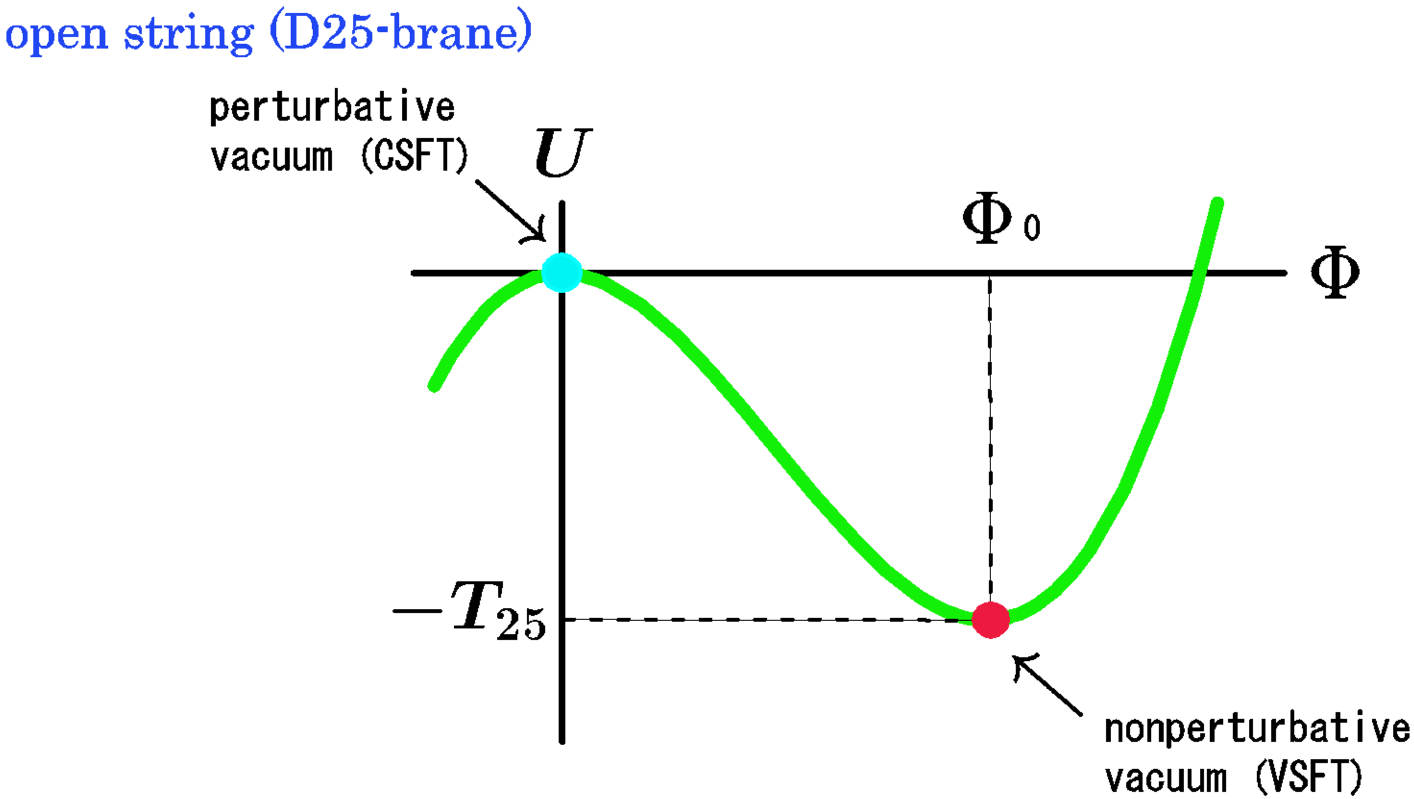
弦の場の理論のスター積の性質

岸本　功
（京大基研）

JHEP12(2001)007[hep-th/0110124]

Introduction

- Senの予想とVSFT



CSFT[Witten(1986)]:

$$S_{\mathrm{W}} = -\frac{1}{g_{\mathrm{o}}^{2}}\left[\frac{1}{2}\langle\Phi, Q_{\mathrm{B}}\Phi\rangle + \frac{1}{3}\langle\Phi, \Phi * \Phi\rangle\right]$$

の運動方程式:

$$Q_{\mathrm{B}}\Phi + \Phi * \Phi = 0$$

を解くかわりに非摂動真空まわりの理論を
予想して正当化しようという立場がある。

VSFT [Rastelli-Sen-Zwiebach(2000)]:

$$S_{\mathrm{V}} = -\kappa_0\left[\frac{1}{2}\langle\Phi, Q\Phi\rangle + \frac{1}{3}\langle\Phi, \Phi * \Phi\rangle\right] \qquad Q = \sum_n f_n\left(c_n + (-1)^n c_{-n}\right)$$

