# Topological Field Theory の構成と量子化

池田憲明
立命館大学理工学部

## §1. Introduction

**Purpose 1.** **物理**　自然界の力の統一

自然界の4つの力
重力 Einstein、電磁気 Maxwell、弱い相互作用 Fermi、強い相互作用 Yukawa、
は全て Quantum Field Theories (場の量子論)で記述される。

$\longrightarrow$ String Theory, M Theory として統一される(?)かもしれない。
が、現在は完成には遠い。

Quantum Field Theory (場の量子論)には、

運動、相互作用の記述（動的）＋保存則やポテンシャルの記述（静的）

がある。

保存則やポテンシャルを記述する部分（静的）だけの理論なら計算が簡単だろう。力の統一へのヒントが得られるかもしれない。

それが Topoloigcal Field Theory (位相的場の理論)

「保存則」「ポテンシャル」の部分だけはわかる。
保存則 $\simeq$ 代数構造、指数定理、不変量 etc.
ポテンシャル $\simeq$ 幾何構造 etc.

## Purpose 2. **数学**　場の(量子)論の数学的応用

- Topoloigcal Field Theory 以前

Dirac 作用素の指数定理　Atiyah, Singer '63

Donaldson 理論 (４次元 Yang-Mills 理論)　Donaldson '82

etc.

しかし場の量子論は、
運動、相互作用の記述（物理的）＋保存則、ポテンシャルの記述（数学的）
の２つが混じっているので解析が難しい。保存則、ポテンシャルの記述（数学的）だけの理論にしてしまえばもっと簡単に数学に応用できる（だろう）。それが、Topoloigcal Field Theory　Witten '88

**Purpose 3.** 全ての物理的、数学的対象を「量子化」せよ。

量子化とは？

変形、非可換、モジュライ etc.（？）

数学的対象を Topoloigcal Field Theory で記述すると、それは場の理論なので「量子化」できる。したがって、

- 全ての数学的、物理的対象を Topoloigcal Field Theory で記述せよ。

という問題設定となる。

この話 $\frac{\infty}{\infty}$ の量が多く出るが、解釈は適当におこなう。実際はこの解釈が問題となる。

Plan of Talk

- Topological Field Theory の考え方と基本的構成法
- BRST-BV量子化の AKSZ 形式
- 新しい Topological Field Theory を作る

(• Poisson sigma model on a disc の量子化)

- まとめ

## §2. Action Principle

物理の理論は位置 $x$、運動量 $p$ などの変数（時間の関数$x, p \in C^k(\boldsymbol{R})$）の微分方程式（運動方程式）で記述される。

場の理論とは力学変数を$\phi \in \mathrm{Map}(X, M)$ にした理論である。

通常は $X$ が時空 $\boldsymbol{R}^4$ であるが、$M$ が時空と思う理論もある。$M$ が時空と思った理論を sigma model という。

• 微分方程式だけでは量子化のしかたがわからない。そこで、作用 (Action) によって量子化の仕方を指定する。

- 今、$X=\boldsymbol{R}^n$, $M=\boldsymbol{R}^d$ とする。

$\sigma^\mu$: $X$ の直交座標($\mu=1,\cdots,n=\dim X$),
$\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)$: $\phi,\partial_\mu\phi$の関数、ここで、$\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial\sigma^\mu}$

Action (作用)

$$S=\int_X d^n\sigma\ \mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)$$

$S$ を変分して停留点を求めることによって運動方程式であるEuler-Langange 方程式

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)=0$$

が出る。

$(\phi,\pi)\in \boldsymbol{R}^{2d}=T^*\boldsymbol{R}^d$ を位相空間といい、その上に Poisson 括弧を定義する。

$$
\begin{aligned}
&\{F(\phi(\sigma),\pi(\sigma)),G(\phi(\sigma'),\pi(\sigma'))\}\\
&\equiv \sum_{i=1}^{d}\left(\frac{\partial F}{\partial\phi^i(\sigma)}\frac{\partial G}{\partial\pi_i(\sigma')}-\frac{\partial F}{\partial\pi_i(\sigma)}\frac{\partial G}{\partial\phi^i(\sigma')}\right)\delta^2(\sigma-\sigma')
\end{aligned}
$$

$(i=1,\cdots,d)$

正準共役運動量 (canonical conjugate momentum) $\pi$ を

$$\pi_i(\sigma) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_n \phi^i(\sigma))}$$

と定義する。

- 量子化（正準量子化）とは、

$$\{\phi^i(\sigma), \pi_j(\sigma')\} = \delta^i{}_j \delta^2(\sigma - \sigma'),$$

