変形量子化からの非可換球面と非可換双曲空間

岸本 功
（京大基研）

JHEP0103(2001)025 hep-th/0103018

§ Introduction and Motivation

ここ数年、非可換幾何学と弦理論の関係が盛んに議論されてきた：

D-brane on *flat* and *constant B-field* background || Noncommutative gauge theory (*Moyal product*)

Seiberg-Witten (1999) and its references and citations,...

Moyal product ：

$$f(x) * g(x) = f(x) \exp\left(\frac{i}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^i}\theta^{ij}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^j}\right) g(x),$$

で特に非可換パラメータは定数で

$$\theta^{ij} = -(2\pi\alpha')^2\left(\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}B\frac{1}{g-2\pi\alpha' B}\right)^{ij}.$$

より一般に g_{ij}, B_{ij} が定数でない場合はどのような対応があるのだろうか？

ここでは非可換側の観点から Moyal product ではない非自明な積を考える。Moyal product の自然な一般化として変形量子化の手法があり、原理的には任意の Poisson 多様体上に結合的で非可換な積を定義できる。

Kontsevich, Fedosov, Omori-Maeda-Yoshioka, De Wilde-Lecomte,...

具体的な計算に使いたい。あらわな表式をもとめよう☆

§ Fedosov's $*$ Product

Fedosovの $*$ 積の構成法：
(M, Ω_0) : symplectic多様体に対し

1. Weyl algebra bundle $(W, \circ)$ on (M, Ω_0)
   $\leftarrow$ input: ∇, θ （非可換パラメータ $\hbar$ ）

Its section is given by

$$a(x, y, \hbar) = \sum_{2k+p\geq 0, k\geq 0} \hbar^k \sum_{q=0}^{2n} \frac{1}{p!q!} a_{k,i_1\cdots i_p,j_1\cdots j_q}(x) y^{i_1}\cdots y^{i_p}\theta^{j_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{j_q}.$$

The $\circ$ product is Moyal type with respect to y^i:

$$\circ = \exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y^i}\omega^{ij}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y^j}\right) \text{ where } \Omega_0 = -\frac{1}{2}\omega_{ij}\theta^i\wedge\theta^j, \omega_{ik}\omega^{kj} = \delta_i^j.$$

2. Abelian connection D on W
   $\leftarrow$ input: μ, Ω_1

General connection D on W is :

$$Da = \nabla a - \delta a + \frac{i}{\hbar}(\mathrm{r}\circ a - (-1)^{|a|}a\circ \mathrm{r}) \text{ where } \delta = \theta^i\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

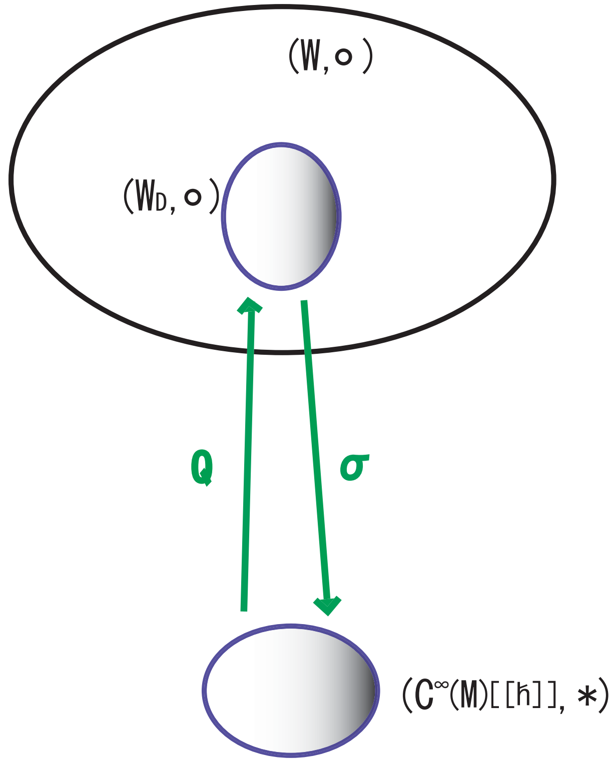
D is called Abelian iff $D^2 = 0$.

3. W_D と $C^\infty(M)[[\hbar]]$ の間の1対1対応
   $\Rightarrow$ map σ, Q

W_D is flat section for an Abelian connection D, i.e,,
$Da = 0$ for $a \in W_D$.