テクニカルなメリット:
matter partとghost partをfactorizeした解を作れる。

解のansatz: $\Phi = \Phi_m \otimes \Phi_g$

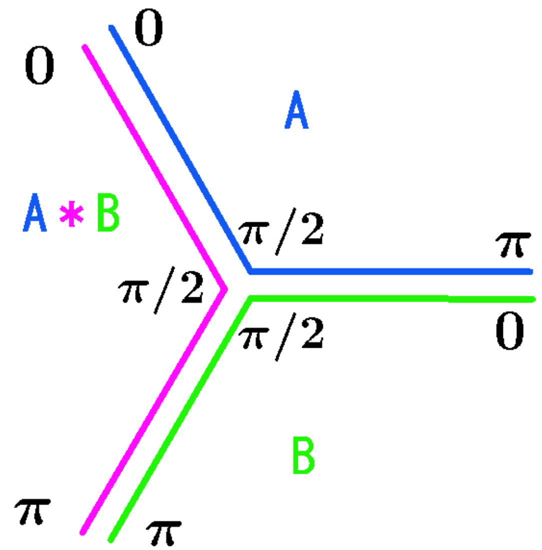
のもとでVSFTの運動方程式: $Q\Phi + \Phi * \Phi = 0$
はmatterとghostに分離させることができる。

① matter partはprojectorが解: $\Phi_m * \Phi_m = \Phi_m$
half-stringなどでその構成法が議論された。
[Gross-Taylor,RSZ,Kawano-Okuyama,…]

② ghost partは？[Hata-Kawano,…] $Q\Phi_g + \Phi_g * \Phi_g = 0$
とりあえず解があると仮定したまま放っておかれることが多かった。 ⇒ これを調べよう。

Wittenの★積と3-string vertex

Wittenのスター積:



具体的な定義にはCFTを使うものと振動子を使うものがあるが、
ここでは後者についてGross-Jevicki流に議論する。

振動子表示での★積:

$$|A\star B\rangle_1 := {}_2\langle A|_3\langle B|1,2,3\rangle = \langle 2,4|A\rangle_4\langle 3,5|B\rangle_5|1,2,3\rangle$$

$$\begin{aligned}
|V_3\rangle &= |1,2,3\rangle = \tilde{\mu}_3\int d^dp^{(1)}d^dp^{(2)}d^dp^{(3)}(2\pi)^d\delta^d(p^{(1)}+p^{(2)}+p^{(3)})e^{E_3}|0,p\rangle,\\
E_3 &= -\frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{3}\sum_{n.m\geq 1}a_n^{(r)\dagger}V_{nm}^{rs}a_m^{(s)\dagger}-\sum_{r,s=1}^{3}\sum_{n\geq 1}p^{(r)}V_{0n}^{rs}a_n^{(r)\dagger}-\frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{3}p^{(r)}V_{00}^{rs}p^{(s)}\\
&\quad -\sum_{r,s=1}^{3}\sum_{n\geq 1,m\geq 0}c_{-n}^{(r)}X_{nm}^{rs}b_{-m}^{(s)},\\
|0,p\rangle &= |0,p^{(1)}\rangle|0,p^{(2)}\rangle|0,p^{(3)}\rangle,\quad b_n^{(i)}|0,p^{(i)}\rangle=0,\quad n\geq 1,\quad c_m^{(i)}|0,p^{(i)}\rangle=0,\quad m\geq 0,\\
\langle V_2| &= \langle 1,2| = \int d^dp^{(1)}d^dp^{(2)}\langle 0,p|e^{E_2}\delta^d(p^{(1)}+p^{(2)})\delta(c_0^{(1)}+c_0^{(2)})\\
E_2 &= -\sum_{n,m\geq 1}a_n^{(1)}C_{nm}a_m^{(2)}-\sum_{n,m\geq 1}(c_n^{(1)}C_{nm}b_m^{(2)}+c_n^{(2)}C_{nm}b_m^{(1)}),\\
\langle 0,p| &= {}_1\langle 0,p^{(1)}|_2\langle 0,p^{(2)}|,\quad C_{nm}:=(-1)^n\delta_{n,m}.
\end{aligned}$$

