閉弦の場の理論における冪等方程式とその応用

○岸本功, 松尾泰, 渡辺英徳
（東大理）

I.K. and Y.M. hep-th/0402107 (accepted in PLB)
+ work in progress

参考 KMW1 PRD68(2003)126006, KMW2 PTP111(2004)433

境界状態と冪等方程式

- 今までの結果(flat B.G.) [KMW1,KMW2] :

"idempotency equation"(冪等方程式)　← 非線形

$$|\Phi(\alpha_1)\rangle * |\Phi(\alpha_2)\rangle = \mathcal{C}\, c_0^+ |\Phi(\alpha_1+\alpha_2)\rangle$$

の解は境界状態(Cardy状態)。石橋状態の積は「非対角」:　$(L_n - \tilde{L}_{-n})|\cdot\rangle\rangle = 0$

$$|p_1\rangle\rangle_{\alpha_1} * |p_2\rangle\rangle_{\alpha_2} = \mathcal{C} c_0^+ |p_1+p_2\rangle\rangle_{\alpha_1+\alpha_2}$$

- [予想] 一般に物理的な境界状態はidempotency eq.を満たす。Closed SFTで、Cardy条件に対応するものが、idempotency eq.だろう。

オービフォールド(M/Γ)の場合

twisted sector: $X(\sigma+2\pi)=gX(\sigma)\quad(g\in\Gamma)$

- twisted sector g,g' のclosed stringの $*$ 積(つないだもの)は gg' sectorのclosed stringになる。

- [KMW2]より, $(L_n-\tilde{L}_{-n})|\Phi_r\rangle=0\ (r=1,2)$

$$\to\ (L_n-\tilde{L}_{-n})|\Phi_1*\Phi_2\rangle=0.$$

∴石橋状態の $*$ 積: $|g\rangle\rangle_{\alpha_1}*|g'\rangle\rangle_{\alpha_2}\sim|gg'\rangle\rangle_{\alpha_1+\alpha_2}.$

⇒ 石橋状態の線形結合の $*$ 積は群環 $\mathrm{C}^{[\Gamma]}$ の積の構造をもつ。

$$e_g\star e_{g'}=e_{gg'},\quad \textstyle\sum_{g\in\Gamma}\lambda_g e_g\in \mathrm{C}^{[\Gamma]},\ \lambda_g\in\mathrm{C}$$

$X(\sigma+2\pi) = g \cdot X(\sigma)$

$\downarrow$

$h \cdot X(\sigma+2\pi) = (hgh^{-1}) \cdot h \cdot X(\sigma)$

$\boldsymbol{\Gamma}$ がnonabelianのときは共役類で和をとる ：$e_i = \sum_{g \in \mathcal{C}_i} e_g$

群環の積の公式 ：$e_i \star e_j = \mathcal{N}_{ij}^{\;\;k} e_k$ 　ここで

$$\mathcal{N}_{ij}^{\;\;k} = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\alpha:\text{irreps.}} \frac{|\mathcal{C}_i||\mathcal{C}_j|\zeta_i^{(\alpha)}\zeta_j^{(\alpha)}\zeta_k^{(\alpha)*}}{\zeta_1^{(\alpha)}}. \quad (\zeta_i^{(\alpha)} : \text{character})$$

$\downarrow$ 指標の直交性

→ idempotent ：$P^{(\alpha)} = \frac{\zeta_1^{(\alpha)}}{|\Gamma|} \sum_{i:\text{class}} \zeta_i^{(\alpha)} e_i$, $P^{(\alpha)} \star P^{(\beta)} = \delta_{\alpha,\beta} P^{(\beta)}$.

