交通流と混相流

早川尚男
京都大学大学院人間・環境学研究科

概 要

This paper reviews an universal aspect of traffic flows and two-phase flows of granular particles immersed in the air. Through the analysis of one dimensional models of traffic and granular flows, we demonstrate the stability analysis of fluctuations, weekly nonlinear analysis, the existence of convective instability in non periodic systems, $f^{-4/3}$ law in power spectrum.

1 はじめに

本稿が世に出る頃には正月の帰省ラッシュでうんざりされている諸兄も多いことと思う。渋滞が何故起きるかと言えば道路によって設定された流量の許容範囲を逸脱した車が道を走っているからであり半ば避けがたいものである。無論、合流や橋、トンネルと云った構造上の問題から必ずボトルネックとなって渋滞を引き起こす箇所もある。こうした構造上の欠陥を解消しながら車の流れを制御し、交通量を最適化することは交通工学の重要な課題であると云えよう。(無論ここで排気ガスや振動、騒音等に伴う公害の影響は考えない)。

一方で寺田寅彦の例を見るまでもなく純粋に知的好奇心から交通流という現象に興味を持ち、制御するよりもその背後にある数理的構造を楽しむという、高等遊民的な観点から交通流を「研究」している人達もいる。過去にも数理的な研究は幾つかあったが 5,6 年程前からドイツ、日本の物理学者の間でも流行の研究テーマとなり新しい成果も出ている。その成果は文献 [1, 2] にまとめられているので参考にされたい。

一見すると、交通流と混相流の間に関係はないように思われる。しかし両者ともに素子(車あるいは粒子)が抵抗を受けながら動くという点では共通しており、両者のモデル方程式がよく似ていることは早くから指摘されていた。本稿ではその両者の繋がりを意識しつつ交通流や粉体の擬一次元的な流れの研究についての簡単な解説をしておく。予めお断りしておくが本稿は著者の著した解説 [3] と共通する箇所が多い。

本稿の構成は以下の通りである。次節では様々な 1 次元的な交通流と粉体流のモデルを紹介し、その類似性を指摘する。3 節では追い越しのできない交通流モデルの数理を簡単に紹介する。4 節では準 1 次元的な粉体流の実験で観測された密度揺らぎを紹介し、交通流のそれとの本質的同等性を指摘する。5 節では高次元性の効果を考慮したときの問題点とアナロジーの限界について述べる。

2　交通流モデルと 1 次元粉体流モデル

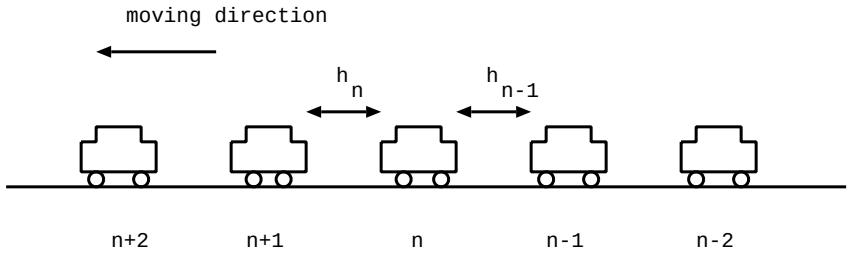

図 1: 交通流モデルの模式図。車の位置 x_n と移動方向、車間距離 $h_n = x_{n+1} - x_n$ で特徴づけられる。

交通流を記述する際にミクロからの積み上げという言葉が何の意味もなさない。ドライバーは人間であるのでその心理状態を記述する手段はない。また車毎の個性も然りである。従って正当性のない現象論モデルを基に解析をし、その正当性を解析結果と観測事実との比較によって確認するという作業が必要になる。現象論の導入が避けられない点でモデルのバリエーションは無数にあり、同時に解析そのものが砂上の楼閣となりはしないかという危険は常につきまとう。従って、単独のモデルの解析では無意味であり、モデルのパラメータを多少変えても変化がないという構造安定性の有無が重要になる。構造安定なモデルの解析であれば散逸のある粒子が持つ普遍的な数理的構造を捉えたいという極めて物理的な問に対する解答も可能になるであろう [5, 6, 7]。

一方、混相流として特に念頭におくのは固気混相流である粉体流動層やパイプの中の粉体の流れである。粉体流は人間の心理が関わっていない素子から成るだけにモデル化は容易ではある。特に離散要素法 (DEM) と呼ばれる粒子モデルが標準的になり、混相流に関しても DEM と流体力学を組み合わせたモデルがよく用いられるようになってきた。しかし粒子のサイズ分布と平均粒径、形状、表面の状態、空気の影響等の' 粒子の個性' や' 環境' に強く依存するため、現在のところ交通流と同様に信頼のおけるミクロな物理モデルというものは存在せず、モデルを巡る状況には交通流のそれとそれほど大きな違いはない。

これらの問題で最も単純な現象は何であろうか。ここでは 1 次元の追い越しの出来ない系での自然渋滞の発生のメカニズムを探ってみよう。その問題を順次追い越しの出来る場合等に拡張していけばよい。単純な系から複雑な系を順次解析するという戦略がないと場当たり的なシミュレーションしか出来ない。

このような基礎モデルが存在しない状況で研究が進展するにはよいモデルが必要である。特に 1 車線の 1 方向を走る車の流れは追従モデルと呼ばれるモデルが良く用いられる。注目している車の速度は前方車間距離に依存するが、有限の時間遅れ τ で車の走行速度に影響を与えるだろう。従って構成要素に後ろから順に番号をつけて、その位置 $x_n(t)$ が

$$\dot{x}_n(t+\tau) = V[x_{n+1}(t) - x_n(t)] \tag{1}$$

に従うとするものである。[6] 但し V は現時点では未定の関数である。この方程式或は両辺に時間微分をして速度と加速度の関係にした方程式は古くから用いられて来た。しかし (1) 式の初期値問題を考える事は出来ない。何故なら、微分差分方程式は τ だけ過去の情報を常に必要とするために初期時刻の情報だけで時間発展を決める事は出来ないからである。

