粉体ダイナミックス: 気体論的アプローチから何が言えるか

早川尚男
Hisao Hayakawa *

概 要

Key Words: Dynamics, Granular gas, Boltzmann equation, Chapman-Enskog method, long-range correlation

1 はじめに

粉体のダイナミックスに関連した現象は余りにも多彩である。加振したり気体を流したり、かき回したり、容器を動かしたりしても人を魅了し、かつメカニズムのはっきりしない現象に多く遭遇する。それらの現象をいちいち紹介していたらきりがないので本稿では現象そのものの紹介は一切省くことにする。[1]

また粉体素子の運動そのものも殆んど分かっておらず、例えば離散要素法 (DEM)[2] 等の粒子モデルに含まれる多くのパラメーターを決める処方は今の処ない。こうした側面については連載講座の中で別の原稿が予定されているので本稿では記述を一切省く [3]。

では何を書こうとするのかというと粉体の非平衡統計力学的側面である。また統計力学の延長としての流体力学についても紹介する。尚、静止した粉体集団の統計力学も興味深い話題であるが、連載講座の中で他の原稿が予定されているので記述を省くことにする。

このように粉体の統計力学について解説を書くのであるから統計力学の知識は前提とする。本学会の読者の中には学部時代に統計力学の講義を受けなかった者もいるかもしれないが、学部の講義の初回で紹介する様な内容の拡張を議論しようとしている。学部時代に統計力学の講義を受けた人は扱っていた対象が殆んど気体であったことを思い出すだろう。固体の統計力学は量子論が不可欠であるばかりでなく他にもいろいろ複雑な側面がある。液体の統計力学は未だ完成していない。従って本稿でも気体を中心に議論することになる。

粉体に気体はないという批判もあろう。無論、読者が興味を持つ現象の殆んどでは粉体は互いに複数接触した状態にある。せいぜい実験的に有効なのは Rapid Granular flow と呼ばれる早い流れである。それも流れている領域の底が平らであれば固まって集団で流れ

*京都大学大学院人間・環境学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田二本松町) Tel 075-753-6782. (著者紹介): 1986 年京都大学理学部卒, 1991 九州大学理学博士, 東北大学助手を経て 1996 年より京都大学助教授。専門：非平衡統計力学

るので最早 Rapid Granular flow あるいは collisional flow とは呼べない。むしろ本稿では重力の影響もない状態を考える。そんなものを考える意味があるのか、と問われたら、そんな基本的な事も分からないのに難しいことを考えてどうすると開き直るしかない。否、本稿の背後にある滔々たる歴史と格調を感じ取って欲しい。それが筆者の願いである。

このように些か迷走気味である本稿がどのように展開するのか筆者にも分からない。筆の赴くまま気の向くまま自由に論を進めて行きたい。尚、特に断らない限り本稿では３次元の結果を紹介することにする。

2　気体論の概略

統計力学の初回で何を教えるか。講師によって様々な立場があるであろうが筆者は高校で習った気体論をおさらいしてから Maxwell による気体論を紹介する。Maxwell[1] は速度の各成分が独立であり、速度分布関数が速さのみに依存するという要請だけで Maxwell-Boltzmann 分布を導出している。無論気体以外では Gauss[2] の方が早く導入しているので Gauss 分布あるいは正規分布という言い方でも構わないが統計力学や本稿では Maxwell-Boltzmann 分布として話を進める。[3] Maxwell といえば電磁気学を完成させた人というイメージが強いかもしれない[4] が統計力学における足跡も通常開祖とされる Boltzmann[5] や、理論形式を整備して本日見る形にした Gibbs [6] のそれを凌ぐものがある。Maxwell は晩年 Cavendish[7] の研究業績を発掘することに捧げ若くして亡くなったが、仮に Maxwell が統計力学の研究を晩年行なっていれば Boltzmann はあの悲劇的な死を迎えることもなく詩人 Rilke[8] も名作「ドゥイノの悲歌」を残すことはなかったかもしれない。実際、気体論を用いて粘性率や熱伝導率を導出しただけでなく実験的にもその予言の正しさを実証している。また後程紹介する気体分子間の相互作用ポテンシャルが距離の-4 乗に比例する Maxwell

[1] James Clerk R. Maxwell (1831-79): 電磁気学を完成させただけでなく熱力学にも名前を残す。また統計力学の礎を築いたという見方もできる。

[2] Friedrick Karl Gauss (1777-1855): 代数学の基本定理等史上最大の数学者の一人として知られるが電磁気学や地磁気学でも有名である。

[3] 講義ではそこで「偏差値は知っているか」と聞く機会が多いが偏差値秀才の筈の学生は殆んどその定義を知らないのが現状である。

[4] 実際に今見る形にまとめたのは Heviside であるのでそういうイメージは必ずしも正しくないかもしれない。Maxwell による'Maxwell 方程式' は重要な方程式とそうでない方程式が混在していて甚だ整理の悪いものであった。

[5] Ludig Boltzmann(1844-1906): 1872 年に Botzmann 方程式を導き、熱力学を力学的に導出したとしたが、その後激しい論争を引き起こした。特に反原子論の旗頭の Ersnt Mach との論争は苛酷であり、彼の自殺と関係があったと見る人もいる。そうした論争を通して平衡及び非平衡の統計力学の基礎が固められていったと言える。

[6] Josiah Willard Gibbs (1839-1903): 熱力学でも Gibbs の自由エネルギーに名を残す等卓越した業績を挙げたが、アンサンブルの概念を確立し平衡熱力学を独力で建設した業績は不朽である。

[7] Henry Cavendish (1731-1810): クーロンの法則や水素等数々の法則や物質を発見しながら公表しなかった事で有名な科学者。当時英国有数の富豪であり女嫌いであったことなど変人としても有名。Maxwell が彼の業績を発掘し、彼のノートに書いてある通りに実験して Cavendish の先駆性は明らかになった。

[8] Rainer Mari Rilke (1875-1926)：詩人。散文では「マルテの手記」、韻文では「ドゥイノの悲歌」がよく知られている。ロダンの秘書をしていたときの逸話：詩人コクトーが毎夜遊び歩いていたときにいつも深夜迄灯りのついた窓に気がついたが、それがリルケの部屋だった：が彼の実直な性格を表している。ドゥイノはトリエステ郊外にあり Boltzmann が自殺した場所。

model も彼が導入している。

さて Maxwell に続いて Boltzmann が分布関数の時間発展を議論できる枠組を用意した。それが Boltzmann 方程式である。Boltzmann 方程式は位置 $\mathbf{r}$ に速度 $\mathbf{v}$ の粒子が時刻 t に存在する確率 (分布関数) $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ の従う方程式であり、外場 $\mathbf{F}$ の下で

