

# Developments in Moyal String Field Theory

Isao Kishimoto

Univ. of Tokyo

collaboration with I.Bars, Y.Matsuo

PRD67,066002(2003) [hep-th/0211131]

hep-th/0302151

hep-th/0303nnn(to appear)

# Introduction

- Wittenの弦の場の理論 (1986)

“Noncommutative Geometry And String Field Theory”

- 非可換空間上の場の理論(1999-)

Seiberg-Witten前後～...普通の積⇒Moyal★積

- 弦の場の理論再び(1999-)

Senの予想, VSFT conjecture, ...

非可換空間上の弦の場の理論

Wittenの\*積  $\Rightarrow$  Moyal★積

[Bars, Douglas-Liu-Moore-Zwiebach]

Moyal★積を用いてWittenの弦の場の理論を  
非可換空間上の場の理論として定式化してみよう:

Moyal formulation of String Field Theory  
(MSFT)

[Bars-Matsuo]

# Wittenの弦の場の理論の定式化:

- CFTを使うもの [...,LPP,...]
- operator形式によるもの [...,Gross-Jevicki,...]
- half stringによるもの [...,AAB,...]

いずれも素朴に計算すると、中点の自由度で微妙なことがおこる。  
associativity anomaly, identity string field,...

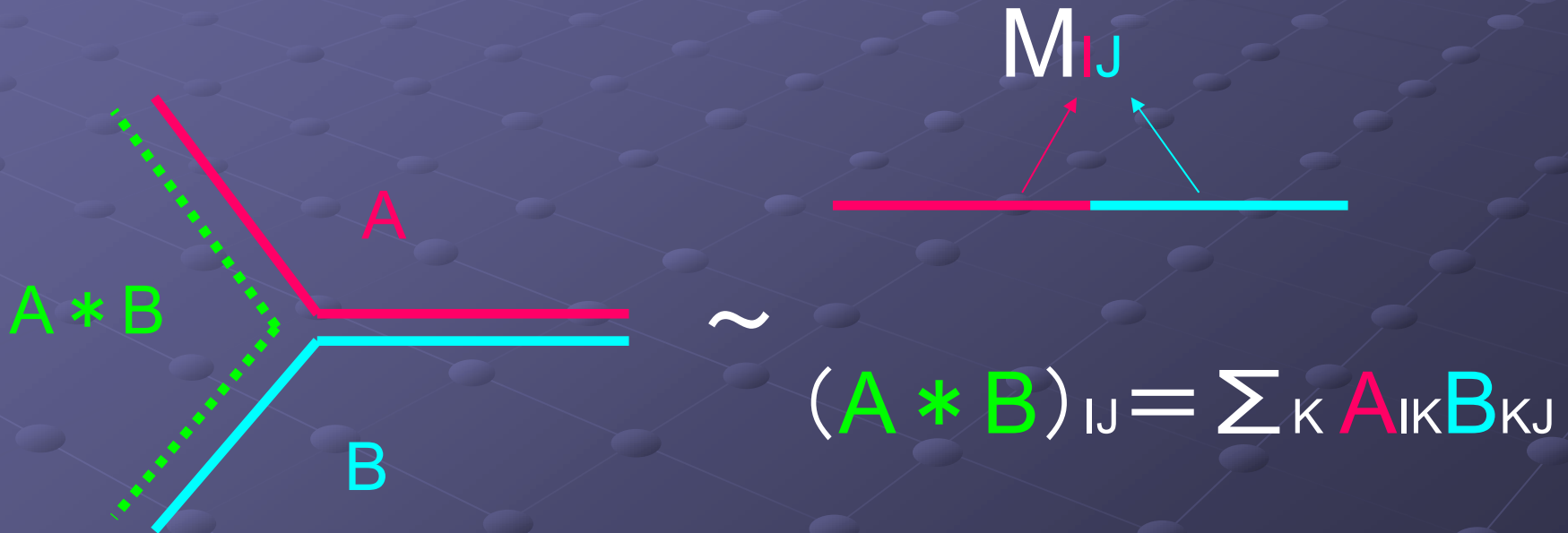
MSFTはhalf string formulationを經由して  
**正則化**した定義を与える。(を目指す)