上記の欠点を解消したモデルである最適速度モデル坂東等 [8] によって提唱されたのは最近の事である。最適速度モデルは

$$\ddot{x}_n = a[U(x_{n+1} - x_n) - \dot{x}_n] \tag{2}$$

と表現される. ここで車番 n は後ろの方から順につけている。$V = aU$ として (1) 式と比較すれば $\tau \to 0$ として展開した形になっている。(2) 式は $\dot{x}_n = U(x_{n+1} - x_n)$ という最適速度に緩和しながら加速項も含むという単純な連立常微分方程式である。(2) 式は単一の時刻によって時間発展が決定されているために初期の位置と速度を与えれば通常の初期値問題として扱える事になる。最適速度 $U(h)$ は観測から推定可能である。しかしながらその関数形の詳細は重要ではなく、大事なのは車間距離の単調増加関数であり、充分車間距離が空いた場合には一定の速度を保つという性質である。

(1) と (2) は代表的なモデルであるが、モデルの構造安定性を議論するためには単一のモデルの解析に頼ると危険である。そのため後方の車間距離に応じて加速効果の入ったモデル

$$\ddot{x}_n = a[U(x_{n+1} - x_n)W(x_n - x_{n-1}) - \dot{x}_n] \tag{3}$$

も考えられる。[9, 10] ここで $W(h)$ は h の単調減少関数であり、車間距離が充分大きいときは 1 に漸近するモデルである。同様に構成要素を密度場 ρ と速度場 u の連続体として扱ったモデル

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u), \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{U_\rho(\rho) - u}{\tau_0} - \frac{T_e}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\rho + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u \end{aligned} \tag{4}$$

も考えられる。[11] ここで τ_0 は緩和時間、T_e は温度の役割を果たすパラメータ[1] また μ は交通流の有効粘性率である。

交通流を車の流れに限定しないで 1 次元的な衝突をする散逸粒子の流れとした場合には (2) 或は (3) 式は

$$\ddot{x}_n = \zeta[\tilde{U}(x_{n+1} - x_{n-1}) - \dot{x}_n] + T_e[\varphi'(x_{n+1} - x_n) - \varphi'(x_n - x_{n-1})] \tag{5}$$

とでも置き換えておけば良いだろう。ここで $\tilde{U}$ は流体抵抗等で決まる最適速度で一般には密度の関数であり、φ は粒子間の相互作用ポテンシャルである。

流体モデル (4) はパイプ中の粉体や流動層を記述する方程式と良く似ている [12, 13, 14, 15, 16]. 例えば文献 [13] ではフルード (Froude) 数 Fr に対して[2]

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u),$$

[1] 流体中で状態方程式 $P = T_e\rho$ を仮定した事に相当する。

[2] $Fr = U_0^2/(ag)$。但し U_0 は特徴的流速、a は粉体粒子の半径、g は重力加速度。

$$\frac{\partial}{\partial t}u = -u\frac{\partial}{\partial x}u - \tilde{\zeta}(\rho)(V_0 - v) - \frac{1}{Fr} - f''(\rho)\frac{\partial}{\partial x}\rho + \kappa\frac{\partial^3}{\partial x^3}\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\rho\nu(\rho)\frac{\partial}{\partial x}u). \tag{6}$$

という式を用いている。[3]

一見するとここで紹介した各種のモデルは関係がないように見える。特に離散モデルと連続体モデルはかなり違う様に見えるし、各種パラメータに依存して現象が異なってしまう様に思える。しかしながらこれらのモデルの全てが同じユニバーサリティークラスに属し、中でも (2) 式が渋滞発生の分岐点近傍で他のモデルと異なったやや特殊な振舞いをすることが知られている。[10, 17]

3 交通流モデルの理論解析

(2) 式のモデルは構造安定とは言い難い面もあるがその簡単さと尤もらしさはその欠点を補って余りある。従って、以下ではこれらの最も簡単なモデルを解析して、随時一般の場合の変更点をコメントするというスタイルを取る。

3.1 線形安定性

(2) 式には

$$x_n = hn + U(\bar{h})t + \text{const.} \tag{7}$$

という一様解が含まれている。h は平均車間距離である。周期境界条件下での一様解の安定性は簡単に調べる事ができる [8]。(7) 式において $r_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t) - h$ とおくと

$$\ddot{r}_n(t) = a[U(h + r_{n+1}) - U(h + r_n) - \dot{r}_n] \tag{8}$$

となる。ここで $r_n(t)$ が小さいとして (2) 式を線形化する。$r_n(t)$ のフーリエ変換 $r_q(t)$ の時間発展は

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \sigma_+(q))(\frac{\partial}{\partial t} - \sigma_-(q))r_q(t) = 0 \tag{9}$$

となる。ここで波数 $q = 2\pi m/Nh$ (m: 整数, 車の台数 N) に対して

$$\sigma_\pm(q) = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + aU'(h)(e^{iqh} - 1)} \tag{10}$$

であり、$\sigma_+(q)$ の実部が正のときに一様解は不安定化する。このとき $qh \to 0$ の長波モードが最も不安定であり

$$a < a_n(h) \equiv 2U'(\bar{h}) \tag{11}$$

が線形不安定性を与える条件であることは直ちに分かる。$a_n(h)$ は中立安定曲線と呼ばれる。

[3] 詳細は後の議論に関係ない。κ に比例する項は系の安定化のために導入。圧力項 $f'(\rho)$ は粒子間の衝突による。$\nu(\rho)$ は密度に依存した有効粘性率。最適速度 V_0 は 1 次元の場合は定数としてよい。また $\tilde{\zeta}(\rho)$ は沈降速度で決まる有効摩擦項である。

