交通流と粉体流

早川尚男
京都大学大学院人間・環境学研究科

概 要

This paper reviews an universal aspect of traffic flows and granular flows. Through the analysis of one dimensional models of traffic and granular flows, we demonstrate the stability analysis of fluctuations, weekly nonlinear analysis, the existence of convective instability in non periodic systems, $f^{-4/3}$ law in power spectrum. In the last part of this paper, we introduce a micropolar fluid model to describe granular flow on a slope which may have different characteristics from that of traffic flows.

1 はじめに

粉体は日常的にいくらでも観察できるが, 本稿では「巨視的な数から成る散逸粒子の集団」を粉体と呼ぶ事にする．勿論，構成要素として粉体粒子が散逸性を内包するにはある程度の粒子の大きさが必要である．即ち，運動の自由度の幾何かが振動等の内部自由度の運動に変換され熱として散逸される必要がある．逆に言えば日常スケールの粒子の運動現象は必ず散逸を伴っている.[1]

粉体は固まった状態から気体の様に分散した状態まで様々な様相を示し、多くの応用もあるので本特集の主題である交通流とかなり異なった特質を持っている。しかし、ほぼ 1 次元的に流れる粉体系であれば散逸を持った粒子系という事で共通な側面も多い。

本稿では粉体流と交通流の共通な側面を紹介すると同時にその考え方の限界について筆者の研究歴に沿って簡単に紹介したい。初めに原稿の依頼を頂いた折は粉体流にウェートを置いて書くつもりであったが交通流の特集での原稿である点と数理面から際立った成果のない粉体流の解説を書く難しさから交通流の方に重きを置いた解説になっている。そのため他の解説との重複が避けられなくなっていることを御容赦頂きたい。

本稿の構成は以下の通りである。次節では様々な 1 次元的な交通流と粉体流のモデルを紹介し、その類似性を指摘する。 3 節では追い越しのできない交通流モデルの数理を簡単に紹介する。ここでは意図的に厳密解に関する記述を避けたがそれ以外のトピックスはある程度紹介した。 4 節では準 1 次元的な粉体流の実験で観測された密度揺らぎを紹介し、交通流のそれとの本質的同等性を指摘する。 5 節では高次元性を考慮した粉体流の数理的な話題として極性流体力学による粉体流の記述の試みについて簡単に紹介する。

2　交通流モデルと 1 次元粉体流モデル

交通流を記述する際にミクロからの積み上げという言葉が何の意味もなさない。ドライバーは人間であるのでその心理状態を記述する手段はない。また車毎の個性も然りである。従って正当性のない現象論モデルを基に解析をし、その正当性を解析結果と観測事実との比較によって確認するという作業が必要になる。現象論の導入が避けられない点でモデルのバリエーションは無数にあり、同時に解析そのものが砂上の楼閣となりはしないかという危険は常につきまとう。従って、単独のモデルの解析では無意味であり、モデルのパラメータを多少変えても変化がないという構造安定性の有無が重要になる。構造安定なモデルの解析であれば散逸のある粒子が持つ普遍的な数理的構造を捉えたいという極めて物理的な問に対する解答も可能になるであろう [2, 3, 4]。

一方、粉体流は人間の心理が関わっていない素子から成るだけに状況はましであるが、粒子のサイズ分布と平均粒径、形状、表面の状態、空気の影響等の' 粒子の個性' や' 環境' に強く依存するため、現在のところ交通流と同様に信頼のおけるミクロな物理モデルというものは存在しない。従ってモデルを巡る状況には交通流のそれとそれほど大きな違いはない。

これらの問題で最も単純な現象は何であろうか。ここでは 1 次元の追い越しの出来ない系での自然渋滞の発生のメカニズムを探ってみよう。その問題を順次追い越しの出来る場合等に拡張していけばよい。単純な系から複雑な系を順次解析するという戦略がないと場当たり的なシミュレーションしか出来ない。

本特集でも中山による解説がある最適速度モデルが提唱されたのは最近の事である [5]。最適速度モデルは

$$\ddot{x}_n = a[U(x_{n+1} - x_n) - \dot{x}_n] \tag{1}$$

と表現される. (1) 式は $\dot{x}_n = U(x_{n+1} - x_n)$ という最適速度に緩和しながら加速項も含むという単純な連立常微分方程式である。(1) 式は単一の時刻によって時間発展が決定されているために初期の位置と速度を与えれば通常の初期値問題として扱える事になる。最適速度 $U(h)$ は観測から推定可能である。しかしながらその関数形の詳細は重要ではなく、大事なのは車間距離の単調増加関数であり、充分車間距離が空いた場合には一定の速度を保つという性質である。

(1) は代表的なモデルであるが、モデルの構造安定性を議論するためには単一のモデルの解析に頼ると危険である。そのため後方の車間距離に応じて加速効果の入ったモデル

$$\ddot{x}_n = a[U(x_{n+1} - x_n)W(x_n - x_{n-1}) - \dot{x}_n] \tag{2}$$

も考えられる。[6, 7] ここで $W(h)$ は h の単調減少関数であり、車間距離が充分大きいときは 1 に漸近するモデルである。同様に構成要素を密度場 ρ と速度場 u の連続体として扱ったモデル

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u), \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{U_\rho(\rho) - u}{\tau_0} - \frac{T_e}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\rho + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u \end{aligned} \tag{3}$$

