モーヤル積を用いた弦の場の理論の記述

岸本　功

(東大理)

共同研究者: **I.Bars, Y.Matsuo**

Phys.Rev.D67:066002,2003 [hep-th/0211131]

Phys.Rev.D67:126007,2003 [hep-th/0302151]

JHEP 0307:027,2003 [hep-th/0304005]

参考文献

- E. Witten,

"Noncommutative Geometry And String Field Theory,"

Nucl.Phys.B268:253,1986

- D. J. Gross, A.Jevicki,

Nucl.Phys.B283:1,1987; Nucl.Phys.B287:225,1987,...

- I.Bars,

"Map of Witten's * to Moyal's *,"

Phys.Lett.B517:436-444,2001[hep-th/0106157]

- I.Bars, Mastuo,

Phys.Rev.D65:126006,2002[hep-th/0202030];
Phys.Rev.D66:066003,2002[hep-th/0204260]

Introduction

- Wittenの開弦の場の理論(1986)

$$S = \frac{1}{2}\langle \Psi, Q_B \Psi \rangle + \frac{1}{3}\langle \Psi, \Psi * \Psi \rangle$$

主にSenの予想を示すのに復活。(1999)

[Sen-Zwiebach,...]

＋

非可換ブーム(1999)

[...,Seiberg-Witten,...]

従来、Wittenの弦の場の理論を「記述」する方法として

Oscillatorによる定式化[Gross-Jevicki,…]

CFTを用いる方法[…,LPP,…]　等がよく使われていたが、、、

非可換空間上の場の理論の拡張・類似で

Moyal積を用いて記述できるのでは？

Wittenの＊積　⇒　モーヤル★積

$$f\star g = f\exp\left(\frac{i\theta}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p}-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x}\right)\right)g = fg + f\,\frac{i\theta}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p}-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x}\right)g+\cdots$$

$$:=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i\theta}{2}\right)^{k}\sum_{l=0}^{k}\frac{(-1)^{k-l}}{l!(k-l)!}\frac{\partial^{l}}{\partial x^{l}}\frac{\partial^{k-l}}{\partial p^{k-l}}f\,\frac{\partial^{l}}{\partial p^{l}}\frac{\partial^{k-l}}{\partial x^{k-l}}g$$

- Bars流(2001) ～変数のラベルが離散的
- Douglas-Liu-Moore-Zwiebach流(2002) ～変数のラベルが連続的

ここではBars流のMoyal積による記述を考える。

単なる書き換えだけではなく、

正則化もする(をめざす)。

↑

- 素朴に計算してるとしばしば微妙な結果に出くわす。

∞×∞行列、中点の扱い、など、、、。

- 正則化にはDLMZ流よりもBars流のほうが適している。

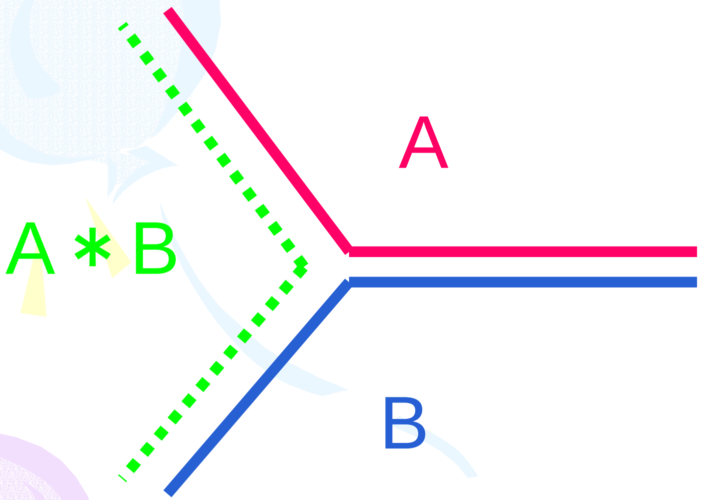
⇒

Moyal formulation of String Field Theory

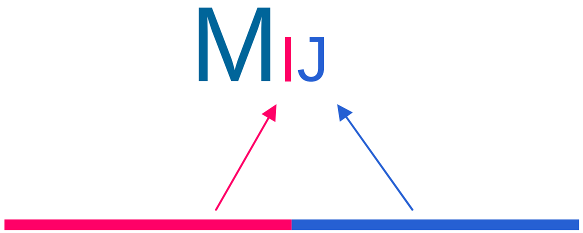
略して　MSFT

Half stringからMoyal定式化へ

- Wittenの＊積　～　無限行列の積



～



$$(A*B)_{IJ} = \Sigma_K A_{IK} B_{KJ}$$

- 式で書くと:

$$X^\mu(\sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} x_n^\mu \cos n\sigma = \begin{cases} l^\mu(\sigma) & 0 \le \sigma \le \pi/2 \\ r^\mu(\pi-\sigma) & \pi/2 \le \sigma \le \pi \end{cases},$$

$$b(\sigma) = i\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{gh} \sin n\sigma = \begin{cases} l^b(\sigma) & 0 \le \sigma \le \pi/2 \\ r^b(\pi-\sigma) & \pi/2 \le \sigma \le \pi \end{cases},$$

$$c(\sigma) = c_0 + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} y_n^{gh} \cos n\sigma = \begin{cases} l^c(\sigma) & 0 \le \sigma \le \pi/2 \\ r^c(\pi-\sigma) & \pi/2 \le \sigma \le \pi \end{cases},$$

と右半分と左半分に分けてWittenの＊積を

$$\widehat{\Psi_1 * \Psi_2}[l^\mu, l^b, l^c; r, r^b, r^c] =$$

$$\int Dw^\mu Dw^b Dw^c\, \widehat{\Psi}_1[l^\mu, l^b, l^c; w^\mu, w^b, w^c]\, \widehat{\Psi}_2[w^\mu, w^b, -w^c; r^\mu, r^b, r^c]$$

のように定義する。（ただし中点の自由度は微妙）

- 元の非零モード $\left(x_n^{\mu}, x_n^{gh}, y_n^{gh}\right)$ の半分 $\left(x_o^{\mu}, x_e^{gh}, y_e^{gh}\right)$ についてフーリエ変換するとhalf-string の＊積 が(anti-)Moyal★積にmapされる:

普通の座標表示　　フーリエ変換　　Moyal定式化での座標

$$\left(x_e^{\mu}, x_o^{\mu}, x_e^{gh}, x_o^{gh}, y_e^{gh}, y_o^{gh}\right) \longrightarrow \left(x_e^{\mu}, p_e^{\mu}, x_o^{gh}, p_o^{gh}, y_o^{gh}, q_o^{gh}\right) =: \xi$$

$$\downarrow$$

$$(l, l^b, l^c; r, r^b, r^c) \quad * \quad \longrightarrow \quad \text{Moyal} \star \text{積}$$

half string定式化での座標

簡単のため2変数の例:

$$A[x,p] := \int dy e^{-ipy} \widehat{\Psi}\left[x+\frac{y}{2}, x-\frac{y}{2}\right]$$ で場の対応を定義すると

$$A_1 \bigstar A_2[x,p] := A_1[x,p] \exp\left(\tfrac{i}{2}\left(\overleftarrow{\partial_x}\overrightarrow{\partial_p} - \overleftarrow{\partial_p}\overrightarrow{\partial_x}\right)\right) A_2[x,p]$$

$$= \int dy_1 dy_2 \widehat{\Psi}_1\left[x+\frac{y_1}{2}, x-\frac{y_1}{2}\right] e^{-ipy_1} \exp\left(\frac{i}{2}\left(\overleftarrow{\partial_x}\overrightarrow{\partial_p} - \overleftarrow{\partial_p}\overrightarrow{\partial_x}\right)\right) \widehat{\Psi}_2\left[x+\frac{y_2}{2}, x-\frac{y_2}{2}\right] e^{-ipy_2}$$

$$= \int dy_1 dy_2 \widehat{\Psi}_1\left[x+\frac{y_1}{2}, x-\frac{y_1}{2}\right] e^{-ipy_1} \exp\left(\frac{1}{2}\left(\overleftarrow{\partial_x} y_2 - y_1 \overrightarrow{\partial_x}\right)\right) \widehat{\Psi}_2\left[x+\frac{y_2}{2}, x-\frac{y_2}{2}\right] e^{-ipy_2}$$

$$= \int dy_1 dy_2 e^{-ip(y_1+y_2)} \widehat{\Psi}_1\left[x+\frac{y_1+y_2}{2}, x-\frac{y_1-y_2}{2}\right] \widehat{\Psi}_2\left[x-\frac{y_1-y_2}{2}, x-\frac{y_1+y_2}{2}\right]$$

$$y = y_1 + y_2, z = x - \frac{y_1 - y_2}{2}$$ と置き換えて

$$= \int dy dz e^{-ipy} \widehat{\Psi}_1\left[x+\frac{y}{2}, z\right] \widehat{\Psi}_2\left[z, x-\frac{y}{2}\right] = \int dy e^{-ipy} \widehat{\Psi_1 * \Psi_2}\left[x+\frac{y}{2}, x-\frac{y}{2}\right]$$

