現代物理の世界： 世界物理年に寄せて
-洛星高校土曜講座-

早川尚男
京都大学大学院理学研究科
606-8501 京都市左京区吉田二本松町京大吉田南構内
Tel: 075-753-6782, Fax: 075-753-6804,
e-mail: hisao@yuragi.jinkan.kyoto-u.ac.jp

平成 17 年 12 月 1 日

はじめに

本講義ノートは 2005 年 10 月 29 日から 12 月 3 日にかけて 5 回に渡って洛星高校の土曜講座で話した内容をまとめたものである。本講義ノートの内容は高校生向けには高度であると思うし、講義そのものも必ずしもこのノート通り行われた訳でもない。しかし記録という意味で高校生の諸君が本書を手にして折を見て物理学を考えるきっかけになればと思う。

土曜講座のホスト役を務めて頂いた田中先生、講義をする機会を与えて頂いた今川先生、お忙しい中で第一回目の講義をわざわざお聴き頂いた村上副校長には感謝の意を表したい。また第 3 回の講義で模擬実験をしてくれた東京大学の辰己君にも謝意を表したい。

目 次

第1章　物理学の現状と問題点

1.1　世界物理年

今年は世界物理年 (あるいは国際物理年) である。したがって大いに物理に親しんで欲しいのだが、そもそも物理を取り巻く環境は年々厳しさを増すばかりである。曰く、高校での履修率の低下、曰く、物理は日常とかけ離れて最も落ちこぼれの多い科目である、曰く、原爆、原発をはじめ諸悪の根源である。また２０世紀が物理の世紀だったことは紛れもない事実であるが、最早、物理の世紀は終わりを告げ、斜陽の学問であるという言い方をすることがままある。しかし、諸学の王たる物理の持つ重要性は未だに揺るぎの無いものである。エレクトロニクスにしても、分子生物学にしても物理学に基礎を置いている。まして森羅万象を扱う学問である物理学は自然界のみならず社会現象迄をも記述する最も優れた道具となっている。本講義では物理の世界の一端を垣間見せることができたらと思う。

世界物理年というのはアインシュタインの奇跡の年 1905 年から 100 年ということを祝して設定された。奇跡の年というのは彼が革命的な３つの論文、特殊相対論、光電効果、ブラウン運動の理論、を著した年である。特殊相対論は言うまでもなく、ニュートン力学に変更をもたらした高速物体の運動学である。光電効果は (高校で習うと思うが) 量子論的概念を光と電子に持ち込み、光の持つ運動量が粒子のそれと同様に物質中の電子を励起することに使われ得ることを示す現象である。ブラウン運動は花粉の運動等でおなじみであるが、それが分子の実在を証明する道具であり、不可逆性を議論する非平衡統計力学の礎を築いた理論をアインシュタインが構築した。これらの３つの理論は２０世紀の物理学の方向を定めたと言ってよく、本講義でも意識的に取り上げて解説を試みる。[1]

1.2　話はなかなか始まらない

前書きの好きな作家として指を折らなければならないのは児童文学家のケストナーであろう。本講義でも話はなかなか始まらない。(しかし実際の講義ではこの部分はカットすると思う。意外にスケジュールはタイトである)。

2005 年に私の地元で愛、地球博があった。これは 1970 年の大阪万博以来の公認の万博であった。まずはこの間に何があったかを思い出してみたい。

子供の頃には 21 世紀というのは遠い未来という印象がなかった。 これは私だけのことではなく世間一般にそうだった。1970 年に私は小学 2 年から 3 年になったのだがその当時に事を思い出すと現在と余りに違いがないことに愕然とする。勿論共産圏が崩壊するなど

[1] 尚、本章の内容は web 上に公開している私の講義ノート「物理学概論」に若干の修正を加えただけのものである。したがって高校生にはちょっと硬い難しい表現を用いていることは了承してもらいたい。実際の講義はパワーポイントを使うので、特に本章の内容はあくまで参考文献と思って頂きたい。

世界史的事件はそれなりに起こっていたが、翻って庶民の生活にはあまり変化がない。また科学技術の進歩は完全に停滞したと言えよう。

1970 年はどういう年であったか。日本では万博があって延べ 6500 万人もの人が大阪千里丘陵を訪れた。69 年にはアポロ 11 号が月に着陸している。ジャンボジェット (B747) の就航も同じ年である。コンコルドは数年後に就航したが遂に超音速飛行は一般的にはならなかった。ICBM は標準配備され、原子力発電は既にいくつもあった。大学では学園紛争に明けくれ、アメリカはベトナムで泥沼にはまって、中国では文革の嵐が吹き荒れていた。

政治的な事まで書いても仕方ないので物理の絡んだ科学技術に話を限定しなければならない。それにしても 70 年前後の将来像は今から考えるとほほえましい。例えば 1980 年には (原子力ロケットで!) 火星に有人飛行がなされている筈だった。原子力ロケットというのは水爆の反発力で前進するという危険きわまりないものであったが子供の絵本には必ず描かれており、私などは無邪気にその普及を信じていた。1985 年にはリニアモーターカーが東京と大阪の間を走っている筈だった。これは小学校で配られる地図帳にも書かれていた国家的な予測であった。21 世紀にはエアカーが走り回っている絵がよく子供の図鑑に描かれていた。1969 年の NHK の人形劇 (ひょっこりひょうたん島の後継) は空中都市 008 というもので宇宙ステーションで暮らしている子供たちの話であった。キューブリック監督の伝説的な「2001 年宇宙の旅」もその頃の作品であり、さすがによりリアルであるが木星への有人飛行は到底ありえない。コンピューターは長足の進歩を遂げたが、映画のような反乱を起こすコンピュータもない。原理的な面ではノ イマンやチューリングの作った枠の中にあるように思える。2003 年には鉄腕アトムの誕生ということになっていたが、勿論、それほどの知能 を持ったロボットはない。ロボット工学の発展というのが愛、地球博の売りであったが、ようやく演奏が出来るロボットが、出来たとか、不様な恰好でサッカーをするロボットが出来たという程度であり、子供の頃の未来像からは程遠い。(実際、万博でもフジパンロボット館ではロボットの演奏のショーがあった)。

アポロ 11 号が月面に到着した 1969 年は一般の人には宇宙時代の幕開けに映ったかもしれないが、NASA の職員や専門家にとってはむしろフロンティアの消滅と捉えられたかもしれない。実際、NASA はアポロ計画の終了と共に職員の大量解雇を行っている。現在のスペースシャトルが高々地球の周りを回っているのに過ぎないのに昔は月に何回も行っていたというのは驚くべきことであり、そのことだけを強調すれば宇宙に対する アプローチは退歩していると言っても差し支えない。実際、技術的にも進歩はな く旧来の液体燃料ロケット等を用いている。NASA 自身も最近、スペースシャトルは失敗プロジェクトであったと認め、アポロ計画への回帰を図っている。

航空機はもっとひどいかもしれない。 ジャンボはあまりにも完成された航空機なので世界中を席巻した。超音速旅客機はあまりにも経済効率が悪く、我々は恩恵に浴していない。わずかに大西洋を飛んでいたコンコルドも 2000 年 7 月の事故の後、静かに引退していった。意外にも高速鉄道はやや進歩が見られ、新幹線の 210km/h が TGV と新幹線の 300km/h に引き上げられた。TGV は 515km/h を試験走行で実現している。これ とて技術のみで原理的な進歩ではない。むしろ在来型の鉄道で 500km/h で走って しまったことでリニアモーターカーは殆んど実用価値を失ってしまった。そもそ も 500km/h という中途半端な速度が必要と されているのかも疑問である。

一方、科学技術の負の側面も 70 年頃から問題となっていた。当時、公害列島とまで言

われ、水俣病、四日市喘息、イタイイタイ病等が人々を蝕んでいた。やがて公害はかなり改善されて、環境問題は一時下火になったが今はまた温暖化や環境ホルモンの問題が世間を賑わせている。環境問題の中でも温暖化を指摘する論文は当初 物理の雑誌に発表された。むしろ 70 年頃は氷河期がやってくるといったような寒冷化の問題が専ら懸念されていた。実際どちらに転ぶか今の時点でも確定していない。というのは現在の平衡点の安定性はどの程度であるか、また別の平衡点がどこにあるのかはまだ分かっていない。一般的には寒冷化の方が温暖化よりは脅威であろう。20 世紀にはいって徐々に暖かくなってきているのは確かであるが、それが今後、どう推移していくのかは分からない。

雑談風のこのノートはどんどん脇道に入って行こうとしているがここで強調したいのは 1970 年頃を境にして科学の直線的な進歩が止まり、質的に違ったものが現われて来たという事である。本講義の対象である物理学はまさに 20 世紀の象徴であり、70 年迄の直線的進歩とその後の成熟 (或は停滞) を示す学問分野と言ってもよい。70 年前後に何があったかと言えば素粒子論では標準理論がくりこみ 可能である事の証明とその完成であり、物性では臨界現象へのくりこみ群の応用 であった。その後、物理学の中で求心力を持った話題が減り、その結果、専門化が進むにつれて物理の一体感が失われていったように感じる。少なくとも物理学の持つ社会的影響力の低下は顕著であり学問の王の場を滑り落ちようとしている。その事は物理学が最早不要になったという事を意味するのではなく、信頼度の高い学問分野として確立し、現代文明を支える基礎となっている。謂わば常識なのである。従って高校生の諸君にも物理学の現状を概観することは必須であろう。

本講義では物理学の歩みと現状を概観する。ちょうど 1900 年に温度に名前を残すケルビン卿の有 名な講演があったが、その講演の後にどのような発展があったのかを紹介する。 特に相対論と不可逆性の考え方や発展の歩みをアインシュタインの考えた事を軸に紹介していこう。

したがって現在のところ、プランでは

1. 試験に出る特殊相対論
2. 特殊相対論のミラクルワールド
3. 今、古典力学が熱い。粉体の不思議な振る舞い
4. ブラウン運動と分子の実在性
5. 時間の不可逆性について

を順を追って講義する予定である。量子論に関しては時間の都合上割愛する。興味があれば、大学で勉強して下さい。

1.3 物理学の現状と問題点

まだまだ始まらない。ここでは蛇足のようだが、物理学の現状と問題点をまとめてみとう。

2000 年に雑誌 Time が過去 100 年で最も偉大な人物としてアインシュタインを挙げ、その顔を表紙に載せた。このことに象徴されるように 20 世紀は物理学の世紀であったと云っ

て過言ではない。量子論と相対論は単に科学観を一新する だけに留まらず、人間のありかたにも影響を与え、社会的波及効果もまことに大 きいものがあった。量子論が原子核というパンドラの箱を開け、また今もビッグバンという宇宙論で用いられる言葉が日常言語として定着するようになった。

しかしながら、或はそれ故というべきか、物理学はかつての輝きを失いつつある様に感じる人も多いだろう。それは過度の成功によって完成されたと思われる学問分野の宿命なのだろか。また物理学と無関係に暮らす事は可能であると主張して憚らない人も多くいる。本講義では高校生の諸君のために現在の物理学の現状を紹介することを通し、現代社会における物理の役割を理解してもらうことを目的とする。

そもそも物理学の進歩が終りに近いという事は正しい事なのであろうか。 一般的な反論をする前にちょうど 19 世紀最後の年の事を思い出したい。 1900 年 4 月 27 日、ケルビン卿は王立研究所で「熱と光の動力学理論をおおう 19 世紀の暗雲」という講演を行った。彼はその難問を以下の様に表現した。

> 熱と光を運動の一形態として説明しようとする動力学理論の美しさと明晰さの上に、 いま,19 世紀の 2 つの暗雲がおおいかぶさろうとしている。そのひとつは、フレネルと トマス・ヤング博士によって論じられた光の波動論に関する問題である。すなわち、 地球が光エーテルのような弾性固体の中をいかにして運動するのかという疑問である。 もう一つは、エネルギーの分野に関する マクスウェル・ボルツマン理論である。 (Philosophical Magazine, 1900, July: 翻訳は小山慶太「異貌の科学者」(丸善 1991) による)

105 年前の物理学の状況について詳しく説明する時間はないが、ここで最低限の説明を試みる。ケルビン卿が触れた最初の暗雲は光の本質は何かという事に絡んだ問題であった。ニュートンは光は粒子であるとして いた。 しかし、1803 年に表記のヤングが光の干渉実験を行った。また 1818 と 21 年での フレネルが光が障害物の後ろへ回り込むという回折の理論の提出と実験の成功に至って、 光は波であることが揺るぎ無い状況になっていた。しかし光を波としたとき、 媒質が必要となる。これは音は真空中で伝わらないのと同じ理屈であって、一般 に媒質なしには波は伝わらない。そのためにエーテルという仮想的な媒質が考え 出された。(化学物質のエーテルとは関係ない)。その一方で光は横波で、 圧縮波である縦波は存在しない事も分かっていた。弾性固体という表現でその圧 縮できない固さを表現している。宇宙空間にそのような固い物質が充満している というのもおかしな話であるが、当時はその存在を疑う者はいなかった。しかし多くの研究者の努力にも関わらずそのエーテルの存在を示す証拠は見つからず、それどころか否定的な結果が出始めて来た。特に 1887 年のマイケルソンとモーリーの実験は有名である。彼らは地球が絶対静止空間に充満しているエーテル内を運動するとすればその中を伝播する光が進む方向によって速度が違う筈であると考えて高い精度の実験を行ったが、そのような光の速度の違いは発見されなかった。この矛盾を解決するのは云うまでもなくアインシュタインの (特殊) 相対論である。

一方、ケルビン卿の後者の暗雲は気体分子運動論に基づくエネルギー等分配則の問題である。例えば鉄を熱すると、最初は赤く、温度が上がるにつれて、白色、青と変化していく。高温になるほど青く光を放つ訳であるが、それをもっと定量的に電磁波のエネルギー

が電磁波の波長 (あるいは周波数) のどのような関数になるかという事が当時大問題であった。特にマクスウェルやボルツマンの古典的な理論ではどうしても説明がつかなかったのである。ケルビン卿の講演から 8ヶ月程後にプランクが量子仮説を導入し、量子力学の道を開いたのは皮肉な事に 1900 年のクリスマス前 (12 月 14 日に投稿) のことであった。まさに 20 世紀に向けての人類へのクリスマスプレゼントであったのである。

このように 1900 年のケルビン卿の予言の裏にあった連続体的自然観に基づく物理学の完成への期待は完全に外れたが、同時に的確な問題点を認識していた慧眼には感嘆の他はない。

1900 年のケルビン卿と同じ様に物理学に終りがあるであろうことを明言したケースがその後に少なくとも 2 回はあった。1925 年にハイゼンベルグがプランク以来の古典的な量子論をいわば第一原理的に説明する量子力学を提唱して後、爆発的に物理学は発展していった。その興奮の嵐の中で 1920 年代後半に量子力学の建設に主要な役割を果たしたマックス・ボルン (量子力学の定式化で 1954 年ノーベル物理学賞受賞) は「6ヶ月以内に物理学は終ってしまうだろう」と熱っぽく語った。しかしほどなくポール・ディラックが特殊相対論と量子力学を結合させたディラック方程式を提出し (1928)、陽電子等の予言と発見等から物理学は更に極微の世界へと発展していった。

1980 年に車椅子の天才ホーキングはケンブリッジ大学のルーカス数学教授職の就任の際に Is the end in sight for theoretical physics? (理論物理学に終りは見えて来たか) という刺激的な講演をしている。彼はその講演の冒頭で「理論物理学の目的は遠くない将来、20 世紀の終りには達成されているかもしれない、と語っているのである。勿論、森羅万象が物理の対象であるので終局は原理的にあり得ないのであるが、彼が目的としているのは観測可能な物理的相互作用が完全で無矛盾な統一理論によって記述されることであり、それが完成すれば、後は応用問題が残るのみである、という態度を表明した訳である。この際、問題になる相互作用は重力、電磁気相互作用、弱い相互作用、強い相互作用の事を指す。前 2 者は問題ないが、後 2 者はおそらく耳慣れない言葉であるであろう。弱い相互作用と強い相互作用はいずれも素粒子間の相互作用として発見されている。強い相互作用はハドロンと呼ばれる核子 (陽子、中性子等) 間に働き、湯川秀樹によって初めて導入された。また弱い相互作用は光を除く全ての粒子間で働くが、空間反転や時間反転に対して不変ではなく、そのプロセスの中で保存しない量も多い。ホーキングの講演の背景に素粒子論における標準理論が 70 年代初頭に完成し、電磁気相互作用と弱い相互作用 (電弱相互作用と呼ぶ) は統一していた事、またグラショウ等によって提唱された大統一理論によって強い相互作用も統一できるのではないかと思われていた事、その前年 (1979 年) に電弱相互作用の統一でワインバーグとサラムがノーベル賞を取り、同時に大統一理論の提唱者であったグラショウも受賞の栄誉を担った事による。すなわち後は重力だけであるという熱気に満ちていた時代なのである。そしてホーキングの研究はまさに量子重力、すなわち重力を量子化し、他の相互作用と統一しようというものに捧げられていた。そもそも重力と電磁相互作用の統一はアインシュタインが後半生を捧げて報われなかった研究内容である。1979 年がアインシュタイン生誕 100 周年であった事もあり、熱に浮かされた様な状態にあったとも言える。

1985 年前後のスーパーストリング騒動はまさにホーキングの慧眼を窺わせるに足るものであったが、その後の推移はむしろ統一理論の完成には程遠く、大統一理論も大いに問

題があるのではないのか、というところまで後退した。その一方で素粒子論が実験ではとても観測できないエネルギー領域を理論だけで議論しようとする問題点も次第に明らかになり、また冷戦の終結と、巨大加速器 SSC の建設計画の挫折等から素粒子論が急速に求心力を失っていった。勿論、現在でも宇宙論と融合して、最も基本的でかつ人気のある研究分野であることには変わりはないが物理学の多くの分野の中の (人気のある) 一つになってしまった感は否めない。また、少なくとも相互作用の解明とそれに伴う理論物理の終りは見えて来ない。

そもそも何故、物理学者は、こう何回にも渡って、終りを議論したがるのであろうか。おそらくはこのことは物理の本質と深く関わっている。物理学は最も理想化された状況を基本として、少数の基本法則から出来るだけ沢山の現象を説明しようとする学問である。例えばニュートンの運動方程式は古典的世界においてはほぼ万能であって、その方程式から極めて多く、原理的には全ての日常的な振舞が説明出来る。勿論、物理学には多くの分野があり、必ずしも各分野間の繋がりは自明ではない (例えばニュートンの運動方程式は過去も未来も対称なのに何故時間に方向性があるのか) のでここの議論は簡単化しすぎのきらいはある。20 世紀前半にもたらされた 2 大革命はニュートンのうちたてた古典物理とは異なった理論体系があり、そのある種の近似で古典物理が成り立っている事を明らかにしたのである。相対論には 2 種類あって、特殊相対論と一般相対論である。前者は先に述べた様に量子力学と融合している。一般相対論は重力の理論である。従って相互作用の統一というのは 20 世紀の 2 大革命を統一し、その原理原則から全てを演繹しようという試みに他ならない。例えば統一理論が極めて単純な方程式から成る事が分かれば後は、それをどうやって解くのかという技術的な問題になる。物理学者は少数の簡単な問題を扱った後に問題を化学者や工学者に渡し、より原理・原則を追求していったのが 20 世紀の物理の大きな特徴をなしていた。

このようなある意味で不遜な態度が取れた背景には不遜さを裏付ける実績と自信があったのである。例えばマンハッタン計画においてアメリカの物理学者が中心になて原爆をつくり出し、やがて物理学者が水爆を発明し、原子核という極微の世界が単なる学問的な意味を超えて冷戦構造を支える恐怖の象徴として君臨した。そしておそらくは冷戦の終りと最近の物理をとりまく物憂げな風潮は無関係ではない。少なくとも核物理学者は米ソの対立の中で、その存在意義を増し、冷戦の終結と共にパトロンである政治家から見捨てられたと言える。