3.2 弱非線形解析

線形解析から分る事は遅い不安定化し得るモード $\sigma_+(q)$ と早い緩和モード $\sigma_-(q)$ の 2 つが存在することである。緩和時間より長いスケールの時間発展は $\sigma_+(q)$ を通して決まると考えられる。そのことを考慮して (8) 式を次の様に偏微分方程式に書き換えてみよう。

$$(\partial_t - \sigma_+(\partial_x))r(x,t) = (\sigma_+(\partial_x) - \sigma_-(\partial_x))^{-1} N_l[r(x,t)] \tag{12}$$

但し $x = nh$, $r_n(t) \to r(x,t)$ $\sigma_\pm(\partial_x)$ は $\sigma_\pm(q)$ を実空間に戻した微分演算子である。[4] また $N_l[r(x,t)]$ は (2) の非線形項をまとめあげたもので

$$\frac{N_l[r(x,t)]}{a} = U[h + e^{h\partial_x} r] - U[h+r] - U'[h](e^{h\partial_x} - 1)r(x,t) \tag{13}$$

である。但し $r_{n+1}(t) = e^{h\partial_x} r(x,t)$ という連続化を行っている。

ここで長波モードが最も不安定或は遅い緩和をすることを思い出すと $(\sigma_+(\partial_x) - \sigma_-(\partial_x))^{-1} \simeq a^{-1}[1 - \frac{2h}{a}U'(h)\partial_x + O(h^2\partial_x^2)]$ と近似できる。また

$$N_l[r(x,t)]/a = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty} C_{mn}\partial_x^n r^m + \cdots \tag{14}$$

と微分展開が可能である。ここで $C_{21} = U''(h)/2$, $C_{22} = U''(h)/4$, $C_{23} = U''(h)/12$, $C_{31} = U'''(h)/6$, $C_{32} = U'''(h)/12$, $C_{41} = U''''(h)/24$ 等である。

例えば線形安定 $a > a_n(h)$ の領域を考える。$D_{ov} \equiv (a - a_n(h))/a_n(h)$ とおき $U''(h) \neq 0$ とし、(14) 式の最低次の非線形 $C_{21}\partial_x r^2$ を残し、$z = x + c_0 t$ とすると

$$\partial_t r(z,t) = c_0^2 D_{ov}\partial_z^2 r(x,t) + \frac{U''(h)}{2}\partial_x r(x,t)^2 \tag{15}$$

となる。この方程式は Burgers 方程式であり、衝撃波解を持つ厳密に解ける方程式である。[18] 交通流が Burgers 方程式で記述できることは古くから知られていた。[5] 尚 Burgers 方程式は超離散化の方法で交通流に用いられるセルオートマトン (CA) のモデル [19] であるルール 184 と関係づけられる。[20] この辺りの詳細は本特集の西成による解説を参照せよ。

弱安定及び不安定領域において中立線からの距離を $\epsilon > 0$ を用いて $a = 2U'(h)(1 \pm \epsilon^2)$ (不安定領域でマイナス符号を取るとする) とすると、(10) 式を qh で展開した際の $(qh)^2$ の係数が $O(\epsilon^2)$ となる。偏微分方程式の正則性を考えると $\epsilon^2(qh)^2 \sim (qh)^4$ である必要であり、$qh \propto \epsilon$ となる。$\sigma_+(q) - ic_0 qh = O(\epsilon^3)$ の分散性の波となる。このときは $\tau = \epsilon^3 t$, $z = \epsilon(x + c_0 t)$, $r = \epsilon R(z,\tau)$ に対して

$$\partial_\tau R(z,\tau) = \frac{U'}{6}\partial_z^3 R + U'''h\partial_z R + \epsilon[\pm\frac{U'}{2}\partial_z^2 R - \frac{1}{8}U''\partial_z(R\partial_z R) + \frac{1}{24}U''''\partial_z R^4] \tag{16}$$

というソリトン方程式として知られる KdV 方程式[5] に摂動が加わった方程式を得る。[6] この種の方程式は交通流でも流動層でも現れる普遍的な方程式である。[21, 14] 交通流の文

[4] 以下では微分演算を $\partial_t = \partial/\partial t$、$\partial_x = \partial/\partial x$ 等と記す.

[5] Kortweg-de Vries 方程式

[6] ここで紹介した手法は逓減摂動法等の様な変数のスケーリングに強く依存しない。単純に展開して非線形項の重要なものから集めただけである。尤もこの方程式は最後の項の存在のために爆発する。

脈では、渋滞の芽がソリトン的なパルスとして現れる事を意味する。また有限の ϵ では摂動が無矛盾であるための可解条件からソリトンの振幅、伝播速度等が選択される。[15] しかし明確な渋滞相の出現を特徴づけるのは難しい。

中立安定線の頂点は最も不安定である。従って最初に不安定化する際に頂点付近の振舞いを知る必要がある。そこでは $U''(h) = 0$ であり $r = \epsilon R(z, \tau)$ というスケーリングを仮定する必要がある。その際は

$$\begin{aligned} \partial_\tau R &= \frac{1}{6}U'\partial_z^3 R + \frac{1}{2}U'''R^2\partial_z R \\ &\quad +\epsilon[\pm\frac{U'}{2}\partial_z^2 R - \frac{1}{8}U'\partial_z^4 R - \frac{1}{12}U'''\partial_z^2 R^3 + \frac{1}{24}U''''\partial_z R^4] \end{aligned} \tag{17}$$

