連続体力学

早川尚男
京都大学大学院人間・環境学研究科
606-8501 京都市左京区吉田二本松町
Tel: 075-753-6782, Fax: 075-753-2999,
e-mail: hisao@yuragi.jinkan.kyoto-u.ac.jp

平成 13 年 4 月 30 日

目 次

第 1 章　連続体力学の目指すもの **2**

1.1　連続体とは何か 2

1.2　連続体の適用範囲 3

1.3　連続体の力学的分類 4

1.4　ラグランジェ的記述とオイラー的記述 5

第 2 章　連続の式 **7**

2.1　質量の保存 7

2.2　運動量の保存 10

2.2.1　体積力 11

2.2.2　面積力 11

2.2.3　運動方程式 11

2.3　エネルギーの連続の式 12

第 3 章　ストレステンソル **15**

3.1　ストレステンソルの導入 15

3.2　テンソルの対称性について 17

3.2.1　歪みテンソル 19

3.3　応力仕事率 21

3.3.1　Hooke 弾性体のストレステンソル 22

3.3.2　Newton 流体のストレステンソル 23

3.4　物質定数 25

3.4.1　Young 率 25

3.4.2　Poisson 比 26

3.4.3　粘性率 27

第1章　連続体力学の目指すもの

1.1　連続体とは何か

連続体力学は 19 世紀にその枠組が完成し,20 世紀の科学・技術の基礎として揺るぎない信頼性を高めて来た. 一方で, その完成度故に学問的な進展の見込みがないものとして学徒に敬遠され, またその実利性が故に工学等の応用科学の一分野と見なされて来た. 同時に 20 世紀に入っての 2 大革命である量子論と相対論のどちらにも与みしなかったために, 古色蒼然とした印象を与えて来た. しかしソリトンに始まる可積分系の発展やカオスに始まる非線形動力学, または散逸構造等に見られるパターンの自己組織化等はいずれも 1 世紀も前の流体力学の研究にその萌芽を見る事ができ, 現代こそ連続体力学の再考が求められている時代と言えるかもしれない.

このことは一方で日常スケールで生じている現象に対して 20 世紀に発達した物理学は余りにも無力であり, もう一方でそういった現象では多数個の粒子を含んでいて概ね構成要素の個性を問わないで済むという経験的事実と合致している. 更に言えば連続体力学は無限自由度の系を記述法を提供しており場の量子論は連続体力学の一種と考えても構わない. 少なくともスカラー場の場の理論では理論形式は古典的な連続体とそれほど大きな違いはない. 実際, 場の量子論の導入のために流体や弾性体といった古典的な場を紹介する本もある.[1]　無論伝統的な連続体である流体の運動は古典的な流体力学で記述できるし, 古典的な弾性体も連続体で記述できる. 破壊現象はもとより弾性論の中で論じられる場合が殆んどである. 一方, 高分子等では粘弾性が関心の対象となるためにやはり連続体に基礎を置いている. 更にプリゴジン以降注目されてきた散逸構造は流体中のパターンを議論しており, 連続体が基礎となっている. 星の集団や銀河団, プラズマ, 或は粉体等もそのマクロな挙動を観測する限りにおいては連続体と考えていいであろう. 筆者にとって最も印象深いのは 2 次相転移や超伝導におけるギンツブルク・ランダウ (GL) 理論の成功である. 特に 2 次相転移の研究においてはウィルソンが従来主流であったミクロな局所モデルを採用せず疑似自由エネルギーとその局所的な結合に基づいた連続体モデルを採用し臨界現象の本質を明らかにした事である. 最もミクロな構造が場の量子論によって記述され, 臨界現象や流体, 弾性体等の非常にマクロなスケールで連続体力学を用いるというこの事実がカリキュラム上での扱いと無関係に連続体力学が有効であることを示唆している.

その一方で最近はマクロな系の記述からセミマクロな系へ関心が移り, 従来看過されてきた構成要素の離散性をまともに扱わないといけない場合が増えて来た. 星の場合も連続体的な取り扱いに比べ長距離多体的相互作用をする質点系といった側面が強く押し出される様になった. また流体に浮かぶコロイド粒子やサスペンションもやはり流体を媒介として

[1] 高橋康「古典場から量子場への道」(講談社サイエンティフック,1979)

長距離相互作用をする粒子系であって, それらの振舞は余りよく理解されているとは言い難い. これらの例はしかしながら離散的な系というより場という連続量を媒介とした連続体の域を出ないものと捉えるべきであろう. あるいは粉体のように構成要素の離散性を全面に出し, 尚且場の媒介を考慮しない場合は連続体の対極にあると考える向きがあるかもしれない. しかしそうした考えは幾つかの点で根本的誤謬を含んでいる. まず第一に粉体を内部構造のある粒子と考えた際にその内部構造を決める基礎となるのは弾性体力学である. 次にマクロな粉体集団の挙動の大部分はこの本で例として示していくように特異な連続体として特徴づけられる. 更に離散性が避けがたい場合にもその連続体的記述の限界を見定めて比較対象として無矛盾な体系を整備しておかなければならない.

簡単な例として朝のラッシュで生じる人の列の力学を挙げる事ができるだろう. 人は第 1 近似で粉体系として扱って良い. ラッシュの列は後ろの人によって押されることによってまっすぐな列を維持できなくなることはお馴染みであろう. この問題を連続体として扱う事は可能でそれはエラスチカの問題となり, どれだけの力が加わるとどのような列の変形が生じるかが定性的に分かる. この両者の記述法の定量的比較は従来試みられていないが, それほど難しい問題ではなく本書の範囲内にあると言って良い.

また高校で習う粒子の非弾性衝突も重要でまだ機構が解明されていない弾性論の問題である. 同時にこの問題は粉体力学の基礎を与える. おそらくは読者の大多数は非弾性衝突と云えばはねかえり (反発) 係数を導入した散逸力学系であるという認識しかないであろう. しかしながら高速での衝突で生じる内部の化学反応, 破壊等を含んだ諸々の塑性変形を除いた理想的な弾性体に於いても反発係数は殆んど意味を持たない. つまりそれは衝突速度の関数であって決してある一定値に漸近しない様な量なのである. そのあたりの事情の説明も本書の範囲内にあると云ってよい.

本書では古典的な連続体力学を構成する際に粉体への応用を第 1 義的に考えている. この態度は極めて特異 (というよりも異常) と言ってよいが, 内容そのものはスタンダードな連続体力学の範囲を逸脱したものではない. この試みの成否は読者諸賢の判断を仰ぐ他はないが, それだけに類書とは同じ題材でも一味違った見方をする予定である.

1.2 連続体の適用範囲

連続体力学は通常, 場の理論として定式化されている. 場の理論では次節で述べる様に観測点を「空間」に固定してその平均量を扱う. 勿論この「空間」というのは並進している弾性体球等を考えている場合にはその重心座標を原点とすべき種類のものであって絶対座標系の存在を仮定するものではない. その意味で常に (本書ではガリレオの) 相対性原理の影響下にある.

連続体力学では通常, 粒子スケール等の物質の微視的尺度よりも大きな尺度で平均することで局所的な情報を得る. 例えば気体であれば平均自由行程と運動の空間的変化の尺度の比で表されるクヌーセン数は充分小さくなければならないし, 平均自由行程自体も粒子の直径より大きい事が期待される. この種の条件は気体であれば問題はなく成立し, その結果, ミクロなモデルから流体の方程式の導出が可能になる.

しかし一般の液体についてはその連続体モデルの成立条件が殆んど明らかになっていな

い. 実際の処, 最近の分子動力学法によるシミュレーションによれば思ったよりはるかに小さなスケールから流体的挙動が成り立っている様である. こうしたシステムでどこからどのようにして流体力学が成立していくのかを調べる事は今後重要になっていくことと思われる.

弾性体であれば高分子なり固体なりの基盤になる物質が通常存在する. 固体の場合の線形弾性体は線形ばねで空間の格子点を接続したものと同等であり, その平衡点を分子間ポテンシァルの平衡点と考えるとほぼ分子スケールから弾性論を使って良い. 勿論数学的には格子間距離をゼロに漸近させた極限を連続体として扱うのであるが, その極限自体は容易に格子系から類推できるのでその間には大きなギャップはない. まして後で述べる様に線形弾性論に固執する理由は何一つなく分子間の共有結合等が健在であれば古典的に見れば固体は弾性体に他ならない. 弾性体で用いられる概念や手法がほぼそのままの形で固体物理に応用されるのはこのように偶然ではない. こうした事はフォノンの古典模型が 1 次元的に結合した 2 種類の粒子の連成振動子であることからも想像がつく. 本書では連成振動子系等のように離散性が残っているものの連続極限がほぼ明らかなものを広義の連続体として扱う. こういう考え方を一つ取るだけで世界観はぐっと広がるし, 弾性論等の適用範囲も広いものになる.