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = J[f, f] \tag{1}$$

と現わされる。ここで (1) 式の右辺は衝突項と呼ばれ, 近接 2 分子間の衝突によって分子の速度がそれぞれ $(\mathbf{v}^*, \mathbf{v}_1{}^*)$ から $(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)$ に変化する際の分布関数の変化を表す。[9] Boltzmann は衝突項の具体的表現として分子が接近する際の相対速さ $g = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|$ と散乱角 θ を用いて

$$J[f, f] = \int d\mathbf{v}_1 \int d\Omega g s(g, \theta)(f^* f_1{}^* - f f_1) \tag{2}$$

であるとした。但し $f = f(\mathbf{v})$, $f_1 = f(\mathbf{v}_1)$, $f^* = f(\mathbf{v}^*)$ 等であり, $d\Omega$ は図に示す散乱方向の微小立体角, $s(g, \theta)$ は微分散乱断面積である。ここでハードコア球の場合は粒径 σ に対して $s(g, \theta) = \sigma^2$ であるが Maxwell model では $s \propto 1/g$ となり衝突項が相対速度 g に依存しなくなる。

Boltzmann は Boltzmann 方程式の解として空間的に一様で速度分布が Maxwell-Boltzmann 分布に従うものがあるだけではなく、任意の分布が Maxwell-Boltzmann 分布へ緩和することを示した。言い替えるならば彼は分布関数を用いてエントロピーに相当する H 関数

$$H = \int d\mathbf{v} f \ln f \tag{3}$$

を導入し H 関数が単調に減少する (エントロピー $S = -H$ が単調に増加する) ことを示したのである。今日ではこの事は H 定理として知られている。

程無く Boltzmann 方程式の不可逆性は力学の可逆性と矛盾するという反論にさらされるなど、その成立条件を巡って激しい議論があった。Boltzmann 方程式では分布関数の積に比例した衝突積分を持つが、その衝突数の仮定は分子がカオス的に混合しているときに正当化されるという事に落ち着いた。また 20 世紀に入って Chapman, Enskog 等によって気体分子運動論は質的に発展した。特に彼らは衝突の際の保存則である質量の保存則、運動量の保存則、エネルギーの保存則と対応して流体力学変数である数密度 $n(\mathbf{r}, t) \equiv \int d\mathbf{v} f$, 速度場 $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{n} \int d\mathbf{v} \mathbf{v} f$, 温度場 $T(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{2}{3n} \int d\mathbf{v} \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 f$ があり[10] 、その変数が従う流体力学方程式及び粘性率や熱伝導率等の輸送係数を系統的に導出する処方を確立した (Chapman-Enskog 法)。[4] 但し $\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ は速度揺らぎである。Enskog はハードコア系に対して現象論的に $f f_1$ を接触点での平衡位置の 2 点相関関数 $\chi(n)$ を用いて $f f_1 \chi(n)$ に置き換える事で高密度ガスでも使える Enskog 方程式を導入している。[11]

有限濃度系で問題になる相関効果が真剣に論じられたのは 1960 年代半ばの事である。Enskog 理論は Boltzmann 方程式での分布関数の積に分子位置の平衡相関関数を掛け合わ

[9] 衝突の各プロセスは時間反転対称であるから衝突前の $(\mathbf{v}^*, \mathbf{v}_1{}^*)$ と $(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)$ から更に衝突した $(\mathbf{v}', \mathbf{v}_1{}')$ とは等価である。

[10] Boltzmann 定数は 1 とする。

[11] $\chi(n)$ は密度 (体積占有率) の関数であり、それを精度良く決める理論に関しては膨大な蓄積がある。

せただけのものであったが相関効果をより真面目に取り入れた研究がその頃なされるようになった。特に問題になったのは粘性率等の輸送係数が密度展開 (ビリアル展開) をした場合有限次数で発散することが明らかになったことである (例えば 3 次元では密度の 3 乗に比例する輸送係数の展開項は発散する)。一方で流体力学の正しさは 19 世紀から揺るぎ無いものと考えられてり、その発散は明らかな矛盾を意味した。程無く川崎と Oppenheim[5] が、分子の共同的に衝突する多体効果が重要であって、その項を系統的に取り入れる事で輸送係数は密度では展開できない形で有限になることを示した。このように統計力学と流体力学の矛盾は解決した。しかし 2 次元においては灰色決着であり、輸送係数はシステムサイズの対数に依存して発散するであろうということが理論的にも数値的にも示されている。[6, 7]

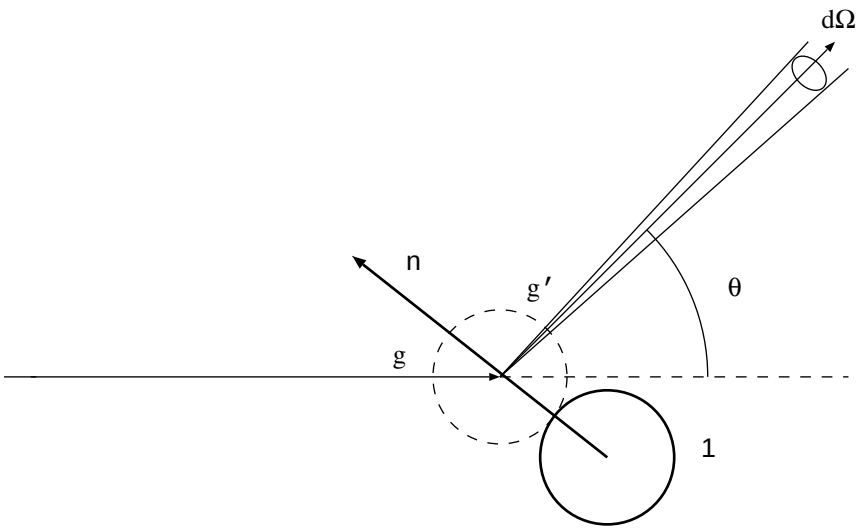

図 1: 剛体球粒子の衝突の概念図。ターゲット粒子は 1 という番号で特徴づけられる。但し非弾性の効果を取り入れており共通法線に対称でない散乱が見られることに注意。

3 粉体ガスとは何か

前節で気体論の歴史を駆け足で紹介した。読者の中には初めて知った事実もあるだろうし、そんなことが粉体と何の関係があるのであろうかと訝しがる向きもあるだろう。しかし粉体ガスと呼ばれる理想的な状況では非平衡統計力学の歴史を踏まえた研究が必要になるのである。

そもそも粉体ガスとは何か？粉体の最大の特徴は散逸である。従って問うべき問いは散

逸の存在によって世の中が如何に変わるかということである。その目的のために前節での議論で相対速度 $\mathbf{g} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ が $\mathbf{g}'$ に変化するハードコア的な衝突においてはねかえり係数 e を

$$\mathbf{g}' \cdot \mathbf{n} = -e(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) \tag{4}$$