- 零モードも含めて弦場のmapを具体的に書くと

$$\hat{A}(\bar{x},\xi_0,\xi)$$

$$\sim \int d^{Nd}x_o \int dc_0 dx_e^{gh} dy_e^{gh} e^{-2ip_e T x_o} e^{-\xi_0(c_0-\bar{w}y_e^{gh})+2p_o^{gh}\bar{S}x_e^{gh}+2q_o^{gh}Ry_e^{gh}}$$

$$\times \left\langle \bar{x}+\bar{w}x_e, c_0, x_n, x_n^{gh}, y_n^{gh} \middle| \Psi \right\rangle$$

$$\Psi(x_0^\mu, c_0, x_n^\mu, x_n^{gh}, y_n^{gh})\Big|_{x_0^\mu=\bar{x}^\mu+w_e x_e^\mu}$$

（正則化する場合は n≦2N までとる。）

- ここで無限行列 T,R,S,w,v を導入した:

$$T_{eo} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\sigma \cos(e\sigma)\cos(o\sigma), \quad w_e = -\sqrt{2}\cos\frac{e\pi}{2}, S_{eo} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\sigma \sin(e\sigma)\sin(o\sigma),$$

$$T_{eo} = \frac{4oi^{o-e+1}}{\pi\left(e^2-o^2\right)}, R_{oe} = \frac{4e^2 i^{o-e+1}}{\pi o\left(e^2-o^2\right)}, S_{eo} = \frac{4ei^{o-e+1}}{\pi\left(e^2-o^2\right)}, w_e = \sqrt{2}i^{-e+2}, v_o = \frac{2\sqrt{2}i^{o-1}}{\pi o}.$$

- 無限行列の積の結合性の破れ

$$R(Tv) = R\cdot 0 = 0 \qquad \text{v.s.} \qquad (RT)v = 1\cdot v = v, \ldots$$

計算をwell-definedにするため、正則化する必要あり。

Regularization

- 無限行列の正則化：有限行列へ

$$R_{oe} = o^{-2} T_{eo} e^{2}, R_{oe} = T_{eo} + v_o w_e, v_o = \sum_e T_{eo} w_e, w_e = \sum_o R_{oe} v_o,$$

$$T_{eo} = e^{-1} S_{eo} o$$

をe→κ e,o→κ oとしN×N行列の関係式へ：

$$\boldsymbol{R} = \kappa_o^{-2} \bar{\boldsymbol{T}} \kappa_e^{2}, \quad \boldsymbol{R} = \bar{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{v}\bar{\boldsymbol{w}}, \quad \boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{w} = \bar{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{v},$$

$$\boldsymbol{T} = \kappa_e^{-1} \boldsymbol{S} \kappa_o.$$

逆にこれを定義だと思うと

(N, κ e, κ o)からT,R,S,w,vがあらわに定まる。

- 解いた結果は

$$T_{eo} = \frac{w_e v_o \kappa_o^2}{\kappa_e^2 - \kappa_o^2}, \quad R_{oe} = \frac{w_e v_o \kappa_e^2}{\kappa_e^2 - \kappa_o^2}, \quad S_{eo} = \frac{w_e v_o \kappa_e \kappa_o}{\kappa_e^2 - \kappa_o^2},$$

$$w_e = i^{2-e} \frac{\prod_{o'} \left| \kappa_e^2 / \kappa_{o'}^2 - 1 \right|^{1/2}}{\prod_{e' \neq e} \left| \kappa_e^2 / \kappa_{e'}^2 - 1 \right|^{1/2}}, \quad v_o = i^{o-1} \frac{\prod_{e'} \left| 1 - \kappa_o^2 / \kappa_{e'}^2 \right|^{1/2}}{\prod_{o' \neq o} \left| 1 - \kappa_o^2 / \kappa_{o'}^2 \right|^{1/2}}.$$

実際、 $f(z) = \frac{\prod_o \left(z^2 - \kappa_o^2 \right)}{\prod_e \left(z^2 - \kappa_e^2 \right)}$ と置くと

$$v_o^2 = \frac{2}{\kappa_o} \operatorname*{Res}_{z=\kappa_o} \frac{f(0)}{f(z)}, \quad w_e^2 = \frac{2}{\kappa_e} \operatorname*{Res}_{z=\kappa_e} \frac{f(z)}{f(0)}$$