を、$\boldsymbol{R}$ 上の Hilbert 空間上の作用素 $\phi$, $\pi$ の交換関係

$$[\phi^i(\sigma), \pi_j(\sigma')] = i\hbar \delta^i{}_j \delta^2(\sigma - \sigma'),$$

に対応させせることである。

$\pi^i$ の導出法を固定したので、Action によって量子化が指定される。

例: $X = \boldsymbol{R}^n$, $M = \boldsymbol{R}^d$,
$\phi_1 \in \mathrm{Map}(X, M)$, $\phi_2 \in \mathrm{Map}(X, M)$, $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, \cdots, 1, -1)$ を
$X$ 上の Minkovski metric とする。

$$S^{(1)} = \int_{\boldsymbol{R}^n} \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi_1\partial_\nu\phi_1 + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi_2\partial_\nu\phi_2,$$
$$S^{(2)} = \int_{\boldsymbol{R}^n} \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi_1\partial_\nu\phi_2,$$

Euler-Lagrange 方程式は同じ波動方程式、

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi_1 = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi_2 = 0,$$

だが、量子化は違う。$S_1$ では、

$$\pi_1 = \partial_n\phi_1, \quad \pi_2 = \partial_n\phi_2,$$

$S_2$ では、

$$\pi_1 = \partial_n\phi_2, \quad \pi_2 = \partial_n\phi_1,$$

- 「同値」な量子化として経路積分量子化がある。

$$Z = \int_{\mathrm{Map}(X,M)} \mathcal{D}\phi \; e^{\frac{i}{\hbar}S},$$

$\mathcal{D}\phi$: $\mathrm{Map}(X, M)$ 上の測度

物理屋のドグマ：Action　が決まると量子化のしかたが決まる。
Action は考えている物理のすべてが含まれている。よって Action を決めよ。

# §3. Gauge Symmetry と自由度

運動、相互作用の記述（動的、物理的）と保存則の記述（静的、数学的）な部分をどのように切り分けるか。を考える。

例：$X = \boldsymbol{R}^2$ or Riemann 面, $M = u(1) = Lie(U(1))$
$\phi \in \mathrm{Map}(X \longrightarrow u(1))$, $B \in \Gamma(\Lambda^1 X \otimes \phi^*(T^* u(1))$
$d$: $X$ 上の外微分
$<,>$: $TM$ と $T^*M$ の元の natural pairing

Action として、（Abelian BF 理論）

$$S_0 = \int_X < B, d\phi >= \int_X < dB, \phi >= \int_X d^2\sigma \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu B_\nu \phi$$

$B = B_1 d\sigma^1 + B_2 d\sigma^2$ とすると、
正準共役運動量は

$$\pi^1 = \frac{\partial S}{\partial(\partial_2 B_1)} = \frac{1}{2}\phi, \qquad \pi^2 = \frac{\partial S}{\partial(\partial_2 B_2)} = 0,$$

これは Poisson 括弧

$$\{B_\mu, \pi^\nu\} = \delta^\nu{}_\mu \delta^2(\sigma - \sigma'),$$

と矛盾する。さらに

$$\{\pi^2, H\} = \left\{\pi^2, \int d^2\sigma \ (\pi^\mu \partial_2 B_\mu - \mathcal{L})\right\} = \partial_\mu \pi^\mu = \frac{1}{2}\partial_1 \phi = 0,$$

でないと矛盾する。

$$G_1 = \pi^2 = 0, \qquad G_2 = \frac{1}{2}\partial_1\phi = 0,$$

これらを拘束条件という。

注）今の場合、$\{G_2, H\} = 0$ で $\{G_1, G_1\} = \{G_1, G_2\} = \{G_2, G_2\} = 0$ なので、これ以上新しい拘束条件は出ない。代数が閉じる。

- これは $S_0$ が gauge 変換

$$B \longrightarrow B + g^{-1}dg,$$

で不変であることに起因する。(gauge symmetry があるという。)
ここで $g : X \longrightarrow U(1)$
つまり gauge symmetry の automorphism があり、位相空間 $(B, \pi)$ 上の Poisson 構造は degenerate している。

量子化できない！

- 解決法 1

商空間 $\{B,\pi\}/\{G_1=\pi^2=0, G_2=\frac{1}{2}\partial_1\phi=0\}$ 上でうまく Poisson 括弧を定義しなおして量子化する。これを Dirac 量子化という。