で導入する。ここで $\mathbf{n}$ は図 1 に示すように接触した際の共通法線である。一般にはねかえり係数は定数ではなく、接線方向の衝突でもエネルギー散逸があるがその影響は無視してみることにする。(4) 式に従う衝突では 1 回の衝突で運動エネルギーは

$$\Delta E = -\frac{1-e^2}{4} m(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})^2 \tag{5}$$

だけ変化する。従って高校で習うように e は $0 \leq e \leq 1$ の値を取る。[12] ここで注意すべきはこのモデルでは衝突は瞬間に起き、粒子が接触したままの状態を保つことが出来ない点である。その意味で本当の粉体のモデルとなってはいないのであるが、そのルールの簡単さ故に高速シミュレーションのモデルとして多く使われる機会がある。

(5) 式のために外場がない場合に温度 T は冷却していく。系が一様であるとすればその冷却の式は

$$\frac{dT}{dt} = -2\gamma_0 \omega T \tag{6}$$

と書けるであろう。ここで ω は衝突頻度であり $\gamma_0 = (1-e^2)/4$ は 1 回の衝突でのエネルギーロスと考えればよい。次元解析から $\omega \sim n\sigma^2\sqrt{T/m}$ と書けるので、衝突頻度でスケールした時間 $d\tau = \omega dt$ に対して

$$T(t) = T_0/[1+\gamma_0 \omega t]^2 = T_0 \exp[-\gamma_0 \tau] \tag{7}$$

という解を持つ。この式は Haff's law として知られる。[9]

前節で Chapman-Enskog 法を紹介したが, その概略を粉体ガスの場合を例に取って説明しよう。但し外場 $\mathbf{F}$ のない Boltzmann 方程式はハードコアの粉体ガスでは

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = \sigma^2 \int d\mathbf{v}_1 \int d\Omega \Theta(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) [\frac{f^* {f_1}^*}{e^2} - f f_1] \tag{8}$$

と変更される。[10] つまり衝突項 $J[f,f]$ が右辺のようになった訳である。$x > 0$ に対して $\Theta(x) = 1$ でそれ以外は $\Theta(x) = 0$ という関数である。[13] 実際に非弾性衝突の影響は衝突が不可逆になったので例えば衝突前の相対速度 $\mathbf{g}^*$ は $(\mathbf{g}^* \cdot \mathbf{n}) = -\frac{1}{e}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})$ を充たす点と衝突積分中の $1/e^2$ の項の存在である。この $1/e^2$ の項は上記の衝突の際の相対速度の変化と積分の Jacobian から現われる。

さて非弾性 Boltzmann 方程式 (8) に弾性系の衝突不変量をかけて積分してみよう。そうすると

$$D_t n + n \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{9}$$

$$D_t u_i + (mn)^{-1} \nabla_j P_{ij} = 0. \tag{10}$$

[12] 粒子の回転がある場合は $e > 1$ の値を取る場合がある。[8]
[13] この項は弾性系のハードコアでも存在する。

$$D_t T + \frac{2}{3n}(P_{ij}\nabla_j u_i + \nabla\cdot\mathbf{q}) + T\zeta = 0, \tag{11}$$

の式を得る。ここで u_i は $\mathbf{u}$ の i 成分であり $D_t = (\partial/\partial_t) + \mathbf{u}\cdot\nabla$ であり

$$\zeta[f] = 2\gamma\omega. \tag{12}$$

である。但し γ は一様状態の γ_0 を基準状態の値として空間揺らぎの効果を順次取り入れることで逐次的に決まって来る。(10),(11) 式に現われる圧力テンソル P_{ij} 及び熱流 $\mathbf{q}$ は

$$P_{ij} = nT\delta_{ij} + m\int d\mathbf{V}(V_iV_j - \frac{1}{3}V^2\delta_{ij})f \tag{13}$$

$$\mathbf{q} = \int d\mathbf{V}\left(\frac{1}{2}m\mathbf{V}^2 - \frac{5}{2}T\right)\mathbf{V}f, \tag{14}$$

で定義される。ここで (13) の第 1 項は理想気体の状態方程式に他ならない。従って分布関数 f が分かれば全て流体力学は決まる枠組になっている。

当り前の事だが非線形の積分方程式 (8) の厳密解を得ることは不可能である。$e = 1$ の場合は Chapman と Enskog が行ったのは空間的に一様な解を基準解として空間微分を展開パラメーターとして展開する系統的な近似法である。その後の数学的研究によってその手法は漸近的に厳密である事は知られている。勿論この場合の基準解は Maxwell-Boltzmann 分布である。しかし $e \neq 1$ の場合にも同じ方法を適用しようとすると基準解が分からなくなる。基準解が分からなくなるというのは単に Chapman-Enskog 法における方法論的な困難だけではなく統計力学の消失を意味する。実際、(3) 式で導入した H 関数の時間発展に単調性はなくなる。またそれを Tsallis エントロピー[14] $S_q = \int d\mathbf{v}(f^{q-1} - 1)/(1-q)$ に置き換えても同じ事である。このことはいろいろな解析で粉体ガスの一様状態が線形不安定であることと矛盾しない。つまりエントロピーが単調に増加して平衡化するという描像は粉体ガスには局所的にも成立せず平衡統計力学は無力であることを意味する。多くの非平衡問題は局所平衡の存在を仮定しているが粉体の最も簡単なモデルでさえその性質は使えない。そこに粉体ガスの最大の難しさがある。

4 粉体ガスにおける Chapman-Enskog 法

基準解の消失という問題は流体力学の導出という側面にのみに限定したプラグマティックな立場に立てば基準解がない場合にどのように摂動論を構成するのかという問題に直面する。形式的な枠組として Chapman-Enskog 法が有効でもその枠の中にはめこむ方法がないと言い替えてもいい。勿論、同じ問題は摂動の仕方を例えば Grad 展開等の異なった手法に変えても回避できるものではない。従って 80 年代の粉体ガスにおける計算の多くは $e \to 1$ の極限を除いて正しくない。

最も楽観的な立場は局所的に分布関数は Maxwell-Boltzmann 分布に従うとするものである。無論、そこでは陰に $e \to 1$ の極限を議論するという仮定が入っている。この立場で予

[14] Tsallis エントロピーは $q \to 1$ の極限で通常のエントロピー $S_q \to -H = -\int d\mathbf{v} f \ln f$ に帰着する。最近様々な系に応用されて注目されている [11] が多くの場合は単なるパラメーター理論に過ぎない。

言できるのは圧力と散逸率ζである。粘性率等の輸送係数は高密度ガスの衝突に由来する項以外の寄与は消えてしまうが$e \to 1$という陰な仮定を採用しているのであるから弾性気体の結果をそのまま借用することは可能である。Jenkins と Savage[12] や Lun 等 [13] が分かりやすい形でこの手の議論を展開したので今日では標準的な粉体ガスの理論として知られている。程なく Jenkins と Richman[14, 15] によって局所 Maxwell-Boltzmann 分布の仮定は外され Enskog 方程式の成立する濃厚な場合も含めて粉体ガスの理論的枠組に問題はないように信じられる様になった。従って多くの研究者の関心は Enskog 近似が成り立たない更に濃厚な場合にどう考えるか、とか実際の Rapid granular flow にどう適用するかに移って行った。

