(\sigma_0), \cdots, \pi(\sigma_q)$ はすべて K の頂点となるので，単体写像 $\pi : Sd(K) \to K$ となり，恒等写像 $\mathrm{id} : |Sd(K)| \to |K|$ に対する単体近似を与える． □

【定理 2.39 (ホモロジー群の重心細分不変性)】 単体写像 $\pi : Sd(K) \to K$ から導かれる準同形写像 $\pi_* : H_*(Sd(K)) \to H_*(K)$ は同型写像で，鎖複体の写像 $Sd : C_*(K) \to C_*(Sd(K))$ から誘導される準同形 $Sd_* : H_*(K) \to H_*(Sd(K))$ と逆の関係 $\pi_* = (Sd_*)^{-1}$ にある：

$$\pi_* = (Sd_*)^{-1} : H_*(Sd(K)) \xrightarrow{\cong} H_*(K)$$

□

Proof. π から誘導される鎖複体の準同形を $\pi_\sharp : C_*(Sd(K)) \to C_*(K)$t とすると，$\pi_\sharp \circ Sd = \mathrm{id}$ となることと，Sd_* が同型となることより． Q.E.D.

【定理 2.40 (単体近似写像の誘導するホモロジー準同型)】 単体複体間の連続写像 $f : |K| \to |K'|$ に対して，ϕ, ϕ' が共にその単体近似となっているなら，

$$\phi_*, \phi'_* : H_*(K) \to H_*(K')$$

に対して，$\phi_* = \phi'_*$ となる． □

Proof. 積複体 $K \times I$ の頂点集合から K' の頂点集合への写像 Φ を

$$\Phi(a,0) = \phi(a), \quad \Phi(b,1) = \phi(b)$$

により定義する．このとき，K の q 単体の頂点 $a_0, \cdots, a_q$ に対して，

$$\begin{aligned}
&O_{K'}(\Phi(a_0,0)) \cap \cdots \cap O_{K'}(\Phi(a_r,0)) \cap O_{K'}(\Phi(a_r,1)) \cdots \cap O_{K'}(\Phi(a_q,1)) \\
&= O_{K'}(\phi(a_0) \cap \cdots \cap O_{K'}(\phi(a_r)) \cap O_{K'}(\phi'(a_r)) \cdots \cap O_{K'}(\phi'(a_q)) \\
&\supset f(O_K(a_0) \cap \cdots \cap O_K(a_q)) \neq \emptyset
\end{aligned}$$

より，$K \times I$ の単体の頂点集合の Φ による像は K' の単体の頂点となる．よって，Φ は単体写像を与えるので，ホモトピー定理 2.32 より，題意が成り立つ． Q.E.D.

【補題 2.41】 2 つの有限複体 K, K' と連続写像 $f : |K| \to |K'|$ に対して，正の実数 l が存在し，その直径が $d(A) < l$ を満たす $|K|$ の任意の集合 A に対して，K' のある頂点 a' について，

$$f(A) \subset O_{K'}(a')$$

が成り立つ． □

Proof. 題意の命題が成立しないとすると，ゼロに収束する数列 l_i と条件 $d(A_i) < l_i$ を満たす $|K|$ の集合列が存在し，$f(A_i)$ は K' のどの頂点に対しても $f(A_i) \subset O_{K'}(a')$ とならない．しかし，このとき，$|K|$ はコンパクトなので A_i は一点 p に収束する．ところが，$f(p) \in O_{K'}(a')$ となる頂点 a' に対して，$O_{K'}(a')$ は開集合なので，p を中心とする十分小さな半径の球の f による像，したがって十分大きな i に対して $f(A_i)$ は $O_{K'}(a')$ に含まれる．これは仮定に反する． Q.E.D.

【**定理 2.42** (単体近似定理)】　K, K' を単体複体，$f : |K| \to |K'|$ を連続写像とする．K を r 回続けて重心細分して得られる複体 $Sd^r(K)$ とするとき，ある自然数 n が存在して，$r \geqslant n$ のとき，$f : |S^r(K)| \to |K'|$ の単体近似 $\phi : Sd^r(K) \to K'$ が存在する． □

Proof. 細分 Sd により単体複体の最長辺サイズは $l/2$ となるので，補題で存在が示された正の実数 l に対して，r を十分大きくとると $Sd^r(K)$ の最長辺サイズは $l/2$ 以下となる．このとき，$Sd^r(K)$ の各頂点の開星状体のサイズは l より小さくなるので，補題より，各頂点 $a \in K$ に対し K' の頂点 a' が存在し

$$f(O_{Sd^r(K)}(a)) \subset O_{K'}(a')$$

が成り立つ．したがって，$\phi : Sd^r(K) \to K'$ を $\phi(a) = a'$ により定義すると，$Sd^r(K)$ の単体 $|a_1, \cdots, a_q|$ に対し，

$$\varnothing \neq f(O_{Sd^r(K)}(a_0) \cap \cdots \cap O_{Sd^r(K)}(a_q)) \subset O_{K'}(a'_0) \cap \cdots O_{K'}(a'_q)$$

より，$\{a'_0, \cdots, a'_q\}$ は K' の単体の頂点となる．したがって，ϕ は f の単体近似を与える． Q.E.D.

2.4.1.5　連続写像とホモロジー群

【**定義 2.43** (連続写像の定義する単体的ホモロジー群の準同型)】　重心細分 Sd に対する単体写像 $Sd : Sd(K) \to K$ を繰り返して得られる写像を $\pi_s^r : Sd^r(K) \to Sd^s(K)(r > s)$ とするとき，写像 $f : |K| \to |K'|$ に対する単体近似 $\phi : Sd^r(K) \to K'$ から誘導されるホモロジー群の準同型に対して次の可換な図式が成り立つ：

$$\begin{tikzcd}
H_*(K) \arrow[dr, "f_* \equiv \phi_*(\pi_0^r)_*^{-1}"'] & H_*(Sd^r(K)) \arrow[l, "(\pi_0^r)_*"', "\cong"] \arrow[d, "\phi_*"] & H_*(Sd^s(K)) \arrow[l, "(\pi_r^s)_*"'] \arrow[dl, "\phi'_*"] \\
& H_*(K') &
\end{tikzcd}$$

これより，$f_* = \phi_*(\pi_0^r)^{-1} : H_*(K) \to H_*(K')$ は細分の回数や単体写像の取り方によらず，f のみで定まるので，この写像 f_* を連続写像 f の定めるホモロジー群の準同型 (と) 定義する． □

【定理 2.44 (f_* の関手性)】　$f : |K| \to |K'|$, $g : |K'| \to |K''|$ を連続写像とするとき，$(f'f)_* : H_*(K) \to H_*(K'')$ に関して，$(f'f)_* = f'_* f_*$ が成り立つ．　□

【定理 2.45 (連続写像の定める準同型のホモトピー不変性)】　K, K' を単体複体として，連続写像 $f, g : |K| \to |K'|$ がホモトープとすると，その定める準同型 $f_*, g_* : H_*(K) \to H_*(K')$ は一致する；

$$f \simeq g \ \Rightarrow \ f_* = g_*$$

□

Proof. $F : |K| \times I \to |K'|$ を f と g の間のホモトピーとする．I を n 個の区間 I_i に分割すると，十分大きな n と r に対して，複体 $\hat{K} \equiv \cup_i Sd^r K \times I_i (|\hat{K}| = |K| \times I)$ から K' への連続写像 F は単体近似 Φ をもち，$\phi(x) = \Phi(x, 0)$ と $\phi'(x) = \Phi(x, 1)$ は f と g の単体近似を与える．したがって，ϕ と ϕ' が与えるホモロジーの準同型 $\phi_*, \phi'_* : H_*(K) \to H_*(K')$ は一致する．よって，定義より，$f_* = g_*$ となる．　Q.E.D.

2.4.1.6　ホモロジー群の単体分割への非依存性

【定理 2.46 (ホモロジー群のホモトピー型不変性)】　K, K' を単体複体とするとき，多面体 $|K|, |K'|$ がホモトピー同型なら，$H_*(K) \cong H_*(K')$ となる．　□

Proof. $f : |K| \to |K'|$ と $g : |K'| \to |K|$ が $fg \simeq \mathrm{id}_{|K'|}$, $gf \simeq \mathrm{id}_{|K|}$ を満たすとすると，$f_* g_* = 1 : H_*(K') \to H_*(K')$, $g_* f_* = 1 : H*(K) \to H_*(K)$ より，f_* および g_* は $H_*(K)$ と $H_*(K')$ の同型対応を与える．　Q.E.D.

【定理 2.47 (ホモロジー群の位相不変性)】　$|K|$, $|K'|$ が同相ならば，$H_*(K) \cong H_*(K')$ となる．　□

【定義 2.48 (位相空間のホモロジー群)】　単体分割可能な位相空間 X に対し，その単体分割 (K, t) により定義されるホモロジー群 $H_*(K)$ の同型類は K に依存しない．そこでこの同型類を位相空間 X のホモロジー群とよび，$H_*(X)$ で表す．特に，$\chi(K)$ を X のオイラー数といい，$\chi(X)$ と書く．

位相空間 X, X' の間の連続写像 f に対して，その単体分割 K, K' により定義される準同型 $f_* : H_*(K) \to H_*(K')$ は K, K' の取り方に依らないので，位相空間のホモロジー群の間の準同型 $f_* : H_*(X) \to H_*(X')$ を定義する．このとき，$f, g : X \to X'$ がホモトープなら $f_* = g_*$ である．また，X, X' が同相なら $H_*(X) \cong H_*(X')$ となる． □

2.4.1.7　単体的ホモロジー群とコホモロジー群の構造

【定理 2.49 (単体複体鎖群の標準基底)】　q 次元鎖群 $C_q(K)(q = 0, 1, \cdots)$ の基

$$\begin{aligned}&a_i^q\ (i = 1, \cdots, \beta_q - \tau_q), \quad b_j^q\ (j = 1, \cdots, \tau_q), \quad c_k^q\ (k = 1, \ldots, R_q),\\&d_l^q\ (l = 1, \cdots, \tau_{q-1}), \quad e_m^q\ (m = 1, \cdots, \beta_{q-1} - \tau_{q-1})\end{aligned}$$

を適当にとって，

$$\begin{aligned}&\partial_q(a_i^q) = 0, \quad \partial_q(b_j^q) = 0, \quad \partial_q(c_k^q) = 0,\\&\partial_q(d_l^q) = \theta_l^{q-1} b_l^{q-1}, \quad \partial_q(e_m^q) = a_m^{q-1}\end{aligned}$$

が成り立つようにできる．この基は**標準基**と呼ばれる．
　このとき，

$$\begin{aligned}&Z_q(K) = \left\langle a_i^q, b_j^q, c_k^q \right\rangle,\\&B_q(K) = \langle \theta_l^q b_l^q, a_i^q \rangle,\\&H_q(K) = \langle [b_l^q], [c_k^q] \rangle \cong \oplus^{R_q} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{\theta_1^q} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{\theta_{\tau_q}^q}\end{aligned}$$

となり，R_q が q 次元の Betti 数を，$(\theta^q 1, \cdots, \theta_{\tau_q}^q)$ が q 次元のねじれ係数を与える． □

【定理 2.50 ($\mathbb{Z}_2$ 係数のホモロジー群の構造)】　上で定義された複体 K の $\mathbb{Z}$ 係数ホモロジー群の Betti 数を R_q，ねじれ係数 θ_l^q のうち偶数の個数を τ_q^+ とすると，$\mathbb{Z}_2$ 係数のホモロジー群は

$$H_q(K; \mathbb{Z}_2) \cong \oplus^{R_q + \tau_q^+ + \tau_{q-1}^+} \mathbb{Z}_2$$

で与えられる． □

【定理 2.51 (コホモロジー群の構造)】　単体複体 K に対し，その q 次元の Betti 数を R_q, ねじれ係数を $\theta^q_1, \cdots, \theta^q_{\tau_q}$ とするとき，q 次元コホモロジー群 $H^q(K)$ は次式で与えられる：

$$H^q(K) \cong \oplus^{R_q}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{\theta_1^{q-1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{\theta^{q-1}_{\tau_{q-1}}}$$

□

Proof. K の q 次元双対鎖群 $C^q(K)$ の標準基底として次のものを取ることができる：

$$\begin{aligned}
&(a^q_i)^* \ (i = 1, \cdots, \beta_q - \tau_q), \quad (b^q_j)^* \ (j = 1, \cdots, \tau_q), \quad (c^q_k)^* \ (k = 1, \ldots, R_q),\\
&(d^q_l)^* \ (l = 1, \cdots, \tau_{q-1}), \quad (e^q_m)^* \ (m = 1, \cdots, \beta_{q-1} - \tau_{q-1}),\\
&\delta_q(a^q_i)^* = (e^{q+1}_i)^*, \quad \delta_q(b^q_j)^* = \theta^q_j(d^{q+1}_j)^*,\\
&\delta_q(c^q_k)^* = \delta_q(d^q_l)^* = \delta_q(e^q_m)^* = 0.
\end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned}
Z^q(K) &= \langle (c^q_k)^*, (d^q_l)^*, (e^q_m)^* \rangle,\\
B^q(K) &= \left\langle \theta^{q-1}_l (d^q_l)^*, (e^q_m)^* \right\rangle
\end{aligned}$$

となるので，直ちに題意を得る．　Q.E.D.

【定理 2.52 ($\mathbb{Z}_2$ **係数コホモロジー群)】**　単体複体 K に対して，

$$H^q(K;\mathbb{Z}_2) \cong H_q(K;\mathbb{Z}_2)$$

□

2.4.2　特異（コ）ホモロジー

2.4.2.1　定義

【定義 2.53 (特異チェイン複体)**】**

1) 位相空間 X に対して，$\mathbb{R}^{n+1}$ の標準単体 Δ^n から X への連続写像

$$\sigma : \Delta^n \to X$$

を X の n-特異単体という．その全体から生成される自由加群を $S_n(X)$ として，その直和として定義される次数付加群を $S_*(X) = (S_n(X))$ とおく．ただし，$n<0$ に対して $S_n(X)=0$．$\partial_n : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ を

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma \circ \epsilon_j, \quad \sigma \in S_n(X)$$

により定義する．ここで ϵ_j は，Δ^{n-1} の頂点 $e_k(k=0,n-1)$ に Δ^n の頂点 $e_k(k \leqslant j)$，$e_{k+1}(k>j)$ を対応させることにより定義される，Δ^{n-1} から Δ^n へのアファイン写像である．$S_*(X) = (S_j(X), \partial)$ はチェイン複体をなし，特異チェイン複体と呼ばれる．

2) 位相空間の対 (X,A)（$A \subset X$）に対して，チェイン複体 $S_*(X)$，$S_*(A)$ から新たなチェイン複体

$$S_*(X,A) := S_*(X)/S_*(A)$$

が定義され，自然に位相空間の対の圏から $\mathbb{Z}$-チェイン複体の圏への共変関手 S_* が得られる．また，R 加群 G に対して，チェイン複体 C_* に $C_* \otimes G$ および $\mathrm{Hom}_Z(C_*, G)$ を対応させると，それぞれ自然にチェイン複体の圏から R-チェイン複体への共変関手 $\otimes G$，および R-コチェイン複体への反変関手 $\mathrm{Hom}(*, G)$ が得られる．関手の結合 $H_* \circ \otimes G \circ S_*$ で得られる共変関手を G 係数特異ホモロジー関手，それによる (X,A) の像 $H_*(X,A;G)$ を空間対 (X,A) の G 係数特異ホモロジー群と呼ぶ．同様に，$H^* \circ \mathrm{Hom}(*, G) \circ S_*$ で得られる反変関手を G 係数特異コホモロジー関手，それによる (X,A) の像 $H^*(X,A;G)$ を空間対 (X,A) の G 係数特異コホモロジー群と呼ぶ．すなわち，

$$H_*(X,A;G) = H_*((S_*(X)/S_*(A)) \otimes G),$$
$$H^*(X,A;G) = H^*(\mathrm{Hom}(S_*(X)/S_*(A), G))$$

である．以下，

$$S_*(X,A;G) = (S_*(X)/S_*(A)) \otimes G,$$
$$S^*(X,A;G) = \mathrm{Hom}(S_*(X)/S_*(A), G)$$

と略記する．また，$R=G=\mathbb{Z}$ の時，G を省略する．

□

【注 2.54】

1. $c \in S_n(X)$ に対して，
$[c] \in Z_n(X,A) \;\Leftrightarrow\; \partial c \in S_n(A)$，
$[c] \in B_n(X,A) \;\Leftrightarrow\; \exists c' \in S_{n+1}(X) \quad \text{s.t.} \quad c - \partial c' \in S_n(A)$

2. 一般に，R 加群の短完全列 $0 \to A \to B \to C$ に対して，$\mathrm{Hom}(C,G) \to \mathrm{Hom}(B,G) \to \mathrm{Hom}(A,G) \to 0$ はやはり短完全列となる．これより，$S^n(X,A;G)$ の元は $u \in \mathrm{Hom}(S_n(X),G)$ で $u|_{S_n(A)} = 0$ となるものと一対一に対応する．この対応の元で，$< \delta[u],[c] >=< u, \partial c >$．
よって，
$[u] \in Z^n(X,A;G) \;\Leftrightarrow < u, \partial c >= 0 \forall c \in S_{n+1}(X)$，
$[u] \in B^n(X,A;G) \;\Leftrightarrow\; \exists [u'] \in \mathrm{Hom}(S_{n-1}(X),G) \quad \text{s.t.} < u, c >=< u', \partial c > \forall c \in S_{n-1}(X)$．

□

2.4.2.2 普遍係数定理

【定理 2.55 ((コ) ホモロジーの普遍係数定理)**】** (X,A) を空間対，G を加群とする．

1) 空間対のホモロジーに対して，自然な短完全系列

$$0 \to H_n(X,A;\mathbb{Z}) \otimes G \to H_n(X,A;G) \to \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X,A;\mathbb{Z}),G) \to 0$$

が存在する．この短完全系列は分裂する．

2) 空間対のコホモロジーに対して，自然な短完全系列

$$0 \to \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X,A;\mathbb{Z}),G) \to H^n(X,A;G) \to \mathrm{Hom}(H_n(X,A;\mathbb{Z}),G) \to 0$$

が存在する．この短完全系列は分裂する．

□

2.4.2.3　空間対の（コ）ホモロジー完全系列

【**定理 2.56** (空間対のホモロジー完全系列)】

1. 空間対 (X, A) に対して，次の完全系列が成り立つ：

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X, A; G) &\xrightarrow{\partial_*} H_n(A; G) \xrightarrow{i_*} H_n(X; G)\\ \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; G) &\xrightarrow{\partial_*} \cdots .\end{aligned}$$

   特に，$A \neq \emptyset$ のとき次の完全系列が成り立つ：

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X, A; G) &\xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_n(A; G) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X; G)\\ \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; G) &\xrightarrow{\partial_*} \cdots .\end{aligned}$$

   これらの完全系列は，空間対の連続写像に対して共変的関手性をもつ．

2. 空間の三つ組み $B \subset A \subset X$ に対して，次の完全系列が成り立つ：

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X, A; G) &\xrightarrow{\partial_*} H_n(A, B; G) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B; G)\\ \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; G) &\xrightarrow{\partial_*} \cdots .\end{aligned}$$

   この完全系列は，空間の 3 つ組の連続写像に対して共変的関手性をもつ．

□

【**定理 2.57** (空間対のコホモロジー完全系列)】

1. 空間対 (X, A) に対して，次の完全系列が成り立つ：

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow H^{n-1}(A; G) &\xrightarrow{\delta^*} H^n(X, A; G) \xrightarrow{j^*} H^n(X; G)\\ \xrightarrow{i^*} H^n(A; G) &\xrightarrow{\delta^*} \cdots .\end{aligned}$$

   特に，$A \neq \emptyset$ のとき次の完全系列が成り立つ：

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow \tilde{H}^{n-1}(A; G) &\xrightarrow{\delta^*} H^n(X, A; G) \xrightarrow{j^*} \tilde{H}^n(X; G)\\ \xrightarrow{i^*} \tilde{H}^n(A; G) &\xrightarrow{\delta^*} \cdots .\end{aligned}$$

   これらの完全系列は，空間対の連続写像に対して反変的関手性をもつ．

2. 空間の三つ組み $B \subset A \subset X$ に対して，次の完全系列が成り立つ：

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H^{n-1}(A,B;G) &\xrightarrow{\delta^*} H^n(X,A;G) \xrightarrow{j^*} H^n(X,B;G) \\ \xrightarrow{i^*} H^n(A,B;G) &\xrightarrow{\delta^*} \cdots . \end{aligned}$$

この完全系列は，空間の 3 つ組の連続写像に対して反変的関手性をもつ．

□

2.4.2.4　切除定理と Mayers-Vietoris の定理

【**定義 2.58** (切除的)】　位相空間 X の部分空間 X_1, X_2 に対し，包含写像

$$S(X_1) + S(X_2) \to S(X_1 \cup X_2)$$

がチェインホモトピー同値写像であるとき，組 $\{X_1, X_2\}$ は切除的であるという．$Y = X_1 \cup X_2$ における X_i の内部を $\mathrm{int}_Y X_i$ と書くとき，

$$Y = \mathrm{int}_Y X_1 \cup \mathrm{int}_Y X_2$$

ならば，$\{X_1, X_2\}$ は切除的である．□

【**定理 2.59** (Mayers-Vietoris 完全系列)】　X を位相空間，$\{X_1, X_2\}$ を X の切除的な空間の組とするとき，関手性をもつ次の加群の完全系列が存在する：

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{\Delta} H_n(X_1 \cap X_2; G) &\xrightarrow{i_{1*} \oplus (-i_{*2})} H_n(X_1; G) \oplus H_n(X_2; G) \\ \xrightarrow{j_{1*} + j_{2*}} H_n(X_1 \cup X_2; G) &\xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(X_1 \cap X_2; G) \longrightarrow \cdots , \\ \cdots \xrightarrow{\Delta} H^n(X_1 \cup X_2; G) &\xrightarrow{j_1^* \oplus (j_2^*)} H^n(X_1; G) \oplus H^n(X_2; G) \\ \xrightarrow{i_1^* - i_2^*} H^n(X_1 \cap X_2; G) &\xrightarrow{\Delta} H^{n-1}(X_1 \cup X_2; G) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

また，$X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ であるときは，$H_q(H^q)$ を簡約ホモロジー（コホモロジー）$\tilde{H}_q(\tilde{H}^q)$ で置き換えた完全系列が存在する．□

【定理 2.60 (切除定理)**】** $U \subset A \subset X$ を位相空間 X の部分空間の列とし，部分空間 V で $\bar{V}\mathring{A}$ かつ，$X - V$ から $X - U$ への変位レトラクション r_t で $r_t(A - V) \subset A - V$ となるものが存在するなら，包含写像 $i : (X - U, A - U) \to (X, A)$ は任意の係数群 G に対してホモロジー群とコホモロジー群の同型

$$\begin{aligned} i_* : H_n(X - U, A - U; G) &\xrightarrow[\cong]{} H_n(X, A; G), \\ i^* : H^n(X, A; G) &\xrightarrow[\cong]{} H^n(X - U, A - U; G) \end{aligned}$$

を誘導する． □

2.4.3 CW 複体の（コ）ホモロジー

【定義 2.61 (CW 複体)**】**

1) Hausdorff 空間の部分集合 e に対して，相対同相写像 $\phi : (D^n, S^{n-1}) \to (\bar{e}, \dot{e} = \bar{e} - e)$ が存在するとき，すなわち，連続写像 $\phi : D^n \to \bar{e}$ で，$\phi(S^{n-1}) \subset \dot{e}$，かつ $\phi : D^n - S^{n-1} \to e = \bar{e} - \dot{e}$ が同相となる写像 ϕ が存在するとき，e を n**(次元) 胞体** (cell)，ϕ をその**特性写像** (characteristic map) という．

2) Hausdorff 空間 X の胞体の集合 $\{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は，次の条件を満たすとき X の胞体分割という．

    i) $e_\mu \cap e_\nu = \varnothing (\mu \neq \nu)$.

    ii) $X = \cup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$.

    iii) $X^q := \cup_{\mu : \dim e_\mu \leqslant q} e_\mu$ とおくとき，$\dim e_\mu = q+1$ ならば $\dot{e}_\mu \subset X^q$.

3) 胞体分割の与えられた Hausdorff 空間 X を胞体複体，その 0 胞体を頂点，X^q を q 切片という．また，X の部分集合 A と交わる X の胞体 e に対して $\bar{e} \subset A$ が成り立つならば，A と交わる胞体の全体は A の胞体分割を与える．この胞体分割をもつ A を X の部分複体という．X の胞体の数が有限，可算のときそれぞれ有限複体，可算複体という．また，各点 $x \in X$ に対して，$x \in \mathrm{int}A$ となる有限（可算）部分複体 A が存在するとき，X は局所有限（可算）であるという．

4) 胞体複体 X から胞体複体 Y への連続写像 f は，$f(X^q) \subset Y^q$ を満たすとき，胞体写像という．

5) 胞体複体 X は，次の 2 条件を満たすとき CW 複体という：

C) X の各胞体 e に対して e を胞体として持つ有限部分複体が存在する．

W) X の集合 U は，X の各胞体 e に対して $U \cap \bar{e}$ が $\bar{e}$ の開集合のときしかもそのときに限り開集合である．

□

【命題 **2.62** (CW 複体の性質)】　CW 複体は次の性質を持つ．

1) 局所有限な胞体複体は CW 複体である．（逆は成り立たない．）

2) CW 複体 X の胞体複体としての部分複体 A は閉集合であり，再び CW 複体となる．

3) CW 複体はパラコンパクトな正規空間で，局所可縮である．

4) (**胞体近似定理**) CW 複体の間の任意の連続写像に対して，それとホモトープな胞体写像が存在する．

5) CW 複体とその部分複体との対は，任意の位相空間に対してホモトピー拡張性質をもつ．

6) CW 複体は任意のファイバー空間に対して被覆ホモトピー性を持つ．

7) CW 複体 X, Y の積複体 $X \times Y$ は，X と Y のいずれかが局所有限ないし両方が局所可算ならば，CW 複体となる．

8) CW 複体 X, Y に対して，その積複体 $X \times Y$ はある CW 複体にホモトピー同値である．

9) 多面体 $|K|$ はその開単体全体の集合を胞体分割として，正則 ($\bar{e}^q \cong D^q$) な CW 複体となる．逆に，任意の CW 複体に対して，それとホモトピー同値な多面体が存在する．

□

【命題 2.63】　CW 複体 X とその部分複体 A の対 (X, A) に対して，$\bar{X}^q = X^q \cup A$ とおく．任意の係数群 G に対して

$$H_q(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1}; G) = 0 \ (q \neq n),$$
$$\sum_{\lambda \in \Lambda_n} \phi_{\lambda *} : \sum_{\lambda \in \Lambda_n} H_n(D^n_\lambda, S^{n-1}_\lambda; G) \xrightarrow{\cong} H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1}; G)$$

が成り立つ．特に，$H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1})$ は自由加群となる．□

【定義 2.64 (CW 複体のチェイン複体)】

1) 加群 $C_n(X, A)$ を

$$C_n(X, A) := H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1})$$

により定義する．さらに，$\partial : C_n(X, A) \to C_{n-1}(X, A)$ を空間対 $(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1})$ に対する連結準同型 ∂_* と射影準同型 j_* を用いて

$$\partial : H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(\bar{X}^{n-1}) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(\bar{X}^{n-1}, \bar{X}^{n-2})$$

により定義する．このとき，$(C_*(X, A), \partial)$ はチェイン複体となる．これを CW 対 (X, A) のチェイン複体という．

2) CW 対 (X, A) に対して，そのチェイン複体 $C_*(X, A)$ から定義されるホモロジー群 $H_*(C_*(X, A) \otimes G)$ およびコホモロジー群 $H^*(\mathrm{Hom}(C_*(X, A), G)$ を CW 対の胞体ホモロジー群および胞体コホモロジー群という．

□

2.4.4 Čech の (コ) ホモロジー

【定義 2.65 (Čech の（コ）ホモロジー)】　位相空間 X の開被覆 $\mathscr{U}$ に対して，$\mathscr{U}$ に属する各開集合を頂点，共通部分が空でない n コの開集合の組を n 単体と定義すると，$\mathscr{U}$ から単体複体 $K(\mathscr{U})$ が作られる．X とその部分空間 A に対して，このようにして得られる単体複体の対を $(K(\mathscr{U}), L(\mathscr{U}'))$ とすると，そのホモロジー群 $H_*(K(\mathscr{U}), L(\mathscr{U}'); G)$ およびコホモロジー群 $H^*(K(\mathscr{U}), L(\mathscr{U}'); G)$ が定義される．次に，X の開被覆全体の属は，細分により擬有向集合となり，これらのホモロジー群とコホモロジー群はこの擬有向集合に対して，それぞれ射影系および帰納系となる．それら

の射影極限および帰納極限をそれぞれ，空間対 (X, A) に対する Čech のホモロジー群およびコホモロジー群という：

$$\check{H}_*(X, A; G) = \lim_{\leftarrow} H_*(K(\mathscr{U}), L(\mathscr{U}'); G),$$
$$\check{H}^*(X, A; G) = \lim_{\rightarrow} H^*(K(\mathscr{U}), L(\mathscr{U}'); G)$$

□

【定理 2.66 (Leray の定理 (定数係数の場合))】　位相空間 X において，その任意の開被覆に対して，その細分 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ で開集合 U_α が可縮なものが常に存在するならば，A 加群 G を係数とする Čech コホモロジーに対して

$$\check{H}^q(\mathfrak{U}, G) \cong \check{H}^q(X, G)$$

が成り立つ．□

【定理 2.67 (単体的（コ）ホモロジーと Čech(コ) ホモロジーの一致)】
単体分割可能な位相空間 $X = |K|$ に対して，

$$H_*(K, G) \cong \check{H}_*(X, G), \quad H^*(K, G) \cong \check{H}^*(X, G)$$

が成り立つ．□

Proof. 位相空間 X の任意の開被覆 $\mathfrak{U}_0 = \{U_\alpha\}$ に対して，その単体分割 K_0 に対して重心細分を十分繰り返すと，対応する $K = Sd^r K_0$ の各頂点 a_i の開星状体 $O_K(a_i)$ は可縮で，その全体 $\mathfrak{U}$ は X の開被覆となり $\mathfrak{U}$ の細分を与える．したがって，Leray の定理より，$\check{H}^*(X, G) \cong \check{H}^*(\mathfrak{U}, G)$ が成り立つ．

このとき，Čech 複体 $\check{C}_*(\mathfrak{U})$ の単体に対して，

$$\phi_q : U_{i_0 \cdots i_q} = O_K(a_{i_0}) \cap \cdots O_K(a_{i_q}) \neq \varnothing \;\Leftrightarrow\; \left\langle a_{i_0}, \cdots, a_{i_q} \right\rangle \in C_*(K)$$

より，$\check{C}_*(\mathfrak{U})$ の単体と $C_*(K)$ の単体が 1 対 1 に対応し，しかも，この対応は鎖群に対する境界作用素と可換となる：

$$\partial_q^K \phi_q = \phi_q \check{\partial}_q$$

よって，$\check{H}_*(X, G) \cong \check{H}_*(\mathfrak{U}, G) \cong H_*(K, G)$ となる．この対応を余鎖複体に翻訳することにより，直ちにコホモロジーに対する同様の結論が得られる．　Q.E.D.

2.4.5 様々な (コ) ホモロジーの関係

【**定義 2.68** (Eilenberg-Steenrod の公理)】

1) 次の 3 つの関数の集合を H^* で定義する：

   i) 各位相空間対 (X, A) と各整数 q に対して，Abel 群 $H^q(X, A)$ を対応させる関数.

   ii) 各連続写像 $f : (X, A) \to (Y, B)$ と各整数 q に対して，準同型 $f^* : H^q(Y, B) \to H^q(X, A)$ を対応させる関数.

   iii) 各位相空間対 (X, A) と各整数 q に対して，準同型 $\delta^* : H^q(A) = H^q(A, \varnothing) \to H^{q+1}(X, A)$ を対応させる関数.

   H^* が次の 7 つの公理を満たすとき，H^* を位相空間対の圏上のコホモロジー理論という.

   I) $1^* = 1$

   II) $f : (X, A) \to (Y, B)$，$g : (Y, B) \to (Z, C)$ ならば，$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

   III) (ホモトピー公理) $f \simeq g : (X, A) \to (Y, B)$ ならば，$f^* = g^*$.

   IV) (完全性公理）つぎの系列は完全である：

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{\delta^*} \ & H^q(X, A) \xrightarrow{j^*} H^q(X) \xrightarrow{i^*} H^q(A) \\ \xrightarrow{\delta^*} \ & H^{q+1}(X, A) \xrightarrow{j^*} \cdots . \end{aligned}$$

   ここで，$i : A \subset X$，$j : (X, \phi) \subset (X, A)$.

   V) $f : (X, A) \to (Y, B)$ に対して，$f^* \circ \delta^* = \delta^* \circ (f|_A)^*$.

   VI) (切除公理）X の開集合 U が $\bar{U} \subset \mathrm{int}A$ を満たすとき，

$$i^* : H^q(X, A) \cong H^q(X - U, A - U).$$

   VII) (次元公理）$H^q(\mathrm{pt}) = 0$ $(q \neq 0)$.

   コンパクトな Hausdorff 空間対のつくる圏上のコホモロジー理論も同様に定義される．また，双対的に，圏上のホモロジー理論が定義される.