従来よりも連続体の適用範囲が広いであろうことは電磁気学を思い起こせば充分であろう. 実際, $\mathbf{r}_i$ に分布する点電荷系 $(i = 1, 2, \cdots, N)$ を扱う場合も電荷密度 ρ_e はディラックのデルタ関数を使えば

$$\rho_e(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \tag{1.1}$$

で導入可能である. 電磁気学は連続体の理論であるから, 従来のような狭い考え方で連続体を捉える必要はない.

では何が電磁気学は点電荷系迄取り扱い可能として, 通常の流体や弾性体ではかなり強い制限をつけているのであろうか. それは微分の存在である. デルタ関数等のような特異点を持つものを形式的に場の連続変数として扱ってもその微分は出来ない. 電磁気学では幸いな事に電荷密度の微分は理論形式に含まれていない. 従って連続体としての記述が (量子論の存在を気にしない限り), 微小領域迄外挿できるのである. 一方, 流体や弾性体といった古典的連続体では質量の保存則から質量密度の微分が必要になることが分かる. これは電流とは違って質量流は密度に比例するからである. この辺りから強い制限が生まれる要因になる. しかし後で述べる様に体積力の概念を使えば必ずしもその制限にかからない場合が多く, 広義の連続体の概念はかなり広い領域で有効であると思われる.

1.3 連続体の力学的分類

連続体力学で専ら扱うのは弾性体と流体であるが, その定義がなされていない上に粘弾性を示す高分子等では両者の境界は曖昧である. ここでは応力-歪みの関係から連続体の力学的分類を行ってみる.

弾性体 応力と歪みが $1{:}1$ に対応し, 応力を除くと歪みもなくなる. 応力が歪みに比例するも

のをフック (Hooke) 弾性体と呼ぶ. 一般に静力学は楕円型の方程式に従い, 境界値を問題を解くことで問題が求まる.

塑性体 応力がある臨界値 (降伏応力) を越えた場合に, 残留歪みが残り, 構造は何らかの意味で欠陥や破壊を含んだものになる. こうした連続体は塑性体と呼ぶ. 砂の様な脆い物質は塑性体に分類される場合が多く, 静力学でも双曲型になる場合がある.

剛体 如何なる応力にも歪みを生じない.

流体 静止状態では接線応力 (shear stress) がなく, 法線応力 (normal stress) のみが働く. 運動によって一般に接線応力が働き, それが粘性となる. 応力が歪み速度に比例する場合をニュートン (Newton) 流体と呼ぶ.

以上の分類は理想的な連続体に対するものであり, 実在の物質は弾性体、塑性体、流体の性質を併せ持つ.

1.4 ラグランジェ的記述とオイラー的記述

古典力学では粒子の運動の時間発展を追尾する理論形態を取る. 多粒子系であっても本質的な変化はなく粒子の運動方程式を連立させて解くだけのことである. 連続体がそうした粒子から構成されるという立場に立つならば, その一つの記述法に構成要素の時間発展を追いかける方法があると考えるのが自然である. これをラグランジェ的記述と呼ぶ. この場合, 連続体の要素を実際の構成粒子と同定する必要はなく, 形状は一般に時間と共に変化する. ラグランジェ的記述によれば時刻 t の連続体粒子の位置は初期位置 $\mathbf{X}$ 及び時刻 t を独立変数として

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{r}, t) \tag{1.2}$$

となる. 但しここでは粒子軌道が連続的であり、逆にたどることが出来るものとする. また同じ粒子の速度 $\mathbf{v}$ は

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{X}(\mathbf{r}_0, t) \tag{1.3}$$

であり, 加速度も同様にして与えられる. このように質点系の力学をそのまま連続体に持ち込んだ恰好になっている.

もう一つの記述法は電磁気学のように連続体を場の量として扱う方法である. この場合は位置座標は観測点として固定されており, もはや時間変数とは独立になる. 従って例えば速度 $\mathbf{v}$ は位置 $\mathbf{r}$, 時刻 t の関数として $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ として表される. これをオイラー的記述と呼ぶ. 言うまでもないことだがラグランジェ的記述における微分とオイラー的記述による微分は一致しない. ラグランジェ的な記述での時間微分 (ラグランジェ微分) を全微分 d/dt で書く本も多いが, それは誤解を招くのでここでは D/Dt で表す.

両者の間の関係は以下の様に考えると分かりやすいであろう。ある関数

$$F(\mathbf{X}, t) = f(\mathbf{r}(\mathbf{X}, t), t) = f(\mathbf{r}, t) \tag{1.4}$$

があったとして全微分を考えると

$$\frac{d}{dt}F(\mathbf{X},t)=\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(\mathbf{X},t),t)=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{dx_i}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{1.5}$$

という関係になる. 但し $\mathbf{r}=(x_1,x_2,x_3)$ で $\mathbf{r}$ の i 成分を x_i と記した. 上式を

$$\frac{d}{dt}F(\mathbf{X},t)=\frac{D}{Dt}f(\mathbf{r},t) \tag{1.6}$$

と記すのがラグランジェ微分の定義と考えれば良い. これを物質微分とも呼ぶ. (1.4) 及び (1.5) 式から関数 $f(\mathbf{r},t)$ に対して演算 D/Dt を施すと

$$\frac{D}{Dt}f(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t),t)=(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad})f(\mathbf{r},t) \tag{1.7}$$

が成り立つ. 直交座標系であれば f をベクトル変数に置き換えてもこの関係が成立することは分かるので, 一般に演算子の関係式

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad} \tag{1.8}$$

が成立する.

気をつける必要があるのは関係式 (1.8) を用いると極座標のような曲線座標系では一般に方位ベクトルが座標の関数であるために各成分では (1.7) 式が成立していないことである. これらについては読者諸賢が自ら例題を解いてそのことを体感する他はない.

問題 1 スカラー $\phi(\mathbf{r})$, ベクトル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ が存在したとき

(1) 3 次元極座標を考え $\mathbf{A}=(A_r,A_\theta,A_\varphi)=A_r\mathbf{e}_r+A_\theta\mathbf{e}_\theta+A_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ としたときに $\mathrm{grad}\phi$, $\nabla^2\phi$ を求めよ. 但し $\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\theta,\mathbf{e}_\varphi$ はそれぞれ極座標の単位ベクトル.

(2) 同様の座標系で $\mathrm{div}\mathbf{A}$,$\mathrm{rot}\mathbf{A}$, $\nabla^2\mathbf{A}$ を求めよ.

(3) 円筒座標で (1),(2) と同様の計算をせよ.

第2章　連続の式

物理学は保存則を基礎として構成している. 連続体でも保存則が最も主要な役割を果たす。ソリトンの様に無限の保存則を持つ場合もない訳ではないが, 現実の殆んどの系では保存する量は少数であり, いずれも物理的に重要な量となっている. それらの少数の保存量の中でも際立って重要なのは質量, 運動量及びエネルギーの保存である[1] . このうち質量の保存は物質の不生不滅を表現しており, 運動量の保存は運動方程式に対応する. 注意が必要なのはエネルギーの保存である. 連続体は巨視的な変数のみを論じているのでそこで捉え切れない自由度が残る場合が殆んどである. 例えば弾性体の運動を考えても並進等の巨視的な自由度に分配されるエネルギーの他に格子振動等の内部の運動自由度に分配される. これらの内部の自由度にエネルギーが分配されたら殆んど再び巨視的な自由度に利用できる見込みはなく,「熱」としてエネルギーは散逸される. マクロな現象ではこのような散逸は大抵の場合に存在するのでエネルギーは保存しない散逸系を論じる必要が生じるのである.

本書では連続の式として最初に質量の保存を説明し, 次いで運動量の保存を論じる. 運動量の保存では面積力と体積力の概念が必要になるのでその違いを説明する.