という MKdV 方程式[7] に摂動が加わった方程式が得られる。

小松と佐々[22] は渋滞領域と自由走行領域をつなぐ界面が MKdV 方程式のキンク解で表されることを示し、摂動論による振幅の選択が漸近的に厳密であることを示した。また数値計算からかなり臨界点から外れていても 1 キンク解が有効であることや、2 つの安定相への分離を、通常の共存線にある 2 つの双平衡点への相分離、中立線をスピノーダル線とみなすことで熱力学的なアナロジーが有効である事を示した。

しかしながら一般のモデル (3)-(6) では (17) に帰着せず 3 次の非線形性が現れる臨界点と中立線の頂点は一致しない。その場合、キンクと反キンクは非対称であり、かつ片方の相は線形不安定領域にある。[8] 従って MKdV 方程式に基く解析は構造安定ではなく、普遍性を持たないことに注意すべきである。この場合も選択されるキンクや反キンクの形状や振幅等は漸近的に正確に求めることが可能である。[9, 10, 17]

3.3 厳密解

弱非線形解析によって漸近的に厳密に解ける事が分ったが、いっそのこと自由なパラメーター値に対して厳密に解けるモデルというものは存在しないだろか、というのは自然な欲求であろう。$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ に対して最適速度関数 $U(\Delta x_n)$ を区分線形等の特殊な形に選ぶと厳密に解ける事は知られていた [23, 24] が、中立曲線の曲率で決まるという弱非線形解析の知見を使えない極端な単純化になっていて不満の残るものであった。

こうした中で五十嵐等 [25, 26, 27] は交通流の追従モデルの厳密解を得る事に成功した。ポイントとしては最適速度モデル (2) ではなく微分差分方程式 (1) を選んだ事と、問題が解ける様に (1) の最適速度関数 $V[\Delta x_n]$ を選んだ事である。方法論としては戸田が戸田格子を発見した方法を踏襲した。[28] 導出の詳細は五十嵐等の第 1 論文 [25] に譲るとして、概略を説明してみよう。

周期境界条件を満す系で等間隔に渋滞と自由走行領域が現れるとする。このとき車の速度は最大値と最小値の周期的変動を繰り返す。これを $\pm\tanh[x]$ のキンク・反キンクの繰り返しと見ると加速度は $\pm\mathrm{sech}^2[x]$ の繰り返しでかけるだろう。またこれらの関数の位相は、振動数 ν, 波長 λ に対して $v = \nu t - n/\lambda$ に比例する筈である。

[7] Modified KdV 方程式

[8] 概ね、自由走行領域が不安定であり、自由走行領域から渋滞領域を繋ぐ界面がシャープである。

ここでヤコビ楕円関数 $dn^2[x]$ が $\mathrm{sech}^2[x]$ の無限和でかけること[9] と、2 回積分することが可能なことから厳密解の候補として

$$x_n(t) = A \ln \frac{\vartheta_0(v+\delta, q)}{\vartheta_0(v-\delta, q)} + Ct - nh \tag{18}$$

を選択する。但し ϑ_0 は楕円テータ関数、A, C は定数、δ は振動部分の周期を調節するパラメーターであり、q は母数である。ここで (1) において波動が特別な Whitham の分散関係 [21] $2\nu\lambda\tau = 1$ を満たすときに $V[\Delta x_n]$ は一価になり

$$\dot{x}_n(t+\tau) = \xi + \eta \tanh\left[\left(\frac{\Delta x_n - \rho}{2A}\right)\right] \tag{19}$$

とすれば良い事が分る。但し ξ, η, ρ は (18) から決る定数である。また、この厳密解は数値計算から安定であることが知られている。逆に言えば (2) では $V[\Delta x_n]$ が一価になる特別な関係式は知られていない。

また渋滞、自由走行の周期解になった後は位相変数にのみ依存する。ウィザムの分散関係から $t \to t - \tau$ は $n \to n + 1/2$ に置き換えられるので

$$M_n(t) = \tanh[(\Delta x_n - \rho)/2A] \tag{20}$$

とすると系は

$$2A\dot{M}_n = \eta(1 - M_n^2)(M_{n-1/2} - M_{n+1/2}) \tag{21}$$

に帰着する。[26] この方程式はソリトンと等価な非線形回路の特殊な場合であり、更に変換によって諸々の可積分系に書き換える事が可能になっている。更に

$$K(t) = \sum_n^N [M_n(t)\{M_n(t+\tau) + M_{n+1}(t+\tau)\}] \tag{22}$$

は渋滞領域の数を固定すると保存量となる。数値計算によると $K(t)$ 一定というのは準安定で順次不連続的に減少し、渋滞領域の数は減少していく事が観測できる。

その他、車の密度を増加させる場合と減少させる場合で異った点で一様流と渋滞と自由走行の共存流への転移が起こることが厳密解から確認された。その意味でも時間遅れ τ を温度と見立てた一次相転移のアナロジーは有効である。[27]

この様に厳密解が求まった事で交通流の数理構造は殆ど明らかになったと言ってよい。その意味では大きな成果であるが、1 車線の周期境界での交通流は数理的な興味を除くと物理として今後研究の余地は余り多くはなさそうな印象を持つかもしれない。しかし、こうした悲観論は役に立たないし、あまりにも交通流にとらわれた見方であろう。現時点では想像もつかない系を散逸離散可解系でまとめあげ、解析できる可能性もあるからである。