2) CW 対の圏上の（コ）ホモロジー理論が，公理 VI) を次の切除公理に置き換えることにより定義される：X_1, X_2 がある CW 複体の部分複体ならば，

$$i^* : H^q(X_1 \cup X_2, X_2) \cong H^q(X_1, X_1 \cap X_2)$$

□

【定理 2.69】

1) 単体複体，CW 複体，多様体に対して，特異および Čeck の（コ）ホモロジー群は同型となり，単体複体および CW 複体に対しては，それぞれ単体的（コ）ホモロジー群および胞体的（コ）ホモロジー群と同型となる．

2) G を係数に持つ特異（コ）ホモロジー群は，位相空間対の圏上の（コ）ホモロジー理論となる．

3) G に係数をもつ Čeck コホモロジー群は，位相空間対の圏上のコホモロジー理論となる．体に係数を持つ Čeck ホモロジー群は，コンパクトな Hausdorff 空間の作る圏上のホモロジー理論となる．

4) G に係数をもつ Čeck（コ）ホモロジー理論は CW 対の圏上の (コ) ホモロジー理論となり，同じ圏上で特異（コ）ホモロジー理論と同型である．

□

2.4.6　局所系の (コ) ホモロジー

【**定義 2.70** (局所系)】

1) X を位相空間として，X の点 x を点 y につなぐ道の空間 $\Omega(X; x, y)$ のホモトピー類を $M(y, x)$ とおく．X の点を対象，$M(y, x)$ を射とする圏を X の基本亜群とよび，$\Pi(X)$ と表す．

2) X の基本亜群 $\Pi(X)$ から圏 $\mathscr{C}$ への共変関手 $\mathscr{S}$ を $\mathscr{C}$ に値を持つ X 上の局所系という．

3) $\mathscr{C}$ に値をとる局所系 $\mathscr{S}$ に対して，$\gamma \in M(x,x)$ に $\mathscr{S}(\gamma) \in \mathrm{Aut}(\mathscr{S}_x)$ を対応させることにより定義される準同型

$$\bar{\mathscr{S}_x} : \pi_1(X,x) \to \mathrm{Aut}(\mathscr{S}_x)$$

を，$\mathscr{S}$ の x を基点とする特性準同型という．

□

【定理 **2.71**】

1) X を弧状連結な空間，$x_0 \in X$, $\mathscr{C}$ を圏とする．$\mathscr{C}$ に値をもつ X 上の局所系の同値類の全体と準同型 $\pi_1(X,x_0) \to \mathrm{Aut}(A)(A \in \mathscr{C})$ の共役類の全体は特性準同型をとることにより 1 対 1 に対応する．

2) X を弧状連結かつ局所弧状連結な空間とする．X の弧状連結な開集合の基に対して定義された圏 $\mathscr{C}$ に値をとる前層 $\mathscr{S}$ は，その射影が常に同型射となるならば，そのストーク $\mathscr{S}_x$ が局所系を定義する．

□

【定義 **2.72** (単純な局所系)】　X 上の局所系 $\mathscr{S}$ は，特性準同型が自明となるとき単純であるという．これは，$\mathscr{S}(\gamma) : \mathscr{S}(y) \to \mathscr{S}(x)$ が $\gamma \in M(y,x)$ の取り方に依らないことと同値である．□

【定義 **2.73** (n 単純)】　位相空間 X が弧状連結で，その上の局所系 $\{\pi_n(X,x); x \in X\}$ が単純であるとき，X は n 単純であるという．□

2.4.7　無限チェインのホモロジー

【定義 **2.74**】　X を局所コンパクトな空間，$\mathscr{S}$ を R 加群に値をもつ X 上の局所系とする．このとき，X 上の局所有限な $\mathscr{S}$ 係数特異 q チェインの全体を $\check{S}_q(X;\mathscr{S})$ とすると，$\check{S}(X;\mathscr{S}) = (\check{S}_q(X;\mathscr{S}), \partial)$ はチェイン複体となる．この X の無限特異チェイン複体，そのホモロジー群を $\check{H}_*(X;\mathscr{S})$ と書き，X の無限チェインのホモロジー群という．□

2.4.8　コンパクト台のコホモロジー

【定義 2.75】　X を局所コンパクトな空間，$\mathscr{S}$ をその上の局所系とするとき，そのコンパクト集合の全体 $\{K\}$ の帰納系 $\{S^*(X, X-K; \mathscr{S})\}$ に対して，その帰納的極限

$$\check{S}^*(X; \mathscr{S}) := \varinjlim_{K} S^*(X, X-K; \mathscr{S})$$

をコンパクトな台をもつコチェイン複体，そのコホモロジー群 $\check{H}^*(X; \mathscr{S})$ をコンパクトな台のコホモロジー群という．　□

【定理 2.76】　X を局所コンパクト空間，$\mathscr{S}$ をその上の局所系とするとき，

$$\check{H}^*(X; \mathscr{S}) = \varinjlim_{K} H^*(X, X-K; \mathscr{S})$$

が成り立つ．さらに，自然な準同型

$$\check{H}^*(X; \mathscr{S}) \to H^*(X; \mathscr{S})$$

が存在し，特に X がコンパクトであるときこの準同型は同型となる．　□

2.5　(コ) ホモロジーの積演算

2.5.1　積の (コ) ホモロジー

【定理 2.77 (Eilenberg-Zilber)】　X, Y を位相空間，$S(X)$, $S(Y)$ をそれらの特異チェイン複体とするとき，特異チェイン複体 $S(X \times Y)$ から $S(X) \otimes S(Y)$ への自然なチェイン写像 $\rho : S(X \times Y) \to S(X) \otimes S(Y)$ であって，0 次元において

$$\rho(x, y) = x \otimes y \quad (x \in X \subset S_0(X), y \in Y \subset S_0(y))$$

を満たすものが，チェインホモトピー同値を除いて一意的に存在する．

　また，$S(X) \otimes S(Y)$ から $S(X \times Y)$ への自然なチェイン写像 $\kappa : S(X) \otimes S(Y) \to S(X \times Y)$ であって，0 次元において

$$\kappa(x \otimes y) = (x, y) \quad (x \in X, y \in Y)$$

を満たすものが，チェインホモトピー同値を除いて一意的に存在し，ρ のチェインホモトピー逆写像となる．　□

【**定義 2.78** (切除的)】　位相空間 X の部分空間 X_1, X_2 に対し，線形写像 $S(X_1) + S(X_2) \to S(X_1 \cup X_2)$ がチェインホモトピー同値写像となるとき，(X_1, X_2) は切除的であるという． □

【**定義 2.79** (クロス積)】

1) 一般に，空間 Z の特異 p 単体 σ に対する作用

$$\partial_i \sigma = \sigma \epsilon_i : \Delta^{p-1} \to Z$$

($\epsilon_i : \Delta^p \to \Delta^{p-1}$ は，頂点の対応 $[0, 1, \cdots, p-1] \to [0, \cdots, i-1, i+1, \cdots, p]$ により定義される単体写像) により定義される線形写像を $\partial_i : S_p(Z) \to S_{p-1}(Z)$ とするとき，$X \times Y$ の特異 n 単体 (σ, τ) に対して，

$$\rho(\sigma, \tau) = \sum_{i=0}^{n} \partial_{i+1} \cdots \partial_n \sigma \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i-1} \tau$$

で与えられる $\rho : S(X \times Y) \to S(X) \otimes S(Y)$ は，自然なホモトピー同値写像を与え，**Alexander-Whitney** 写像と呼ばれる．ρ のチェインホモトピー逆写像を $\kappa : S(X) \otimes S(Y) \to S(X \times Y)$ と表記する．

2) 空間対 $(X, A), (Y, B)$ に対して，合成写像

$$\begin{aligned} \times : \quad & H_p(X, A; G_1) \otimes H_q(Y, B; G_2) \xrightarrow{\times} H_{p+q}(S(X, A; G_1) \otimes S(Y, B; G_2)) \\ & \xrightarrow{\kappa_*} H_{p+q}(S((X, A) \times (Y, B); G_1 \otimes G_2)) \end{aligned}$$

を特異ホモロジー群におけるクロス積という．$\{A \times Y, X \times B\}$ が切除的であるか，または $(X, A), (Y, B)$ が CW 対でいずれか一方が局所有限ならば，κ_* は同型写像である．

3) 空間対 $(X, A), (Y, B)$ に対して，$\{A \times Y, X \times B\}$ が切除的であるか，または $(X, A), (Y, B)$ が CW 対でいずれか一方が局所有限または有限型（各 q 切片が有限）とする．このとき，合成写像

$$\begin{aligned} \times : \quad & H^p(X, A; G_1) \otimes H^q(Y, B; G_2) \xrightarrow{\times} H^{p+q}(S^*(X, A; G_1) \otimes S^*(Y, B; G_2)) \\ & \xrightarrow{\rho^*} H^{p+q}(S^*((X, A) \times (Y, B); G_1 \otimes G_2)) \end{aligned}$$

を特異コホモロジー群におけるクロス積という．

□

【定理 2.80 ((コ) ホモロジーに対する Künneth の公式)】　R を単項イデアル整域であるとする．

1) 位相空間対 $(X, A), (Y, B)$ に対して，$\{A \times Y, X \times B\}$ が切除的であるとする．そのとき，標準的な短完全系列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow & \textstyle\sum_{p+q=n} H_p(X, A; R) \otimes_R H_q(Y, B; R) \xrightarrow{\ \times\ } H_n((X, A) \times (Y, B); R) \\ \longrightarrow & \textstyle\sum_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}^R(H_p(X, A; R), H_q(Y, B; R)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

が存在する．この短完全系列は分解する．

2) $(X, A), (Y, B)$ は CW 複体対で，X は有限型の CW 複体とする．そのとき，自然な短完全系列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow & \textstyle\sum_{p+q=n} H^p(X, A) \otimes_{\mathbb{Z}} H^q(Y, B) \xrightarrow{\ \times\ } H^n((X, A) \times (Y, B)) \\ \longrightarrow & \textstyle\sum_{p+q=n+1} \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(H^p(X, A), H^q(Y, B)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

が存在する．この短完全系列は分解する．

□

2.5.2　カップ積とキャップ積

【定義 2.81 (カップ積)】　空間 X とその部分空間 A_1, A_2 を考える．$\{A_1 \times X, X \times A_2\}$ が $X \times X$ で切除的であるか，$\{A_1, A_2\}$ が X で切除的であるとする．標準対角写像 $\Delta : X \to X \times X$ とクロス積の合成

$$\begin{aligned} \smile\colon\ & H^p(X, A_1; G_1) \times H^q(X, A_2; G_2) \xrightarrow{\times} H^{p+q}((X, A_1) \times (X, A_2); G_1 \otimes G_2) \\ & \xrightarrow{\Delta^*} H^{p+q}(X, A_1 \cup A_2; G_1 \otimes G_2) \end{aligned}$$

を**カップ積**という．$u \in S^p(X; G_1), v \in S^q(X; G_2)$，$\sigma \in S_{p+q}(X)$ に対して

$$\langle \sigma, u \smile v \rangle := \langle \partial_{p+1} \cdots \partial_{p+q} \sigma, u \rangle \langle \partial_0 \cdots \partial_{p-1} \sigma, v \rangle \in G_1 \otimes G_2$$

とおくとき，

$$\begin{aligned} &\delta(u \smile v) = (\delta u) \smile v + (-1)^p u \smile (\delta v), \\ &[u] \smile [v] = [u \smile v] \end{aligned}$$

が成り立つ．□

【**命題 2.82** (カップ積の性質)】 $u \in H^p(X, A_1; R), v \in H^q(X, A_2; R), w \in H^r(X, A_3; R)$ とし，カップ積 $u \smile v$ などがすべて定義されているものとする．

1) 連続写像 $f : Y \to X$ で $f(B_i) \subset A_i (i = 1, 2)$ となるものに対して，$f^* u \smile f^v$ が定義されていれば，

$$f^*(u \smile v) = f^*(u) \smile f^*(v) \in H^{p+q}(Y, B_1 \cup B_2; R)$$

が成り立つ．

2) (結合律) $(u \smile v) \smile w = u \smile (v \smile w)$.

3) R が単位元を持つとする．そのとき，$1 \in H^0(X; R)$ に対して，

$$u \smile 1 = 1 \smile u = u \in H^p(X, A_1; R)$$

4) R は可換環であるとする．そのとき，

$$v \smile u = (-1)^{pq} u \smile v \in H^{p+q}(X, A_1 \cup A_2; R)$$

□

【**定義 2.83** (キャップ積)】 G_1, G_2 を加群として，$c = \sum_i \sigma_i \otimes g_i \in S_n(X; G_1), u \in S^p(X; G_2)$ に対して，$c \frown u \in S_{n-p}(X; G_1 \otimes G_2)$ を

$$c \frown u = \sum_i \partial_0 \cdots \partial_{p-1} \sigma_i (g_i \otimes \langle \partial_{p+1} \cdots \partial_n \sigma_i, u \rangle)$$

により定義する．このとき，

$$\partial(c \frown u) = (-1)^p (\partial c \frown u - c \frown \delta u)$$

が成り立ち，A, B が X の中で切除的ならば，積演算

$$\frown : H_n(X, A \cup B; G_1) \times H^p(X, A; G_2) \to H_{n-p}(X, B; G_1 \otimes G_2)$$

が，$[c] \frown [u] = [c \frown u]$ により定義される．この積を**キャップ積**という．

□

【命題 **2.84** (キャップ積の性質)】　R は単位元をもつ可換環，X, Y は位相空間，A, A_i は X の部分空間，B_i は Y の部分空間とする．

1) $\{A_1, A_2\}$ は X の中で切除的，$\{B_1, B_2\}$ は Y の中で切除的，$f : X \to Y$ は $f(A_i) \subset B_i (i = 1, 2)$ となる連続写像とする．そのとき，$c \in H_n(X, A_1 \cup A_2; R), v \in H^p(Y, B_1; R)$ に対して，

$$f_*(c \frown f^*v) = f_*(c) \frown v \in H_{n-p}(Y, B_2; R)$$

が成り立つ．

2) $c \in H_n(X, A_1 \cup A_2 \cup A_3; R), u \in H^p(X, A_1; R), v \in H^q(X, A_2; R)$ に対し，$c \frown u$ などのキャップ積はすべて定義されているものとする．そのとき，

$$(c \frown u) \frown v = c \frown (u \smile v) \in H_{n-p-q}(X, A_3; R)$$

3) 単位コホモロジー類 $1 \in H^0(X; R)$ と任意の $c \in H_n(X, A; R)$ に対して，

$$c \frown 1 = c.$$

4) $c \in H_n(X, A; R), u \in H^n(X, A; R)$ に対し，

$$\epsilon_*(c \frown u) = \langle c, u \rangle \in R$$

が成り立つ．ただし，ϵ_* は添加写像 $\epsilon : S_0(X) \to \mathbb{Z}$ が誘導するホモロジーの準同型 $H_0(X; R) \to R$ を表す．

□

2.6 例

2.6.1 Euler 数と Lefschetz 数

【**定義 2.85** (**Lefschetz 数と Euler 数**)】 (X,A) が有限型のホモロジーをもち，十分大きい n に対して $H_n(X,A)=0$ となるとき，(X,A) は有限生成ホモロジーをもつという．このとき，$H_n(X,A)$ の捻れ部分群を T_n として，$\bar{H}_n(X,A)=H_n(X,A)/T_n$ とおくと，連続写像 $f:(X,A)\to(X,A)$ から誘導される写像 $f_*^{(n)}:\bar{H}_n(X,A)\to\bar{H}_n(X,A)$ から定義される整数

$$L(f):=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathrm{tr}f_*^{(n)}$$

を f の **Lefschetz 数**という．また，特に $L(1)$，すなわち

$$\chi(X,A):=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$$

を空間対 (X,A) の **Euler 数**という． □

【**定理 2.86** (**Hopf**)】 (X,A) を有限CW複体の対，$f:(X,A)\to(X,A)$ を胞体写像，それから誘導される $C_n(X,A)$ の準同型を $f_\sharp^{(n)}$ とするとき，

$$L(f)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathrm{tr}f_\sharp^{(n)}$$

が成り立つ．特に，$f=\mathrm{id}$ に対して，X の n 胞体で A に含まれないものの個数を c_n とするとき，

$$\chi(X,A)=\sum_n(-1)^n c_n.$$

□

【**定理 2.87** (和空間)】 X を位相空間，$\{X_1,X_2\}$ を切除的部分空間の組で X_1,X_2 および $A=X_1\cap X_2$ がすべて有限生成ホモロジーをもつとする．このとき，$X=X_1\cup X_2$ も有限生成ホモロジーをもち，連続写像 $f:X\to X$ で $f(X_i)\subset X_i$ となるものに対し，

$$L(f)+L(f|A)=L(f|X_1)+L(f|X_2)$$

が成り立つ．特に，

$$\chi(X)+\chi(A)=\chi(X_1)+\chi(X_2).$$

□

【**定理 2.88** (積空間)】　X, Y はともに有限生成ホモロジーをもつ空間とする．このとき，$X \times Y$ も有限生成ホモロジーをもち，連続写像 $f : X \to X, g : Y \to Y$ に対し，

$$L(f \times g) = L(f)L(g)$$

が成り立つ．特に，

$$\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y).$$

□

2.6.2　多様体

2.6.2.1　連結和

【**命題 2.89**】　任意の位相空間 X に対して

$$H_q(X \times I, X \times \partial I) \cong H_{q-1}(X),$$
$$H^q(X \times I, X \times \partial I) \cong H^{q-1}(X).$$

□

【**命題 2.90** (ホモロジー群)】　X, Y を n 次元多様体（$n \geqslant 3$）とするとき，

$$H_q(X \sharp Y) \cong H_q(X) \oplus H_q(Y); \quad 1 \leqslant q \leqslant n-2$$

が成り立つ．さらに，X, Y が境界を持たないコンパクト多様体の時，

$$H_{n-1}(X \sharp Y) \cong H_{n-1}(X) \oplus H_{n-1}(Y)$$

□

【**定理 2.91** (Euler 数)】　X, Y を n 次元多様体とするとき，

$$\chi(X \sharp Y) = \begin{cases} \chi(X) + \chi(Y) - 1 - (-1)^n & ; X, Y \text{ compact}, \\ \chi(X) + \chi(Y) - 1 + (-1)^n & ; X, Y \text{ noncompact}, \\ \chi(X) + \chi(Y) - 1 & ; \text{the other cases}. \end{cases}$$

□

2.6.2.2 RP^n

1 S^n の CW 分割と CW チェイン複体： 単位球体 $D^k \subset \mathbb{R}^k$ の標準の向きを

$$u_k : \Delta^k = (0, 1, \cdots, k) \to (v_1, \cdots, v_k, 0) \subset D^k$$

の定める $H_k(D^k, D^k - (v_1 + \cdots + v_k)/k) \cong H_k(D^k, D^k - 0)$ の元と定義する．ここで，v_j は j 座標軸の単位点を表すベクトル．標準の入射列

$$\cdots \subset \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \subset \cdots$$

に対して，$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ の k 胞体を

$$\bar{e}^k_\pm = S^n \cap \mathbb{R}^k_\pm \ (k = 0, 1, \cdots, n)$$

とおくと，

$$S^n = e^0_+ \cup e^0_- \cup \cdots e^n_+ \cup e^n_-.$$

$j : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^k$ を標準射影 $j(x_1, \cdots, x_{k+1}) = (x_1, \cdots, x_k)$ として，$e^k_\pm$ の向きを

$$j_*[\bar{e}^k_\pm, \partial\bar{e}^k_\pm] = \pm[D^k, \partial D^k]$$

により定めると，

$$\begin{aligned}\partial D^k_\pm &\sim \pm\partial(v_1, \cdots, v_{k-1}, \pm v_k, 0)\\ &\sim \pm(-1)^{k-1}(v_1, \cdots, v_{k-1}, 0) \pm (-1)^k(v_1, \cdots, v_{k-1}, \pm v_k) + \cdots\end{aligned}$$

において，

$$j_*(v_1, \cdots, v_{k-1}, \pm v_k) = (v_1, \cdots, v_{k-1}, 0) \sim D^{k-1}$$

より，

$$\partial_*[D^k_\pm, \partial D^k_\pm] = \mp(-1)^k D^{k-1} + (-1)^k e^{k-1}_\pm$$

よって，

$$\partial e^k_\pm = \pm\partial[D^k, \partial D^{k-1}] = \pm(-1)^k(e^{k-1}_+ + e^{k-1}_-) \ (k = 1, \cdots, n).$$

2) $T : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ を $T(x) = -x$ により定めると，

$$\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n = S^n / \{1, T\}.$$

$\mathbb{R}P^n$ の胞体を

$$e^k = \pi_*(e^k_+)$$

により定めると，$e^0, \cdots, e^n$ は $\mathbb{R}P^n$ の胞体分割を与える：

$$\mathbb{R}P^n = e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^n.$$

このとき，

$$\pi_*(e^k_-) = (-1)^{k+1} e^k$$

より，

$$\partial e^k = (1 + (-1)^k) e^{k-1}.$$

すなわち，

$$0 \to C_n \xrightarrow{\times(1+(-1)^n)} C_{n-1} \cdots C_2 \xrightarrow{\times 2} C_1 \xrightarrow{0} C_0 \to 0.$$

よって，

$$\begin{aligned}
&H_0(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}, \\
&H_{2k}(\mathbb{R}P^n) = 0 \ (k > 0), \\
&H_{2k-1}(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2 \ (2k-1 < n), \\
&H_{2k-1}(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z} \ (2k-1 = n).
\end{aligned}$$

目次へ

3 ホモトピー

Last update: 2011.7.18

3.1 基本事項

【定義 3.1 (ホモトープ)**】** 位相空間 X, Y の間の 2 つの写像 $f, g : X \to Y$ に対して，I を区間 $[0, 1]$ として，連続写像 $F : I \times X \to Y$ が存在して，$F(0, x) = f(x)$, $F(1, x) = g(x)$ となるとき，f と g は**ホモトープ** (homotope) であるといい，$f \simeq g$ で表す． □

【定義 3.2 (ホモトピー同値，ホモトピー型)**】** 位相空間 X, Y の間の写像 $f : X \to Y$ および $g : Y \to X$ が存在して，$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ および $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ が成り立つとき，X と Y は**ホモトピー同値**，または**同じホモトピー型を持つ**という．

また，写像 $f : X \to Y$ が X と Y のホモトピー群の間の同型を誘導するとき，X と Y とは**弱ホモトピー同値**であるという．X と Y がホモトピー同値なら，弱ホモトピー同値である． □

【定理 3.3 (J. H. C. Whitehead)**】** CW 複体 X, Y が弱ホモトピー同値なら，ホモトピー同値である．すなわち，CW 複体については，ホモトピー同値類はホモトピー群で完全に決定される． □

3.2 Lie 群のホモトピー

3.2.1 コンパクト Lie 群

【定理 3.4 (安定ホモトピー)**】** n を k に対して十分大きく取れば，古典コンパクト単純 Lie 群 G のホモトピー群は n に依存しなくなる．具体的には，$k \geqslant 2$ のとき，

$$\pi_k(\mathrm{U}) = \pi_k(\mathrm{U}(n)) \cong \pi_k(\mathrm{SU}(n)),\ n \geqslant (k+1)/2, \tag{4}$$

$$\pi_k(\mathrm{O}) = \pi_k(\mathrm{SO}(n)),\ n \geqslant k+2, \tag{5}$$

$$\pi_k(\mathrm{Sp}) = \pi_k(\mathrm{Sp}(n)),\ n \geqslant (k-1)/4. \tag{6}$$

□

目次へ

【**定理 3.5** (Bott の周期性)】

$$\pi_k(U) \quad \cong \begin{cases} \infty & ; k \equiv 1(\mathrm{mod} 2), \\ 0 & ; k \equiv 0(\mathrm{mod} 2). \end{cases} \tag{7}$$

$$\pi_k(O) \quad \cong \begin{cases} \infty & ; k \equiv 3, 7(\mathrm{mod} 8), \\ 2 & ; k \equiv 0, 1(\mathrm{mod} 8), \\ 0 & ; k \equiv 2, 4, 5, 6(\mathrm{mod} 8). \end{cases} \tag{8}$$

$$\pi_k(O) \quad \cong \begin{cases} \infty & ; k \equiv 3, 7(\mathrm{mod} 8), \\ 2 & ; k \equiv 4, 5(\mathrm{mod} 8), \\ 0 & ; k \equiv 0, 1, 2, 6(\mathrm{mod} 8). \end{cases} \tag{9}$$

□

【**定理 3.6** (低次のホモトピー群)】　G をコンパクト連結 Lie 群とする：$G = \mathrm{SO}(n)\,(n \geqslant 2)$, $\mathrm{Spin}(n)\,(n \geqslant 3)$, $\mathrm{U}(n)\,(n \geqslant 1)$, $\mathrm{SU}(n)\,(n \geqslant 2)$, $\mathrm{Sp}(n)\,(n \geqslant 1)$, G_2, F_4, E_2, E_6, E_8.

1) 基本群 $\pi_1(G)$:

$$\pi_1(G) \cong \begin{cases} \infty & ; G = \mathrm{U}(n)\,(n \geqslant 1),\ \mathrm{SO}(2), \\ 2 & ; G = \mathrm{SO}(n)\,(n \geqslant 3), \\ 0 & ; \text{その他} \end{cases} \tag{10}$$

2) $\pi_2(G)$:

$$\pi_2(G) = 0. \tag{11}$$

3) $\pi_3(G)$:

$$\pi_3(G) \cong \begin{cases} 0 & ; G = \mathscr{U}(1) \cong \mathrm{SO}(2) \\ \infty + \infty & ; G = \mathrm{SO}(4)\,\mathrm{Spin}(4) \\ \infty & ; \text{その他} \end{cases} \tag{12}$$

4) $\pi_4(G)$:

$$\pi_4(G) \cong \begin{cases} 2 + 2 & ; G = \mathrm{SO}(4)\,\mathrm{Spin}(4) \\ 2 & ; G = \mathrm{Sp}(n), \mathrm{SU}(2), \mathrm{SO}(3), \mathrm{SO}(5), \mathrm{Spin}(3), \mathrm{Spin}(5) \\ 0 & ; G = \mathrm{SU}(n)\ (n \geqslant 3), \mathrm{SO}(n)\,(n \geqslant 6), G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 \end{cases} \tag{13}$$

5) $\pi_5(G)$:

$$\pi_5(G) \cong \begin{cases} 2+2 & ; G = \mathrm{SO}(4)\,\mathrm{Spin}(4), \\ 2 & ; G = \mathrm{Sp}(n), \mathrm{SU}(2), \mathrm{SO}(3), \mathrm{SO}(5), \mathrm{Spin}(3), \mathrm{Spin}(5) \\ \infty & ; G = \mathrm{SU}(n)\ (n \geqslant 3), \mathrm{SO}(6), \mathrm{Spin}(6) \\ 0 & ; G = \mathrm{SO}(n), \mathrm{Spin}(n)\ (n \geqslant 7), G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 \end{cases} \tag{14}$$

$\square$

4　Manifolds

Last update: 2023 年 2 月 9 日

4.1　ホモロジー多様体

出典

- 田村一郎著「トポロジー」 (岩波全書, 1972)

4.1.1　局所ホモロジー群

【定義 4.1 (星状複体とまつわり複体)**】**　K を n 次元単体複体 $(n \geqslant 1)$ とする．

i) 多面体 $|K|$ の 1 点 p に対して，K の単体で p を含むものの全体とそのすべての辺単体からなる K の部分複体を，K における p の**星状複体**といい，$S_K(p)$ で表す：

$$S_K(p) = \{\sigma \in K \mid \exists\sigma' \in K : \sigma \prec \sigma'\} \tag{15}$$

ii) K における p の星状複体 $S_K(p)$ に属する単体 σ で $\mathrm{p} \notin \sigma$ となるものの全体 $L_K(p)$ は K の部分複体となる．この部分複体を K における p の**まつわり複体**，$|L_K(p)|$ を p の**まつわり多面体**という．

□

【定義 4.2 (局所ホモロジー群)**】**　複体 K の点 p に対して，$H_q(L_K(p))(q = 0, 1, \cdots 9$ を K における P の**局所ホモロジー群**という．K が n 次元 $(n \geqslant 2)$ で，p が n 単体の内点のとき，

$$H_q(L_K(p)) = H_q(K(\partial\sigma^n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ; q = 0, n-1 \\ 0 & ; q \neq 0, n-1 \end{cases}$$

となる．　□

【定理 4.3 (局所ホモロジー群 vs 単体分割)**】**　K, K' を単体複体，$f_* : |K| \to |K'|$ を同相写像とするとき，$H_*(L_K(p))$ と $H_*(L_{K'}(f(p)))$ は同型である．すなわち，局所ホモロジー群は単体分割の取り方に依存しない．　□

【定義 4.4 (単体分割な能な位相空間の局所ホモロジー群)】 X を単体分割可能な位相空間，(K, t) をその単体分割とするとき，$p \in X$ に対して，$H_*(L_K(t^{-1}(p)))$ を X の点 p に関する**局所ホモロジー群**といい，$H_*(L_X(p))$ で表す． □

【定理 4.5 (複体次元の不変性)】 単体複体 K, K' に対して，$|K|$ と $|K'|$ が同相なら，常に，$\dim K = \dim K'$ となる． □

4.1.2 ホモロジー多様体

【定義 4.6 (ホモロジー多様体)】 位相空間 M が単体分割可能で，ある自然数 n に対して，その任意の点 x における局所ホモロジー群が

$$H_*(L_M(x)) \cong H_*(S^{n-1})$$

を満たすとき，M を**ホモロジー多様体**という．n を M の**次元** (と) いい，$\dim M$ で表す． □

【定義 4.7 (局所ユークリッド的)】 位相空間 M の任意の点 x に対して，x を含み $(D^n)^\circ$ と同相な近傍が存在するとき，M は**局所ユークリッド的**であるという．n を M の**次元**といい，$\dim M$ で表す． □

【定理 4.8】 位相空間 M が局所ユークリッド的で n 次元なら，M は n 次元ホモロジー多様体である． □

【注 4.9 (局所ユークリッド的 vs ホモロジー多様体)】 1 次元，2 次元，3 次元ホモロジー多様体は局所ユークリッド的であるが，4 次元のホモロジー多様体は必ずしも局所ユークリッド的ではない． □

4.1.3 組合せ多様体

【定義 4.10 (複体の細分)】 単体複体 K, $\tilde{K}$ に対して，同相写像 $h : |\tilde{K}| \to |K|$ が,「任意の $\tilde{\sigma} \in \tilde{K}$ に対して，$h(\tilde{\sigma}) \subset \sigma \in K$ となる単体 σ が存在し，$h|\tilde{\sigma} : \tilde{\sigma} \to \sigma$ が線形写像となる」という条件を満たすとき，$(\tilde{K}, h)$ を K の**細分**という． □

【例 4.11 (重心細分)】　単体複体 K の単体列：$\sigma_0 < \sigma_1 \cdots < \sigma_k$ にその各単体の重心の列 $(b_0, \cdots, b_k)$ を頂点とする単体を対応させるとき，このようにして得られる単体全体は単体複体となる．この複体を K の**重心細分** (と) よび，$Sd(K)$ で表す．$|Sd(K)| = |K|$ で $Sd(K)$ は K の細分となる．　□

【定義 4.12 (組合せ的に同値)】　複体 K, K' に対して，両者の細分となる複体 $\tilde{K}$ が存在するとき (**共通細分**), K と K' は**組合せ的に同値**であるという．　□

【定義 4.13 (組み合わせ多様体)】　位相空間 M のある単体分割 $\{K, t\}$ が存在して，$|K|$ の任意の点 p において $L_K(p)$ と $K(\partial\sigma^n)$ が常に組合せ的に同値であるとき，対 (M, K) を**組合せ多様体**という．　□

【注 4.14 (様々な多様体の定義の関係)】

単体複体 $\supset$ ホモロジー多様体 $\supset$ 単体分割可能な位相多様体 $\supset$ 組合せ多様体

□

4.1.4　多様体の向きと基本ホモロジー類

【定義 4.15 (結い)】　複体 K に対して，その部分複体 K_1, K_2 が次の３条件を満たすとき，K を K_1 と K_2 の**結い**といい，$K_1 * K_2$ と表す．

i) $K_1 \cap K_2 = \varnothing$.

ii) K の頂点は K_1 か K_2 に属する．

iii) $|a_{i_0} \cdots a_{i_r}|$ を K の単体，$|a'_{j_0} \cdots a'_{j_s}|$ を K' の単体とするとき，$|a_{i_0} \cdots a_{i_r} a'_{j_0} \cdots a'_{j_s}|$ が常に K の単体となっている．

□

【補題 4.16】

1) K' を r 個の点からなる 0 次元複体とするとき，$n \geqslant 1$ に対して，$H_n(K' * K(\partial\sigma^n)) \cong \oplus^{r-1}\mathbb{Z}$ となる．

2) 複体 K が $H_*(K(\partial\sigma^1) * K) \cong H_*(S^n)$ を満たすなら，$H_*(K) \cong H_*(S^{n-1})$ である．

□

【定理 4.17 (ホモロジー多様体の基本構造)】 M を n 次元ホモロジー多様体，$\{K, t\}$ を M の単体分割とするとき，

(i) $\dim K = n$ で，K の任意の単体は K のある n 単体の辺単体である．

(ii) K の任意の $(n-2)$ 単体 σ^{n-1} に対して，σ^{n-1} を辺単体に持つ K の n 単体がちょうど 2 つある．

□

Proof. (i) まず，$\dim K = n'$ として，p を $\sigma^{n'} \in K$ の内点とすると，明らかに $L_K(p) = \partial\sigma^{n'} \cong S^{n'-1}$ なので，$H_*(L_K(p)) \cong H_*(S^{n-1})$ より，$n' = n$ となる．次に，$\sigma \in K$ を含む単体の最大次元 m が $n-1$ 以下だとすると，対応する σ^m の内点 q に対し，$L_K(q) = \partial\sigma^m \cong S^{m-1}$ となるので，$H_*(L_K(q)) \cong H_*(S^{n-1})$ に反する．

(ii) K の勝手な $(n-1)$ 単体 σ^{n-1} に対し，それを辺とする n 単体を $\sigma^n_1, \cdots, \sigma^n_r (\sigma^n_i = q_i * \sigma^{n-1})$ とすると，σ^{n-1} の内点 p のまつわり複体は $L_K(p) \cong \{q_1, \cdots, q_r\} * K(\partial\sigma^{n-1})$. よって，$H_{n-1}(L_K(p)) \cong \bigoplus^{r-1}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ となるので，$r = 2$.