も考えられる。[8] ここで τ_0 は緩和時間、T_e は温度の役割を果たすパラメータ[1] また μ は交通流の有効粘性率である。

交通流を車の流れに限定しないで 1 次元的な衝突をする散逸粒子の流れとした場合には (1) 或は (2) 式は

$$\ddot{x}_n = \zeta[\tilde{U}(x_{n+1} - x_{n-1}) - \dot{x}_n] + T_e[\varphi'(x_{n+1} - x_n) - \varphi'(x_n - x_{n-1})] \tag{4}$$

とでも置き換えておけば良いだろう。ここで $\tilde{U}$ は流体抵抗等で決まる最適速度で一般には密度の関数であり、φ は粒子間の相互作用ポテンシャルである。

流体モデル (3) はパイプ中の粉体や流動層と呼ばれる粉体と気体の混相系を記述する方程式と良く似ている [9, 10, 11, 12, 13]. 例えば文献 [10] ではフルード (Froude) 数 Fr に対して[2]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\rho &= -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u), \\
\frac{\partial}{\partial t}u &= -u\frac{\partial}{\partial x}u - \tilde{\zeta}(\rho)(V_0 - v) - \frac{1}{Fr} - f''(\rho)\frac{\partial}{\partial x}\rho + \kappa\frac{\partial^3}{\partial x^3}\rho \\
&\quad + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\rho\nu(\rho)\frac{\partial}{\partial x}u).
\end{aligned} \tag{5}$$

という式を用いている。[3]

一見するとここで紹介した各種のモデルは関係がないように見える。特に離散モデルと連続体モデルはかなり違う様に見えるし、各種パラメータに依存して現象が異なってしまう様に思える。しかしながらこれらのモデルの全てが同じユニバーサリティークラスに属し、中でも (1) 式が渋滞発生の分岐点近傍で他のモデルと異なったやや特殊な振舞いをすることが知られている。[7, 14]

3 交通流モデルの理論解析

(1) 式のモデルは構造安定とは言い難い面もあるがその簡単さと尤もらしさはその欠点を補って余りある。従って、以下ではこれらの最も簡単なモデルを解析して、随時一般の場合の変更点をコメントするというスタイルを取る。

3.1 線形安定性

(1) 式には

$$x_n = hn + U(h)t + \text{const.} \tag{6}$$

[1] 流体中で状態方程式 $P = T_e\rho$ を仮定した事に相当する。

[2] $Fr = U_0^2/(ag)$。但し U_0 は特徴的流速、a は粉体粒子の半径、g は重力加速度。

[3] 詳細は後の議論に関係ない。κ に比例する項は系の安定化のために導入。圧力項 $f'(\rho)$ は粒子間の衝突による。$\nu(\rho)$ は密度に依存した有効粘性率。最適速度 V_0 は 1 次元の場合は定数としてよい。また $\tilde{\zeta}(\rho)$ は沈降速度で決まる有効摩擦項である。

という一様解が含まれている。h は平均車間距離である。周期境界条件下での一様解の安定性は簡単に調べる事ができる [5]。(6) 式において $r_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t) - h$ とおくと

$$\ddot{r}_n(t) = a[U(h + r_{n+1}) - U(h + r_n) - \dot{r}_n] \tag{7}$$

となる。ここで $r_n(t)$ が小さいとして (1) 式を線形化する。$r_n(t)$ のフーリエ変換 $r_q(t)$ の時間発展は

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \sigma_+(q))(\frac{\partial}{\partial t} - \sigma_-(q))r_q(t) = 0 \tag{8}$$

となる。ここで波数 $q = 2\pi m/Nh$ (m: 整数, 車の台数 N) に対して

$$\sigma_\pm(q) = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + aU'(h)(e^{iqh} - 1)} \tag{9}$$

であり、$\sigma_+(q)$ の実部が正のときに一様解は不安定化する。このとき $qh \to 0$ の長波モードが最も不安定であり

$$a < a_n(h) \equiv 2U'(\bar{h}) \tag{10}$$

が線形不安定性を与える条件であることは直ちに分かる。$a_n(h)$ は中立安定曲線と呼ばれる。

3.2 弱非線形解析

線形解析から分る事は遅い不安定化し得るモード $\sigma_+(q)$ と早い緩和モード $\sigma_-(q)$ の 2 つが存在することである。緩和時間より長いスケールの時間発展は $\sigma_+(q)$ を通して決まると考えられる。そのことを考慮して (7) 式を次の様に偏微分方程式に書き換えることが可能である.

ここで長波モードが最も不安定或は遅い緩和をすることを思い出し, 線形安定 $a > a_n(h)$ の領域で微分展開をすると衝撃波解を持つ Burgers 方程式を容易に導くことができる。[15] 交通流が Burgers 方程式で記述できることは古くから知られていた。[2] 尚 Burgers 方程式は超離散化の方法で交通流に用いられるセルオートマトン (CA) のモデル [16] であるルール 184 と関係づけられる。[17]

弱安定及び不安定領域において中立線からの距離を $\epsilon > 0$ を用いて $a = 2U'(h)(1 \pm \epsilon^2)$ (不安定領域でマイナス符号を取るとする) とすると、(9) 式を qh で展開した際の $(qh)^2$ の係数が $O(\epsilon^2)$ となる。偏微分方程式の正則性を考えると $\epsilon^2(qh)^2 \sim (qh)^4$ である必要であり、$qh \propto \epsilon$ となる。$\sigma_+(q) - ic_0qh = O(\epsilon^3)$ の分散性の波となる。このときは $\tau = \epsilon^3 t$, $z = \epsilon(x + c_0 t)$, $r = \epsilon R(z, \tau)$ に対して

$$\partial_\tau R(z, \tau) = \frac{U'}{6}\partial_z^3 R + U'''h\partial_z R + \epsilon[\pm\frac{U'}{2}\partial_z^2 R - \frac{1}{8}U''\partial_z(r\partial_z R)] \tag{11}$$