特に3-string vertexは接続条件をみたす:

$$\left(X^{(r)}(\sigma)-X^{(r-1)}(\pi-\sigma)\right)|V_3\rangle=0,\ \left(P^{(r)}(\sigma)+P^{(r-1)}(\pi-\sigma)\right)|V_3\rangle=0,\quad 0\leq\sigma\leq\frac{\pi}{2},$$
$$\left(c^{\pm(r)}(\sigma)+c^{\pm(r-1)}(\pi-\sigma)\right)|V_3\rangle=0,\quad \left(b^{\pm(r)}(\sigma)-b^{\pm(r-1)}(\pi-\sigma)\right)|V_3\rangle=0,\ r=1,2,3.$$

Neumann係数の間には関係式が成り立つ

$$M_0 := CV^{rr},\quad M_\pm := CV^{rr\pm1},\quad \tilde{M}_0 := -CX^{rr},\quad \tilde{M}_\pm := -CX^{rr\pm1}$$

に対し、行列の関係式：

$$CM_0 = M_0C,\ CM_+ = M_-C,\ C\tilde{M}_0 = \tilde{M}_0C,\ C\tilde{M}_+ = \tilde{M}_-C,$$

$$[M_0, M_\pm] = [M_+, M_-] = 0,\qquad [\tilde{M}_0, \tilde{M}_\pm] = [\tilde{M}_+, \tilde{M}_-] = 0,$$

$$M_0 + M_+ + M_- = 1,\qquad \tilde{M}_0 + \tilde{M}_+ + \tilde{M}_- = 1,$$

$$M_+M_- = M_0^2 - M_0,\qquad \tilde{M}_+\tilde{M}_- = \tilde{M}_0^2 - \tilde{M}_0,$$

$$M_0^2 + M_+^2 + M_-^2 = 1,\qquad \tilde{M}_0^2 + \tilde{M}_+^2 + \tilde{M}_-^2 = 1.$$

さらにゼロモード係数を含むものの関係式：

$$CV^{rs}{}_0 = V^{sr}{}_0,\ \sum_{t=1}^{3} V^{ts}{}_0 = \sum_{t=1}^{3} V^{rt}{}_0 = 0,\qquad CX^{rs}{}_0 = X^{sr}{}_0,\ \sum_{t=1}^{3} X^{ts}{}_0 = \sum_{t=1}^{3} X^{rt}{}_0 = 0,$$

$$V^{21}{}_0 = \frac{3M_+ - 2}{1 + 3M_0}V^{11}{}_0,\ V^{31}{}_0 = \frac{3M_- - 2}{1 + 3M_0}V^{11}{}_0,\qquad X^{21}{}_0 = -\frac{\tilde{M}_+}{1 - \tilde{M}_0}X^{11}{}_0,\ X^{31}{}_0 = -\frac{\tilde{M}_-}{1 - \tilde{M}_0}X^{11}{}_0.$$

※実はこれらの無限行列の関係式は微妙である。[HataMoriyama,RSZ,…]

スクイーズド状態の★積公式

- matter part についてはスクイーズド状態の★積公式が得られていた。 [RSZ, Furuuchi-Okuyama,…]

non-zeroモードに対するNeumann行列はmatterとghostで同じ関係式を満たす。

↓

b_0, c_0 を含まないreduced product $\star^r$ ：

$$|A \star^r B\rangle := {}_2\langle A^r|_3\langle B^r|V_3^r\rangle_{123}, \quad \langle A^r| := \langle V_2^r|A\rangle,$$

$${}_{12}\langle V_2| = {}_{12}\langle V_2^r|(c_0^{(1)} + c_0^{(2)}), \quad |V_3\rangle_{123} = e^{-\sum_{r,s=1}^{3} c_0^{\dagger(r)} X^{rs}_0 b_0^{(s)}} |V_3^r\rangle_{123}.$$

に関してはmatter partと同様な公式が得られる！

wedge-likeなスクイーズド状態:

$$|n_{\xi,\eta}\rangle := e^{\xi b^\dagger+\eta c^\dagger}|n\rangle_G = \tilde{\mu}_n \exp\left(\xi b^\dagger + \eta c^\dagger + c^\dagger C\tilde{T}_n b^\dagger\right)|+\rangle_G.$$

$$|n\rangle_G = (|2\rangle_G)^{n-1}_{\star^r}, \quad |2\rangle_G = \exp\left(c^\dagger C\tilde{T}_2 b^\dagger\right)|+\rangle_G, \quad C\tilde{T}_2 = \tilde{T}_2 C, \quad [\tilde{M}_0, \tilde{T}_2] = 0, \quad \tilde{T}_2 \neq 1,$$