Q.E.D.

【定義 4.18 (向き付け可能)】 M を n 次元ホモロジー多様体，$\{K, t\}$ をその単体分割とする．いま，K の n 単体すべてに向きを与えて，2 つの接する n 単体から共有する $(n-1)$ 単体に誘導される向きがちょうど反対向きとなっているようにできるとき，M は**向き付け可能である**という．

□

【定理 4.19 (弧状連結成分)】 M を n 次元ホモロジー多様体とするとき，その各弧状連結成分は再び n 次元ホモロジー多様体となる． □

【補題 4.20】 M を弧状連結な n 次元ホモロジー多様体，$\{K, t\}$ をその単体分割とするとき，K の任意の 2 つの n 単体 σ, σ' に対して，n 単体の列 $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_r = \sigma'$ が存在して，σ_i と $\sigma_{i+1} (i = 0.1, \cdots, r-1)$ が共通の $(n-1)$ 単体を辺単体として持つようにできる． □

【定理 4.21 (向き付け可能性のホモロジーによる特徴付け)】 M を弧状連結な n 次元ホモロジー多様体とするとき，つぎのことが成り立つ．

(i) $H_n(M)$ は $\mathbb{Z}$ と同型か 0.

(ii) M が向き付け可能であるための必要十分条件は $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$ である．

□

【定義 4.22 (基本ホモロジー類)】 向き付け可能で弧状連結なホモロジー多様体 M の単体分割 $\{K, t\}$ に向きをつけることは，$H_n(M) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を一つ指定することと同等である．そこで，$H_n(M)$ の生成元を指定することを M に向きをつけるといい，この生成元を M の**基本ホモロジー類** (と) いう． □

【定理 4.23 ($\mathbb{Z}_2$ 係数の基本ホモロジー類)】 M を弧状連結な n 次元ホモロジー多様体とすると，$H_n(M, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ である．この $H_n(M, \mathbb{Z}_2)$ の生成元を，**$\mathbb{Z}_2$ 係数の基本ホモロジー類**と呼ぶ． □

4.1.5　２次元ホモロジー多様体（閉曲面）の分類定理

【定理 4.24 (1 次元ホモロジー多様体)】 弧状連結な 1 次元ホモロジー多様体は 1 次元球面 S^1 と同相である．特に，1 次元ホモロジー多様体は組合せ多様体となる． □

【定理 4.25 (２次元ホモロジー多様体の多角形構成)】

(i) 正 $2n$ 角形 $(n \geqslant 2)$ において，$2n$ 個の辺を任意に 2 つずつ対にし，対になっている 2 辺を同一視すれば，弧状連結なホモロジー多様体が得られる．逆に，弧状連結な 2 次元ホモロジー多様体は常にこのような構成で得られる．

(ii) ２次元ホモロジー多様体は 2 次元組合せ多様体である．

□

Proof.
- (i) の前半：図 1 に示したように，p が多角形 Ω の内点の時および頂点以外の辺上にあるとき，明らかに $L_K(p)$ は $K(\partial\sigma^2)$ と組合せ的に同値．また，p が多角形の頂点の場合も，p と同一視される多角形の各頂点の Ω における星状体 ($\cong I^1$) を p 端点とする線分に沿って順次つないでできる多角形が p の星状体となるので，やはり $L_K(p)$ は $K(\partial\sigma^2)$ と組合せ的に同値となる．よって，Ω から得られる面は，弧状連結な 2 次元組合せ多様体となる．

- (i) の後半：逆に，2 次元ホモロジー多様体 M の単体分割 K により得られる 2 単体の一つ $\sigma_1(=\Omega_1)$ を取り，その辺の一つ選ぶと，基本定理 4.17 より，それと辺を共有する別の 2 単体 σ_2 が一つだけ存在する．この単体を共有辺に沿って σ_1 に貼り付け，σ_2 に適当な線形変換を施すと凸多角形 Ω_2 がえら得る．次のこの多角形の辺を一つ選び，それを共有 2 単体 σ_3 を Ω_2 に接着し変形すると，再び凸多角形 Ω_3 が得られる．複体に含まれる 2 単体の数は有限で M は弧状連結なので，この操作を有限会繰り返すことにより，すべての 2 単体を貼り付けた凸多角形 Ω が得られ，元の複体は，この多角形の適当な 2 辺ずつを貼り合わせたものと一致する．したがって，Ω の辺の数は偶数で，Ω は同相変換により正多角形に同相となる．

Q.E.D.

【定義 4.26 (多角形の辺の同一視の記述)】 ホモロジー曲面に対応する $2n$ 多角形の境界と各辺に向きを与え，各辺に適当に記号を付与し，辺の向きが境界の向きと同じときは x, 逆向きの時は x^{-1} と表記する．また，同一視される辺には同じ記号を用いる．これにより，多角形の境界の同一視の構造は，$xyxzy^{-1}z^{-1}\cdots$ のように記号列で表される．

この記述法のもとで，境界を表す記号列に辺の対 x が $\cdots x\cdots x^{-1}\cdots$ ないし $\cdots x^{-1}\cdots x\cdots$ の用に現れるとき，x は**第 1 種の辺**といい，$\cdots x\cdots x\cdots$ ないし $\cdots x^{-1}\cdots x^{-1}$. という形で現れるとき**第 2 種の辺**という． □

【定理 4.27 (向き付け可能性との対応)】 正 $2n$ 角形 Ω から対になっている辺を同一視して得られる 2 次元ホモロジー多様体（閉曲面）M が向き付け可能であるための必要十分条件は，辺の対のすべてが第 1 種であることである． □

Proof. 2 単体の取りかで向きを定めると Ω のすべての 2 単体には,（平行移動により）自然な向きが定まり，Ω の辺でない 1 単体の向きに関し

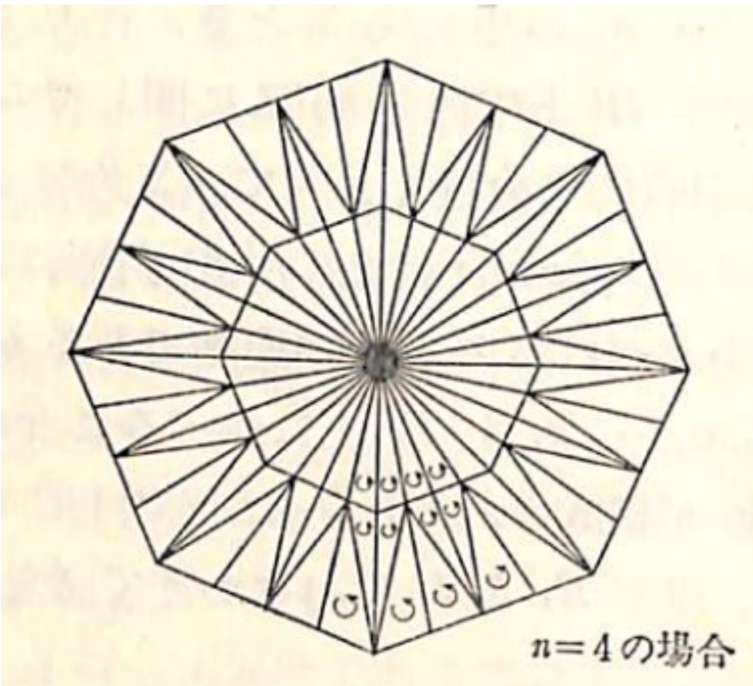


図 1: $n = 4$ の場合の 2 次元曲面の単体分割

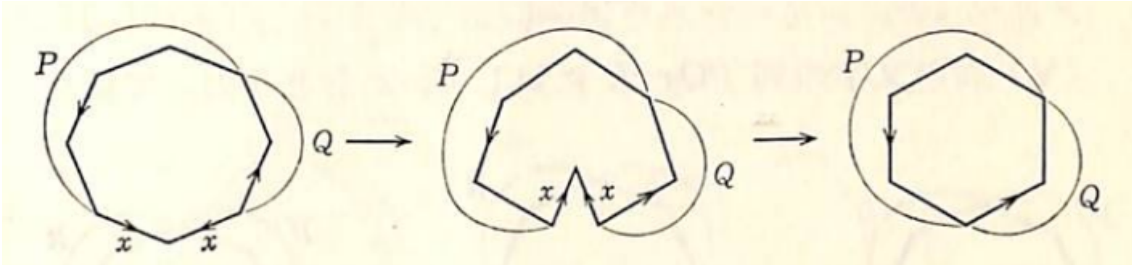
てそれらは整合的である．このとき，この多角形の向きから誘導される各辺の向きに関して，同一視される辺の両側の向きが整合的であるためには，対応する辺の対が第 1 種でなければならない．したがって，向き付け可能なら第 1 種のみとなる．逆に第 1 種のみなら，多角形内部の自然な向き付けが内部においても，辺においても整合的となり M の向きを定める． Q.E.D.

【定義 4.28 (2 次元ホモロジー多様体の多角形表示の同値変形)】 2 次元ホモロジー多様体 M の多角形表示に対する次の変形は，ホモロジー多様体の同型を与える：

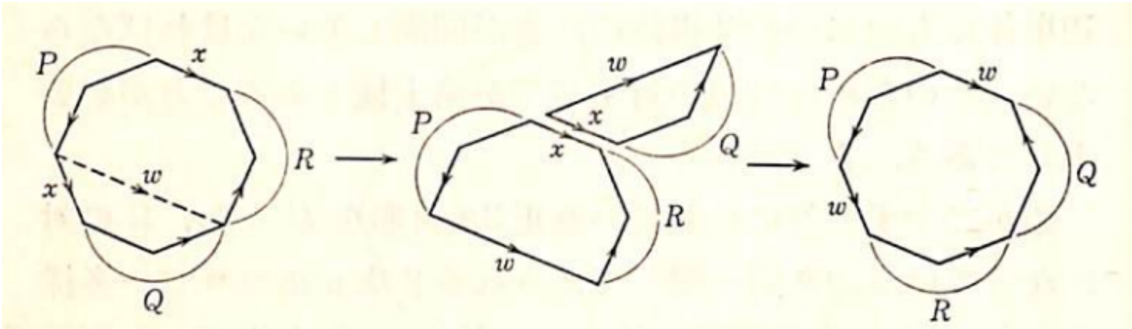
I 多角形の周の文字列をサイクリックにずらす： $xP \to Px$ (P は任意の文字列)

II xx^{-1} の簡約： $Pxx^{-1}Q,\ Px^{-1}xQ\ \to\ PQ$

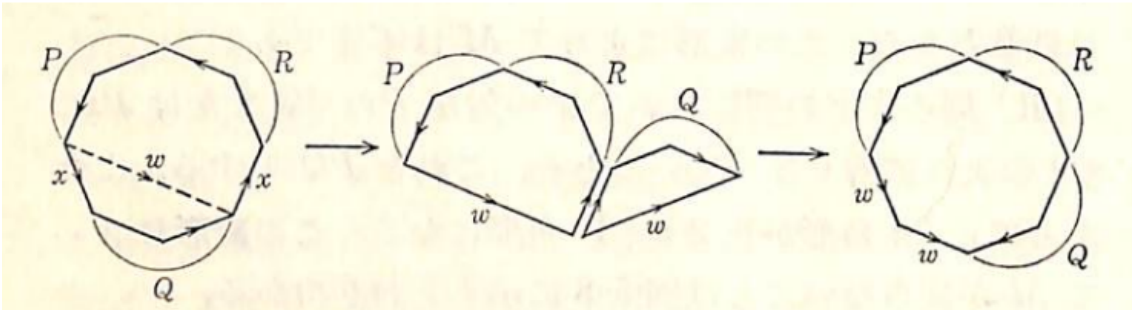
目次へ



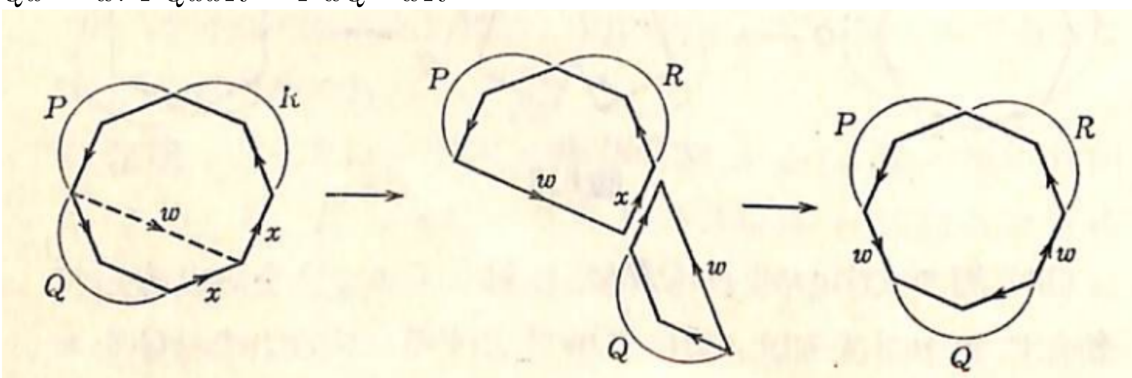
III $xQ \to w$: $PxQRx^{-1} \to PwRQw^{-1}$



IV $xQ \to w$: $PxQxR \to PwwQ^{-1}R$

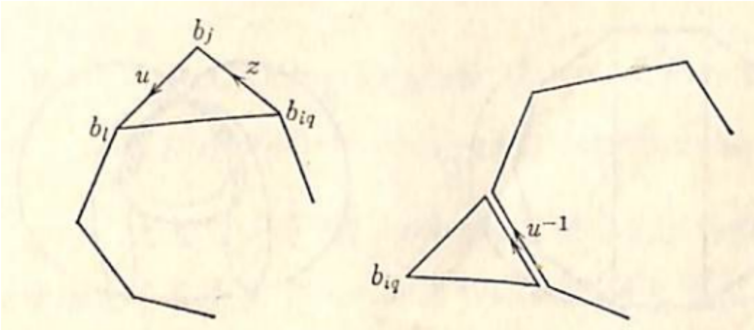


V $Qx \to w$: $PQxxR \to PwQ^{-1}wR$



目次へ

VI 互いに同一視される多角形の頂点の数を 1 つ増やす変換：



□

【定理 4.29 (２次元閉曲面の標準多角形表示)】 弧状連結な 2 次元ホモロジー多様体（閉曲面）は，正 $2n$ 角形 Ω の辺を次の文字列に従って同一視したものと同相である．

(i) M_0: xx^{-1}

(ii) M_g: $x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1}\cdots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1}$

(iii) M'_k: $x_1x_1x_2x_2\cdots x_kx_k$

ここで，(i) と (ii) の場合は向き付け可能，(iii) の場合は向き付け不可能である． □

【定理 4.30 (2 次元閉曲面のホモロジー群)】 定理 4.29 で得た 2 種類の閉曲面のホモロジー群は次式で与えられる：

(i) $H_0(M_0)\cong H_2(M_0)\cong\mathbb{Z},\quad H_1(M_0)=0,$

(ii) $H_0(M_g)\cong H_2(M_g)\cong\mathbb{Z},\quad H_1(M_0)=0\oplus^{2g}\mathbb{Z}$

(iii) $H_0(M'_k)\cong\mathbb{Z},\quad H_2(M'_k)=0,\quad H_1(M'_k)\cong\mathbb{Z}_2\oplus^{k-1}\mathbb{Z}$

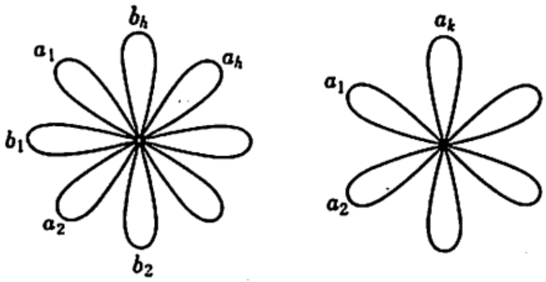
□

Proof. 閉曲面に対応する正 $2n$ 角形の単体分割 K に関する中心 O の星状体を $S_K(O)$，K の重心細分 $\tilde{K}$ に関する O の星状体 $S_{\tilde{K}}(O)$ に含まれない $\tilde{K}$ の 2 単体とその辺の全体からなる $\tilde{K}$ の部分複体を K' とすると，

$|K'| \cup |S_K(O)| = |K|$ かつ $|\partial S_K(O)| \cong S^1$ が $|K' \cap S_K(O)|$ の変異レトラクトとなっている．よって，Meyers-Vietris の定理より，完全系列

$$\begin{array}{llllll}
\cdots \longrightarrow & H_2(S^1) = 0 & \xrightarrow{\psi_2} & H_2(K') \oplus H_2(S_K(O)) & \xrightarrow{\phi_2} & H_2(K) \\
\xrightarrow{\Delta_2} & H_1(S^1) & \xrightarrow{\psi_1} & H_1(K') \oplus H_1(S_K(O)) & \xrightarrow{\phi_1} & H_1(K) \\
\xrightarrow{\Delta_1} & H_0(S^1) & \xrightarrow{\psi_0} & H_0(K') \oplus H_0(S_K(O)) & \xrightarrow{\phi_0} & H_0(K) \longrightarrow 0
\end{array}$$

が得られる．ここで，$\psi = i_{1*} \oplus (-i_{2*})$, $\phi = j_{1*} + j_{2*}$ である．



一点 O は $S_K(O)$ の変位レトラクト，図に示した S^1 の $2g(=2h)$ 個および k 個の S^1 のウェッジ和 $F = \bigvee^m S^1 (m = 2g, k)$ が K' の変位レトラクトとなるので，上の完全系列は次のように分解する：

$$\begin{array}{lllllllll}
0 & \xrightarrow{\phi_2} & H_2(K) & \xrightarrow{\Delta_2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\psi_1} & \oplus^m \mathbb{Z} & \xrightarrow{\phi_1} & H_1(K) \longrightarrow 0 \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\psi_0} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\phi_0} & H_0(K) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

ここで，K が向き付け可能なとき，

$$\psi_1([S^1]) = [a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}] = [a_1] + [b_1] - [a_1] - [b_1] + \cdots = 0$$

したがって $H_1(K) \cong \oplus^{2g}\mathbb{Z}$ となる．また，K は弧状連結なので，$H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ となる．

一方，K が向き付け可能でないとすると，$H_2(K) = 0$．また，

$$\psi_1([S^1]) = [a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_k a_k] = 2([a_1] + \cdots + [a_k])$$

より，$H_1(K) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus^{k-1} \mathbb{Z}$ となる．やはり，弧状連結性より $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$. Q.E.D.

【定理 4.31 (２次元閉曲面の分類定理)】 ２つの２次元ホモロジー多様体が同相であるための必要十分条件は，そのホモロジー群が同型とな

ることである．さらに，オイラー数は

$$\chi(M_g) = 2 - 2g \quad (g = 0, 1, \cdots),$$
$$\chi(M'_k) = 2 - k \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

となるので，弧状連結な 2 次元ホモロジー多様体は向き付け可能性とオイラー数により分類される． □

4.2 位相多様体

【**定義 4.32** (位相多様体)】 n 次元 Euclide 空間 $\mathbb{R}^n$ の半空間 $\{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geqslant 0\}$ を H^n，その部分空間 $\{x \in H^n \mid x^n = 0\}$ を ∂H^n と表す．

i) Hausdorff 空間 M の各点 p が H^n の開集合と同相な近傍 $U(p)$ をもつとき，M を n 次元位相多様体という．

ii) n 次元位相多様体 M の開近傍 U と U から H^n の開集合への同相写像 ψ の組 (U, ψ) を，座標近傍という．さらに，座標近傍の族 $S = \{U_\alpha, \psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ で $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が M の開被覆となるものを，座標近傍系という．

iii) n 次元位相多様体 M の座標近傍系 $S = \{U_\alpha, \psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に対して，$\partial M = \cup_{\alpha\in A}\psi_\alpha^{-1}(\partial H^n)$ を M の境界という．

□

4.3 Poincaré の双対定理

4.3.1 ホモロジー多様体における双対定理

【**定義 4.33** (ホモロジー多様体)】 n を非負整数とする．位相空間 X が局所有限な単体集合 K による単体分割をもち，各点 $x \in$ で

$$H_q(X, X - x; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = n) \\ 0 & (q \neq n) \end{cases} \tag{16}$$

が成り立つとき，X は n 次元**ホモロジー多様体**という．ホモロジー多様体は局所コンパクト Hausdorf 空間である． □

4.3.1.1　双対分割

【定義 4.34 (双対胞体)】　M を弧状連結な n 次元ホモロジー多様体多様体（$n \geqslant 2$），$\{K,t\}$ をその単体分割とする．K の q 単体 σ^q に対し，その重心を $[\sigma^q]$ と表すことにすると，$[\sigma^q]$ は，K の重心細分 $Sd(K)$ の頂点となる．したがって，K の増大する単体列に，次のように，$Sd(K)$ の単体を対応させる：

$$\sigma^q \lneqq \sigma_1 \lneqq \cdots \lneqq \sigma_r \mapsto |[\sigma^q][\sigma_1]\cdots[\sigma_r]|$$

σ_q を一つ固定するとき，このようにして定義される単体とそのすべての辺単体からなる集合

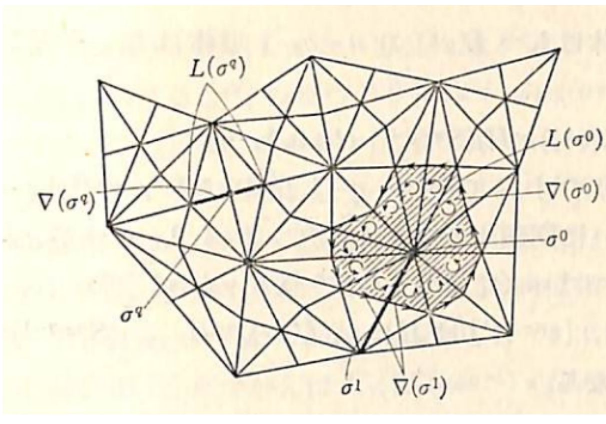
$$\nabla(\sigma^q) \equiv \{\tau \in Sd(K) \mid \tau < |[\sigma^q][\sigma_1]\cdots[\sigma_r]|, \sigma^q \lneqq \sigma_1 \lneqq \cdots \lneqq \sigma_r\}$$

は $Sd(K)$ の $n-q$ 次元部分複体となる．このようにして得られる複体に対応する多面体 $|\nabla(\sigma^q)|$ を K における σ^q の**双対胞体**と呼ぶ．$S_K(p)$ と同様，$\nabla(\sigma^q)$ は可縮である．

$\nabla(\sigma^q)$ に属する単体で，$[\sigma^q]$ を含まないものの全体を

$$L(\sigma^q) \equiv \{\tau \in \nabla(\sigma^q) \mid [\sigma^q] \notin \tau\}$$

で表すと，$L(\sigma^q)$ は $\nabla(\sigma^q)$ の $n-q-1$ 次元部分複体となり，$[\sigma^q] * L(\sigma^q) = \nabla(\sigma^q)$ が成り立つ．　□



【定理 4.35 ($L(\sigma^q)$ の基本的性質)】　$0 \leqslant q \leqslant n-2$ とすると，$L(\sigma^q)$ は向き付け可能な $n-q-1$ 次元ホモロジー多様体となる．特に，次が成り立つ．

(i) τ を $L(\sigma^q)$ の任意の単体とすると，$L(\sigma^q)$ の $n-q-1$ 単体で τ を辺単体に持つものが存在する．

(ii) τ^{n-q-2} を $L(\sigma^q)$ の $n-q-2$ 単体とすると，それを共通の辺として持つ $L(\sigma^q)$ の $n-q-1$ 単体がちょうど 2 つある．

(iii) $H_*(L(\sigma^q)) \cong H_*(S^{n-q-1})$

(iv) $L(\sigma^q)$ のすべての $n-q-1$ 単体 $\tau_1^{n-q-1}, \cdots, \tau_s^{n-q-1}$ を互いに同調する向き $\left\langle \tau_i^{n-q-1} \right\rangle (i = 1, \cdots, s)$ がとれて，

$$z^{n-q-1} \equiv \left\langle \tau_1^{n-q-1} \right\rangle + \cdots + \left\langle \tau_s^{n-q-1} \right\rangle$$

に代表されるホモロジー類 $[z^{n-q-1}]$ が $H_{n-q-1}(L(\sigma^q)) \cong H_{n-q-1}(S^{n-q-1}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元となる．

$\square$

【定義 4.36 (双対鎖複体のホモロジー群)】 ホモロジー多様体 M の単体分割を $\{K, t\}$ として，その q 単体 σ^q の双対複体 $\nabla(\sigma^q)$ から，$C_{n-q}(\nabla(\sigma^q))$ の元を

$$\langle \nabla(\sigma^q) \rangle \equiv [\sigma^q] * z^{n-q-1} = \sum_j [\sigma^q] * \left\langle \tau_j^{n-q-1} \right\rangle$$

により定義し，その生成する $C_{n-q}(Sd(K))$ の部分加群を $C_{n-q}^{\nabla}(K)$ と表す．このとき，σ^q を辺とする K の $q+1$ 単体の全体を $\bar{\sigma}_1^{q+1}, \cdots, \bar{\sigma}_u^{q+1}$ とするとき，適当に $\epsilon_i = \pm 1$ を選ぶと，∂' を $Sd(K)$ の境界準同形として，

$$\partial'(\langle \nabla(\sigma^q) \rangle) = \epsilon_1 \left\langle \nabla(\bar{\sigma}_1^{q+1}) \right\rangle + \cdots + \epsilon_u \left\langle \nabla(\bar{\sigma}_u^{q+1}) \right\rangle$$

が成り立つ．したがって，∂' を $(C_*^{\nabla}(K)$ に制限した準同形を ∂^{∇} と書くことにすると，$(C_*^{\nabla}(K), \partial^{\nabla})$ は $\partial_{q+1}^{\nabla} \partial_q^{\nabla} = 0$ を満たす鎖複体となる．この鎖複体から定義されるホモロジー群を $H_*^{\nabla}(K)$ で表す． $\square$

【定理 4.37】 $H_*^{\nabla}(K) \cong H_*(Sd(K))$ が成り立つ． $\square$

4.3.1.2 Poincaré の双対定理

【補題 4.38 ($\nabla(\sigma^q)$ の $n-q$ 単体の向き付け)】 まず，$Sd(K)$ の単体 $|[\sigma_0],\cdots,[\sigma_q]|(\dim\sigma_j=j,\,\sigma_0\lneqq\sigma_1\lneqq\cdots\lneqq\sigma_q)$ を σ_q の向きから誘導された向きに向き付けたものを

$$\epsilon_{\sigma_0,\cdots,\sigma_q}\left\langle[\sigma_0],\cdots,[\sigma_q]\right\rangle$$

とおく．$\epsilon_*=\pm1$ である．次に，$Sd(K)$ の基本ホモロジー類 μ を一つ選び，$Sd(K)$ の単体 $|[\sigma_q],\cdots,[\sigma_n]|$ の向き付け

$$\epsilon_{\sigma_q,\cdots,\sigma_n}\left\langle[\sigma_q],\cdots,[\sigma_n]\right\rangle$$

を，

$$\epsilon_{\sigma_0,\cdots,\sigma_q}\epsilon_{\sigma_q,\cdots,\sigma_n}\left\langle[\sigma_0],\cdots,[\sigma_n]\right\rangle$$

が μ から $Sd(K)$ の n 単体 $|[\sigma_0]\cdots[\sigma_n]|$ に誘導された向きと一致するように決める．

　このとき，

$$\left\langle\nabla\left\langle\sigma_q\right\rangle\right\rangle=\sum_{\sigma_{q+1}\lneqq\cdots\lneqq\sigma_n}\epsilon_{\sigma_q,\cdots,\sigma_n}\left\langle[\sigma_q],\cdots,[\sigma_n]\right\rangle$$

となり，

$$\partial^{\nabla}_{n-q}\left\langle\nabla\left\langle\sigma_q\right\rangle\right\rangle=(-1)^{q+1}\sum_{\sigma_{q+1}}\eta_{\sigma_q\sigma_{q+1}}\left\langle\nabla\left\langle\sigma_{q+1}\right\rangle\right\rangle$$

が成り立つ．ここで，

$$\partial_{q+1}\left\langle\sigma_{q+1}\right\rangle=\sum_{\sigma_q}\eta_{\sigma_q\sigma_{q+1}}\left\langle\sigma_q\right\rangle$$

である． □

Proof. まず，$\epsilon_{\sigma_0\cdots\sigma_q}$ と $\epsilon_{\sigma_0\cdots\sigma_{q+1}}$ $(\sigma_0\lneqq\cdots\lneqq\sigma_{q+1})$ の関係を求める．いま，

$$\begin{aligned}
&\left\langle\sigma_{q+1}\right\rangle=\epsilon_{q+1}\left\langle x_0,\cdots,x_{q+1}\right\rangle,\\
&\left\langle\sigma_q\right\rangle=\epsilon_q\left\langle x_0,\cdots,x_q\right\rangle,\\
&v_i=x_i-x_0\quad(i=1,\cdots,q+1),\\
&c_i=\frac{1}{i+1}(v_1+\cdots+v_i)\quad(i=1,\cdots,q+1)
\end{aligned}$$

に対し，

$$\Omega \equiv \epsilon_{q+1} v_1 \wedge \cdots \wedge v_{q+1} = a\epsilon_{\sigma_0 \cdots \sigma_{q+1}} c_1 \wedge \cdots \wedge c_{q+1} \quad (a > 0),$$
$$\Omega' \equiv \epsilon_q v_1 \wedge \cdots \wedge v_q \wedge n = b\epsilon_{\sigma_0 \cdots \sigma_q} c_1 \wedge \cdots \wedge c_q \wedge n \quad (b > 0)$$

が成り立つ．ここで，$\epsilon_{q+1}, \epsilon_q = \pm 1$ は，それぞれ，単体 σ_{q+1}, σ_q の向き，n は σ_q における σ_{q+1} からみて外向きの法ベクトルで，

$$n = x_{q+1} c_{q+1} + x_q c_q + \cdots \;\Rightarrow\; n = \frac{x_{q+1}}{q+1} v_{q+1} + y_q v_q + \cdots$$

より，

$$\Omega' = \epsilon_q \epsilon_{q+1} \frac{x_{q+1}}{q+1} \Omega = b x_{q+1} \epsilon_{\sigma_0 \cdots \sigma_q} c_1 \wedge \ldots c_{q+1} = a \epsilon_q \epsilon_{q+1} \frac{x_{q+1}}{q+1} \epsilon_{\sigma_0 \cdots \sigma_{q+1}} c_1 \wedge \cdots c_{q+1}$$

より，

$$\epsilon_{\sigma_0 \cdots \sigma_{q+1}} = \epsilon_q \epsilon_{q+1} \epsilon_{\sigma_0 \cdots \sigma_{q+1}}$$

よって，

$$\epsilon_{\sigma_q \cdots \sigma_n} = \epsilon_q \epsilon_{q+1} \epsilon_{\sigma_{q+1} \cdots \sigma_n}$$

を得る．ここで，

$$\partial \langle \sigma_{q+1} \rangle = (-1)^{q+1} \epsilon_{q+1} \langle x_0, \cdots, x_q \rangle + \cdots = (-1)^{q+1} \epsilon_q \epsilon_{q+1} \langle \sigma_q \rangle + \cdots$$

より，

$$\epsilon_q \epsilon_{q+1} \; (-1)^{q+1} \eta_{\sigma_q \sigma_{q+1}} \;\Rightarrow\; \epsilon_{\sigma_q \cdots \sigma_n} = (-1)^{q+1} \eta_{\sigma_q \sigma_{q+1}} \epsilon_{\sigma_{q+1} \cdots \sigma_n}.$$

よって，

$$\begin{aligned}
\partial^{\nabla}_{n-q} \langle \nabla \langle \sigma_q \rangle \rangle &= \sum_{\sigma_{q+1}, \cdots, \sigma_n} \epsilon_{\sigma_q, \cdots, \sigma_n} \partial' \langle [\sigma_q], \cdots, [\sigma_n] \rangle \\
&= (-1)^{q+1} \sum_{\sigma_{q+1}} \sum_{\sigma_{q+2} \cdots \sigma_n} \eta_{\sigma_q \sigma_{q+1}} \epsilon_{\sigma_{q+1} \cdots \sigma_n} \langle [\sigma_{q+1}], \cdots, [\sigma_n] \rangle \\
&= (-1)^{q+1} \sum_{\sigma_{q+1}} \eta_{\sigma_q \sigma_{q+1}} \langle \nabla \langle \sigma_{q+1} \rangle \rangle
\end{aligned}$$

Q.E.D.