- 解決法 2

Lagrange multiplier を入れて、Poisson 括弧の degeneracy を解く。拡大した位相空間 $\{B,\pi,c,\bar{c},b\}$ で量子化してから、$\{G_1=0, G_2=0,\cdots\}$ で商空間を取る。これを BRST-BV 量子化という。

Becchi, Rouet, Stora ’75, Tyutin ’75, Batalin, Vilkovisky ’81

• 量子化したあとに残る物理的な（実質的な）自由度を数える。(up to $X$ で空間の次元)

拘束条件は Poisson 括弧で gauge symmetry の生成子となる (Noether の定理)。拘束条件の Hamilton vector field は $S_0$ を不変にする。今の例の場合だと、

$$\left\{ \int_X d^2\sigma' \left( -\partial_2 c(\sigma') G_1(\sigma') + c(\sigma') G_2(\sigma') \right), B(\sigma) \right\} = dc(\sigma)$$

ここで、$c : X \longrightarrow u(1)$, $g = \exp(ic)$.

よって、新たな拘束条件 $G'$ があると、それは拘束条件 $G'' = \{G', H\}$ と新たな gauge symmetry を生じる。

このようにしてすべての拘束条件と gauge symmetry を持ってくる。拘束条件の交換関係 $\{G_i, G_j\}$ はまた拘束条件となるので、拘束条件が無矛盾ならば、
拘束条件の代数がPoisson括弧を積として閉じる（gauge algebra が閉じる）。

量子化の際に canonical conjugate な条件も課さないと Poisson 括弧と矛盾する。量子化は、たとえば

$$\partial_1 B_1 = 0, \qquad B_2 = 0,$$

という条件（ゲージ固定条件）を課して商空間上で量子化する。

一般に、量子化のあとにある実質的自由度（動的自由度）は

$$\begin{aligned}\dim(\text{動的自由度}) &= \dim(\text{位相空間}) - \dim(\text{拘束条件}) \\ &\quad - \dim(\text{拘束条件に共役なゲージ固定条件})\end{aligned}$$

$\dim(\text{動的自由度}) = 0$ なら、運動、相互作用の記述（動的、物理的）な部分は次元0なので、静的、数学的な量だけであろう。

$\dim(\text{動的自由度}) = 0$ の理論を Topological Field Theory と定義する。

今の場合、配位空間 $(B_1, B_2)$ の gauge symmetry 1つと位相空間 $(B_1, B_2, \pi^1, \pi^2)$ の拘束条件 2つが1対1に対応する。さらに、ゲー

ジ固定条件 2つを課しているので、今の場合 gauge symmetry の自由度 1 に対して、位相空間で4つの条件が課される。

量子化のあとにある実質的自由度（動的自由度）は、

$$\dim(\text{動的自由度}) = \dim(\text{位相空間}) - 4\dim(\text{gauge symmetry})$$

これを九後-小嶋 mechanism という。 Kugo, Ojima '78

今の例の場合、

$$\dim(\text{動的自由度}) = \dim\{B_\mu, \pi^\mu\} - 2\dim\{G_1 = 0, G_2 = 0\},$$
$$= 4 - 4 = 0,$$

# §4. BRST-BV量子化の AKSZ 形式

一般に量子化の手続きで商空間を取る手続きを具体的におこなうことは一般には難しい。

数学によい道具がある。それはコホモロジー。

BRST-BV 量子化では$\delta^2 = 0$ となる coboundary 作用素 $\delta$ と complex を作って、$H^*(\delta) = \mathrm{Ker}(\delta)/\mathrm{Im}(\delta)$ という形で商空間を取る。

Topological Field Theory の BRST-BV 量子化の(数学的)構成法を AKSZ 形式 という。 Alexandrov, Kontsevich, Schwartz, Zaborонsky '97

３つの構成要素

- Supermanifold (Superfield $\Phi$)
- P-structure (Antibracket $(*, *)$)
- Q-structure (BV action $S$)

• Supermanifold (Superfield)

∘ $TX$: a tangent bundle

**Def** $\Pi TX = T[1]X$: A *supermanifold* is a tangent bundle with reversed parity of the fiber. fiber を外積代数にしたベクトルバンドル。

· local coordinates

$\{\sigma^\mu\}$ on $X$, where $\mu = 1, 2, \cdots, n$

$\{\theta^\mu\}$ on $T_\sigma X$, fermionic supercoordinate

Def: **form degree** $\deg \sigma = 0$ and $\deg \theta = 1$

We extend a smooth map $\phi : X \longrightarrow M$ to a map $\boldsymbol{\phi} : \Pi TX \longrightarrow M$.