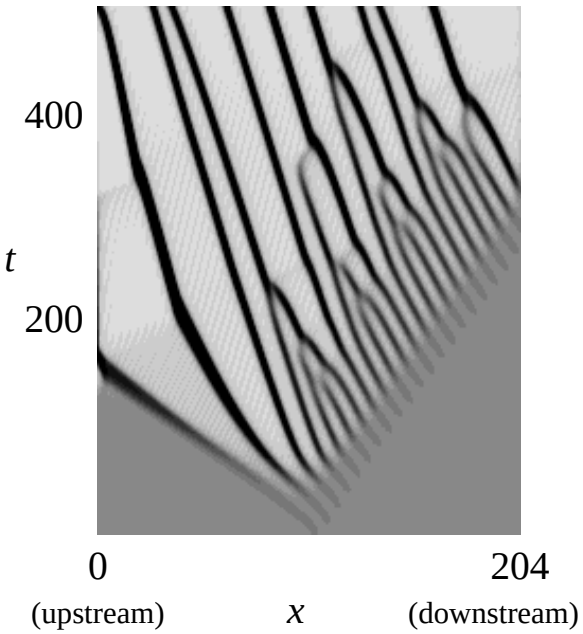

図 2: 境界がある系での最適速度モデル (2) 式の数値計算による絶対不安定性に伴う渋滞.[29]

3.4 移流不安定性

前節迄に見るように周期境界上の 1 車線交通流の数理はほぼ解明されたと言える。しかし現実の交通流や粉体流は上流と下流が区別されており、境界条件の設定が不適切である。また前節迄は主として自然渋滞を考えたが、実際の (合流や信号等の外的要因が明確ではない場合の) 渋滞発生では殆んどの場合には何らかのボトルネックがあって最初の車の減速に伴って渋滞は生じる。こうして考えると上流と下流を区別して解析する事が現実的である。そうした考えから御手洗と中西 [29] は最適速度モデル (2) の解析から上流と下流の区別のある系に生じる移流不安定性と絶対不安定性について議論している。

まず流れのある系で摂動の影響がどう伝播するかを考えてみよう。例えば無限系での最適速度モデルに摂動を加えた場合の線形応答は容易に計算できる。その結果は摂動の影響が単純減衰する、振動減衰する場合の他、揺らぎが増幅し基準状態が不安定になるという状態がある事が分かる。この不安定波は日常経験する様に後方の車両へと順次伝わって行く。

次に有限系を考えてみよう。入口から一定の時間間隔、車間距離で 1 台を除き同じ最適速度を持った車が入って来て、出口から出て行く状況を考える。この系の数値計算から次の結果が得られる。

---

[9] $dn^2[2Kv] - E/K = (\pi/2K') \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathrm{sech}^2[\pi(K/K')(v-l)] - \pi/(2KK')$ という関係式がある。ここで $K = \int_0^{\pi/2} d\theta/\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$ は第 1 種完全楕円積分。K' は K のモジュラス k を $k' = \sqrt{1-k^2}$ に置き換えたもの。また $E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$ は第 2 種完全楕円積分。

(i) 不安定が移流的である場合： 車間距離 h に対して、緩和率 a がある値 $a_c(h)$ より大きく、周期系の中立曲線で決まる $a_n(h)$ より小さい場合は、摂動の影響は上流 (入口側) にしか伝わらず、最終的には摂動の影響は入口から出ていってしまい、一様解に戻る。また車速や車間距離が振動的振舞いをする場合が多い。

(ii) 不安定が絶対的である場合 ($a < a_c(h)$ の場合)： 摂動の影響は上流にも下流 (出口側) にみ伝わり、最終的には一様解の領域はなくなってしまう。

(iii) 低密度領域が発生する場合： 初期の振舞いは (i),(ii) のいずれかに属するが、やがて低密度領域が下流側に拡大して一様解を侵蝕していく。この現象は本質的に非線形性が効いている。

(i),(ii) の絶対不安定、移流不安定というのは摂動による揺らぎが系全体に広がるか、揺らぎである波束と共に運びさられるかという不安定性の違いを示す。系が周期的であれば移流的に見える不安定波束はやがて元に戻って来るので常に絶対不安定しかあり得ない。また不安定波束と共に動く座標系では常に不安定性は絶対不安定の形で生じる。従って上述の数値計算での不安定性の違いは系の境界 (道路やパイプ) に固定された位置座標系におけるものである。このような考察に基づき彼女等は移流不安定と絶対不安定を分ける線を (h, a) のパラメータ空間に描き、数値計算を非常に良く再現した。[29]

また御手洗と中西 [29] は摂動の影響が振動的に伝播、拡大することも詳しく調べている。有限系固定境界での数値計算で振動解が安定に存在することが観測されるが、振動解の安定性解析から周期境界では不安定な振動解が固定端境界では安定化することなどを見出している。こうした解析は交通流のみならず 1 次元的な粉体流でも基本的な点では共通と思われる。

4 準一次元流の揺らぎ

追い越し禁止の 1 車線の高速道路上では一旦出来てしまった渋滞が安定であることは経験上良く知られている。それ故に弱非線形解析や厳密解で求めた界面解が安定に存在し得る。しかしながら実際の殆んどの道路では追い越しが許されているか、或は 2 車線以上あるので渋滞は必ずしも安定ではない。逆に渋滞を回避しようとして車線の変更を行なうため、新たな渋滞を引き起こす場合もある。つまり適当な条件下では渋滞が自発的に発生と消滅を繰り返す。この結果、渋滞の発生を特徴づけていた界面解は安定ではなく、構造もぼやけたものになる。その一方で渋滞の生成・消滅から交通流における密度のパワースペクトル[10] において発生する $1/f$ 揺らぎは観測事実としてよく知られている。武者と樋口 [30] は高速道路のある地点で観測時間を等分し、その区切られた時間内に観測点を通過する車の台数の時系列から作ったパワースペクトルが $1/f$ 揺らぎに従うとしている[11] 。こうした揺らぎは、ドライバーや車の個性がなく、追い越しが禁止されているモデルからは作

[10] ある観測点で時刻 t の密度を $\rho(t)$ とし、統計平均を $< \cdot >$ で表したとき、$C_\rho(t) \equiv < \rho(t)\rho(t+\tau) >$ を自己相関関数という。そのフーリエ変換 $\int dt e^{i\omega t} C_\rho(t) = < |\tilde{\rho}(\omega)|^2 >$ をパワースペクトルと呼ぶ。角振動数 ω のかわりに振動数 f を用いる事が多い。両者の関係は $\omega = 2\pi f$ である。