【定理 4.39 (Poincaré の双対定理)】 M を弧状連結で向き付け可能な n 次元ホモロジー多様体とすると，単体的ホモロジーとコホモロジーの同型対応

$$H_q(M) \cong H^{n-q}(M) \quad (q = 9, 1, \cdots, n)$$

が成り立つ． □

Proof. $C^{\nabla}_{n-q}(K)$ の元に，K の q 次元双対鎖群 $C^q(K)$ の元 $\langle\sigma^q\rangle^*$ を対応させると，同型対応

$$\eta_q : C^{\nabla}_{n-q}(K) \to C^q(K)$$

を得る．このとき，

$$\partial\left\langle\sigma^{q+1}\right\rangle = \sum_{\sigma^q}\eta_{\sigma^q\sigma^{q+1}}\left\langle\sigma^q\right\rangle \;\Rightarrow\; \delta^q\left\langle\sigma^q\right\rangle^* = \sum_{\sigma^{q+1}}\eta_{\sigma^q\sigma^{q+1}}\left\langle\sigma^{q+1}\right\rangle^*$$

および，補題の結果

$$\partial^{\nabla}_{n-q}\left\langle\nabla\left\langle\sigma^q\right\rangle\right\rangle = (-1)^{q+1}\sum_{\sigma^{q+1}}\eta_{\sigma^q\sigma^{q+1}}\left\langle\nabla\left\langle\sigma^{q+1}\right\rangle\right\rangle$$

より，鎖複体の写像

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \xrightarrow{\partial^{\nabla}_{n-q+1}} & C^{\nabla}_{n-q}(K) & \xrightarrow{\partial^{\nabla}_{n-q}} & C^{\nabla}_{n-q-1}(K) & \longrightarrow & & \cdots \\
 & \downarrow{\scriptstyle \eta_q} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_q+1} & & & \\
\cdots \xrightarrow{\delta^{q-1}} & C^q(K) & \xrightarrow{\delta^q} & C^{q+1}(K) & \longrightarrow & & \cdots
\end{array}$$

に対して

$$\eta_{q+1}\circ\partial^{\nabla}_{n-q} = (-1)^{q+1}\delta^q\circ\eta_q$$

よって，

$$H^q(K) \cong H^{\nabla}_{n-q}(K) \cong H_{n-q}(SdK) \cong H_{n-q}(K)$$

が成り立つ． Q.E.D.

【定理 4.40 ($\mathbb{Z}_2$ 係数での Poincarë の双対定理)】 M を n 次元ホモロジー多様体とすると，

$$H_q(M;\mathbb{Z}_2) \cong H^{n-q}(M;\mathbb{Z}_2)$$

が成り立つ． □

5 微分位相幾何学

Last update: 2011.7.18

5.1 歴史

1934 **Morse 理論** [Morse M. (1934)]

1940 **3 角形分割定理** [Cairns SS (1935), Whitehead JHC (1940)]

1944 **Whitney の埋め込み定理，Whitney トリック**: n 次元 C^∞ 多様体は，$\mathbb{R}^{2n-1}$ にはめ込み可能，$\mathbb{R}^{2n}$ に埋め込み可能 [Whitney H(1944)]

1952 **Rokhlin の定理** [Rokhlin (1952)]

1954 **同境群に対する Thom の基本定理** [Thom R (1954)]

1960 Stiefe-Whitney 数および Pontryagin 数による同境条件の完全な特徴付け [Wall CTC (1960)]

1961 コンパクト多様体上の Morse 関数の存在とハンドル体分解 [Smale S (1961), Thom R, Wallace, Morse M]

$n \geqslant 5$ **に対する一般 Poincare 予想の解決** [Smale S (1961)]

1962 **h-同境定理**: 5 次元以上の単連結コンパクト C^∞ 多様体に対する h-同境定理 [Smale S(1962)]

単連結コンパクト 5 次元スピン多様体の微分同相類の決定 [Smale S (1962)]

2 連結コンパクト C^∞ 6 次元多様体の微分同相類の決定 [Smale S (1962)]

1963 $n-1$ 連結 $2n$ 次元多様体の微分同相類の決定 [Wall CTC (1962)]

- $n-1$ 連結 $2n+1$ 次元多様体の微分同相類の決定 [Tamura I(1963), Wall CTC (1963)]

手術手法の開発 [Kervaire MA and Milnor JW (1963)]

Atiyah-Singer の指数定理 [Atiyah and Singer (1963)]

1981 **4 次元 Poincare 予想の解決** [Freedman MH(1982)]

1982 $\mathbb{R}^4$ **の異なる微分構造の存在** [Donaldson SK (1983)]

1985 **Donaldson 多項式** [Donaldson SK]

1987 **4 次元 h 同境定理の反例** [Donaldson SK]

5.2　多様体のコホモロジー

5.2.1　多様体のコホモロジーに関する de Rahm の定理

【定義 5.1 (単純開被覆)】　n 次元多様体 M の開被覆 $\mathscr{U} = \{U_\alpha, \alpha \in A\} : M = \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$ において，その任意の有限部分集合 $U_{\alpha_1}, \cdots U_{\alpha_m}$ に対して，$U_{\alpha_1\cdots\alpha_m} \equiv U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_m}$ が $\mathbb{R}^n$ と同相となるとき，$\mathscr{U}$ を M の**単純開被覆**と呼ぶ.
〔出典：志賀浩二著「多様対論」(岩波，1990)〕 □

【定理 5.2 (単純開被覆による細分)】　多様体 M の任意の開被覆 $\mathscr{W} = \{W_\alpha, \alpha \in A\}$ に対して，$\mathscr{W}$ の局所有限な単純開被覆による細分 $\mathscr{V} = \{V_\beta, \beta \in B\}$ で，$\bar{V}_\beta$ がコンパクトとなるようなものが存在する.
〔出典&証明：志賀浩二著「多様対論」(岩波，1990)〕 □

5.2.1.1　Čech コホモロジー

【定義 5.3 (Čech 複体)】　位相空間 X の開被覆 $\mathscr{U}$ に対して，$\mathscr{U}$ に属する各開集合を頂点，共通部分が空でない n コの開集合の組を n 単体と定義すると，$\mathscr{U}$ から単体複体 $\check{K}(\mathscr{U})$ が作られる．この複体の双対複体 $\check{K}^*(\mathscr{U}; R) = (\mathrm{Hom}(\check{K}(\mathscr{U}), R), \delta)$ を **Čech 複体**と呼ぶ．余境界作用素 δ は，具体的には

$$\sigma \in \check{K}^p(\mathscr{U}) \mapsto (\delta\sigma)_{\alpha_0\cdots\alpha_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j \sigma_{\alpha_0\cdots\alpha_{j-1}\alpha_{j+1}\cdots\alpha_{p+1}} \in \check{K}^{p+1}(\mathscr{U}) \tag{17}$$

で与えられる．

この複体には，カップ積

$$\sigma \in \check{K}^p(\mathscr{U}), \kappa \in \check{K}^q(\mathscr{U}) \mapsto (\sigma \cup \kappa)_{\alpha_0 \cdots \alpha_{p+q}} = \sigma_{\alpha_0 \cdots \alpha_p} \kappa_{\alpha_p \cdots \alpha_{p+q}} \in \check{K}^{p+q}(\mathscr{U}) \tag{18}$$

により自然に次数付き環の構造が入る． □

【定義 5.4 (Čech コホモロジー)】 位相空間 X の開被覆 $\mathscr{U}$ に対して，その Čech 複体のコホモロジー群を $\check{H}^*(\mathscr{U}; R)$ で表す．このとき，X の開被覆全体の族に細分により擬有向集合の構造を与えると，コホモロジー群 $\check{H}^*(\mathscr{U}; R)$ はこの有向集合に対して帰納系をなす．この系それらの帰納極限を空間 X に対する Čech コホモロジー群という：

$$\check{H}^*(X; R) = \lim_{\rightarrow} \check{H}^*(\mathscr{U}; R) \tag{19}$$

$\check{H}^*(X; R)$ にはカップ積により自然に次数付き環の構造が入る．この次数付き環は Čech コホモロジー環と呼ばれる．

位相空間 X に Čech 複体および Čech コホモロジー環 $\check{H}^*(X; R)$ を対応させる対応は，位相空間のカテゴリーから次数付き多元環のカテゴリーへの反変関手となる． □

【命題 5.5 (単純開被覆への制限)】 多様体に対する Čech コホモロジー環は，開被覆 $\mathscr{U}$ を単純開被覆に制限した $\check{H}^*(\mathscr{U}; R)$ の帰納的極限と一致する．〔出典&証明：志賀浩二著「多様対論」(岩波，1990)〕 □

【定理 5.6 (Leray の定理)】 多様体 M の開被覆 $\mathscr{U} = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$ が層 $\mathscr{F}$ に対して非輪状，すなわち，

$$\check{H}^q(U_{\alpha_0} \cap \cdots U_{\alpha_p}, \mathscr{F}) = 0, \quad q > 0, \forall(\alpha_0, \cdots, \alpha_p)$$

がなりたつとき，

$$\check{H}^*(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \cong \check{H}^*(M, \mathscr{F})$$

が成り立つ．〔出典：Griffiths P, Harris J: ”Principles of Algebraic Geometry” (Wiley, 1994)〕 □

【定理 5.7 (Čech コホモロジーと単体的コホモロジーの一致)】 R を勝手な係数環として，単体複体 K に対して，その単体的コホモロジー $H^*(K; R)$ と Čech コホモロジー $\check{H}^*(|K|, R)$ は同型となる：

$$H^*(K; R) \cong \check{H}^*(|K|, R)$$

〔出典& 証明：Griffiths P, Harris J: ”Principles of Algebraic Geometry” (Wiley, 1994)〕 □

【証明あり】

5.2.1.2 de Rahm コホモロジー

【定義 5.8 (de Rahm コホモロジー)】 多様体 M 上のなめらかな体 $R=\mathbb{R},\mathbb{C}$ に値を取る大域的 p 形式の全体を $A^p(M)$ で表すとき，外微分 d を用いて定義される系列

$$0 \longrightarrow A^0(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} A^p(M) \xrightarrow{d} A^{p+1}(M) \xrightarrow{d} \cdots \tag{20}$$

は余鎖複体となる．この鎖複体を **de Rahm 複体**, それより定義されるコホモロジー群 $H^*_{\mathrm{DR}}(M)$ を **de Rahm コホモロジー群**という:

$$H^*_{\mathrm{DR}}(M) = \oplus_{p=0}^n H^p_{\mathrm{DR}}(M)$$

de Rahm 複体には外積により次数付き環の構造が入り，対応して，de Rahm コホモロジー群はコホモロジー環となる．

多様体 M に de Rahm 複体および de Rahm コホモロジー環を対応させる対応は，なめらかな多様体のカテゴリーから次数付き多元環のカテゴリーへの反変関手となる． □

【定理 5.9】 多様体 M と $M\times\mathbb{R}$ に対して，射影 $\pi: M\times\mathbb{R}\to M$ から誘導される de Rahm コホモロジー環の準同形射は同型となる：

$$\pi^*: H^*_{\mathrm{DR}}(M) \xrightarrow{\cong} H^*_{\mathrm{DR}}(M\times\mathbb{R})$$

〔出典&証明：志賀浩二著「多様対論」(岩波，1990)〕 □

【系 5.10】

$$H^p_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} R & (p=0) \\ 0 & (p\neq 0) \end{cases} \tag{21}$$

□

【系 5.11 (Poincare の補題)】 $R=\mathbb{R},\mathbb{C}$ として，任意の $\omega\in A^p(\mathbb{R}^n)$ に対して $\chi\in A^{p-1}(\mathbb{R}^n)$ が存在して，$\omega=d\chi$ が成り立つ． □

【系 5.12 (de Rahm コホモロジーのホモトピー不変性)】 なめらかな多様体間の 2 つの射 $\phi_0, \phi_1 : M \to N$ がホモトープ，さなわち射 $F : M \times \mathbb{R} \to N$ が存在して，$F(x,0) = \phi_0(x)$, $F(x,1) = \phi_1(x)$ が成り立つとき，

$$\phi_0^* = \phi_1^* : H^*_{\mathrm{DR}}(N) \to H^*_{\mathrm{DR}}(M)$$

となる． □

【系 5.13 (可縮な多様体)】 多様体 M が可縮，すなわち，$\mathrm{id}_M : M \to M$ と $\phi : M \to \mathrm{pt} \in M$ がホモトープのとき，

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M; R) \cong \begin{cases} R & (p = 0) \\ 0 & (p \neq 0) \end{cases}$$

□

5.2.1.3 de Rahm の定理

【定理 5.14 (de Rahm の定理)】 係数が体 $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ のとき，なめらかな多様体 M の Čech コホモロジー環と de Rahm コホモロジー環は同型となる：

$$H^*_{\mathrm{DR}}(M) \cong \check{H}^*(M)$$

〔出典&証明：志賀浩二著「多様対論」（岩波，1990)〕 □

【証明の概要】.

(1) **2 重複体**: $\mathscr{U} = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$ を M の開被覆として，M 上のなめらかな局所 q 形式の層 $\mathscr{A}^q$ に値をとる p 次の Čech 双対単体 $K^{p,q}(\mathscr{U})$ を

$$K^{p,q}(\mathscr{U}) \equiv \check{K}^p(\mathscr{U}; \mathscr{A}^q) = \left\{\sigma_{\alpha_0\cdots\alpha_p} \in A^q(U_{\alpha_0\cdots\alpha_p})\right\}$$

により定義し，2 つの境界作用素 D', D'' を

$$\begin{aligned} D' &: \sigma \in K^p(\mathscr{U} : \mathscr{A}^q) \to \delta\sigma \in K^{p+1}(\mathscr{U} : \mathscr{A}^q), \\ D'' &: \sigma \in K^p(\mathscr{U}; \mathscr{A}^q) \to (-1)^p d\sigma \in K^p(\mathscr{U} : \mathscr{A}^{q+1}) \end{aligned}$$

により定義すると，

$$D'^2 = D''^2 = 0, \quad D'D'' + D''D' = 0$$

が成り立つ．このようにして得られる複体 $K^{**}(\mathscr{U}) = (K^{p,q}(\mathscr{U}), D', D'')$ を開被覆 $\mathscr{U}$ に伴う **2 重複体**と呼ぶ．

de Rahm 複体 $A^q(M)$ から $K^{0,q}(\mathscr{U})$ への準同形写像を

$$\alpha : A^q(M) \ni \omega \mapsto \tilde{\omega} \in K^{0,q}(\mathscr{U}); \quad \tilde{\omega}_\alpha = \omega|_{U_\alpha}$$

により定義すると，α は de Rahm 鎖複体 $A^*(M)$ から鎖複体 $K^{0,*}(\mathscr{U})$ への準同形射となり，系列

$$0 \longrightarrow A^q(M) \xrightarrow{\alpha} K^{0,q}(\mathscr{U}) \xrightarrow{D'} K^{1,q}(\mathscr{U})$$

は完全となる．

Čech 複体 $\check{K}^p(\mathscr{U})$ から複体 $K^{p,0}(\mathscr{U})$ への準同形写像を

$$\beta : \check{K}^p(\mathscr{U}) \ni c \mapsto \tilde{c} = \{\tilde{c}_{\alpha_0\cdots\alpha_p}(x) = c_{\alpha_0\cdots\alpha_p}\} \in K^{p,0}(\mathscr{U})$$

により定義すると，β は Čech 鎖複体 $\check{K}^*(\mathscr{U})$ から Čech 鎖複体 $K^{*,0}(\mathscr{U})$ への準同形射となり，各 $U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$ が連結なら系列

$$0 \longrightarrow \check{K}^p(\mathscr{U}) \xrightarrow{\beta} K^{p,0}(\mathscr{U}) \xrightarrow{D''} K^{p,1}(\mathscr{U})$$

は完全となる．

(2) **2 重複体の完全性**: まず，開被覆 $\mathscr{U}$ が単純被覆のとき，Poincare の補題より，2 重複体において，各横と縦の系列

$$0 \longrightarrow A^q(M) \xrightarrow{\alpha} K^{0,q}(\mathscr{U}) \xrightarrow{D'} \cdots \xrightarrow{D'} K^{p,q}(\mathscr{U}) \xrightarrow{D'} \cdots$$
$$0 \longrightarrow \check{K}^p(\mathscr{U}) \xrightarrow{\beta} K^{p,0}(\mathscr{U}) \xrightarrow{D''} \cdots \xrightarrow{D''} K^{p,q}(\mathscr{U}) \xrightarrow{D''} \cdots$$

は完全となる．

(3) **2 重複体のコホモロジー**: 2 重鎖複体 $K^{*,*}(\mathscr{U})$ から

$$K^m(\mathscr{U}) = \sum_{p=0}^{m} K^{p,m-p}(\mathscr{U}), \quad D = D' + D'', D^2 = 0$$

により鎖複体 $K^*(\mathscr{U})$ およびそのコホモロジー群

$$H^*(K^*(\mathscr{U})) = \oplus_m H^m(K^*(\mathscr{U}))$$

が定義され，カップ積に関して多元環となる．

$$
\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\
A^q(M) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\alpha"] & K^{0,q}(\mathscr{U}) \arrow[u, "D''"] \arrow[r, "D'"] & \cdots & \cdots \arrow[r, "D'"] & K^{p,q}(\mathscr{U}) \arrow[u, "D''"] \arrow[r, "D'"] & \cdots \\
\vdots \arrow[u, "d"] & \vdots \arrow[u, "D''"] & & & \vdots \arrow[u, "D''"] & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
A^1(M) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\alpha"] & K^{0,1}(\mathscr{U}) \arrow[u, "D''"] \arrow[r, "D'"] & K^{1,1}(\mathscr{U}) \arrow[u, "D''"] \arrow[r, "D'"] & \cdots \arrow[r, "D'"] & K^{p,1}(\mathscr{U}) \arrow[u, "D''"] \arrow[r, "D'"] & \cdots \\
A^0(M) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\alpha"] & K^{0,0}(\mathscr{U}) \arrow[u, "D''"] \arrow[r, "D'"] & K^{1,0}(\mathscr{U}) \arrow[u, "D''"] \arrow[r, "D'"] & \cdots \arrow[r, "D'"] & K^{p,0}(\mathscr{U}) \arrow[u, "D''"] \arrow[r, "D'"] & \cdots \\
& \check{K}^0(\mathscr{U}) \arrow[u, "\beta"] \arrow[r, "\delta"] & \check{K}^1(\mathscr{U}) \arrow[u, "\beta"] \arrow[r, "\delta"] & \cdots \arrow[r, "\delta"] & \check{K}^p(\mathscr{U}) \arrow[u, "\beta"] \arrow[r, "\delta"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

図 2: Čech 二重複体

(4) $H^*_{\mathrm{DR}} \cong \check{H}^*(M)$: $\mathscr{U}$ が単純被覆のとき，写像 α および β から誘導されるコホモロジーの準同形射

$$
\begin{aligned}
\alpha_* &: H^*_{\mathrm{DR}} \to H^*(K^*(\mathscr{U})), \\
\beta_* &: \check{H}^*(\mathscr{U}) \to H^*(K^*(\mathscr{U}))
\end{aligned}
$$

は多元環としての同型射となることが示されるので，$H^*_{\mathrm{DR}}(M)$ と $\check{H}^*(\mathscr{U})$ は多元環として同型となる．一方，機能的極限により定義される Čech コホモロジーは開被覆を単純開被覆に制限してもよいので，結局，$H^*_{\mathrm{DR}}(M)$ と $\check{H}^*(M)$ が多元環として同型である事が結論される．

Q.E.D.

【注 5.15 (同型写像 $\eta_{\mathscr{U}} : H^*_{\mathrm{DR}}(M) \to \check{H}^*(\mathscr{U})$ の具体形)】 $k^{p,q} \in K^{p,q}(\mathscr{U})$ として，K^{m-1} の元

$$
k = k^{0,m-1} + k^{1,m-1} + \cdots k^{m-1,0}
$$

に対して，Dk は

$$\begin{aligned} Dk &= D''k^{0,m-1} + \left(D'k^{0,m-1} + D''k^{1,m-2}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(D'k^{m-2,1} + D''k^{m-1,0}\right) + D'k^{m-1,0} \in \oplus_{p=0}^{m} K^{p,m-p} \end{aligned}$$

と表される．

いま，$\omega \in Z^m(A^*(M))$ に対して，$x^{0,m} = \alpha(\omega)$ とすると，$D''x^{0,m} = 0$ となるので，2 重鎖複体の完全性より，

$$x^{0,m} = D''k^{0,m-1}$$

となる $k^{0,m-1} \in K^{0,m-1}(\mathscr{U})$ が存在する．このとき，

$$D''D'k^{0,m-1} = -D'x^{0,m} = -D'\alpha\omega = 0$$

より，

$$D'k^{0,m-1} + D''k^{1,m-2} = 0, \quad D''D'k^{1,m-2} = 0 \tag{22}$$

を満たす元 $k^{1,m-2} \in K^{1,m-2}(\mathscr{U})$ が存在する．

これを繰り返すと，結局

$$Dk = x^{0,m} + D'k^{m-1,0}$$

となる $k \in K^{m-1}(\mathscr{U})$ が存在する．ここで，

$$\begin{aligned} D''k^{0,m-1} &= x^{0,m}, \\ D''k^{1,m-2} &= -D'k^{0,m-1}, \\ &\vdots \\ D''k^{m-1,0} &= -D'k^{m-2,1} \end{aligned}$$

一方，

$$y^{m,0} = -D'k^{m-1,0} \;\Rightarrow\; D''y^{m,0} = D''D'k^{m-1,0} = 0$$

より，

$$y^{m,0} = \beta(\sigma); \sigma \in \check{K}^m(\mathscr{U}) \tag{23}$$

となる σ が存在し，

$$[x^{0,m}] = [y^{m,0}] \quad \text{in} \quad H^*(K^*(\mathscr{U})) \tag{24}$$

となる．したがって，同型対応 $\eta_{\mathscr{U}}$ は

$$\eta_{\mathscr{U}} : H^m_{\mathrm{DR}} \ni \omega \mapsto \alpha(\omega) = D''k^{0,m-1} \mapsto \beta(\sigma) = -D'k^{m-1,0} \mapsto [\sigma] \in \check{H}^m$$

で与えられる． □

【定理 5.16 (de Rahm の定理の単体的コホモロジーとの関係)】 単体分割可能な多様体 M において，十分細かな区分的になめらかな単体分割 K を取ると，その各頂点 a に関する星状体 $S_K(a)$ において，$d\phi^{p+1}=0$ なら $d\phi^p=\psi^{p+1}$ が解を持つとしてよい．このとき，開被覆 $\boldsymbol{U}=\{O_K(a), a\in K^0\}$ に関する Čech 鎖複体を $\check{C}_*$ として，単体 $\langle a_0,\cdots,a_p\rangle\in K$ に対応する Čech 単体は，$U_{a_0\cdots a_p}=O_K(a_0)\cap\cdots\cap O_K(a_p)$ で与えられ，$z^p\in Z_p(K)$ に対して

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M)\ni\omega_p\mapsto\sigma_p\in H^p(K)\ \Rightarrow\ \sigma_p(z^p)=\int_{z^p}\omega_p$$

が成り立つ． □

Proof. K の有向 p 単体を $\langle a_0\cdots a_p\rangle(a_0,\cdots,\mathrm{ap}\in K^{(0)})$ と表すとき，$P(a_0,\cdots,a_p)$ を完全反対称な関数として，p サイクル z^p は

$$\begin{aligned}
&z^p=\sum_{(a)}\frac{1}{(p+1)!}P(a_0,\cdots,a_p)\langle a_0\cdots a_p\rangle,\\
&\partial z^p=0\ \Leftrightarrow\ \sum_{a_i}P(a_0,\cdots,a_p)=0\ (i=0,\cdots,p)
\end{aligned}$$

と表される．このとき，

$$\int_{z^p}\omega_p=\sum_{(a)}\frac{1}{(p+1)!}P(a_0,\cdots,a_p)(-1)^{(j+1)p-1}\int_{\langle a_{j+1}\cdots a_p\rangle}k^{j,p-j-1}_{a_0\cdots a_j},\quad j=0,\cdots,p-1$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す．まず，各 $O_K(a_i)$ において，$\omega_p=(-1)^{p-1}dk^{0,p-1}_{a_i}$ および $\partial z^p=0$ より，

$$\begin{aligned}
\int_{z^p}\omega_p &= \sum_{(a)}\frac{1}{(p+1)!}P(a_0,\cdots,a_p)\int_{\langle a_0\cdots a_p\rangle}\frac{(-1)^{p-1}}{p+1}\left(dk^{0,p-1}_{a_0}+\cdots+dk^{0,p-1}_{a_p}\right)\\
&= \sum_{(a)}\frac{1}{(p+1)!}P(a_0,\cdots,a_p)\frac{(-1)^{p-1}}{p+1}\int_{\partial\langle a_0\cdots a_p\rangle}\left(k^{0,p-1}_{a_0}+\cdots+k^{0,p-1}_{a_p}\right)\\
&= \sum_{(a)}\frac{1}{(p+1)!}P(a_0,\cdots,a_p)(-1)^{p-1}\int_{\langle a_1\cdots a_p\rangle}\left(k^{0,p-1}_{a_0}+\cdots+k^{0,p-1}_{a_p}\right)\\
&= \sum_{(a)}\frac{1}{(p+1)!}P(a_0,\cdots,a_p)(-1)^{p-1}\int_{\langle a_1\cdots a_p\rangle}k^{0,p-1}_{a_0}
\end{aligned}$$

より，$j=0$の時に成立．つぎに，$j \to j$で成立するとすると，$(\delta k^{j,p-j-1})_{a_0 \cdots a_{j+1}} = (-1)^{p-j-1} dk^{j+1,p-j-2}_{a_0 \cdots a_{j+1}}$ より，

$$\begin{aligned}
\int_{z^p} \omega_p &= \sum_{(a)} \frac{1}{(p+1)!} P(a_0, \cdots, a_p)(-1)^{(j+1)p-1}(-1)^{j+1} \int_{\langle a_{j+1} \cdots a_p \rangle} (\delta k^{j,p-j-1})_{a_0 \cdots a_{j+1}} \\
&= \sum_{(a)} \frac{1}{(p+1)!} P(a_0, \cdots, a_p)(-1)^{(j+2)p-1} \int_{\langle a_{j+1} \cdots a_p \rangle} dk^{j+1,p-j-2}_{a_0 \cdots a_{j+1}} \\
&= \sum_{(a)} \frac{1}{(p+1)!} P(a_0, \cdots, a_p)(-1)^{(j+2)p-1} \int_{\partial \langle a_{j+1} \cdots a_p \rangle} k^{j+1,p-j-2}_{a_0 \cdots a_{j+1}} \\
&= \sum_{(a)} \frac{1}{(p+1)!} P(a_0, \cdots, a_p)(-1)^{(j+2)p-1} \int_{\partial \langle a_{j+2} \cdots a_p \rangle} k^{j+1,p-j-2}_{a_0 \cdots a_{j+1}}
\end{aligned}$$

となるので，$j \to j+1$でも成り立つ．この公式において，$j=p-1$とおくと，

$$\begin{aligned}
\int_{z^p} \omega_p &= \sum_{(a)} \frac{1}{(p+1)!} P(a_0, \cdots, a_p)(-1)^{p^2-1} \int_{\langle a_p \rangle} k^{p-1,0}_{a_0 \cdots a_{p-1}}, \\
&= \sum_{(a)} \frac{1}{(p+1)!} P(a_0, \cdots, a_p)(-1)^{p^2-1} \int_{\langle a_0 \rangle + \cdots + \langle a_p \rangle} k^{p-1,0}_{a_0 \cdots a_{p-1}}, \\
&= \sum_{(a)} \frac{1}{(p+1)!} P(a_0, \cdots, a_p) \frac{(-1)^{p^2+p-1}}{p+1} \int_{\langle a_0 \rangle + \cdots + \langle a_p \rangle} (\delta k^{p-1,0})_{a_0 \cdots a_p}, \\
&= \sum_{(a)} \frac{1}{(p+1)!} P(a_0, \cdots, a_p) \sigma_{a_0 \cdots a_p}, \\
&= \sigma_p(z^p).
\end{aligned}$$

Q.E.D.

5.3 モース関数

【定義 5.17 (モース関数)**】** M を n 次元 C^∞ 多様体とする．

1. C^1 関数 f に対して，$df_p = 0$ となる点 $p \in M$ を f の臨界点という．
2. $p \in M$ を C^2 関数 f の臨界点とする．このとき，
$$H_{\mu\nu}(p) = (\partial_\mu \partial_\nu f)(p)$$
は p における 2 階の対称テンソルとなり，*Hesse* 行列と呼ばれる．
3. $p \in M$ を C^2 関数 f の臨界点とする．その点における Hesse 行列が正則であるとき，臨界点 p は非退化であるという．非退化な臨界点に対しては，Hesse 行列の負固有値の数をその指数という．
4. M 上の C^∞ 関数 f が非退化な臨界点しか持たず，かつ $\partial M \neq \varnothing$ のときには ∂M 上に臨界点をもたないとき，f を *Morse* 関数という．

□

【定理 5.18】 M を n 次元 C^∞ 多様体とするとき，M 上に Morse 関数が存在する． □

【定義 5.19 (多様体の三つ組み)**】**

1. W をコンパクトな C^∞ 多様体として（連結でなくてもよい），その境界 ∂W（空集合でもよい）を連結成分の和集合で表される 2 成分 V_0, V_1 の分解する：
$$\partial W = V_0 \cup V_1,\ V_0 \cap V_1 = \varnothing.$$
このとき，$(W; V_0, V_1)$ を C^∞ 多様体の三つ組という．
2. C^∞ 多様体の三つ組み $(W; V_0, V_1)$ 上の Morse 関数が次の条件を満たすとき，f を $(W; V_0, V_1)$ に適合する *Morse* 関数という：
   i) $f(W) = [a, b]$ $(a < b)$.
   ii) $V_0 \neq \varnothing$ のとき，$V_0 = f^{-1}(a)$．$V_1 \neq \varnothing$ のとき，$V_1 = f^{-1}(b)$.

□

【定理 5.20】 C^∞ 多様体の三つ組み $(W; V_0, V_1)$ に対して，それに適合する Morse 関数が常に存在する． □

5.4 5次元以上の多様体

5.4.1 h同境定理

【**定理 5.21** (h同境定理)】 W^n をコンパクトな n 次元 C^∞ 多様体，$(W^n; V_0, V_1)$ を C^∞ 多様体の3つ組とするとき，この3つ組が次の3条件を満たしていれば，$W^n = V_0 \times I$ が成り立つ．特に，$V_0 = V_1$ である．

i) W^n, V_0, V_1 はすべて連結かつ単連結である．

ii) $n \geqslant 6$.

iii) $H_q(W^n, V_0) = 0$ $(q = 0, 1, 2, \cdots)$.

□

【**定義 5.22** (h 同境)】 n 次元閉（可微分）多様体 V, V' が同境 $V \cup V' = \partial W^{n+1}$ でかつ，包含写像 $V \to W^{n+1}$，$V' \to W^{n+1}$ が共にホモトピー同値写像となるとき，V と V' は h **同境**であるという．このとき，$H_*(W^{n+1}, V) = 0$ が成り立つ． □

【**定理 5.23** (Smale:可微分多様体のh同境定理)】 V, V' を連結かつ単連結な閉じた n 次元 C^∞ 多様体とする．もしも，$n \geqslant 5$ であって V と V' がh同境ならば，V と V' は C^∞ 同相である．[Smale, S.: On the structure of manifolds, Amer. J. Math. 8, 387-399 (1962); Smale, S.: Lectures on h-cobordism theorem,Princeton Univ. Press (1965)] [田村一郎：微分位相幾何学] □

【**定理 5.24** (Kirby-Siebenmann:位相多様体の h 同境定理)】 V, V' を連結で単連結な n 次元位相多様体とする．$n \geqslant 5$ で V と V' が h 同境なら，V と V' は同相である．[Kirby, R.C. and Siebenmann, L.C.: Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings, and Triangulations, Ann. Math. Studies 88, Princeton (1977)] □

5.4.2 Poincare予想

【**定理 5.25** (Stallings 1960; Zeeman 1961)】 M^n を次元 $n \geqslant 5$ の有限単体複体で S^n と同じホモトピー型をもち，局所的に Euclid 空間と

PL 同型であるとする．このとき，M^n は S^n と同相で，1 点以外では PL 同型となる同相写像が存在する．[Stallings J 1960[Sta60]; Zeeman CW 1961[?, ?]] □

【定理 5.26 (Smale 1960)**】** W^n を連結でコンパクトな n 次元 C^∞ 多様体とする．このとき，次の 3 条件が満たされれば W^n は n 次元球体 D^n と C^∞ 同相である：

i) $n \geqslant 6$.

ii) W^n は単連結で，$H_q(W^n) = H_q(D^n)(q = 0, 1, \cdots)$.

iii) ∂W^n は単連結.

□

【定理 5.27】 M^n を連結かつ単連結で，S^n と同じホモロジーをもつ n 次元 C^∞ 多様体とする．もし，$n = 5$ または 6 ならば，コンパクトで可縮な $n+1$ 次元 C^∞ 多様体 W^{n+1} で $\partial W^{n+1} = M^n$ となるものが存在する． □

【定理 5.28 ($n \geqslant 5$ に対する一般化された Poincare 予想 [Smale])**】** M^n は連結で単連結な閉じた n 次元 C^∞ 多様体で，S^n と同じホモロジー群をもつとする．もし，$n \geqslant 5$ なら M^n は S^n と C^0 同相である．特に，$n = 5, 6$ なら M^n は S^n と C^∞ 同相である．[Smale S 1960, 1961[Sma60, Sma61]] □

【定理 5.29】 W^5 を連結でコンパクトな 5 次元 C^∞ 多様体とする．このとき，次の 2 条件が満たされれば W^5 は 5 次元球体 D^5 と C^∞ 同相である：

i) W^5 は単連結で，$H_q(W^5) = H_q(D^5)(q = 0, 1, \cdots)$.

ii) ∂W^5 は S^4 と C^∞ 同相.