こうした政治的背景とは別に物理学が直線的に成長することにいろいろな問題が生じて来たことも事実である。実際、現在の状態は幹だけが伸びている木の様なものである。葉がなければどんなに高い木も枯れてしまう。確かに背が伸びる事は成長期には必要ではあるが、枝葉を広げて大人として成熟することも必要なのである。本講義の後半で敢えて量子論の解説を捨て、量子論の効かないマクロな現象を説明するのは、マクロ系ならではの難しさと深さがあることを認識して欲しいからである。例えば東京タワーから落したお札がどのような振舞をして何処に落ちるのかは現在の科学では予言できない。こうした問題に真面目に答えて行く事が今後物理学として重要になっていくであろう。

物理学の凋落傾向を察してか、物理学や或は数学は若い世代に不人気である。他の科目に比べて難しいという事があるのであろう。また反駁の余地無く成立する学問分野に息苦しさを感じるかもしれない。1970 年のクーンの「科学革命の構造」の出版以来、物理等の

自然科学を相対化しようという科学論の一連の動きは人文系の反撃と見ることも可能である。またそういった考え方が一面の真実を捉えている事を否定できない。しかしそういった事は見逃せ ない様々な問題をもたらす。

例えば、影響力のある科学史家である村上陽一郎氏は岩波『図書』の連載「科学哲学の窓」で次のようなことを書いている (1999 年 3 月号 58-59 頁)：

> 瞬間速度という概念が、微分という便宜的な算法を使わずには成り立たない、あるいは概念上の困難がある、ということを前回に述べた。日常的な考えに従えば、速さという概念は、あくまで一定の時間が定義されたとき、その時間内に移動する距離との比 によって与えられるものだからであり、「瞬間」である限り、そこには一定の値を持つ「時間」が定義できないからである。それを微分を使って切り抜けて、見事に成功をおさめたのが、近代力学であった。しかし、そこに争い難い問題が残ることも確かである。
>
> それは結局時間幅をゼロに近付ければ移動距離もゼロに近付くはずなのに、移動距離のほうだけはゼロにならない、という微分の言い抜けである。
>
> これに対して正面から取り組んだ故大森荘蔵は、このような幅のない時間点の上に立つ瞬間速度という概念の、概念上の困難を真正なものとし、そこからの脱却を主張しよう、というのだから、ことは穏やかではない。

彼は本気でこんな事を書いているのではないと信じる。割算をすれば 0.1/0.1 であろうが、1/1 であろうが、$1.0{\times}10^{-10}/1.0{\times}10^{-10}$ も同じ 1 である。そもそも村上氏は微分が速度に対応していて移動距離に対応していないことを意図的にか剽窃している。(云うまでもなく、移動 距離は時間幅に速度をかけたものであり、時間幅をゼロにすればゼロになる)。 または幾何学的に接線を引けるかどうかという問題である。勿論、数学の歴史の 中ではより真剣に連続関数の定義や、微分可能性は議論され固まってきたことで あるが村上氏の議論はあまりにも稚拙で、そのレベルに達していない。 この事自体は村上氏の筆が滑べったためとすれば済むことであ るが、問題はこの一文に触れた読者が彼の云う事を鵜呑みにして今まで築き上げ てきた科学の成果を安易に否定してしまうことである。

安易な否定はまた安易な肯定とも繋がる。諸君はそういった安直な態度を取らない様にするためにも現代の物理学の考え方を理解する必要があるのである.

第2章　特殊相対論の不思議な世界

2.1　アインシュタインと特殊相対論

第1章で触れた様にアインシュタインは20世紀の顔として定着しただけでなく過去を通しても屈指の偉大な人物として神格化されている。アインシュタインの業績は多岐に渡っており、彼の物理学における業績は

1. 特殊及び一般相対論の発見
2. 量子力学への貢献：光電効果 (ノーベル賞の対象)、誘導放射の理論,EPR パラドックス
3. 量子統計力学：、ボース・アインシュタイン (BE) 統計と凝縮理論、固体比熱論
4. 非平衡物理：ブラウン運動の分子理論、非平衡物理の創始、有効粘性率の理論

等が知られている。いずれも一流の業績であり、例えば1995年に純粋なボーズ・アインシュタイン凝縮 (BEC) の実験が可能になったことのみで物理業界が沸き立ち、2001年のノーベル物理学賞の栄誉を担ったばかりでなく、未だにその興奮の中にあるという一事だけからもその偉大さの一端が伺える。個々の理論の説明とその影響については細かく紹介する余裕はないが、ここでは最も人口に膾炙する相対論について極く簡単に紹介しよう。

相対論が何故、アインシュタインの名と直結して語られるのであろうか。その理由として、相対論はアインシュタインのみによって開拓、完成された点と、理論が日常的直観を超越した予言をする点にあるのであろう。また日常と切り離された適用領域やその完全無欠性がかえってその神秘性を助長するという事もあるのかもしれない。その辺りの事情は20世紀のもう一つの (そしてもっと影響力の強かった) 量子力学の発展史と比較するはっきりする。量子力学も日常知を越えた不思議な予言をするのであるが、テレビやコンピューター等、日常生活の隅々まで支配している量子力学に違和感を持ちにくく、また発展の歴史もプランクの創始から、アインシュタイン、ボーア、ソンマーフェルト、ド・ブロイ等の研究を経て、ハイゼンベルクやシュレディンガーによって量子力学の形を取り、更に今に至るまでその基礎については専門家の間での論争が絶えず、多くの天才達が作って来た学問であり、まだ論争の余地があるという意味で人間の営みが感じられる。相対論の完全無欠性とアインシュタイン一人によって完成されたという特殊性が故に、おそらくは量子力学よりも相対論の方が知名度が高く、また「トンデモ」の登場する頻度が高い。

相対論には特殊と一般の2種類の相対論がある。名称から察せられる様に一般が特殊を包括するように定式化されており、アインシュタイン自身も1905年に特殊相対論を、そして様々な紆余曲折を経て1916年に一般相対論を完成している。特殊相対論自体は光速に近い現象を議論する時に必ず必要になるために、単に物理学のみならず技術畑に働く人

にも不可欠のものとなっており、非常に多くの人が駆使している。通常の大学でも理系 2 回生向きの教養科目で特殊相対論は教えられることが多く、その習得は普通の学生にも困難なものではない。それにひきかえ一般 相対論は発表後 50 年もの間、殆んど実用的な価値はなく、60 年台に入ってブラッ クホールその他の宇宙物理現象と関連して多くの物理学者にリアリティをもって 迎えられるに至った。現在でも一般相対論を必要とする研究者は限られており、「特殊」程、一般性をもって迎えられていないのが現状である。[1]

本講義では特殊相対論の考え方をごく簡単に説明したい。一般相対論については筆者の知識も充分でないので、その説明を一切割愛する。勿論、講義を聴いて最初の仮定から自己矛盾なく相対論を理解する事は不可能である。 興味を持った場合は大学の教養レベルの相対論の教科書を読むことをお勧めする。また巷に溢れるブルー バックス等のような子供向けの啓蒙書との差異はそれほどない。むしろ、本講義の方が皮相的な紹介に留まるかもしれない。

2.2 時代背景

相対論が登場した時代背景を思い出そう。前章で述べた様にケルビン卿の講演とプランクの量子論の登場が 1900 年であった。量子論、統計力学と原子論の論争等は ひとまずおいて ケルビン卿の言う黒雲の一つであったエーテルの問題を紹介してみよう。

19 世紀に従来のニュートン力学と異なった特徴を備えた 2 つの理論体系が登場し、研究上の主流となった。この 2 つは熱力学と電磁気学である。熱力学については改めて触れる機会があると思うが、ここではその成功のあまり熱力学のエキスパートの何人かは原子の実在を否定しようとし、原子論者との間に激しい論争があったことのみを紹介しておこう。一方、電磁気学は最初はニュートンの重力理論との類推によって定式化が進められて来たが、 ファラデーの電磁誘導 (1831) の発見辺りから両者の間には質的に異なるものであることが認識され、 マクスウェルによって 完成された (1864) 電磁気学はむしろ流体力学と非常に近いものになった。即ち、 流体と同じく電磁気は場を媒介として波が伝わりその結果として相互作用を行う というものである。しかし、一方、通常の波は媒質を必要とするということは真空中では音が伝わらな い事を考えればよく分かる。従って水の波を考えると「水」抜きには波は語れない。 マクスウェルの電磁気学では 19 世紀末にヘルツによってなされたように電磁波の存在の予言及びその検証が大きな成果であった。また ヤングやフレネルの実験等から電磁波の一種である光が波の性質である 回折や干渉を起こす事は疑う余地がない程確証されていた。従ってヘルツによって電磁波の存在が確証されると真空中に電磁媒質であるエーテルが充満していると考えられたのはある意味では自然な流れであった。そこで導入されたエーテルは絶対空間の中で静止しているのである! しかし真空の媒質とは何であろう か。 ローレンツは物質とは独立な存在で電磁的な偏りを伝えるだけのものであるとしたが、あまり明確ではない。

[1]最近はカーナビに一般相対論効果を取り入れたというのが売りらしいが、どれだけの影響があるのか筆者には分からない。

2.3 試験に出る相対論：マイケルソン＝モーレーの実験

さて、唐突だが、次の様な問題は大学入試に出てもおかしくない。一緒に考えてみよう。

平成１７年度 **物理学試験問題** 2005.10.29 実施

1. 光が古典的な波とすると, 波を伝える媒質が必要である. 一方, 絶対静止空間があるとすると, そこでの光の伝播速度が c ならば地球の公転の影響によって観測される光速が c とは違って見える筈である. しかしその影響が検出されなければ光は, 古典的な波とは異なり, またニュートン力学にも変更が必要となる. マイケルソンとモーレーは図に示す実験装置を用いて 120 年程前にその検証実験を行い, 結果として観測される光速の違いによる干渉効果は観測されず, ちょうど 100 年前のアインシュタインによる特殊相対論の誕生に決定的に重要な役割を果たした. 以下で彼らの実験の道筋を追ってみよう.

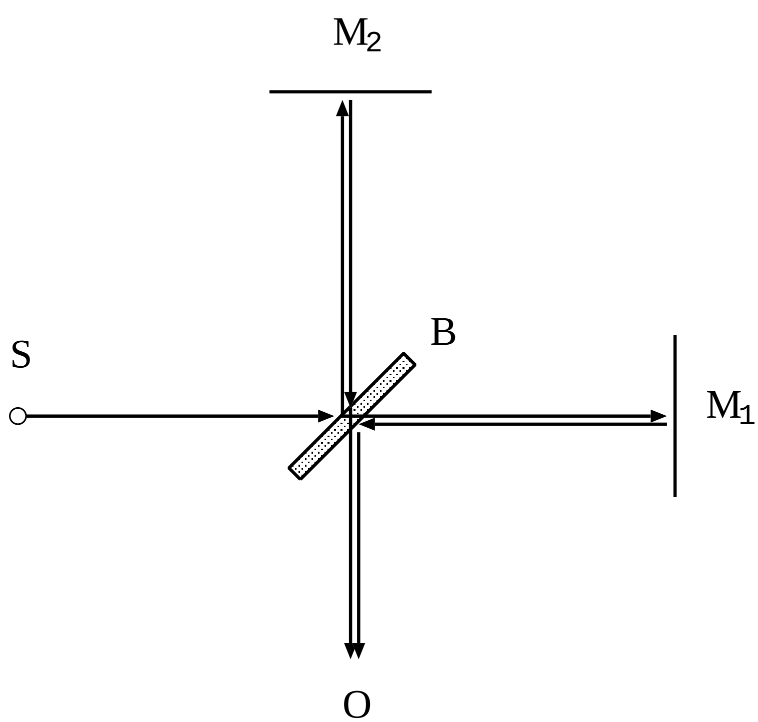

図 2.1: 干渉計の模式図. S は光源, B はビームスプリッター, M_1 と M_2 は反射鏡, O は観測装置を表す.

(1) 地球は太陽のまわりで半径 $1.5 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$ の軌道で等速円運動を行うとして, 公転速度 v を求めよ.

(2) 図に示すような干渉計を BM_1 の軸を公転の向きと一致させて設置する. ただし B はビームスプリッターで 1 本の光束を互いに直角な 2 方向に分離できるものとする. また B, M_1 間の距離と B, M_2 間の距離は互いに等しく L であるとする.

光速度を c とし, 古典的な速度の合成則が成立する場合に, 光が公転に平行な方向の経路 (BM_1B) に従ってスプリッターと反射鏡を往復する時間と, 垂直な方向の経路 (BM_2B) に従って往復する時間の差を求めよ. また $\beta = v/c$ が小さいとして, その時間差を β^2 の項まで展開して求めよ. ただし $\sqrt{1+\beta^2} \simeq 1+\beta^2/2$ が成り立つ.

(3) 干渉計を 90° 回転させて BM_1 を公転と垂直, BM_2 を平行とする. このとき, 経路による時間差が (2) で求めたものと絶対値が等しく符号だけが違うことを説明せよ. またこの時間差の変化によって干渉縞の変化が明瞭に見える筈である. 隣り合った 2 本の干渉縞の間隔は 1 波長の光路差に対応していることを利用し, 90° 干渉計を回転させたことによる干渉縞の移動と干渉縞の間隔の比 r を光の波長 λ と β, c を用いて表せ. また $L = 11\text{m}$, $c = 3.0\times10^8\text{m/s}$, $\lambda = 5.9\times10^{-7}\text{m}$ として比 r の値を求めよ. (註：実際に干渉縞を観測するには観測装置 O 内にレンズを用いて焦点面に結像させる必要がある. その場合, 光路差によって干渉縞ができるが, 詳細は本問とは無関係である.)

さて、解答は本章末に置くとして、この解説をしてみよう。エーテル仮説に従うと地球は自転、公転をしているので、静止した媒質の中の波の伝播を考えると方向 によって光が往復する時間が異なる筈だという結論になる。この推論はガリレオの相対性原理に基づいている。例えば川が流れているとすると川の流れに沿って 往復するのと川を横切って往復するのとでは所要時間に違いがでる。或は車に乗ってボールを投げたら対地速度は車の速度だけ加算される。だから電車の中でボールを落したら、電車に固定した座標系ではまっすぐ下に落ちるが、地面に固定した座標系では放物線を描きながら落下する。この事実を利用して マイケルソンとモーレーは次の様な実験を試みた。図 2.1 は彼らの実験装置の概念図である。光源から出た光は半透明の鏡 B で互いに直交する 2 つの光線に分岐される。 更に鏡をそれぞれ分岐した光の進行方向に置くと光は反射されて元の鏡 B に戻って来る。そこに望遠鏡 O を置くと公転方向と垂直と平行方向での光路差のため干渉縞が現われる筈である。ここで注意すべきはニュートン力学を信じればその影 響はかなり大きいことである。実際、公転速度は 3×10^4 m/s にもなる (公転速度は自転速度に比べて 2 桁程大きい。) ために、 マイケルソン とモーレーの実験のように 11m の腕 を持った装置を使うと干渉縞の間隔は光の波長に比べておよそ 0.37 倍にもなる筈 である。しかし彼らの実験ではどのように実験を行っても干渉が観測されず、むしろ公転する地球が絶対系であるというおかしな結論になってしまった。

フィッツジェラルドやローレンツは実験結果のもたらす矛盾を解決するために物体は静止エーテルに対して運動すると運動方向に収縮をすると考えた。このとき光速はあくまで観測者や光源の速度に依存すると考える。このような収縮を考え ると実験結果を説明することは可能である。しかしその機構については不問とならざるを得ない。歴史的にはフィッツジェラルド (1889 年) とローレンツ (1892 年) は独立に光速より充分遅い運動に対して収縮の考えを導入し、 ポアンカレのコメントに答える形でローレンツが 1904 年に任意の速度 に対して成り立つ収縮公式を導出した。それを受けて 1905 年に ポアンカレがいっ そう完全な数学的定式化を完成した。

2.4 ローレンツ変換とそれから導かれる簡単な事実

2.4.1 アインシュタインの相対論

1905 年はアインシュタインの奇跡の年である。この年特許局に勤める 25、6 歳の青年が立て続けに 3 つの重要な論文を出版した。その 3 つとはブラウン運動、光電効果、そして特殊相対論である。なかでも特殊相対論の論文は 19 世紀的な自然観を破壊するに足る革新的なものであった。

アインシュタインは実はマイケルソンとモーレーの実験を殆んど念頭に置いていなかったし、ローレンツの変換公式にしても 1895 年に低速の極限の結果をまとめた理論を本としてまとめあげたものしか知らなかった。むしろ運動物体の電磁気学における非対称性 (特に電磁誘導で導線を止めて磁石を動かした際に電場が生じて起電力となるのに磁石を静止させて導線が動くとすると電場が生じずに磁場と速度の積の形で起電力が生じるということ) がおかしいのではないかという疑問に応える形で理論構築を試みたと言える。

アインシュタインはこの種の疑問や光速で光を追いかけながら光を観測するとどうなるかという事を 16 歳あたりから考えていたらしい。更に大学に入ってマッハのニュートンの絶対時間、絶対空間は形而上学的概念であり、力学において意味を持つのは相対運動だけであるという主張に強く影響を受けた。他方、ローレンツの研究によって静止エーテルの力学的性質を殆んど失っている事も認識していた。アインシュタインは着想を得てから 5 週間で論文「運動物体の電気力学について」(Zur Elektrodunamik bewegter Koerper, Ann. Phys. vol. 17, 891 (1905)) を書き上げたが, そこでは慣性の法則に従う慣性系では同一の形の電気力学の法則が成り立つとしている。そして真空中では光速度一定の原理を課した。前者は物理法則は観測者の速度に依存してはいけないという要請をおいたことになるので計算するまでもなくマイケルソンとモーレーの実験では干渉は観測されないのである。ここにローレンツ等の実験の説明のための理論と原理的な理論の違いが明確に見られる。

光速度不変の原理と相対性原理を用いてローレンツ変換の式を導く事は次節に分離してまとめることにしよう。導出に使われているのは単に連立一次方程式なので中学生でも充分理解可能である。しかしそこで導かれた結論は日常経験から著しく逸脱したものとなる。ローレンツ変換から導かれる 3 つの重要な結論は (1) ローレンツ収縮：ある座標系において、この系に対して運動している物体の長さが収縮する。(2) 時計の遅れ：運動している系では時間に遅れが生じる。(3) 同時刻の相対性：同時刻という概念は観測者の立場に依存する。これらの説明は一言では難しいので講義の中で試みる。しかしこれらの奇異感はいわゆる時間が座標変換の不変量ではなくて固有時間が不変量であることを用いればそれほど不思議ではないであろう。つまり時間と空間を組にした固有時間こそが大事であって、時間のみ、空間のみに着目すると物事を一面的に捉えたに過ぎないのである。

2.4.2 ローレンツ変換の導出

さて本節では光速度不変の原理を用いて、ローレンツ変換を導いてみよう。ちょっと式が続くが、中学数学の枠を出ていないので根気よく読めば理解できる。アインシュタインのアイデアの源泉は慣性系間の同等性という言葉に尽きる。特定の絶対座標は存在しない

場合にどう力学は変更を受けるかということを追求したことになる。その座標系に依存しない不変量として光速を考えたことになる。

ある座標系 S の座標と時刻を x, t と置き、S に対して速度 v で運動する座標系 $S^{'}$ の座標と時刻をそれぞれ $x^{'}, t^{'}$ とする。また、光速を c とする。S 系で $t = 0$ に出発した光は $t = t$ に x に到達し、関係式 $x^2 - (ct)^2 = 0$ を充たす。一方、$t' = 0$ で S' 系と S 系の原点が一致していたとして、$t' = t'$ に到達した点の位置を x' とすると $x' - (ct')^2 = 0$ を充たす。ここで光速度不変の原理から光速度 c を定数とした。従って

$$x^2 - (ct)^2 = x^{'2} - (ct^{'})^2$$

が成立する。ここで、$ct = \tau$ と置くと

$$x^2 - \tau^2 = x^{'2} - \tau^{'2} \tag{2.1}$$

が成り立つ。また、S,S' 系の変換は線形変換で結ばれるものとして以下のように書けるとする。

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x^{'} & = & ax + b\tau \\ \tau^{'} & = & fx + g\tau \end{array} \right. \tag{2.2}$$