しかし最近 80 年代の先駆的業績が必ずしも論理的に整合したものではないことが把握されるようになった。特に Sela と Goldhrisch[16] は Jenkins と Richman の Grad 展開法 [14] が$e \neq 1$では正しいものではないことを示し、$1-e$と空間微分による展開が同程度に微小な場合に系統的な摂動展開法を発展させた。尤も彼らの方法は非常に繁雑な手続きを踏まなければならない上に$e \to 1$の極限でしか使えない。そこで Brey 等 [17] はより有限の$1-e$でも使える実践的な摂動展開を発展させて Monte Carlo simulation の結果と良好な一致を見た。また Garzo と Dufty[18] はその手法を Enskog 方程式に適用することにも成功している。しかし基準解がないためにそこに一様状態の摂動解と Maxwell-Boltzmann 分布を混在させる等の無理な手法を用いている。

そうしたフラストレーションのたまる状況は極く最近になって急速に改善されつつある。勿論ハードコア系では状況は変わらないが Maxwell model を非弾性化したモデル [19] の基準解が厳密に求められることが分かって来た。この基準状態での速度分布関数は興味深いことにべきの高エネルギーテールを持つことも分かった。[20, 21] つまり高次のモーメントは発散することになる。また非弾性 Maxwell モデルの流体力学の導出も議論されるようになり、無矛盾かつ系統的な流体力学の導出が可能になった。[22, 23] 結論から云えば Chapman-Enskog 法では低次のモーメントしか効かないので少なくともすぐ後に示す Navier-Stokes 近似ではべきのテールの影響は大きくなく, Brey 等 [17] の方法の有効性を確認した形になっている。

本節の残りで Brey 等 [17] によって一般化された Chapman-Enskog 法の枠組を簡単に紹介しよう。Chapman-Esnkog 法では分布関数の位置依存性が流体力学変数$n, \mathbf{u}, T$に隷従して決まるとする：

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f[\mathbf{v}|n, \mathbf{u}, T]. \tag{15}$$

更に 1 階の空間微分を摂動の展開パラメーターϵとして分布関数を

$$f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \cdots, \tag{16}$$

と展開した後[15] 、$\epsilon = 1$と置く。[16] 更に解の一意性を保証するために可解条件

$$n(\mathbf{r}, t) \quad = \quad \int d\mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int d\mathbf{v} f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \tag{17}$$

[15] 時間微分も同様に$\partial_t = \partial_t{}^{(0)} + \partial_t{}^{(1)} + \cdots$と展開する。

[16] この意味で Chapman-Esnkog 法を Knudsen 数の展開とするのは正しくない。またϵの各次数で計算してからその結果を足し合わせるというのは摂動論では良く行われる。

$$n(\mathbf{r},t)\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \int d\mathbf{v}\mathbf{v}f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = \int d\mathbf{v}\mathbf{v}f^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{v},t) \tag{18}$$

$$\frac{3}{2}n(\mathbf{r},t)T(\mathbf{r},t) = \int d\mathbf{v}\frac{1}{2}m\mathbf{V}^2 f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = \int d\mathbf{v}\frac{1}{2}m\mathbf{V}^2 f^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{v},t) \tag{19}$$

を課す。

摂動のゼロ次解は

$$\partial_t{}^{(0)} f^{(0)} = J[f^{(0)}, f^{(0)}]. \tag{20}$$

で決まる。ここで通常次のスケーリングを仮定する：

$$f^{(0)} = v_0(t)^{-3}\tilde{f}(\mathbf{V}/v_0(t)), \quad v_0(t) \equiv \sqrt{\frac{2T}{m}} \tag{21}$$

従って $f^{(0)}$ を求める偏微分方程式 (20) は $\tilde{f}(\mathbf{c})$ を求める常微分方程式に帰着できる。既に述べた様にハードコア系では (20),(21) 式は解けないが非弾性 Maxwell model では解くことが出来る。またゼロ次で圧力テンソルと熱流はそれぞれ $P_{ij}{}^{(0)} = p\delta_{ij}, \quad \mathbf{q}^{(0)} = \mathbf{0}$ と決まり、ζ も Jenkins and Savage[12] 同様に計算できる。その結果前節で述べた様に温度は外力がなければ

$$T^{-1}\partial_t{}^{(0)}T = -\zeta^{(0)} \tag{22}$$

にしたがって緩和する。このことから $\zeta^{(0)} = 2\gamma_0\omega$ であることが分かる。

摂動の 1 次解は

$$\begin{aligned}(\partial_t{}^{(0)} + L)f^{(1)} &= f^{(0)}(\nabla\cdot\mathbf{u} - \mathbf{V}\cdot\nabla\ln n) + (\partial_T f^{(0)})\left(\frac{2T}{3}\nabla\cdot\mathbf{u} - \mathbf{V}\cdot\nabla T\right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial V_i}f^{(0)}\right)[-(mn)^{-1}\nabla_i p + \mathbf{V}\cdot\nabla u_i].\end{aligned} \tag{23}$$

から決まる。但し線形演算子 L は

$$Lf^{(1)} = -J[f^{(0)}, f^{(1)}] - J[f^{(1)}, f^{(0)}]. \tag{24}$$

で決まる。このとき解の形を

$$f^{(1)} = \tilde{\boldsymbol{A}}(\mathbf{V})\cdot\nabla\ln T + \tilde{\boldsymbol{B}}(\mathbf{V})\cdot\nabla\ln n + \tilde{C}_{ij}(\mathbf{V})\nabla_i u_j. \tag{25}$$

と仮定し、(23) 式を

$$(\partial_t{}^{(0)} + L)f^{(1)} = \mathbf{A}\cdot\nabla\ln T + \mathbf{B}\cdot\nabla\ln n + C_{ij}\nabla_j u_i. \tag{26}$$

と書けば各係数間、例えば $\tilde{\boldsymbol{A}}$ と $\mathbf{A}$ の関係を求めればいい問題に帰着する。そうすることで圧力テンソルと熱流の 1 次の表式

$$P_{ij}{}^{(1)} = -\eta(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot\mathbf{u}) \tag{27}$$

$$\mathbf{q}^{(1)} = -\kappa\nabla T - \mu\nabla n, \tag{28}$$

に現われる粘性率 η、熱伝導率 κ 及び新たに現われた輸送係数 μ を決める事が出来る。勿論 μ は $e \to 1$ でゼロになる量である。また同じ計算を更に高次に進める事で一様状態の安定性も議論することができる。