一方、Cardy状態は ：$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{|\Gamma|}} \sum_{i:\text{class}} \zeta_i^{(\alpha)} \sqrt{\sigma_i} |i\rangle\rangle, \quad |i\rangle\rangle := \sum_{g \in \mathcal{C}_i} |g\rangle\rangle$,

[cf. Billo et al.(2001)]

$$\langle\alpha|\tilde{q}^{\frac{1}{2}\left(L_0 + \tilde{L}_0 - \frac{c}{12}\right)}|\beta\rangle = \sum_i n_{\alpha\beta}^{\;\;i} \chi_i(q) \; .$$

RCFTのfusion代数との関係

fusion代数 $e_i \star e_j = N_{ij}^{\ k} e_k, \quad N_{ij}^{\ k} = \sum_l \frac{S_{il} S_{jl} S^*_{kl}}{S_{1l}}$ [Verlinde]

S_{ij} のユニタリ性

idempotent: $P^{(\alpha)} = S^*_{1\alpha} \sum_{i:\mathrm{primary}} S_{i\alpha} e_i, \; P^{(\alpha)} \star P^{(\beta)} = \delta_{\alpha,\beta} P^{(\beta)}.$

[T.Kawai (1989)]

このとき、Cardy状態は: $|\alpha\rangle = \sum_{i:\mathrm{primary}} \frac{S_{\alpha i}}{\sqrt{S_{1i}}} |i\rangle\rangle$

石橋状態の＊積が $|i\rangle\rangle_{\alpha_1} * |j\rangle\rangle_{\alpha_2} \sim N_{ij}^{\ k} |k\rangle\rangle_{\alpha_1+\alpha_2}$ となっていれば

（up to normalization）で　idempotent ~ Cardy状態

具体例($T^D, T^D/Z_2$)

- $T^D, T^D/Z_2$ 上のHIKKO型closed SFT(特に＊積)はあらわに構成されている。 [HIKKO(1987), Itoh-Kunitomo(1988)]

$$|\Phi_1 * \Phi_2\rangle_3 = {}_1\langle\Phi_1|{}_2\langle\Phi_2|V(1,2,3)\rangle$$

- ＊積(3-string vertex)の変更点：
cocycle factor, twisted sectorのノイマン係数

$$(-1)^{p_2 w_2 - p_1 w_3}|V_0(1_u, 2_u, 3_u)\rangle,$$ ← [Maeno-Takano (1989)]

$$(-1)^{p_1 n_3^f}\delta([n_3^f - n_2^f + w_1])|V_0(1_u, 2_t, 3_t)\rangle$$

少し複雑になるが[KMW1]での計算と同様な計算ができる！

計算結果

- T^D/Z_2の場合

Fractional D-braneに対応する境界状態:

$$|n^f,\alpha\rangle_\pm = \frac{1}{2}\left(e^{a_n^\dagger \tilde{a}_n^\dagger}|n^f,\alpha\rangle_u \pm c_t e^{a_r^\dagger \tilde{a}_r^\dagger}|n^f,\alpha\rangle_t\right)$$

およびこのT-dual(ノイマン境界条件)は idempotency eq.
を満たす。相対係数はノイマン係数の行列式で決まる:

$$c_t = \left(e^{-\frac{\tau_0}{4}(\alpha_1^{-1}+\alpha_2^{-1})}\frac{\det(1-(\tilde{T}^{1_u 1_u}(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2))^2)}{\det(1-(\tilde{N}^{33}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3))^2)}\right)^{\frac{D}{4}}$$

ここで

$$|V_0(1_u,2_t,3_t)\rangle = \mu_t^2\, e^{\frac{1}{2}a^{tr}\tilde{T}^{rs}a^{ts}+\frac{1}{2}\tilde{a}^{tr}\tilde{T}^{rs}\tilde{a}^{ts}}\,|p_1,w_1\,;\,n_2^f\,;\,n_3^f\rangle\,,$$