ローレンツ変換は単にこの変換に現われる未知定数 a, b, f, g を決定することで決まる。

$S^{'}$ の原点は S 系からみると $x = vt$ の軌跡に沿って動くので $(x^{'} = 0)$

$$x = \beta\tau \quad 但し \quad \beta \equiv \frac{v}{c} \quad また \quad x = -\frac{b}{a}\tau \quad \Longleftrightarrow \quad \beta = -\frac{b}{a}$$

となる。

ここで、式 (**??**) を式 (**??**) に代入すると

$$\begin{array}{rcl} x^2 - \tau^2 = x'^2 - \tau'^2 & = & (ax + b\tau)^2 - (fx + g\tau)^2 \\ & = & (a^2 - f^2)x^2 + 2(ab - fg)x\tau + (b^2 - g^2)\tau^2 \end{array}$$

$$\therefore \quad \left\{ \begin{array}{lcl} f^2 & = & a^2 - 1 \\ ab & = & fg \\ g^2 & = & b^2 + 1 \end{array} \right. \tag{2.3}$$

となる。式 (**??**) より $a^2b^2 = (a^2 - 1)(b^2 + 1)$ が成立し、それより直ちに $a^2 - b^2 = 1$, 両辺を a^2 で割れば $1 - \beta^2 = 1/a^2$ 即ち $a = \pm 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ を得る。同様に b, f, g も求められ、結果をまとめると

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a & = & \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ b & = & \mp\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ f & = & \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ g & = & \mp\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{array} \right. \tag{2.4}$$

である。これを式 (??) に代入すると、

$$\begin{aligned} x^{'} &= \pm\frac{x-\beta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \tau^{'} &= \pm\frac{\beta x-\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

を得る。ここで、$\beta \to 0$ で、$x^{'} \to x, \tau^{'} \to \tau$ を回復する必要があるので、以下のように符号が決まる。

$$x^{'} = \frac{x-\beta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.5}$$

$$\tau^{'} = \frac{\tau-\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.6}$$

これがローレンツ変換の最終表式である。また逆に S' 系から S 系への変換は

$$x = \frac{x'+\beta\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.7}$$

$$\tau = \frac{\tau'+\beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.8}$$

となる。このことは相対性原理すなわち S 系が S' 系に相対的に $-v$ で動いていることから分かる。

2.4.3 速度の合成

S 系で測定した質点の位置、速度をそれぞれ u, x とし, S' 系における位置、速度を x', u' とする。前節のローレンツ変換 (??), (??) を２時空点 (x,t) と $(x+dx, t+dt)$ に施し、その差を取ると位置、時間の微小変化 (dx, dt) が

$$dx = \frac{dx'+vdt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad cdt = \frac{cdt'+\beta dx'}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.9}$$

という変換式で結ばれる。但し dx は x の S 系での微小変化を表す。速度 u は dx/dt と等しいので

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'+vdt}{dt'+\frac{v}{c^2}dx'} = \frac{u'+v}{1+\frac{v}{c^2}u'} \tag{2.10}$$

となる。この式で u', v が光速より充分小さい場合は言うまでもなく $u = u'+v$ というガリレイ変換の式に帰着する。

例として $u' = v = 3c/4$ を (??) 式に代入すると

$$u = \frac{3c/2}{1+9/16} = \frac{24}{25}c \tag{2.11}$$

となる。このように亜光速の速度の合成によって光速 c を越える事はない。

2.4.4　ローレンツ収縮

S 系から S' 系に静止している棒 (魚でもなんでもいい) を観測することを考える。その棒は両端が S' 系の原点と $x' = L'$ にあるとする。既述のローレンツ変換の式 (**??**) を S 系での時刻 $t = 0$ で用いると, $x' = x/\sqrt{1-\beta^2}$ となる。よって S 系からの観測では $x' = L'$ は $x \equiv L = L'\sqrt{1-\beta^2}$ になる。原点は同じ所に変換されるので、動いている物体の長さは

$$L = L'\sqrt{1-\beta^2} < L' \tag{2.12}$$

に縮む。このように光速度不変の原理と慣性系の同一性 (相対性原理) からフィツジェラルド＝ローレンツ収縮の式は導かれる。このことから明らかな様にポアンカレがローレンツ収縮を独立な原理とおいた事は相対論を理解しようとしていなかったことを意味する。

同じ系を考える事で同時刻の相対性という概念についても理解できる。先程の例では S 系での時刻 $t = 0$ で速度 v で動く棒の両端の位置を観測したのであるが、S' 系での時刻の変換式 (**??**) を見てみると、原点での時刻は一致しているが、もう一方の端は時刻 $t' = -vL/c^2$ に観測したことになる。つまり S 系で同時測定を行っても、S' 系では同時刻に測定したことになっていない。このように同時刻という事も相対的な概念でしかない。

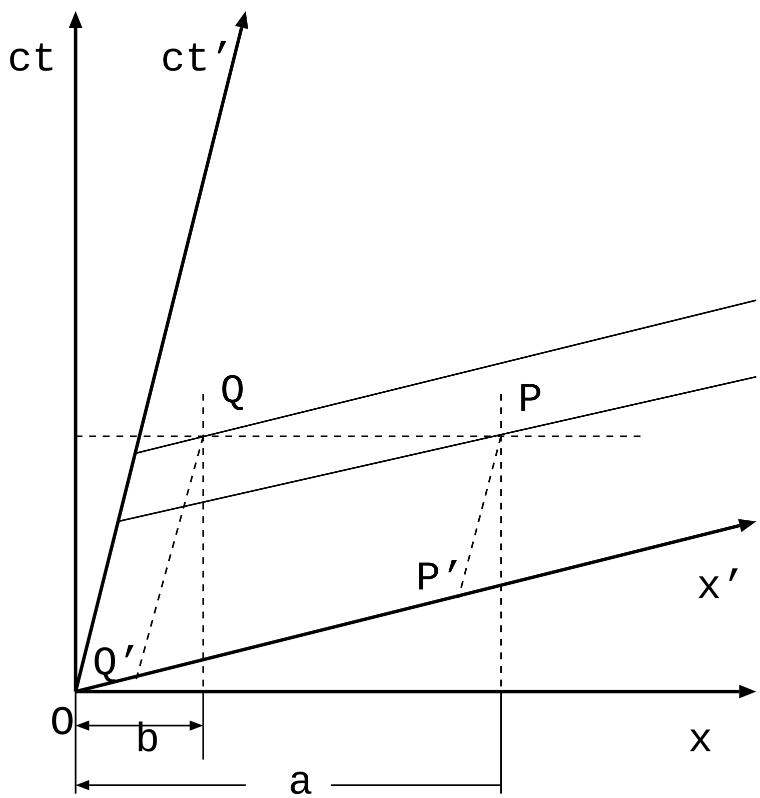

図 2.2: 同時刻の相対性を説明する図。$\overline{QQ'} = ct'_Q$, $\overline{PP'} = ct'_P$ とする。

同時刻の相対性を図 2.2 を用いて説明を加えてみよう。ローレンツ変換 (**??**), (**??**) 式によれば S' 系における同時刻の線は S 系では右上がりの直線になっている。実際、(**??**) 式で τ' を一定としたとき $\tau = \beta x + \tau'\sqrt{1-\beta^2}$ と書けることから右上がりの直線が $t' =$ 一定

の線を表している。さて時空点 P,Q で２つの事件が起こったとする。この２つの事件は S 系では同時刻に別の場所で起こったとしよう。したがって図 2.2 では水平線上に隔てられた処に２点 P,Q は存在する。しかしこの２つの事件は S' 系では異なった時刻である。実際、x' 軸に平行な S$'$ 系の同時刻の線上に P,Q の２点は載らない。また ct' 軸に平行に線を引いて S$'$ 系での PP$'$ 間の時刻、QQ' 間の時刻をそれぞれ測ってみる。図より

$$ct'_P = \frac{ct - \beta a}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad ct'_Q = \frac{ct - \beta b}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.13}$$

であるから

$$t'_Q - t'_P = \frac{(a-b)\beta}{c\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.14}$$

となる。

ローレンツ収縮も同様に図を用いて理解できる。図 2.3 に従って考え直してみよう。房を S' 系の x 軸上に固定する。S' 系での棒の長さは $l_0 = a' - b'$ である。これを S 系から眺めると棒は x 軸正方向に速度 v で走っている。棒を測るのは S 系での同時刻においてなので $l = a - b$ が S 系でみた棒の長さである。ローレンツ変換の式 (**??**) を適用すれば

$$a' = \frac{a - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad b' = \frac{b - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.15}$$

である。よって

$$l_0 = a' - b' = \frac{a-b}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.16}$$

である。これはローレンツ収縮に他ならない。

2.4.5 時計の遅れ

同時刻の相対性を考えると、時計の動きにも変化があってしかるべきであろう。S' 系の原点に静止した時計が $t' = 0$ を刻んだときと $t' = T'$ を刻んだときの時間差 T' を S 系で観測する。その場合もローレンツ変換の式 (**??**) を用いれば S 系では各時刻がそれぞれ $t = 0$ と $t = T'/\sqrt{1-\beta^2}$ に変換される。従って S 系での時間差は

$$T = T'/\sqrt{1-\beta^2} > T' \tag{2.17}$$

であり、S 系では時間が早く経過したことになる。

これらのパラドキシカルな結果は時間や空間を独立に考え、経過時間や物の長さが変わる筈がないという直観に相反するためである。しかしその直観は光速度よりずっと遅い日常経験に基づくものであって、何も根拠のあるものではなかった。むしろ相対論が光速度不変と慣性系の同一性を基本原理として諸々の矛盾を解決し、ローレンツ変換で不変であった電磁場の基礎方程式であるマクスウェル方程式とそうではなかったニュートン力学を統一して扱う基礎を与え、不自然なエーテル仮説を排したのである。しかしローレンツは相対論を全て理解した上でもやはり、では何故真空中を波が伝わるのかという問に悩み続けた。この事も同年 (1905) にアインシュタインが光量子仮説を提唱し解決法の示唆があったが、根本的な解決は量子力学の誕生まで待たねばならなかった。即ち、光は波であり、粒子であるために古典的な波とは異なり、媒質を必要とせず伝播することができるのである。

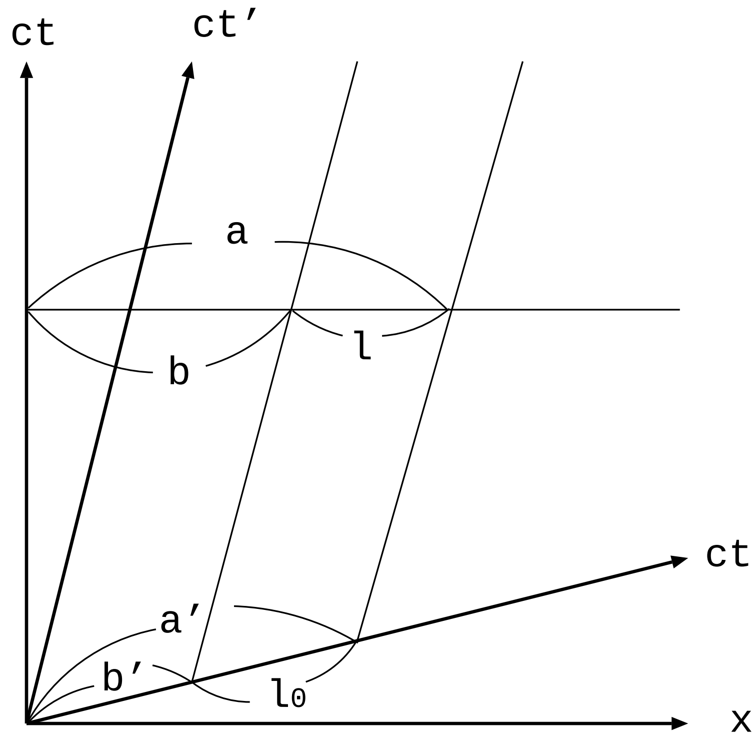

図 2.3: ローレンツ収縮を説明する図。

2.4.6 双子のパラドックス

時間の遅れという話を聞くと即座に思い浮かべるのは浦島太郎のパラドックスが光速に近い高速飛行で可能になるのではないかという事である。実際、加速器等で高速で走る素粒子の寿命が長い事はよく知られている。また巷の子供向きの科学本には相対論が浦島パラドックスを可能にしているという事がしばしば書かれている。しかし浦島パラドックスはそんなに単純な話ではない。実際、相対論によれば絶対静止系はないであるから、光速に近いロケットに乗っている浦島と地球で待っている人の間に差異はない筈である。つまり浦島から見れば地球の人が光速近くで遠ざかっているという見方が可能になる。浦島と地球の人を双子に置き換えた話もよく使われる。

ではどう考えたらいいのか。まず特殊相対論では加速度を扱っていない事を思い出すべきであろう。途中で向きを反転するという加速度運動で重力が生じ、一挙に歳を取ってしまうというのが正しい。 言葉を変えれば、向きを反転して慣性系を移り変わるときにその加速をどんなに早くしても有限の時間がかかってしまう。この辺りの事情を特殊相対論の枠内でやや詳しく説明をしよう。

今、図 2.4 のように 2 つの時計 W_1, W_2 をそれぞれ S 系, S′ 系の座標原点に固定する。S′ 系は x 軸正方向に時間と共に変化し得る速度 $v(t)$ で動いているとしよう。時刻 $t = 0$ で両者の原点は一致し、相対運動もないものとする。OP 間で S' 系は加速し、PQ 間で一定速度で動き、QR 間で減速し、点 R で速度ゼロになり、RQ 間では更に減速し、QP 間では一定の負の速度で S 系の原点に向かって動き、PO 間で加速して相対速度ゼロで S 系の原点に戻って来るとしよう。

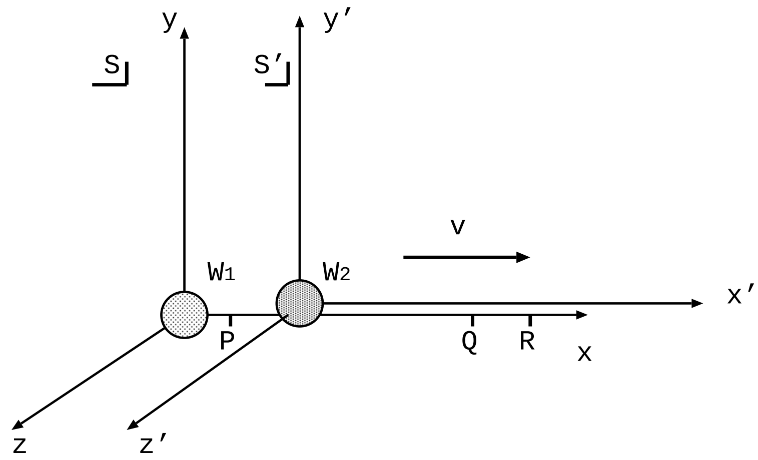

図 2.4: S 系と S' 系。P までで加速が終わり Q で減速を始め、R で折り返す。

双子のパラドックスは次のように定量的に表現できる。加速、減速を充分速やかに行い、加減速にかける時間が無視できるとすると両座標系の間は通常のローレンツ変換で結ばれる。W_2 が往復するまでに W_1 の進んだ時間を $2T_1$, W_2 の時計の進みを $2T_2$ とする。(**??**) 式に従えば S' 系の座標原点 O' が往復に要する時間 $2T_2$ は

$$2T_2 = 2T_1\sqrt{1-\beta^2} < 2T_1 \tag{2.18}$$

となる。一方、相対論によれば特別な静止座標は存在しないので、S′ 系を静止させた座標系で考えると W_1 が逆向きに進んで折り返すということになる。したがって W_1 は S 系からみた時計 W_2 と同じ進み方をする筈である。したがって

$$2T_1 = 2T_2\sqrt{1-\beta^2} < 2T_2 \tag{2.19}$$

となり、矛盾する。即ち両者が再会したときに、互いに相手より時間が進んでいると主張することになる。

ここで矛盾点は減速して加速するという作業に要する時間を無視したことである。もっと端的に言えば S 系は慣性系であり続けるのに対して、S' 系は慣性系の乗り換えがあるために慣性系とは言えないので両者は等価ではないのである。例えば S 系から見て S' 系の減速、加速をしてこちら向きの慣性系へ乗り換えることは一瞬ではできない。(勿論、S' 系からすると一瞬の出来事である。) このことをもう少し詳しく見てみよう。

図 2.5 をよく見てみよう。この図では W_2 を加速する区間 OP は一点に縮めてある。W_2 が $P(=O)$ から Q まで速さ v で走る間では S' 系は慣性系である。W_2 が Q に到着したとき、S' 系からみて Q と同時刻の点は線 DQ 上にある。W_2 が Q に到着した瞬間の W_1 の時計の刻みは (**??**) 式より $t_1 = T_2\sqrt{1-\beta^2} < T_2$ である (図の上で ct_1 は OD の長さ、cT_2 は OQ の長さである[2])。S は慣性系であるから (**??**) 式、即ち $T_2 = T_1\sqrt{1-\beta^2}$ を使うことができる。したがって

$$t_1 = T_1(1-\beta^2) \tag{2.20}$$

[2] 図では $cT_2 > cT_1$ に見えるが、実際には $cT_1 > cT_2$ である。これは斜交座標系の単位目盛が直交座標系と異なっているからである。幾何学的に相対論を理解する限界とも言えるので注意が必要である。

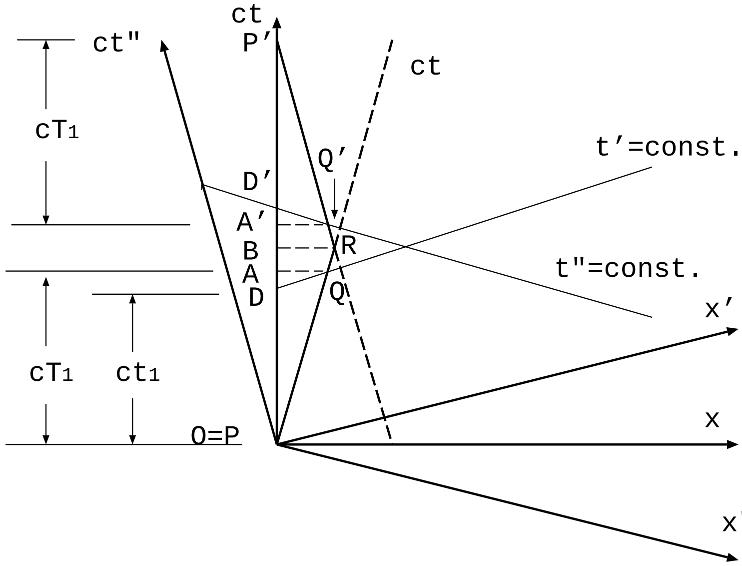

図 2.5: 浦島効果の説明の図

である。尚、図の上で T_1 は OA の長さであることに注意されたい。

一方、帰路につき、等速運動の出発点 Q' に着いた瞬間に W_2 は往路とは別の座標系 S'' に乗り換えることになる。S'' 系での時刻一定の線は D'Q' である。実際、(**??**) 式で τ'' を一定として $\beta \to -\beta$ と置き換えると $\tau = -\beta x + \tau''\sqrt{1-\beta^2}$ と書ける。したがって右下がりの直線 D'Q' が $t'' =$ 一定の線を表す。そうすると S'' から W_1 をみれば W_1 の時刻は D' となっていることになる。つまり、W_2 が S' 系から S'' 系に乗り換える間に W_1 の針は D から D' まで一挙に進んだことになる。

この時間のとびは W_2 の方向を逆転するための外力を無限に大きく取って QRQ' を一点に縮めても有限に残る。実際 $\beta = \tan\theta$ と置き、

$$\lim_{QQ'\to 0} \frac{\overline{DD'}}{c} = \frac{2}{c}\overline{DA} = \frac{2}{c}\overline{AQ}\tan\theta = 2\beta^2 T_1 \tag{2.21}$$

となる。よって W_1 の所要時間は W_2 から眺めても

$$\frac{1}{c}\{\overline{OD} + \overline{DD'} + \overline{D'P'}\} = 2T_1(1-\beta^2) + 2\beta^2 T_1 = 2T_1 \tag{2.22}$$

となる。かなりややこしい考え方が必要になったが双子のパラドックスはないことは理解して貰えただろうか。[3]

特殊相対論だけでももっと他にも語るべきことは一杯あるであろうが、高校生の諸君には難しいであろう。まして一般相対論の内容を優しく諸君に語ることは筆者の能力を越えたことである。しかし、ブラックホールを含めて現代天文学の興味深い現象は一般相対論を抜きに語れない。この講義を聴いて興味を持った方は大学に入ってしっかり勉強することをお勧めする。

[3]講義では誤解を招く言い方をしたと思うが、あくまでここでのパラドックスの解消は時計 W_1 の進み方が同じ座標系から見ても、S' 系から見ても最終的には同一となると言っているに過ぎない。一方時計 W_2 の進み方は固有時間 $2T_2$ と考えて良く、$T_2 < T_1$ より光速に近い高速で加速度運動をして戻って来るロケットに乗っている人の進む時間の進み方はゆっくりとしている。

2.5 試験に出る相対論の解答篇

(1) 公転軌道の半径が $r = 1.5 \times 10^{11}$ m であるから、公転軌道の長さは有効数字２桁で $2\pi r \simeq 9.4 \times 10^{11}$ m である。一方、一年は $365 \times 24 \times 60 \times 60 \simeq 3.15 \times 10^{7}$ sec である。従って公転のスピードは $9.4 \times 10^{11}/3.2 \times 10^{7} \simeq 3.0 \times 10^{3}$ m/s となる。(全部有効数字２桁で計算すると 2.9×10^{3} m/s).