輸送係数の具体的計算は省略する。一様状態の安定性に関しても議論できずりに伴う緩和モードと熱のモードは長波長で必ず線形不安定になるという事等が分かっている。また多くの場合はずりモードが最も不安定であり、一様冷却状態 (22) は最早有効ではなく、その結果渦構造が生じて来る。$e = 1$ の気体では何も構造をつくらないのに著しい違いを示している。また構造が生じる結果、いずれ低密度での分子カオスの状態を保つ事は出来なくなり相関の効果を必然的に考える必要が生じる。つまり Boltzmann 方程式で閉じた議論は出来ないのである。

5 多体相関と Fluctuation hydrodynamics

川崎と Oppenheim[5] の研究に続く気体の多体問題の研究で 2 次元に流体力学があるかどうかという問題が灰色決着になったのはその難しさと 2 次元という特殊な状況に対する物理的な意味の無さのためであろう。しかし粉体ガスではシミュレーション研究が先行している上に可視化の問題から 2 次元的な状況で実験をする場合が多く、2 次元の問題が深刻な問題となり得る。そうでなくても前節に見るように分子カオスの仮定は正しくないために相関効果を議論する必要がある。その場合は 80 年代の粉体研究におけるように平衡分布関数 χ を使う Enskog 近似だけを採用すれば良い訳にはいかない。実際そこでは速度相関が全く考慮されていないが以下に示す様にその効果は重要である。

まだ粉体ガスにおいてまともに相関効果を議論した研究は多くない。しかしながら最近の Noije と Ernst 等の一連の研究 [24, 25, 26] は紹介するに値すると思われる。正直な処彼らの研究はまだ完全に無矛盾とは云えないとは思うが速度相関関数

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{V}\int d^d\mathbf{r}' < u_\alpha(\mathbf{r}+\mathbf{r}',t)u_\beta(\mathbf{r}',t) > \tag{29}$$

を初めて陽に議論し、d 次元では距離 r に対して r^{-d} に比例する長距離相関があることを示した。但し $< \cdots >$ は分布関数 (揺らぎ) による平均を表す。詳細は原論文に譲るとしてその議論の概略は以下の様である。

そのために上記の $G_{\alpha\beta}$ 及びその Fourier 変換 $S_{\alpha\beta}(\mathbf{k},t)$ を

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(\mathbf{r},t) &= \hat{r}_\alpha\hat{r}_\beta G_{\parallel}(r,t) + (\delta_{\alpha\beta} - \hat{r}_\alpha\hat{r}_\beta)G_{\perp}(r,t), \\ S_{\alpha\beta}(\mathbf{k},t) &= \hat{k}_\alpha\hat{k}_\beta S_{\parallel}(k,t) + (\delta_{\alpha\beta} - \hat{k}_\alpha\hat{k}_\beta)S_{\perp}(k,t) \end{aligned} \tag{30}$$

と書く。ここで $\hat{k}_\alpha$, $\hat{r}_\alpha$ は $\mathbf{k}, \mathbf{r}$ の方向の単位ベクトルの α 成分を表す。また (30) 式の添字 $\parallel$, $\perp$ はそれぞれ縦方向 (圧縮に対する) 相関、横方向 (ずりに対する) 相関を表す。また次元解析から相関長 ξ を $\xi \equiv \sqrt{\nu/\omega\gamma_0}$ で導入できる。但し $\nu = \eta/\rho$ は動粘性率である。ここで $\gamma_0 \propto 1 - e^2$ から ξ は $e \to 1$ で発散することに注意して欲しい。$e \to 1$ の極限で相関が発散することは注目に値する。

ここで $N-$ 体分布関数を $\rho(\Gamma,t)=\rho(x_1,x_2,\cdots,x_N,t)$ としよう。但し $x_i=\{\mathbf{r}_i,\mathbf{v}_i\}$ である。この ρ の従う Liouville 方程式を

$$[\partial_t+\mathcal{L}^0(\Gamma)]\rho(\Gamma,t)=\sum_{i<j}T(ij)\rho(\Gamma,t) \tag{31}$$

と書く。ここで ${\mathcal{L}^0}_i=\mathbf{v}_i\cdot\nabla$, $\mathcal{L}^{(0)}=\sum_{i=1}^N{\mathcal{L}^0}_i$ で $T(ij)$ は 2 体衝突オペレーターである。s-粒子分布関数を $f_{12\cdots s}\equiv\frac{N!}{(N-s)!}\int dx_s\cdots dx_N\rho(\Gamma,t)$ とすると s-体分布関数は次のような BBGKY ヒエラルキー[17] を構成する：

$$\begin{aligned}(\partial_t+{\mathcal{L}^0}_1)f_1 &= \int dx_2T(12)f_{12}\\ (\partial_t+{\mathcal{L}^0}_1+{\mathcal{L}^0}_2-T(12))f_{12} &= \int dx_3[T(13)+T(23)]f_{123}\end{aligned} \tag{32}$$

ここでは 2 体分布関数で話を終えたが 1 体分布には 2 体分布の情報が必要で、2 体分布には 3 体分布の情報が必要となるのでいつまでも閉じた形の相関関数が得られない多体問題ではお馴染みの方程式系である。

ここで彼らはリング近似を採用する。数学的には本質的な 3 体以上の相関を無視して[18]、2 体相関の発展式で g_{12} に直接作用する $T(12)$ の項の寄与を無視した事に相当するが物理的には図のように球突き状に粒子が衝突を起こし、その衝突の履歴を引きずった相関を生むプロセスのみを考慮することに相当する。このリング項を考えて $S_\perp(k,t)$ が

$$S_\perp(k,t)=\frac{T}{mn}\left\{1+\frac{\exp[2\gamma_0\tau(1-k^2{\xi_\perp}^2]-1}{1-k^2{\xi_\perp}^2}\right\} \tag{33}$$

となる。ここで τ は 1 粒子当たりの平均衝突回数で測った時間であり γ_0 は一様冷却状態において $T(\tau)=T(0)\exp[-2\gamma_0\tau]$ を充たす cooling rate である。また $\xi_\perp$ は横方向の速度相関長であり動粘性率 $\nu=\eta/\rho$ を用いて $\xi_\perp\sim\xi=\sqrt{\nu/\omega\gamma_0}$ で見積もられる. [19] この (33) 式の逆 Fourier 変換をすると

$$G_\perp(r)\sim r^{-3} \tag{34}$$

という長距離相関が生じる。この長距離相関は $e\neq1$ で現われる非平衡系に特徴的なものである。因みに 2 次元系では (33) 式には変更はないが (34) 式のべきの指数は-2 となる。また $G_\parallel(r)$ も $G_\perp(r)$ から計算可能であり同様の長距離相関を持つ。図 2 に示す通り理論とシミュレーションの結果は非常に良い。