などとして計算できる。
（符号はN=∞とconsistentに決める。）

これらの有限行列は次の関係式を満たす

$$TR=1,\ RT=1,\ \bar{R}R=1+w\bar{w},\ \bar{T}T=1-v\bar{v},$$

$$\bar{S}S=S\bar{S}=1,$$

$$T\bar{T}=1-\frac{w\bar{w}}{1+\bar{w}w},\ Tv=\frac{w}{1+\bar{w}w},\ \bar{v}v=\frac{\bar{w}w}{1+\bar{w}w},$$

$$Rw=v\left(1+\bar{w}w\right),\ R\bar{R}=1+v\bar{v}\left(1+\bar{w}w\right).$$

※特に $1+\bar{w}w=\dfrac{\prod_e \kappa_e^2}{\prod_o \kappa_o^2}$ はもとの無限行列に戻る極限で∞

MSFT [BM2,BKM3]

- セットアップ

  (N, κ_e, κ_o), $e=2,4,\ldots,2N$, $o=1,3,\ldots,2N-1$

  2N個のfrequencies

  → 正則化された行列T,R,S,w,vが決まる。

- Moyal Field

$$\hat{A}(\bar{x}, \xi_0, \xi)$$

d+1個(zeromode)+(2Nd+4N)個の変数

非可換座標

※$\kappa_e=e, \kappa_o=o$, N→∞の極限(open string limit)で通常の場合に戻る。

- 作用　(WittenのSFTのゲージ固定した作用の正則化)

$$S=-\int d^d\bar{x}\,\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}A\bigstar(L_0-1)A+\frac{1}{3}A\bigstar A\bigstar A\right),$$

$$\bigstar=\exp\left(\frac{1}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\xi}\sigma\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\xi}+\frac{1}{2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\xi^{gh}}\Sigma\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\xi^{gh}}\right),$$

$$\mathrm{Tr}=\frac{\det^{1/2}\Sigma}{\det^{d/2}\sigma}\int\frac{d^{2Nd}\xi}{(2\pi)^{Nd}}d^{2dN}\xi d^{4N}\xi^{gh},$$

$$L_0=\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{4}\bar{D}_\xi M_0^{-1}\tilde{\kappa}D_\xi+\bar{\xi}\tilde{\kappa}M_0\xi$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\xi^{gh}}M_0^{gh-1}\tilde{\kappa}^{gh}\frac{\partial}{\partial\xi^{gh}}+\bar{\xi}^{gh}\tilde{\kappa}^{gh}M_0^{gh}\xi^{gh}-\frac{d-2}{2}\sum_{n=1}^{2N}\kappa_n.$$

ここでSiegelゲージをとっている:　$\hat{A}(\bar{x},\xi_0,\xi)=\xi_0 A(\bar{x},\xi)$

Consistency check

- MSFTでの「ノイマン係数」を

$$\int d^d\bar{x}\int d\xi_0^{(1)}d\xi_0^{(2)}d\xi_0^{(3)}\mathrm{Tr}\left(A_1\bigstar A_2\bigstar A_3\right)\sim\langle\Psi_1|\langle\Psi_2|\langle\Psi_3|V_3\rangle,$$

$$|V_3\rangle=\exp\left(-\frac{1}{2}a^{r\dagger}V^{rs}a^{s\dagger}-a^{r\dagger}V^{rs}{}_0p^s-\frac{1}{2}V_{00}p^rp^r-c^{r\dagger}X^{rs}b^{s\dagger}-c^{r\dagger}X^{rs}{}_0b_0\right)|p\rangle$$

で読み取るとGross-Jevickiの関係式と一致。

（open string limitでは数値的にも一致。）

⇒ 相互作用項が正しく翻訳されている。

- 1-loop vacuum amplitudeのあらわな計算

$$\int d^dp\mathrm{Tr}e^{-\tau L_0}=(2\pi)^{\frac{d}{2}}\tau^{-\frac{d}{2}}\prod_{e>0}\left(1-e^{-\tau\kappa_e}\right)^{-(d-2)}\prod_{o>0}\left(1-e^{-\tau\kappa_o}\right)^{-(d-2)}$$

正しいスペクトラムを再現する。 ⇒ 運動項も正しい。

応用

- 摂動論[BKM1]

  非可換空間上の場の理論の類似

  バーテックスに位相因子～Moyal積

  プロパゲータがやや複雑　しかし基本的にGaussian積分だけ。

- 非摂動真空[BKM2]

  $(L_0 - 1)A + A \star A = 0$　を解けという問題に帰着。

  一般にはやはり難しいが…

  splitting limit: $\kappa_e = \kappa_o$ では厳密に解ける。

閉弦との結合

作用にソース項を次の形で入れてみる:

$$\int \Phi\Psi =: \langle I | V(\pi/2) | \Psi \rangle \sim \langle \tilde{I} | O(\pi/2) | \Psi \rangle.$$