(2) 光軸が公転方向に平行とするとその往復時間は

$$t_1 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2L}{c(1-\beta^2)} \simeq \frac{2L}{c}(1+\beta^2) \tag{2.23}$$

である。一方、光軸に垂直に動くと合成則によって得られる光の伝播方向は直角三角形の斜辺上なので、ミラー M_2 に到着するまでの時間 t に体して $c^2t^2 = L^2 + v^2t^2$ が成立する。よって、その往復時間 t_2 は

$$t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2L}{c\sqrt{1-\beta^2}} \simeq \frac{2L}{c}(1+\frac{\beta^2}{2}) \tag{2.24}$$

よって時間差 $\Delta t(0) = t_1 - t_2$ は

$$\Delta t(0) = \frac{2L}{c}\{\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\} \simeq \frac{L}{c}\beta^2 \tag{2.25}$$

である。但し展開公式 $\sqrt{1+\beta^2} \simeq 1+\beta^2/2$ の他、$1/(1-\beta^2) = 1+\beta^2+\beta^4+\cdots$ という無限級数の公式を用いている。

(3) 90°回転したら $\mathrm{BM_2B}$ が光軸に平行、$\mathrm{BM_1B}$ が垂直となる。従って (1) と同様の計算によって

$$\Delta t(90) = -\frac{2L}{c}\{\frac{1}{1-\beta^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\} \simeq -\frac{L}{c}\beta^2 \tag{2.26}$$

となる。従って干渉計を 90°回転したことによる光路差による相対時間差は

$$\Delta t(0) - \Delta t(90) = \frac{2L}{c}\beta^2 \tag{2.27}$$

となる。干渉縞の間隔 s は光の一波長 λ に一致しているので、上記の時間差による干渉縞のずれ Δs は

$$\frac{\Delta s}{s} \simeq \frac{2L}{\lambda}\beta^2 \tag{2.28}$$

となる。今、$\beta = 1.0 \times 10^{-4}$, $L = 11\mathrm{m}$, $\lambda = 5.9 \times 10^{-7}\mathrm{m}$ を代入すると $\Delta s/s \simeq 0.37$ となる。

第3章　ニュートン力学のルネサンス

3.1　ニュートン力学系は全て分かっているのか?

3.1.1　ニュートンとその時代

最初の 2 回で特殊相対論を論じたのは日常的な経験とかけ離れた結果が初等的な代数計算で理解できるからである。20 世紀の物理学における二大発見が相対論と量子論であるという認識は全ての科学者において共有されているであろう。従って応用はともかく研究の対象としてニュートン力学を捉える研究者は 1970 年あたりには非常に少なくなっていた。

しかし 1970 年頃を境に風向きが随分変わって来たように感じる。実際、カオス理論等が華々しく宣伝されるようになって研究者自身もニュートン力学系をしっかり理解していなかったことを再認識せざるを得なくなった。

さてニュートン力学系とは何であったのか。一回目のスライドで簡単にまとめたのだが、講義ノートでは自明として紹介していなかった (最近の高校の教科書は電流から始まるので高校生にとってニュートン力学は自明ではないのかもしれない)。ここで簡単にまとめてみよう。

ニュートンはガリレオが亡くなった翌年 1643 年に生まれている。因みに惑星運動の法則をまとめ上げたケプラーは 1630 年に亡くなっており、ガリレオ-ケプラー世代とニュートンの間にはパスカル (1662 年没) やフェルマー (1665 年没) がいるが、彼らは数学者あるいは哲学者としての業績の方が有名である。また、先輩から同世代にかけてボイル (1627 年生)、ホイヘンス (1629 年生)、フック (1635 年生) 等がおり、ガリレオ、ケプラーが蒔いた種が物理学として結実する時代にあったことを窺わせる。

ニュートンの業績を一言で言えば、ケプラーとガリレオの研究結果の統合である。ニュートンといえば万有引力というイメージがあるかもしれないが、それはニュートン力学の枠の中に入っており、ニュートン力学発見の契機になった歴史的役割や正当性のデモンストレーションという意味を省くと、ニュートン力学の構築に比べてインパクトは薄い。勿論、他にも大きな業績はあり、なかでも微分積分学の発見と構築は数学のもならず科学の全分野に大きな影響を与えた。他にニュートンリングによる干渉実験、反射望遠鏡の設計、数値計算法の開発 (ニュートン法) 等が知られている。

3.1.2　ニュートンの運動の法則

さてニュートン力学は三つの運動の法則にまとめられる。それらは

1. 慣性の法則 : 物体に力が加わらない限り、その物体は静止または等速直線運動をする。
2. 運動の法則 : 物体に働く加速度はその物体に加えられた力に比例し、質量に反比例

する。

3. 作用反作用の法則: 物体 1 が物体 2 に作用を及ぼすときに、物体 2 は物体 1 に作用と同じ大きさで反対向きの反作用を及ぼす。

である。ここで慣性の法則の重要性については第一回の講義で強調した。即ち、慣性の法則に現われない残りが運動方程式である。

さて第一回目に述べたように運動方程式はガリレイ変換不変である。即ち慣性系の選択には依存しない。このことをもう少し正確に説明しよう。質量 m の質点を考えよう。その位置を指定するのにしばしばデカルト座標で現される成分を持つベクトル $\vec{r} = (x, y, z)$ を用いる。しかしベクトルは 2 点間の相対位置を向きをつけて記述したことを思い出せば、この表記は座標原点との相対位置を現しているに過ぎない。簡単のためこの座標系の原点は慣性の法則に従うとしてその座標系を S 系と呼ぶことにしよう。また別の慣性系 S' 系が x 軸正方向に一定の相対速度 $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$ で動いているとする。$\vec{F}$ を質点に作用する力として、このとき S 系での運動方程式は

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \tag{3.1}$$

と書ける。勿論加速度は $\vec{a} = d\vec{v}/dt = d^2\vec{r}/dt^2$ という関係がある。ここでガリレイ変換

$$x' = x - v_0 t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \tag{3.2}$$

を施す。ここでダッシュのついた量は S' 系での位置と時間を表す。ここで $t = 0$ で S, S' 系の原点が一致していたとして S' 系の原点 $(x', y', z') = 0$ は S 系では $(x, y, z) = (v_0 t, 0, 0)$ という等速直線運動をする様に見える。しかし (**??**) 式から明らかなように

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v_0, \quad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} \tag{3.3}$$

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z'}{dt'^2} = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{3.4}$$

という変換を受ける。このように加速度はガリレイ変換不変であることから必然的に力 $\vec{F}$ もガリレイ変換不変であり、運動方程式はガリレイ不変となる。

既に学んだように電磁場を記述するマクスウェル方程式はガリレイ不変ではなく、ローレンツ変換に対して不変になっている。それと整合するためにはニュートンの運動方程式もローレンツ変換不変に書き換える必要がある。それ自体はそれほど難しいことではないが、ローレンツ変換を持ち出す必要があるのは光速 c に対して $\beta \equiv (v_0/c)^2$ が有限の寄与を持つ場合のみである。例えばロケットであっても $v_0 \simeq 10^4$ m/s であり、$\beta \simeq 10^{-9}$ 程度になる。従って日常の物理現象を扱う限りにおいて相対論効果は重要ではない。

一方、光や電子の運動を記述するには一般に量子力学が必要になる。量子力学は 1900 年のプランクの論文、1905 年のアインシュタインの光電効果の論文によって前期量子論として始まり、1925 年のハイゼンベルクの行列力学、1926 年のシュレディンガーの波動力学によって一応の完成を見ている。勿論、光や電子のみならず原子スケールのミクロな現象を記述するのに量子論はなくてはならない。また量子論は半導体物理やエレクトロニクスを始めとする各種のハイテク工業の基礎を与えていることは言うまでもない。

しかし日常スケールの物理では相対論も量子論も必要ではない。ニュートン力学で充分である。問題はニュートン力学を今更議論しても始まらないかどうかである。

3.1.3　ニュートンの運動方程式の解について：可積分な場合

ニュートンの運動方程式は２階の常微分方程式である。仮に (**??**) 式において $\vec{F}$ が定数であれば１階積分すれば速度の時間発展が得られ、２階積分すれば位置の時間発展が得られる。空気抵抗のない投射運動はこのカテゴリーに属する問題である。それを式を使ってデモンストレーションをしてみよう。粒子位置、粒子速度をそれぞれ時間の関数 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\vec{v}(t) = (u(t), v(t), w(t))$ とする。[1]初期位置を原点 $\vec{r}(0) = \vec{0}$ として初期速度を

$$u(0) = v_0 \cos\theta, \quad v(0) = 0, \quad w(0) = v_0 \sin\theta \tag{3.5}$$

としよう。言うまでもなく θ は投射角度を表している。今、力として一定の重力 (重力加速度 g) が鉛直下向きにかかっているとすると $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ となる。従って運動方程式は

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} = 0, \quad \frac{dw(t)}{dt} = -g \tag{3.6}$$

となる。(**??**) 式を一回積分すると $u(t) = v(t) =$ 一定となり、$w(t) =$ 定数 $- gt$ となる。初期条件 (**??**) を考えるとそれぞれの定数は決まり

$$u(t) = v_0 \cos\theta, \quad v(t) = 0, \quad w(t) = v_0 \sin\theta - gt \tag{3.7}$$

となる。もう一回積分して初期条件と照らし合わせると

$$x(t) = v_0 \cos\theta t, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.8}$$

となる。

この簡単なデモから微分方程式を解くということが少し分かったのではなかろうか。初期条件を与えたときに、その後の時間発展が決定できたときにその問題は解けたという。

ここで一次元問題に限定してニュートン力学の初歩をまとめてみよう。まず今の場合 $\vec{r} = (x, 0, 0)$, $\vec{v} = (u, 0, 0)$ で $\vec{F} = (F, 0, 0)$ である。運動方程式は

$$m\frac{du}{dt} = F \tag{3.9}$$

となる。この方程式の両辺に u をかけてみよう。微分学で習った公式 $du^2/dt = 2udu/dt$ を用いると

$$mu\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mu^2\right) = Fu = F\frac{dx}{dt} \tag{3.10}$$

と書き直すことができる。但し質量 m は定数であることを用いた。ここで力 F が x を通してのみ時間に依存すると仮定する。そのとき、両辺を時間 0 から t まで時間積分すると

$$\frac{1}{2}mu(t)^2 + U(x(t)) = \frac{1}{2}mu(0)^2 + U(x(0)) \tag{3.11}$$

となる。但し $x' = x(t')$ としたとき

$$U(x(t)) = -\int^t dt' \frac{dx}{dt'} F(x(t')) = -\int^x dx' F(x(t')) \tag{3.12}$$

[1] くどいようだが $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ である。

は位置エネルギーであり、粒子がされた仕事に相当する。このことは力を不定積分したものにマイナスをつけた量であることから分かるであろう。勿論 (**??**) 式の両辺の第一項は粒子の運動エネルギーであり、$U(x)$ との和が時間によらず一定になることからも $U(x)$ が粒子の位置エネルギーであることが理解できる。即ち、1 次元系で F が x のみに依存する場合には、粒子の力学的エネルギーは保存する。

しかし仮に正定数 γ を用いて力 F が $F = -\gamma u$ と表されるとき (**??**) 式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mu^2\right) = -\gamma u^2 < 0 \tag{3.13}$$

となり運動エネルギーは時間と共に単調減少する。この場合は運動エネルギーの減少した分だけ位置エネルギーが増加する訳ではなく、力学的エネルギー保存則は成り立っていない。

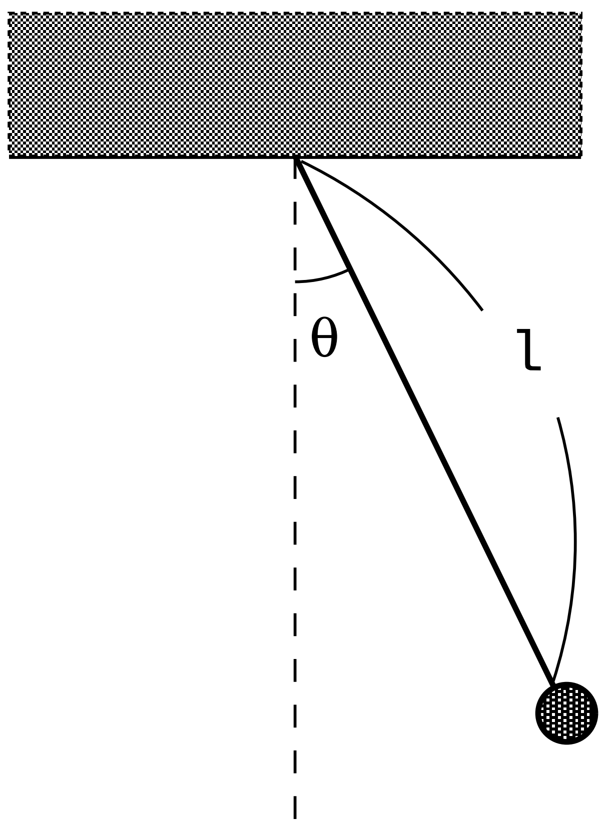

図 3.1: 単振り子の模式図。

力学的エネルギー保存則を満たす一次元系の例として単振り子を考えることが出来る。質量の無視できる糸の長さを l、重力加速度を g としたとき振り子のふれ角 θ の従う運動方程式は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \tag{3.14}$$

となることは図から分かるだろうか。[2]先程の自由投射の問題と異なるのは右辺が解くべ

[2]分からなくても本筋には関係ないが、分からないと入試の問題を解くときに困りそうだ。

き変数 θ に依存していることである。実はこの方程式を解くのはそんなに易しくない。右辺が非線形な関数であるために三角関数を一般化した楕円関数という特殊関数を用いて表現できる。しかしそのことは問題ではない。エネルギーの小さい場合 (微小振幅の場合) は $\sin\theta \simeq \theta$ と近似でき、解は三角関数の重ね合わせで書ける。このことは $\theta = \sin\omega t$ としたとき $d\theta/dt = \omega\cos\omega t$, $d^2\theta/dt^2 = -\omega^2\sin\omega t$ となるので、$\omega = \sqrt{g/l}$ とすれば元の方程式を満たすことで確認できる。余弦関数についても同様である。[3] 一方、(図 3.1 では天井があるように描いたが、それが邪魔しないとして) 初期速度を非常に高速としておくと質点は支点を中心にぐるぐる回る円運動をすることが予想される。この場合は周期運動といっても $d\theta/dt$ は符号を変えず、θ は単調増加あるいは単調減少をする。

単振り子では力は変位のみに依存するので (**??**) 式と同様に (**??**) 式を積分することで力学的エネルギー保存則が成立する。この場合、単位質量あたりのエネルギー H は[4]

$$H = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{g}{l}(1-\cos\theta) \tag{3.15}$$

である。但しニュートンにならって $\dot{\theta} = d\theta/dt$ という記号を用いた。図 3.2 にフリーハンドでへたくそな等エネルギー面を描いておいた。この系ではエネルギーが保存するので解軌道は等エネルギー面上を動く。最初に単振り子が単振動で近似できるような微小振幅であったとすると、A を振幅として $\theta = A\sin\omega t$ とするなら $d\theta/dt = A\omega\cos\omega t$ であり、$\omega t = 2\pi$ で初期状態に戻る。従って閉じた軌道を描く。このことは (**??**) 式で微小振幅 ($|\theta| \ll 1$) を仮定すると

$$H \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{g}{l}\theta^2 \tag{3.16}$$

となり、この式は $\dot{\theta}^2/a^2 + \theta^2/b^2 = 1$ と書き直せるので楕円軌道を描く (但し $a = \sqrt{2H}$, $b = \sqrt{2Hl/g}$). 多少振幅が大きくなっても、どこかで $d\theta/dt$ の符号が変わるような状況では振り子は周期運動を行う。図 3.2 の原点周りの楕円はそうした質点の周期運動を表した軌道である。一方、初速を高速で与えた場合は $d\theta/dt$ の符号が変わらないので、質点は図中で一番上か一番下に描いた軌道を取る。その間には交差点を持った軌道があるが、実はこの交差点に質点が到着するのには無限に時間がかかることが知られており、実際に動く質点の軌道が交差することはない。

単振り子の例を詳しく述べた理由は、この系では軌道が交差や分岐、合流をせず、初期条件を選択したらその軌道に沿って決定論的に動くことを読み取って欲しいからである。こういう場合は問題が可解或は可積分であると言い、多くの場合は数学的関数で時間発展を陽に書き下すことができる。

---

[3]三角関数の微分は $\sin(x+\delta x) = \sin x\cos\delta x + \cos x\sin\delta x$ を用いて、既に用いたテーラー展開の 1 次までで $\sin(x+\delta x) \simeq \sin x + \delta x\cos x$ となることから $d\sin x/dx = \cos x$ がわかる。ここで $\lim_{x\to 0}\sin x/x = 1$ と $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ を用いている。前回の補足で配った資料を使えば $\sin\theta \simeq \theta - \theta^3/6 + \cdots$, $\cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2 + \cdots$ が成立することも分かるであろう。

[4]エネルギーを E でなく H と記載するのは大学で習う力学ではハミルトニアンと呼ばれるものであるからである。古典力学ではハミルトニアンとエネルギーの区別はないが、量子力学ではハミルトニアンは演算子であり、エネルギーは固有値である。詳細は大学に進学してからのお楽しみにとっておこう。

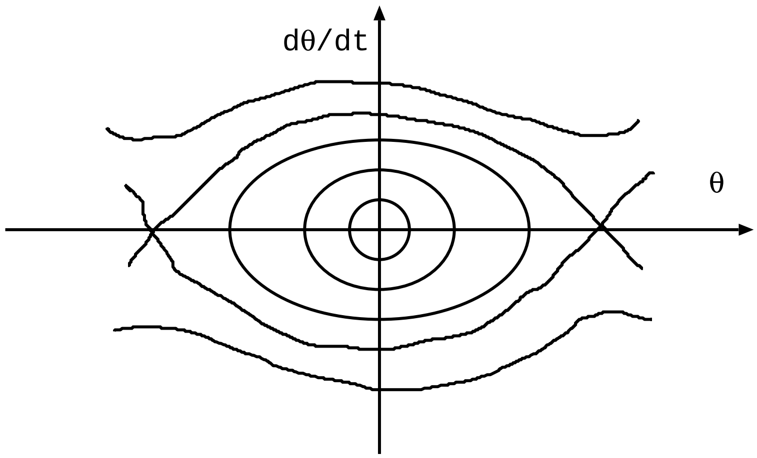

図 3.2: 単振り子の解軌道の模式図。本文中では触れなかったが、$\theta = 2n\pi$ を原点として (n: 整数)、この' 目玉' のレプリカが周期的に並ぶ。