2.1　質量の保存

保存則のうちで最も基本的なものは質量の保存である. 質量が突如生成したり消滅したりしない事はラボアジエの発見以来物理学のみならず科学全体の基本概念となっている. 勿論, 相対論ではエネルギーと質量の等価性を考慮しないとならないが, その等価性を組み込めば質量は保存している. もとより, 相対論はこの教科書の範囲外なので読者は直観的な質量概念をそのまま用いて保存則を論じれば良い.

オイラー的な記述による質量の保存では空間的に動かない仮想的な閉曲面を考えてその収支を考える事で表現される. 従って, 質量の保存則は連続体を自由に通す閉曲面内の質量の増加, 減少は面を通して流入, 流出した質量に等しい, と表現できる. この単純な事実を数学的に表現しよう. 考えている閉曲面を S, その面で囲まれた領域を $V(S)$ として, その中に含まれる質量 m は質量流束 J を用いて

$$\frac{dm}{dt} = -J \tag{2.1}$$

となる. 但し右辺では領域を出て行く流束を J としているので増加量は $-J$ となっている. この式は電磁気学の場合にも電荷の保存則としてお馴染みである. 即ち質量 m を電荷に置

[1] 本書では非相対論的な連続体を扱うのでエネルギーと質量は等価という扱いはしない上に運動量と質量(エネルギー) で 4 元ベクトルを構成して一括して論じる事はない.

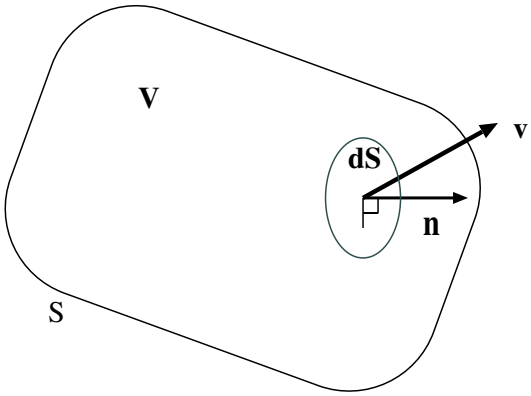

図 2.1: 表面 S に囲まれた領域と法線ベクトル $\mathbf{n}$ 及び流速 $\mathbf{v}$

き換え, 質量流束 J を電流と見なせばよい. 電荷は勿論質量と等価ではないが全く同等の役割を果たしている. このような電磁気学の知識を思い出せば質量密度 $\rho(\mathbf{r},t)$ と質量流束密度 $\mathbf{j}$ を用いて

$$\frac{d}{dt}\int_{V(S)}\rho(\mathbf{r},t)dV = -\int_S \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}dS \tag{2.2}$$

と書ける事が分かる. ここで $\mathbf{n}$ は面法線ベクトルであり、外向きに正の方向を取る。またガウスの法則を用いて面積分を体積積分に直し、閉曲面及びそれに囲まれた領域が任意である事から

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0 \tag{2.3}$$

となる. これも電磁気学でお馴染みの式である. 初学者にありがちな疑問は $\rho(\mathbf{r},t)$ の時間微分が偏微分となっている事であろう. これは (2.1) 式の被積分関数が滑らかな関数であり, 積分領域及び密度の空間座標が時間に依存しない事に依っている.

さてここで (2.2) 式で時間に対して全微分を使っていて (2.3) 式では偏微分になっているのは分かりにくい. 実際、多くの教科書では (2.2) 式で最初から偏微分を用いている. その是非を説明するためにやや形式的な証明をしてみよう. そういう細かな議論に興味のない読者はこの部分を読み飛ばして差し支えない. 領域 V は時間と共に変化し得るので $V(t)$ と記す. その際

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} f(\mathbf{r},t)dV = \int_{V(t)} dV\left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}f + f\mathrm{div}\mathbf{v}\right\} \tag{2.4}$$

という関係式が一般に成り立つ. (2.4) が成立すれば (2.2) 式から (2.3) 式の変形は問題がない.

その証明のためにヤコビアン J

$$J \equiv J(\mathbf{X},t) = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_i}\right) \tag{2.5}$$

を導入して

$$\mathbf{r} : V(0) \to V(t), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{X}, t)$$

という運動を考える. また積分する量を明確に記すために $dV = d^3\mathbf{r}$ 等と記す. (1.4) 式とヤコビアンの定義より

$$\int_{V(t)} d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r}, t) = \int_{V(0)} d^3\mathbf{X} F(\mathbf{X}, t) J(\mathbf{X}, t)$$

が成り立つので

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r}, t) = \int_{V(0)} d^3\mathbf{X} \left\{ \frac{d}{dt} F(\mathbf{X}, t) J(\mathbf{X}, t) + F(\mathbf{X}, t) \frac{d}{dt} J(\mathbf{X}, t) \right\} \quad (2.6)$$

となる. (2.6) の右辺第 1 項は (1.6) 式によって

$$\begin{aligned} \int_{V(0)} d^3\mathbf{X} \frac{d}{dt} F(\mathbf{X}, t) J(\mathbf{X}, t) &= \int_{V(t)} d^3\mathbf{X} J(\mathbf{X}, t) \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathrm{grad} f \right\} \\ &= \int_{V(t)} d^3\mathbf{r} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathrm{grad} f \right\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

と書ける.

また以下の様に

$$\frac{dJ}{dt} = \mathrm{div}\mathbf{v} J \quad (2.8)$$

が証明できるので (2.4) 式が成り立つ. 実際、左辺は

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(x_1, \cdots, \dot{x}_i, \cdots, x_n)}{\partial(X_1, \cdots, X_i, \cdots, X_n)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(x_1, \cdots, \dot{x}_i, \cdots, x_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)}{\partial(X_1, \cdots, X_i, \cdots, X_n)} \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \cdot J = \mathrm{div}\mathbf{v} \cdot J \end{aligned} \quad (2.9)$$

となる. ここで 2 行目から 3 行目は 3 次元のときの

$$\frac{\partial(\dot{x}, y, z)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (2.10)$$

等を思い起こせば容易に分かる.

次に質量流束密度 $\mathbf{j}$ を決定しなければならない. 電磁気学では電流は独立な変数として電磁場の連続の式の中で決定する必要はない点がそれ以外の連続体の場合と異なると云って良いかもしれない. 流速 $\mathbf{v}$ を持っている流れの面要素 dS に垂直な速度成分は $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ となる. よって単位時間に面要素 dS を通過する質量は $\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ となる. よって (2.1) 式の J は

$$J = \int_S \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.11)$$

となり,(2.2) との比較から

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \tag{2.12}$$

となる. (2.12) 式を (2.3) 式に代入すると質量保存則は最終的に

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{2.13}$$

となる. またラグランジェ微分を用いて (2.13) 式は

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\mathrm{div}\mathbf{v} = 0 \tag{2.14}$$

と書き直す事も出来る. この表式もよく用いられる.

ここで任意のスカラー関数 f と質量密度 ρ の間で成り立つ有用な公式

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} d^3\mathbf{r}\rho(\mathbf{r}, t)f(\mathbf{r}, t) = \int_{V(t)} dV\rho(\mathbf{r}, t)\frac{Df(\mathbf{r}, t)}{Dt} \tag{2.15}$$

を証明しておく. この式の左辺に (2.4) 式を代入して整理すると

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} d^3\mathbf{r}\rho(\mathbf{r}, t)f(\mathbf{r}, t) = \int_{V(t)} dV\left[f\left\{\frac{D\rho}{Dt} + \rho\mathrm{div}\mathbf{v}\right\} + \rho\frac{Df}{Dt}\right] \tag{2.16}$$

となる. ここで (2.14) 式を用いると (2.16) 式の右辺第 1 項は 0 になるので (2.15) 式が成り立つ (証明終).

最後に質量の保存について幾つかの注意をしておこう. まず電磁気学との比較である.(2.12) 式の質量流束密度は運動量密度である. 一方, 電磁気学では電場 $\mathbf{E}$, 磁場 $\mathbf{H}$, 光速 c に対して運動量密度は $\mathbf{E}\times\mathbf{H}/c$ であって, $\mathbf{j}$ には一致しない. これは電磁場の運動量とエネルギーの連続の方程式が電荷密度と電流に対して立てられていない事に由来する. 次に (2.12) 式は一成分系にのみ成り立っており, 多成分系の場合は必ずしも正しくない事である. 例えば多成分系であれば拡散流束がある場合がある. しかしこの問題は微妙な点も含んでおり後でまた触れる事にして, とりあえず (2.12) 式が常に成り立っているとして解析を進める. 最後に (2.13) 式の構造に注意して欲しい. 左辺第 1 項はスカラー変数であり, 左辺第 2 項はベクトルの発散を取っている. 従ってベクトルの保存則にはテンソルの発散が現われるであろうことは容易に想像がつくであろう.