ここで $\left|\tilde{I}\right\rangle := e^{-\sum_{n\geq 1}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\alpha_{-n}\alpha_{-n}+c_{-n}b_{-n}\right)} c_0 c_1 \left| p=0 \right\rangle$

はidentitiy string field(にccをかけたもの)[Hashimoto-Itzhaki]。

これはMSFTの言葉ではMoyal積の単位元:

$$A_{\tilde{I}} \sim 1$$

より、MSFTではソース項は $\int d\bar{x} \;\; f_O(\bar{x}) \mathbf{Tr} A_{\Psi}(\bar{x}, \xi).$

課題

- 「ゲージ不変」な作用を書きたい。
  - 有限個の変数での「BRST operator」は、素朴に作ると ベキ零性 が壊れる。
- super化をする。

テクニカルには

- Veneziano amplitudeをあらわに再現する。
- 非摂動真空解を解析的に求める。

Appendix

Wittenの＊積をMoyal★積であらわす方法：

Bars流

$$\star = \exp\left(\frac{i\theta}{2}\sum_e\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_e}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_e}-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_e}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_e}\right)\right)$$

DLMZ流

$$\star = \exp\left(\int d\kappa\, i\tanh\frac{\pi\kappa}{4}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x(\kappa)}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p(\kappa)}-\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p(\kappa)}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x(\kappa)}\right)\right)$$

bcゴースト部分もGrassmann oddな変数のMoyal積でそれぞれあらわされる。[Erler, BKM3]

非零モードの運動量表示で書くと

MSFTでバーテックスは

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i<j}\bar{\eta}_i\sigma\eta_j-\frac{1}{2}\sum_{i<j}\bar{\eta}_i^{gh}\Sigma\eta_j^{gh}\right)\delta^{2Nd}\left(\eta_1+\cdots+\eta_n\right)\delta^{4N}\left(\eta_1^{gh}+\cdots+\eta_n^{gh}\right)$$

プロパゲータは

$$\Delta\left(\eta,\eta',\tau,p\right):=\int\frac{d^{2Nd}\xi}{\left(2\pi\right)^{2Nd}}d^{4N}\xi^{gh}(e^{-i\bar{\xi}\eta}e^{\bar{\xi}^{gh}\eta^{gh}})e^{-\tau L_0(p)}(e^{i\bar{\xi}\eta'}e^{-\bar{\xi}^{gh}\eta'^{gh}})$$

$$=(\ldots)\exp(\eta,\eta'\text{の2次式})$$

～　調和振動子の多変数版

$$(L_0 - 1)A = \mathcal{L}_0 \bigstar A + A \bigstar \mathcal{L}_0 + \gamma A,$$

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{e>0} \kappa_e (\beta_{-e} \bigstar \beta_e + \beta^b_{-e} \bigstar \beta^c_e + \beta^c_{-e} \bigstar \beta^b_e) - \nu,$$

$$\nu = \frac{1}{2} - \frac{d-2}{4}\left(\sum_{e>0} \kappa_e - \sum_{o>0} \kappa_o\right),$$

$$\gamma \sim \frac{w_e w_{e'}}{1 + w\overline{w}} (\mathbf{oscillators})_{ee'}$$

と分解できてsplitting limitではγ項が消える

⇒　このとき厳密解 $A_P = -2\mathcal{L}_0 \bigstar P,$

$$P \bigstar P = P, P \bigstar \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0 \bigstar P.$$

素朴に正則化する(M=2Nでモードを切る)と

$$Q_B^2 = -\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{m} c_{-m}c_n \sum_{k=M-n+1}^{M}(n+k)\alpha_{m-n-k}\alpha_k - \sum_{n=1}^{M}\sum_{m=1}^{n-1} c_{-m}c_n \sum_{k=M-m+1}^{M}(m+k)\alpha_{-k}\alpha_{m-n+k}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{|m|\le M,|n|\le M,M<|m+n|} c_{-m}c_{-n}\left[L_m^{matter}, L_n^{matter}\right]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\substack{|n|,|m|,|k|,|m+n|,|m+n+k|\le M,\\ \{M<|m+n-k| \text{ or } M<|m-n+k| \text{ or } M<|m-n-k|\}}} (m-n)(k-m-n):c_{-n}c_{-m}c_{-k}b_{m+n+k}:$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M} c_{-m}c_m\left(\frac{26-d}{6}m^3 + \frac{d-2-24a_0}{6}m\right)$$

となって零にならない。

→　素朴にMSFTに翻訳したのでは作用はゲージ不変にならない。