[11] しかし、彼らの論文 [30] を読むと実際には観測データは $1/f$ というよりも $1/f^{1.4}$ に近く、後述の Burgers 方程式を用いた理論解析には指数 1.4 を用いている。

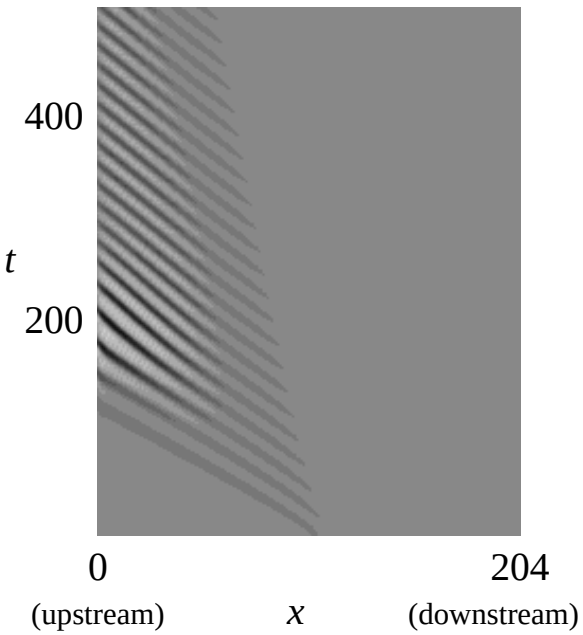

図 3: 境界がある系での最適速度モデル (2) 式の数値計算で観測された移流不安定に伴う渋滞.[29]

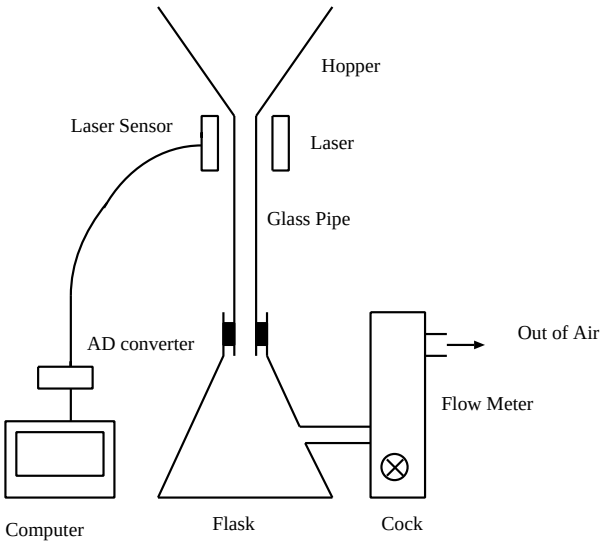

図 4: 文献 [31] での実験のセットアップ。[31]

り出す事はできず、追い越し等のランダムネスが $1/f$ 揺らぎを作り出している。こうしたメカニズムは一般の $f^{-\alpha}$ 揺らぎの生成に関して何らかの示唆を与えるものであろう。

一方、交通流が車の流れである必然性はどの位あるのか。例えば、車を粒子に置き換えたらどうか。勿論、車の運動はガソリンの消費と速度調節を伴っており、エネルギーの保存はない。故に車の集団は砂やガラス、土といった粉の集団、つまり粉体と同様の散逸粒子系と見做すことが可能である。細かな事を気にしなければ交通流と粉体流は似たなものである。実際、図 3 に示した簡単な装置中で粉体を落下させると交通渋滞の様な密度の詰まった所が自発的に形成される。実際にパイプの両脇からかけた透過電圧 (密度と線形の関係にある) からパワースペクトルを作ると $1/f$ 揺らぎが観測される。交通流と同様に実際にはパワースペクトルは $f^{-\alpha}$ であり、従来は $\alpha \simeq 1.5$ 辺りとされて来たが、最近のより注意深い実験によって $\alpha = 4/3$ であることが明らかになって来た [31]。

もう一つ指摘しておかなければならないのは境界条件の重要性である。例えば粉体の実験に於いて空気が自由に流れるとすると粒子は自由落下の様に加速を続けて密度波は殆んど形成されない。一方、粉体の実験で空気の流量を例えば完全に止めてしまえば近似的に周期境界条件と同じ状況になる。即ち粉体を最初に溜めておくホッパーとパイプの終端では殆んど粒子は動くことができない。この時は明白な密度波が形成される。交通流でも一方の端を自由走行として渋滞状態から走らせ始めたら渋滞がなくなるのは当然の事であるし、渋滞した料金所の間で高速道路を自由走行する車が渋滞しやすく、また周期境界条件下での状況と似て来るのは肯ずける。

渋滞或は密度波の生成・消滅を特徴づける一つの量は先に指摘したパワースペクトルである。しかし先に指摘した通り、境界条件が重要なので注意深い観測か実験が必要である。交通流の場合は料金所での流量をコントロールしながら実験するのは実際上不可能であるが粉体の実験の場合は容易である。既に触れた通り空気が自由に流れ得る状況ではパワースペクトルには特徴的なべき則などは現れない。一方、完全に空気の流れを遮断して粉体を流すと極めて特徴的なべき則

$$P(f) \sim f^{-\alpha} \tag{23}$$

が観測される。上端にあるホッパーからの位置 80 cm, 90 cm, 1 m での実験で得られた α の最確値はそれぞれ $\alpha = 1.33 \pm 0.04, 1.31 \pm 0.05$ 及び 1.34 ± 0.05 であり、$\alpha = 4/3$ であることを強く示唆する。またこの値は Peng and Herrmann[32] が CA を用いて行なったシミュレーションから評価した値と一致している。更に (3) 式を 2 車線に拡張したモデル[12] でも同様の結果が得られている [33]。