2.2 運動量の保存

前節と同様に空間に固定した任意の閉曲面 S に対して運動量の保存を考えてみよう. 体積要素 dV に含まれる運動量は $\rho\mathbf{v}dV$ であるから, S で囲まれた領域 $V(S)$ に含まれる全運動量は

$$\mathbf{P} = \int_{V(S)} \rho\mathbf{v}dV \tag{2.17}$$

で与えられる. この時間変化はニュートンの運動方程式より

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{tot} \tag{2.18}$$

となる. ここで $\mathbf{F}_{tot}$ は領域 $V(S)$ に含まれる連続体が受ける力である. 既に述べた通りこの力は物質の体積に比例した体積力と接触面を通して働く力である面積力に分類される.

2.2.1 体積力

物理現象に現われる重力, 電磁気力等の長距離力は, その大きさが物質の体積または質量に比例しているために, これらを体積力と呼ぶ. 体積力が連続体に働く場合, 体積要素 dV に働く力は

$$\rho \mathbf{K} dV \tag{2.19}$$

ここで $\mathbf{K}$ は連続体の単位質量当りに働く力を表す. 従って体積 $V(S)$ に働く力を $\mathbf{F}_B$ とすると

$$\mathbf{F}_B = \int_{V(S)} \rho \mathbf{K} dV \tag{2.20}$$

である.

ここで重力が働いている場合は $\mathbf{K}$ は重力加速度 $\mathbf{g}$, 速度 $\mathbf{v}$ で運動する電磁気力であれば電場 $\mathbf{E}$, 磁束密度 $\mathbf{B}$ に対して $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ となる[2] . 質点系では体積力は基本的に外力に相当するが、長距離力であれば内力も体積力と成り得る.

2.2.2 面積力

連続体には体積力の他に接触面を通して働く力がある. この種の力は何もない空間を運動する粒子系には現われず, 連続体力学の特色となっている.

面を通しての相互作用は直観的に分かる通りに、極端な長距離相互作用を除くと面積力となっている。その場合面を通して働く力は各成分があるので, その単位ベクトル $\mathbf{e}_i$ $(i = x, y, z)$ に対して

$$\mathbf{F} = dxdy\{\sigma_{xz}\mathbf{e}_x + \sigma_{yz}\mathbf{e}_y + \sigma_{zz}\mathbf{e}_z\} \tag{2.21}$$

面を指定したときにいろいろな成分を持ち得る事は既に述べた分子間の相互作用を考えれば容易に分かるだろう. ここで σ_{ij} はストレステンソルであり, まとめて σ と書く. ストレステンソル σ_{ij} の最初の添字 i は力の成分を表し, 2 番目の添字 j は面の法線ベクトルの方向を表す. 一般の座標軸と斜交する面の場合は各座標軸と平行な稜を持つ 4 面体を考えれば必ず (2.21) 式の様に座標軸と面が直交する様にすることができる. 或は (2.21) 式は $\mathbf{F} = dxdy\sigma \cdot \mathbf{e}_z$ と書ける.

従って一般の閉曲面 S に対して

$$\mathbf{F}_S = \int_S dS\sigma \cdot \mathbf{n} = \int_{V(S)} dV \mathrm{div}\sigma \tag{2.22}$$

となる. ここでガウスの定理を用いた.

2.2.3 運動方程式

体積力と面積力を合わせた合力 $\mathbf{F}_{tot}$ は (2.20),(2.22) 式より

$$\mathbf{F}_{tot} = \int_{V(S)} dV[\rho \mathbf{K} + \mathrm{div}\sigma] \tag{2.23}$$

[2] ここでの表式は SI 単位系に基づいている

となる. (2.17) 及び (2.18) 式に $f \to \mathbf{v}$ として (2.15) 式を代入すると直ちに

$$\int_V dV\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \int_V dV[\rho\mathbf{K} + \mathrm{div}\sigma] \tag{2.24}$$

となる. 積分領域は任意に取れるので運動方程式は

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho}\mathrm{div}\sigma + \mathbf{K} \tag{2.25}$$

と書く事が出来る. 上式を成分表示したら

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + K_i \tag{2.26}$$

となる.[3]

運動方程式 (2.24) 或は (2.25) 式は質量保存の式 (2.13) 式と連続体の基礎方程式を構成する. しかし未知数 $\rho, \mathbf{v}, \sigma$ を決定するには不十分な情報のみしか含まれておらず, そのためにストレステンソルを決定する構成方程式が必要となる. この辺りの事情とどのような構成方程式が可能であるかについては次章で詳しく述べる事にしよう.

- 例： 真空中の電磁場

  電磁気学は通常の連続体とは若干趣を異にしている. それは光子が質量 0 であることと電磁場の記述に電子の運動が絡んでいることと関係している. 詳細は電磁気学の本を参考するとして電場 $\mathbf{E}$, 磁束密度 $\mathbf{B}$ に対して電磁運動量 $\mathbf{g} = \epsilon_0\mathbf{E}\times\mathbf{B}$($\epsilon_0$:真空中の誘電率) の連続の式は

  $$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = -\nabla\cdot T_{em} + \rho_e\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B} \tag{2.27}$$

  である. ここでストレステンソル T_{em} は

  $$(T_{em})_{ij} = \epsilon_0 E_iE_j + \frac{1}{\mu_0}B_iB_j - \frac{\delta_{ij}}{2}(\epsilon_0E_kE_k + \frac{1}{\mu_0}B_kB_k) \tag{2.28}$$

  である. 但し μ_0 は真空中の透磁率. 電磁力の長距離性を反映して体積力が存在するが, 面積力も混在するので単純に通常の連続体力学の枠組に入らない.

2.3 エネルギーの連続の式

エネルギーの保存も質量や運動量と同様であるが, テンソルが現われない分, 直観に訴えやすい. もっともエネルギーそのものが熱力学変数であるので熱力学と切り離せず, 連続体で話が閉じなくなってしまう点に注意が必要であろう. 熱力学と関連して連続体力学で扱う系では全エネルギーが一般に保存しない. このあたりの事情はマクロな系では様々な内部自由度に分配されるので巨視的変数としてのエネルギーは保存されないのである. 保存され

[3] 以降では特に断らない限り Einstein の規約に従い, 2 回現われた添字について和を取る, 即ち $v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \sum_k v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ を意味する.

ないエネルギーは一般に熱の形で散逸される. その熱の生成メカニズムについては簡単な場合については後述する (予定である).

もう一つの大きな仮定は局所平衡の仮定である. 一般に連続体は平衡から大きく離れているがそのずれ自体は連続体の運動に付随して生じる. この教科書で議論するように殆んどの場合は歪み速度 (や歪み) が小さくそれらで展開した線形理論を議論する. その場合は圧力は定数部分にあたり歪み速度に由来した非平衡の影響は受けない. また温度が一様でない場合もそのずれを小さいとして展開する場合が多く, そのような場合は熱平衡からのずれは高次補正を与えるのに過ぎない. 言うまでもなくこの論法は変形や歪み速度が大きいときには使えない. 高分子等では大変形があっても非常にゆっくりした運動しかないのでエネルギー方程式そのものが議論の対象から外れる場合が多い. しかし粉体の様にそうでない場合もあるので一般論は難しい.

いずれの場合でも運動量の連続の式等と比較して様々なレベルの話が入り混じって錯綜した議論になる場合がある. その点については十分注意してからエネルギーの連続の式を用いる必要がある.

力学的エネルギー密度は運動エネルギー密度 $\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2$ と内部エネルギー ϵ に分割出来る. 従って総量は

$$\int_V \rho(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2+\epsilon)dV \tag{2.29}$$

となる. この時間変化を議論する訳になる. ここで体積力と面積力のなす仕事率は

$$\int_V \rho\mathbf{K}\cdot\mathbf{v}dV+\int_S(\sigma\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{v}dS \tag{2.30}$$

である. 勿論第 1 項,2 項がそれぞれ体積力, 面積力に対応している.