# Contents

- Introduction ✓
- Half string and regularization
- Moyal String Field Theory
- Neumann coefficients
- Splitting limit
- Discussion

# Half string and regularization

● Wittenの \* 積  $\sim$  無限行列の積



● 式で書くと:

$$X(\sigma) = x_0 + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cos n\sigma \rightarrow l(\sigma) + r(\pi - \sigma),$$

$$b(\sigma) = i\sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{gh} \sin n\sigma \rightarrow l^b(\sigma) + r^b(\pi - \sigma),$$

$$c(\sigma) = c_0 + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} y_n^{gh} \cos n\sigma \rightarrow l^c(\sigma) + r^c(\pi - \sigma),$$

と右半分と左半分に分けてWittenの \* 積を

$$\Psi_1 * \Psi_2[l, l^b, l^c; r, r^b, r^c]$$

$$= \int Dw Dw^b Dw^c \Psi_1[l, l^b, l^c; w, w^b, w^c] \Psi_2[w, w^b, -w^c; r, r^b, r^c]$$

のように定義する

●元の非零モード  $(x_n^\mu, x_n^{gh}, y_n^{gh})$  の半分  $(x_o^\mu, x_e^{gh}, y_e^{gh})$  についてFourier変換すると half-string の \* 積 が (anti-)Moyal★積 にmapされる:

Fourier変換

$$(x_e^\mu, x_o^\mu, x_e^{gh}, x_o^{gh}, y_e^{gh}, y_o^{gh}) \longrightarrow (x_e^\mu, p_e^\mu, x_o^{gh}, p_o, y_o^{gh}, q_o) =: \xi$$



$$(l, l^b, l^c; r, r^b, r^c) \quad * \quad \longrightarrow \quad \text{Moyal } \star$$



● このmapを零モードも含めて式で書くととき  
無限行列  $T, R, S, w, v$  が導入される:

$$T_{eo} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\sigma \cos(e\sigma) \cos(o\sigma), w_e = -\sqrt{2} \cos \frac{e\pi}{2}, S_{eo} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\sigma \sin(e\sigma) \sin(o\sigma)$$

$$T_{eo} = \frac{4oi^{o-e+1}}{\pi(e^2 - o^2)}, R_{oe} = \frac{4e^2 i^{o-e+1}}{\pi o(e^2 - o^2)}, S_{eo} = \frac{4ei^{o-e+1}}{\pi(e^2 - o^2)}, w_e = \sqrt{2} i^{-e+2}, v_o = \frac{2\sqrt{2} i^{o-1}}{\pi o}.$$

● 無限行列の積の結合性の破れ [Bars-Matsuo]

$$R(Tv) = R \cdot 0 = 0 \quad \text{v.s.} \quad (RT)v = 1 \cdot v = v, \dots$$

計算をwell-definedにするため、正則化する必要あり

## ● 無限行列の正則化: 有限行列へ [Bars-Matsuo]

$$R_{oe} = o^{-2} T_{eo} e^2, R_{oe} = T_{eo} + v_o w_e, v_o = \sum_e T_{eo} w_e, w_e = \sum_o R_{oe} v_o,$$

$$T_{eo} = e^{-1} S_{eo} o$$

を  $e \rightarrow \kappa_e, o \rightarrow \kappa_o$  とし  $N \times N$  行列の関係式へ:

$$R = \kappa_o^{-2} \bar{T} \kappa_e^2, R = \bar{T} + v \bar{w}, v = \bar{T} w, w = \bar{R} v,$$

$$T = \kappa_e^{-1} S \kappa_o.$$

逆にこれを定義だと思つと

$(N, \kappa_e, \kappa_o)$  から  $T, R, S, w, v$  が **あらわに** 定まる。

これらの有限行列は次の関係式を満たす

$$TR = 1, RT = 1, \bar{R}R = 1 + w\bar{w}, \bar{T}T = 1 - v\bar{v},$$

$$\bar{S}S = S\bar{S} = 1,$$

$$T\bar{T} = 1 - \frac{w\bar{w}}{1 + \bar{w}w}, T_v = \frac{w}{1 + \bar{w}w}, \bar{v}v = \frac{\bar{w}w}{1 + \bar{w}w},$$

$$Rw = v(1 + \bar{w}w), R\bar{R} = 1 + v\bar{v}(1 + \bar{w}w).$$

※特に  $1 + \bar{w}w = \frac{\prod_e \kappa_e^2}{\prod_o \kappa_o^2}$  はもとの無限行列に戻る極限で $\infty$