というソリトン方程式として知られる KdV 方程式[4] に摂動が加わった方程式を得る。[5] この種の方程式は流動層等でも現れる普遍的な方程式である。[18, 11] 交通流の文脈では、渋

[4] Kortweg-de Vries 方程式

[5] ここで紹介した手法は逓減摂動法等の様な変数のスケーリングに強く依存しない。単純に展開して非線形項の重要なものから集めただけである。尤もこの方程式は最後の項の存在のために爆発する。

滞の芽がソリトン的なパルスとして現れる事を意味する。また有限の ϵ では摂動が無矛盾であるための可解条件からソリトンの振幅、伝播速度等が選択される。[12] しかし明確な渋滞相の出現を特徴づけるのは難しい。

中立安定線の頂点は最も不安定である。従って最初に不安定化する際に頂点付近の振舞いを知る必要がある。そこでは $U''(h)=0$ であり $r=\epsilon R(z,\tau)$ というスケーリングを仮定する必要がある。その際は

$$\begin{aligned}\partial_\tau R &= \frac{1}{6}U'\partial_z^3 R+\frac{1}{2}U'''R^2\partial_z R \\ &\quad +\epsilon[\pm\frac{U'}{2}\partial_z^2 R-\frac{1}{8}U'\partial_z^4 R-\frac{1}{12}U'''\partial_z^2 R^3+\frac{1}{24}U''''\partial_z R^4] \end{aligned} \tag{12}$$

という MKdV 方程式[6] に摂動が加わった方程式が得られる。

小松と佐々[19] は渋滞領域と自由走行領域をつなぐ界面が MKdV 方程式のキンク解で表されることを示し、摂動論による振幅の選択が漸近的に厳密であることを示した。また数値計算からかなり臨界点から外れていても 1 キンク解が有効であることや、2 つの安定相への分離を、通常の共存線にある 2 つの双平衡点への相分離、中立線をスピノーダル線とみなすことで熱力学的なアナロジーが有効である事を示した。

しかしながら一般のモデル (2)-(5) では (12) に帰着せず 3 次の非線形性が現れる臨界点と中立線の頂点は一致しない。その場合、キンクと反キンクは非対称であり、かつ片方の相は線形不安定領域にある。[7] 従って MKdV 方程式に基く解析は構造安定ではなく、普遍性を持たないことに注意すべきである。この場合も選択されるキンクや反キンクの形状や振幅等は漸近的に正確に求めることが可能である。[6, 7, 14]

3.3 移流不安定性

前節迄に見るように周期境界上の 1 車線交通流の数理はほぼ解明されたと言える。[8] しかし現実の交通流や粉体流は上流と下流が区別されており、境界条件の設定が不適切である。また前節迄は主として自然渋滞を考えたが、実際の (合流や信号等の外的要因が明確ではない場合の) 渋滞発生では殆んどの場合には何らかのボトルネックがあって最初の車の減速に伴って渋滞は生じる。こうして考えると上流と下流を区別して解析する事が現実的である。

本節では御手洗と中西 [20] による最適速度モデル (1) の解析を中心に据えて上流と下流の区別のある有限系に生じる移流不安定性と絶対不安定性について簡単に紹介する。

まず流れのある系で摂動の影響がどう伝播するかを考えてみよう。例えば無限系での最適速度モデルに摂動を加えた場合の線形応答は容易に計算できる。その結果は摂動の影響が単純減衰する、振動減衰する場合の他、揺らぎが増幅し基準状態が不安定になるという状態がある事が分かる。この不安定波は日常経験する様に後方の車両へと順次伝わって行く。

[6] Modified KdV 方程式

[7] 概ね、自由走行領域が不安定であり、自由走行領域から渋滞領域を繋ぐ界面がシャープである。

[8] 最近の数理的話題として厳密に解ける交通流モデルが見つかったことが挙げられる。他の誰かが書くと思われるのでここでは省略した。

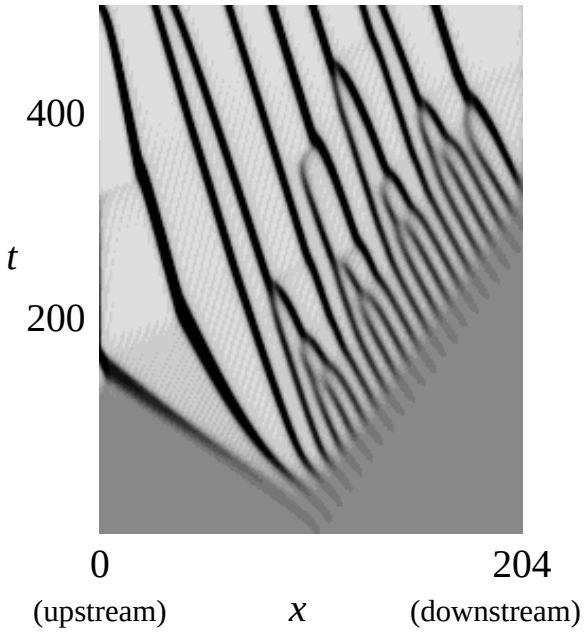

図 1: 境界がある系での最適速度モデル (1) 式の数値計算による絶対不安定性に伴う渋滞.[20]