マクロな連続体では全ての自由度の動きを把握することは出来ない. 例えば格子振動一つ取っても全部の運動の自由度をフォローすることは難しい. また一般の運動では格子振動以外にも様々な自由度が絡み合っており, そのモデル化は不十分であるおそれがある. また非晶質や流体では格子振動は存在しないか, 固体におけるものとかなり違うが, 連続体の一般論は適用物質に限定せずに普遍的に成立する. その際、注目している少数の自由度以外は熱として散逸する. またその熱は一般に熱伝導と呼ばれ, 熱の流れが存在し、熱流と呼ぶ. 最も良く知られている熱流の現象論はフーリエ (Fourier) の法則であり, 熱流 $\mathbf{q}$ は温度 T の勾配

$$\mathbf{q}=-\kappa\mathrm{grad}T \tag{2.31}$$

で表される. ここで比例定数 κ を熱伝導率と呼び, 一般に正の値を取る.

熱流は流れなので面を通して現われる. 従って熱流 $\mathbf{q}$ によるエネルギーの増加は

$$-\int_S dS\mathbf{q}\cdot\mathbf{n} \tag{2.32}$$

である. (2.29) から (2.32) 迄を組み合わせると

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2+\epsilon)dV=\int_V \rho\mathbf{K}\cdot\mathbf{v}dV+\int_S(\sigma\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{v}dS-\int_S dS\mathbf{q}\cdot\mathbf{n} \tag{2.33}$$

となる. 上式 (2.33) にガウスの定理と公式 (2.15) 式で f を $|\mathbf{v}|^2/2+\epsilon$ と置き換えたものを用いると

$$\frac{D}{Dt}(\frac{1}{2}v_iv_i+\epsilon)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}v_i-q_j)+K_iv_i \tag{2.34}$$

となる.

一方 (2.26) 式から

$$\frac{D}{Dt}(\frac{1}{2}v_iv_i)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}v_j+K_iv_i \tag{2.35}$$

が成立する.(2.34),(2.35) の辺々引くと

$$\frac{D\epsilon}{Dt}=\frac{1}{\rho}\sigma_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial q_i}{\partial x_i} \tag{2.36}$$

となる. 尚, 連続体中に発熱がある場合は更に熱源の項を加えないといけないのは言うまでもない.

注意すべきはここまでの議論で熱流を (2.31) 式に取る必然もないし, またストレステンソルの決定は何も議論されていないことである. また弾性体とも流体とも連続体を限定していない点である.

- 電磁気学のエネルギーの連続の式：

  真空中の電磁気学では電磁エネルギー密度 w_{em} は $w_{em}=\frac{1}{2}(\epsilon_0E_kE_k+\frac{1}{\mu_0}B_kB_k)$ に対して

  $$\frac{\partial w_{em}}{\partial t}=\nabla\cdot\mathbf{S}-\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} \tag{2.37}$$

  である. ここで $\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{B}/\mu_0$ はポインティングベクトル, 右辺第 2 項はジュール熱によるエネルギー散逸である.ジュール熱は電流が長距離相互作用を持つことを反映して体積力の形で現われる. ここでも電磁気学はかなり特異であることが分かる.

第3章　ストレステンソル

3.1　ストレステンソルの導入

既に述べた通り面力の記述にはストレステンソルが必要になる. このテンソルは直観に訴えるものではないがよく考えれば難しい概念を含んでいる訳ではない.

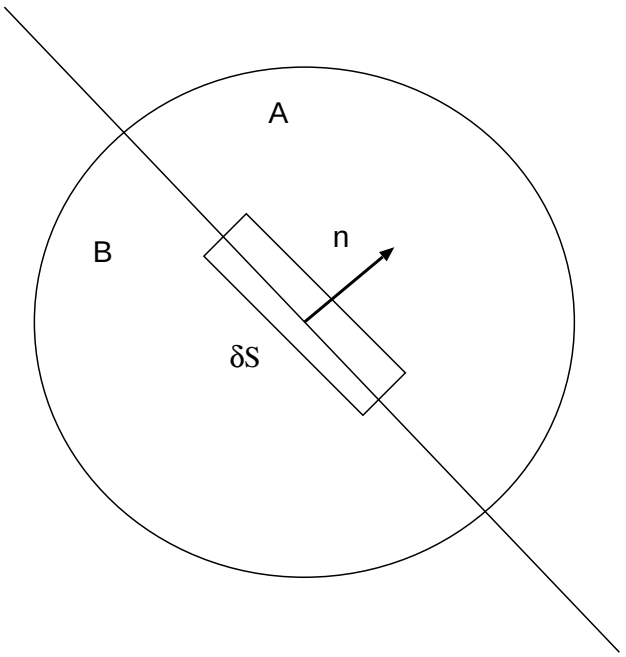

図 3.1: 連続体を仮想面で分割する際の概念図

さて考えている連続体を A,B の 2 つに分割してみよう. 図の面 δS 中の単位面積に働く力を $\mathbf{F}$, 面法線ベクトルを $\mathbf{n}$ しよう. ここで

$$\mathbf{F}(\mathbf{n})//\mathbf{n} \tag{3.1}$$

を法線応力、

$$\mathbf{F}(\mathbf{n}) \perp \mathbf{n} \tag{3.2}$$

を接線応力と呼ぶ. 一般に面を指定した場合には法線応力と接線応力の混合になるのでテンソル的記述が必要になる.

さて応力が内力の場合には作用・反作用の法則から

$$\mathbf{F}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{F}(\mathbf{n}) \tag{3.3}$$

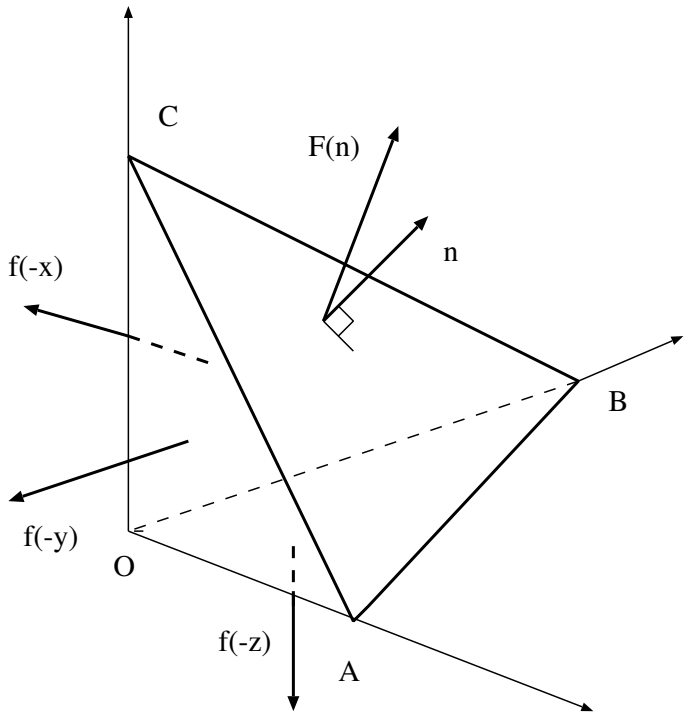

図 3.2: ４面体 OABC に働く力

が成り立つ. 図の４面体 OABC についての力の釣り合いを考えてみよう. 面 ABC, OBC, OAC, OAB の面積をそれぞれ δS,δS_1, δS_2,δS_3 として各面に働く力を $\mathbf{F}$, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ としよう. 体積力を $\mathbf{K}$, 密度を ρ, ４面体の加速度を $\mathbf{a}$ すれば、運動方程式は

$$\rho\delta V\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{n})\delta S + \mathbf{f}(-x)\delta S_1 + \mathbf{f}(-y)\delta S_2 + \mathbf{f}(-z)\delta S_3 + \rho\delta V\mathbf{K} \tag{3.4}$$

である. ここで４面体を相似的に小さくし、

$$\delta V/\delta S_i \to 0 \tag{3.5}$$

という極限を取ってみる. すると

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{n}) &= -\mathbf{f}(-x)\delta S_1/\delta S - \mathbf{f}(-y)\delta S_2/\delta S - \mathbf{f}(-z)\delta S_3/\delta S \\ &= \mathbf{f}(x)\delta S_1/\delta S + \mathbf{f}(y)\delta S_2/\delta S + \mathbf{f}(z)\delta S_3/\delta S \end{aligned} \tag{3.6}$$

となる. ここで方向余弦 n_i を導入すると

$$\mathbf{n} = n_i\mathbf{e}_i \tag{3.7}$$

であるので

$$\delta S_i/\delta S = n_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3.8}$$

と書ける. ここで $\mathbf{e}_i$ は i 成分の単位ベクトルである. (3.8) を (3.6) に代入することで

$$\mathbf{F}(\mathbf{n}) = \mathbf{f}(x)(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{f}(y)(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{f}(z)(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{f}(x_i)n_i \tag{3.9}$$

を得る. 一方、σ_{ik} を i 軸に垂直な単位面積を通して k 方向に働く力とすると

$$\mathbf{f}(x_i) = \sigma_{ik}\mathbf{e}_k \tag{3.10}$$

となるので (3.9),(3.10) から

$$\mathbf{F}(\mathbf{n}) = \mathbf{e}_k\sigma_{ik}n_i \tag{3.11}$$

という式が成り立つ. このように考えることでストレステンソル σ_{ik} が自然に導入できる.