# Moyal string field theory (MSFT)

## ● セットアップ

$$(N, \kappa_e, \kappa_o), \quad e=2,4,\dots,2N, o=1,3,\dots,2N-1$$

2N個のfrequencies

→ 正則化された行列T,R,S,w,vが決まる。

## ● Moyal Field

$$\hat{A}(\bar{x}, \xi_0, \xi)$$

d+1個 (zeromode) + (2Nd+4N)個の変数  
非可換座標

●元のWittenのSFTにもどるには

open string limit:  $\kappa_e = e, \kappa_o = 0, N = \infty$

●場の対応は

$$\hat{A}(\bar{x}, \xi_0, \xi)$$

$$\sim \int d^{Nd} x_o \int dc_0 dx_e dy_e e^{-2ip_e T x_o} e^{-\xi_0 (c_0 - \bar{w} y_e^{gh}) + 2p_o \bar{S} x_e^{gh} + 2q_o R y_e^{gh}} \\ \times \langle \bar{x} + \bar{w} x_e, c_0, x_n, x_n^{gh}, y_n^{gh} | \Psi \rangle$$

# ●作用

(WittenのSFTのゲージ固定した作用の正則化)

$$S = -\int d^d \bar{x} \text{Tr} \left( \frac{1}{2} A \star (L_0 - 1) A + \frac{1}{3} A \star A \star A \right),$$

$$\star = \exp \left( \frac{1}{2} \frac{\bar{\partial}}{\partial \xi} \sigma \frac{\bar{\partial}}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\bar{\partial}}{\partial \xi^{gh}} \Sigma \frac{\bar{\partial}}{\partial \xi^{gh}} \right), \quad \sigma = \begin{pmatrix} & i \\ -i & \end{pmatrix} \otimes 1_{Nd}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \otimes 1_{2N}$$

$$\text{Tr} = \frac{\det^{1/2} \Sigma}{\det^{d/2} \sigma} \int \frac{d^{2Nd} \xi}{(2\pi)^{Nd}} d^{4N} \xi^{gh},$$

$$L_0 = \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{4} \bar{D}_\xi M_0^{-1} \tilde{\kappa} D_\xi + \bar{\xi} \tilde{\kappa} M_0 \xi - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \xi^{gh}} \varepsilon M_0^{gh-1} \tilde{\kappa}^{gh} \frac{\partial}{\partial \xi^{gh}} + \bar{\xi}^{gh} \varepsilon \tilde{\kappa}^{gh} M_0^{gh} \xi^{gh}$$

$$-\frac{d-2}{2} \sum_{n=1}^{2N} \kappa_n, \quad M_0 = \begin{pmatrix} \frac{\kappa_e}{2} \\ \\ \\ 2T\kappa_o^{-1}\bar{T} \end{pmatrix}, \quad M_0^{gh} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \bar{R}\kappa_o R \\ \\ \\ 2\kappa_e^{-1} \end{pmatrix}.$$

ここでSiegelゲージをとっている:  $\hat{A}(\bar{x}, \xi_0, \xi) = \xi_0 A(\bar{x}, \xi)$

# Neumann coefficients [BM2,BKM3]

- MSFTではノイマン行列は必要ないが  
対応物を定義できる: operator形式との比較

$$\int d\bar{x}^d \int d\xi_0^{(1)} d\xi_0^{(2)} d\xi_0^{(3)} \text{Tr}(\hat{A}_1 \star \hat{A}_2 \star \hat{A}_3) \sim \langle \Psi_1 | \langle \Psi_2 | \langle \Psi_3 | V_3 \rangle,$$

$$|V_3\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} a^{rt} V^{rs} a^{st} - a^{rt} V_{00}^{rs} p^s - \frac{1}{2} V_{00} p^r p^r - c^{rt} X^{rs} b^{st} - c^{rt} X_{00}^{rs} b_0\right) |p\rangle$$