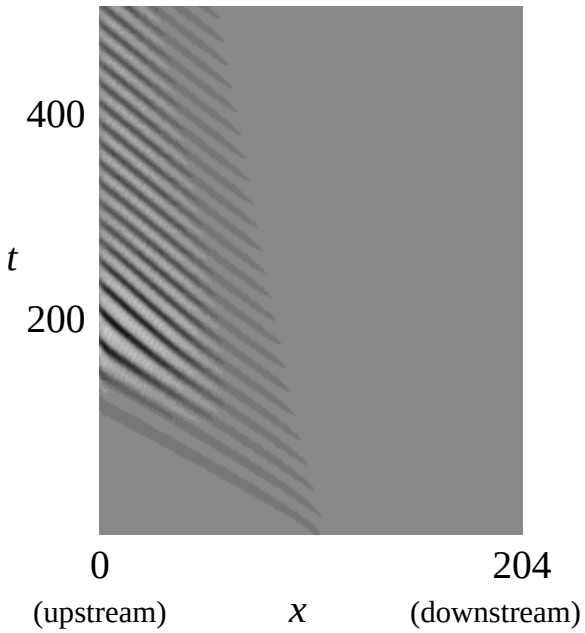

図 2: 境界がある系での最適速度モデル (1) 式の数値計算で観測された移流不安定に伴う渋滞.[20]

次に有限系を考えてみよう。入口を $x = 0$ として一定の時間間隔、車間距離 h で 1 台を除き、最適速度 $U(h)$ を持った車が入って来て、更に $x = L$ の出口から出て行く状況を考える。ここで 1 台だけ最適速度よりわずかにずれた速度を持っていたとしよう。この系の数値計算から初期の不安定性の起こり方に次の 2 種類があることが分かる。

(i) 不安定が移流的である場合： 車間距離 h に対して、緩和率 a がある値 $a_c(h)$ より大きく、周期系の中立曲線で決まる $a_n(h)$ より小さい場合は、摂動の影響は上流 (入口側) にしか伝わらず、最終的には摂動の影響は入口から出ていってしまい、一様解に戻る。また車速や車間距離が振動的振舞いをする場合が多い。

(ii) 不安定が絶対的である場合 ($a < a_c(h)$ の場合)： 摂動の影響は上流にも下流 (出口側) にみ伝わり、最終的には一様解の領域はなくなってしまう。

(i),(ii) の絶対不安定、移流不安定というのは摂動による揺らぎが系全体に広がるか、揺らぎである波束と共に運びさられるかという不安定性の違いを示す。系が周期的であれば移流的に見える不安定波束はやがて元に戻って来るので常に絶対不安定しかあり得ない。また不安定波束と共に動く座標系では常に不安定性は絶対不安定の形で生じる。従って上述の数値計算での不安定性の違いは系の境界 (道路やパイプ) に固定された位置座標系におけるものである。こうした不安定性の判定には $t \to \infty$ の漸近的振舞いに着目すれば良い。[21]

一様解に、時刻 0 で局所的な摂動を加える。3.1 節で行なった線形安定解析と同様の解析をすると

揺らぎの成長率 σ に対して, 最も不安定な波数 q_c, $\sigma(q_c) = \sigma_c$ としたとき, $q = q_c$ 周りで展開すると

$$\frac{d\sigma(q)}{dq}|_{\sigma=\sigma_c} = 0 \tag{13}$$

が成立する。この σ_c の実部が正であれば絶対不安定であり、負であれば移流不安定である。

このような解析を進めることで $t \to \infty$ の漸近的振舞いとして σ_c が計算でき、移流不安定と絶対不安定を分ける線を (h, a) のパラメータ空間に描く事ができる。その結果は数値計算を非常に良く再現している。[20]

また御手洗と中西 [20] は摂動の影響が振動的に伝播、拡大することも詳しく調べている。有限系固定境界での数値計算で振動解が安定に存在することが観測されるが、振動解の安定性解析から周期境界では不安定な振動解が固定端境界では安定化することなどを見出している。こうした解析は交通流のみならず 1 次元的な粉体流でも基本的な点では共通と思われる。

4 準一次元流の揺らぎ

追い越し禁止の 1 車線の高速道路上では一旦出来てしまった渋滞が安定であることは経験上良く知られている。それ故に弱非線形解析や厳密解で求めた界面解が安定に存在し得る。しかしながら実際の殆んどの道路では追い越しが許されているか、或は 2 車線以上あるので渋滞は必ずしも安定ではない。逆に渋滞を回避しようとして車線の変更を行なうため、新たな渋滞を引き起こす場合もある。つまり適当な条件下では渋滞が自発的に発生と

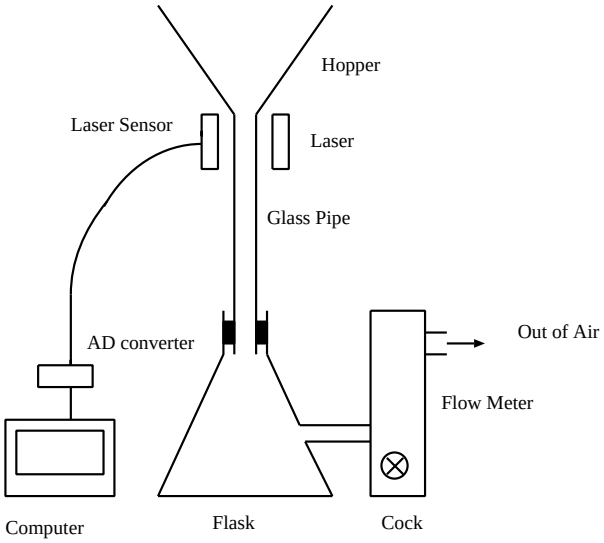

図 3: 文献 [23] での実験のセットアップ。[23]