3.1.4 ニュートンの運動方程式の解について：非可積分な場合

しかし何時でも運動方程式は可積分とは限らない。例えば質量を 1 として運動量と粒子速度を同一視した状況で以下の 2 自由度問題を考えてみよう。全エネルギー H が[5]

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + 2q_1^2 q_2 - \frac{2}{3}q_2^2) \tag{3.17}$$

で与えられるとする。ここで $i = 1, 2$ に対して (p_i, q_i) はそれぞれ i 番目の粒子の単位質量あたりの運動量と位置を表す。[6](**??**) 式で第一項は運動エネルギーを表現し、第二項は位置エネルギーを表す。一自由度であれば位置エネルギー $U(q)$ が与えられたときに、その微分 $-dU(q)/dq$ が力を与えているというのは重力場中の問題や単振動の問題でおなじみであろう。それを一般化して $U(q_1, q_2)$ という位置エネルギーを与えたときには、例えば q_1 に働く力は q_2 を定数と見做したときに $U(q_1, q_2)$ を q_1 で微分したもの (偏微分とよぶ) になる。したがってこの系の運動方程式は

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} = -q_1(1 + 2q_2), \quad \frac{d^2 q_2}{dt^2} = -(q_2 + q_1^2 - q_2^2) \tag{3.18}$$

となる。ここで $dq_i/dt = p_i$ を用いた。

実はこの系は可積分でないことが知られている。この系は 4 自由度系なので単振り子のように 2 次元面上に解軌道を描くことはできない。そのため $q_1 = 0$ の面に着目する。それでも 3 次元なので、2 次元面に表記するため、q_2, p_2 の 2 軸を含む平面を軌道が $p_1 > 0$ の向きに交差するときの点列のみを図としてプロットしてみよう。図 3.3 は (**??**) 式を数値的に解き、エネルギーを変えてその点列をプロットしたものである。こういう点列を取った断面を提唱者 (相対論のところで出て来た) ポアンカレに因んでポアンカレ断面と呼ぶ。この結果を見ると $H = 1/12$ と $H = 1/8$ では粒子は周期軌道を描いており、$H = 1/6$ で

[5]エネルギーから運動方程式への議論が分かりにくい場合は直接運動方程式をみて下さい。

[6]ここでは 2 粒子が 1 次元空間に拘束されているか、1 粒子が 2 次元空間上にあるかは問わない。元もとは軸対称重力場中の星の運動を簡単化するために提出されたモデルである。

は少数の島状の周期運動を除き、ランダムな運動をしていることが分かる。[7]このような非周期的な運動をする粒子の軌道を解析的に表現できる筈もなく、カオス的挙動をするという表現をする。ここで強調したいのはこの研究は 1964 年になって始めて行われたものであるという点である。勿論ポアンカレの時代からこうしたランダムな振る舞いをする力学系が存在することは知られていたが 60 年代にぼつぼとと再発見され、70 年代になってカオスという名前がつけられて爆発的に研究が進んだ。従ってニュートン力学系は古くて顧みる必要がないという判断は間違いである。

上の例では 2 粒子の問題と考えられるが、多くの問題では相互作用は粒子間の距離の関数となっている。このような問題では２粒子の重心座標と相対座標に分離できるので、２粒子の問題は解ける。しかし３粒子の問題になるとお手上げであり、文豪トルストイが「戦争と平和」で登場人物の冒頭の会話を通して触れていた「三天体」の問題は永遠に完全解決はしない問題であることが分かって来た。[8]

3.2 多体系と散逸系の物理

3.2.1 ランダム系と正規分布

粒子がランダムに予測不可能な動きをするということは悲しむべきことではない。実際、諸君の運命が全て予想できるのであれば、むしろそっちの方が悲しむべきことであろう。しかし、実際には少数の粒子でも互いに相互作用すればカオス的挙動をし、予測も制御も難しい運動をする。

こうした事実を踏まえてどうするべきか。一つの方法は自由度を極端に大きくして、完全にランダムに振る舞う系を考える。ここでの立場は個々の事象の振る舞いを正確に予言することは諦め、ある事象が起こる確率を知れば充分という考え方である。実はこの方法は各種の数理統計で用いられ、物理学でも統計力学という学問分野で用いられて成功を収めている。言うまでもないが統計力学を特徴づける分子数はアボガドロ数 ($=6.0 \times 10^{23}$) であるので途方もなく多数の分子集団を扱う必要がある。このとき個々の分子の振る舞いを知ったところで何の役にも立たないのは自明であろう。こうした統計力学や数理統計は「無相関であるランダムなデータの集団はそのデータ数が大きい極限で正規分布に従う」という事実が知られており、その数学的証明は中心極限定理にまとめられている。[9]またサンプルの数が大きくなると平均値 (期待値) の周りの揺らぎは相対的に小さくなり、統計集団の振る舞いは平均値から大体のことは推定できることになる。

皆さんにとっても重要な偏差値の算定もこのような統計法則の定理に基づいている。実際、偏差値は充分大きなサンプル数 (模試を受ける人の数) の試験で分布が正規分布に従うと仮定し、その平均を 50、標準偏差を 10 としたものである。統計力学の話は分子の実在

[7]実際には数値誤差もあり、私の数値計算の結果を信用しない方がいい。より信頼のおける数値計算では $H = 1/8$ では規則的な周期運動ばかりでなくランダムな点列が確認できる筈である。しかしここは臨界点近傍なのでなかなかそういう様子が見えない。

[8]しかしながら特別な初期条件を選べば問題が完全に解けることがある。2000 年頃に三体重力問題で２次元面上で８の字を描きながら追いかけっこをする厳密解が見つかって新聞でも紹介される等話題になっていた。

[9]正規分布はそのことを言い出した人の名前をとってガウス分布と呼ばれることも多い。統計力学ではマクスウェルとボルツマンが最初にその重要性を指摘したのでマクスウェル・ボルツマン分布と呼ばれる。

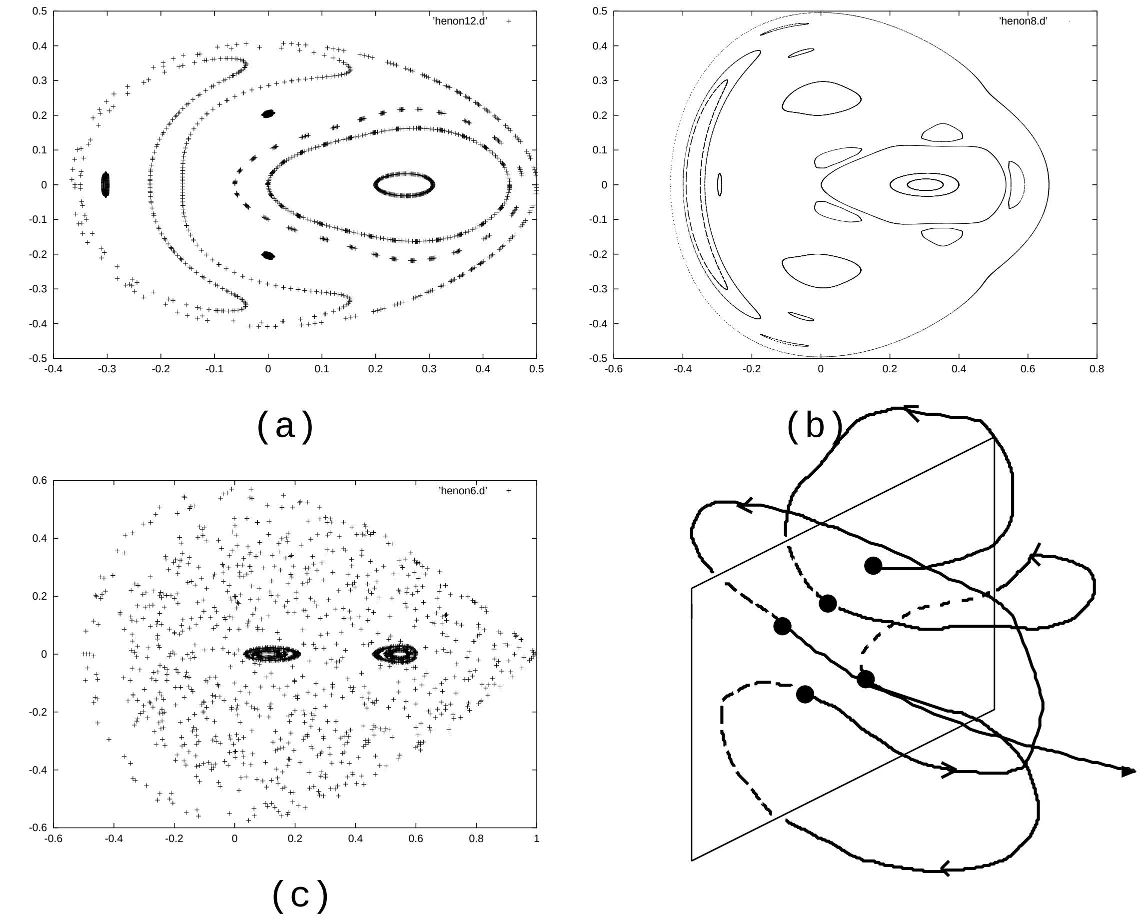

図 3.3: (3.16) 式のポアンカレ断面。(a) エネルギーは 1/12, 初期点は $(q_2, p_2) = (0,0), (0,0.2), (0,-0.2), (0,-0.1), (0.2,0), (-0.3,0), (-0.35,0), (-0.36,0), (0.45,0), (0.499999,0)$ 及び $p_1 = 0$。(b) はエネルギー 1/8 とし初期点は $p_1 = 0$ 及び $(q_2, p_2) = (0,0), (0,0.2), (0,-0.2), (0.2,0), (0.25,0), (0.55,0), (0.66,0), (-0.3,0), (-0.35,0), (-0.4,0)$ である。(c) はエネルギー 1/6 として、初期点は $p_1 = 0$ 及び $(q_2, p_2) = (0,0), (0,0.2), (-0.2,0), (-0.48,0), (-0.49,0), (-0.49999,0), (0.2,0), (0,5,0), (0.6,0)$ である。尚、右下の図はポアンカレ断面の概念図。粒子軌道に対してある平面を持って来て、その交差点を平面上にプロットする。平面上の黒点が図 (a)-(c) での点に相当。

を巡る論争や不可逆性の考え方を紹介する次回以降で詳しく紹介していくつもりである。

しかしサンプルの間に相関があったり、サンプルの数が充分でなかったりすると話は簡単でなくなる。最近、研究者はこういった問題に積極的に取り組み始めている。

3.2.2 散逸のある系と摩擦力

マクロ系では力学とは別の論理が存在する。皆さんも習っている熱力学はミクロな力学的性質とは独立に成り立っている閉じた論理体系である。ミクロな力学とマクロな熱力学を結ぶ話は 4,5 回目の主題でもあるので、詳細は触れないが、力学とは異なり熱力学では、運動に伴い熱が生じ、その結果、状態は不可逆的に変化する。ミクロな系であれば力学と熱を切り離すことも可能であるが、マクロな系であれば熱力学的不可逆性を力学法則に取り入れる必要がある。これは観測者がマクロな系の持つ膨大な自由度を全て把握することができず、重心座標の運動や回転といった少数の観測量を通してマクロな物体の運動を記述するために生じる情報の不完全さに由来するものである。

例えば (**??**) 式で論じた速度に比例する摩擦というのはしばしば登場する。こうした摩擦力は流体中で粒子をゆっくりと動かした場合に普遍的に生じる。そもそも速度に比例する摩擦力というのは動かないときに摩擦が働かず、動いたときにその方向と逆向きに働く力として最も簡単な力となる。摩擦力が展開可能な解析的な関数で表現できるのであれば速度にもっと強く依存する項があってもよいが、移動速度が小さければ速度の３乗、５乗といった高次の項は無視できる。[10]

こうして考えると高校で習うアモントン・クーロンの摩擦法則はかなり特殊であることに気がつくであろう。まず高校で習う (滑べり) 摩擦法則は摩擦表面に潤滑剤等の存在しない乾燥摩擦に適用され、以下の４つの経験則から成る。[11]

- 摩擦力は接触面に加えられる垂直荷重に比例する。
- 摩擦力は見かけの接触面積には無関係である。
- 動摩擦力は滑べり速度には無関係である。
- (最大) 静止摩擦力は動摩擦力より大きい

この摩擦法則をミクロな力学法則からきっちりと導出した論文を寡聞にして知らない。それより問題は、この経験則が成り立たない場合が非常に多いことである。例えば潤滑剤が物体間に入れば速度に比例する摩擦になることは勿論のこと、乾燥摩擦に限定しても動摩擦力は低滑べり速度や高滑べり速度では一定ではない。また高分子等、変形するとよけいに絡み合って内部摩擦が大きくなる物質では動摩擦の方が最大静止摩擦より大きくなっている。それ以前に最近の研究では静止摩擦力は時間の対数で増加していくことが知られるようになってきた。つまり物体を床に置いた直後に滑べらす方が、暫く置いてから滑べらすより摩擦が小さいのである。

[10]速度の偶数次の項は向きによらず働く力になるので不適切である。

[11]これらの法則はアモントンが 1699 年に発見し、クーロンが 1785 年に再発見している。しかし最初の２つはルネサンスの万能の天才レオナルド・ダ・ヴィンチが発見していたと言われる。

摩擦力の起源として昔から提唱されてきたのは表面の粗さ説 (凸凹説) である。滑べらせる固体表面が凸凹であればが双方の突起が引っかかって動けなくなるという描像は自然である。しかしながら 20 世紀も中葉になって、少なくとも金属に関しては凸凹説は完全に否定されるに至った。やすりなどで磨いた清浄金属面を持つ固体同士では摩擦力は飛躍的に増大したのである。従って現在では摩擦の凝着説が主流である。凝着説とは金属表面が高い接触圧力で変形し、凝着するというものである。この説は金属表面は平らに見えても凸凹で、その突起の部分のみが実際に接触 (真実接触面と呼ぶ) しており、見かけの接触面の殆んどが実際には接触していないという観測事実に基づいている。従って金属表面を磨くと真実接触面が増加し、摩擦力が増加する訳である。

また低速で物体を滑べらせたときの摩擦力はしばしばスティック・スリップ (付着・滑べり) 現象を起こす。これは摩擦係数が滑べり速度の増加と共に低下する場合や、高い静止摩擦から低い動摩擦に移る場合に起こる一種の振動現象である。このようなスティック・スリップ現象は自動車のノッキング等で見られるように機械に損傷を与える場合もある。

摩擦現象についてやや詳しく説明したのは、高校の物理で紹介されている現象であるだけでなく、身近で工業的な応用も多々あるにも拘らず、摩擦現象について分かっていることは必ずしも多くないことを理解してほしかったからである。

3.2.3 はねかえり係数

ここでは衝突現象を考えてみよう。衝突といっても原子核反応を伴うような高エネルギーの衝突から分子同士の衝突、ボールとバットの衝突など様々なスケールで様々な現象を含んでいる。量子力学の効果が効くか否か、内部自由度の多寡を含めて、それらを一括して論じるのは難しい。ここでは日常スケールの粒子衝突を考えてみよう。マクロな粒子同士が衝突すれば運動の自由度は熱として散逸したり内部振動を励起したりするので弾性散乱とはならない。その非弾性衝突の特徴を捉えるために古くから用いられているのははねかえり係数である。

実は摩擦と並んで、高校の物理の記述に問題があるのははねかえり係数で特徴づけられる非弾性衝突である。高校でははねかえり係数は衝突速度に依存しない物質定数と習うがこれは正しくない。正確を期すために定義を書いておこう。はねかえり係数は, 通常粒子衝突前の相対速度の法線成分 v と衝突後の相対速度の法線成分 v' の比を用いて

$$e = -\frac{v'}{v} \tag{3.19}$$

で定義される。ここで法線成分と断ったのは接線成分のはねかえり係数もあるからである。実際、図 3.4 で示した通り斜め衝突では回転自由度や接線方向のはねかえり係数も重要になるのは自明であろう。

さてはねかえり係数については幾つかの事実が分かって来ている。まず正面衝突に限定しても、はねかえり係数は衝突速度に強く依存している。衝突速度 v が低ければはねかえり係数は

$$1 - e \propto v^{1/5} \tag{3.20}$$

に従うであろうという理論があり、実験結果もそれと矛盾しない。但し $\propto$ は「比例する」という記号である。また高速での衝突では不可逆的な変形が残るようになり、はねかえり

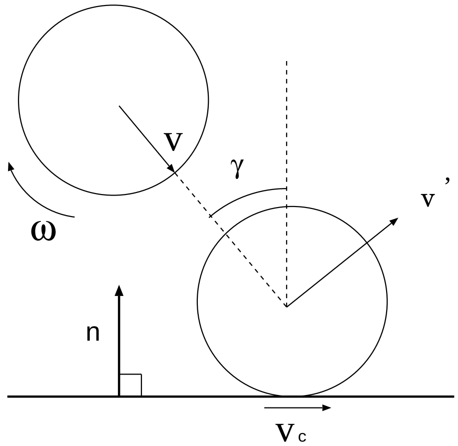

図 3.4: 平らな壁と粒子の斜め衝突の概念図.