実は同じ結果が Fluctuation hydrodynamics からも得られる。Fluctuation hydrodynamics とは長波長の動きは流体力学で記述し短波長の動きを無相関のノイズで代用するものである。全ての流体の式にノイズがつくがここでは速度の横成分を Fourier 成分で表した線形方程式だけを見てみよう。その式は

$$\partial_t\mathbf{u}_\perp(\mathbf{k},t)+\nu k^2\mathbf{u}_\perp(\mathbf{k},t)=\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{k},t) \tag{35}$$

[17] BBGKY=Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon という 5 人の研究者の頭文字を繋いだもの。

[18] つまり $f_{12}=f_1f_2+g_{12}$ 及び $f_{123}=f_1f_2f_3+f_1g_{23}+f_2g_{13}+f_3g_{12}+g_{123}$ としたときの $g_{123}=0$ としたこと。また高次の $g_{1234}=g_{12345}=\cdots=0$ も仮定してヒエラルキーを切断したこと。

[19] 彼らの見積もりでは $\xi_\perp/\xi$ はおよそ 5 程度となっている。

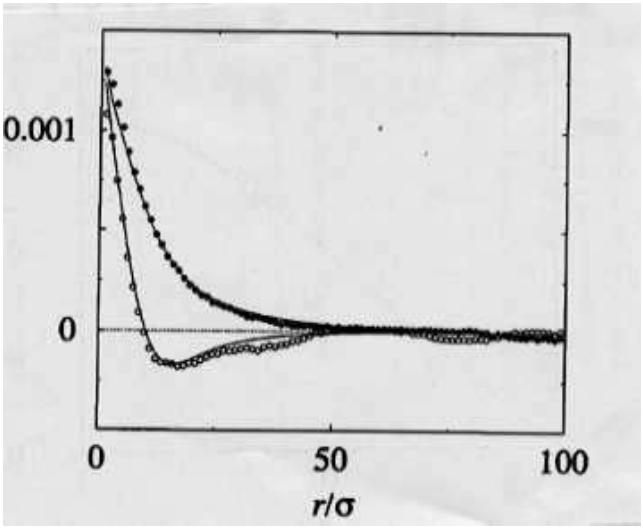

図 2: 2 次元の理論 (実線) とシミュレーション (データ) による相関関数 $G_\perp(r)$(白抜きの円で示したデータ) と $G_\parallel(r)$ を T/m のユニットで表現したもの。パラメーターは $e = 0.9$, 及び面積占有率は 0.4 である。[26]

ここでノイズ項は

$$< \hat{F}_\alpha(\mathbf{k}, t)\hat{F}_\beta(\mathbf{k}', t') >= 2\delta_{\alpha\beta}T\frac{\nu}{n}k^2\delta(t - t')\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \tag{36}$$

という関係を充たすガウシアンホワイトノイズとする。彼らの運動論の解析では希薄極限として (32) 式での相関 g_{12} を無視しているが、その相関関数は無視できない。それをノイズで表現したとも云える。いずれにしても (35) 式から相関は (33) と同様に計算できることは容易に確認できる。

これらの長距離相関の存在は 2 次元系の非弾性ハードコア粒子の分子動力学シミュレーションで確認されている。しかし同時に線形不安定な領域での線形応答を解析するだけで十分なのかという割り切れない気持は残る。

6 粉体ガス研究の可能性：理想粉体の研究は意味があるか

6.1 非線形領域の問題

前節での相関の問題で触れたように揺らぎは時間と共に増加する。例えば時間を τ で測れば指数関数的に増大する。しかし現実には揺らぎの増大は非線形効果によって押えられる筈である。非線形領域の解析は殆んどないのでこれから考える必要がある。

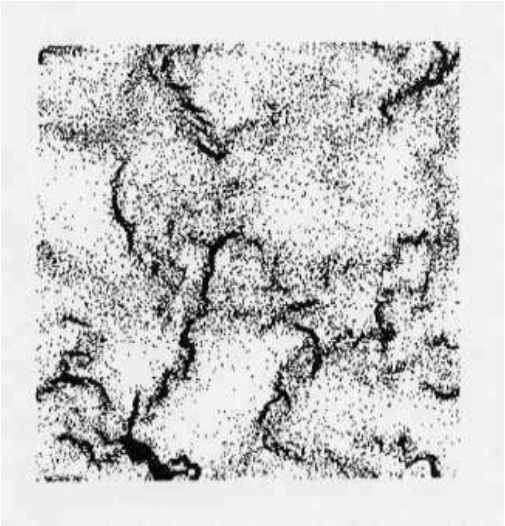

図 3: 40000 個の非弾性衝突をする粒子を一粒子あたり平均 500 回衝突させた後に得られた空間パターン。パラメーターは $e = 0.6$, 及び平均面積占有率は 0.05 である。[27]

実際、粉体ガスの問題がクローズアップされるようになったのは図 3 に示した様なシミュレーションの結果を見てそのパターンの面白さと相関の異方性を認識したからである。[27] 例えば図 3 に示す様な構造が出来た後では温度の緩和率は一様冷却状態から予想されるものよりずっと遅くなる。しかしそのことを説明する理論は皆無と言ってよく、多くの研究者の動機とは別のひどく基礎的な処で研究が停滞しているという印象がある。

また構造が出来た非線形領域では何らかの秩序変数が定義できる可能性があるので相転移の一種と考えられるかもしれない。そうすれば遅い変数 (モード) 間のカップリングが無視できず秩序相と非秩序相の間の浸透圧があって然るべきである。[20] 単相系であるだけにこの手の解析は殆んどないがガラス転移や気液相転移ではモード結合理論が大きな成功を収めているだけに同様の解析はあってもおかしくない。

また相関長が $e \to 1$ で発散しているので Reynolds 数を $\xi\sqrt{T/m}/\nu$ で定義すると Reynolds 数も $e \to 1$ で非常に大きな値を取ることが期待される。果たして 2 次元系の大規模シミュレーションで e が 1 に非常に近い状態では 2 次元流体乱流の特性を殆んど全て持っていることが明らかになっている。[28] しかし非線形性の影響が強いだけに速度相関長は前節で出て来た ξ に比べて遥かに大きい。その系統的な研究が待たれる。

[20] 無論 Enskog 近似に現われる密度に依存する圧力項はそのような項と見做すことは可能である。

6.2 宇宙環境での実験

ここで紹介した粉体ガスは実験の出来ない系である。というのは実際には重力の影響でガス状の粉体を保つことが出来ないからである。このことは工学のみならず物理学においても致命的な弱点である。有り体に言ってどうでもいい問題と取られ兼ねない。

しかしながら本稿を読めば分かる通り粉体の問題設定として最も基本的なものであり、敢えて無意味な数学遊びの批判を受ける可能性を知りつつ工学畑の Savage, Jenkins, Haff といった先駆者達が研究して来た。それだけに役に立たないから愚にもつかない研究と斥けるのは近視眼的に過ぎる対応である。