消滅を繰り返す。この結果、渋滞の発生を特徴づけていた界面解は安定ではなく、構造もぼやけたものになる。その一方で渋滞の生成・消滅から交通流における密度のパワースペクトル[9] において発生する $1/f$ 揺らぎは観測事実としてよく知られている。武者と樋口 [22] は高速道路のある地点で観測時間を等分し、その区切られた時間内に観測点を通過する車の台数の時系列から作ったパワースペクトルが $1/f$ 揺らぎに従うとしている[10] 。こうした揺らぎは、ドライバーや車の個性がなく、追い越しが禁止されているモデルからは作り出す事はできず、追い越し等のランダムネスが $1/f$ 揺らぎを作り出している。こうしたメカニズムは一般の $f^{-\alpha}$ 揺らぎの生成に関して何らかの示唆を与えるものであろう。

一方細かな事を気にしなければ車の集団は砂やガラス、土といった粉の集団、つまり粉体と同様の散逸粒子系と見做すことが可能である。実際、図 3 に示した簡単な装置中で粉体を落下させると交通渋滞の様な密度の詰まった所が自発的に形成される。実際にパイプの両脇からかけた透過電圧(密度と線形の関係にある)からパワースペクトルを作ると $1/f$ 揺らぎが観測される。交通流と同様に実際にはパワースペクトルは $f^{-\alpha}$ であり、従来は $\alpha \simeq 1.5$ 辺りとされて来たが、最近のより注意深い実験によって $\alpha = 4/3$ であることが明らかになって来た [23]。

もう一つ指摘しておかなければならないのは境界条件の重要性である。例えば粉体の実験に於いて空気が自由に流れるとすると粒子は自由落下の様に加速を続けて密度波は殆ど形成されない。一方、粉体の実験で空気の流量を例えば完全に止めてしまえば近似的に

[9] ある観測点で時刻 t の密度を $\rho(t)$ とし、統計平均を $< \cdot >$ で表したとき、$C_\rho(t) \equiv < \rho(t)\rho(t+\tau) >$ を自己相関関数という。そのフーリエ変換 $\int dt e^{i\omega t} C_\rho(t) = < |\tilde{\rho}(\omega)|^2 >$ をパワースペクトルと呼ぶ。角振動数 ω のかわりに振動数 f を用いる事が多い。両者の関係は $\omega = 2\pi f$ である。

[10] しかし、彼らの論文 [22] を読むと実際には観測データは $1/f$ というよりも $1/f^{1.4}$ に近く、後述の Burgers 方程式を用いた理論解析には指数 1.4 を用いている。

周期境界条件と同じ状況になる。即ち粉体を最初に溜めておくホッパーとパイプの終端では殆んど粒子は動くことができない。この時は明白な密度波が形成される。交通流でも一方の端を自由走行として渋滞状態から走らせ始めたら渋滞がなくなるのは当然の事であるし、渋滞した料金所の間で高速道路を自由走行する車が渋滞しやすく、また周期境界条件下での状況と似て来るのは肯ずける。

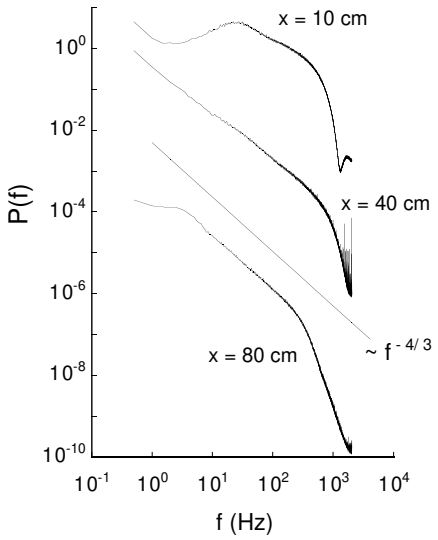

図 4: コックを閉じた系での実験で観測されたパワースペクトル [23]。図中の x はホッパーからセンサーまでの距離を表す。

渋滞或は密度波の生成・消滅を特徴づける一つの量は先に指摘したパワースペクトルである。しかし先に指摘した通り、境界条件が重要なので注意深い観測か実験が必要である。交通流の場合は料金所での流量をコントロールしながら実験するのは実際上不可能であるが粉体の実験の場合は容易である。既に触れた通り空気が自由に流れ得る状況ではパワースペクトルには特徴的なべき則などは現れない。一方、完全に空気の流れを遮断して粉体を流すと極めて特徴的なべき則

$$P(f) \sim f^{-\alpha} \tag{14}$$

が観測される。上端にあるホッパーからの位置 $80\ \mathrm{cm}, 90\ \mathrm{cm}, 1\ \mathrm{m}$ での実験で得られた α の最確値はそれぞれ $\alpha = 1.33 \pm 0.04, 1.31 \pm 0.05$ 及び 1.34 ± 0.05 であり、$\alpha = 4/3$ であることを強く示唆する。またこの値は Peng and Herrmann[24] が CA を用いて行なったシミュレーションから評価した値と一致している。更に (2) 式を 2 車線に拡張したモデル[11] でも同様の結果が得られている [26]。