この節を終える前に (3.8) で用いた

$$\delta S_j = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_j)\delta S \tag{3.12}$$

について補足を加えよう.

$$\delta\mathbf{S} = \delta S\mathbf{n} \tag{3.13}$$

であるので、左辺を成分に表示して

$$\delta\mathbf{S} = (\delta S_x, \delta S_y, \delta S_z) \tag{3.14}$$

としたとき

$$\delta\mathbf{S}^2 = \delta S_x^2 + \delta S_y^2 + \delta S_z^2 \tag{3.15}$$

が成り立つ. 方向余弦の 2 乗の和が 1 であることを思い出すと明らかに

$$\delta S_x = (\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{n})\delta S \tag{3.16}$$

が成り立つ.

3.2 テンソルの対称性について

特別な外力がない場合にストレステンソルは対称テンソルであるという著しい性質を持つ. これは基本的にトルクバランスを考える事で証明可能である.

図の様な連続体中の直方体を考える. 中心軸を x_3 軸としてそのまわりの面積力によるモーメントは

$$M_3 = (\sigma_{21}\delta x_2\delta x_3)\delta x_1 - (\sigma_{12}\delta x_1\delta x_3)\delta x_2 = (\sigma_{21}-\sigma_{12})\delta x_1\delta x_2\delta x_3 \tag{3.17}$$

である. 従って面積力によるモーメントは考えている微小体積に比例する. 一方体積力によるモーメントは長さの 4 乗に比例するので

$$\delta V \to 0 \tag{3.18}$$

という極限を取ると M_3 以外の寄与は消える. 一方で物体は回転せず静止しているためには M_3 がバランスする必要があり

$$M_3 = 0 \tag{3.19}$$

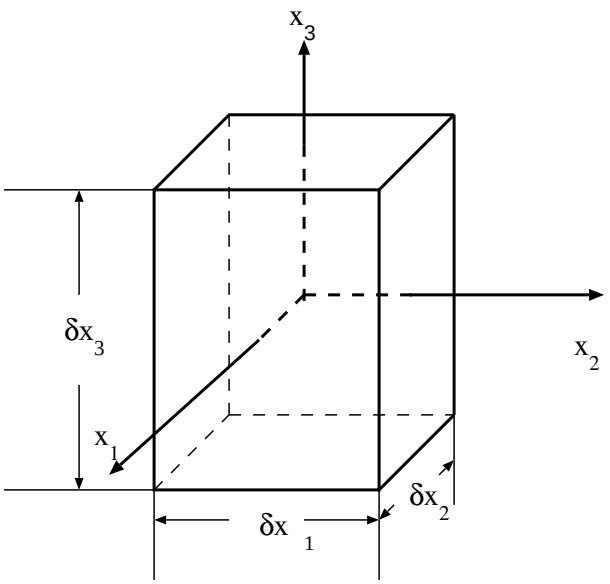

図 3.3: 直方体に働く力

が成立する. 従って

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \tag{3.20}$$

が成り立つ. 回転軸を 1,2 軸にすれば同様に、一般の (i,j) の組に対して

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{3.21}$$

を示す事ができる.

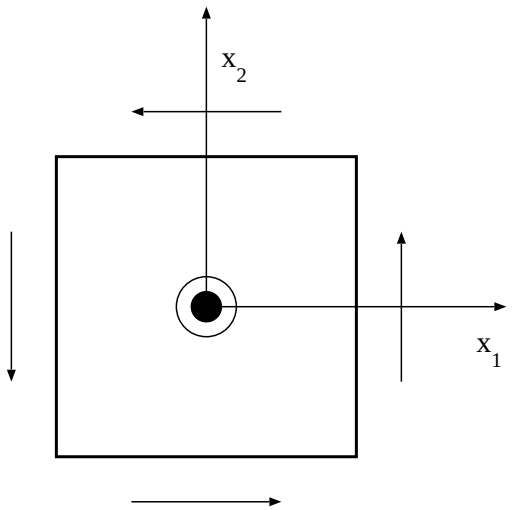

図 3.4: x_3 軸まわりに働くトルク

このテンソルの対称性は磁性流体等では破れている. 例えば磁化 $\mathbf{M}$ が

$$\sigma_{23} - \sigma_{32} = \rho M_1 \tag{3.22}$$

のようにトルクとバランスし得る. 従って非対称部分は

$$\sigma_{ij}^{(a)} = \frac{\rho}{2} \begin{pmatrix} 0 & M_3 & -M_2 \\ -M_3 & 0 & M_1 \\ M_2 & -M_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

となって有限に残る. この様な連続体をマイクロポーラー連続体と呼び、その一般論が存在する.

結局、ストレステンソルによって力 $\mathbf{F}$ と方向余弦 n_i の間には

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

という関係式が成り立つ.

3.2.1 歪みテンソル

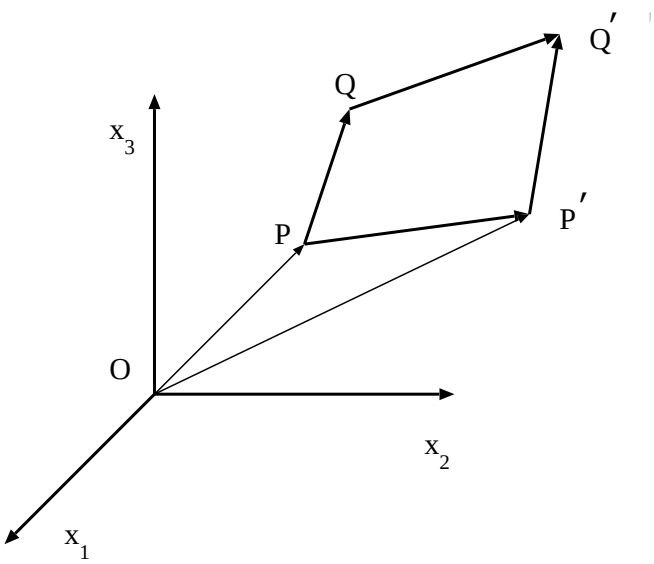

図 3.5: 連続体の微小変形 $P \to P'$, $Q \to Q'$

図の様に点 P を P' に移してみる.

$$x_i(P) \to x_i^{'}(P^{'}) \tag{3.25}$$

このとき

$$x_i + \delta x_i \to x_i^{'} + \delta x_i^{'} \tag{3.26}$$

という変換を受ける. この操作は連続体の変形を意味する.

ここで変位の i 成分を

$$u_i = x_i^{'} - x_i \tag{3.27}$$

で導入してみよう. 変形後の位置は元の位置の関数なので

$$x_i^{'} = x_i^{'}(x_1, x_2, x_3) \tag{3.28}$$

と書けるだろう. 従って微小変形の場合は

$$\delta u_i = \delta x_i^{'} - \delta x_i \simeq \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta x_j + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_n}\delta x_j \delta x_n \tag{3.29}$$

と展開可能である. 線形近似の範囲内で

$$\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta x_j = \left[\frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i})\right]\delta x_j \tag{3.30}$$

と書く事が可能である. これを

$$\delta u_i = (u_{ji} + \Omega_{ji})\delta x_j \tag{3.31}$$

と書き直してみよう. 第 1 項, 第 2 項はは (3.30) の第 1 項、第 2 項に対応しており、それぞれ対称、反対称 (交代) テンソルになっている. ここで ϵ_{ijk} は Levi-Civita 記号と呼ばれ

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (\text{i,j,k が偶置換}) \\ -1 & (\text{i,j,k が奇置換}) \\ 0 & (\text{それ以外})) \end{cases} \tag{3.32}$$

である.