という同一視をすると、MSFTの言葉  $(N, \kappa_e, \kappa_o)$  であらわにノイマン行列を表せる。

● MSFTでは任意の $(N, \kappa_e, \kappa_o)$ で

$$V^n = C \frac{\tilde{m}_0^2 - 1}{\tilde{m}_0^2 + 3}, \dots, X^n = C \sqrt{\kappa} \frac{\tilde{m}_0^2 - 1}{3\tilde{m}_0^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{\kappa}}, \dots,$$

$$\tilde{m}_0^2 = \begin{pmatrix} \kappa_e^{1/2} T \kappa_o^{-1} \bar{T} \kappa_e^{1/2} & 0 \\ 0 & \kappa_o^{-1/2} \bar{T} \kappa_e T \kappa_o^{-1/2} \end{pmatrix}, \dots$$

はGross-Jevickiの非線形関係を満たす。

●  $\kappa_e = e, \kappa_o = 0, N \rightarrow \infty$ でのノイマン行列の(数値的)振る舞い: (成分毎に)

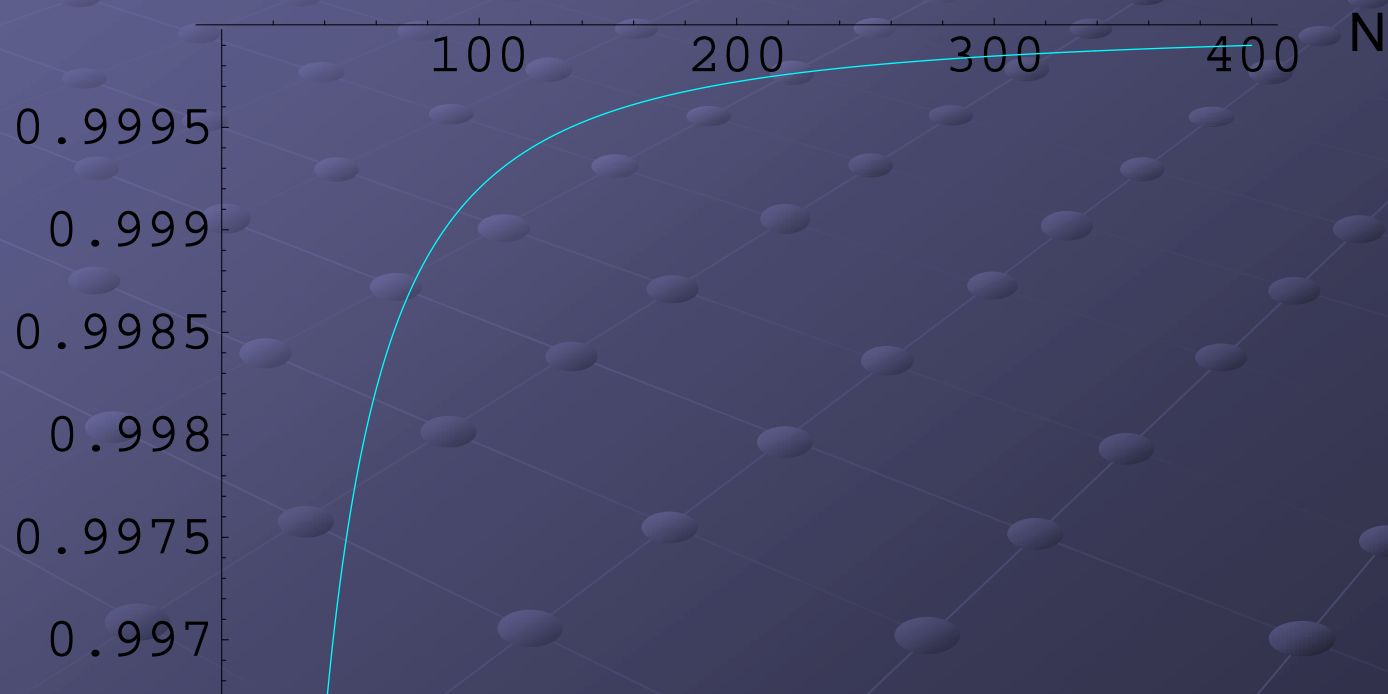
$$\frac{V_{nm}^{rs}(N)}{V_{nmGJ}^{rs}} \sim 1 + (\text{const.}) N^{-4/3}, \quad \frac{X_{nm}^{rs}(N)}{X_{nmGJ}^{rs}} \sim 1 + (\text{const.}) N^{-2/3}$$