[11] 各車はレーンに応じてイジングスピン変数を持ち、スピンの反転に対応して車線変更をする。

さて実験やシミュレーションでパワースペクトルに対して $\alpha = 4/3$ とした (14) 式が成立している。ではそのメカニズムはどうなっているのか。そのためには解析しやすい簡単なモデルも必要である。$\alpha = 4/3$ を説明する一つのアイデアとして Langevin 方程式に基づくモデルの導入とその線形緩和理論によるパワースペクトルの計算がある [7, 23]。ここでは (4) 式を粒子間距離の方程式に書き換えた時に、粒子の追い越しで急に車間距離が変わるという効果をランダムなノイズと見做すのである[12] 。このモデルのシミュレーションでもノイズを無視したときに中立線近傍に相当する領域では明白に $\alpha = 4/3$ が現れた [7, 23]。ノイズによって常に供給される揺らぎ (渋滞の芽) は長時間生き残るため、中立線そのものの意味はぼやけて線形弱安定領域でも弱不安定領域でも結果には大きな違いはない。そこで弱安定領域での揺らぎの緩和を考慮しつつパワースペクトルを計算すると解析的に $\alpha = 4/3$ であることを示す事ができる。詳細は原論文 [7] に譲るとして、その結果を得るポイントは中立線近傍では緩和する波の振動数 f と波数 k の間に $f \sim k^3$ という分散関係があることと、中立線近傍の臨界的状況では時間スケールが発散していることである。

Langevin 方程式のモデルによって、交通流や粉体流でのパワースペクトルは曲がりなりにも説明できた気分になっている。しかし、Langevin モデルでも不安定領域に入ると解が爆発しないために非線形効果が効いている筈であり、その点についての解析が欠如している。またモデルそのものの正当性についても議論しないといけない。また粉体流の実験では特に調節もしていないにも拘らず、臨界的状況が実現しているメカニズムも明確ではない。この辺りは今後はっきりさせる必要がある。更にこうした法則が雪崩や土石流など斜面上を流れる 2 次元的な粒子流でも成立するかどうかは興味深いところである。

5　2 次元の斜面流と極性流体力学

パイプの中の流れを 1 次元化して扱った場合に普遍的な性質があるような結果が示唆されている。しかし本当は多次元の効果や空気の効果は複雑であり、結果がいくら類似のものを与えていても偶然の一致であるおそれは否定できない。一方で多次元性がない流れはつまらない結果しか生まないので理論解析をする必要性も感じられない。モデルの直接の数値計算でも結果が解析できるのである。

ここで交通流と粉体流の分かれ道がある。交通流の車線変更モデルを作ることは可能であるが現時点では解析が容易でかつ誰もが納得するモデルはない。一方、粉体系であれば実験においてもシミュレーションでも粒子を流しておけば境界条件等に従って自発的に流れを形成する。このような粒子流の実験やシミュレーションは多々あり、そこにモデル化から生じる曖昧さはない。

無論、シミュレーションができるということと応用数理の対象になるということは等価ではない。理論解析の可能性が見えないと見かけの現象の浅い興味だけで終始してしまうだろう。[13] そこではある程度愚直な方法論が使える簡単な問題設定が可能になる例題が望

[12] 1 章に述べた通りある自由度を消去して特定の自由度のみに着目するとノイズが現れる。この場合は追い越しができる多重レーンの交通流や粉体流を 1 次元系に射影することで (一般には相関のある) ノイズが生じる。

[13] 現実に粉体の物理は現象に対する興味に答えられないまま徐々に関心が失われて行く様に見える。膨大

ましい。

パイプ流が空気の影響を逃れられないのであるならば、斜面上の粒子の流れはどうであろうか。雪崩や土石流などを考えれば分かる通り応用上でも重要な問題である。本節では粒子の回転を考慮した極性流体力学を気体分子運動論に基づき導出し、斜面流に応用した解析を紹介してみよう. [25, 27]

粉体流を定点観測すれば必然的に場の方程式に従う。場の方程式は連続の式に従う。例えば質量の連続の式であれば

$$\frac{D}{Dt}\rho = \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) \tag{15}$$

であるし運動量の連続の式は

$$\rho\frac{D}{Dt}\mathbf{u} = \nabla\cdot\sigma \tag{16}$$

である。ここで ρ, $\mathbf{u}$, σ はそれぞれ質量密度、速度、ストレステンソルである。粉体の様に大きさの無視できない粒子を構造流体として扱うとその特徴は角運動量の連続の式を独立に扱わなければならない点に現れる。角運動量の連続の方程式は

$$nI\frac{D}{Dt}\boldsymbol{\omega} = \nabla\cdot C + \boldsymbol{\sigma}^{(a)} \tag{17}$$

の様になる。但し n は数密度、I は粒子の慣性モーメント, $\boldsymbol{\omega}$ は回転場、C はカップルストレス, $\boldsymbol{\sigma}^{(a)}$ はストレステンソルの反対称部分をベクトル化したものである。[14] 連続の式としては、この他エネルギーの連続の式も存在するがここでは省略する。局所的に等温と見なされる系ではエネルギー方程式は重要ではない。このような極性流体力学はむしろ粉体よりも血液流、磁性流体, MHD, 液晶流等で積極的に用いられている。[28]

ここで問題になるのはストレステンソルとカップルストレステンソルの構成方程式である。複雑であると汎用性に問題があるので最も簡単なものを採用してみる。ここでは流れている状態を考えているので静止状態では存在する筈の接線応力を無視し、圧力 p のみで特徴づけられるとする。そうするとNewton流体の自然な拡張として

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= (-p+\lambda\partial_k u_k)\delta_{ij} + \mu(\partial_i u_j + \partial_j u_i)\\ &\quad +\mu_r\left[(\partial_i u_j - \partial_j u_i) - 2\epsilon_{ijk}\omega_k\right],\end{aligned} \tag{18}$$