□

【定理 5.30 (Schoenflies の定理)**】** $f : S^{n-1} \to S^n$ を C^∞ 埋め込みとすと，$f(S^{n-1})$ は S^n を 2 つの連結成分に分ける：$S^n - f(S^{n-1}) = A_1 \cup A_2$. もし，$n \geqslant 5$ なら，$M_1 = A_1 \cup f(S^{n-1})$ と $M_2 \cup f(S^{n-1})$ は共に D^n に C^∞ 同相である． □

5.5　4次元多様体

5.5.1　基本事項

【**定義 5.31** (整係数ユニモジュラー対称 2 次形式)】　$Q : \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}$ を整数係数ユニモジュラー対称 2 次形式とする．

1) 任意の $v \in \mathbb{Z}^m$ に対して $Q(v, v) \equiv 0 (\mathrm{mod} 2)$ が成り立つとき Q は II 型，II 型でないとき I 型という．
2) Q の正固有値の数と負固有値の差を符号数 (signature) という．

□

【**命題 5.32** (整係数ユニモジュラー対称 2 次形式の性質)】　Q を整係数ユニモジュラー対称 2 次形式とするとき次の命題が成り立つ：

1) Q が II 型なら，その符号数は 8 の倍数である．
2) Q が II 型で不定値なら，Q はいくつかの (1) と (-1) の直和に同型である．
3) Q が I 型で不定値なら，Q はいくつかの E_8 と $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ の直和に同型である．
4) 正定値ないし負定値で既約な整係数ユニモジュラー対称 2 次形式の同型類は無限個ある．

□

5.5.2　Rokhlin の定理

【**定理 5.33** (古典的 Rokhlin の定理)】　向きのついた 4 次元 C^∞ 閉多様体がスピン多様体であれば，その符号数は 16 で割り切れる．□

【**定理 5.34**】　E_8 を交点形式として持つ単連結な 4 次元 C^∞ 閉多様体は存在しない．□

5.5.3　4 次元位相多様体の分類

【定理 5.35 (ホモトピー類 [Milnor (1956)])**】**　単連結 4 次元閉多様体 M, N がホモトピー同値であることと，交点形式が同型であることは同値である．　□

【定理 5.36 ([Wall(1964)])**】**　単連結 4 次元閉多様体 M, N がホモトピー同値なら，h 同境である．また，M と N が h 同境なら，ある自然数 k が存在して，$M\sharp^k(S^2 \times S^2) \approx N\sharp^k(S^2 \times S^2)$ となる．　□

【定理 5.37 (Freedman の定理 [Freedman (1982)])**】**　Casson ハンドルは $D^2 \times \mathbb{R}^2$ に同相である．　□

【定理 5.38 (4 次元位相 h 同境定理 [Freedman])**】**　N を 5 次元境界付き単連結コンパクト位相多様体，$\partial N = M_+ \cup M_-$，$M_+ \cap M_- = \emptyset$，$M_\pm$ は単連結，$H_*(M_-; \mathbb{Z}) \to H_*(N; \mathbb{Z})$ が同型とすると，N は $M_- \times [0, 1]$ に同相である．[Freedman, M.H.: The topology of 4-dimensional manifolds, J. Diff. Geom. 17 (1982), 357-453.]　□

【定理 5.39 (固有 h 同境定理 [Freedman(1982)])**】**　単連結 4 次元閉 C^∞ 多様体 M, N が h 同境なら，それらは同相である．　□

【定理 5.40 (4 次元 Poincare 予想の解決 [Freedman (1982))**】**　] S^4 にホモトピー同値な 4 次元位相多様体は S^4 に同相である．[Freedman, M.H.: The topology of 4-dimensional manifolds, J. Diff. Geom. 17 (1982), 357-453.]　□

【注 5.41 (4 次元異種球面)**】**　4 次元異種球面が存在するかどうかは不明である．　□

【定理 5.42 (Freedman-Quinn の定理 [Freedman (1982), Quinn (1982)])**】**
　任意のユニモジュラー 2 次形式に対して，それを交叉形式とする単連結で閉じた 4 次元位相多様体が存在する．さらに，単連結閉 4 次元位相多様体 X に対して，$ks(X) \in H^4(X; \mathbb{Z}_2)$ をその $Kirby - Siebenmann$ 類とするとき，次が成り立つ：

i) $ks(X)$ と交叉形式で単連結閉 4 次元位相多様体の同相類が一意的に決まる．

ii) $ks(X) = 0$ と $X \times S^1$ が可微分構造を持つことは同値である．

iii) 交叉形式が I 型の時，与えられた交叉形式に対して，$ks(X) = 0, 1$ となる 2 つの位相多様体が存在する．

iv) 交叉形式が II 型の時，$ks(X)$ の値は交叉形式の符号数の 1/8 倍となり，単連結閉 4 次元位相多様体の同相類が交叉形式のみで一意的に決まる．

[Freedman, M.H. and Quinn, F.: Topology of 4-manifolds, Princeton Math. Ser. 39, Princeton, 1990] □

5.5.4 Donaldson 理論

【**定理 5.43** (Donaldson の定理 [Donaldson(1983,1987)])】 閉じた 4 次元 C^∞ 多様体の交点形式 b が負定値ならば，$b \cong (-1) \oplus (-1) \oplus \cdots \oplus (-1)$. b が正定値の場合についても同様の結果が成り立つ． □

【**定理 5.44** (Donaldson(1983), Taubes(1986))】 $\mathbb{R}^4$ に同相であるが微分同相でない 4 次元 C^∞ 多様体が非可算個存在する．(4 次元以外では存在しない [Kirby and Siebermann (1977), Moise(1952)] □

5.5.5 同境理論

【**定義 5.45** (有向同境)】

i) 向きの与えられた 2 つの閉 (可微分) 多様体 M_1, M_2 に対して，($M_1 \cap M_2 = \varnothing$ として) その向きづけられた和 $M_1 \cup M_2$ を $M_1 + M_2$ で表す．

ii) 向きづけられた (可微分) 多様体 M に対して，その向きを変えた多様体を $-M$ で表す．

iii) 向きづけられた 2 つの n 次元閉（可微分）多様体 M^n, V^n に対して，向きづけられたコンパクトな $n+1$ 次元（可微分）多様体 W^{n+1} で，

$$\partial W^{n+1} = M^n + (-V^n) \text{ 向きを保って同相}$$

を満たすものが存在するとき，M^n と V^n は有向同境 (oriented cobordant) であるという．ただし，∂W^{n+1} には W^{n+1} の向きからホモロジー的に導入された向きを与えるものとする．

iv) $\mathscr{M}^n$ を向きづけられた n 次元閉（可微分）多様体全体の集合において，有向同境による同値類を有向同境類といい，有向同境類の集合を Ω^n，$\Omega^n(n=0,1,\cdots)$ の直和を $\Omega^*=\sum\Omega^n$ と表す．

□

【命題 5.46】

i) Ω^n の元 $\{M_1^n\},\{M_2^n\}$ に対して，和を

$$\{M_1^n\}+\{M_2^n\}:=\{M_1^n+M_2^n\}$$

で定義すると，Ω^n は $\{\varnothing\}$ をゼロ元とする可換群となる．これを有向同境群という．

ii) Ω^* の元 $\{M^n\},\{N^m\}$ の積を

$$\{M^n\}\times\{N^m\}:=\{M^n\times N^m\}$$

で定義すると，Ω^* は環となる．これを有向同境環という．

□

【定理 5.47 (Thom)**】**

可微分多様体のカテゴリーにおいて，有向同境群 Ω^n は,

i) $n \not\equiv 0 \mathrm{mod} 4$ のとき，有限群である．

ii) $n=4m$ のとき，階数が n の分割数と一致する自由加群と有限群の直和である．

[田村一郎：微分位相幾何学] □

【定理 5.48】 可微分多様体のカテゴリーにおいて，テンソル積 $\Omega^*\otimes\mathbb{Q}$ は偶数次元射影空間 $\mathbb{C}P^2,\mathbb{C}P^4,\cdots$ により生成される $\mathbb{Q}$ 上の多項式環である．[田村一郎：微分位相幾何学] □

【**定理 5.49** (Wall)】　向きづけられた n 次元閉可微分多様体がゼロ同境であるための必要十分条件は，すべての Pontrjagin 数およびすべての Stiefel-Whitney 数がゼロとなることである．したがって，可微分多様体のカテゴリーにおける同境群 Ω^n は Pontrjagin 数に対応する無限巡回群 $\mathbb{Z}$ と Stiefel-Whitney 数に対応する位数 2 の群 $\mathbb{Z}_2$ の直和である．[Wall, C.T.C: Determination of the cobordism ring, Ann. of Math. 72 (1960)]

□

6　ファイバー束

Last update: 2011.7.18

6.1　ファイバー空間

6.1.1　基本事項

【定義 6.1 (**ファイバー積**)**】**　位相空間 Y と Z から位相空間 X への連続写像 $f : Y \to X$，$g : Z \to X$ に対して，新たな位相空間 $Y \times_X Z$ とそれから X, Y, Z への連続写像 $f \times_X g, \pi_1, \pi_2$ を

$$
\begin{aligned}
& Y \times_X Z \equiv \{(y, z) \in Y \times Z \mid\ f(y) = g(z)\}, \\
& f \times_X g : Y \times_X Z \ni (y, z) \mapsto f(y) = g(z) \in X, \\
& \pi_1 : Y \times_X Z \ni (y, z) \mapsto y \in Y, \\
& \pi_2 : Y \times_X Z \ni (y, z) \mapsto z \in z
\end{aligned}
$$

により定義する．このとき，

$$
f \circ \pi_1 = g \circ \pi_2 = f \times_X g
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Y \times_X Z \ni (y, z) \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[dd, "f \times_X g"] & \\
Y \ni y \arrow[dr, "f"'] & & Z \ni z \arrow[dl, "g"] \\
 & X \ni f(y) = g(z) &
\end{tikzcd}
$$

が成り立つ．また，W を任意の位相空間として，連続写像 $h : W \to X$, $\tilde{\pi}_1 : W \to Y$, $\tilde{\pi}_2 : W \to Z$ が条件

$$f \circ \tilde{\pi}_1 = g \circ \tilde{\pi}_2 = h$$

を満たせば，連続写像 $\tilde{\pi} : W \to Y \times_X Z$ が一意的に定まり，

$$\pi_1 \circ \tilde{\pi} = \tilde{\pi}_1, \quad \pi_2 \circ \tilde{\pi} = \tilde{\pi}_2$$

を満たす．ファイバー積 $Y \times_X Z$ は，このような性質を持つ空間として同型を除いて一意的に定まる．　□

【定義 6.2 (写像のリフト)】 E, X を位相空間，$\pi : E \to X$ を連続写像とする．このとき，位相空間 Y と連続写像 $f : Y \to X$ に対して，$\pi \perp g = f$ となる連続写像 $g : Y \to E$ が存在するとき，g を f の**リフト** (lift) または**持ち上げ**という．特に，$Y = X$ のとき，恒等写像 id_X のリフトを右逆写像または**切断** (cross section) という．

$\pi : E \to X$ と $f : Y \to X$ のファイバー積を $f \times_X g : Y \times_X E \to X$ とすると，ファイバー積の性質より，f のリフト g と射影 $\tilde{\pi} : Y \times_X E \to Y$ の切断 g' が 1 対 1 に対応する．

$$\begin{tikzcd} Y \times_X E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, shift left, "\tilde{\pi}"'] & Y \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[u, shift left, "g'"] \arrow[ur, dotted, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

$\square$

【定義 6.3 (被覆ホモトピー性質)】 連続写像 $\pi : E \to X$ と位相空間 Y において，Y から X への任意の写像のホモトピー $f_t : Y \to X$ に対して，f_0 がリフト g_0 を持つなら常に f_t のリフト $g_t : Y \to E$ が存在するとき，連続写像 $\pi : E \to X$ は位相空間 Y に関し**被覆ホモトピー性質** (coverling homotopy property) をもつという． $\square$

【定義 6.4 (ファイバー空間)】 連続写像 $\pi : E \to X$ が全射で，かつすべての位相空間に対して被覆ホモトピー性質をもつとき，$\pi : E \to X$ は（Hurewicz の意味での）**ファイバー空間** (fiber space) という．

また，立方体 $I^n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ に関して被覆ホモトピー性質をもつとき，**Serre の意味でのファイバー空間**という．Serre の意味でのファイバー空間は，任意の CWf 複体に対して被覆ホモトピー性質をもつ．

いずれの場合も，E を**全空間**，X を**底空間**，π を**射影**，$\pi^{-1}(x)$ を **x 上のファイバー**という． $\square$

【定理 6.5 (ファイバーバンドルの被覆も下ピー性質)】 ファイバーバンドルは，任意のパラコンパクト空間に対して被覆ホモトピー性をもつ．したがって，Serre の意味でのファイバー空間となる．また，パラコンパクト空間を底空間とするファイバーバンドルは，Hurewicz の意味でのファイバー空間となる．

[出典： 服部晶夫「位相幾何学」（岩波講座基礎数学, 1979) 第 9 章] $\square$

【**定理 6.6** (ファイバーのホモトピー同値性)】　底空間が弧状連結なファイバー空間では，底空間の任意の 2 点でのファイバーは同じホモトピー型を持つ．また，Serre の意味でのファイバー空間でも，底空間か弧状連結なら，すべてのファイバーのホモロジー群とホモトピー群は同型となる．
[出典・証明： 服部晶夫「位相幾何学」(岩波講座基礎数学, 1979) 第 9 章] □

6.1.2　ファイバー空間のホモロジー

6.1.2.1　Serre スペクトル系列の応用

【**定理 6.7 (Euler 票数の積公式)**】　(Y, Y_0) をファイバー空間 $\pi : Y \to X$ とその部分ファイバー空間 $\pi_0 : Y_0 \to X$ の組として，π と π_0 のファイバーを F, F_0 で表す．底空間 X が有限 CW 複体で，ファイバー対 (F, F_0) は有限生成のホモロジーを持つとする．このとき，Y も有限生成のホモロジーをもち，Euler 数に対して積公式

$$\chi(Y, Y_0) = \chi(X)\chi(F, F_0)$$

が成り立つ．
[出典・証明： 服部晶夫「位相幾何学」(岩波講座基礎数学, 1979) 第１０章] □

6.2　ベクトル束

6.2.1　K 理論

【**定義 6.8** (K 群)】　空間 X 上の F-ベクトル束の同値類全体の作る可換半群 $V_F(X)$ に対して，その Grothendiek 可換群を **K 群**といい，$K_F(X)$ と表す．$K_F(X)$ の元は**仮想束**と呼ばれる．特に，$F = \mathbb{C}$ および $F = \mathbb{R}$ のとき，$K_F(X)$ をそれぞれ $K(X)$，$KO(X)$ と表す． □

【**命題 6.9**】　コンパクト空間 X の K 群 $K_F(X)$ について次の性質が成り立つ：

i) $K_F(X)$ は束の直和 $\oplus$ とテンソル積 $\otimes$ により可換環となり，K_F は（コンパクト）位相空間の圏から可換環の圏への反変関手となる．

ii) $K_F(X)$ の任意の元は適当なベクトル束 V と自明な N 次元ベクトル束 θ_F^N $(N \geqslant 0)$ を用いて，$[V] - [\theta_F^N]$ と表される．

iii) $K_F(X)$ において $[V] - [W] = 0$ となるための必要十分条件は，適当な自明ベクトル束 θ_F^N に対して $V \oplus \theta_F^N \cong W \oplus \theta_F^N$ となることである．

$\square$

【定義 6.10 (簡約K群)**】**　X を基点 pt を持つ空間として，制限写像 $K_F(X) \to K_F(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{Z}$ の核を**簡約 K 群**と呼び，$\tilde{K}_F(X)$ と表す．$\square$

【定義 6.11 (安定同値)**】**　位相空間 X 上の 2 つのベクトル束 V，W に対して，2 つの自明なベクトル束 θ^m, θ^n が存在して $V \oplus \theta^m \cong W \oplus \theta^n$ となるとき，V と W **は安定同値である**という．$\square$

【命題 6.12】　コンパクト空間 X の簡約 K 群 $\tilde{K}_F(X)$ について次の性質が成り立つ：

i) $\tilde{K}_F(X)$ は $K_F(X)$ から誘導される和と積により可換環となり，$\tilde{K}_F$ は（コンパクト）位相空間の圏から可換環の圏への反変関手となる．

ii) $\tilde{K}_F(X)$ の任意の元は，適当なベクトル束 V と V と同じ次元 N の自明なベクトル束 $\theta_F^N (N \geqslant 0)$ を用いて，$[V] - [\theta_F^N]$ と表される．

iii) $\tilde{K}_F(X)$ において $[V] = [W]$ となるための必要十分条件は，V と W が安定同値となることである．特に，$\tilde{K}_F(X)$ と X 上の F-ベクトル束の安定同値類全体の集合は一対一に対応する．

$\square$

【定義 6.13 (相対 K 群)**】**　空間 X とその空でない閉部分空間 Y の組に対して，**相対K群** $K_F(X, Y)$ を

$$K_F(X, Y) := \tilde{K}_F(X/Y)$$

により定義する．ただし，X/Y の基点を Y とする．$Y = \varnothing$ に対しては

$$K_F(X, \varnothing) := K_F(X)$$

と定義する．$\square$

【定義 6.14 (L 群)**】**　位相空間対 (X,A)(A は X の閉部分空間) に対して，X 上のベクトル束 V_0, V_1 とその A への制限の間の束写像 $\sigma : V_0|_A \to V_1|_A$ の組 $\boldsymbol{V} = (V_0, V_1; \sigma)$ からなる集合を $\mathscr{L}(X,A)$ とする．$\mathscr{L}(X,A)$ の 2 つの元 $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}'$ は，束同型 $\phi_i : V_i \to V_i'$ で $\phi_1 \circ \sigma = \sigma' \circ \phi_0$ となるとき同値といい，$\boldsymbol{V} \cong \boldsymbol{V}'$ と表す．$\mathscr{L}(X,A)$ は束の直和から誘導される和により自然に可換半群となる．$\mathscr{L}(X,A)$ の元 $\boldsymbol{E} = (E_0, E_1; \sigma)$ は，$E_0 = E_1$ かつ $\sigma = \mathrm{id}$ のとき要素的であるという．さらに，$\mathscr{L}(X,A)$ の 2 つの元 $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}'$ に対して，適当な要素的元 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}'$ が存在して

$$\boldsymbol{V} \oplus \boldsymbol{E} \cong \boldsymbol{V}' \oplus \boldsymbol{E}'$$

となるとき，同値とする．この同値関係による $\mathscr{L}(X,A)$ の同値類 $[V_0, V_1; \sigma]$ の集合を $L(X,A)$ と表す．$L(X,A)$ は可換群である．□

【命題 6.15】　$A = \varnothing$ のとき，

$$\chi([V_0, V_1]) = [V_0] - [V_1]$$

となる，関手の間の同値変換 $\chi : L(X,A) \to K(X,A)$ が一意的に存在する．具体的には，一般の $\boldsymbol{V} = [V_0, V_1; \sigma] \in L(X,A)$ に対して，$\chi(\boldsymbol{V})$ は次のように構成される．$X_0 = X \times 0, X_1 = X \times 1$ を X のコピーとして，

$$[\tilde{V}] - [\theta^N] = [V_0 \cup_\sigma V_1] - [V_1 \cup_{\mathrm{id}} V_1] \in K(X_0 \cup_A X_1)$$

を作ると，この元の $X = X_0$ への制限は $K(X)$ でゼロとなる．これより，$\tilde{V}$ は X_1 上で自明束安定同値となり，$K(X/A)$ の元 $\chi(\boldsymbol{V})$ を一意的に決定する．□

【定義 6.16】　X, Y を位相空間，$p_X : X \times Y \to X, p_Y : X \times Y \to Y$ を標準射影とする．このとき，$a \otimes b \in K(X) \otimes K(Y)$ に $p_X^*(a) p_Y^*(b) \in K(X \times Y)$ を対応させることにより定義される群準同型 $K(X) \otimes K(Y) \to K(X \times Y)$ を K **群のクロス積**という．これは，部分集合に制限することにより，$\tilde{K}$ 群のクロス積 $\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) \to \tilde{K}(X \times Y)$ を誘導する．□

【命題 6.17】　X, Y を基点付き空間とするとき，そのブーケ $X \vee Y$ およびスマッシュ積 $X \wedge Y$ に対して次が成り立つ：

i) 包含写像 $i : X \vee Y \subset X \times Y$ および射影 $p : X \times Y \to X \wedge Y$ は次の完全列を誘導する：

$$0 \to \tilde{K}(X \wedge Y) \xrightarrow{p^*} \tilde{K}(X \times Y) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(X \vee Y) \to 0.$$

ii) クロス積と i^* の結合

$$\tilde{K}(X)\otimes\tilde{K}(Y)\to\tilde{K}(X\times Y)\xrightarrow{i^*}\tilde{K}(X\vee Y)$$

はゼロ写像である．

□

【定義 6.18 (K 群のカップ積)**】**　上の命題より誘導される写像

$$\tilde{K}(X)\otimes\tilde{K}(Y)\to\tilde{K}(X\wedge Y)$$

を**簡約** K **群のカップ積**と呼ぶ．さらに，２つの空間対 (X,A)，(Y,B) に対して $\tilde{K}$ 群のカップ積

$$\tilde{K}(X/A)\otimes\tilde{K}(Y/B)\to\tilde{K}((X/A)\wedge(Y/B))=\tilde{K}((X\times Y)/(X\times B)\cup(A\times Y))$$

から誘導される写像

$$K(X,A)\otimes K(Y,B)\to K(X\times Y,(X\times B)\cup(A\times Y))$$

を**相対 K 群のカップ積**という．　□

【定義 6.19 (次数付き K 群)**】**　i を非負整数として，基点を持つコンパクト空間 X に対して，

$$\tilde{K}^{-i}(X):=\tilde{K}(S^i\wedge X),$$

コンパクト空間対 (X,Y) に対して，

$$K^{-i}(X,Y):=\tilde{K}^{-i}(X/Y),$$

基点を持たないコンパクト空間 X に対して，$X^+=(X,*)$($*$ は仮想基点)，pt を S^i の基点として

$$K^{-i}(X)\equiv K^{-i}(X,\emptyset):=\tilde{K}^{-i}(X^+)=K(S^i\times X,\mathrm{pt}\times X)$$

と定義する．特に，

$$K^{-i}(\mathrm{pt})=\tilde{K}(S^i)$$

である．　□

【**命題 6.20**】　位相空間 X, Y と非負整数 i, j に対して，簡約 K 群のカップ積

$$\tilde{K}(S^i \wedge X) \otimes \tilde{K}(S^j \wedge Y) \to \tilde{K}((S^i \wedge X) \wedge (S^j \wedge Y))$$

は次数付き簡約 K 群のカップ積

$$\tilde{K}^{-i}(X) \otimes \tilde{K}^{-j}(Y) \to \tilde{K}^{-i-j}(X \wedge Y)$$

を誘導する．この積により，$K^*(\mathrm{pt})$ は次数付き環となる．また，$K^*(X)$ は次数付き $K^*(\mathrm{pt})$-加群となる．　□

【**定理 6.21** (Bott の周期性定理：複素 K 群)】

i) 環 $K^{-*}(\mathrm{pt})$ は $\xi \in K^{-2}(\mathrm{pt}) \cong \tilde{K}(S^2)$ を生成元とする多項式環に同型である：

$$K^{-*}(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{Z}[\xi].$$

ii) (X, A) を任意のコンパクト Hausdorff 空間対とする．このとき，ξ によるカップ積から誘導される準同型

$$\mu_\xi : K^{-i}(X, A) \to K^{-i-2}(X, A)$$

は任意の非負整数 i に対して同型となる．

□

【**定理 6.22** (Bott の周期性定理：実 K 群)】

i) 環 $KO^{-*}(\mathrm{pt})$ は，

$$\eta \in KO^{-1}(\mathrm{pt}), \quad y \in KO^{-4}(\mathrm{pt}), \quad x \in KO^{-8}(\mathrm{pt}),$$

として，

$$KO^{-*}(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{Z}[\eta, y, x] / < 2\eta, \eta^3, \eta y, y^2 - 4x > .$$

ii) (X,A) を任意のコンパクト Hausdorff 空間対とする．このとき，x によるカップ積から誘導される準同型

$$\mu_x : KO^{-i}(X,A) \to KO^{-i-8}(X,A)$$

は任意の非負整数 i に対して同型となる．

$\square$

【定義 6.23 (コンパクト台の K 群)**】** 局所コンパクト空間 X に対して，X^+ を X の一点コンパクト化 $X^+ = X \cup \{\mathrm{pt}\}$ として，X の**コンパクト台の** K **群**を

$$K_{\mathrm{cpt}}(X) := \tilde{K}(X^+),$$
$$K_{\mathrm{cpt}}^{-i}(X) := K_{\mathrm{cpt}}(X \times \mathbb{R}^i)$$

で定義する．また，空間対 (X,A)(A は閉集合) に対して，コンパクト台の相対 K 群を

$$K_{\mathrm{cpt}}^{-i} := K_{\mathrm{cpt}}((X-A) \times \mathbb{R}^i)$$

により定義する． $\square$

【定理 6.24 (K_{cpt} に対する Bott の周期性定理)**】** 任意の局所コンパクト空間 X に対して，次の関係が成り立つ：

$$K_{\mathrm{cpt}}(X) \cong K_{\mathrm{cpt}}(X \times \mathbb{C}),$$
$$KO_{\mathrm{cpt}}(X) \cong KO_{\mathrm{cpt}}(X \times \mathbb{R}^8).$$

この同型は，それぞれ $\xi \in K_{\mathrm{cpt}}(\mathbb{C}) \cong \tilde{K}(S^2)$，$x \in KO_{\mathrm{cpt}}(\mathbb{R}^8) \cong \tilde{K}O(S^8)$ とのカップ積により誘導される． $\square$

【命題 6.25】 $W = W^0 \oplus W^1$ を $\mathbb{Z}_2$ 次数付き $\mathbb{C}-\mathcal{C}\ell_n$ 加群，$E_k = D^n \times W^k$ を n 次元球体 $D^n(\subset \mathcal{C}\ell_n)$ 上の自明なベクトル束，$\mu : E_0|_{S^{n-1}} \to E_1|_{S^{n-1}}(S^{n-1} = \partial D^n)$ を同型 $\mu(u,w) = (u, u \cdot w)(|u| = 1)$ として，

$$\phi(W) := [E_0, E_1; \mu] \in K(D^n, S^{n-1})$$

とおくと，ϕ は $\mathbb{Z}_2$ 次数付き $\mathbb{C}-\mathcal{C}\ell_n$ 加群の Grothendieck 環から K 群への準同型

$$\phi : \hat{\mathscr{M}}_n^{\boldsymbol{C}} \to K(D^n, S^{n-1})$$

を与える．このとき，包含写像 $i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ から誘導される Grothendieck 環の準同型 $i^*:\hat{\mathscr{M}}^{\boldsymbol{C}}_{n+1}\to\hat{\mathscr{M}}^{\boldsymbol{C}}_n$ に対して，$i^*\circ\phi=0$ となる．よって，ϕ は準同型

$$\phi_n:\hat{\mathscr{M}}^{\boldsymbol{C}}_n/i^*\hat{\mathscr{M}}^{\boldsymbol{C}}_{n+1}\to K(D^n,S^{n-1})\cong K^{-n}(\mathrm{pt})$$

を与える．同様に，$\mathbb{Z}_2$ 次数付き Clifford 加群の実表現環に対して

$$\phi_n:\hat{\mathscr{M}}_n/i^*\hat{\mathscr{M}}_{n+1}\to KO(D^n,S^{n-1})\cong KO^{-n}(\mathrm{pt})$$

が定義される．ここで，

$$\hat{\mathscr{M}}^{\boldsymbol{C}}_n/i^*\hat{\mathscr{M}}^{\boldsymbol{C}}_{n+1}\cong\mathscr{M}^{\boldsymbol{C}}_{n-1}/i^*\mathscr{M}^{\boldsymbol{C}}_n\cong\begin{cases}\mathbb{Z} & n:\mathrm{even}\\ 0 & n:\mathrm{odd}\end{cases}$$

および

$$\hat{\mathscr{M}}_n/i^*\hat{\mathscr{M}}_{n+1}\cong\mathscr{M}_{n-1}/i^*\mathscr{M}_n\cong\begin{cases}\mathbb{Z} & n\equiv 0,4(\mathrm{mod}8)\\ \mathbb{Z}_2 & n\equiv 1,2(\mathrm{mod}8)\\ 0 & \text{他の場合}\end{cases}$$

が成り立つ． □

【定理 **6.26** (Atiyah-Bott-Shapiro 同型)】　次の次数付き環としての同型が成り立つ：

$$\begin{aligned}\phi_*:\hat{\mathscr{M}}^{\boldsymbol{C}}_*/i^*\hat{\mathscr{M}}^{\boldsymbol{C}}_{*+1}&\xrightarrow{\cong}K^{-*}(\mathrm{pt}),\\ \phi_*:\hat{\mathscr{M}}_*/i^*\hat{\mathscr{M}}_{*+1}&\xrightarrow{\cong}KO^{-*}(\mathrm{pt})\end{aligned}$$

□

6.2.2　乗法列と Chern 指標

【命題 **6.27** (Splitting Principle)】

i) E を位相空間 X 上の複素ベクトル束とする．このとき，次の性質を満たすファイバー空間 $\pi:Y\to X$ が存在する：

   a) 準同型 $\pi^*:H^*(X)\to H^*(Y)$ は単射である．

b) ベクトル束 π^*E は 1 次元複素ベクトル束の直和となる：

$$\pi^*E \cong \ell_1 \oplus \cdots \oplus \ell_n.$$

X が多様体ならば，Y も多様体に取れ，π はなめらかな束射影とできる．

ii) E を X 上の $2n$ 次元の向きづけられた実ベクトル束とする．このとき，次の性質を満たすファイバー空間 $\pi : Y \to X$ が存在する：

a) 準同型 $\pi^* : H^*(X) \to H^*(Y)$ は単射である．

b) ベクトル束 π^*E は

$$E_k \otimes \mathbb{C} \cong \ell_k \otimes \bar{\ell}_k$$

となる向きづけられた 2 次元実ベクトル束 E_k の直和となる：

$$\pi^*E \cong E_1 \oplus \cdots \oplus E_n.$$

X が多様体ならば，Y も多様体に取れ，π はなめらかな束射影とできる．

□

【定義 6.28 (乗法列)**】**　$\mathbb{Q}$ 係数の $f(0) = 1$ となる形式べき級数 $f(x) \in \mathbb{Q}[[x]]$ に対して，σ_n を $x_1, \cdots, x_n$ の n 次基本対称式とすると，

$$f(x_1) \cdots f(x_n) = 1 + F_1(\sigma_1) + F_2(\sigma_1, \sigma_2) + \cdots$$

により定義される $F_j(\sigma_1, \cdots, \sigma_j)$($x_j$ に関して j 次の同次式) は $n \to \infty$ で n に依存しない多項式となる．これを $f(x)$ **より決まる乗法列**と呼ぶ． □

【命題 6.29】　次数付き代数 $A = \{A^k\}$ の元の形式無限和 $a = 1 + a_1 + a_2 + \cdots$ の全体の作る乗法群を $\boldsymbol{A}$ とする．乗法列 $\{F_k\}$ に対して，写像 $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{F}(a) = 1 + F_1(a_1) + F_2(a_1, a_2) + \cdots$$

と定義すると，$\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{A}$ から自分自身への群の準同型となる：

$$\boldsymbol{F}(ab) = \boldsymbol{F}(a)\boldsymbol{F}(b).$$

□

【例 **6.30** (全 Todd 類)】　形式べき級数

$$td(x) = \frac{x}{1-e^{-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + \cdots$$

から定義される乗法列 **Td** を **Todd 乗法列**と呼ぶ．特に，全 Chern クラス $c(E)$ から定義される類 $\mathbf{Td}_{\boldsymbol{C}}(E) = \mathbf{Td}(c(E))$ を**全 Todd 類**，n 次元コンパクト複素多様体に対して $\mathrm{Td}(X) := \mathrm{Td}_n(TX)[X]$ を X の **Todd 種数**という．□

【例 **6.31** (全 $\hat{A}$ 類)】　形式べき級数

$$\hat{a}(x) = \frac{\sqrt{x}/2}{\sinh(\sqrt{x}/2)} = 1 - \frac{1}{24}x + \frac{7}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5}x^2 + \cdots$$

から定義される乗法列 $\hat{\mathbf{A}}$ を $\hat{A}$ **乗法列**と呼ぶ．特に，全 Pontrjagin クラス $c(E)$ から定義される類 $\hat{\mathbf{A}}(E) = \hat{\mathbf{A}}(c(E))$ を**全** $\hat{A}$ **類**という．また，$a(x) = \hat{a}(16x)$ に対応する乗法列 $A_m = 16^m \hat{A}_m$ を A **系列**という．□

【命題 **6.32**】　任意の向きづけられた実ベクトル束 E に対して次の関係が成り立つ：

$$\bar{T}d_{\boldsymbol{C}}(E \otimes \mathbb{C}) = \hat{\mathbf{A}}(E)^2$$

□

【例 **6.33** (全 L 類)】　形式べき級数

$$l(x) = \frac{\sqrt{x}}{\tanh(\sqrt{x})} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^2 + \cdots$$

から定義される乗法列 $\hat{\mathbf{L}}$ を **Hirzebruch**L **乗法列**と呼ぶ．特に，全 Pontrjagin クラス $c(E)$ から定義される類 $\hat{\mathbf{L}}(E) = \hat{\mathbf{L}}(c(E))$ を**全** L **類**という．また，$\hat{l}(x) = l(x/4)$ に対応する乗法列 $\hat{L}_m = 4^{-m}L_m$ を $\hat{L}$ **系列**という．□

【例 **6.34** (Chern 指標)】　n 次元複素ベクトル束 E の全 Chern クラス $c(E)$ を，Splitting Principle に従って形式的に

$$c(E) = 1 + c_1 + \cdots + c_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + x_k)$$

と因数分解するとき（すなわち c_j は x の j 次基本対称式），

$$\mathrm{ch}(E) = e^{x_1} + \cdots + e^{x_n} = n + c_1 + (c_1^2 - c_2) + \cdots$$