実際、良く似た現象は多々ある。図 2 での紐状のクラスターは高速流動層におけるクラウドを思い起こさせる。同時に空気中のサスペンションでも似た様なことがあるのではないかという期待もある。しかしそこでは空気を媒介とした流体力学的相互作用があるので実際に類似性を越えて 2 つの異なった現象を比較し得るかどうかは分からない。それについて次にまとめて論じよう。

重力の影響によってガス状態を保つことができないのであれば重力の影響を消してしまったらどうなるのか。幸い現在では宇宙ロケットやスペースシャトルの中での微小重力下での実験が可能になっている。従って重力の影響がない人工的環境で実験をすれば粉体ガスの研究は大手を振って実行することが出来る。

そもそも微小重力下の実験を人工的環境のもとでのものと書いたがそれは正しいのであろうか。地球は小さな塵が凝集して出来たものであり、もともとは (母星としての太陽の重力は無視できない場合が多いものの) 星間塵は粉体の典型である。従って星間塵や小惑星、また惑星の重力の影響を加えて惑星のリングの形成等、粉体物理を星間物理に応用する可能性は大きく広がっている。本稿で紹介したような基礎的な研究が微小重力下での粉体の統計を知る上で重要になることは想像に難くない。

6.3 流体との相互作用

先に触れた様に粉体が地球環境下でガス状に浮遊するには空気が必要である。エアロゾル等のサスペンションの運動で媒介する空気の影響は本質的であり、前節迄に紹介したような冷却化は起こらない。また本連載講座でも紹介されるが粒子間の流体力学相互作用は長距離的でかつ複雑であって本稿の取り扱いは無意味であるように思えなくはない。しかし本当にそうであろうか。

粒子間の流体力学相互作用をまともに扱うと確かに本稿での解説は無意味であるが希薄であってその影響が粒子を浮遊させるだけのものであれば実は本稿の内容はサスペンション系にも適用し得るものである。どういう意味であろうか。非弾性 Boltzmann 方程式 (8) に戻ってみる。このままでは流体の影響はない。そこで

$$\partial_t f + \mathbf{v}\cdot\nabla f = J[f,f] + L_{FP} f \tag{37}$$

という具合に方程式に $L_{FP} f$ を加えてみる。ここで

$$L_{FP} = \tilde{\gamma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\cdot[-\mathbf{v} + \frac{T_B}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}]. \tag{38}$$

というFokker-Planck演算子である。[21] (38)式の第1項は粒子が運動した際に流体から受ける摩擦抵抗(drag)を表現し、第2項は流体の熱運動から粒子が受ける揺動力である。粉体の多くの場合にT_Bの影響は無視できると思うが、面白いことに$T_B = 0$でのL_{FP}が加わった系での定常解と、その影響がない場合の一様冷却状態でのスケーリング解(21)は等価であることが知られている[29]。[22] 勿論真面目な扱いでは$\tilde{\gamma}$の密度依存性や非局所性が問題になっているのであるが定数扱いしたものでも十分流体中のサスペンションの特徴を捉えることは可能である。従ってここで紹介した理論の殆んどはマイナーチェンジをすることでそのままサスペンションの統計力学として取り扱うことが可能なのである。

ここまで読んで頂いた諸兄には粉体ガスの比較的整備された理論が実際の粉体の記述に適しているという事を納得して頂けると思う。理想化された状況はそのままでは実際の系に使えなくてもほぼ同じ別の系に適用できる例は物理学ではよく見られることであるが、粉体ガスもその好例の一つであろう。

6.4 境界の影響と斜面流への応用

「はじめに」で述べた様に粉体ガスの代表的な応用例として考えられて来たのはrapid granular flowである。斜面上の樋に粉体粒子を一挙に流すという状況を考えて頂ければいいだろう。その際に粒子が底との反跳によって空中に巻き上がった状況が実現できれば粉体ガスとして扱える。

粉体を現実に扱う場合は境界の影響が非常に大きい。特に実験室で重力の影響が除去できていない場合には境界条件で殆んど物理が決まると言っても過言ではない。一方で境界は材質によってもその状況によっても千差万別であり、一般論が成立しにくい。熱力学極限を考えるとシステムサイズLに対してバルクはL^3、境界の面積はL^2に比例するので境界の影響はないが重力で目に見えるサイズの粒子が容器の底の方にたまりながら流れたり、流れがあって流れを妨害する形に境界が存在したりする粉体の流れでは熱力学極限は意味を持たない。

粉体流の境界条件に関する理論はいろいろあるがあまりきれいなものではない。代表的な理論はJenkinsの一連の仕事[30, 31]になると思われるが、平らな境界[31]はともかく凸凹のある境界での理論[30]はあまりきれいなものではなく信憑性は乏しい。しかし筆者の経験では境界の影響は大きく、例えば平らな底の斜面に粒子を流すとほぼ必ず粒子は互いに接触しながら流れるいわゆるfrictional flowを形成するが凸凹の境界では衝突が支配的なcollisonal flowあるいはrapid granular flowが形成される。ではどういう状況でどのように両者の遷移が起こるのかについては殆んど何も分かっていない。因みにfrictional flowでは粒子は接触しながらあまり鉛直方向の位置を変えずに流れるので最早分子カオス的な流れにはなっていない。従って流体のストレスとずり速度の関係もNewton流体のような線形のものではなくいわゆるBagnoldのスケーリング, 即ちストレスがずり速度の2乗に比例するという法則に従う[32]。

粉体ガスで境界の影響が大きいと粒子の回転が励起される。その影響で回転をマクロな

[21] Smoluchowski演算子と言った方がいいかもしれないが慣例にならった。
[22] しかしながら輸送係数のはねかえり係数依存性は同じではないようである[22]。

流体力学変数として扱った極性流体の方がより記述に適していると思われる。図では極性流体で記述した粒子の回転場とシミュレーションから構成した回転場の比較であり見事な一致を示している。しかしながら並進速度への影響はこのシミュレーションの場合は大きくない。図からも分かることであるが境界での流体の速度や回転速度は決してゼロではなく大きな値を取る。この境界での値を系統的に決める方法論が待たれるが現在の処存在しない。[33]

7　粉体工学研究者へのメッセージ：まとめに変えて

以上駆け足で粉体ダイナミックスを気体論的アプローチにフォーカスを当てて紹介した。普通の気体論から始まり粉体ガスの特徴を紹介し、その Chapman-Enskog 法に触れ、多体相関と fluctuation hydrodynamics のさわりを紹介し、現実の粉体系との対応をどのように考えるかを一通り紹介した。本稿はある意味で粉体の理論的アプローチが可能なほぼ唯一つの分野に話題を絞ってなるべく計算機シミュレーションや実験のアラカルト的な紹介を避けようとしたものである。一見面白いが底の深くない実験やシミュレーションが溢れていた 7 年程前とはかなり様変わりして様々な状況で実験を束ねる様な理論の萌芽が胎動している事を実感している。そうした時期にこのような解説が書ける状況になったということは筆者にとって感慨深いものがある。