と

$$\begin{aligned}C_{ij} &= \mu_c\partial_k\omega_k\delta_{ij} + \frac{\mu_B+\mu_A}{2}(\partial_i\omega_j + \partial_j\omega_i)\\ &\quad +\frac{\mu_B-\mu_A}{2}(\partial_i\omega_j - \partial_j\omega_i),\end{aligned} \tag{19}$$

というものを採用する。ここで $\partial_i u_j = \partial u_j/\partial x_i$ という記号を導入し ϵ_{ijk} はLevi-Civita記号である。このような構成方程式を採用すると残る問題は輸送係数 μ, μ_r, λ, μ_A, μ_B, μ_c の決定に帰着する。

な粒子シミュレーションの結果に関しては著者による解説 [1] を参照のこと。

[14] Levi-Civita記号を使って $\boldsymbol{\sigma}^{(a)}$ の i 成分を書けば $\sigma_i^{(a)} = \epsilon_{ijk}\sigma_{jk}$ である。

この様な構成方程式を導入した利点は気体分子運動論で培われた膨大な蓄積を利用できる点にある。散逸がなければ低密度極限では Boltzmann 方程式の解析に帰着するので信頼のできる文献を参考にして輸送係数を導出できる。[29] ある程度密度の高い気体に対しても Enskog 方程式を用いた解析が有効である。[29] 散逸のある場合は気体分子運動論の枠組はそのままでは使えなくなるが、衝突ルールのみに散逸の効果を考慮することである程度の見積りは可能になる。[30] 例えば初等的な解析から進行方向に並進対称な 2 次元系[15] では μ,μ_r, μ_B, λ のみで特徴づけられる事や, $\mu \sim \sqrt{mT}/d$, $\mu_r \sim n^2 d^3 \sqrt{mT}$, $\mu_B \sim d\sqrt{mT}$ と見積もられる事などが分かる. [25, 27] 但しここで m, d はそれぞれ粒子の質量と粒径であり, T は粉体温度、即ち運動エネルギーの揺らぎである。

ここでは詳細は記さないが比較的希薄な粒子の流れが実現した斜面流において状態方程式が理想気体のそれに帰着できるとした場合に速度場や回転場の進行方向に垂直な方向 (図中の y) 依存性を解析してみた。[16] その結果、極性流体モデルから解析的に求めた回転場と流体の回転と回転場のずれを図にプロットしたがその結果は見事にシミュレーションの結果 [31] を再現している。もっとも速度場については少なくともかなり希薄な粒子流に関しては回転の効果は殆んど効かないことが分かった。[25]

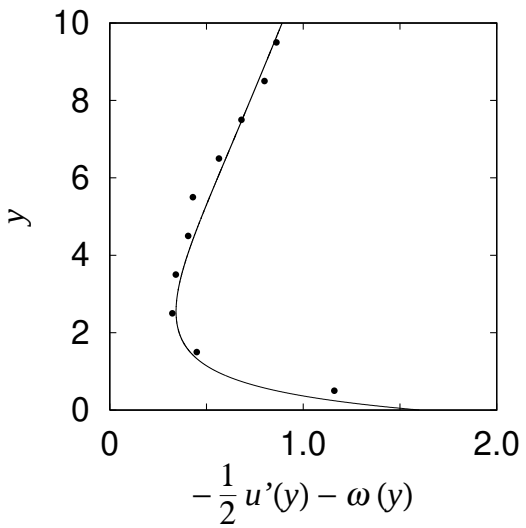

図 5: 進行方向に並進対称な 2 次元系での粒子の回転と流体の回転のずれ $\frac{1}{2}\nabla \times \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\omega}$ の z 成分のプロット. 実線とデータは文献 [31] のシミュレーションの結果.

この結果をどう捉えるかは人に依るであろう。筆者はこの結果は少なくとも極性流体モデルや気体分子運動論に基づく理論は粉体流の解析に関して有望かつ有効であり、この方向で解析を進める価値はあると考える。しかしながら弱いずりによる展開という今の枠組

[15] そのような系では $\boldsymbol{u} = (u(y), 0, 0)$, $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega(y))$ となる。
[16] 密度不安定性が生じる前はほぼ進行方向 x に並進対称である。

では粒子流の特徴である非 Newton 性を議論できない。現象論的に複雑な構成方程式を導入するとより複雑な流れを再現することができる [32] がそうすると現象に応じて構成方程式を変更するといういたちごっこは終わらない。出来れば愚直な道筋に従って粒子が固まって流れる場合も同時に理解できる方法がある方がいい。実際、気体分子運動論の枠組でもずりの強い場合には非 Newton 的な粉体流に特有の構成方程式を導出できることが示めされている。[33]

今後問題になってくるのは境界層の問題であろう。文献 [25] でも境界近傍で粒子回転が励起され流体の回転と有意にずれたことを思い出すべきである。粉体では通常の流体力学では境界条件に繰り込まれているスケールの粒子運動が観測されているので境界層をきっちり解析する必要が生じてくる。この問題に関しても気体分子運動論の蓄積は無駄ではないと思われる。[34, 35] また粒子シミュレーションとは異なり Enskog 方程式の直接数値計算も最近は盛んに行なわれており、その定量的有効性はもとより計算効率の上でもその有効性は注目されている。[36] このような事情を考慮すると愚直なアプローチに拘泥するのも悪くはないのではないかという風に思っている。

6 まとめ

本稿では筆者の研究歴に従って漫然と交通流と粉体流について解説を試みた。最近では交通流は切り離して粉体流の研究に集中しているので解説の題材そのものが古く迫力に欠けた点は御容赦願いたい。また題材の取捨選択に関して客観的な解説を目指したのではなく純主観的な解説を指向したことを断っておく。従っていちいち名前を記さないが全ての共同研究者に謝意を表したい。とりわけ図の便宜を図ってくれ原稿にコメントを下さった共同研究者の御手洗菜美子さんには感謝している。最後に本稿を書く機会を与えて下さった高橋大輔氏に改めてお礼を述べて拙文をしめくくりたい。

参考文献

[1] 早川尚男、那須野悟：粉体の物理 (現代物理最前線 1 、共立、2000).