● たとえば

$$V_{00}(N) = \bar{w} T \kappa_o^{-1} \bar{T} (3 + \kappa_e T \kappa_o^{-1} \bar{T})^{-1} w, \quad V_{00\text{GJ}} = \frac{1}{2} \log \left( \frac{27}{16} \right)$$

の比の振る舞いは



# Splitting limit [BKM2]

- N:有限にしても、運動方程式をそのまま解くことは難しい: Moyal積の非線形方程式

$$(L_0 - 1)A + A \star A = 0$$

しかし **splitting limit**  $\kappa_e = \kappa_o$  では厳密に解ける。  
(もちろん普通の開弦では  $\kappa_e = \kappa_o + 1$ )

$L_0$  は「ほとんど」  $L_0$  でかける:

$$(L_0 - 1)A = L_0 \star A + A \star L_0 + \gamma A,$$

$$L_0 = \sum_{e>0} \kappa_e (\beta_{-e} \star \beta_e + \beta_{-e}^b \star \beta_e^c + \beta_{-e}^c \star \beta_e^b) - \nu,$$

$$\nu = \frac{1}{2} - \frac{d-2}{4} \left( \sum_{e>0} \kappa_e - \sum_{o>0} \kappa_o \right),$$

$$\gamma \sim \frac{w_e w_{e'}}{1 + ww} (\text{oscillators})_{ee'}$$

splitting limitでは $w_e=0$ より  $\gamma$  の項が消える!

# ● splitting limitでの運動方程式

$$\mathcal{L}_0 \star A + A \star \mathcal{L}_0 + A \star A = 0$$

の厳密解:  $A_P = -2\mathcal{L}_0 \star P,$

$$P \star P = P, P \star \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0 \star P.$$

特に  $P = A_B$ : butterfly  $\sim |0\rangle\langle 0|$

$$A_B = 2^{N(d-2)} e^{-\bar{x}_e \frac{\kappa_e}{2} x_e - \bar{p}_e \frac{2}{\kappa_e} p_e} e^{-ix_e^b \kappa_e x_e^c - ip_e^b \frac{4}{\kappa_e} p_e^c},$$

$$\beta_e \star A_B = A_B \star \beta_{-e} = \beta_e^c \star A_B = A_B \star \beta_{-e}^c = \beta_e^b \star A_B = A_B \star \beta_{-e}^b = 0, A_B \star A_B = A_B$$

の場合の解のまわりでは元のtachyon mass<sup>2</sup>  
 $-2\nu$  が  $2\nu$  にシフトする: “tachyon vacuum(!?)”

● splitting limitからのズレ(中点の自由度の効果):  
 $\gamma$  項を摂動的に扱おうと

$$\mathcal{L}_0' \star A^{(k)} + A^{(k)} \star \mathcal{L}_0' = -\gamma A^{(k-1)} - \sum_{l=1}^{k-1} A^{(l)} \star A^{(k-l)},$$

$$\mathcal{L}_0' = \mathcal{L}_0 + A^{(0)} = \mathcal{L}_0 + 2\nu A_B$$

● 摂動の1次では:

$$A^{(1)} = \frac{d-2}{4} \delta A_B + \dots, \quad \delta = \frac{\sum_{e>0} \kappa_e w_e^2}{1 + \bar{w}w}$$

open string limit:  $\kappa_e = e, \kappa_o = 0, N = \infty$  で発散。

通常の場合は素朴にはsplitting limitからの摂動ではあつかえない!