$$\sum_{t,l_t}\tilde{T}^{rt}_{n_r l_t}\tilde{T}^{ts}_{l_t m_s}=\delta_{n_r,m_s}\,,\quad \sum_{t,l_t}\tilde{T}^{1t}_{0l_t}\tilde{T}^{ts}_{l_t m_s}=-\tilde{T}^{1s}_{0m_s}\,,\quad \sum_{t,l_t}\tilde{T}^{1t}_{0l_t}\tilde{T}^{t1}_{l_t 0}=-2\tilde{T}^{11}_{00}\,,$$

$$\tilde{T}^{rs}_{n_r m_s}=\frac{\alpha_1 n_r m_s}{\alpha_r m_s+\alpha_s n_r}\tilde{T}^{r1}_{n_r 0}\tilde{T}^{s1}_{m_s 0}\,,$$

$$C=\lim_{T\to 0}\mu_u^2\,\det{}^{-\frac{d+D-2}{2}}(1-\tilde{N}^{33}\tilde{N}_T^{33})\quad (\sim T^{-3}|\alpha_1\alpha_2\alpha_3|\,,\ d+D=26)$$

$$=\lim_{T\to 0}\mu_t^2\,\det{}^{-\frac{D}{2}}(1-\tilde{T}^{3_t3_t}\tilde{T}_T^{3_t3_t})\,\det{}^{-\frac{d-2}{2}}(1-\tilde{N}^{33}\tilde{N}_T^{33})\,,$$

：係数の普遍性！

$$\tilde{T}^{11}_{00}-\sum_{r,s=2,3}\tilde{T}^{1r}_{0\cdot}[(1+\tilde{T})^{-1}]^{rs}_{\cdot\cdot}\tilde{T}^{s1}_{\cdot 0}=-\infty\,,\ \cdots$$

を使った。

今後の展望

- 背景にB場が入ったときの、非可換ソリトンと idempotency eq. との関係は？
  （非常に素朴にはKT operator：$\exp\left(-\frac{i}{4}\oint\oint P_i\theta^{ij}\epsilon P_j\right)$ で境界状態の＊積 → Moyal積　だが…）
- 他の非自明な背景の場合にも成り立つか？
  （ほかのオービフォールド $\mathbf{C}/\mathbf{Z}_N$ の場合など…）
- Superstringの場合は？
- Cardy条件とclosed SFTの冪等条件の関係の精密化
  （数因子, α 依存の普遍性…）

$$\begin{cases} V_\theta = \exp\left[-\dfrac{i}{4}\oint\oint P_i(\sigma)\,\theta^{ij}\,\epsilon(\sigma-\sigma')\,P_j(\sigma')\right] \\[2ex] |x\rangle_D * |y\rangle_D = \delta(x-y)\, e\, c_0^+ |y\rangle_D \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{安直}]{} \qquad \Phi_f = \int dx\, f(x)\, V_\theta |x\rangle_D$$

$$\Phi_f * \Phi_g = e\, c_0^+\, \Phi_{f *_M g}$$

$\therefore\ \Phi_f$: idempotent

$\Leftrightarrow\ f *_M f = f$

しかし $\quad \oint \to \int_{\sigma_0-\pi}^{\sigma_0+\pi}$ とすると

$$\underbrace{V_\theta}_{\text{KT op.}} |p\rangle\rangle_D = \underbrace{V_p(\sigma_0 \pm \pi)}_{\text{タキオン vertex}} \,|\, B(F = \pi\theta^{-1})\rangle$$

- 群環 / fusion 代数で

$P^{(\alpha)} * P^{(\beta)} = \delta_{\alpha,\beta} P^{(\beta)} \longrightarrow P = \sum \epsilon_\alpha P^{(\alpha)}$, $\epsilon_\alpha = 0, 1$ は $P * P = P$ をみたす

- $*$ (群環 / fusion 代数) : associative

  $*$ (HIKKO type) : 一般には non-associative

  $\longrightarrow$ 石橋状態に限れば associative (?)

  具体例 : $\mathbb{R}^d$, T^D, $T^D/\mathbb{Z}_2$ では O.K.