[2] e.g. G.B.Whitham, Linear and Nonlinear Waves (Wiley, New York, 1974); R. Huberman, Mathematical model: Traffic flow (Prentice Hall, 1977); D.Helbing, Traffic Dynamics: New Physical Modeling Concepts (Springer, Berlin, 1997).

[3] 越正毅 編著 「 交通工学通論 」 (技術書院、1989).

[4] 河上省吾、松井寛、「 交通工学 」(森北出版, 1987).

[5] M.Bando, K.Hasebe, A.Nakayama, A.Shibata and A.Sugiyama, Phys.Rev.E **51**, 1035 (1995).

[6] H. Hayakawa and K. Nakanishi, Phys. Rev. E **57**, 3839.

[7] H. Hayakawa and K. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. Suppl. **130**, 57 (1998).

[8] B.S.Kerner and P.Konhäuser, Phys.Rev. E **48**, 2335 (1993).

[9] G.K.Batchelor, J.Fluid Mech. **193**, 75 (1988).

[10] S.Sasa and H.Hayakawa, Europhys.Lett. **17**, 685 (1992).

[11] T. S. Komatsu and H. Hayakawa, Phys. Lett. A **183**, 56 (1993).

[12] M. F. Göz, Phys.Rev.E **52**,3697 (1995).

[13] R. Jackson, The Dynamics of Fluidized Particles (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000).

[14] S. Wada and H. Hayakawa, J. Phys. Soc. Jpn. **67**, 763 (1998).

[15] J. M. Burgers, The Nonlinear Equation (Riedel, Boston, 1974).

[16] e.g. K. Nagel and M. Screkenberg, J. Phys. I (Paris) **2**, 2221 (1992): S. Yukawa, M. Kikuchi and S. Tadaki, J. Phys. Soc. Jpn. **63**, 3609 (1994).

[17] K. Nishinari and D. Takahashi, J. Phys. A **31**, 5439 (1998).

[18] G. B. Whitham, Proc. Roy. Soc. Lond. A **428**, 49 (1990).

[19] T. S. Komatsu and S. Sasa, Phys. Rev. E **52**, 5574 (1995).

[20] N. Mitarai and K. Nakanishi, J. Phys. Soc. Jpn. **68**, 2475 (1999): Phys. Rev. Lett. **85**, 1766 (2000): J. Phys. Soc. Jpn. **69**, 3752 (2000).

[21] I. M. リフシッツ、 E. P. ピタエフスキー：井上健男、石橋善弘、柳下崇訳： 物理的運動論 (ランダウ = リフシッツ理論物理学教程、東京図書, 1982) : ロシア語初版は 1979.

[22] T. Musha and H. Higuchi, Jpn.J. Appl. Phys. **15**, 1271 (1976): ibid, **17**, 811 (1978).

[23] O. Moriyama, N. Kuroiwa, M. Matsushita and H. Hayakawa, Phys. Rev. Lett. **80**, 2833 (1998).

[24] G. Peng and H.J.Herrmann, Phys. Rev. E **49**, 1796 (1994): ibid **51**, 1745 (1995).

[25] N. Miatarai, H. Hayakawa and H. Nakanishi, preprint. You can get it from http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/0108192.

[26] 鷹合孝之：修士論文 (京都大学 1998): see also H. Hayakawa and T. Takaai, Universal Mathematical Structure in Quasi 1D Fluid-Particle Systems in Advanced Technologies for Particle Processing (AIChE publ.) Vol.II pp. 521-526.

[27] H. Hayakawa, to be published in Traffic and Granular Flows 2001 edited by Y. Sugiyama and D. E. Wolf (Springer, 2002).

[28] G. Lukaszewicz, *Micropolar Fluids: Theory and Applications* (Birkhäuser, Boston, 1999):

[29] see e.g. P. Resibois and M. de Leener, Classical Kinetic Theory of Fluids (John Wiley & Sons, New York, 1977).

[30] C. K. K. Lun, J. Fluid Mech. **233**, 539 (1991).

[31] N. Mitarai and H. Nakanishi, J. Phys. Soc. Jpn. **70**, 2809 (2001).

[32] K. Kanatani, Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng. B **45**, 507, 515 (1979) : J. Kano, A. Shimosaka, and J. Hidaka, J. Soc. Powder Techol. Jpn. **33**, 95 (1996).

[33] S. B. Savage and D. J. Jeffrey, J. Fluid Mech. **110**, 255 (1981).

[34] C. Cercignani, Mathematical Methods in Kinetic Theory : second edition (Plenum, New York, 1990).

[35] 曽根良夫、青木一生：分子気体力学 (流体力学シリーズ 3, 朝倉書店, 1994).

[36] L. Popken and P. W. Clearly, J. Compt. Phys. **155**, 1 (1999).