# Discussion

● MSFTはopen string limitでWittenのSFTを再現する正則化だと期待できる:

途中計算はwell-defined、  
perturbative spectrumの一致、  
Neumann行列の一致

MSFTだけで閉じた定式化にするために:  
物理的状態を指定するためのBRST operator  
(Virasoro) をどう記述すればよいか?

## テクニカルな問題:

- $\kappa_e = e, \kappa_o = 0, N = \infty$  で Veneziano amplitude を本当に再現しているか？

$$\sim \frac{\det \left( 1 - \left( \frac{t\bar{t} - 1}{1 + 3t\bar{t}} e^{-\kappa_e \tau} \right)^2 \right) \det \left( 1 - \left( \frac{\bar{t}t - 1}{1 + 3\bar{t}t} e^{-\kappa_o \tau} \right)^2 \right)}{\left[ \det \left( 1 - \left( \frac{t\bar{t} - 1}{3 + t\bar{t}} e^{-\kappa_e \tau} \right)^2 \right) \det \left( 1 - \left( \frac{\bar{t}t - 1}{3 + \bar{t}t} e^{-\kappa_o \tau} \right)^2 \right) \right]^{d/2}} \exp \left( -\frac{1}{2} (p_1 + p_2)^2 (\tau + \alpha(\tau)) + \dots \right) +$$

$(t := \kappa_e^{1/2} T \kappa_o^{-1/2}, \alpha(\tau) = \dots)$

- Splitting limit では解けたが、普通の開弦の場合、運動方程式を厳密に解けるか？

もし解ければ Siegel gauge なので非摂動的数値解 [..., Gaiotto-Rastelli] と直接対応が見れる。

# 厳密な扱いはとりあえずおいといて数値実験

“Experimental **Moyal** String Field Theory”

● あらわな閉じた形の式: ([msft.m](#), [neumann.m](#))

$$w_e = (-1)^{\frac{e}{2}-1} \left( \frac{\prod_o (\kappa_e^2 / \kappa_o^2 - 1)}{\prod_{e' \neq e} (\kappa_e^2 / \kappa_{e'}^2 - 1)} \right)^{1/2}, v_o = (-1)^{\frac{o-1}{2}} \left( \frac{\prod_{e'} (1 - \kappa_o^2 / \kappa_{e'}^2)}{\prod_{o' \neq o} (1 - \kappa_o^2 / \kappa_{o'}^2)} \right)^{1/2},$$

$$T_{eo} = \frac{w_e v_o \kappa_o^2}{\kappa_e^2 - \kappa_o^2}, R_{oe} = \frac{w_e v_o \kappa_e^2}{\kappa_e^2 - \kappa_o^2}, S_{eo} = \frac{w_e v_o \kappa_e \kappa_o}{\kappa_e^2 - \kappa_o^2}.$$

Nを $\infty$ にとぼすときに $\kappa_e, \kappa_o$ の $e, o$ への近づけ方を変えることもできる。



● 例 ( $N=1, \kappa_2=2, \kappa_1=1$ ) のセッティングで  
 もっとも低い近似: tachyon場( $p=0$ )

$$A_T = \phi A_0(\xi), \quad A_0(\xi) = e^{-\bar{\xi} M_0 \xi} e^{-\bar{\xi}^{gh} \varepsilon M_0^{gh} \xi^{gh}}$$

だけでtachyon vacuumを求めてみると...

$$S/V_{26} |_{\phi_0} = T_{25} \frac{\pi^2}{3} e^{-9/7} = 0.909494 T_{25}$$

Senの予想の91%(!?)

もちろん  $\kappa_e=e, \kappa_o=0, N \rightarrow \infty$  では  $\rightarrow 68\%$

[Sen-Zwiebach]

レベルトランケーションとは違った数値実験ができる