で定義される $H^{2*}(X;\mathbb{Q})$ の元を E の **Chern 指標**という．□

【命題 6.35】 Chern 指標について次が成り立つ：

i) E, E' を X 上の複素ベクトル束とするとき，

$$\mathrm{ch}(E \oplus E') = \mathrm{ch}(E) + \mathrm{ch}(E'),$$
$$\mathrm{ch}(E \otimes E') = \mathrm{ch}(E)\mathrm{ch}(E').$$

ii) 任意のコンパクト Hausdorff 空間 X に対して，Chern 指標は次の環としての準同型を与える：

$$\mathrm{ch} : K(X) \to H^{2*}(X; \mathbb{Q}).$$

□

6.2.3 Clifford 束

【定義 6.36】 空間 X 上の非退化な内積を持つ n 次元ベクトル束 E に対して，そのテンソル束 $\mathscr{T}(E) = \sum_{r=0}^{\infty} \otimes^j E$ の部分ベクトル束 $\mathscr{I}(E)$ を，$v \otimes v + < v, v > (v \in E_x)$ の形の元全体で生成されるイディアルとする．このとき，商束

$$C\ell(E) := \mathscr{T}(E)/\mathscr{I}(E)$$

を E の **Clifford 束**と呼ぶ．特に，X が擬 Riemann 多様体のとき，接束 $T(X)$ の Clifford 束を X の **Clifford 束**といい，$C\ell(X)$ と表す． □

【命題 6.37】 E のファイバーの計量が (p, q) 型であるとする．$P_{\mathrm{O}}(E)$ を E の正規直交基底から作られる $\mathrm{O}_{p,q}$-主束，$\mathrm{cl}(\rho_{p,q})$ を $\mathrm{O}_{p,q}$ の $\mathbb{R}^{p,q}$ への標準表現 $\rho_{p,q}$ から誘導される $C\ell(\mathbb{R}^{p,q})$ への表現

$$\mathrm{cl}(\rho_{p,q}) : \mathrm{O}_{p,q} \to C\ell(\mathbb{R}^{p,q})$$

とする．このとき，

$$C\ell(E) = P_{\mathrm{O}}(E) \times_{\mathrm{cl}(\rho_{p,q})} C\ell(\mathbb{R}^{p,q}).$$

さらに，E が向き付け可能のとき，$P_{\mathrm{SO}}(E)$ を正の向きをもつ正規直交基底の作る $\mathrm{SO}_{p,q}$-主束とすると，

$$C\ell(E) = P_{\mathrm{SO}}(E) \times_{\mathrm{cl}(\rho_{p,q})} C\ell(\mathbb{R}^{p,q}).$$

□

【命題 6.38】

i) Clifford 束 $C\ell(E)$ は，自然に X 上の Clifford 代数の束と見なされる．すなわち，$a, b \in C\ell(E_x)$ に対して，$ab \in C\ell(E_x)$ が定義され，$v, w \in E_x \subset C\ell(E_x)$ に対して

$$vw + wv = -2 < v, w >$$

が成り立つ．

ii) Clifford 代数の主自己同型に対応する Clifford 束の自己同型

$$\alpha : C\ell(E) \to C\ell(E)$$

が，$\alpha(v) = -v (v \in E \subset C\ell(E))$ により定義される．α は $+1$ と -1 を固有値として持ち，その固有空間により $C\ell(E)$ は

$$C\ell(E) = C\ell^0(E) \oplus C\ell^1(E)$$

と直和分解される．

iii) $e_1, \cdots, e_n$ を E_x の正規直交基底 $(< e_i, e_j >= \eta_{ij})$ とするとき，$\phi \in C\ell(E_x)$ に

$$L(\phi) = -\sum_{i,j=1}^{n} e_i \phi e_j \eta^{ij}$$

を対応させる写像は，$C\ell(E)$ の束写像

$$L : C\ell(E) \to C\ell(E)$$

を定義する．

iv) 対応

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in \Lambda^k E_x \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sign}(\sigma) v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(k)}$$

により E の外積束から Clifford 束への標準ベクトル束同型

$$\lambda : \Lambda^*(E) \xrightarrow{\cong} C\ell(E)$$

が定義される．この対応に対して，

$$\lambda(\Lambda^{\mathrm{even}}E) = C\ell^0(E), \quad \lambda(\Lambda^{\mathrm{odd}}E) = C\ell^1(E),$$
$$\lambda(\Lambda^p E) = \{\phi \in C\ell(E) \mid \alpha \circ L(\phi) = (n-2p)\phi\} \quad p = 0, \cdots, n$$

が成り立つ． □

【命題 6.39】 多様体 X 上の向きづけられた Riemann ベクトル束 E の Riemann 接続は Clifford 束 $C\ell(E)$ の Riemann 接続を一意的に誘導し，対応する共変微分 ∇ は $\Gamma(C\ell(E))$ の作る代数に対して微分作用素として作用する：

$$\nabla(\phi \cdot \psi) = (\nabla\phi) \cdot \psi + \phi \cdot (\nabla\psi).$$

したがって，∇ の具体的作用は，E の局所基底 $e_1, \cdots, e_n$ に対する作用

$$\nabla e_i = \sum_{j=1}^{n} \omega^j{}_i \otimes e_j$$

により決定される．さらに，∇ の曲率形式を線形変換

$$R(V, W) : C\ell(E_x) \to C\ell(E_x)$$

と見なすとき，$R(V, W)$ は微分作用素として働く：

$$R(V, W)(\phi \cdot \psi) = (R(V, W)\phi) \cdot \psi + \phi \cdot (R(V, W)\psi).$$

□

6.2.4 スピノール束

【定義 6.40 (ベクトル束のスピン構造)】 E を位相空間 X 上の向きづけられた Riemann ベクトル束，$P_{\mathrm{SO}}(E)$ を E に随伴する SO_n 主束とする．このとき，$P_{\mathrm{SO}}(E)$ が各ファイバー上で非自明となる 2 価の被覆空間

$$\xi : P_{\mathrm{Spin}}(E) \to P_{\mathrm{SO}}(E)$$

を持つとき，$P_{\mathrm{Spin}}(E)$ を E の**スピン構造**という．このとき，$P_{\mathrm{Spin}}(E)$ には一意的に Spin_n 主束の構造が入り，

$$\xi(ug) = u\xi_0(g) \quad \forall u \in P_{\mathrm{Spin}}(E), \forall g \in \mathrm{Spin}_n$$

が成り立つ．ここで $\xi_0 : \mathrm{Spin}_n \to \mathrm{SO}_n$ は標準被覆写像である． □

【定理 6.41 (スピン構造の存在条件)】 空間 X 上のベクトル束 E がスピン構造を持つための必要十分条件は，E の 1 次および 2 次の Stiefel-Whitney 類がゼロ，$w_1(E) = w_2(E) = 0$，となることである．この条件が満たされるとき，E のスピン構造と $H^1(X;\mathbb{Z}_2)$ の元が一対一に対応する． □

【定義 6.42 (Riemann 多様体のスピン構造)】 向きづけられた Riemann 多様体 X に対して，その接束 $T(X)$ のスピン構造を X の**スピン構造**と呼ぶ．スピン構造が与えられた Riemann 多様体を X を**スピン多様体**という． □

【例 6.43 (スピン多様体)】 Stiefel 多様体，リー群，3 次元以下の向き付け可能多様体，K3 面はスピン構造を持つ． □

【定義 6.44 (スピノール束)】 E を向きづけられた Riemann ベクトル束，$\xi : P_{\mathrm{Spin}}(E) \to P_{\mathrm{SO}}(E)$ をそのスピン構造，M を左 $C\ell(\mathbb{R}^n)$ 加群とする．このとき，$\mathrm{Spin}_n \subset C\ell^0(\mathbb{R}^n) \subset C\ell(\mathbb{R}^n)$ から誘導される Spin_n の表現

$$\mu : \mathrm{Spin}_n \to \mathrm{SO}(M)$$

により定義される，M をファイバーとする $P_{\mathrm{Spin}}(E)$ の随伴ベクトル束

$$S(E) : P_{\mathrm{Spin}}(E) \times_\mu M$$

を E の**実スピノール束** (real spinor bundle) という．また，左 $C\ell(\mathbb{C}^n)$ 加群 $M_\mathbb{C}$ に対して同様に定義されるベクトル束

$$S_\mathbb{C}(E) : P_{\mathrm{Spin}}(E) \times_\mu M_\mathbb{C}$$

を E の**複素スピノール束** (complex spinor bundle) という． □

【命題 6.45】 向きづけられた Riemann ベクトル束 E の Clifford 束は

$$C\ell(E) = P_{\mathrm{Spin}}(E) \times_{\mathrm{Ad}} C\ell(\mathbb{R}^n)$$

と表される．これより，スピノール束 $S(E)$ は左 $C\ell(E)$ 加群となる． □

【命題 6.46 (スピノール束の Riemann 接続)】 向きづけられた Riemann ベクトル束 E の Riemann 接続は，スピノール束 $S(E)$ の Riemann 接続を一意的に誘導する．この接続に対して，

i) E の局所基底 $[e_1, \cdots, e_n]$ の共変微分が

$$\nabla e_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ji} \otimes e_j$$

で与えられるとき，$[e_j]$ に対応する $S(E)$ の局所基底 $[\sigma_\alpha]$ の共変微分は

$$\nabla \sigma_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i<j} \omega_{ji} e_i e_j \cdot \sigma_\alpha$$

と表される．さらに，曲率形式から誘導される変換

$$R(V, W) : S(E_x) \to S(E_x)$$

は

$$R(V, W)\sigma = \frac{1}{2} \sum_{i<j} < R(V, W)e_i, e_j > e_i e_j \sigma$$

と表される．

ii) ∇ は $S(E)$ に対して，左 $C\ell(E)$ 加群の微分作用素として働く：

$$\nabla(\phi \cdot \sigma) = (\nabla \phi) \cdot \sigma + \phi \cdot (\nabla \sigma).$$

$R(V, W)$ も同様に左 $C\ell(E)$ 加群の微分作用素として働く．

□

6.2.5 Dirac 作用素

【定義 6.47】 X を Riemann 多様体，S を左 $C\ell(X)$ 加群となる X 上の Riemann ベクトル束とする．S の各 Riemann 接続 ∇ に対して，

$$D\sigma := \sum_{j=1}^{n} e_j \nabla_{e_j} \sigma$$

で定義される $\Gamma(S)$ 上の一階の微分作用素

$$D : \Gamma(S) \to \Gamma(S)$$

を **Dirac 作用素**と呼ぶ．ここで，$e_1, \cdots, e_n$ は $T(X)$ の局所正規直交基底であるが，D はその取り方に依らない． □

【定義 6.48】　多様体 X 上のベクトル束 E の m 階微分作用素 $D:\Gamma(E)\to\Gamma(E)$ が，点 x において X の局所座標系 x_k と $A_\alpha(x):E_x\to E_x$ を用いて

$$D=\sum_{|\alpha|\leqslant m}A_\alpha(x)\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$$

と表されるとき，各 $\xi=\sum_k\xi_k dx_k\in T_x^*(X)$ に対して定義される線形写像 $\sigma_\xi(D):E_x\to E_x$，

$$\sigma_\xi(D):=i^m\sum_{|\alpha|=m}A_\alpha(x)\xi^\alpha$$

を D の**主シンボル**という．特に，任意の $\xi\neq 0$ に対して $\sigma_\xi(D)$ が常に同型写像となるとき D は**楕円型**であるという．□

【定義 6.49】　Riemann 多様体 X 上の左 $C\ell(X)$-加群束 S が次の２条件を満たす Riemann 計量 $<,>$ と接続 ∇ を持つとき，S を X **上の Dirac 束**という：

i) $T(X)$ の任意の単位ベクトル e は S のファイバーの等長変換を引き起こす．

$$<e\sigma_1,e\sigma_2>=<\sigma_1,\sigma_2>\quad \forall e\in T_x(X)\text{s.t.} <e,e>=1,\forall\sigma_1,\sigma_2\in S_x.$$

ii) 任意の $\phi\in\Gamma(C\ell(X))$ と $\sigma\in\Gamma(S)$ に対して，

$$\nabla(\phi\cdot\sigma)=(\nabla\phi)\cdot\sigma+\phi\cdot(\nabla\sigma).$$

□

【定理 6.50】　X を完備 Riemann 多様体，D を X 上の Dirac 束 S 上の Dirac 作用素とする．このとき D は $L^2(S)$(S の２乗可積分断面の作るヒルベルト空間）で唯一の自己共役な拡張を持ち，

$$\text{Ker }D=\text{Ker }D^2$$

が成り立つ．さらに，X がコンパクの時，Ker D は有限次元である．□

6.2.6 $\mathbb{R}^n$ の擬微分作用素

【**定義 6.51** (シンボル)】 $m \in \mathbb{R}$ を一つ固定し，$p(x, \xi)$ を，行列に値を取る $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上のなめらかな関数とする．各多重指数 α, α' に対して，

$$|D_x^\alpha D_\xi^{\alpha'} p(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\alpha'}(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|}$$

となる定数 $C_{\alpha,\alpha'}$ が存在するとき，$p(x, \xi)$ を**階数** m **のシンボル**といい，その全体を Sym^m と表す． □

【**定義 6.52** (擬微分作用素)】 $p \in \mathrm{Sym}^m$ とする．$u(x) \in \S(\S$ は $\mathbb{R}^n$ の急減少関数の作る Frechet 空間) に対して，

$$u(x) = (2\pi) - n/2 \int e^{i<x,\xi>} \hat{u}(\xi) d\xi,$$

に

$$Pu(x) = (2\pi) - n/2 \int e^{i<x,\xi>} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi,$$

を対応させせる写像は，線形写像 $P : \S \to \S$ となる．この写像を $\mathbb{R}^n$ **上の階数** m **の擬微分作用素**といい，その全体を ΨDO_m と表す．さらに，シンボル $p \in \mathrm{Sym}^m$ を持つ擬微分作用素 $P \in \Psi DO_m$ に対して，

$$\sigma(P) = [p] \in \mathrm{Sym}^m / \mathrm{Sym}^{m-1}$$

を P の**主シンボル**と呼ぶ． □

【**定理 6.53**】 擬微分作用素 $P \in \Psi DO_m, Q \in \Psi DO_l$ に対して次が成り立つ：

i) P は任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して，有界作用素 $P : L_s^2 \to L_{s-m}^2$ に一意的に拡張される．

ii) 任意の開集合 $U \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$u|_U \in C^\infty(U) \ \Rightarrow \ Pu|_U \in C^\infty(U).$$

iv) $Q \circ P \in \Psi DO_{m+l}$.

v) 主シンボル $\sigma(P)$ は，$\mathbb{R}^n$ の微分同相写像に対して，$T(\mathbb{R}^n)$ 上の関数として変換する．

$\square$

【定義 6.54】 K を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合，$P \in \Psi DO_m$ とする．任意の $u \in C_0^\infty$ に対して $\mathrm{supp}(Pu) \subset K$，かつ $\mathrm{supp} u \cap K = \emptyset$ なら常に $Pu = 0$ がなりたつとき，P を K に台を持つ擬微分作用素といい，その全体を $\Psi DO_{K,m}$ と表す． $\square$

【命題 6.55】 $\phi : U \to V$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合 U, V の間の微分同相写像とする．このとき，任意のコンパクト集合 $K \subset U$ に対して，$(\phi_* P)u = P(u \circ \phi) \circ \phi^{-1}$ は線形写像

$$\phi_* : \Psi DO_{K,m} \to \Psi DO_{\phi K,m}$$

を与える． $\square$

【定義 6.56 (無限平滑作用素)】 線形写像 $\tau : \S \to \S$ が任意の $s, m \in \mathbb{R}$ に対して有界線形写像 $\tau : L_s^2 \to L_{s+m}^2$ に拡張されるとき，**無限平滑作用素**とよぶ．また，2 つの擬微分作用素 P, Q の差が無限平滑作用素のとき，P と Q は同値であるという． $\square$

【定義 6.57 (楕円型擬微分作用素)】 $P \in \Psi DO_m$ をシンボル p を持つ擬微分作用素とする．ある定数 $c > 0$ が存在して，$|\xi| \geqslant c$ となる任意の ξ に対して $p(x, \xi)$ が逆行列を持ち，かつ

$$|p(x, \xi)^{-1}| \leqslant c(1 + |\xi|)^{-m}$$

が成り立つとき，P を**楕円型**と定義する． $\square$

【定理 6.58】 $P \in \Psi DO_m$ を楕円型擬微分作用素とする．

i) P に対して次の式を満たす $Q \in \Psi DO_{-m}$ が同値を除いて一意的に存在する：

$$PQ = \mathrm{Id} - S', \quad QP = \mathrm{Id} - S.$$

ここで S, S' は無限平滑作用素である．

ii) $u \in L_s^2$ とする．このとき，$\mathbb{R}^n$ の任意の開集合 U に対して

$$Pu|_U \in C^\infty(U) \ \Rightarrow \ u|_U \in C^\infty(U).$$

特に，$m > 0$ のとき，$Pu = \lambda u$ が $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して成り立てば $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ である．

$\square$

6.2.7　ベクトル束の擬微分作用素

【**定義 6.59** (擬微分作用素)】

i) X を n 次元コンパクト多様体，E, F を X 上のなめらかな複素ベクトル束，$\Gamma(E), \Gamma(F)$ をそれらのなめらかな断面の作る線形空間，$L^2_s(E), L^2_s(F)$ を断面の作る Sobolev 空間とする．このとき，線形写像 $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ が任意の $s, m \in \mathbb{R}$ に対して有界線形写像 $P : L^m_s(E) \to L^2_{s+m}(F)$ に拡張できるとき，P を無限平滑作用素という．

ii) 線形写像 $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ が，適当な局所座標系でコンパクトな台をもつ擬微分作用素 $P_\alpha \in \Psi DO_m$ に一致する有限個の線形作用素と無限平滑作用素の和として表されるとき，P を階数 m の擬微分作用といい，その全体を $\Psi DO_m(E, F)$ と表す．２つの擬微分作用素は差が無限平滑作用素となるとき，同値とする．

□

【**定理 6.60**】　E, F, G をコンパクト多様体 X 上のベクトル束とする．このとき，擬微分作用素 $P \in \Psi DO_m(E, F), Q \in \Psi DO_l(F, G)$ に対して次が成り立つ：

i) P は任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して，有界作用素 $P : L^2_s(E) \to L^2_{s-m}(F)$ に一意的に拡張される．

ii) 任意の開集合 $U \in X$ に対して

$$u|_U \in C^\infty(U) \;\Rightarrow\; Pu|_U \in C^\infty(U).$$

iv) $Q \circ P \in \Psi DO_{m+l}(E, G)$.

v) $\phi : X \to X$ を微分同相写像とする．このとき，$\phi^*[(\phi_* P)u] = P(\phi^* u)$ は線形写像

$$\phi_* : \Psi DO_m(\phi^* E, \phi^* F) \to \Psi DO_m(E, F)$$

を与える．

$\square$

【定義 6.61】 $\pi : T^*(X) \to X$ により X 上のベクトル束 E, F から誘導される $T^*(X)$ 上の束を π^*E, π^*F，p を $T^*(X)$ 上の束 $\mathrm{Hom}(\pi^*E, \pi^*F)$ のなめらかな断面とする．p が適当な局所座標系で Sym^m の元となるとき，p を階数 m のシンボルといい，その全体の作るベクトル空間を $\mathrm{Sym}^m(E, F)$ と表す． $\square$

【定理 6.62】 各 $P \in \Psi DO_m(E, F)$ は主シンボル $\sigma(P) \in \mathrm{Sym}^m(E, F)/\mathrm{Sym}^{m-1}(E, F)$ を定める． $\square$

【定義 6.63 (楕円型擬微分作用素)】 $P \in \Psi DO_m(E, F)$ に対して，$\sigma(P)$ の適当な代表元が，$T^*(X)$ のコンパクト集合の外で可逆，かつ X の適当な Riemann 計量と適当な定数 C に対して $|p(\xi)^{-1}| \leqslant C(1 + |\xi|)^{-m}$ を満たすとき，P は楕円型という． $\square$

【定義 6.64 (Fredholm 作用素)】 ヒルベルト空間の間の有界線形作用素 $T : H_1 \to H_2$ は，$\mathrm{ran}\ T$ が閉集合で $\mathrm{Ker}\ T$ および $\mathrm{Coker}\ T$ が有限次元のとき，**Fredholm 作用素**といい，その指数を

$$T) = \dim(\mathrm{Ker}\ T) - \dim(\mathrm{Coker}\ T)$$

で定義する． $\square$

【定理 6.65】 $P \in \Psi DO_m(E, F)$ をコンパクト多様体 X 上の楕円型擬微分作用素とする．このとき，次が成り立つ：

i) $Q \in \Psi DO_{-m}(E, F)$ が同値を除いて一意的に存在し，

$$PQ = \mathrm{Id} - S', \quad QP = \mathrm{Id} - S$$

が成り立つ．ここで S, S' は無限平滑作用素である．

ii) $u \in L^2_s(E)$ とする．このとき，X の任意の開集合 U に対して

$$Pu|_U \in C^\infty(U) \ \Rightarrow \ u|_U \in C^\infty(U).$$

iii) 任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して，P は Fredholm 作用素 $P : L^2_s(E) \to L^2_{s-m}(E)$ に拡張される．さらに，その指数は s に依らない．

□

【定理 6.66】 $P : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ をコンパクト Riemann 多様体 X 上の自己共役な m 階擬微分作用素とする．

i) $\Gamma(E)$ は $L^2(E)$ に関する直交分解

$$\Gamma(E) = \mathrm{Ker}\, P \oplus \mathrm{Im}\, P$$

を持つ．

ii) $H : \Gamma(E) \to \mathrm{Ker}\, P$ を直交射影とすると，次の性質をもつ Green 作用素と呼ばれる擬微分作用素 $Q \in \Psi DO_{-m}(E)$ が存在する：

$$PG = GP = \mathrm{Id} - H.$$

iii) $m > 0$ のとき，P の固有値 λ は離散的ですべて実数である．また，各固有空間 E_λ は有限次元で，なめらかな断面からなる．

$$d(\Lambda) := \dim \left(\bigoplus_{|\lambda| \leqslant \Lambda} E_\lambda \right)$$

とおくと，

$$d(\Lambda) \leqslant c\Lambda^{n(n+2m+2)/2m}$$

を満たす定数 c が存在する．さらに，$\{E_\lambda\}$ は $L^2(E)$ の完全系となる．

□

6.2.8 Atiyah-Singer 指数定理

6.2.8.1 整数型指数定理

【定理 6.67】 $\mathscr{F} = \mathscr{F}(H_1, H_2)$ をノルム位相をもつ Fredholm 作用素の空間とする．このとき，写像 $\mathscr{F} \to \mathbb{Z}$ は $\mathscr{F}$ の各連結成分で一定となり，一対一対応

$$\pi_0(\mathscr{F}) \to \mathbb{Z}$$

を与える． □

【**定理 6.68**】　コンパクト多様体上のベクトル束に対する楕円型擬微分作用素 P の指数 $P)$ は，その主シンボル $\sigma(P)$ の正則ホモトピー類にのみ依存する． $\square$

【**定義 6.69** (位相的指数)】　コンパクト多様体 X 上の複素ベクトル束 E から F への楕円型擬微分作用素 $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ を考える．接束 TX の球体部分束 DX を適当にとると，主シンボル $\sigma(P)$ は $\partial DX = SX$ 上の各点で E から F への同型写像を与える．したがって，$\sigma(P)$ は $K_{\mathrm{cpt}}(TX)$ の元を定義する：

$$\boldsymbol{\sigma}(P) := [\pi^*E, \pi^*F; \sigma(P)] \in K_{\mathrm{cpt}}(TX) \cong K(DX, SX).$$

X の適当な埋め込み $f : X \to \mathbb{R}^N$ は，X の $\mathbb{R}^N$ での管状近傍 N への埋め込み $f : X \to N$ から誘導される Thom 同型 $K_{\mathrm{cpt}}(TX) \to K_{\mathrm{cpt}}(TN)$ と自然な準同型 $i_! : K_{\mathrm{cpt}}(TN) \to K_{\mathrm{cpt}}(T\mathbb{R}^N)$ の結合により，準同型

$$f_! : K_{\mathrm{cpt}}(TX) \to K_{\mathrm{cpt}}(T\mathbb{R}^N)$$

を定める．さらに，$T\mathbb{R}^N$ を原点 pt の複素ベクトル束と見なして得られる Thom 同型を

$$q_! : K_{\mathrm{cpt}}(K\mathbb{R}^n) \to K(pt) \cong ZR$$

とする．これらを用いて，P **の位相的指数** $\mathrm{top}-\mathrm{index}(P)$ を次のように定義する：

$$\mathrm{top}-\mathrm{index}(P) := q_! f_! \boldsymbol{\sigma}(P) \in \mathbb{Z}.$$

$\square$

【**定理 6.70** (整数型 Atiyah-Singer 指数定理)】　n 次元コンパクト多様体 X 上の楕円型作用素 P に対して，次が成り立つ：

i)
$$P) = \mathrm{top}-\mathrm{index}(P).$$

ii)
$$P = (-1)^n \{\mathrm{ch}(\boldsymbol{\sigma}(P)) \cdot \pi^* \hat{\boldsymbol{A}}(X)^2\}[TX].$$

iii) X が向きづけられているとき，

$$P = (-1)^{n(n+1)/2} \{\pi_! \mathrm{ch}(\boldsymbol{\sigma}(P)) \cdot \hat{\boldsymbol{A}}(X)^2\}[X].$$

□

【例 **6.71** (Euler 特性数)】　X をコンパクト Riemann 多様体，S をその Clifford 束とする：

$$S = C\ell(X) = C\ell^0(X) \oplus C\ell^1(X).$$

このとき，$C\ell(X)$ の Dirac 作用素は楕円型微分作用素

$$D^0 : \Gamma(C\ell^0(X)) \to \Gamma(C\ell^1(X))$$

を与え，

$$d + d^* : \Gamma(\Lambda^{\mathrm{even}}(X)) \to \Gamma(\Lambda^{\mathrm{odd}}(X))$$

と一致する．この作用素の指数は，$\boldsymbol{H}^*$ を調和微分形式の次数付き加群として，

$$D^0 = \dim \boldsymbol{H}^{\mathrm{even}} - \dim \boldsymbol{H}^{\mathrm{odd}} = \chi(X)$$

となる．□

【例 **6.72** (符号数作用素)】　X を $4k$ 次元のコンパクトで向きづけられた Riemann 多様体とし，その Clifford 束の（体積要素 $\omega_{\boldsymbol{C}} = (-1)^k\omega$ による）カイラル分解を

$$S = C\ell(X) = C\ell^+(X) \oplus C\ell^-(X)$$

とおく．このとき，Dirac 束 $C\ell(X)$ の Dirac 作用素は，擬微分作用素

$$D^+ : \Gamma(C\ell^+(X)) \to \Gamma(C\ell^-(X))$$

を誘導し，その指数は X の符号数（$H^{2k}(X; \mathbb{R})$ のカップ積から誘導される対称 2 次形式の符号数）と一致する：

$$D^+ = \dim(\boldsymbol{H}^{2k})^+ - \dim(\boldsymbol{H}^{2k})^- = \mathrm{sig}(X).$$

Atiyah-Singer の指数定理より，これはさらに L 種数と一致する：

$$L(X) = \mathrm{sig}(X).$$

一般に，E を $2m$ 次元の向きづけられたコンパクト多様体 X 上の勝手な複素ベクトル束とすると，楕円型作用素

$$D_E^+ : \Gamma(C\ell^+(X) \otimes E) \to \Gamma(C\ell^-(X) \otimes E)$$

に対して，

$$(D_E^+) = \{\mathrm{ch}_2(E) \cdot \boldsymbol{L}(X)\}[X]$$

が成り立つ．ここで，

$$\mathrm{ch}_2(E) := \sum_k 2^k \mathrm{ch}^k E.$$

$\square$

【例 **6.73** (Atiyah-Singer $\hat{A}$ 作用素)】　X を $2m$ 次元のコンパクト Riemann スピン多様体として，その複素スピノール束 $\$_{\boldsymbol{C}}$ とその上の Dirac 作用素 D を考える．複素体積要素による $\$_{\boldsymbol{C}}$ のカイラル分解 $\$_{\boldsymbol{C}} = \$_{\boldsymbol{C}}^+ \oplus \$_{\boldsymbol{C}}^-$ は楕円型微分作用素

$$\not{D}^+ : \Gamma(\$_{\boldsymbol{C}}^+) \to \Gamma(\$_{\boldsymbol{C}}^-)$$

を与える．その指数は X の $\hat{A}$ 種数と一致する：

$$(\not{D}^+) = \hat{A}(X).$$

さらに，一般に，E を X 上の勝手な複素ベクトル束とするとき，楕円型作用素

$$\not{D}_E^+ : \Gamma(\$_{\boldsymbol{C}}^+(X) \otimes E) \to \Gamma(\$_{\boldsymbol{C}}^-(X) \otimes E)$$

に対して，

$$(\not{D}_E^+) = \{\mathrm{ch}(E) \cdot \hat{\boldsymbol{A}}(X)\}[X].$$

$\square$

6.2.8.2　楕円型作用素の族

参考文献

[1] D. Husemoller: *Fibre Bundles*, 3rd edition (Springer, 1993).

[2] H.B. Lawson, Jr. and M-L. Michelsohn: *Spin Geometry* (Princeton Univ. Press, 1989).