$$\tilde{T}_n = \frac{\tilde{T}(1-\tilde{T}_2\tilde{T})^{n-1} + (\tilde{T}_2-\tilde{T})^{n-1}}{(1-\tilde{T}_2\tilde{T})^{n-1} + \tilde{T}(\tilde{T}_2-\tilde{T})^{n-1}}, \quad \tilde{M}_0\tilde{T}^2 - (\tilde{M}_0+1)\tilde{T} + \tilde{M}_0 = 0,$$

$$\tilde{\mu}_n = \tilde{\mu}_2 \left(\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_3^r \det\left(\frac{1-\tilde{T}}{1-\tilde{T}+\tilde{T}^2}\right)\right)^{n-2} \det\left(\frac{(1-\tilde{T}_2\tilde{T})^{n-1} + \tilde{T}(\tilde{T}_2-\tilde{T})^{n-1}}{1-\tilde{T}^2}\right),$$

同士の $\star^r$ 積は次のようになる:

$$|n_{\xi,\eta} \star^r m_{\xi',\eta'}\rangle = \exp\left(-\mathcal{C}_{n_{\xi,\eta},m_{\xi',\eta'}}\right)\left|(n+m-1)_{\xi\tilde{\rho}_{1(n,m)}+\xi'\tilde{\rho}_{2(n,m)},\,\eta\tilde{\rho}^T_{1(n,m)}+\eta'\tilde{\rho}^T_{2(n,m)}}\right\rangle,$$

$$\mathcal{C}_{n_{\xi,\eta},m_{\xi',\eta'}} = (\xi,\xi')\frac{C}{\tilde{T}_{n,m}}\begin{pmatrix}\tilde{M}_0(1-\tilde{T}_m) & \tilde{M}_- \\ \tilde{M}_+ & \tilde{M}_0(1-\tilde{T}_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta^T \\ \eta'^T\end{pmatrix} = \mathcal{C}_{m_{\xi' C,\eta' C},n_{\xi C,\eta C}},$$

$$\tilde{\rho}_{1(n,m)} = \frac{\tilde{M}_- + \tilde{M}_+\tilde{T}_m}{\tilde{T}_{n,m}}, \quad \tilde{\rho}_{2(n,m)} = \frac{\tilde{M}_+ + \tilde{M}_-\tilde{T}_n}{\tilde{T}_{n,m}}, \quad C\tilde{\rho}_{1(n,m)} = \tilde{\rho}_{2(m,n)}C, \quad \tilde{T}_{n,m} = 1 + \tilde{M}_0(\tilde{T}_n\tilde{T}_m - \tilde{T}_n - \tilde{T}_m).$$

Siegelゲージでの★積公式:

Siegelゲージの場$|\Phi\rangle = b_0|\phi\rangle, |\Psi\rangle = b_0|\psi\rangle$ の★積は

$$
\begin{aligned}
|\Phi\star\Psi\rangle &= |\phi\star^r\psi\rangle + b_0\left({}_2\langle\phi^r|_3\langle\psi^r|\sum_{s=1}^{3} c^{(s)\dagger}X^{s1}_{0}|V^r_3\rangle_{123}\right)\\
&= (1+b_0c^\dagger X^{11}_{0})|\phi\star^r\psi\rangle + b_0\sum_{s=2,3}{}_2\langle\phi^r|_3\langle\psi^r|c^{(s)\dagger}X^{s1}_{0}|V^r_3\rangle_{123}.
\end{aligned}
$$

特にwedge-likeな状態に対しては

$$
\begin{aligned}
&|(b_0 n_{\xi,\eta})\star(b_0 m_{\xi',\eta'})\rangle\\
&= \left(1+b_0\left(c^\dagger X^{11}_{0} + \left(\xi C + \frac{\partial}{\partial\eta}\tilde{T}_n\right)X^{21}_{0} + \left(\xi' C + \frac{\partial}{\partial\eta'}\tilde{T}_m\right)X^{31}_{0}\right)\right)|n_{\xi,\eta}\star^r m_{\xi',\eta'}\rangle\\
&= \left(1+b_0c^\dagger\frac{1-\tilde{T}_n\tilde{T}_m}{\tilde{T}_{n,m}}X^{11}_{0} - b_0(\xi\tilde{\rho}_{1(n,m)}+\xi'\tilde{\rho}_{2(n,m)})\frac{1}{1-\tilde{M}_0}X^{11}_{0}\right)|n_{\xi,\eta}\star^r m_{\xi',\eta'}\rangle.
\end{aligned}
$$