A function on $\Pi TX$ is called a *superfield*.

$$\boldsymbol{\phi} = \phi^{(0)} + \theta^{\mu_1}\phi^{(-1)}_{\mu_1} + \frac{1}{2!}\theta^{\mu_1}\theta^{\mu_2}\phi^{(-2)}_{\mu_1\mu_2} + \cdots + \frac{1}{n!}\theta^{\mu_1}\cdots\theta^{\mu_n}\phi^{(-n)}_{\mu_1\cdots\mu_n}.$$

$\circ$ $T^*M$: a cotangent bundle

**Def** $T^*[1]M$: A *graded cotangent bundle* is a cotangent bundle with the degree of the fiber $1$.

$\cdot$ $(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{B})$

$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{A}_0 \in Map(\Pi TX, M)$.

$\boldsymbol{B} \in \Gamma(\Pi TX \otimes \boldsymbol{\phi}^*(T^*[1]M))$:

Def: **total degree**: $|\boldsymbol{\phi}| = 0$ and $|B| = 1$

Def: **ghost number**: $\mathrm{gh}F = |F| - \mathrm{deg}F$, where $F$ is a superfield.

- P-structure

$\mathcal{A} = \mathrm{Map}(\Pi TX \longrightarrow T^*[1]M)$ とする。
Def: $Hom(\sum_k \mathcal{A}^{\otimes k}, \mathcal{A})$ 上の線形変換

$$\Delta = \left\langle \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{B}} \right\rangle$$

は $\Delta^2 = 0$である。これを odd Laplace operator という。

このとき、$F, G \in Hom(\sum_k \mathcal{A}^{\otimes k}, \mathcal{A})$ に対して

$$(F, G) \equiv \Delta(FG) - \Delta(F)G - (-1)^{(|F|)} F\Delta(G)$$

$$(F,G) \equiv \left\langle F\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \boldsymbol{\phi}}, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \boldsymbol{B}} G \right\rangle - \left\langle F\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \boldsymbol{B}}, \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \boldsymbol{\phi}} G \right\rangle .$$

を BV bracket (antibracket) という。その性質は

$$(F,G) = -(-1)^{(|F|-1)(|G|-1)}(G,F),$$
$$(F,GH) = (F,G)H + (-1)^{(|F|-1)|G|}G(F,H),$$
$$(FG,H) = F(G,H) + (-1)^{|G|(|H|-1)}(F,H)G,$$
$$(-1)^{(|F|-1)(|H|-1)}(F,(G,H)) + \text{cyclic permutations} = 0,$$

つまり、 Gerstenhaber bracket

- Q-structure

$S$: a function on $\mathcal{A}$ が

$$\Delta(e^{\frac{i}{\hbar}S}) = 0$$

を満たすとき a *quantum BV action* という。

注）量子化とは partition function (分配関数) $Z = \int_L \mathcal{D}\Phi \; e^{\frac{i}{\hbar}S}$

を求めることである。上記は Stokes の定理。ここで $L$ は $\mathcal{A}$ の ”Lagrangian submanifold ”

上記は

$$(S, S) - 2i\hbar\Delta S = 0$$

と同値である。これを quantum master equation という。

これは $\hbar \longrightarrow 0$ の極限で、

$$(S, S) = 0$$

となる。これを classical master equation という。

BV action $S$ に対して、cohomology の代表元 $\mathcal{O}$ は $\int_L \Delta(\mathcal{O}e^{\frac{i}{\hbar}S}) = 0$ を満たす。$\mathcal{O}$ を observable という。この式は

$$(S, \mathcal{O}) - i\hbar\Delta\mathcal{O} = 0.$$

$\hbar \longrightarrow 0$ の極限で、

$$(S, \mathcal{O}) = 0$$

Abelian BF 理論では

$$S_0 = \int_{\Pi TX} \langle \boldsymbol{B}, d\boldsymbol{\phi} \rangle$$

ととればよい。

通常 $\mathrm{gh} S = 0$ を仮定する。$Hom(\sum_k \mathcal{A}^{\otimes k}, \mathcal{A})$ は ghost number で complex に分解される。 cf. Hochschild complex

# §5. 新しい Topological Field Theory の構成

ある数学的構造が与えられたとき、新しい Topoloigcal Field Theory をいろいろ構成し、量子化しよう。(そして物理、数学の問題を解決しよう。)

1, gauge symmetry $\delta S = 0$ があり、
2, 拘束から作られる gauge algebra が閉じ、
3, $\dim$ (動的自由度) $= 0$ の Action $S$ を見つければよい。