ここで Ω_{ji} の意味を明かにするために回転 (rotation) と比較してみよう.

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \frac{1}{2}\mathrm{rot}\mathbf{u} \tag{3.33}$$

とすると、明かに

$$\omega_k = \frac{1}{2}\epsilon_{klm}\frac{\partial u_m}{\partial x_l} \tag{3.34}$$

が成り立つので

$$\Omega_{ij} = \epsilon_{ijk}\omega_k \tag{3.35}$$

という関係があることが分かる. [1]

ここで対称テンソル

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \tag{3.36}$$

の物理的意味について説明しよう. 対称テンソルは対角化可能なので主軸と主歪みが決まる. このとき対角和 $(\mathrm{trace})u_{ii}$ が最も重要であるが, それは体積歪みを表している. 実際, 微小体積要素 δV が $\delta V'$ に変形されたとする. このとき

$$\delta V' = \delta x_1' \delta x_2' \delta x_3' = (1+u_{11})(1+u_{22})(1+u_{33})\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \simeq (1+u_{ii})\delta V \tag{3.37}$$

[1] 外微分形式に詳しい人には Ω_{ji} と ω_k の間には duality があることが分かるであろう.

が成り立つ.[2] よって

$$u_{ii} = \frac{\delta V' - \delta V}{\delta V} \tag{3.38}$$

である.

このように対角和は体積歪みを表すのでそれを分けて考える事が可能である. 実際歪みテンソルを

$$u_{ij} = (u_{ij} - \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ij}) + \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ij} \tag{3.39}$$

という恒等式で書き直す事がしばしば行われる. 言うまでもなく右辺第 1 項は等積歪みを表し, 第 2 項は静水歪みを表す.

問 1 (1)

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jk}$$

を示せ.

(2)

$$\Omega_{ij} = \epsilon_{ijk}\omega_k$$

を示せ.

3.3 応力仕事率

エネルギー方程式

$$\begin{aligned} \frac{D\epsilon}{Dt} &= \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial q_i}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}v_{ij} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial q_i}{\partial x_i} \end{aligned} \tag{3.40}$$

を考える. ここで v_i は速度の i 成分であり

$$v_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.41}$$

は歪み速度テンソルである.

この系の弾性歪みエネルギーを考えてみよう. 弾性体の準静的な微小変形 δu_i に対して応力 $\sigma_{ij}n_j$ がする単位体積あたりの仕事 δW を計算してみる. 但し準静的変形では常に $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = 0$ が充たされている. この微小変形に伴う全仕事は

$$\begin{aligned} \int_V \delta W dV &= \int_S \sigma_{ij}n_j\delta u_i dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}u_i)dV \\ &= \int_V dV\{\sigma_{ij}\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\delta u_i\} = \int_V dV\sigma_{ij}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \int_V dV\sigma_{ij}\delta u_{ij} \end{aligned} \tag{3.42}$$

[2] 体積の増加は 3 つの軸に沿っての独立な変形の積と考えられる. 1 軸変形を考えると $\delta u_1 = \partial u_1/\delta x_1 \delta x_1 = u_{11}\delta x_1$ でそれ以外の変形は 0 である. このとき $\delta x_1' = (1 + u_1 1)\delta x_1$. 同様に 2,3 軸変形を考えると (3.37) となる.

が成り立つ. ここで $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = 0$ 及び $\sigma_{ij}\Omega_{ij} = 0$ を用いた. よって

$$\delta W = \sigma_{ij}\delta u_{ij} \tag{3.43}$$

及び

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial u_{ij}} = \frac{\partial \delta F}{\partial u_{ij}} \tag{3.44}$$

が成り立つ. 最後の δF は変形の (ヘルムホルツの) 自由エネルギー密度であり、準静的な最大仕事がヘルムホルツの自由エネルギーの差に等しいという熱力学の関係式を用いた.

3.3.1 Hooke 弾性体のストレステンソル

Hooke 弾性体とは変形が小さくストレスが歪みテンソルの線形で記述できるものを指す. このとき

$$\sigma_{ij} \simeq \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_{kl}}\right)_0 u_{kl} = C_{ijkl}u_{kl} \tag{3.45}$$

と書ける. ここで添字 0 は変形がないときの微分値を用いる事を表している. 無論 (3.45) は歪みがないときにストレスがかからない、即ち $\sigma_{ij} = 0$ であることを用いている.

(3.44) 式を用いると変形の自由エネルギー及び準静的な等温仕事は

$$W = \delta F = \frac{1}{2}C_{ijkl}u_{ij}u_{kl} \tag{3.46}$$

と書ける. ここで等方弾性体とすると歪みテンソルの対称性 $u_{ij} = u_{ji}$, $u_{kl} = u_{lk}$ 及び (3.46) での u_{ij}, u_{ji} の入れ換えに対する対称性から

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}, \quad C_{ijkl} = C_{klij} \tag{3.47}$$

が成り立つ. 従って本来 $3^4 = 81$ 自由度のある系が 21 自由度まで簡略化できる.

ここで等方テンソルを用いると更に簡略化できる. 4 階の対称等方テンソルは一般に

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{3.48}$$

と書ける事が知られている (問参照). 従ってストレステンソルは

$$\sigma_{ij} = \{\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\}u_{kl} = \lambda u_{kk}\delta_{ij} + 2\mu u_{ij} \tag{3.49}$$

となる. 同様に変形の自由エネルギー密度 δF は

$$\delta F = \frac{\lambda}{2}u_{kk}u_{ll} + \mu u_{ij}u_{ij} \tag{3.50}$$

となる. 自由エネルギーの安定性から λ, μ は正でなくてはならないということが分かる. これらは Lame の弾性定数と呼ばれる.

ストレステンソルが分かったために運動方程式は

$$\rho\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda u_{kk}\delta_{ij} + 2\mu u_{ij}) + \rho K_i \tag{3.51}$$

と書ける. ここで K_i は体積力である.

ここで前節で出て来た (熱流がないときの) 応力仕事率 $\sigma_{ij}v_{ij}$ を考えてみよう. (3.48) と $v_{ij} = \partial u_{ij}/\partial t$ を使って

$$\sigma_{ij}v_{ij} = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\lambda}{2}u_{kk}u_{ll} + \mu u_{ij}u_{ij}) = \frac{\partial \delta F}{\partial t} \tag{3.52}$$

という関係式が導かれるので仕事率という名称が適切であることが分かる. この様に (熱流等がなければ) 弾性体の場合は応力による仕事は内部エネルギーとして蓄えられるので全エネルギーは保存する.

問 (1) 4 階の等方テンソル C_{ijkl} が

$$\epsilon_{hia}C_{ajkl} + \epsilon_{hja}C_{iakl} + \epsilon_{hka}C_{ijal} + \epsilon_{hla}C_{ijka} = 0$$

を充たすことを示せ.

(2) 2 階の等方テンソルは

$$v_{ij} = \frac{1}{3}v_{jj}\delta_{ij}$$

と書けることを示せ.

(3) 3 階の等方テンソルは

$$w_{ijk} = \alpha\epsilon_{ijk}$$

と書けることを示せ. 定数 α を求めよ.

(4) 4 階の等方テンソルが 2 つの指標の入れ換えに対して対称ならば (3.48) 式の様に表せることを示せ.

(5) 反対称 (交代) 性をもつ場合には

$$S_{ijkl} = \gamma(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl})$$

と書けることを示せ.

3.3.2 Newton 流体のストレステンソル

線形の粘性流体である Newton 流体でも同様にストレステンソルを決めることが可能である. 流体では変形がないときにもストレスを感じる. 流体を入れた容器の底でその圧力を感じることからもこのことの正しさは分かる. しかしながら静止状態では接線応力は働かない. もし接線応力が働いたとすれば流体は流れておらず固まった状態にあると言える. 静止状態で接線応力が働かないことを流体の定義としてもよい. 逆に言えば流体に接線応

力が働いたとすると静止状態に留まり得ない. この場合は流体に変形が生じ, 接線応力がない状態になって改めて静止する.