係数は劇的に下がるようになる。これは潰れたボールが全く跳ねなくなるという日常経験からも妥当な結果である。このときのはねかえり係数は

$$e \propto v^{-1/4} \tag{3.21}$$

に従うという理論があり、よく実験結果を説明している。

より最近になって報告されたのは斜め衝突の際にはねかえり係数が衝突角度 γ(図 3.4 参照) に強く依存するということである。特に軟らかな材質の板に硬いボールをぶつけるとはねかえり係数は $\tan\gamma$ に比例して増加し、簡単に 1 を越える現象が観測されるようになった (図 3.5)。これは板表面が変形してボールの軌道が大きく変わるからであり、それほど不思議な現象ではない。実際、石の水切りでは衝突角度と衝突速度に応じて反跳の仕方が大きく異なることは日常で体験することである。しかしながらはねかえり係数が状況に応じて大きく変化し、はねかえり係数が 1 を大きく越えるという現象もあるということを心の片隅に留めておくことは有用であろう。

因みに斜め衝突のはねかえり係数は衝突角度 γ に対して、γ が小さい領域 (衝突速度の法線成分と接線成分の比 v/u が大きいところ) ではほぼ一定の値をとり、γ の大きいところ (v/u の小さいところ) では $\tan\gamma$ に反比例して増加することが知られている。

より高速の衝突では粉砕等の影響も無視できないであろう。このようにマクロな物質の非弾性衝突一つ取っても実際には簡単ではない。

3.3 粉体の物理

こうして考えると摩擦と非弾性衝突を備えたマクロな粒子の集団の物理は単純ではないことは想像がつく。砂やビー玉のようなマクロな粒子集団を粉体と呼ぶ。

粉体物理は粒子の巨視的集団の物性を論じるのであるから当然統計力学の対象となる. しかし, 砂粒がある温度で勝手に配置を変えたりしなことから想像がつくように, 粉体粒子の重心運動には熱的な揺らぎは影響を及ばさない。このことは粉体では熱平衡状態が消失していることを意味する。その結果、無数に安定な配置があり、外力を加えることでその

配置を変えることは可能であるが、完全に同一の配置を再現するのは殆んど不可能になってしまう。

粉体粒子を最も単純化すると散逸的な斥力相互作用をする球となる．勿論, 実際の粉体粒子は球でないし, その形状の効果がかなり大きいことも分かっている．また静電気や間隙水の効果も大きいことはコピーのトナーの定着や砂山を固めるときに水をかけることからも分かる．しかし徒らに複雑化しても仕方がないので, ここでは斥力相互作用をする球状の粒子のみを議論する．

散逸粒子の多体系は平衡統計力学で馴染んだ粒子系とかけ離れた性質を示す．例えば通常の分子気体では分子間衝突は弾性衝突と見做せ、衝突によって完全にランダムな一様な状態が実現する。その一方で、粒子間衝突に非弾性衝突のルールを導入した粉体ガスでは普遍的に紐状の高密度クラスターを形成することが分かっている．この系では粒子が集まってきた領域ではますます運動エネルギーが低下し密度がますます高くなり, クラスターを形成する．また接線方向のはねかえり係数が重要ではない場合は、衝突に伴い法線方向のエネルギーが失われるのに比べて接線方向の運動量は保存するので、徐々に粒子が揃って動くようになる。その結果引き延ばされた紐状の構造が形成される．紐状のクラスター内では縦方向の相関は強く横方向の相関は弱い．またこの場合の速度相関は距離のべきで減衰する長距離相関が存在する．ここで説明した特徴がはねかえり係数を 1 より僅かでも下げた瞬間で現われるのが粉体系の驚くべきところである．

また粉体が重力下で流れる際も水のような通常の流体と異なるのは勿論のこと，高分子等とも随分と違ったものとなっている．砂山斜面の流れでは表層部分だけが流動しており数層下の領域では固化しているかのように動きが殆んどない (図 3.7)．このように粉体では固体の様に動きがない領域と流体になっている領域が共存している．また粒子が強い重力の影響を受け層状に流れるのも大きな特徴である．その特徴のために往々にして気体論に基づき導出された流体力学は使えない．こうした流れをどのように特徴づけるかは難しいが、応用上も重要な課題である。

一般に粉体の流動特性 (レオロジー) はよく分かっていない。水のような通常の流体では接線応力 τ はずり速度 D(速度勾配) に比例する。このような流体をニュートン流体と呼ぶ。一方、混合溶液などでは混ぜることで粘り気が取れることもある。このような流体をチキソトロピー流体と呼ぶ (最近では shear thinning とも呼ぶ。ずりによる応力の低下現象とでも訳すべきか)。一方で水飴のようのに混ぜることでますます粘りを増す流体もある。このような流体をダイラタンシー流体 (あるいは shear thickening, つまりずりによる応力上昇) と呼ぶ。粉体は混相系ではないが、ダイラタンシーを示すことが知られており $\tau \propto D^2$ という式がよく用いられる。しかしその起源についてはまだ諸説があるという段階である。

粉体がほぼ固化した状態で一見動きがない時にこそ粉体の特徴が最も顕著に現われる．偏光板を用いてガラス球の変形を可視化した実験を行うと分かる様に応力 (ストレス) が鎖状の領域に集中している．またこのような常に接触し, 応力がかかった粉体を流すと, 応力鎖が切断や出現が間欠的に現われ, 瞬間的に思いがけない大きな応力がかかる場合がある．この粉体を流すときに生じる強い揺らぎのためにサイロが崩壊する事故も起きることがある．

粉体を記述するのにはどうするか．現在迄, 粉体のマクロ的挙動を統一的に記述する方

法は確定していない. 実際の処, 長い研究の歴史の中で様々な連続体モデルが記述されて来たが, これらの理論はいずれも適用限界があり有効性に乏しい. 一方，粒子モデルを用いて直接シミュレーションの結果と実験を比較しようとする動きも盛んであった．粒子のダイナミックスとしては離散要素法という手法が標準的に用いられており, 粉体の挙動を曲がりなりにも予測することは可能になっている. 一方で, モデル化の困難さや粒子数の限界, それから得られたデータの整理や解釈のために何らかの意味で信頼の足る理論を望む声が再び大きくなっている. これらに対して突っ込んだ議論をするのは難しいが、講義ではスライドと模擬実験を用いて粉体の不思議さのデモンストレーションを行う予定である。

第4章　統計力学と非平衡物理について

4.1　アインシュタインのブラウン運動理論の意義

図 4.1: ボルツマンの墓 (撮影：早川尚男)

アインシュタインの世間一般に知られていない業績の一つに分子の実在性をめぐる激しい議論に実質的に終止符を打ったという事が挙げられる。分子の実在を証明することに中心的役割を果たした論文がちょうど 100 年前に発表されたブラウン運動の理論に関する論文である。言うまでもなく、分子の実在をめぐる議論の主役はボルツマンであり、敵役はマッハやオストワルドであり、アインシュタインやペランはその終結に寄与しただけである。しかしアインシュタインがボルツマンの悲劇的な死によって彩られたこの論争に終幕を下ろした功績は大きい。同時に非平衡物理の扉も彼によって開かれたと言っても過言ではなく、ブラウン運動の理論は未だに現代的意味を失っていない。

4.2　原子論史：プレヒストリー

そもそも 20 世紀に入っても原子・分子の実在をめぐる論争があったことは驚くべきことである。一応の決着がついたのを 1908 年のペランの実験とするならば、それはラザフォードが α 線を用いた散乱実験で原子核の存在を明らかにしたわずか 3 年前の事である。化学の分野では周期律表が広く使われ、既に放射性元素も含めて自然界に存在する殆んどの原子が発見されていた状況で、この深刻な論争は起こっている。それどころか、論争が起こり始めたが周期律表が発表された 1869 年より遥か後の 19 世紀も後半になってからであった。このように錯綜した歴史的な事実を理解するのは容易ではないが、ポイントとしては (i)19 世紀半ば以降の熱力学の発展と成功、(ii) 熱力学における不可逆性と力学の可逆性の矛盾、(iii) 古典原子論の限界、(iv) 目に見えぬ原子というものに対する懐疑主義等が背後にあったという事が出来るであろう。特に (ii) は未だに完全な理解には至っていない難しい問題であり、ここで紹介する統計力学の基礎に関わる事である。また (iii) は言うまでもなく量子論の発展によって解消されていった疑問点であった。(iv) がある意味で最もアインシュタインと関連した事であるが、彼は花粉等の不規則な運動として知られていたブラウン運動を理論的に解明し、その機構は液体分子がランダムに衝突することによるとした。彼の理論はその一方でアボガドロ数のかなり正確な予言を行い、原子運動の可視化という問題と共に分子の実在性を証明した事になっている。

さて分子の実在性をめぐる論争の歴史をおさらいしてみよう。原子論は古代ギリシアでも論じられたが、形而上学的な仮説に過ぎず実態を伴ったものではなかった。そのために古典社会の崩壊と共に原子論は衰退し、やがて忘れられていった。近代に至って 1808 年にドルトンが素朴な原子論を復活させた。この原子論をもって近代化学が誕生したとも言える。尤もドルトンの言う原子は現在の分子にあたるため、実験事実との矛盾が生じた。ドルトン自身が分子と原子を誤認していたせいか、1809 年のゲイ＝リュサックの倍数比例の法則 (気体分子同士の結合ではその体積は簡単な整数比をなす)、1811 年のアボガドロによる、「一定温度と圧力の下で同体積の気体は同じ数の分子を含む」という仮説等、今日では原子論の証拠として紹介される諸々の仕事をドルトンは受け入れなかった。分子と原子の混乱やモデルとしての有効性を疑う議論は 19 世紀半ば過ぎまで盛んにされたが、1860 年のカールスルーエの会議を境にしてアボガドロの仮説の正当性が認識され、急速に普及していった。(因みにメンデレーエフによる周期律表の発表は 1869 年である)。

気体がばらばらの粒子から成り立っているという気体分子運動論の萌芽は 18 世紀に遡る事が出来る。おそらくは 1738 年にベルヌーイが気体の圧力は粒子が壁に衝突することで生じるとした論文が最も古いものであろう。また熱力学の建設に携わった大家の中でもクラウジウスは固体、液体、気体の区別は分子運動の形態の違いという正しい洞察を示している (1857)。電磁気学の定式化に成功し、19 世紀最大の物理学者の一人と目されているマクスウェルは 1860 年に現代にも通用する形で気体分子運動論を提出した。そこでは分子を完全弾性球とみなして、衝突によって実現する速度分布がいわゆるマクスウェル分布 (＝正規分布或はガウス分布) に従う事を導いた。この論文は物理学に初めて積極的に確率分布を持ち込んだものであって、統計力学の始まりと見做すことが可能である。またマクスウェルは気体の粘性係数を計算し、それが密度によらないことや温度とともに増加することを予言した。この結果は常識に反するように思われたが、マイヤーの 1861 年の実験やマクスウェルの 1866 年に行った自らの実験によってその正当性が支持された。同じ

頃に気体分子運動論の確立に大きく寄与した人物としてロシュミットが挙げ られる。彼は分子の大きさを推定したばかりでなく、アボガドロ数の推定にも成 功している (1866)。マクスウェルに至っては 4×10^{23} という今日知られている 値 (6×10^{23}) に近いアボガドロ数を算定している。

4.3 時代背景：熱力学と統計力学

本節ではボルツマンの登場以前に完成されていた熱力学と、マクスウェルによって導入された気体に対する統計論の基本的な考え方についてごく簡単にまとめてみよう。分子の実在や不可逆性を巡る論争を知る上ではこれらの知識は必要不可欠という訳ではないので、本節を読みとばすは可能であるが、バックグラウンドが分からないと具体的に何を言っているのか分からない懸念があるので、一応抑えておく必要がある。

4.3.1 熱力学

熱力学については高校で概要を習っている。しかし勿論ここでの議論には不十分であるので、その概要を簡単に説明したい。特に時間の不可逆性と関連した熱力学第二法則について説明する必要があるが、第二法則は高校の物理では触れられていないので、その点を意識した説明を行う。

まず通常、熱力学は基本法則として第ゼロ法則から第三法則まであるとされている。このうち、第三法則はエントロピーのゼロ点を決めるための法則、即ちエントロピーが $T = 0$ でゼロになるという法則で、極低温物理を論じるときに重要になる概念であるが、 一般の有限温度系ではそれほどの重要さは持たない。従って第ゼロ法則から第二法則のみを紹介する。

第ゼロ法則はあまりにも基本的なので、触れられていない場合もある程である。その内容は

- 温度 T_1 と $T_2(> T_1)$ の系を接触させたときに実現する平衡状態では $T_1 < T < T_2$ を充たす温度 T で特徴づけられる。

というものである。その成立は経験的には明らかである。第ゼロ法則は平衡状態で温度が導入できることを保証している。

高校で主として習うのが熱力学第一法則である。第一法則では熱と内部エネルギー、そして仕事の間の関係式である。ある操作の間の吸熱量 δQ と外部からされる仕事 δW, 内部エネルギーの増加 ΔU の間には

$$\Delta U = \delta Q + \delta W \tag{4.1}$$

という関係式がある、というのが第一法則である。混同しやすいのが ΔW で、外部からされた仕事であるから、圧力 P の状態で系の体積が ΔV だけ膨張すると $\Delta W = -P\Delta V$ とマイナス符号がつく。これは気体膨張が系の外部にする仕事をもたらし、圧縮が外から仕事をされたときに生じることを考えれば分かる。もう一つの注意事項は $\delta Q, \delta W$ は一般に途中の操作経路に依存するが、内部エネルギーの変化 ΔU は経路の選択に依存しない。操

作経路の始点と終点だけで決まる量を状態量と呼ぶが、内部エネルギーは状態量であり、熱や仕事はそうではない。[1]

実のところ内部エネルギーは熱力学で始めて導入された量であり、熱というのもエネルギー輸送の一形態であることはジュールの羽車の実験、即ち水の中で羽車を回すという力学的仕事による温度上昇の観測及び、熱の仕事等量を決めた実験を通して明らかになっていった。従って第一法則はエネルギー保存則の一種である。「一種」と断ったのは発熱によって失われたエネルギーは散逸してしまい再利用ができないためである。従って幾らでも再利用ができる力学的エネルギーの保存則とは分けて理解しておいた方が無難である。使ってしまったエネルギーの再利用が可能かどうかということは可逆な力学と不可逆な熱力学の違いを際だたせている。

さて熱力学の第二法則に移ろう。第二法則はまさにその不可逆性に関する法則である。通常熱力学第二法則は「自然に熱が低温環境から高温熱源に移ることはない」(クラウジウス)、「等温サイクルが外部に行う仕事はゼロまたは負である」(ケルビン)、「第二種永久機関は存在しない」(オストバルド) 等と様々に表現される。要は高温熱源から熱を貰って低温環境に熱を捨てると同時に仕事をする機関しか存在しないということである。

この第二法則をもう少し定量的に表現するためにエントロピーを導入すると便利である。吸熱量は状態量でないことに触れたが、等温操作では非常にゆっくり (準静的に) と系の状態を変えることができる。そのときの吸熱量 ΔQ_{max} は最大値を取ることが知られているばかりか、温度との比は系の選択や操作の経路に依らない状態量であることが証明できる。従ってこの量を

$$\Delta S \equiv \frac{\Delta Q_{max}}{T} \tag{4.2}$$

として操作の間のエントロピー変化として定義する。今、エントロピー変化しか決めていないが、その基準点は適当に選べばよい。その曖昧さをなくしたのが熱力学第三法則といえる。実は (??) 式の右辺の普遍性を指摘したのはカルノーであり、生前はその研究は殆んど注目されることはなかった。カルノーの死後１０年程してカルノーの仕事を発掘し、整理したのがクラペイロンであり、更に整理してエントロピーを導入したのはクラウジウスである。

さてカルノーはエントロピーを用いること無く、興味深い定理を導いている。それは熱機関の熱効率の上限である。熱機関というのは高温熱源から熱を受けて、仕事をすると同時に環境に熱を排出する機関である。車のエンジン等は熱機関の典型例である。カルノーが指摘したことを現代風に翻訳すれば (??) 式の右辺の普遍性から最も熱効率 ϵ

$$\epsilon = \frac{|\Delta W|}{\Delta Q} = \frac{\text{機関が外部にする仕事}}{\text{吸熱量}} \tag{4.3}$$

が最大であるのはカルノーサイクルであり、その効率 ϵ_{max} は高温熱源と低温環境の温度 T_H, T_L を用いて

$$\epsilon \leq \epsilon_{max} = 1 - \frac{T_L}{T_H} \tag{4.4}$$

で表されるというものである。証明は記さないが、比較的簡単に証明できる。しかしあくまで操作にかかる時間は度外視しているので、準静操作ばかりでサイクルを回すカルノー

[1] 従って大学の講義では δQ 等、非状態量の変化と内部エネルギーのような状態量の変化に別の記号を使う。

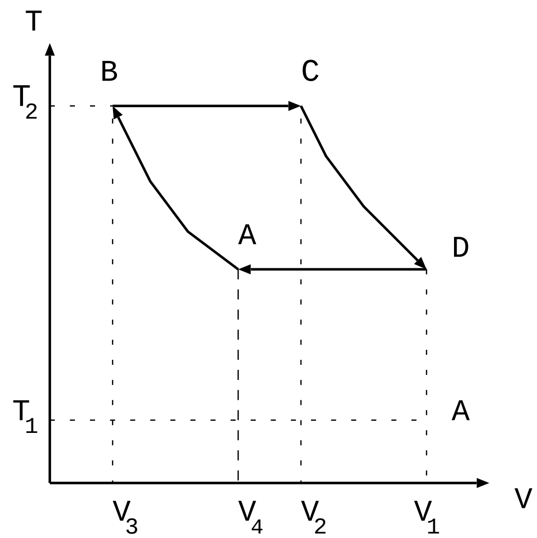

図 4.2: カルノーサイクル： $A \to B$, $C \to D$ は断熱準静操作であり、$B \to C$, $D \to A$ は等温準静操作である。

サイクルを一回転させるのには無限に時間がかかってしまうことになる。従って実用上ではカルノーサイクルを使うことはまずない。

また (**??**) 式を見ると一般の吸熱過程 ΔQ に関して $\Delta S \geq \Delta Q/T$ が成立する。従って、断熱系或はその特殊な場合である孤立系では外部との熱のやりとりがなく

$$\Delta S \geq 0 \tag{4.5}$$

となる。即ち、断熱系においてエントロピーは常に増加するか一定になる。但し等号は準静的に断熱操作をすしたときである。従って系の状態変化に伴ってエントロピーが増加するということが保証されており、そのことで時間の進む向きを規定している。

4.3.2 マクスウェルの統計的手法

既に触れた通り、マクスウェルの統計力学への貢献は統計的な考え方を分子集団の運動の記述に用いたことである。マクスウェルの論文はカールスルーエの会議の前後に出ており、アボガドロの仮説が承認された時代背景を受けて書かれている。従って 10^{23} 個にも及ぶ膨大な数の分子の運動を一つ一つニュートンの運動方程式を解きつつ、時間発展を追いかけるというのは現実的ではない、ということも認識していた。

既に 19 世紀初頭に大数学者のガウスが相関のないランダムなデータを集めるとデータ数が多くなるにつれて正規分布 (ガウス分布) に漸近することを示していた。このことが諸君にお馴染みの偏差値を導入する根拠となっている。言うまでもないが、偏差値とは統計データが正規分布に従うことを仮定し、平均値を 50、標準偏差を 10 に再規格化することで試験の成績を位置づけようとしたものである。

マクスウェルはその考え方を知ってか知らずか、ガウスのほぼ半世紀後に、正規分布が物理現象でも特別重要な役割を担うことを、特に気体分子の場合に見出した。そのため物理の分野では正規分布をマクスウェル分布或はマクスウェル・ボルツマン分布と呼ぶ。

そもそも正規分布或はマクスウェル分布とはどういうものかということを説明しよう。マクスウェルは気体分子の速度ベクトルを $\vec{c} = (u, v, w)$ として、気体分子が速度 u と $u + du$, v と $v + dv$,w と $w + dw$ にある確率を $f(u, v, w)dudvdw$ として分布関数 f が平衡状態で

$$f(u, v, w) = \frac{m^{3/2}}{(2\pi kT)^{3/2}} \exp[-\frac{m(u^2 + v^2 + w^2)}{2kT}] \tag{4.6}$$

となることを比較的簡単な証明で示した。但し

$$\exp(ax) = e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} \tag{4.7}$$

であり、$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ である。[2]

以下でマクスウェル分布の導出を説明する。やや込み入っているので、最初は飛ばして読んで差し支えない。マクスウェルの証明の前に e^{ax} の一般的性質を説明しておこう。$dx^n/dx = nx^{n-1}$ であることから

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{N} \frac{(ax)^n}{n!} = a \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(ax)^n}{n!} \tag{4.8}$$

となる。ところがこの有限和の上端 N を無限大にする極限をとると級数和のところは変わらない。従って

$$\frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax} \tag{4.9}$$

という面白い性質を持っている。

この性質を念頭に置き、次のもっともな仮定を置いてみよう。

1. 分布関数は u, v, w に独立に依存
2. 分布関数は特別の方向によらない。

２番目の仮定から分布関数は $c^2 = u^2 + v^2 + w^2$ のみの関数であることになる。双方の仮定を式で書けば

$$f(u, v, w) = \varphi(u^2)\varphi(v^2)\varphi(w^2) = F(c^2) \tag{4.10}$$

ということになる。ここで φ, F はこれから決める未知関数である。ここで (**??**) 式で $v = w = 0$ とおいてみよう。すると

$$F(u^2) = a^2\varphi(u^2) \tag{4.11}$$

となる。但し $a = \varphi(0)$ とする。(**??**) 式を (**??**) 式に戻してみると

$$\varphi(u^2)\varphi(v^2)\varphi(w^2) = a^2\varphi(u^2 + v^2 + w^2) \tag{4.12}$$

[2]高校では e は自然対数の底であり、$e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ で導入されると思う。しかし両者は等価であることは証明可能であり、今は (**??**) 式の方が便利である。

という関数方程式を得る。ここで v, w を固定して u^2 を変数として微分をしてみよう (偏微分といい、通常は微分と別の記号を用いるが、ここでは同じ記号を使う)。そうすると

$$\varphi(v^2)\varphi(w^2)\frac{d}{du^2}\varphi(u^2) = a^2\frac{d}{dv^2}\varphi(c^2) \tag{4.13}$$