注）さらに量子化したとき、

4, Unitarity

$H^*(\delta) = \mathrm{Ker}(\delta)/\mathrm{Im}(\delta)$ に正定値計量が入る。

(5, Anomaly なし

1,2,3, の条件は量子化後も保たれる。)

でなければならない。

AKSZ 形式で作るとどんどん作れる。

○作り方

1, 既に知っている Topological Field Theory を $S_0$ として変形理論で新しいものを作る。 Izawa, '00, N.I. '01, 02

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + \cdots,$$

たとえば Abelian BF 理論から変形理論で新しい理論が作れる。

2, $\delta^2 = 0$ となる coboundary 作用素 $\delta$ が適当な supermanifold 上の P-structure (Gersternhaber bracket or Loday bracket) を使って、$\delta(*) = (\Theta, *)$ と実現できれば、$\Theta$ を使って構成できる。

Cattaneo, Felder '01

例: the Poisson sigma model

N. I. and Izawa '93, Schaller and Strobl '94

$M$: Poisson 多様体
local coordinate $\phi^i$ とり、$M$ 上

$$\hat{P}(F,G) = P^{ij}(\phi)\frac{\partial F}{\partial \phi^i}\frac{\partial G}{\partial \phi^j},$$

とする。$\hat{P}$ は Jacobi identity を満たすとき Poisson 括弧となる。
$TM$ 上の外積代数 $\Lambda^*(TM)$ 上

$$P = P^{ij}(\phi)\frac{\partial}{\partial \phi^i} \wedge \frac{\partial}{\partial \phi^j} \in \Lambda^2(TM),$$

として、Poisson 括弧を $P(dF, dG)$ と定義すると、Jacobi identity は、

$$[P, P] = 0,$$

と同値である。ここで $[\cdot, \cdot]$ は Schouten-Nijenhuis 括弧。この式より、$\delta(*) = [P, *]$ は $\delta^2 = 0$ の coboundary 作用素を定義するので、Schouten-Nijenhuis 括弧から induce された P-structure の BV bracket としたTopological Field Theory が次のように定義できる。

supermanifold を $\mathrm{Map}(\Pi TX, T^*[1]M)$ として、Action を、

$$S = S_0 + S_1 = \int_{\Pi TX} \langle \boldsymbol{B}, d\boldsymbol{\phi} \rangle + \frac{1}{2} P(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}),$$

とすると、

$$(S, S) = 0 \Longleftrightarrow [P, P] = 0,$$

$P$ が Poisson 構造のとき、そのときのみ consistent な場の量子論を定義することが証明できる。この理論を Poisson sigma model という。

# §6. 量子化

現在の段階では量子化した分配関数 $Z = \int_L \mathcal{D}\Phi \ e^{\frac{i}{\hbar}S}$ を exact に求めるのは(特殊な理論を除いて)非常に難しい。

そこで、$\mathcal{O}_s$ を observable として、$\hbar$ による形式的展開

$$Z(\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_r) = \int_L \mathcal{D}\Phi \ \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_r e^{\frac{i}{\hbar}S} = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k Z_k(\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_r)$$

の各項だけを求める。という考え方をする。

例1: Gromov-Witten 理論

Poisson sigma model で、$X$: Riemann 面、$M$: Kähler 多様体とする。このとき $P$ は nondegenerate に、つまり、$P^{-1} = \omega$ を Kähler 形式ととれる。このときを（originalな） A model という。

古典論 $\hbar^0$ は $Z_0(\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_r)$ は de Rham cohomology となる。

量子論での $\hbar^k \geq 1$ の $Z_k(\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_r)$ を Gromov-Witten invariant という。

特に $X = S^1$ の時はこれは elliptic genus となる。

Witten '88

例2: Poisson sigma model で、$X$: Riemann 面、$M$: Poisson 多様体とする。$P$が必ずしも nondegenarate でないときは、これも "A model" という。

古典論 $\hbar^0$ は$Z(\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_r)$ は Lichnerowicz-Poisson cohomology となる。

$$\delta F = [P, F]$$

量子論 $\hbar^k \geq 1$ の $Z(\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_r)$ は unkown

例3: Poisson sigma model で、$X$ =disc、$M$: Poisson 多様体とする。

このとき、

$$Z(\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_r) = \int_L \mathcal{D}\Phi \ \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_r e^{\frac{i}{\hbar}S} = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k Z_k(\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_r)$$