Fedosov's $*$ product :

$$\boxed{a_0 * b_0 := \sigma(Q(a_0)\circ Q(b_0)), a_0, b_0 \in C^\infty(M)[[\hbar]].}$$



以上の定義で形式的には $\hbar$ のorder by orderで $*$ 積を計算できる。

特別な場合には $\hbar$ の *full order* であらわな表式を計算できる：

- Flat space $\mathbb{R}^{2n} \Rightarrow$ Moyal product
- 2次元回転対称な空間
  正の定曲率空間：球面 S^2,
  負の定曲率空間：双曲空間 H^2
  ······

§ 'Fuzzy Sphere and Hyperbolic Space'

非自明なあらわな表式を full order で求める方針：Fedosov の構成法にある手で決めるパラメータをうまく調整して簡単な方程式に帰着させる。

結果：
2 次元回転対称な空間

$$ds^2 = e^{\Phi(r)}(dr^2 + r^2 d\theta^2),$$

に対し、1 対 1 対応は

$$a = Q(a_0(r,\theta)) = a_0\left(G(r,y^1), \theta + \frac{y^2}{r}\right),$$

（ここで $G(r,y^1)$ は

$$\int_r^{G(r,y^1)} e^{\Phi(r')} r' dr' = y^1 r.$$

で計算できる。）となり $*$ product は

$$\boxed{\begin{aligned} a_0(r,\theta) * b_0(r,\theta) = \Bigg(& a_0\left(G(r,y^1), \theta + \tfrac{y^2}{r}\right) \\ & \cdot \exp\left(-\tfrac{i\hbar}{2}\left(\tfrac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y^1}\tfrac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y^2} - \tfrac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y^2}\tfrac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y^1}\right)\right) b_0\left(G(r,y^1), \theta + \tfrac{y^2}{r}\right)\Bigg)\Bigg|_{\substack{y^1=0,\\ y^2=0}} \end{aligned}}$$

で与えられる。

S^2 の場合

$$(X^1)^2+(X^2)^2+(X^3)^2=R^2$$

に対して

$$X^1=\frac{2R^2r}{r^2+R^2}\cos\theta\ ,X^2=\frac{2R^2r}{r^2+R^2}\sin\theta,\ \ X^3=R\frac{r^2-R^2}{r^2+R^2},$$

とパラメトライズすると

$$G(r,y^1)=\sqrt{\frac{r^2+\frac{y^1}{2R^2}r(r^2+R^2)}{1-\frac{y^1}{2R^4}r(r^2+R^2)}}.$$

となり、あらわな $*$ 積の表式が求まる。これを用いて

$$\boxed{\begin{gathered}[X^i,X^j]_*=i\frac{\hbar}{R}\varepsilon^{ijk}X^k,\\ X^1*X^1+X^2*X^2+X^3*X^3=R^2\left(1-\frac{\hbar^2}{4R^4}\right).\end{gathered}}$$

を得る。$\Rightarrow$ *fuzzy sphere algebra* $(\simeq su(2))$

H^2 の場合

同様に $*$ 積のあらわな表式が求まりそれを用いたfull orderの計算で *fuzzy* H^2 *algebra* $(\simeq su(1,1))$ が得られる。

§ Summary and Discussion

1. 2次元回転対称な空間上でFedosovの $*$ 積をあらわに構成する方法を求めた。特に S^2, H^2 に対してここで得た $*$ 積を用いて計算すると $su(2), su(1,1)$ 代数が得られた。これは積を変形して非可換球面、非可換双曲空間が得られるという描像と無矛盾である。

2. 従来よく用いられている $su(2)$ 代数の表現行列を用いた非可換球面の定義と比較すると、素朴には $\frac{\hbar}{2R^2} \sim \frac{1}{N} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$ の対応がつきそうに見えるが、対応する $*$ 積の表式は正確には一致していない。

3. あらわな表式が求まる他の例は？
Kähler coset spaceの場合
S. Aoyama - T. Masuda, hep-th/0105271,hep-th/0109020

4. 弦理論への応用は？
$SU(2)/U(1)$ gauged WZW模型から得られる低エネルギー有効理論のactionの運動方程式の解と計量 $ds^2 = \frac{k}{k-r^2}(dr^2 + r^2 d\theta^2)$ に対応する
$G(r, y^1) = \sqrt{k - (k - r^2)e^{-\frac{2y^1 r}{k}}}$
の場合の $*$ 積から得られる代数が $\hbar = 1$ として $\frac{1}{k}$ のleading orderで一致している。
S. Parvizi, hep-th/0108095