となる。ここでトリッキーだが (**??**) 式で $u^2 = v^2 = 0$ と置いてみる。そうすると

$$\frac{d\varphi(v^2)}{dv^2} = -A\varphi(v^2) \tag{4.14}$$

となることが分かる。但しここで $A = -\frac{d\varphi(u^2)}{du^2}|_{u^2=0}/a$ である。この式と (**??**) 式を見比べると $\varphi(v^2)$ は

$$\varphi(v^2) = C_\varphi \exp(-Av^2) \tag{4.15}$$

となる。ここで C_φ は規格化定数である。更に (**??**) 式から

$$F(c^2) = C\exp[-A(u^2 + v^2 + w^2)] \tag{4.16}$$

と書ける。

ここでガウス積分の公式と等分配則 $\frac{1}{2}m\overline{u^2} = \frac{1}{2}kT$ [3]を使うことで (**??**) 式を得る。ガウス積分は高校の範囲を逸脱しているが、指数関数の肩の分子に運動エネルギーを乗せ、分母にエネルギー換算した温度を持って来るのは自然であろう。

諸君にはやや込み入った、しかし大学レベルでは簡単な証明から分かったことはもっともな仮定からマクスウェル分布が導かれたことである。ボルツマンが示したことはこの分布が絶対安定で、任意の分布が平衡分布に常に向かうということであった。

4.4 ボルツマン登場

分子の実在をめぐる議論及び統計力学の建設の主役は紛れもなくルードビッヒ・ボルツマン (Ludwig Boltzmann) である。ドストエフスキーに似た風貌を持ったこの男は、その自死という悲劇的な形で自らの命を絶つ。彼の人生の終止符はトリエステ近郊のドォイノで自らの手で 1906 年に打たれたが、その 2 年後にはペランの実験で原子の実在をめぐる論争は終わりを告げただけに一層の悲劇性を感じざるを得ない。

ボルツマンは 22 歳のとき (1866) に熱力学の第 2 法則、即ち熱の不可逆性 (エントロピーの増加) に関する定理を力学 的に導出することを試みた。無論今から見れば熱力学と力学の異質性を鑑みない理論ではあったが、その若々し さは注目に値する。次いで、1872 年に気体分子運 動論の中での記念碑的論文を出版し、その中で (本人は) エントロピーの増

[3] $\overline{u^2}$ は平衡分布関数を用いた統計平均

加を力学的に導いた (と思った)。そこで用いられた手法は今日ボルツマン方程式と呼ばれる分布関数の発展を記述する方程式を導入し、そこで分布関数とその対数の積の積分

$$H = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v,w)\log f(u,v,w)dudvdw \tag{4.17}$$

を H 関数として導入し、その H 関数 (エントロピーの符号を反転したものに比例する) が単調減少をすることを示した。またその H 関数の時間発展がなくなった状態を彼は平衡状態と見倣し、そこでは分布関数がマクスウェル分布となることを示した。

ボルツマンは以上の解析によって熱力学を力学的に記述することは解決されたと思ったが、1876 年に気体分子運動論で顕著な業績を挙げていたロシュミットが力学的な運動方程式の可逆性を基にしてボルツマンの仕事を批判し、より注意深い議論が必要とされるようになっていった。ロシュミットの批判はいわゆる可逆パラドックスと呼ばれ、ある瞬間に分子速度を反転させたとすると H 関数が増加する筈だから、エントロピーが常に増加する H 定理は正しくないと指摘した。

ボルツマンはロシュミットのパラドックスに対して、とてもありそうもない状態に導く初期条件があることを示しただけで圧倒的多数の初期条件では H 定理は成立すると反論した。その反論を具体化するために彼は 1877 年に第 2 の論文でエントロピー S を確率と結びつけ、微視的に可能な状態数 W の対数とエントロピーが関係している

$$S = k\log W \tag{4.18}$$

という有名な式を実質的に導いている。(図 4.1 のボルツマンの墓に刻まれた $S = k\log W$ はプランクがボルツマンの業績を讃えて刻ませたものである。)

1896 年にはツェルメロによって再帰パラドックスと呼ばれる反論が新たに加えられた。ツェルメロは 1890 年にポアンカレによって示された力学系は有限時間のうちに初期状態に再帰するという定理を基にしてある時間帯で H 関数が減少したとしても系はいずれ減少し最初の状態に戻るという事を意味するとしてボルツマンを批判したのである。ボルツマンはここでも再帰時間が圧倒的に長く、また確率的考察から実質的に H 関数の減少 (エントロピーの増加) しか起こり得ないという反論をしている。

これらロシュミットやツェルメロの批判に答えるうちに不可逆性を原理とする熱力学と可逆性を原理とする力学の間の溝が浮き彫りになっていった。そこでボルツマンは長時間平均とアンサンブル (集団) 平均が等しいというエルゴード仮説を導入し、マクスウェルを経てギッブスによってアンサンブルの理論である統計力学は完成していった (1902)。尚、アインシュタインが 1902 ー 3 年に殆んどギッブスと同じ形の理論を展開していることに触れておこう。

ギッブスによって大枠が完成された統計力学は今日では平衡系の多体問題を扱う学問分野として理工系の必修科目の一つとなっている。統計力学の出現によってミクロな力学とマクロな熱力学との間に架け橋が出来た事になる。無論、現在に至っても何が時間の不可逆性をもたらしたのかを一言で説明するのは容易ではないし、厳密な多体計算は出来ないために近似的な計算法に頼っている側面もある。同時に熱力学とは矛盾しないがマクロな現象に限ればその枠をはみ出さず、安定性等についてはより予言能力に乏しい。統計力学の有用性は量子効果が顕著になる低温物理で認識されるようになり、また各種の厳密に解

けるモデルの発展、繰り込み群等による相転移現象の理解等を通して統計力学の学問とその適用範囲は飛躍的に発展した。

一方、歴史的に重要な役割を果たした気体分子運動論やボルツマン方程式はその後も非平衡を扱う学問体系として平衡統計力学とはやや異なった発展の歩みを見せた。ごく平衡に近い領域では線形応答理論等の一般的な枠組が作られたが、平衡から遠ざかると一般論の建設は難しいのが現状である。しかしながら近年は平衡から遠い系に対して、散逸構造、カオスやソリトン、果ては生物を視野に捉えた複雑系の研究まで対象が広がり爆発的な戦線の拡大を示している。

4.5　反原子論の勃興

ボルツマンは科学的論争を楽しんだのではなく、身を削る思いで、原子論を擁護した。ある意味奇妙なことであるが 19 世紀の終わり頃には、モデルとしての分子・原子有用性の一方で原子 (atom=分割できないもの) という言葉そのものに抵触する発見、即ち原子の分解や構造に関するものが続々と報告されるようになってきて、同時に可逆な力学系と不可逆な熱力学系の矛盾があいまって反原子論が勃興してきた。例えば J.J. トムソンによる電子の発見 (1897), イオンの発見 (1899) は原子を一部分解したと解釈せざるを得なかったし、放射能 (1896) の発見も原子の不易性の神話を打ち破り、原子の分解を意味した。これらの事実は古典原子論に対する深刻な反論となっており、原子論を無批判に受容することが出来なくなりつつあったのである。

熱力学が予言する時間の不可逆性をどう可逆な力学系で理解するかについては後程にまた触れるとして、こうした 19 世紀末の時代背景から原子が存在するか否かという論争が起こった。こうした反原子論が 19 世紀も後半の 80 年代になってから盛んになったことは特筆に値する。言うまでもなく 1880 年代というのはメンデレーエフの周期律表の提出よりかなり後のことであり、化学の分野では原子の存在は疑うべき段階を過ぎていたのである。

反原子論の急先鋒は実証主義を標榜するマッハであり、エネルゲティークのヘルムやオストヴァルト等であり、他に熱力学の建設で活躍したデュエムもその著書の中で原子の存在を斥けている。

この反原子論の勃興の背景には 19 世紀中盤でのエネルギー概念の発展と熱力学の完成がある。またマクスウェルによる古典電磁気学の完成も大きな影響を与えた。いずれも 18 世紀迄の力学的自然観とは対照的に連続量をベースにおいた場の理論である。特に熱力学では現象論で閉じた理論体系が完成し、殆んど原子論 (或は統計力学) は気体にしか適用できなかった当時に熱力学は状態変化、溶液論、化学平衡等 汎用的な一般法則を論じる事を可能にしていた。また熱力学は時間の方向性や物質や状態の安定性を説明することができるため、可逆な力学法則からどうやって不可逆なものを導くのかという難しい問題を避ける事が可能であった。更に 低温での比熱の問題 (エネルギーが内部自由度に等しく分配されるという等分配則が破れていた) や完全剛体に基づく古典原子論に内在する論理的非整合性、はては放射能等の発見による不易な原子観の動揺, プランクによって解決される熱輻射の問題等、後に量子論等の考慮によって解決できる多くの問題が古典的原子論に対する深刻な疑義を生み、 反動的な保守勢力のみならず革新的な原子構造論の論客からも

原子論は攻撃されること となっていた。

このような背景の下で原子モデルを実証されていない単なる作業仮説として斥けて全ての自然現象は熱力学的観点から論じる事が可能であるとする 熱力学一元論を展開しようとするのは理解できなくはないであろう。

4.6 アインシュタインのブラウン運動の理論

20 世紀に入ってこの閉塞した状況に変化が見られた。まずは記念碑的論文であるプランクの論文の登場である。既に前期に述べた通り、プランクはプランク定数 h と同時にボルツマン定数 k を導入した。ボルツマン定数 k は気体定数 R とアボガドロ数 N_A を用いて $k = R/N_A$ と表される (というよりもボルツマンは以前より気体定数とアボガドロ数の比を用いていた)。実際にプランクの公式が実験と著しい一致を得た際に２つのフィッティング・パラメータとしてプランク定数とボルツマン定数 (あるいはアボガドロ数) が決まってしまうことになった。実際、プランクが見積もったアボガドロ数は有効数字１桁で現在知られている数字と一致している。いずれにしてもプランクの量子仮説はミクロ領域に不連続な構造があることとそれに伴う２つの基本定数の導入をもたらした画期的なものであった。しかしながらプランクは輻射公式を扱っただけに、アボガドロ数が推定できるにせよ、分子の実在に関する決定的証拠とは受け入れられなかった。 (またこの方法でアボガドロ数が普遍的な値を取る事を指摘したのはアインシュタイン であり 1905.3.18 の事であった)。

ここで科学界の巨人、アインシュタインが登場する。アインシュタインのブラウン運動に関する理論は非平衡統計力学の魁をなすものであるが、ここでは後のペランの実験 (1908) と合わせて、分子の実在に関する動かしがたい証拠を提出したという事を強調しよう。アインシュタインは従来、統計力学の対象とされていなかった溶液中で不規則な運動 (ブラウン運動) をする粒子に着目した。ブラウン運動そのものは花粉等の運動でおなじみであろう。そうした馴染み深く目に見える現象で、 実験の容易な現象と分子の実在を結びつけた点にアインシュタインの天才性を窺う事ができる。

アインシュタインはまず溶液中における溶質粒子の示す浸透圧の法則 (ファント・ホッフ則: 因みにファント・ホッフは初代のノーベル化学賞受賞者である。 物理学賞はレントゲン) を用いた。この法則は理想気体の運動方程式と同じ形をしており諸君も化学の授業でならったかもしれない。即ち P, V, R, T をそれぞれ圧力、溶液の容積、気体定数、温度として浸透圧の法則は

$$PV = zRT \tag{4.19}$$

と書ける。ここで z は溶質のモル数である。従って

$$P = \frac{RT}{N_A}n, \quad n = \frac{zN_A}{V} \tag{4.20}$$

と書き換えることができる。この法則によると浸透圧は温度と数密度 n に比例し、その比例定数としてボルツマン定数 $k = R/N_A$ が現れる。一方、 １個のブラウン粒子に働く力 f は圧力の勾配に比例することから定常状態では

$$\frac{dP}{dx} = nf \tag{4.21}$$

となる。ここで x は力のかかっている方向に平行な座標である.[4]溶媒の温度は一定とすると (??), (??) から直ちに

$$f = \frac{RT}{N_A n}\frac{dn}{dx} \tag{4.22}$$

となる。また流体力学によると 遅い流れの中 (或は粘性の高い流体中) に球が存在すると抵抗力は流れの速度 v、粒子の半径 a 及び粘性率 η に比例する、即ち

$$f = 6\pi\eta a v \tag{4.23}$$

となることが知られていた。 無論この法則は静止流体中で力を加えて動かしたときの粒子速度とその力の間の関係式と読み替える事も可能である。ブラウン粒子の流束 (数密度と速度の積 nv) を拡散流束 J 即ち、密度勾配と拡散係数の積 $J = -Ddn/dx$ と等しく置いた式

$$\frac{nf}{6\pi\eta a} - D\frac{dn}{dx} = 0 \tag{4.24}$$

によって拡散係数を求めることができる。その結果は

$$D = \frac{RT}{6\ \pi\,\eta a N_A} \tag{4.25}$$

である。ここで T, η, a は温度、粘性率、粒子半径である。当時、既に粘性率は既によく知られており、勿論温度も決められるので、半径 a を正確に決められる粒子を用いて、拡散係数を測ればアボガドロ数 N_A が分かる事になる。

アイシュタインの論文は 1905 年から翌年にかけて出版された。この論文自体は特殊相対論や光電効果に比べると地味な印象もあるが、非平衡統計力学の礎を築いたという意味でも、分子の実在の問題の決定打となったという意味でも、 その価値は他の 2 つの論文に劣らないものである。もっともこの論文の出版後 すぐにアインシュタインの主張が受け入れられた訳ではなく、その解析の正当性を疑問視する声もあった。それというのもアインシュタインは様々なスケールで従来別々に成り立っていると思われた幾つかの法則を繋ぎ合わせて最終的な 表式にたどりついたからである。一般に物理法則は適用限界があるので、 アインシュタインの手品のような解析に疑問符がつくのももっともであった。

こうした論争に終止符をつけたのがペランである。ペランはフランスの化学者であり、アインシュタインの理論に対応した実験を注意深く行い、アボガドロ数の同定に成功した (1908)。その結果は従来の他の方法で得られたものと変わらないもので あるが、前期量子論の勃興期であることもあって、彼の実験は原子の実在を最終的に決定づけるものと受け取られた。彼は後にこの業績でノーベル賞を受けている (1926). ペランはまず、均質な球形のコロイド粒子を作ることから始め、ブラウン粒子にも流体力学の抵抗則が成り立つ事、気体と同様にエネルギー等分配則が成り立つ事、 ブラウン粒子が (当時知られていた) 拡散方程式に従う事、等を注意深く調べ、また 少なくとも 3 種類の独立な方法でアボガドロ数を求める事に成功した。このペランの実験によって原子の実在に疑いを抱くものはいなくなり 1909 年にはオストワルド でさえ原子の実在を認める様になった。ここで長い論争に終止符が打たれた事に なるが、その間、1906 年に原子論の旗手であったボルツマンは最終的な勝利を見る 事なく自らの手で命を絶っている。

[4]本当は圧力は時間の関数でもあるので偏微分で書くべきだが、定常状態では通常の微分で構わない。

実はアインシュタインは以上のよく知られた一つの方法のみを提出したのではなく、分子の実在に関する多種多様な実験方法を提案している。 2つめの方法はアインシュタインの粘度式として知られている有効粘性率の式を理論的に導いた。今日ではレオロジーの出発点となるこの式はコロイド等の溶液が溶質の存在によって粘性率 η が上がる (粘り気を持つ) ことを定量的に示したものである。その式はサスペンションの体積分率 ϕ が小さい場合に有効粘性率が

$$\eta = \eta_0(1 + 5\phi/2) \tag{4.26}$$

となるというものであった。但し η_0 は純粋溶媒の粘性率である。この式が何故, 分子の実在論の証拠になるのか：それはコロイド粒子のモル数 z, コロイド粒子の体積 Ω, 溶液の容積 V を用いて体積分率 ϕ が $\phi = zN_A\Omega/V$ という式を満たすことと、有効粘性率が実験で容易に測れる事による。ここで z, V, Ω は観測可能量であることに注意して欲しい。従って実験によって容易にアボガドロ数 N_A を特定できる。実際、この方法で求めたアボガドロ数 は当時の実験でも 6.6×10^{23} という実際の値に近いものであった。(尚、 アインシュタインは計算間違いをおかし $\eta = \eta_0(1 + \phi)$ としていたが、学生に 検算をさせて間違いを訂正した)。

次の方法はプランクの輻射公式に基づくものである。既に述べたので繰り返さない。 また 1905.12 の論文ではブラウン運動に基づく他の2つのアボガドロ数の推定方法も提出しており、また 1907 年には電圧揺らぎによって決定する方法を提出している。

またブラウン運動の解析の論文で、いわゆる酔歩 (ランダムウォーク) の問題とブラウン運動を同定し、粒子の平均2乗変位が拡散係数の2倍と時間に比例 することを指摘したのもアインシュタインである。この方法から実験で拡散 係数を測る事ができ、その結果、アボガドロ数の算定も出来た。それに留まらず この式は揺らぎと散逸の間を結ぶ揺動散逸定理の一種であり、非平衡統計力学の出発点かつ最も大事な関係式を与えた。

最後に臨界乳光の方法を紹介しよう。これはスモルコウスキーが 1908 年に気体中の密度揺らぎが

$$\delta^2 = -\frac{RT}{N_A V \frac{dP}{dV}} \tag{4.27}$$

で与えられる事を示した。この式は臨界点 $(dP/dV = d^2P/dV^2 = 0)$ で揺らぎが発散することを意味し、その近傍で光の散乱が増加することを指摘したことになる。スモルコウスキーはレーレー散乱への補正が必要になるであろうと指摘をしたに留まったが、 それを受けてアインシュタインは補正を計算し、アボガドロ数の算定がここでも可能であることを指摘した (1910)。

このようにペランの実験に留まらず、様々な独立な方法でアボガドロ数の算定が可能になり、それがほぼ一致した結果を与えた事は分子の実在を疑う事の出来ないものとした。また同時にブラウン粒子に着目したことが原子、分子の不可視性に対してアンチテーゼとなり、分子論の受容へと拍車をかけたことは疑う余地はない。 更に反原子論の論拠となった古典物理学と原子論の矛盾が、量子論の進展と共に 次々と解決していった。 こうした中でオストヴァルドは転向し、マッハのみが反原子論の孤塁を保った。 しかし時代は原子核を含めた原子構造を論じるのが主な話題になり、既に分子・原子の実在を議論するときは過ぎていた。

4.7　時間の不可逆性について

時間に何故向きがあるのか。ある意味で非常に哲学的な問であるが、 統計力学という学問は誕生の経緯からその問に答える義務があった。 というのは可逆なニュートンの運動方程式と不可逆な熱力学を結び付けよう という意図のもとに生まれた学問分野であったからである。

既に我々はボルツマンによるボルツマン方程式の提出、ロシュミットやツェル メロの反論、それに対するボルツマンの暫定的な答え等を知っている。しかしここで は歴史的な事実を網羅するのではなく、それを理解したいという誘惑にかられ ないであろうか。この不可逆性の起源について確定的な事を高校生の諸君に紹介するのは難しい。何故ならこの問題は必ずしも完全に理解されている訳ではなく、細部では現在も研究の対象となっている問題であるからである。

さてニュートンの運動方程式が可逆であると言っても高校生の諸君にはピンと来ない可能性がある。例えば自由落下をしているボールを時間を反対にして見る。これは 一見不自然だが、速いボールに一定のブレーキがかかっているだけのことである。 不自然さを消すには空間の向きをつけかえたらよい。すると最初の自由落下と全く 同じ現象になる。これは、ニュートンの運動方程式が時間と空間の反転に対して 不変であるという性質に基づいたものである。従ってフィルムの逆戻しをしてみても (空間の反転を忘れなければ) 何もおかしな事は起こらない。