は Poisson 多様体の変形量子化と一致する。

Kontsevich '97, Cattaneo, Felder '99

他の基本的な例: B model
$X$: Rimann 面、$M$: 複素多様体として古典論 $\hbar^0$ が $Z_0(\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_r)$ は Darboux cohomology となる topological field theory が作れる。
それを B-model という。これは Kodaira-Spencer 理論と一致する。
量子論 $\hbar^k \geq 1$ の $Z_k(\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_r)$ はゼロ。 Witten '91

- Supermanifold $\mathrm{Map}\,(\Pi TX, T^*[1]T[1]M)$

$J : TM \longrightarrow TM$, complex structure
$\boldsymbol{\phi} \in \mathrm{Map}(\Pi T\Sigma, M)$, $\boldsymbol{A}_1 \in \Gamma(\Pi T^*\Sigma \otimes \boldsymbol{\phi}^*(T[1]M))$
$\boldsymbol{B}_1 \in \Gamma(\Pi T^*\Sigma \otimes \boldsymbol{\phi}^*(T^*[1]M))$, $\boldsymbol{B}_0 \in \Gamma(\Pi T\Sigma \otimes \boldsymbol{\phi}^*(T^*[0]M))$

- P-structure

$$\Delta = \left\langle \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{B}_1} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{A}_1}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{B}_0} \right\rangle$$

- Q-structure (BV action $S$)

$$S_B = \int_{\Pi T \Sigma} \boldsymbol{B}_{1i} d\boldsymbol{\phi}^i - \boldsymbol{B}_{0i} d\boldsymbol{A}_1^i + J^i{}_j(\boldsymbol{\phi}) \boldsymbol{B}_{1i} \boldsymbol{A}_1^j + \frac{\partial J^i{}_k}{\partial \boldsymbol{\phi}^j}(\boldsymbol{\phi}) \boldsymbol{B}_{0i} \boldsymbol{A}_1^j \boldsymbol{A}_1^k,$$

Alexandrov, Kontsevich, Schwartz, Zaboronsky '97 N.I., Tokunaga '07

# §7. Poisson sigma model on disc

Def: 変形量子化(deformation quantization)

Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz, Sternheimer '78

$(M, P)$ を Poisson 多様体とする。$C^\infty(M)$ 上の形式的冪級数の集合を$C^\infty(M)[[\hbar]]$ とする。
$C^\infty(M)[[\hbar]]$ と次の条件を満たす積 $*$ の組を変形量子化という。

i) $F, G \in C^\infty(M)[[\hbar]]$ に対して$F * G = \sum_k \hbar^k B_k(F, G)$ は双線形で、$B_k$ は bidifferential operator で、
$B_0(F, G) = FG$, $B_1(F, G) = \{F, G\}$。

ii) $F, G, H \in C^\infty(M)[[\hbar]]$ に対して結合律

$$(F * G) * H = F * (G * H)$$

をみたす。

iii) 線形変換 $F' = \sum_k \hbar^k D_k(F)$ で、一致するものは同値。ここで $D_k$ は微分作用素

注）symplectic 多様体の変形量子化の存在は知られていた。

Omori, Maeda, Yoshioka '91

しかし Poisson 多様体の場合は存在が知られていなかった。

Poisson sigma model の量子化によって Poisson 多様体の変形量子

化は存在することが証明された。 Kontsevich '97

○構成法 Kontsevich '97, Cattaneo, Felder '99

the Poisson sigma model

$$S = S_0 + S_1 = \int_{\Pi TX} \langle \boldsymbol{B}, d\boldsymbol{\phi} \rangle + \frac{1}{2} P(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}),$$

で、path integeral

$$Z(F(x), G(x)) = \int_{\boldsymbol{\phi}(\infty)=x} \mathcal{D}\boldsymbol{\phi}\mathcal{D}\boldsymbol{B}\ F(\boldsymbol{\phi}(0))G(\boldsymbol{\phi}(1))e^{\frac{i}{\hbar}S}$$

を計算する。

1. まず$S_0$ を見る。disc 上の Green 関数$d_z Z(\boldsymbol{\phi}(z), \boldsymbol{B}(w) = \delta(z - w))$ と gauge invariant なboundary condition から、propagator

$$Z(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{B}) = \frac{i\hbar}{2\pi}(d_z + d_w)G(z, w)$$

が決まる。ここで、$G(z, w) = \frac{1}{2i} \ln \frac{(z-w)(z-\bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})(\bar{z}-w)}$