さて実験やシミュレーションでパワースペクトルに対して $\alpha = 4/3$ とした (23) 式が成立している。ではそのメカニズムはどうなっているのか。そのためには解析しやすい簡単なモデルも必要である。$\alpha = 4/3$ を説明する一つのアイデアとして Langevin 方程式に基づくモデルの導入とその線形緩和理論によるパワースペクトルの計算がある [10, 31]。ここでは (5) 式を粒子間距離の方程式に書き換えた時に、粒子の追い越しで急に車間距離が変わるという効果をランダムなノイズと見做すのである[13] 。このモデルのシミュレーション

[12] 各車はレーンに応じてイジングスピン変数を持ち、スピンの反転に対応して車線変更をする。

[13] 1 章に述べた通りある自由度を消去して特定の自由度のみに着目するとノイズが現れる。この場合は追い越しができる多重レーンの交通流や粉体流を 1 次元系に射影することで (一般には相関のある) ノイズが

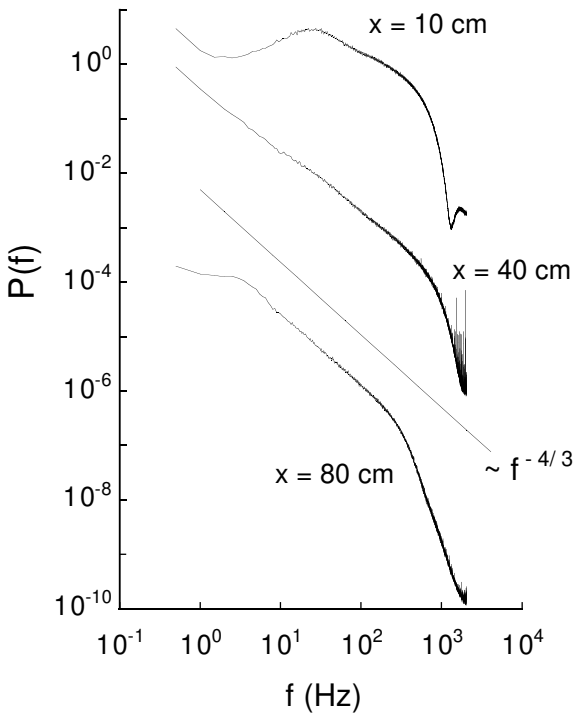

図 5: コックを閉じた系での実験で観測されたパワースペクトル [31]

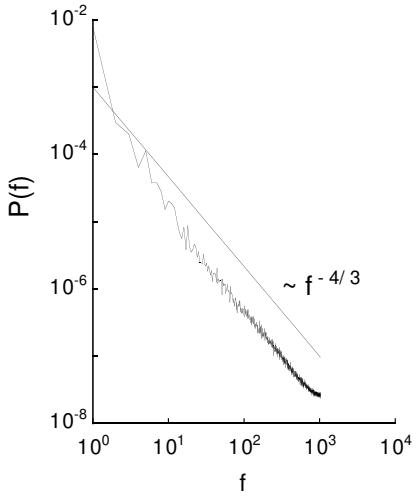

図 6: 中立線近傍の Langevin 方程式のシミュレーションで得られたパワースペクトル [31]

でも図 4 から分かる通りパラメータ領域がノイズを無視したときに中立線近傍では明白に $\alpha = 4/3$ が現れた [10, 31]。ノイズによって常に供給される揺らぎ (渋滞の芽) は長時間生き残るため、中立線そのものの意味はぼやけて線形弱安定領域でも弱不安定領域でも結果には大きな違いはない。そこで弱安定領域での揺らぎの緩和を考慮しつつパワースペクトルを計算すると解析的に $\alpha = 4/3$ であることを示す事ができる。詳細は原論文 [10] に譲るとして、その結果を得るポイントは中立線近傍では緩和する波の振動数 f と波数 k の間に $f \sim k^3$ という分散関係があることと、中立線近傍の臨界的状況では時間スケールが発散していることである。

Langevin 方程式のモデルによって、交通流や粉体流でのパワースペクトルは曲がりなりにも説明できた気分になっている。しかし、Langevin モデルでも不安定領域に入ると解が爆発しないために非線形効果が効いている筈であり、その点についての解析が欠如している。またモデルそのものの正当性についても議論しないといけない。また粉体流の実験では特に調節もしていないにも拘らず、臨界的状況が実現しているメカニズムも明確ではない。この辺りは今後はっきりさせる必要がある。更にこうした法則が雪崩や土石流など斜面上を流れる 2 次元的な粒子流でも成立するかどうかは興味深いところである。

生じる。

5　高次元の流動層と交通流モデルの乖離

実は多車線の交通流モデルにあまり良いモデルはない。車線変更のルールに任意性が大きい上に解析が難しい点があげられる。文献 [33] はその中で最も簡単な一つのモデルであるが現実性の点で問題があるのと車番が車線変更の度に入れ替わるために理論解析が難しく、研究の進展はない。実際、前節で示したようなスペクトルが観測できるということは車の動きが複雑な相関を持ちつつランダムに動いていることを意味するのでその解析は容易ではない。気体の影響の少ない粉体の流れでは粒子は割と同じレーンに沿って動くので分子カオスを仮定した解析よりもむしろ多車線交通流の解析から得ることは多いであろう。

一方、高次元の流動層で特徴的なのはバブリング、スラッギング、乱流、高速流動層における相分離と交通流では考えられないダイナミックな様々な相を取ることである。10 年程前からこれらの相の殆んどがシミュレーションで再現できるようになり、工学的な研究はおおいに進展したが、バブリングの機構一つとっても何故それが生じるかを理論的に説明することは未だに難しい。その意味では十数年前に Batchelor が語った「混相流研究は 1930 年代の乱流研究の置かれている状況に等しい」という言葉は彼亡き後もまだ生きている。