7 特性類

Last update: 2011.7.18

7.1 分類空間

7.1.1 実ベクトルバンドル

【**定義 7.1** (実 Grassmann 多様体)】

1) $\mathbb{R}^{n+k}$ の n 枠 (n 個の一次独立なベクトル列) 全体の集合を $V_{n,k} = V_n(\mathbb{R}^{n+k})$ とおく．$V_{n,k} \subset \mathbb{R}^{n(n+k)}$ と見なして，$V_{n,k}$ に $\mathbb{R}^{n(n+k)}$ からの誘導位相を与えた空間を *Stiefel* 多様体という．$V_{n,k}$ は C^∞ 級 $n(n+k)$ 次元開多様体である．$V_{n,k}$ と $V_{k,n}$ は C^∞ 同相である．

2) $\mathbb{R}^{n+k}$ の n 次元線形部分空間の集合を $G_{n,k} = G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ とおく．自然な射影 $\pi : V_{n,k} \to G_{n,k}$ が連続となる極大位相を $G_{n,k}$ に入れて得られる空間は，コンパクトな nk 次元多様体となる．この多様体を実 *Grassmann* 多様体という．$G_{n,k}$ と $G_{k,n}$ は C^∞ 同相である．

3) 空間
$$E(\gamma_k^n) = \left\{(P, v) \,\middle|\, P \in G_{n,k}, v \in P \subset \mathbb{R}^{n+k}\right\}$$
（位相は誘導位相）に対して，
$$\pi : E(\gamma_k^n) \ni (P, v) \mapsto P \in G_{n,k}$$
とおくと，$\gamma_k^n = (E(\gamma_k^n), G_{n,k}, \pi)$ は $G_{n,k}$ 上の n 次元実ベクトルバンドルとなる．これを $G_{n,k}$ を底空間とする n 次元標準ベクトルバンドルという．

4) 標準的な入射 $\mathbb{R}^{n+k} \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$ から誘導される入射 $G_{n,k} \subset G_{n,k+1}$ に関して，$(G_{n,k})_{k \geqslant 0}$ は帰納系をなす．この帰納的極限を $G_n = G_{n,\infty} = G_n(\mathbb{R}^\infty)$ と表し，無限次元実 *Grassmann* 多様体という．また，自然な入射 $\gamma_k^n \subset \gamma_{k+1}^n$ の帰納的極限を γ^n とおく．このとき，
$$E(\gamma^n) = \{(P, v) \mid P \in G_n, v \in P \subset \mathbb{R}^\infty\} \subset G_n \times \mathbb{R}^\infty$$
が成り立つ．

$\square$

【**定義 7.2** (有向実 Grassmann 多様体)】

1) $\mathbb{R}^{n+k}$ の向きづけられた n 次元線形部分空間の集合を $\tilde{G}_{n,k} = \tilde{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ とおく．自然な射影 $\pi : V_{n,k} \to \tilde{G}_{n,k}$ が連続となる極大位相を $\tilde{G}_{n,k}$ に入れて得られる空間は，コンパクトな nk 次元多様体となる．この多様体を有向実 *Grassmann* 多様体という．$\tilde{G}_{n,k}$ と $\tilde{G}_{k,n}$ は C^∞ 同相である．また，$\tilde{G}_{n,k}$ は $G_{n,k}$ の連結な 2 価の被覆空間である．

2) 空間
$$E(\tilde{\gamma}_k^n) = \left\{(P, v) \,\middle|\, P \in \tilde{G}_{n,k}, v \in P \subset \mathbb{R}^{n+k}\right\}$$
（位相は誘導位相）に対して，
$$\pi : E(\tilde{\gamma}_k^n) \ni (P, v) \mapsto P \in \tilde{G}_{n,k}$$
とおくと，$\tilde{\gamma}_k^n = (E(\tilde{\gamma}_k^n), \tilde{G}_{n,k}, \pi)$ は $\tilde{G}_{n,k}$ 上の n 次元実ベクトルバンドルとなる．これを $\tilde{G}_{n,k}$ を底空間とする n 次元標準ベクトルバンドルという．

3) $(\tilde{G}_{n,k})_{k\geqslant 0}$ は帰納系をなす．この帰納的極限を $\tilde{G}_n = \tilde{G}_{n,\infty} = \tilde{G}_n(\mathbb{R}^\infty)$ と表し，無限次元有向実 *Grassmann* 多様体という．また，自然な入射 $\tilde{\gamma}_k^n \subset \tilde{\gamma}_{k+1}^n$ の帰納的極限を $\tilde{\gamma}^n$ とおく．このとき，
$$E(\tilde{\gamma}^n) = \left\{(P, v) \,\middle|\, P \in \tilde{G}_n, v \in P \subset \mathbb{R}^\infty\right\} \subset \tilde{G}_n \times \mathbb{R}^\infty$$
が成り立つ．

$\square$

【**定理 7.3** (実ベクトルバンドルの分類空間)】

1) $\xi^n = (E, B, \pi)$ をパラコンパクト Hausdorff 空間 B 上の n 次元実ベクトルバンドルとする．このとき，連続写像 $f : B \to G_n$ が存在し，$\xi^n \cong f^*\gamma^n$ となる．さらに，この対応により，B 上の n 次元実ベクトルバンドルの同型類と B から G_n への連続写像のホモトピー類が

1 対 1 に対応する．したがって，G_n はパラコンパクト Hausdorff 空間上の n 次元実ベクトルバンドルに対する分類空間，γ^n は普遍バンドルとなる．

2) 全く同様に，$\tilde{G}_n$ はパラコンパクト Hausdorff 空間上の向き付けられた n 次元実ベクトルバンドルに対する分類空間，$\tilde{\gamma}^n$ はその普遍バンドルとなる．

□

7.1.2　複素ベクトルバンドル

【**定義 7.4** (複素 Grassmann 多様体)】

1) $\mathbb{C}^{n+k}$ の n 枠 (n 個の複素一次独立なベクトル列) 全体の集合を $V^{\mathbb{C}}_{n,k} = V_n(\mathbb{C}^{n+k})$ とおく．$V^{\mathbb{C}}_{n,k} \subset \mathbb{C}^{n(n+k)}$ と見なして，$V^{\mathbb{C}}_{n,k}$ に $\mathbb{C}^{n(n+k)}$ からの誘導位相を与えた空間を複素 *Stiefel* 多様体という．$V^{\mathbb{C}}_{n,k}$ は C^∞ 級 $2n(n+k)$ 次元開多様体である．$V^{\mathbb{C}}_{n,k}$ と $V^{\mathbb{C}}_{k,n}$ は C^∞ 同相である．

2) $\mathbb{C}^{n+k}$ の複素 n 次元線形部分空間の集合を $G^{\mathbb{C}}_{n,k} = G_n(\mathbb{C}^{n+k})$ とおく．自然な射影 $\pi : V^{\mathbb{C}}_{n,k} \to G^{\mathbb{C}}_{n,k}$ が連続となる極大位相を $G^{\mathbb{C}}_{n,k}$ に入れて得られる空間は，コンパクトな $2nk$ 次元多様体となる．この多様体を複素 *Grassmann* 多様体という．$G^{\mathbb{C}}_{n,k}$ と $G^{\mathbb{C}}_{k,n}$ は C^∞ 同相である．

3) 空間
$$E(\gamma^{n,\mathbb{C}}_k) = \left\{(P, v) \,\middle|\, P \in G^{\mathbb{C}}_{n,k}, v \in P \subset \mathbb{C}^{n+k}\right\}$$
（位相は誘導位相）に対して，
$$\pi : E(\gamma^{n,\mathbb{C}}_k) \ni (P, v) \mapsto P \in G^{\mathbb{C}}_{n,k}$$
とおくと，$\gamma^{n,\mathbb{C}}_k = (E(\gamma^{n,\mathbb{C}}_k), G^{\mathbb{C}}_{n,k}, \pi)$ は $G^{\mathbb{C}}_{n,k}$ 上の n 次元複素ベクトルバンドルとなる．これを $G^{\mathbb{C}}_{n,k}$ を底空間とする n 次元標準複素ベクトルバンドルという．

4) 標準的な入射 $\mathbb{C}^{n+k} \subset \mathbb{C}^{n+k+1}$ から誘導される入射 $G^{\mathbb{C}}_{n,k} \subset G^{\mathbb{C}}_{n,k+1}$ に関して，$(G^{\mathbb{C}}_{n,k})_{k \geqslant 0}$ は帰納系をなす．この帰納的極限を $G^{\mathbb{C}}_n = G^{\mathbb{C}}_{n,\infty} =$

$G_n(\mathbb{C}^\infty)$ と表し，無限次元複素 *Grassmann* 多様体という．また，自然な入射 $\gamma_k^{n,\mathbb{C}} \subset \gamma_{k+1}^{n,\mathbb{C}}$ の帰納的極限を $\gamma^{n,\mathbb{C}}$ とおく．このとき，

$$E(\gamma^{n,\mathbb{C}}) = \left\{(P,v) \,\middle|\, P \in G_n^{\mathbb{C}}, v \in P \subset \mathbb{C}^\infty\right\} \subset G_n^{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^\infty$$

が成り立つ．

□

【定理 7.5 (複素ベクトルバンドルの分類空間)】 $\omega^n = (E, B, \pi)$ をパラコンパクト Hausdorff 空間 B 上の n 次元複素ベクトルバンドルとする．このとき，連続写像 $f : B \to G_n^{\mathbb{C}}$ が存在し，$\omega^n \cong f^*\gamma^{n,\mathbb{C}}$ となる．さらに，この対応により，B 上の n 次元複素ベクトルバンドルの同型類と B から $G_n^{\mathbb{C}}$ への連続写像のホモトピー類が 1 対 1 に対応する．したがって，$G_n^{\mathbb{C}}$ はパラコンパクト Hausdorff 空間上の n 次元複素ベクトルバンドルに対する分類空間，$\gamma^{n,\mathbb{C}}$ は普遍バンドルとなる． □

7.1.3 分類空間の位相

【定理 7.6 (コホモロジー環)】

1) $c_1, \cdots, c_n$ を無限次元複素 Grassmann 多様体 $G_n(\mathbb{C}^\infty)$ の Chern 類とするとき，

$$H^*(BU(n)) = H^*(BGL(n,\mathbb{C})) = \mathbb{Z}[c_1, \cdots, c_n], \tag{25}$$
$$H^*(BSU(n)) = H^*(BSL(n,\mathbb{C})) = \mathbb{Z}[c_2, \cdots, c_n]. \tag{26}$$

2) $q_1, \cdots, q_n$ をシンプレクティック Pontryagin 類とするとき，

$$H^*(BSp(n)) = \mathbb{Z}[q_1, \cdots, q_n]. \tag{27}$$

3) $w_1, \cdots, w_n$ を Stiefel-Whitney 類，$p_1, \cdots, p_n$ を Pontryagin 類，e を Euler 類，K_2 を標数 2 の体，K は標数が 2 でない体とするとき，

$$H^*(BO(n); K_2) = H^*(BGL(n,\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2) = K_2[w_1, \cdots, w_n], \tag{28}$$
$$H^*(BSO(n); K_2) = H^*(BSL(n,\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2) = K_2[w_2, \cdots, w_n], \tag{29}$$
$$H^*(BSO(2m+1); K) = K[p_1, \cdots, p_m], \tag{30}$$
$$H^*(BSO(2m); K) = K[p_1, \cdots, p_{m-1}, e]. \tag{31}$$

7.2　ベクトルバンドル

7.2.1　Poincaré-Hopf の定理

【定義 7.7 (ベクトル場の指数)**】**　n 次元 C^∞ 多様体 M 上の C^∞ ベクトル場を X とする．

1) X が開集合 U において点 p に孤立した零点をもつとする．U におけるベクトル場の基底 $e_a = (e_1, \cdots, e_n)$ を一つ取ると，e_a は M の接バンドル $T(M)$ の U における自明化 $(\pi, \pi') : T(U) \to U \times T_p(M)$ を与える．このとき，p を含む球体 D^n と同相な領域 $V(\subset U)$ を取ると，X により定まる V 上の $T(M)$ の切断は，π' との合成により，写像 $g : (V, V-p) \to (T_p(M), T_p(M)-p)$ を定める（$p \in M$ を $T_p(M)$ のゼロベクトルと同一視する）．g から誘導される写像
$$g_* : H_n(V, V-p) \to H_n(T_p(M), T_p(M)-p)$$
は，e_a や V の取り方に依存しない．また，局所座標系を用いると，$H_n(V, V-p) \cong H_{n-1}(\partial V) \cong \mathbb{Z}$ の生成元 u_n（すなわち U の向き）は，$H_n(T_p(M), T_p(M)-p) \cong \mathbb{Z}$ の生成元 u'_n（すなわち $T_p(M)$ の向き）を定める．そこで，X の点 p における指数 $\mathrm{Ind}(X, p)$ を
$$g_* u_n = \mathrm{Ind}(X, p)\, u'_n$$
により定義する．

2) X が M 上で有限個の孤立したゼロ点 $p_1, \cdots, p_k$ を持つとき，X の指数 $\mathrm{Ind}(X)$ を
$$\mathrm{Ind}(X) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Ind}(X, p_j)$$
により定義する．

【定理 7.8 (Poincaé-Hopf)**】** M をコンパクトな n 次元 C^∞ 多様体とし，X を M 上の C^∞ ベクトル場でその零点は有限個であり，$\partial M \neq \emptyset$ のときには，i) X の零点は $M - \partial M$ に含まれる，ii) X は ∂M では外向きであるという 2 条件を満たすとする．このとき，

$$\mathrm{Ind}(X) = \chi(M).$$

□

Proof. 概要 [田村一郎著「微分位相幾何学」(岩波書店，1992)]

1) M が $\mathbb{R}^n$ の n 次元部分多様体 U であるとする．∂U の外向き法ベクトル W により Gauss 写像

$$g : \partial U \ni p \to W_p/\|W_p\| \in S^{n-1}$$

を定義するとき，

$$g_* : H_{n-1}(\partial U) \to H_{n-1}(S^{n-1})$$

に対して

$$g_*[\partial U] = \mathrm{Ind}(X)[S^{n-1}]$$

が成り立つ．すなわち，$\mathrm{Ind}(X)$ は U（の形）のみで決まる．

2) 一般の M に対して，M を $\mathbb{R}^m$ に埋め込む．このとき，M の $\mathbb{R}^m$ における法近傍 $N(M)$ において，次の条件を満たすベクトル場 Y が存在する．

   i) Y は M 上で X と一致し，$N(M) - M$ に零点を持たない．

   ii) Y は $\partial N(M)$ において外向きの接ベクトルである．

   iii) X の各零点 p_j において，$\mathrm{Ind}(X, p_j) = \mathrm{Ind}(Y, p_j)$ が成り立つ．

3) ３つ組 $(M; \emptyset, \partial M)$ に適合した Morse 関数 f から（適当な Riemann 計量を用いて）定義されるベクトル場 ∇f に対して，

$$\mathrm{Ind}(\nabla f) = \chi(M)$$

が成り立つ．

4) 1) より，2) における $\mathrm{Ind}(X) = \mathrm{Ind}(Y)$ は法近傍 $N(M)$ の形態にのみ依存し，X によらない．したがって，3) より $\mathrm{Ind}(X) = \chi(X)$ となる．

Q.E.D.

7.2.2 Euler 類と Thom 同型

【定義 7.9】 $\xi = (E, B, \pi)$ を n 次元ベクトルバンドルとする．B を ξ のゼロ切断と同一視して，$E - B$ を ξ の部分バンドルと見なし $\xi_0 = (E_0, B, \pi)$ と表す． □

【定理 7.10 (Thom 類と Thom 同型)**】** $\xi = (E, B, \pi)$ を向きが与えられた n 次元ベクトルバンドルとし，

$$j_b : F = \mathbb{R}^n \to F_b = \pi^{-1}(b) \subset E$$

を F の標準的向きを F_b の向きに写す同型写像，$U \in H^n(F, F_0; \mathbb{Z})$ を F の標準の向きを表す $H_n(F, F_0; \mathbb{Z})$ の生成元に対する双対コホモロジー類とする．このとき，(E, E_0) の整係数コホモロジー群 $H^*(E, E_0; \mathbb{Z})$ およびカップ積 $\smile: H^*(E; \mathbb{Z}) \otimes H^*(E, E_0; \mathbb{Z}) \to H^*(E, E_0; \mathbb{Z})$ に対して，次の命題が成り立つ：

i) $H^i(E, E_0; \mathbb{Z}) = 0 \ (i < n)$.

ii) $H^n(E, E_0; \mathbb{Z})$ の元 $U(\xi)$ で，任意の $b \in B$ に対して，

$$j_b^*(U(\xi)) = U$$

を満たすものが一意的に存在する．$U(\xi)$ を ξ の *Thom* 類ないし基本コホモロジー類という．

iii) 写像

$$\phi : H^i(B; \mathbb{Z}) \ni \alpha \to \phi(\alpha) = \pi^*(\alpha) \smile U(\xi) \in H^{i+n}(E, E_0; \mathbb{Z})$$

は同型である．この同型写像を *Thom* 同型という．

iv) Thom 類はバンドル写像に対して自然性をもつ．すなわち，2 つの向きの与えられた n 次元ベクトルバンドル $\xi = (E, B, \pi), \xi' = (E', B', \pi')$ の間の向きを保つバンドル写像 $\tilde{f} : \xi \to \xi'$ に対して，$f : B \to B'$ を対応する底空間の写像とするとき，

$$U(\xi) = U(f^{-1}\xi') = \tilde{f}^*(U(\xi'))$$

が成り立つ．

$\square$

【**定義 7.11** (Euler 類)】 $\xi = (E, B, \pi)$ を向き付けられた n 次元ベクトルバンドルとする．ξ の Thom 類 $U(\xi)$ と $j : (E, \emptyset) \subset (E, E_0)$ を用いて

$$e(\xi) = (\pi^*)^{-1} \circ j^*(U(\xi)) \in H^n(B; \mathbb{Z})$$

により定義されるコホモロジー類を ξ の *Euler* 類という． $\square$

【**定理 7.12** (Gysin 完全系列)】 $\xi = (E, B, \pi)$ を向き付けられた n 次元ベクトルバンドルとする．このとき，空間対 (E, E_0) に対するコホモロジー完全系列

$$\cdots \to H^{q-1}(E_0) \xrightarrow{\delta^*} H^q(E, E_0) \xrightarrow{j^*} H^q(E) \xrightarrow{i^*} H^q(E_0) \to \cdots$$

および Thom 同型より次の *(Thom-)Gysin* の完全系列が成り立つ：

$$\cdots \to H^{q-1}(E_0; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\phi^{-1}\delta^*} H^{q-n}(B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\smile e(\xi)} H^q(B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{(\pi|_{E_0})^*} H^q(E_0; \mathbb{Z}) \to \cdots.$$

$\square$

【**定理 7.13** (Euler 類の性質)】 $\xi = (E, B, \pi), \xi' = (E', B', \pi')$ を向き付けられた n 次元ベクトルバンドルとする．このとき，次の命題が成り立つ．

i) Euler 類はバンドル写像に対して自然性をもつ．すなわち，$f : B' \to B$ を任意の連続写像，$f^{-1}\xi$ を B' 上の誘導バンドルとするとき，

$$e(f^{-1}\xi) = f^*(e(\xi)).$$

ii) $e(\xi) = \phi^{-1}(U(\xi) \smile U(\xi))$.

iii) ξ の向きを逆にしたベクトルバンドルを ξ^- とするとき，

$$e(\xi^-) = -e(\xi).$$

iv) n が奇数の時，

$$2e(\xi) = 0.$$

v) ξ が至る所ゼロでない切断をもてば，$e(\xi) = 0$.

vi) ξ と ξ' の積バンドル $\xi \times \xi' = (E \times E', B \times B', \pi \times \pi')$ の向きを $j_b \times j'_{b'} : F \times F' \to \pi^{-1}(b) \times \pi'^{-1}(b')$ が正の向きとなるように定める．このとき，

$$e(\xi \times \xi') = e(\xi) \times e(\xi'),$$
$$e(\xi \oplus \xi') = e(\xi) \smile e(\xi').$$

□

【定理 7.14 (多様体の Euler 類)**】** M^n を向きの与えられた n 次元 C^∞ 多様体とする．このとき，M^n の接バンドルの Euler 類を M^n の Euler 類という：

$$e(M^n) = e(\tau(M^n)).$$

特に，M^n が閉多様体のとき，$\chi(M^n)$ を M^n の Euler 数，$[M^n]$ を M^n の基本ホモロジー類とするとき，

$$\chi(M^n) = \langle e(M^n), [M^n] \rangle$$

が成り立つ． □

【定理 7.15 (法バンドルの Euler 類)**】** 向き付け可能な n 次元 C^∞ 多様体 M^n が $n+k$ 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^{n+k}$ の閉集合として埋め込まれているとき，M^n の向きの与えられた法バンドル ν^k に対して $e(\nu^k) = 0$ が成り立つ． □

【定理 7.16 ($\mathbb{C}P^n$ の整係数コホモロジー環)**】**

i) $\gamma^{1,\mathbb{C}} = (E(\gamma^{1,\mathbb{C}}), \mathbb{C}P^\infty, \pi)$ の Euler 類を $\alpha \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ とするとき，

$$H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\alpha].$$

ii) $\gamma_k^{1,\mathbb{C}} \subset \gamma^{1,\mathbb{C}}$ に対応する包含写像 $\iota : \mathbb{C}P^k \subset \mathbb{C}P^\infty$ に対して，

$$H^*(\mathbb{C}P^k; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\iota^*(\alpha)]/(\iota^*(\alpha)^{k+1} = 0).$$

□

7.2.3　$\mathbb{Z}_2$-Euler 類と Thom 同型

【**定理 7.17** (Thom 類と Thom 同型)】　$\xi = (E, B, \pi)$ を n 次元ベクトルバンドルとし，

$$j'_b : F = \mathbb{R}^n \to F_b = \pi^{-1}(b) \subset E$$

を同型写像，U' を $H^n(F, F_0; \mathbb{Z}_2)$ の生成元とする．このとき，(E, E_0) の $\mathbb{Z}_2$ 係数コホモロジー群 $H^*(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ およびカップ積 $\smile$: $H^*(E; \mathbb{Z}_2) \otimes H^*(E, E_0; \mathbb{Z}_2) \to H^*(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ に対して，次の命題が成り立つ：

i) $H^i(E, E_0; \mathbb{Z}_2) = 0 \ (i < n)$.

ii) $H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ の元 $U'(\xi)$ で，任意の $b \in B$ に対して，

$$j_b^*(U'(\xi)) = U'$$

を満たすものが一意的に存在する．$U'(\xi)$ を ξ の $\mathbb{Z}_2$-*Thom* 類ないし $\mathbb{Z}_2$ 基本コホモロジー類という．

iii) 写像

$$\phi : H^i(B; \mathbb{Z}_2) \ni \alpha \to \phi(\alpha) = \pi^*(\alpha) \smile U'(\xi) \in H^{i+n}(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$$

は同型である．この同型写像を $\mathbb{Z}_2$-*Thom* 同型という．

iv) $\mathbb{Z}_2$-Thom 類はバンドル写像に対して自然性をもつ．すなわち，2 つ n 次元ベクトルバンドル $\xi = (E, B, \pi), \xi' = (E', B', \pi')$ の間のバンドル写像 $\tilde{f} : \xi \to \xi'$ に対して，$f : B \to B'$ を対応する底空間の写像とするとき，

$$U'(\xi) = U'(f^{-1}\xi') = \tilde{f}^*(U'(\xi'))$$

が成り立つ．

□

【**定義 7.18** ($\mathbb{Z}_2$-Euler 類)】　$\xi = (E, B, \pi)$ を n 次元ベクトルバンドルとする．ξ の $\mathbb{Z}_2$-Thom 類 $U'(\xi)$ と $j : (E, \emptyset) \subset (E, E_0)$ を用いて

$$e'(\xi) = (\pi^*)^{-1} \circ j^*(U'(\xi)) \in H^n(B; \mathbb{Z}_2)$$

により定義されるコホモロジー類を ξ の $\mathbb{Z}_2$-*Euler* 類という．□

【**定理 7.19** (Gysin 完全系列)】　$\xi = (E, B, \pi)$ を n 次元ベクトルバンドルとする．このとき，空間対 (E, E_0) に対するコホモロジー完全系列

$$\cdots \to H^{q-1}(E_0) \xrightarrow{\delta^*} H^q(E, E_0) \xrightarrow{j^*} H^q(E) \xrightarrow{i^*} H^q(E_0) \to \cdots$$

および Thom 同型より次の *(Thom-)Gysin* の完全系列が成り立つ：

$$\cdots \to H^{q-1}(E_0; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\phi^{-1}\delta^*} H^{q-n}(B; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\smile e'(\xi)} H^q(B; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{(\pi|_{E_0})^*} H^q(E_0; \mathbb{Z}_2) \to \cdots .$$

□

【**定理 7.20** ($\mathbb{Z}_2$-Euler 類の性質)】　$\xi = (E, B, \pi), \xi' = (E', B', \pi')$ を n 次元ベクトルバンドルとする．このとき，次の命題が成り立つ．

i) $\mathbb{Z}_2$-Euler 類はバンドル写像に対して自然性をもつ．すなわち，$f : B' \to B$ を任意の連続写像，$f^{-1}\xi$ を B' 上の誘導バンドルとするとき，
$$e'(f^{-1}\xi) = f^*(e'(\xi)).$$

ii) $e'(\xi) = \phi^{-1}(U'(\xi) \smile U'(\xi))$.

iii) ξ が至る所ゼロでない切断をもてば，$e'(\xi) = 0$.

iv)
$$e'(\xi \times \xi') = e'(\xi) \times e'(\xi'),$$
$$e'(\xi \oplus \xi') = e'(\xi) \smile e'(\xi').$$

□

【**定理 7.21** (多様体の $\mathbb{Z}_2$-Euler 類)】　M^n を n 次元 C^∞ 多様体とする．このとき，M^n の接バンドルの $\mathbb{Z}_2$-Euler 類を M^n の $\mathbb{Z}_2$-Euler 類という：

$$e'(M^n) = e'(\tau(M^n)).$$

特に，M^n が閉多様体のとき，$\chi(M^n)$ を M^n の Euler 数，$[M^n]'$ を M^n の $\mathbb{Z}_2$ 基本ホモロジー類とするとき，

$$\chi(M^n) \equiv \langle e'(M^n), [M^n]' \rangle \bmod 2$$

が成り立つ．□

【**定理 7.22** ($\mathbb{R}P^n$ の $\mathbb{Z}_2$ 係数コホモロジー環)】

i) $\gamma^1 = (E(\gamma^1), \mathbb{R}P^\infty, \pi)$ の $\mathbb{Z}_2$-Euler 類を $\hat{\alpha} \in H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2)$ とするとき，

$$H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\hat{\alpha}].$$

ii) $\gamma_k^1 \subset \gamma^1$ に対応する包含写像 $\iota : \mathbb{R}P^k \subset \mathbb{R}P^\infty$ に対して，

$$H^*(\mathbb{R}P^k; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\iota^*(\hat{\alpha})]/(\iota^*(\hat{\alpha})^{k+1} = 0).$$

□

【**定理 7.23** (法バンドルの $\mathbb{Z}_2$-Euler 類)】 n 次元 C^∞ 多様体 M^n が $n+k$ 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^{n+k}$ の閉集合として埋め込まれているとき，M^n の法バンドル ν^k に対して $e'(\nu^k) = 0$ が成り立つ． □

7.2.4 Stiefel-Whitney 類

【**定義 7.24** (Stiefel-Whitney 類の公理)】 次の 5 つの公理を満たす，パラコンパクト Hausdorff 空間を底空間とするベクトルバンドルに対する特性類を *Stiefel-Whitney* 類という．

(**SW I**) 各ベクトルバンドル $\xi = (E(\xi), B(\xi), \pi)$ に対して，コホモロジー類の列

$$w_i(\xi) \in H^i(B(\xi); \mathbb{Z}_2) \ (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

が対応する．ただし，$w_0(\xi) = 1 \in H^0(B(\xi); \mathbb{Z}_2)$ で，ξ が n 次元ベクトルバンドルの時，$w_i(\xi) = 0 (i > n)$．$w_i(\xi)$ を ξ の i 次 Stiefel-Whitney 類，

$$w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + w_2(\xi) + \cdots \in H^*(B(\xi); \mathbb{Z}_2)$$

を全 Stiefel-Whitney 類という．

(**SW II**) (自然性) $\tilde{f} : \xi \to \eta$ をバンドル写像，$f : B(\xi) \to B(\eta)$ を $\tilde{f}$ が定める底空間の間の写像とするとき，

$$w(\xi) = f^*(w(\eta)).$$

(**SW III**) (Whitney 積) ξ と ξ' が同じ底空間上のベクトルバンドルの時,

$$w(\xi \oplus \xi') = w(\xi) \smile w(\xi').$$

(**SW IV**) $G_{1,1} = \mathbb{R}P^1$ を底空間とする 1 次元標準ベクトルバンドル γ_1^1 に対して，$\hat{\alpha}$ を $H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ の生成元とするとき,

$$w_1(\gamma_1^1) = \hat{\alpha} \in H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2).$$

(**SW V**) ξ が n 次元ベクトルバンドルであるとき，$w_n(\xi)$ は ξ の $\mathbb{Z}_2$-Euler 類と一致する：

$$w_n(\xi) = e'(\xi).$$

□

【**定理 7.25** (Stiefel-Whiney 類の存在と一意性)】 公理 (SW I)-(SW V) を満たす Stiefel-Whitney 類は存在し，一意的に決まる． □

【**定理 7.26** (ベクトルバンドルの分類空間のコホモロジー)】 n 次元ベクトルバンドルの分類空間 G_n の $\mathbb{Z}_2$ 係数コホモロジー環 $H^*(G_n; \mathbb{Z}_2)$ は，対応する普遍ベクトルバンドル γ^n の Stiefel-Whitney 類により生成される $\mathbb{Z}_2$ 上の多項式環である：

$$H^*(G_n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1(\gamma^n), \cdots, w_n(\gamma^n)]$$

□

【**定理 7.27** (ベクトルバンドルの向き付け可能性)】 ξ をパラコンパクト Hausdorff 空間上のベクトルバンドルとするとき，ξ が向き付け可能であるための必要十分条件は，$w_1(\xi) = 0$. □

【**定理 7.28** (ベクトルバンドルのフレーム断面)】 ξ をパラコンパクト Hausdorff 空間上の n 次元ベクトルバンドルとする．ξ が各点で一次独立な q 個の断面をもつならば,

$$w_n(\xi) = w_{n-1}(\xi) = \cdots = w_{n-q+1}(\xi) = 0$$

が成り立つ． □

【定理 7.29 (実射影空間の Stiefel-Whitney 類)**】** 　実射影空間 $\mathbb{R}P^k$ に対して，1 次元標準ベクトルバンドル γ_k^1 の $\mathbb{Z}_2$-Euler 類を $\hat{\alpha} \in H^1(\mathbb{R}P^k; \mathbb{Z}_2)$ とするとき

$$w(\mathbb{R}P^k) = (1 + \hat{\alpha})^{k+1}.$$

□

7.2.5 Chern 類

【定義 7.30 (Chern 類の公理)**】** 　次の 5 つの公理を満たす，パラコンパクト Hausdorff 空間を底空間とする複素ベクトルバンドルに対する特性類を *Chern* 類という．

(**C I**) 各ベクトルバンドル $\omega = (E(\omega), B(\omega), \pi)$ に対して，コホモロジー類の列

$$c_i(\omega) \in H^{2i}(B(\omega); \mathbb{Z}) \ (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

が対応する．ただし，$c_0(\omega) = 1 \in H^0(B(\omega); \mathbb{Z})$ で，ω が n 次元複素ベクトルバンドルの時，$c_i(\omega) = 0 (i > n)$．$c_i(\omega)$ を ω の i 次 Chern 類，

$$c(\omega) = 1 + c_1(\omega) + c_2(\omega) + \cdots \in H^*(B(\omega); \mathbb{Z})$$

を全 Chern 類という．

(**C II**) (自然性）$\tilde{f} : \omega \to \theta$ をバンドル写像，$f : B(\omega) \to B(\theta)$ を $\tilde{f}$ が定める底空間の間の写像とするとき，

$$c(\omega) = f^*(c(\theta)).$$

(**C III**) (Whitney 積）ω と ω' が同じ底空間上のベクトルバンドルの時，

$$c(\omega \oplus \omega') = c(\omega) \smile c(\omega').$$

(**C IV**) $G_{1,1}^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}P^1$ を底空間とする 1 次元標準複素ベクトルバンドル $\gamma_1^{1,\mathbb{C}}$ に対して，α を $H^2(\mathbb{C}P^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元とするとき，

$$c_1(\gamma_1^{1,\mathbb{C}}) = \alpha \in H^2(\mathbb{C}P^1; \mathbb{Z}).$$

(**C V**) ω が n 次元複素ベクトルバンドルであるとき，$c_n(\omega)$ は ω の基礎実ベクトルバンドル $\omega_{\mathbb{R}}$ の Euler 類と一致する：

$$c_n(\omega) = e(\omega_{\mathbb{R}}).$$

□

【定理 7.31 (Chern 類の存在と一意性)**】** 公理 (C I)-(C V) を満たす Chern 類は存在し，一意的に決まる． □

【定理 7.32 (複素ベクトルバンドルの分類空間のコホモロジー)**】** n 次元複素ベクトルバンドルの分類空間 $G_n^{\mathbb{C}}$ の整係数コホモロジー環 $H^*(G_n^{\mathbb{C}};\mathbb{Z})$ は，対応する普遍複素ベクトルバンドル $\gamma^{n,\mathbb{C}}$ の Chern 類により生成される $\mathbb{Z}$ 上の多項式環である：

$$H^*(G_n^{\mathbb{C}};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1(\gamma^{n,\mathbb{C}}), \cdots, c_n(\gamma^{n,\mathbb{C}})]$$

□

【定理 7.33 (複素ベクトルバンドルのフレーム断面)**】** ω をパラコンパクト Hausdorff 空間上の n 次元複素ベクトルバンドルとする．ω が各点で複素一次独立な q 個の断面をもつならば，

$$c_n(\omega) = c_{n-1}(\omega) = \cdots = c_{n-q+1}(\omega) = 0$$

が成り立つ． □

【定理 7.34 (複素射影空間の Chern 類)**】** 複素射影空間 $\mathbb{C}P^k$ に対して，1 次元標準複素ベクトルバンドル $\gamma_k^{1,\mathbb{C}}$ の Euler 類を $\alpha \in H^2(\mathbb{C}P^k;\mathbb{Z})$ とするとき

$$c(\mathbb{C}P^k) = (1+\alpha)^{k+1}.$$

□

7.2.6 Pontrjagin 類

【定義 7.35 (Pontrjagin 類)**】** $\xi = (E, B, \pi)$ をパラコンパクト Hausdorff 空間 B 上の n 次元実ベクトルバンドルとするとき，ξ の複素化 $\xi \otimes \mathbb{C}$ の Chern 類 $c_{2j}(\xi \otimes \mathbb{C})$ により ξ の *Pontrjagin* 類 $p_j(\xi)$ を次のように定義する：

$$p_j(\xi) = (-1)^j c_{2j}(\xi \otimes \mathbb{C}) \in H^{4j}(B;\mathbb{Z}) \ (j = 0, 1, 2, \cdots).$$

また，$H^*(B;\mathbb{Z})$ の元 $p(\xi)$ を

$$p(\xi) = 1 + p_1(\xi) + \cdots$$

で定義し，ξ の全 *Pontrjagin* 類という． □

【**定理 7.36** (Pontrjagin 類の性質)】 Pontrjagin 類は次の性質をもつ．

(**P I**) 各ベクトルバンドル $\xi = (E(\xi), B(\xi), \pi)$ に対して，ξ の Pontjagin 類と呼ばれるコホモロジー類の列

$$P_i(\xi) \in H^{4i}(B(\xi);\mathbb{Z}) \ (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

が対応する．ただし，$p_0(\xi) = 1 \in H^0(B(\xi);\mathbb{Z})$ で，ξ が n 次元ベクトルバンドルの時，$i > [n/2]$ に対して，$p_i(\xi) = 0$．

(**P II**) (自然性）$\tilde{f} : \xi \to \eta$ をバンドル写像，$f : B(\xi) \to B(\eta)$ を $\tilde{f}$ が定める底空間の間の写像とするとき，

$$p(\xi) = f^*(p(\eta)).$$

(**P III**) (Whitney 積）ξ と ξ' が同じ底空間上のベクトルバンドルの時，

$$p(\xi \oplus \xi') = p(\xi) \smile p(\xi') \quad \mathrm{mod} A.$$

が成り立つ．ただし，A は $H^*(B(\xi);\mathbb{Z})$ の位数 2 の元すべてからなる部分環である．

(**P IV**) ξ が向き付けられている $2n$ 次元ベクトルバンドルのとき，

$$p_n(\xi) = e(\xi)^2.$$

□

【**定理 7.37** (有向ベクトルバンドルの分類空間のコホモロジー)】 Λ を 1/2 を含む整域とする．

i) $2n+1$ 次元有向ベクトルバンドルの分類空間 $\tilde{G}_{2n+1}$ の Λ 係数コホモロジー環 $H^*(\tilde{G}_{2n+1};\Lambda)$ は，対応する普遍ベクトルバンドル $\tilde{\gamma}^{2n+1}$ の Pontrjagin 類により生成される Λ 上の多項式環である：

$$H^*(\tilde{G}_{2n+1};\Lambda) \cong \Lambda[p_1(\tilde{\gamma}^{2n+1}), \cdots, p_n(\tilde{\gamma}^{2n+1})]$$

i) $2n$ 次元有向ベクトルバンドルの分類空間 $\tilde{G}_{2n}$ の Λ 係数コホモロジー環 $H^*(\tilde{G}_{2n};\Lambda)$ は，対応する普遍ベクトルバンドル $\tilde{\gamma}^{2n}$ の Pontrjagin 類および Euler 類により生成される Λ 上の多項式環である：

$$H^*(\tilde{G}_{2n};\Lambda) \cong \Lambda[p_1(\tilde{\gamma}^{2n}),\cdots,p_{n-1}(\tilde{\gamma}^{2n}),e(\tilde{\gamma}^{2n})]$$

このとき，

$$p_n(\tilde{\gamma}^{2n}) = e(\tilde{\gamma}^{2n})^2$$

がなりたつ．

□

【定理 7.38 (Chern 類との関係)**】** n 次元複素ベクトルバンドル ω の Chern 類と $\omega_{\mathbb{R}}$ の Pontrjagin 類の間には次の関係式が成り立つ：

$$1 - p_1(\omega_{\mathbb{R}}) + p_2(\omega_{\mathbb{R}}) - \cdots + (-1)^n p_n(\omega_{\mathbb{R}}) = c(\omega)c(\bar{\omega}).$$

ここで，$\bar{\omega}$ は ω の複素共役バンドルで，

$$c(\bar{\omega}) = 1 - c_1(\omega) + c_2(\omega) - \cdots + (-1)^n c_n(\omega).$$

□

7.2.7 障害類

【定理 7.39 (Euler 類)**】** ξ が CW 複体 B を底空間とする向きの与えられた n 次元ベクトルバンドル，$\hat{\xi}$ をそれに同伴した球バンドルとする．n が偶数ならば，B の $n-1$ 切片上の $\hat{\xi}$ の切断を n 切片上に拡大するための障害類 $o(\hat{\xi}) \in H^n(B;\mathbb{Z})$ は ξ の Euler 類 $e(\xi)$ と一致する． □

【定理 7.40 (Stiefel-Whitney 類)**】** ξ が CW 複体 B を底空間とする向きの与えられた n 次元ベクトルバンドルとする．B の $q-1$ 切片上の正規直交 $n-q+1$ 枠を q 切片上に拡大するための $\mathbb{Z}_2$-障害類 $o_q(\xi) \in H^q(B;\mathbb{Z}_2)$ は ξ の Stiefel-Whitney 類 $w_q(\xi)$ と一致する． □

【定理 7.41 (Chern 類)**】** ω が CW 複体 B を底空間とする向きの与えられた複素 n 次元ベクトルバンドルとする．B の $2q-1$ 切片上の複素（正規直交）$n-q+1$ 枠を $2q$ 切片上に拡大するための障害類 $o_q(\omega) \in H^{2q}(B;\mathbb{Z})$ は ω の Chern 類 $c_q(\omega)$ と一致する． □

【**定理 7.42** (構造群の簡約)】

1) ξ を CW 複体 B 上のベクトルバンドルとするとき，ξ が向き付け可能であるための必要十分条件は，$w_1(\xi) = 0$ である．(この定理は，B が一般にパラコンパクト Haussdorf 空間なら成り立つ．) また，向き付け可能であるとき，ξ の向きは $H^0(X; \mathbb{Z}_2)$ の元と一対一に対応する．

2) ω を CW 複体上の複素 n 次元ベクトルバンドルとする．ω の構造群が $\mathrm{SU}(n)$ に簡約できるための必要十分条件は，$c_1(\omega) = 0$ である．

□

Proof.