2. 次に $S_1$ を見る。ここから、propagator の組み合わせ方をグラフ的に読み取る (Feynman diagram)。$k$ 次のグラフに対応する$k$ 次の微分作用素 $B_{\Gamma k}(F, G)$ に対して、weight

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{(i\hbar)^k}{(2\pi)^{2k}}\right)\int \wedge_{j=1}^{k} dG(u_i, u_{v_1(j)}) \wedge dG(u_j, u_{v_2(j)})$$

ここで $(u_i, u_{v_1(j)})$, $(u_i, u_{v_2(j)})$ はそれぞれの propagater の端点。$(j = 1, \cdots, k)$

cf. Operad

3. tadpole の繰り込み
tadpole といわれるグラフからくる 2. の計算をすべて 0 におく。

注）この理論は繰り込み可能

4. $Z(\mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_r)$ で $r \geq 3$ のときは moduli の積分がある。適当な moduli space のコンパクト化が必要。

# §8. その他やったこと

Topological Field Theory の例

例: Nonalbelian BF 理論

$X = \boldsymbol{R}^2$ or Riemann 面, $X$ 上の Lie 群 $G$ を fiber とする fiber bundle を考える。$g = \mathrm{Lie}\ G$

$\phi$: $X$ 上の $g$ の adjoint 表現、$B$: $M$ 上の connection

$d$: $X$ 上の外微分, $<, >$: $g$ の killing form, $F = dA + [A, A]$

Action

$$S = \int_X < B, d\phi > + < \phi, [B, B] >= \int_X < \phi, F >$$

例: Chern-Simon 理論
$X$: $3$次元, $X$ 上の Lie 群 $G$ を fiber とする fiber bundle を考える。$A$: connection $d$: $X$ 上の外微分
$<,>$: $g$ の killing form

Action

$$S = \int_X < A, dA > + \frac{1}{3} < A, [A, A] >,$$

いろいろな topoligcal field theory を作る。

例: これまでは $\dim X = 2$ だったが、$\dim X \geq 3$ にすると、より一般の数学的構造が実現できる。

注）$\dim X = 2$ のとき string theory, $\dim X \geq 3$ のとき membrane theory

A model 的拡張:
$\dim X = 2$ Lie algebroid, (symplectic, Poisson)
$\dim X = 3$ Courant algebroid
$\dim X = n$ (?)

B model 的拡張:
$\dim X = 2$ complex structure
$\dim X = 3$ generalized complex structure
$\dim X = n$ (?)

Def: Lie algebroid
A Lie algebroid over a manifold $\mathcal{M}$ is a vector bundle $\mathcal{E} \to \mathcal{M}$ with a Lie algebra structure on the space of the sections $\Gamma(\mathcal{E})$ defined by

the bracket $[e_1, e_2]$, $\quad e_1, e_2 \in \Gamma(\mathcal{E})$ and a bundle map (the anchor) $\rho : \mathcal{E} \to T\mathcal{M}$ satisfying the following properties:

$$
\begin{aligned}
&1, \quad \text{For any} \quad \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2 \in \Gamma(\mathcal{E}), \quad [\rho(\mathrm{e}_1), \rho(\mathrm{e}_2)] = \rho([\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2]), \\
&2, \quad \text{For any} \quad \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2 \in \Gamma(\mathcal{E}),\ \mathrm{F} \in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{M}), \\
&\qquad [e_1, Fe_2] = F[e_1, e_2] + (\rho(e_1)F)e_2,
\end{aligned}
$$

• Poisson sigma model は $\mathcal{E} = T^*M$ 上の Lie algebroid の構造を持つ。

Def: Courant algebroid Courant '90, Liu, Weinstein, Xu '96

A Courant algebroid is a vector bundle $\mathcal{E} \to \mathcal{M}$ and has a nondegenerate symmetric bilinear form $\langle \cdot\,,\cdot\rangle$ on the bundle, a bilinear operation $\circ$ on $\Gamma(\mathcal{E})$(the space of sections on $\mathcal{E}$), an a bundle map $\rho : \mathcal{E} \to T\mathcal{M}$ satisfying the following properties:

$$
\begin{aligned}
&1, \quad e_1 \circ (e_2 \circ e_3) = (e_1 \circ e_2) \circ e_3 + e_2 \circ (e_1 \circ e_3),\\
&2, \quad \rho(e_1 \circ e_2) = [\rho(e_1), \rho(e_2)],\\
&3, \quad e_1 \circ F e_2 = F(e_1 \circ e_2) + (\rho(e_1)F)e_2,\\
&4, \quad e_1 \circ e_2 = \frac{1}{2}\mathcal{D}\langle e_1\,, e_2\rangle,
\end{aligned}
$$

$$5, \quad \rho(e_1)\langle e_2\,, e_3\rangle = \langle e_1 \circ e_2\,, e_3\rangle + \langle e_2\,, e_1 \circ e_3\rangle,$$

where $e_1, e_2$ and $e_3$ are sections of $\mathcal{E}$, $F$ is a function on $\mathcal{M}$. $\mathcal{D}$ is a map from functions on $\mathcal{M}$ to $\Gamma(\mathcal{E})$ and is defined as $\langle \mathcal{D}F\,, e\rangle = \rho(e)F$.