本稿を読んでいる混相流の専門家に対してメッセージを送るのであれば普段使いなれている混相流の複雑なモデルに比べて交通流モデルの簡単さに注目して欲しい。その簡単さ故に非専門家が興味を持ち、理論解析も可能になり、いろいろな処に共通概念を援用できる結果をもたらした。その意味で現象の忠実な再現という目的から一歩引いた解析しやすいモデル化をしてみるという遊び心があればと思う。特に著者の回りでは著者自身も含めて流動層の理論解析にトライしつつ全ての試みは徒労に終って、物理学者の単純な頭では混相流はとても理解できないという諦めに似たムードが漂っているのも事実である。その現状を打破するには何か本質を捉えた実験やモデル化があればと期待している。

6　まとめ

本稿では筆者の研究歴に従って漫然と交通流と粉体流について解説を試みた。最近では交通流は切り離して粉体流の研究に集中しているので解説の題材そのものが古く迫力に欠けた点は御容赦願いたい。また題材の取捨選択に関して客観的な解説を目指したのではなく純主観的な解説を指向したことを断っておく。従っていちいち名前を記さないが全ての共同研究者に謝意を表したい。とりわけ図の便宜を図ってくれた共同研究者の御手洗菜美子さんには感謝している。

参考文献

[1] D. Helbing, Rev. Mod. Phys. **73**, 1067-1141 (2001).

[2] 応用数理 Vol.12 No.2, 6 月号 (2002).

[3] 早川尚男, 応用数理 Vol. 12, No.2, 49-63 (2002).

[4] 早川尚男、那須野悟：粉体の物理 (現代物理最前線１、共立、2000).

[5] e.g. G.B.Whitham, Linear and Nonlinear Waves (Wiley, New York, 1974); R. Huberman, Mathematical model: Traffic flow (Prentice Hall, 1977);

[6] 越正毅 編著 「交通工学通論」(技術書院、1989).

[7] 河上省吾、松井寛、「交通工学」(森北出版, 1987).

[8] M.Bando, K.Hasebe, A.Nakayama, A.Shibata and A.Sugiyama, Phys.Rev.E **51**, 1035-1042 (1995).

[9] H. Hayakawa and K. Nakanishi, Phys. Rev. E **57**, 3839-3845 (1998).

[10] H. Hayakawa and K. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. Suppl. **130**, 57-75 (1998).

[11] B.S.Kerner and P.Konhäuser, Phys.Rev. E **48**, 2335-2338 (1993).

[12] G.K.Batchelor, J.Fluid Mech. **193**, 75-110 (1988).

[13] S.Sasa and H.Hayakawa, Europhys.Lett. **17**, 685-689 (1992).

[14] T. S. Komatsu and H. Hayakawa, Phys. Lett. A **183**, 56-62 (1993).

[15] M. F. Göz, Phys.Rev.E **52**,3697-3710 (1995).

[16] R. Jackson, The Dynamics of Fluidized Particles (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000).

[17] S. Wada and H. Hayakawa, J. Phys. Soc. Jpn. **67**, 763-766 (1998).

[18] J. M. Burgers, The Nonlinear Equation (Riedel, Boston, 1974).

[19] e.g. K. Nagel and M. Screkenberg, J. Phys. I (Paris) **2**, 2221 (1992): S. Yukawa, M. Kikuchi and S. Tadaki, J. Phys. Soc. Jpn. **63**, 3609 -3618(1994).

[20] K. Nishinari and D. Takahashi, J. Phys. A **31**, 5439-5450 (1998).

[21] G. B. Whitham, Proc. Roy. Soc. Lond. A **428**, 49-69 (1990).

[22] T. S. Komatsu and S. Sasa, Phys. Rev. E **52**, 5574-5582 (1995).

[23] Y. Sugiyama and N. Yamada, Phys. Rev. E **55**, 7749-7752 (1997).

[24] K. Nakanishi, K. Itoh, Y. Igarashi and M. Bando, Phys. Rev. E **55**, 6519-6532 (1997).

[25] Y. Igarashi, K. Itoh and K. Nakanishi, J. Phys. Soc. Jpn. **68**, 791-796 (1999):

[26] Y. Igarashi, K. Itoh, K. Nakanishi, K. Ogura and K. Yokokawa, Phys. Rev. Lett. **83**, 718-721 (1999):

[27] Y. Igarashi, K. Itoh, K. Nakanishi, K.Ogura and K. Yokokawa, Phys. Rev. E **64**, 047102 (2002).

[28] M. Toda, J. Phys. Soc. Jpn. **22**, 431 (1967), ibid. **23**, 501 (1967).

[29] N. Mitarai and K. Nakanishi, J. Phys. Soc. Jpn. **68**, 2475 -2478(1999): Phys. Rev. Lett. **85**, 1766-1769 (2000): J. Phys. Soc. Jpn. **69**, 3752-3761 (2000).

[30] T. Musha and H. Higuchi, Jpn.J. Appl. Phys. **15**, 1271 (1976): ibid, **17**, 811 (1978).

[31] O. Moriyama, N. Kuroiwa, M. Matsushita and H. Hayakawa, Phys. Rev. Lett. **80**, 2833-2836 (1998).

[32] G. Peng and H.J.Herrmann, Phys. Rev. E **49**, 1796-1799 (1994): ibid **51**, 1745-1756 (1995).

[33] 鷹合孝之：修士論文 (京都大学 1998): see also H. Hayakawa and T. Takaai, Universal Mathematical Structure in Quasi 1D Fluid-Particle Systems in Advanced Technologies for Particle Processing (AIChE publ.) Vol.II pp. 521-526.