変形が小さいときにストレステンソルが展開できるのは弾性体と同様である. 注意すべきは弾性体では変形歪みテンソルを用いて平衡状態から展開したが, 流体では歪み速度テンソル (3.41) の関数として展開されることである. 従って

$$\sigma_{ij} \simeq (\sigma_{ij})_0 + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial v_{kl}}\right)_0 v_{kl} = \tilde{C}_{ij} + \tilde{C}_{ijkl} v_{kl} \tag{3.53}$$

と展開可能である. ここで $\tilde{C}_{ij}$, $\tilde{C}_{ijkl}$ はそれぞれ 2 、 4 階のテンソルである. 流体の一様等方性を仮定すると前節の議論及び前節の問から

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda_0 v_{kk}\delta_{ij} + 2\mu_0 v_{ij} \tag{3.54}$$

となる. ここで λ_0, μ_0 はそれぞれ第 2 粘性率、(ずり) 粘性率と呼ばれ, 添字 0 は流体と弾性体を区別するために付けた. 一方、第 1 項は変形のないときに働く法線応力であり p は静水圧に他ならない.

(3.54) 式のトレースを取ってみると

$$\sigma_{ii} = 3(-p + \chi_0 v_{kk}) : \quad \chi_0 = \lambda_0 + \frac{2}{3}\mu_0 \tag{3.55}$$

となる. この式から明らかな様に χ_0 は流体の体積変化に対する抵抗を表す係数で体積粘性率と呼ばれる. χ_0 を用いると (3.54) 式は

$$\sigma_{ij} = (-p + \chi_0 v_{kk})\delta_{ij} + 2\mu_0 \left(v_{ij} - \frac{1}{3} v_{kk}\delta_{ij}\right) \tag{3.56}$$

と書ける. ストレステンソルのトレースを括り出したこの形の方が (3.54) よりも使われる機会が多い.

粘性流体の法線応力は一般に方向に依存している. 実際法線応力は

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = (-p + (\chi_0 - \frac{2}{3}\mu_0) v_{kk}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\mu_0 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{22} \\ v_{33} \end{pmatrix} \tag{3.57}$$

で与えられ各法線応力は一致しないし、p とも等しくない. 圧力の定義は任意性が残るが, 本書では静水圧 p と等しく取る.

Newton 流体の応力仕事率は

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} v_{ij} &= (-p\delta_{ij} + \lambda_0 v_{kk}\delta_{ij} + 2\mu_0 v_{ij}) v_{ij} \\ &= -p v_{kk} + \Phi \end{aligned} \tag{3.58}$$

と書ける. ここで Φ は粘性散逸関数と呼ばれ, 単位時間、単位体積当たりの力学的エネルギーの熱への変換率である. Φ の具体的表式は (??3.3.2.6) 式から

$$\Phi = \lambda_0 v_{kk}^2 + 2\mu_0 v_{ij} v_{ij} = 2\mu_0 (v'_{ij})^2 + \chi_0 v_{kk} \tag{3.59}$$

で与えられる. ここで $v'_{ij} = v_{ij} - \frac{1}{3}v_{kk}\delta_{ij}$ である. 熱力学第 2 法則から $\Phi \geq 0$ が要求され、その結果粘性率 χ_0, μ_0 が正であることが必要になる. この様に同じ線形の構成方程式を用いても弾性体が保存系であったのに対して粘性流体は散逸系となる.

熱力学的な議論が出て来たのでエネルギー方程式 (2.36) 式に戻ってみよう. (3.58) を (2.36) 式に代入すると

$$\rho\frac{D\epsilon}{Dt} = -pv_{kk} + \Phi - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \tag{3.60}$$

となる.S を単位質量当たりのエントロピーとして熱力学関係式 $d\epsilon = -pdV + TdS = -pd(1/\rho) + TdS$ を用いると

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = -\frac{p}{\rho}\mathrm{div}\mathbf{v} + T\frac{DS}{Dt} \tag{3.61}$$

が成立する. 但しここで (2.14) 式を用いた. (3.61) 式を (3.60) 式に代入するとエントロピーの変化式

$$\rho T\frac{DS}{Dt} = \Phi - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \tag{3.62}$$

が成立する. これがエントロピー変化を記述する方程式となる.

3.4 物質定数

ストレステンソルには弾性定数或は粘性率が含まれる. ここでは弾性定数や粘性率の充たすべき性質を簡単に説明しよう.

3.4.1 Young 率

弾性論の議論で Lame の弾性定数を導入したが, 実際には異なった弾性定数が用いられる事が多い. その理由は以下に述べる弾性定数が直接実験で測ることが可能であり、どのような物理的特性を反映したものであるのかがはっきりしているからである.

その準備のためにストレステンソル (3.49) の対角和を取ってみよう.

$$\sigma_{ii} = (3\lambda + 2\mu)u_{ii} \Leftrightarrow u_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{3.63}$$

となる.

Young 率は 1 軸方向の力に対するどのような 1 軸変形が起こるかを示した定数であり、物体の幅を無視すればばね定数に対応している. 今 x_1 軸方向に $F = \sigma_{11}S$ を加えてみる. ここで S は断面積である. (3.63) から

$$u_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{11}, \quad u_{22} = u_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{11} \tag{3.64}$$

となる. ここで

$$u_{11} = \frac{1}{Y}\sigma_{11} : \quad Y = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \tag{3.65}$$

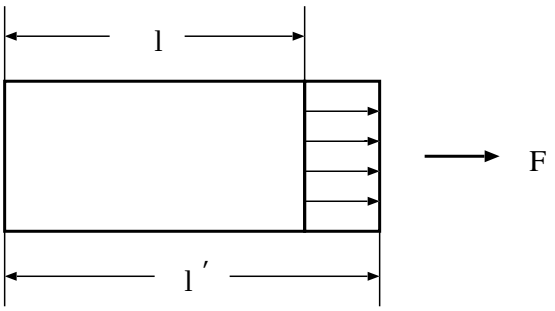

図 3.6: 連続体の 1 軸変形.

と書いたときの Y が Young 率である.

Young 率の物理的な意味を明らかにするために断面積 S の変化しない棒を 1 軸方向に δl だけ伸長することを考えてみよう. この場合、棒の端は力 $F = \sigma_{11} S$ の力がかかっており、u_{11} は伸びと元の長さの比になるので $u_{11} = \delta l/l$ である. 従って

$$Y = \frac{\sigma_{11}}{u_{11}} = \frac{F/S}{\delta l/l} \tag{3.66}$$

となり、ばね定数との対応関係もはっきりするであろう. この場合 $Y > 0$ であることは物質の安定性から要請される.

3.4.2 Poisson 比

一般に図の様に棒を引っ張ると横方向に縮む. その割合を表す弾性定数が Poisson 比である. この本では σ で表し、定義は

$$\sigma \equiv \frac{|u_{22}|}{|u_{11}|} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \tag{3.67}$$

で与えられる. 明らかに Poisson 比は垂直方向の縮みと軸方向の伸びの比であり殆んどの場合に正の値を取る. また硬い物質程横の変形が小さく、0 に近い値を取り, 軟らかい物質は大きな値を取りやすい.

或は体積弾性率

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{3.68}$$

を導入して (3.66)-(3.68) の弾性定数を Y, σ で表してみると

$$\lambda = \frac{\sigma Y}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad \mu = \frac{Y}{2(1+\sigma)}, \quad k = \frac{Y}{3(1-\sigma)} \tag{3.69}$$

となる. 熱力学的な安定性より μ, k, Y が正であり

$$-1 < \sigma < 1/2 \tag{3.70}$$

という制限がつく. 何度も言うように実質的に $\sigma > 0$ なので (3.70) は

$$0 \leq \sigma < 1/2 \tag{3.71}$$

に置き換えてもよい.

3.4.3 粘性率

粘性率の性質については既に述べたのでここでは繰り返さない. 若干の補足説明をしておくのみに留めよう.

各種粘性率は簡単な分子構造を持つ気体において分子運動論に基づき系統的に計算することは可能である. それ以外の一般の流体においては直接計測する他はない. (ずり) 粘性率は一般にレオノメーターと呼ばれる実験装置を用いて計測可能である. そこでは (殆んどは回転) ずりを加えて、その抵抗力から粘性率を測定する. 体積粘性率は単原子分子気体の場合は 0 であることを理論的に示すことが可能である. 一方多原子分子では一般に有限であり音波吸収から測定する. 液体について体積粘性率は殆んど分かっていない. それは常態では液体は非圧縮 $(\mathrm{div}\mathbf{v} = 0)$ と考えられ体積粘性率が現れないためである. もしその影響を論じるのであれば音速に近い速い流れを議論する必要があり, そこでの計測が必要になる.