注）gerbe

$\dim X = 3$の時の構成法

• Supermanifold

$E$: a vector bundle on $M$ とする。$E$ の fiber metric を$\langle \cdot, \cdot \rangle$ とする。

$T^*[2]E[1]$ を考える。

ここで、
$T^*[p]M$: A *graded cotangent bundle* is a cotangent bundle with the sum of the degree of the base and the fiber $p$.
$E[p]$: a vector bundle with the degree of the fiber $p$

さらに、$\mathrm{Map}(\Pi TX \longrightarrow T^*[2]E[1])$ を考える。

つまり、$T^*[2]E[1]$ の local coordinate で書くと、

$\{\boldsymbol{\phi}^i = \boldsymbol{A_0}^i\}$: a map from $\Pi TX$ to $M$, where $i = 1, 2, \cdots, d$.
$\{\boldsymbol{B}_{2,i}\}$: a superfield on $\Pi TX$, which take a value on $\boldsymbol{\phi}^*(T^*[2]M)$
$\boldsymbol{A_1}^a$: a total degree $1$ superfield on $\Pi TX$, which take a value on $\boldsymbol{\phi}^*(E[1])$
fiber metric $k_{ab}$

- P-structure odd Laplace operator

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial \phi^i} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{B}_{2,i}} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{A_1}^a} k^{ab} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{A_1}^b}$$

• Q-structure

The Courant sigma model

$$S = S_0 + S_1,$$
$$S_0 = \int_{\Pi TX} \left[ -\boldsymbol{B}_{2,i} d\boldsymbol{\phi}^i + \frac{k_{ab}}{2} \boldsymbol{A}_1{}^a d\boldsymbol{A}_1{}^b \right],$$
$$S_1 = \int_{\Pi TX} \left[ f_{1a}{}^i(\boldsymbol{\phi}) \boldsymbol{A}_1{}^a \boldsymbol{B}_{2,i} + \frac{1}{6} f_{2abc}(\boldsymbol{\phi}) \boldsymbol{A}_1{}^a \boldsymbol{A}_1{}^b \boldsymbol{A}_1{}^c \right],$$

$(S, S) = 0 \iff$ two $f$'s are structure functions of a Courant algebroid.

N.I. '02, Hofman, Park '02, Roytenberg '06

## §9. Summary and Outlook

• Topological Field Theory の主な結果

1: Gromov-Witten 理論(A model)

Kähler 多様体上の新しい invariant (Gromov-Witten invariant)の構成 Witten ’88

2: Mirror 対称性

A model $\leftrightarrow$ B model Witten ’91

3: superstring の superpotentialの厳密解 Bershadsky, Cecotti, Ooguri, Vafa ’94

4: Poisson 多様体の変形量子化の存在 Kontsevich ’97, Cattaneo, Felder ’99

5: 結び目不変量 3D Chern-Simon theory

6: Donaldson invariant 4D topological Yang-Mills theory Witten '88

7: A model 的拡張:

$\dim X = 2$ Lie algebroid, (symplectic, Poisson) groupoid

$\dim X = 3$ Courant algebroid, gerbe

$\dim X = n$ (?)

B model 的拡張:

$\dim X = 2$ complex structure

$\dim X = 3$ generalized complex structure

$\dim X = n$ (?)

N.I., '02, Hofman, Park '02, Kotov, Schaller, Strobl '04, Zucchini '04, Roytenberg '06, N.I., Tokunaga '07

• これからの問題

ある「数学的構造」から topological field theory を作ると、少なくとも物理としては量子化できる。するとその「数学的構造」が「量子化」される。

だが、有限の意味のある量を出してきたり、それが何か？の特徴づけは少数の場合を除いてわかっていない。

string 理論がすべての物理を統一し、記述できる（？）という構想を掲げるならば、topological field theory がすべての数学を統一し、記述できるという構想も同程度の理想として掲げられるかもしれない。