※Okuyamaによってここで得た★積の代数がさらに整理された。

応用:VSFTの解

- 得られた公式を用いてVSFTの運動方程式

$$\mathcal{Q}|\Psi\rangle + |\Psi \star \Psi\rangle = 0, \quad \mathcal{Q} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(c_n + (-1)^n c_n^\dagger) = c_0 + f \cdot (c + Cc^\dagger).$$

を次のansatzのもとで解く:

$$|\Psi\rangle = b_0 |P\rangle_M \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n |n\rangle_G \right), \quad |P \star P\rangle_M = |P\rangle_M.$$

- identity-like solution

$$\mathcal{Q} = c_0, \quad |\Psi\rangle = -b_0 |P\rangle_M |I^r\rangle_G.$$

- sliver-like solution [Hata-Kawano]

$$\mathcal{Q} = c_0 - (c + c^\dagger) \frac{1}{1 - \tilde{M}_0} X_0^{11}, \quad |\Psi\rangle = -b_0 |P\rangle_M |\Xi^r\rangle_G.$$

- another solution

$$\mathcal{Q} = c_0 - (c + c^\dagger) \frac{1}{1 - \tilde{M}_0} X_0^{11}, \quad |\Psi\rangle = -b_0 |P\rangle_M (|I^r\rangle_G - |\Xi^r\rangle_G).$$

ここで $|n=1\rangle_G =: |I^r\rangle_G,\quad |n=\infty\rangle_G =: |\Xi^r\rangle_G,$

で $\star^r$ 積に関してidentity / sliver-likeである:

$$|I^r \star^r A\rangle = |A \star^r I^r\rangle = |A\rangle, \quad |\Xi^r \star^r \Xi^r\rangle = |\Xi^r\rangle.$$

※2番目と3番目の解の Q はGaiotto-RSZのVSFTの運動項と一致している: [GRSZ,Okuyama]

$$\frac{1}{2i}\left(c(i)-c(-i)\right) = c_0 - (c+c^\dagger)\frac{1}{1-\tilde{M}_0}X^{11}_0$$

※ $|\Xi^r\rangle$ はGRSZのtwisted bc-systemのsliverと一致している: [GRSZ,Okuda] $|\Xi^r\rangle = |\Xi'\rangle_{\mathrm{GRSZ}}$

Discussion

- 得られたVSFTの解でD25-brane tensionがVSFTで再現できているかどうかはまだ不明。

- Identity状態 $$|I\rangle = \frac{1}{4i} b(\pi/2) b(-\pi/2) |I\rangle_M |I^r\rangle_G$$

は★積の単位元ではない: $$\langle I | V_3\rangle \neq |R\rangle$$

- $c_0 I$ の怪[Rastelli-Zwiebach]は矛盾ではない:

$$\langle I | c_0 | V_3\rangle = 0 \Rightarrow |(c_0 I)\star A\rangle = 0, \forall |A\rangle, \therefore 0 = |(c_0 I)\star I\rangle \neq |c_0 I\rangle$$

- CFTを用いた定義(＋GGRT)ではidentity状態は＊積の単位元のように振舞う:

$$\langle \phi, A * \boldsymbol{I} \rangle = \langle \phi, \boldsymbol{I} * A \rangle = \langle \phi, A \rangle$$

⇒ $|\boldsymbol{I}\rangle$ を使えば、CSFTの解でGRSZのVSFTを直接導くものを構成できる:

$$\Phi_0 = -\mathrm{Q_L}\boldsymbol{I} + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{a}{2} Q^{\varepsilon} \boldsymbol{I},$$

$$\mathrm{Q_L} = \int_{C_L} \frac{dz}{2\pi i} j_{\mathrm{B}}(z), Q^{\varepsilon} = \frac{1}{2i}\left(e^{-i\varepsilon} c(ie^{i\varepsilon}) - e^{i\varepsilon} c(-ie^{-i\varepsilon}) \right)$$

しかしpotential heightを計算しようとすると微妙な点がある:

$$\langle Q^{\varepsilon}\boldsymbol{I}_{\delta}, \mathrm{Q_B} Q^{\varepsilon}\boldsymbol{I}_{\delta} \rangle = -\delta^2 \sin^2 \varepsilon \left[\frac{1}{2}\left\{ \left(\tan\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{2}{\delta}} + \left(\tan\frac{\varepsilon}{2} \right)^{-\frac{2}{\delta}} \right\} + 3 \right] V_{26}, \cdots$$

[I.K.-Ohmori,hep-th/0112169]