1) 一般に，主バンドル $P(G, B)$ の部分主バンドル $P'(H, B)$ は，$P(G, B)$ に同伴したファイバーバンドル $(P/H, B, G/H)$ の大域的切断と一対一に対応する．また，ξ が向き付け可能であるための必要十分条件は，ξ に同伴した主バンドル $P(\mathrm{O}(n), B)$ の部分主バンドル $P'(\mathrm{SO}(n), B)$ が存在すること，すなわち P の構造群 $\mathrm{O}(n)$ を $\mathrm{SO}(n)$ に簡約できることである．ところが，$\mathrm{O}(n)/\mathrm{SO}(n) \cong \mathbb{Z}_2$ で，任意の $\mathbb{Z}_2$ バンドルについて，その B^1 の切断は常に B 全体に拡張可能であるので，$B^{(1)}$ 上で ξ が向き付け可能なら，B 全体で向き付け可能となる．したがって，問題は $B^{(1)}$ 上で考えればよい．まず，ξ が向き付け可能なら，$B^{(1)}$ 上で構造群の $\mathrm{SO}(n)$ への簡約が存在する．ところが，$\mathrm{SO}(n)$ は連結なので，このとき構造群は $B^{(1)}$ 上で自明群に簡約できる．すなわち，$B^{(1)}$ 上で ξ の n 枠が存在する．逆に，$B^{(1)}$ 上で ξ の n 枠が存在すれば，明らかに $B^{(1)}$ 上で ξ は向き付け可能である．したがって，向き付けの障害は，障害類 $o(\xi) \in H^1(B; \mathrm{O}(n)/\mathrm{SO}(n)) = H^1(B; \mathbb{Z}_2)$，すなわち $w_1(\xi)$ のみとなる．次に，向き付け可能なら，B 上の $\mathbb{Z}_2$ バンドルは自明となり，向きは B の各連結成分上で定数となる $\mathbb{Z}_2$ 値関数と一対一に対応する．この関数は明らかに，$H^0(B; \mathbb{Z}_2)$ の元と同一視できる．

2) $B^{(2)}$ 上で $\mathrm{SU}(n)$ への簡約が存在すれば，$\pi_j(\mathrm{U}(n)/\mathrm{SU}(n)) = \pi_j(S^1) = 0\,(j \geqslant 2)$ より，B 全体で簡約が存在するので，$B^{(2)}$ 上で考えればよ

い．さらに，$B^{(2)}$ 上で $\mathrm{SU}(n)$ への簡約が存在すれば，$\mathrm{SU}(n)$ は連結で $\pi_1(\mathrm{SU}(n)) = 0$ より ω は $B^{(2)}$ 上で自明となる．したがって，$\mathrm{SU}(n)$ への簡約可能条件は，$B^{(2)}$ 上で ω が自明となることで，$P(\mathrm{U}(n), B)$ が連結なのでその障害は，障害類 $o_1(\xi) = c_1(\xi) \in H^2(B;\mathbb{Z})$ のみとなる．

Q.E.D.

7.2.8　スピン構造

【定義 7.43 (スピン構造)**】**　ξ を CW 複体 X 上の n 次元ベクトルバンドルとするとき，ξ のスピン構造を次のいずれかで定義する．3 つの定義は同等である．

i) ϵ を X 上の自明な 1 次元ベクトルバンドル，$X^{(j)}$ を X の j 切片とするとき，ξ が向き付け可能で，適当な非負整数 k に対して $\xi \oplus \epsilon^k$ の $X^{(1)}$ 上の自明化 σ で $X^{(2)}$ 上に拡張可能なものが存在するとき，ξ はスピン構造をもつといい，σ のホモトピー類をスピン構造と呼ぶ．ただし，$n \geqslant 3$ のときには $k = 0$，$n = 2$ のときには $k = 1$，$n = 1$ のときには $k = 2$ ととれる．

ii) ξ の随伴 $\mathrm{O}(n)$ 主バンドルが $\mathrm{SO}(n)$ 主バンドル P に簡約可能で，P の 2 重被覆となっている $\mathrm{Spin}(n)$ 主バンドル $\tilde{P}$ が存在して次の図式が可換となるとき，ξ はスピン構造を持つといい，2 重被覆 $p : \tilde{P} \to P$ の同値類をスピン構造と呼ぶ．

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Spin}(n) & \xrightarrow{\lambda} & \mathrm{SO}(n) \\
\triangledown & & \triangledown \\
\tilde{E}(P) & \xrightarrow{p} & E(P) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
X & \xrightarrow{=} & X
\end{array}
\tag{32}
$$

iii) ξ の随伴 $\mathrm{O}(n)$ 主バンドルが $\mathrm{SO}(n)$ 主バンドル P に簡約可能で，$\sigma \in H^1(E(P);\mathbb{Z}_2)$ でその各ファイバーへの制限が $H^1(\mathrm{SO}(n);\mathbb{Z}_2)$ の生成元となっているものが存在するとき，ξ はスピン構造 σ を持つという．

□

【**定理 7.44** (スピン構造の存在)】　ξ を CW 複体 X 上の n 次元ベクトルバンドルとする．

1) ξ がスピン構造をもつための必要十分条件は，$w_1(\xi) = w_2(\xi) = 0$ である．

2) ξ がスピン構造をもつとき，次の完全系列がなりたち，各スピン構造 $\sigma \in H^1(E(P);\mathbb{Z}_2)$ は $i^*(\sigma) = 1$ で特徴付けられる．また，σ は $H^1(X;\mathbb{Z}_2)$ の元と一対一に対応する．

$$0 \to H^1(X;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^1(E(P);\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^1(\mathrm{SO}(n);\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \to 0 \tag{33}$$

□

8 Knots and Links

Last update: 2011.7.18

8.1 正則表示

8.1.1 数論的不変量

8.1.1.1 最小交点数

【**定義 8.1** (最小交点数)】

$$c[L] \overset{\text{def}}{=} \text{正則表示における交点数の最小値}$$

□

8.1.1.2 絡み数 (linking number)

【**定義 8.2** (交点符号)】 絡み目の正則表示 D の交点 c において，上橋を下橋が右から下をくぐるとき $\mathrm{sign}(c) = +1$, 左からくぐるとき $\mathrm{sign}(c) = -1$. □

【**定義 8.3** (絡み数)】 2 つの結び目 K_1, K_2 からなる絡み目に対して

$$\mathrm{Link}(K_1, K_2) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{c \in K_1 \cap K_2} \mathrm{sign}(c).$$

□

8.1.1.3 橋指数 (bridge index)

【**定義 8.4** (橋指数)】

$$\mathrm{br} \overset{\text{def}}{=} \text{height 関数の local maximum points の最小数}$$

□

性質

$$\mathrm{br}[L_1\sharp L_2] = \mathrm{br}[L_1] + \mathrm{br}[L_2] - 1.$$

2-橋結び目と 2-橋絡み目は Schubert 標準形 $S(\alpha,\beta)$ により完全に分類される：

$$S(\alpha,\beta): \quad \gcd(\alpha,\beta)=1, \quad -\alpha<\beta<\alpha, \quad \beta: \text{奇数}$$

【**定理 8.5**】

(i) 2-橋結び目 $S(\alpha,\beta)$ と $S(\alpha',\beta')$ が同型であるための必要十分条件：

$$\alpha=\alpha', \quad \beta^{\pm1}\equiv\beta'(\mathrm{mod}\alpha).$$

(ii) 2-橋絡み目が成分の向きを無視して同型となる条件は (i) と同じ．向きまで含めて同型となる必要十分条件は

$$\alpha=\alpha', \quad \beta^{\pm1}\equiv\beta'(\mathrm{mod}2\alpha).$$

□

8.1.1.4　組み紐指数 (braid index)

【**定義 8.6** (組み紐指数)】

$$\boldsymbol{b}[L] \overset{\text{def}}{=} \text{braid 表示をするために必要なひもの最小数.}$$

□

性質　結び目に対して

$$\boldsymbol{b}[K_1\sharp K_2] = \boldsymbol{b}[K_1] + \boldsymbol{b}[K_2] - 1.$$

8.1.1.5　結び目解消数 (unknoting number)

【**定義 8.7** (結び目解消数)】

$$u[L] \overset{\text{def}}{=} \text{結び目を自明にするために必要な最小の交差数}$$

□

8.2 Seifert 曲面

【定義 8.8 (*Seifert* 曲面)**】** S^3 内の絡み目 L に対して，閉じた成分を含まない向きづけられたコンパクトな曲面 F で，向きまで含めて $\partial F = L$ となるものを，L の **Seifert 曲面**という． □

【定義 8.9 (*Seifert* 行列)**】** L を S^3 内の絡み目，F を L の連結な Seifert 曲面とする．$f : F \times [-1, 1] \to S^3$ を，S^3 における F のカラー（正則近傍）で向きを保つものとし，$f^+(x) = f(x, 1), f^- = f(x, -1)$ とおく．このとき，F の 1 次元サイクル c_1, c_2 に対して，$c_1^+ = f^+(c_1)$ と $c_2^- = f^-(c_2)$ の S^3 における絡み数 $L(c_1^+, c_2^-)$ は c_1, c_2 のホモロジー類のみで決まり，双線形形式 $\phi : H_1(F) \times H_1(F) \to \mathbb{Z}$ を与える．これを，絡み目 L の連結 Seifert 曲面 F に付随した *Seifert* 形式という．また，$H_1(F)$ の基底に関する ϕ の行列表示を **Seifert 行列**という． □

【定義 8.10 (S-同値)**】** 2 つの正方整数行列 V, W に対して，

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & u \\ 0 & v & V \end{pmatrix}$$

のとき，W は V の行拡大，V は W の行縮小，${}^{T}W$ は ${}^{T}V$ の列拡大，${}^{T}V$ は ${}^{T}W$ の列縮小という．

S-同値とは，ユニモジュラー合同，行拡大，行縮小，列拡大，列縮小という関係から生成される同値関係のことである． □

【定理 8.11】 絡み目 L から得られる任意の 2 つの Seifert 行列は S-同値である． □

8.2.1 数論的不変量

8.2.1.1 種数 (genus)

【定義 8.12 (種数)**】**

$$g[L] \overset{\text{def}}{=} \text{組み紐 } L \text{ に対する } Seifert \text{ 曲面の種数の最小値}$$

□

8.2.1.2　符号数 (signature) と退化次数

絡み目 L に対して，その一つの Seifert 曲面を F, F の Seifert 行列を M_F とする．

【定義 8.13 (双曲平面形式)**】**　非特異な対称双一次偶形式 $b : H \times H \to \mathbb{Z}$ で $H \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ となるもの．

$\Leftrightarrow$ $b \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ □

【定義 8.14 (安定同型)**】**　2 つの対称双一次形式 (H, b), (H', b') に対して，それぞれにいくつかの双曲平面形式を直和により添加したものが同型となるとき，それらは安定同型であるという． □

【定理 8.15】　絡み目 L の任意の Seifert 曲面 F から得られる対称双一次偶形式 $M_F + {}^TM_F$ は互いに安定同型類である． □

【定義 8.16 (符号数)**】**

$$\sigma[L] \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{sign}(M_F + {}^TM_F).$$

□

性質

$$\sigma[L_1 \sharp L_2] = \sigma[L_1] + \sigma[L_2],$$
$$\sigma[\pm L^*] = -\sigma[L].$$

結び目 K に対して，

$$\sigma[K] \leqslant 2u[K]. \tag{34}$$

【定義 8.17 (退化数)**】**

$$n[L] \overset{\mathrm{def}}{=} (\dim - \mathrm{rank})(M_F + {}^TM_F).$$

□

性質

$$n[L] \leqslant r - 1 \quad (r = L \text{ の成分数}).$$

8.3　絡み目群

【**定義 8.18** (絡み目群)】

$$G[L] := \pi_1(E); \quad E := S^3 - N(L).$$

□

【**定義 8.19** (普遍アーベル被覆空間)】　Hurwitz 全射準同型

$$\gamma : G = \pi_1(E) \to H_1(E) \cong \mathbb{Z}^r \quad (r = L \text{ の成分数 })$$

の kernel Ker $\gamma = [G, G]$ に対応する E の被覆空間

$$p : E_\gamma \to E.$$

□

【**定義 8.20**】　$H_1(E)$ の基底 $t_1, \cdots, t_r$ に対して，$\mathbb{Z}H_1(E)$ は Laurent 多項式環 $\Lambda = \mathbb{Z}[t_1, \cdots, t_r]$ と同型となる．このとき，$H_1(E) \cong \pi_1(E)/\pi_1(E_\gamma)$ は E_γ の被覆変換群となるので，$H_1(E_\gamma)$ は Λ-加群と見なせる．

(1) L の絡み目加群 $=$ Λ-加群 $H_1(E_\gamma)$.

(2) L の *Alexander* 加群 $A[L] = \Lambda$-加群 $H_1(E_\gamma, p^{-1}(e))(e \in E)$.

□

8.4　不変多項式

絡み目 L の正則表示 D の交点 c において，交差を正交差に変えたものを $L_+(D, c)$，負交差に変えたものを $L_-(D, c)$，組み替えにより向きを保って交差を解消したものを $L_0(D, c)$ と表すことにする．

8.4.1　Alexander-Conway 多項式

8.4.1.1　Skein 関係による定義

【**定義 8.21** (*Alexander-Conway* 多項式)】　有向絡み目 L の正則表示から定義される一変数多項式 $\nabla_L(z) \in \mathbb{Z}[z]$ で次の性質を満たすもの．

(AC0) L と L' が全同位ならば，$\nabla_L = \nabla_{L'}$.

(AC1) $\nabla_{\bigcirc} = 1$.

(AC2) $\nabla_{L_+} - \nabla_{L_-} = z\nabla_{L_0}$.

□

性質 ：$L = L_1 \cup L_2,\ L_1 \cap L_2 = \emptyset$ ならば，$\nabla_L = 0$.

8.4.1.2 構成的定義

【定義 8.22 (*1* 変数 *Alexander* 多項式)**】** 絡み目 L の Seifert 曲面を F，F の Seifert 行列を M_F とすると，

$$\Delta_L(t) \overset{\text{def}}{=} \pm t^m \det(M_F - t\,{}^T\!M_F) = a_0 + \cdots a_k t^k \quad (a_0 > 0) \tag{35}$$

で定義される多項式は，F の取り方によりず，絡み目不変量となる．これを **1 変数 Alexander 多項式**という． □

Alexander-Conway 多項式との関係：

$$\Delta_L(t) \doteq \nabla_L(t^{1/2} - t^{-1/2}).$$

性質 M_n を絡み目 L にそう S^3 の n 重分岐被覆空間とすると，1 変数 Alexander 多項式 $\Delta_L(t)$ と 1 の原始 n 乗根 ω に対して，

$$H_1(M_n) \text{ のアーベル群としての位数} = |\prod_{k=1}^{n} \Delta_L(\omega^k)|.$$

ただし，$|\infty| = |0| = 0$ とする．

【定義 8.23】

(1) M を有限生成 Λ-加群とすると，適当な自然数 m, n に対して完全系列

$$\Lambda^m \to \Lambda^n \to M \to 0$$

が存在する．このとき，最初の写像 $\Lambda^m \to \Lambda^n$ を表す $\Lambda - (m, n)$ 行列 P を M の行列表現とよぶ.

(2) 非負整数 d に対して，P の $(n-d)$ 次の小行列全体で生成される Λ のイデアル $E_d(M)$ を M の d 番基本イデアルと呼ぶ．また，Λ の単元を法として定まる $E_d(M)$ の最大公約元 $\Delta_d(M)$ を M の d 番特性多項式と呼ぶ．

□

【定義 8.24 (多変数 *Alexander* 多項式)**】** 絡み目 L の絡み目加群を $H_1(E_\gamma)$，Alexander 加群を $A(L)$ とするとき，

d 番 *Alexander* 多項式: $\Delta_L^{(d)} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_{d+1}(A(L)) = \Delta_d(H_1(E_\gamma))$,

Alexander 多項式: $\Delta_L \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_L^{(0)}$

□

性質

トレース条件: r 成分絡み目 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_r$ に対して，

i) $\Delta_L(t_1, \cdots, t_r) \doteq \Delta_L(t_1^{-1}, \cdots, t_r^{-1})$.

ii) $L = L' \cup K_r$, $\lambda_i =$Link(K_i, K_r) とするとき，$r = 2$ に対して，

$$\Delta_L(t_1, \cdots, t_{r-1}, 1) \doteq \frac{t_1^{\lambda_1} - 1}{t_1 - 1}\Delta_{L'}(t_1),$$

$r > 2$ に対して，

$$\Delta_L(t_1, \cdots, t_{r-1}, 1) \doteq (t_1^{\lambda_1} \cdots t_{r-1}^{\lambda_{r-1}} - 1)\Delta_{L'}(t_1, \cdots, t_{r-1}).$$

以上で $\doteq$ は (mod 単元) で等しいことを意味する．

1 変数 Alexander 多項式との関係：$r > 1$ のとき，

$$\Delta_L(t) = (t-1)\Delta_L(t, \cdots, t).$$

8.4.2 Jones 多項式

8.4.2.1 Skein 関係による定義

【定義 8.25 (*Jones* 多項式)**】** 有向絡み目 L の正則表示に対して定義される 1 変数式 $V_L(t) \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ で次の性質を満たすもの：

(J0) L と L' が全同位ならば，$V_L = V_{L'}$.

(J1) $V_{\bigcirc}(t) = 1$.

(J2) $t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_0}(t)$.

□

性質 $\sharp(L)$ で絡み目 L の成分数を，M_n で L に沿って分岐する S^3 の n 重巡回分岐多様体を表すとき，

i) $V_L(1) = (-2)^{\sharp(L)-1}$,

ii) $V_L(-1) = \nabla_L(2i)$,

iii) $V_L(e^{2\pi i/3}) = 1$,

iv) $V_L(i) = \begin{cases} 2^{(\sharp L-1)/2}(-1)^{\mathrm{Arf}(L)} & (\mathrm{Arf}(L) \text{ が定義可能の時 }) \\ 0 & (\text{ それ以外の時 }) \end{cases}$,

v) $V_L(e^{\pi i/3}) = \pm i^{\sharp(L)-1}(\sqrt{3}i)^{\mathrm{rank} H_1(M_2(L);\mathbb{Z}_3)}$.

絡み目 L の 1 つの成分 K の向きを変えて得られる絡み目を L' と表し，$\lambda = \mathrm{Link}(K, L-K)$ とおくと，

$$V_{L'}(t) = t^{-3\lambda}V_L(t).$$

8.4.2.2 State モデル

絡み目 L の交叉 c において c の近傍は 4 つの領域に分割される．これらのうち，上橋に対してその反時計回りの位置にある 2 つの領域を A 領域，残りを B 領域と名付ける．c において，A 領域をつなぐことにより交叉を解消する操作を $R_+(c)$，B 領域をつないで交叉を解消する操作を $R_-(c)$ と表す．

【定義 8.26 (*Kauffman* ブラケット)】　無向絡み目 $|L|$ に対して，A, B, d を可換な変数として，

$$\langle K\rangle = \langle K\rangle(A, B, d) = \sum_{\sigma}\langle K|\sigma\rangle d^{\|\sigma\|}$$

を **Kauffman ブラケット**という．ただし，σ は L の交叉点の集合から $\{+, -\}$ への写像を，$\|\sigma\|$ は全交叉の解消された絡み目 $\prod_c R_{\sigma(c)}(c)L$ のループの数 -1 を，また，$\langle K|\sigma\rangle$ は

$$\prod_{c}(AR_{+}(c) + BR_{-}(c)) = \sum_{\sigma}\langle K|\sigma\rangle\prod_{c}R_{\sigma(c)}(c)$$

で定義される A, B の同次多項式である．　□

【定理 8.27】　有向絡み目 L に対して，$w(L)$ をその捻り数とするとき，

$$\mathscr{L}_L(A) := (-A^3)^{-w(L)}\langle K\rangle(A, A^{-1}, -A^2 - A^{-2})$$

により定義される一変数 Laurent 多項式は，全同位に対する不変量となる．この不変量と Jones 多項式との間には次の関係がある．

$$V_L(t) = \mathscr{L}_L(t^{-1/4}).$$

□

8.4.3　Homfly 多項式

8.4.3.1　Skein 関係による定義

【定義 8.28 (*Homfly* 多項式)】　有向絡み目 L の正則表示から定義される 2 変数多項式 $P_L(\alpha, z) \in \mathbb{Z}[\alpha, \alpha^{-1}, z, z^{-1}]$ で次の性質を満たすもの．

(H0)　L と L' が全同位ならば，$P_L = P_{L'}$.

(H1)　$P_{\bigcirc} = 1$.

(H2)　$\alpha P_{L_+} - \alpha^{-1}P_{L_-} = zP_{L_0}$.

□

特殊化

$$\nabla_L(z) = P_L(1, z),$$
$$V_L(t) = P_L(t, t^{1/2} - t^{-1/2}).$$

性質　$\sharp L$ と $M_n(L)$ は Jones 多項式の場合と同じもの表すとして，

$$\begin{aligned}
&\text{i)} && P_{-L}(a,z) = P_L(a,z),\\
&\text{ii)} && P_{L^*}(a,z) = P_L(-a^{-1},z),\\
&\text{iii)} && P_{L_1\sharp L_2}(a,z) = P_{L_1}(a,z)P_{L_2}(a,z),\\
&\text{iv)} && P_{L_1+L_2}(a,z) = \frac{a^{-1}-a}{z}P_{L_1}(a,z)P_{L_2}(a,z),\\
&\text{v)} && P_L(a, a^{-1}-a) = 1,\\
&\text{vi)} && P_L(-a,-z) = P_L(a,z),\\
&\text{vii)} && P_L(a,-z) = P_L(-a,z) = (-1)^{\sharp(L)-1}P_L(a,z),\\
&\text{viii)} && P_L(i,i) = (\sqrt{2}i)^{\mathrm{rank} H_1(M_3(L);\mathbb{Z}_2)}.
\end{aligned}$$

8.4.4　Q-多項式

8.4.4.1　Skein 関係による定義

向きのついていない絡み目 $|L|$ に対して，$|L|_\pm$ は $L_\pm$ と同様に定義し，組み替えにより交差を解消して得られる 2 通りの絡み目を $|L|_0$，$|L|_1$ と表す.

【定義 8.29 (Q-多項式)**】**　無向絡み目 $|L|$ に対する 1 変数多項式 $Q_{|L|}(x) \in \mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ で次の性質をもつもの：

(Q0) L と L' が全同位ならば，$Q_L = Q_{L'}$.

(QI) $Q_{\bigcirc}(x) = 1$.

(QII) $Q_{|L|_+}(x) + Q_{|L|_-}(x) = x\{Q_{|L|_0}(x) + Q_{|L|_1}(x)\}$.

□

性質

$$
\begin{array}{rl}
\text{i)} & Q_{|L|}(1) = 1, \\
\text{ii)} & Q_{|L|}(-1) = (-3)^{\mathrm{rank} H_1(M_2(L);\mathbb{Z}_3)}, \\
\text{iii)} & Q_{|L|}(2) = |\nabla_L(2i)|^2, \\
\text{iv)} & Q_{|L|}(-2) = (-2)^{\sharp(L)-1}.
\end{array}
$$

8.4.5 Kauffman 多項式

8.4.5.1 Skein 関係による定義

【**定義 8.30** (*Kauffman* 多項式)】 無向絡み目 $|L|$ に対する 2 変数多項式 $\Lambda_{|L|}(a,x) \in \mathbb{Z}[a,a^{-1},z,z^{-1}]$ で次の性質を満たすものを Λ_L とする：

(K0) Λ と Λ' が正則同位ならば，$\Lambda_L = \Lambda_{L'}$.

(K1) $\Lambda_{\bigcirc}(\alpha,z) = 1$.

(K2) $\Lambda_{|L|_+}(\alpha,z) + \Lambda_{|L|_-}(\alpha,z) = z\{\Lambda_{|L|_0}(\alpha,z) + \Lambda_{|L|_1}(\alpha,z)\}$.

(K3) $\Lambda_{T_+} = \alpha\Lambda_D,\ \Lambda_{T_-} = \alpha^{-1}\Lambda_D$.

ただし，$T_\pm$ は L 内の符号正（負）のねじりを，D はそのねじりを解消した絡み目を表す．有向絡み目 L に対して，$w(L)$ を L の捻り数とするとき，

$$F_L(\alpha,z) := \alpha^{-w(L)}\Lambda_L(\alpha,z)$$

で定義される 2 変数多項式 F_L は，有向絡み目に対する全同位不変量となり **Kauffman** 多項式という． □

特殊化

$$
\begin{aligned}
Q_L(z) &= F_L(1,z), \\
V_L(t) &= F_L(-t^{-3/4}, t^{1/4} + t^{-1/4}).
\end{aligned}
$$

8.5　抽象テンソルと Yang-Baxter 方程式

8.5.1　抽象テンソル表示

【定義 8.31 (無向抽象テンソル表示)**】**　ある一定の次数をもつ各テンソルに対して次のような規則でダイアグラムブロックを対応させる：

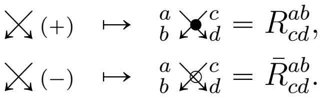
$$\delta^i_j \quad\mapsto\quad \begin{array}{c} i \\ | \\ j \end{array}$$

$$T^{i\cdots j}_{k\cdots l} \quad\mapsto\quad \begin{array}{c} i\cdots j \\ |\cdots| \\ \boxed{\mathrm{T}} \\ |\cdots| \\ k\cdots l \end{array}$$

この規則により，テンソルの積の各要素にダイアグラムブロックを対応させ，和を取る（縮約する）添え字の対を曲線で結ぶことにより，縮約を含むテンソル積とダイアグラムが対応する．このダイアグラムを**無向抽象テンソル表示**という．この表示では，上添え字と下添え字を区別するために，テンソルブロックの向きは上（下）添え字に対応する線が常に上（下）向きに出るように固定する．　□

【定義 8.32 (有向抽象テンソル表示)**】**　テンソル積に無向テンソル表示と同様に抽象テンソル図式を対応させる．この図式の各部ロックを結ぶ曲線に下添え字から上添え字に向かうように向きを付けたものを**有向抽象テンソル表示**という．この表示では，テンソルブロックの向きや各添え字に対応する線の出る向きは任意でよいが，線の順序は固定する．　□

【定義 8.33】　有向絡み目 L の各交叉に対して，それが正交叉の時 (+)，負交叉の時 (−) とあらわす．この記法のもとで，L の各交叉に次のような抽象テンソルブロックを対応させることにより，有向絡み目に対する抽象テンソル表示が得られる：



□

【定理 8.34】　有向絡み目 L に対して，その抽象テンソル表示に対応する値を $T(L)$ と表すと，$T(L)$ が正則同位の不変量となるための必要十分条件は，R 行列が次の 3 つの条件を満たすことである：

i) (channel unitarity) $\bar{R}^{ab}_{ij}R^{ij}_{cd} = \delta^a_c\delta^b_d$.

ii) (cross-channel unitarity) $R^{ia}_{jb}\bar{R}^{jd}_{ic} = \delta^a_c\delta^d_b$.

iii) (*Yang-Baxter* 方程式)

$$R^{ab}_{ij}R^{jc}_{kf}R^{ik}_{de} = R^{bc}_{ij}R^{ai}_{dk}R^{kj}_{ef},$$
$$\bar{R}^{ab}_{ij}\bar{R}^{jc}_{kf}\bar{R}^{ik}_{de} = \bar{R}^{bc}_{ij}\bar{R}^{ai}_{dk}\bar{R}^{kj}_{ef}.$$

□

【例 8.35】 R 行列

$$R^{ab}_{cd} = A\delta^a_c\delta^b_d + A^{-1}\delta^{ab}\delta_{cd},$$
$$\bar{R}^{ab}_{cd} = A^{-1}\delta^a_c\delta^b_d + A\delta^{ab}\delta_{cd}$$

は上の 3 条件を満たし，テンソルの次元 n と A が

$$n = -A^2 - A^{-2}$$

を満たすとき，$T(L)$ は A の特殊値に対する Kauffman ブラケット $\langle K\rangle$ と一致する． □

【定義 8.36】 無向絡み目 L の正則表示において，平面に時間とよぶ単調レベル関数を定義する．この時間に関する極大点と極小点を含む線分に対して次の抽象テンソルを対応させる：

$$\begin{array}{lcl} \text{極大点} & \mapsto & M_{ab}, \\ \text{極小点} & \mapsto & M^{ab}. \end{array}$$

さらに，各交叉に対して，その近傍で時間の向きにそって交叉弧に向きを与えるとき，抽象テンソルを次のように対応させる：

$$\begin{array}{lcl} \text{正交叉} & \mapsto & R^{ab}_{cd}, \\ \text{負交叉} & \mapsto & \bar{R}^{ab}_{cd}. \end{array}$$

また，時間に関して単調な鉛直方向の弧には δ^a_b を対応させる．これにより，無向絡み目に対する抽象テンソル表示が得られる． □

【定理 8.37】　無向絡み目 $|L|$ に対して，その抽象テンソル表示の値を $\tau(|L|)$ と表す．行列 $M_{ab}, M^{ab}, R, \bar{R}$ が次の条件を満たすとき，$\tau(|L|)$ は正則同位不変量となる：

i) (位相的移動不変性）$M^{ai}M_{ib} = \delta^a_b$.

ii) （捻り不変性）$\bar{R}^{ab}_{cd} = M_{ci}R^{ia}_{dj}M^{jb}$.

iii) （II 型移動）$\bar{R}^{ab}_{ij}R^{ij}_{cd} = \delta^a_c\delta^b_d$.

iv) $R, \bar{R}$ に対する Yang-Baxter 方程式．

□

【例 8.38】　行列 $M = (M_{ab}), R$ を

$$M = -A\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & iA \\ -iA & 0 \end{pmatrix},$$
$$R = AM^{-1} \otimes M + A^{-1}I$$

と選ぶと，

$$d = \mathrm{Tr}M({}^T\!M)^{-1} = -A^2 - A^{-2}$$

より，$\tau(L)$ は Kauffman ブラケットに比例する：

$$\tau(L) = d\langle K\rangle.$$

これは，Kauffman ブラケットに対する Yang-Baxter モデルと呼ばれる．特に，$A = -1 (d = -2)$ のとき，$\tau(L)$ は全同位不変量となり，Penrose のバイノールと一致する．□

参考文献

[Sma60] Smale, S.: *Bull. Amer. Math. Soc.* **66**, 373–406 (1960).

[Sma61] Smale, S.: Generalized Poincaré conjecture in dimensions greater than four, *Ann. Math.* **74**, 391–406 (1961).

[Sta60] Stallings, J.: Polyhedral homotopy spheres, *Bull. Amer. Math. Soc.* **66**, 485–8 (1960).