一般には工学者にこういう解説は不向きであり読者層を無視した解説という批判は免れ得ないであろう。一方で工学畑の人にこそこういう解説を読んで頂けたらとも思う。実際、これらの分野で先駆的研究を強力に推進していった人はむしろ理学畑の人ではなく工学畑の人であるからである。

従って実験の方には宇宙環境工学の問題提起と思って頂いてもいいし、エアロゾル等の空気中のダストをどのように扱うのかの示唆を与える基礎理論を紹介したと思って頂いてもいい。また計算機を使う研究者にはより基礎的であれば汎用性は高いのであるから今その場で必要な問題から一歩引いた現象をシミュレートしようという遊び心があればと思う。勿論理想的な状況を解析するのはそれはそれでなかなか難しいものがあるのは事実ではあるが、片手間にする基礎的な仕事を先行投資と考えてみるのも可能なのではなかろうか。

参考文献

[1] 早川尚男, 那須野悟 「粉体の物理」 in 現代物理学最前線 (共立出版,2000) pp.48-116.

[2] e.g. Cundall P. A. and Strack, O. D., 'A discrete numerical model for granular assemblies', Geotechinique **29**, 47-65 (1979).

[3] DEM に関する解説は多い。例えば粉体工学会編「粉体シミュレーション入門」(産業図書, 1998) 等。著者自身の解説も早川尚男,「粉体シミュレーション：DEM の概要と問題点」静電気学会誌 **26**, 64-70 (2002) 等多数ある。

[4] 歴史的な役割を含めて気体分子運動論のクラシックな教科書は Chapman, S. and Cowling, T. G. , The Mathematical Theory of Non-uniform Gases : Third Edition (Cambridge University Press, Cambridge, 1970).

[5] Kawasaki, K. and Oppenheim, I. 'Logarithmic term in the density expansion of transport coefficients', Phys. Rev. **139**, A1763-A1768 (1965).

[6] Pomeau, Y. 'Transport theory for a two-dimensional dense gas' Phys. Rev. A **3**, 1174-1194 (1971).

[7] 村上輝好,「剛体粒子系におけるエネルギー輸送の数値的・統計物理的研究」, 物性研究, **75**, 799-838 (2001).

[8] Louge M. Y. and Adams M. E., 'Anomalous behavior of normal kinematic restitution in the oblique impacts of a hard sphere on an elastoplastic plate' Phys. Rev. E **65**, 021303 (2002).

[9] Haff, P. K. 'Grain flow as a fluid mechanical phenomena' J. Fluid Mech. **134**, 401-430 (1983).

[10] Goldstein A. and Shapiro M. , Mechanics of collisional motion of granular materials, Part I: General hydrodynamic equations, J. Fluid Mech. **282**, 75-114 (1995).

[11] Tsallis, C. 'Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statics', J. Stat. Phys. **52**, 479-487 (1988).

[12] Jenkins, J. T. and Savage, S. B. , ' A theory for the rapid flow of identical, smooth, nearly elastic spherical particles', J. Fluid Mech. **130**, 187-202 (1983).

[13] Lun, C.K.K. , Savage S. B. , Jeffrey D. J. and Chepurniy, N. 'Kinetic theory of granular flow: inelastic particles in a Couette flow and slightly iinelastic particles in a generalized flow field', J. Fluid Mech. **140**, 223-256 (1984).

[14] Jenkins, J. T. and Richman, 'Grad's 13-momnen system for dense gas of inelastic particles', M. W. Arch. Rat. Mech. Anal. **87**, 355-377 (1985).

[15] Jenkins, J. T. and Richman, M. W. , 'Kinetic theory for plane flows of a dense gas of identical rough inelastic circular disks' Phys. Fluids. **28**, 3485-3494 (1985).

[16] Sela, N. and Goldhrisch I. , 'Hydrodynamic equations for rapid flows of smooth inelastic spheres, to Burnett order' J. Fluid Mech. **361**, 41-74 (1998).

[17] Brey, J. J. , Dufty, J. W. , Kim, C. S. and Santos, A., 'Hydrodynamics for granular flow at low density', Phys. Rev. E **58**, 4638-4653 (1998).

[18] Garzo V. and Dufty, J. W. , ' Dense fluid transport for inelastic hard spheres', Phys. Rev. E **59**, 5895-5911 (1999).

[19] Bobylev A.V., Carrillo J.A., and Gamba I. M., ' On some properties of kinetic and hydrodynamic equations for inelastic interactions' J. Stat. Phys. **98** 743-773 (2000).

[20] Krapivsky P.L., and Ben-Naim E. , 'Nontrivial velocity distributions in inelastic gases' J. Phys. A, **35**, L147-L152 (2002).

[21] Ernst, M. H. and Brito R. J. Stat. Phys. **109** 407-432 (2002).

[22] Santos, A. 'Transport coefficients of d-dimensional inelastic Maxwell models', Physica A (to be published).

[23] Hayakawa, H. 'Hydrodynamics for inelastic Maxwell model' cond-mat/0209630 (2002).

[24] van Noije, T. P. C., and Ernst, M. H. 'Mesocopic theory of granular fluids', Phys. Rev. Lett. **79**, 411-414 (1997).

[25] van Noije, T.P.C., Ernst M. H. and Brito R. , 'Ring kinetic theory for an idealized granular gas', Physica A **251**, 266-283 (1998).

[26] van Noije, T. P. C., and Ernst, M. H., 'Cahn-Hillard theory for unstable granular fluids', Phys. Rev. E **61**, 1765-1782 (2000).

[27] Goldhrisch I. and Zanetti, G. 'LUSTERING INSTABILITY IN DISSIPATIVE GASES' Phys. Rev. Lett. **70**, 1619-1622 (1993).

[28] Isobe, M. 'Velocity statics in the two-dimensional granular turbulence', preprint.

[29] Montanero J.M., and Santos, A. 'Computer simulation of uniformly heated granular fluids', GRANULAR MATTER **2**, 53-64 (2000).

[30] e.g. Jenkins, J. T. and Richman, M. W. , 'Boundary conditions for plane flows of smooth, nearly elastic, circular disks',J. Fluid Mech. **171**, 53-69 (1986).

[31] Jenkins, J. T. , 'Boundary conditions for rapid granular flow: flat, frictional walls' , J. Appl. Mech. **114**, 120-127 (1992).

[32] Pouliquen, O. 'Scaling laws in granular flows down rough inclined planes', Phys. Fluids, **11**, 542-548 (1999).

[33] Mitarai, N., Hayakawa, H. and Nakanishi, H. 'Collisional Granular Flow as a Micropolar Fluid', Phys. Rev. Lett. **88** 174301 (2002).