既に知っているように移動速度に比例する摩擦力が働けば、いずれ静止する。しかしボルツマンは原子レベルでの基本相互作用に立ち戻れば、そのような摩擦力が存在しないと仮定していた。実際、この仮定の妥当性は素粒子に置き換えて、今も正しいと信じられている。元来、ボルツマンは可逆な力学法則から不可逆な時間発展を統計力学によって説明しようとしていたのである。

では、力学の方程式が時間反転で不変であれば、時間の向きはどうやって生じるのだろう。 例えばインクを水の中に落したら拡散することは皆知っている。しかしこれは時間反転をするとおかしな事になるし、そのおかしさは空間の向きを入れ換えても 直らない。実際、インクの拡散は水平面には等方的であるし、鉛直方向には非対称にせよ、上下がひっくりかえるだけのことで、時間反転に伴って生じる逆拡散は どう考えても不自然である。そもそも我々は日々歳を取っているのであるから 時間に向きがあるのは自明である。しかし、基礎方程式である筈の力学の方程式 (これは量子力学でも) は可逆なのであるから、その不可逆性は考えると不思議な事 である。

エネルゲティーケが原子の存在を否定しようとする一つの論拠はこの両者の間の矛盾にあった。熱力学は安定性に基づく不可逆性を持ち、そのため時間は最初から向きがあると考えて良かった。一方、ボルツマン等の様に原子の存在を肯定し、不可逆性を理解しようとするのであれば何らかの意味で力学以外の性質を持ち込まないといけない事は間違いない。そこに統計力学の難しさと現代性があるのである。

4.8 不可逆性をもたらすもの

ところで分子集団の運動には膨大な自由度が含まれる。実際にそれを全部フォローするのは不可能だし無意味である。そうすると例えば速度分布といった分布関数を導入し、統計集団として扱うのが普通である。そうした場合に大抵の場合は元の情報を完全に保存しておらず、その結果不可逆性をもたらす。これは逆に着目している粒子の運動を考えても良い。例えば気体中で着目している粒子の運動は周りの粒子のランダムな衝突によって決められる。[5]すると平均衝突間隔 (平均自由行程) より長いスケールで見れば分子はランダムウォークをしているようになる。アインシュタインが示した様にランダムオォークは拡散と同じであるから不可逆性が生じる。(液体中のコロイドの運動はまさにそうしたものであり、それがブラウン運動として観測されるが、液体分子とコロイド粒子の大きさの違いや流体の抵抗等があり、不可逆性は 初めからインプットされているようで例として適さない)。これは目をつぶって人混みの中を走っている様なもので、その人の軌跡を描けば拡散粒子と同じだし、 そういった目をつぶった人のサンプルを集めれば拡散のように広がっていくことは 確かであろう。

実際、こうした考えは時間の不可逆性を考える上で基礎となるし、本質を衝いている。こうした考えに基づき定式化した理論も存在する。例えば気体粒子集団から 1 個の粒子の運動を取り出して書き直すと形式的にランダムウォークの粒子が従う方程式 と似た方程式が出てくる。そこで例えば衝突が無相関でランダムであるとすると完全にランダムウォークの式と一致させることが出来る。(尚、等価な書き換えで 出て来た方程式はあたりまえだが可逆である。あくまで衝突がランダムで無相関で あるという情報をインプットしてこそ不可逆性が生じる)。こうした考え方から時間の矢は情報の不完全さにのみ由来する見掛けのものであるという意見が出て、 物理の専門家もそれを受け入れている場合もある。

ところがそれは誤解である。例えば可逆な運動法則に従う全自由度を扱っても不可逆性は生じる。例えばエネルギーを保存する少数自由度力学系では粒子はカオス的な振舞いをする。即ち、初期条件のわずかな差に対して鋭敏に反応して粒子の軌道はぐちゃぐちゃなものになってしまう。初期にきれいな周期運動に近い状態から出発しても軌道はカオティックなものになるが、カオティックな軌道から周期軌道に移ることはない。粒子は全部見ても (初期条件のわずかな不完全さに由来した) 混合性から時間の矢が生じるという考えがある。これは先の時間の矢は見掛けの ものだとする考え方から見ると かなり前進したことになるだろう。

カオスをもたらすのは初期条件における僅かな誤差による軌道の不安定性と言えよう。このような誤差は解像度の限界がある限り、必ず生じる。カオスと似た側面であるが、違った立場では図 4.2, 図 4.3 のようにもともと可逆な力学系では速度と運動量によって構成される位相空間上の体積は保存するのであるが、それが軌道不安定性によって引き延ばされた構造になり、解像度限界より小さな構造も持つようになる。その系をデジタル化して見れば、有効位相体積が増加したように見えるだろう。実は不可逆性の指標であるエントロピー (**??**) は系の状態量の対数であった。状態数は当然、位相体積に比例するので、有効位相体積が増加すればエントロピーは増加する。

こうした混合性が絶対必要かというとそうでもない。実際、完全に可解、 即ち運動が

[5]実際には衝突している粒子同士にも相関があるのだろうが、膨大な自由度に埋もれて、その記憶を失ってしまう。

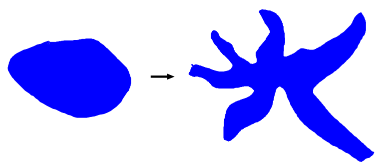

図 4.3: 位相体積の時間発展 : 体積は変らないが細くなる

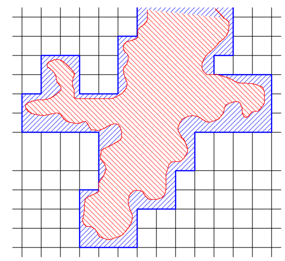

図 4.4: 位相体積の粗視化 (デジタル化) : 有効位相体積が (図の青斜線部だけ) 増加したようにみえる

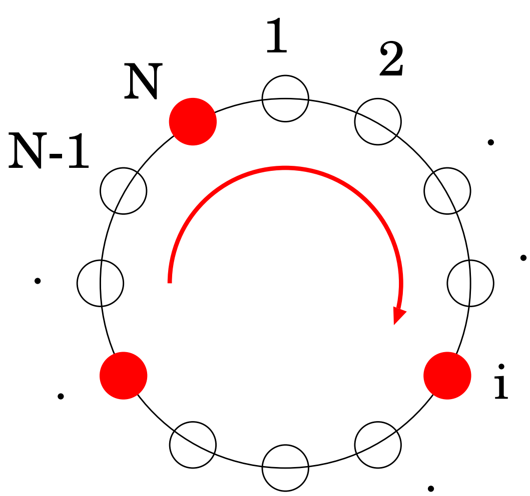

図 4.5: カッツのリングモデル

完全にフォローできるような場合でも不可逆性は生じ得る。例えば 次の様な遊びを考えてみよう。N 人で輪を作って座ってみる。全員が白か黒の ボールを持つ事にしよう。全員が持っているボールを右隣の人に渡すとしよう。 N 人の中で一人だけが特殊な立場 (教師) にあり、回って来たボールの色を変えるとする。このルールで遊びをすると初期の黒、白のボールの数の差が段々減ってついには同数になっていく事が確認されるであろう。実際、数学的に示す事は容易である。

しかし、この結果は自明ではない。実際、第１にこのルールには時間反転対称である。右に回しても左に回しても良いが、左に回すことは時間を遡る事と解釈できる。 第２に 2N ステップ経ると初期状態に戻る。これは難しい計算をしなくても 2N ステップ後に全てのボールは教師の手を丁度２回通過するので色は元に戻る。 この第１と第２はいずれもルールが可逆性を持つことの反映であり、それぞれ ロシュミットとツェルメロの批判に対応している。

ではどう考えたら良いのだろうか。前の解析は誤りだったのだろうか。これに対してもボルツマンの反論が参考になる。そのためには教師役を皆で交替し、同じリングの集団を作る必要がある。ついでその平均として黒と白のボール数の差を計算する必要がある。その結果は、N ステップまでは確かにどんどん混合が進む。従って黒と白の数は少なくなって行く。しかし N ステップを過ぎると 逆混合が起こり、ついには 2N ステップで元の状態に戻る、という事になる。 従って再帰時間より充分短い場合には確かに混合が進みボルツマン方程式のような時間の矢が存在する。しかし再帰時間に近付くにつれて反ボルツマンとでもいうような時間の逆向する状況になる。これがツェルメロに対する反論にそのまま使える。

この遊びから得られるもう一つの教訓は初期条件の選び方の重要性である。 例えばもっとも混合が進んだ (白と黒が同数の) 状態から出発すれば必ず最初は 逆混合が起こる。従って混合を時間の矢の目安とするならば一つの特殊な例では時間が逆向し得る。そのためにアンサンブルに対する平均を行い、特殊な初期条件の影響を消す必要があった。従って混合は殆んど確実に起こる統計法則である と言える。これがロシュミットに対する反論と解釈できる。 このような初期条件の選択が時間の不可逆性に本質的かつ密接に関わっている。

これ以上に詳しい説明は専門的になるので高校生の諸君には難しい。しかしながら不可逆性がどうして起こるのかという事という素朴な疑問に少しは答える事ができたのではないだろうかと期待する。果して諸君はどういう感想を持っただろう。

付 録 A　補足説明

A.1　ローレンツ変換について

ここでは幾つか補足説明をする。まずローレンツ変換に伴う座標軸の変換であるが、$x'=0$ が ct' 軸、$t'=0$ が x' 軸をなすことを考えれば良く分かる。例えば (2.5) 式で $x'=0$ から $\tau=(1/\beta)x$ となる。これが $\tau'=ct'$ 軸の式である。一方、(2.6) 式で $\tau'=0$ より $\tau=\beta x$ が x' 軸となる。一般に $|\beta|<1$ より, $\beta>0$ であれば、例えばこのノートの図 1 のような軸同士のなす角が鋭角になる座標系になる。一方、$\beta<0$ であれば、図 2.5 の x'' 軸と ct'' 軸のように軸同士が鈍角をなす座標系となる。

次にノートでの説明は一貫して (x,τ) の時空 2 次元系を用いて行ったが、一般には時空 4 次元の問題を扱う必要がある。しかし慣性系同士では座標系は互いに等速直線運動を行うので、x 軸に沿って運動するとしても一般性は失われない。その場合、ローレンツ変換での不変量は $x^2+y^2+z^2-(ct)^2=x'^2+y'^2+z'^2-(ct')^2$ である。勿論 (x,y,z) を $t=0$ に発射した光の到着点とすれば両辺はゼロとなるので、計算のプロセスは全く同じになる。計算の結果、y, z に関しては変換しても変更がなく

$$y'=y, \quad z'=z \tag{A.1}$$

となる。

A.2　テーラー展開について

また前回の講義で質問があったのは (予想されたことだが)$x=x_0$ 近傍でのテイラー展開

$$f(x)\simeq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots \tag{A.2}$$

但し $f(x)=\sqrt{1+x}$, $x_0=0$ とすれば $\sqrt{1+x}\simeq 1+x/2+\cdots$ についてであった。ここでは高校生向けに直観的な説明を試みよう。

要は $y=f(x)$ の近似値を求めるときにどうするかという問題である。図 2 は微分学で微分を導入するときの図と同じであるが、x_0 近傍の x における $f(x)$ を近似する表式を求めてみたい。第ゼロ近似であれば x と x_0 の差は大きくないので $f(x)\simeq f(x_0)$ としても悪くないであろう。しかしちょっと御粗末なので近似を上げて $x=x_0$ で $y=f(x)$ に接する接線を引き、その値を x に外挿してみよう。図から明らかなように接線の傾きがゼロでない限りそんなに悪い近似値ではない。従って

$$f(x)\simeq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \tag{A.3}$$

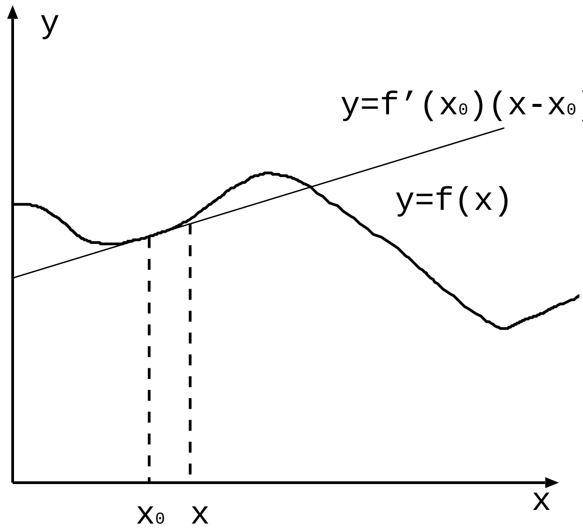

図 A.1: テーラー展開を説明する図

というのは悪くない近似である。それどころか、この式を変形して $x \to x_0$ とすると

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{A.4}$$

となる。何のことはない。微係数の定義式になった。この一致は偶然ではなく必然である。むしろここでの説明の流れで微係数は導入された。

では更に近似を上げるのにはどうするか。接線で近似したのを 2 次関数で近似すればより近似は上がるだろう。或は今の近似では一次微分を $f'(x) = f'(x_0)$ としたことに相当するので、それを $f'(x) \simeq f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0)$ と近似して、積分すれば

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \tag{A.5}$$

となる。実は何回でも微分が可能な滑らかな関数では今の議論を帰納的に続けることによって

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^2 \tag{A.6}$$

となることを証明できる (マクローリンの定理)。一般にこういう展開をテーラー展開と呼ぶ。関数が不連続であるとか、有限回でしか微分可能でない場合の一般的証明は大学で習うであろうが、ここでは必要はない (テーラーの定理の証明は最高次の N 階微分の評価が面倒なだけであるが、そこに平均値の定理等を用いなければならない)。

A.3 双子のパラドックスについて

まず講義では誤解を招く言い方をした。 あくまで双子のパラドックスの解消は慣性系 (地球？) の原点に固定してある時計 W_1 の進み方が同じ座標系から見ても、非慣性系 S' 系 (ロケット) から見ても最終的には同一となると言っているに過ぎない。一方、ロケットが

帰還するまでに S' 系の原点 (ロケット) に固定した時計 W_2 の進みは固有時間 $2T_2$ と考えて良く、$T_2 < T_1$ より光速に近い高速で加速度運動をして戻って来るロケットに乗っている人の進む時間の進み方はゆっくりとしている。

前回の授業後、２人の生徒から全く同一の質問が出た。この質問はかなりレベルの高いもっとも質問でかつ相対論の通俗書には説明がないのである程度真面目に答えたい。

質問は

Q 双子のパラドックスで直線的運動をして急に折り返す際に地球 (慣性系) から見たロケット (非慣性系) の時間の進み方が変わって、折り返す所要時間がかかってしまうのは分かった。では局所的に慣性系と見做せるような加速度系 (例えば半径の大きな円運動) で速度を徐々に変えたときに双子のパラドックスがどうなるのか？

というものであった。その場での答えは、円運動にしろ加速度運動をしている以上、慣性系とは成り得ず、ナイーブな特殊相対論の時間遅れの効果を適用できない、しかし結果には矛盾はないというものであった。しかしこの答えは誤魔化しているので、もう少し真面目に考えてみよう。

一足とびに滑らかな曲線に従って加速度運動をすると慣性系でなくなってしまうので特殊相対論の議論は使えなくなってしまう。しかし講義で行った説明もよく考えると滑らかな減速、加速を一点の折り返しに置き換え、往復での慣性系の変更によってパラドックスの解消を試みているのである。ではこの話をより一般化するために図のように 1+1 次元でのロケットの軌道を考えてみる。

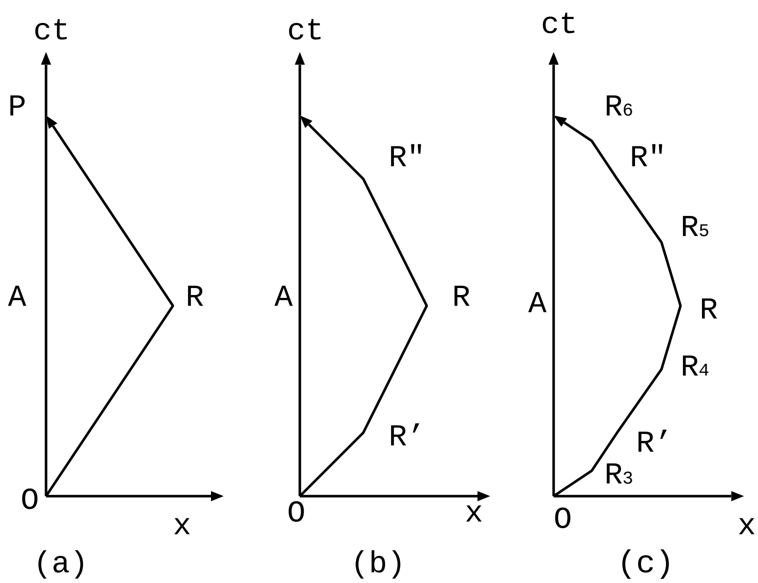

図 A.2: 滑らかな加速度系における双子のパラドックスの説明。(a) は一回での折り返し、(b) は三点での軌道の変更、(c) は 5 点での軌道の変更

このときも双子のロケットの折り返しと同様に軌道変更毎にロケットからみた慣性系の時計の進み方は不連続に動く。従って慣性系の固有時間の進み方とロケットから見た慣性系の時計の進み方は、ロケットが出発点に戻った時点では一致する。

　ここでもロケット (非慣性系) の固有時間の進み方は折り返しに要する時間は無視でき、ゆっくりと進むことになる。より正確な考察を期するには等加速度運動を説明した方がいいが、数学的準備が面倒なので省略。大学で講義を受けて下さい。

関連図書

[1] A. パイス 著、西島和彦監訳、神は老獪にして…-アインシュタインの人と学問 (産業図書 1987)：高校生には難しすぎるし、価格が高すぎるがアインシュタインの人と研究を知る上では必要不可欠。

[2] 早川尚男、 物理学概論ノート,

http://ocw-test.media.kyoto-u.ac.jp/jp/common/course12/index.html

: 今回の講義の下敷に使った部分も多い。大学文系向き。

[3] 小山慶太、異貌の科学者 (丸善, 1991): 652 円と安いがなかなか面白いちょっと変わった科学者の評伝。

[4] 内山龍雄、相対性理論 (岩波、物理テキストシリーズ) ：大学のテキストであるが「本書を読んで相対論が分からなかったら最早相対論を学ぶことは諦めるべきである」というおそるべき序文に著者の自信が窺える名著。

[5] E. アインシュタイン 著、内山龍雄訳、相対性理論 (岩波文庫)：特殊相対論の原著論文の翻訳に内山氏が解説をつけた。読みやすい上に本質的なことは全て述べられている。

[6] 松田卓也、木下篤哉 著、相対論の正しい間違え方 (丸善パリティブックス)：相対論に関する典型的な誤解や間違えを集めてあり、それを通して正しい理解につながる好著。(大学向き)

[7] 江里口　良治・藤井　保憲 著いまこそ相対性理論 (丸善パリティブックス)：一般相対論まで含めた相対論の考え方をやさしく？解説している。(大学向き)

[8] 山本義隆著、新・物理入門 (駿台文庫)：初等力学の高校生向けの良書を思い浮かばなかったので高校の参考書の中で一番読みやすい本を挙げておいた。力のある人は同じ著者の「重力と力学的世界ー古典としての古典力学」がお勧め。

[9] J. グリック著、カオスー新しい科学をつくる (新潮文庫): お話として最近の古典力学の発展の物語を知るのは悪くない。

[10] 田口善弘著、砂時計の七不思議 (中公新書)：粉体について易しく解説した好著。高校生向け。

[11] 早川尚男著、散逸粒子系の力学 (岩波)：粉体についての比較的最近の本。大学学部向けか大学院向け。

[12] 米沢富美子著、ブラウン運動 (共立、物理 One-Point): 非平衡の歴史とブラウン運動について平易に解説している名著。大学新入生レベル向きだが高校生にも読めるだろう。

[13] 田崎秀一著、カオスから見た時間の矢 (講談社ブルーバックス): 高校生にはやや難しいかもしれないが平易に非平衡統計力学の面白さを解説している。