# 超弦理論における境界状態と閉弦の場の理論の非線形な関係式

高エ研，東大理[A]　○岸本 功，渡辺英徳[A]

*参考文献:*

I.K., Y.Matsuo, E.W. PRD68 (2003) 126006, PTP111 (2004) 433 [KMW1,2]
I.K., Y.Matsuo PLB590 (2004) 303, NPB707 (2005) 3 [KM1,2]

# Introduction

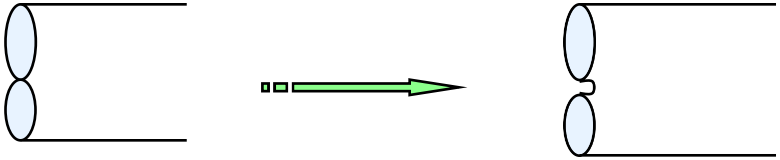
- (bosonicな)閉弦の場の理論のスター積に関して境界状態は冪等元 : [KMW1,2]

$$|\Phi_B\rangle * |\Phi_B\rangle = Cc_0^+|\Phi_B\rangle$$

- Cardy状態のとき冪等元 : [KM1,2]　冪等方程式　～　Cardy条件

$$\langle B|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(L_0+\tilde{L}_0-\frac{c}{12})}|B'\rangle = \sum_i N^i_{BB'}\chi_i(q)$$

- 係数は発散 : （正則化すると）open stringのタキオンによるもの、と解釈できる: [KM2]



**超弦理論の場合は？**

# vertexと境界状態のスター積(RNS形式）

- 3-stirng vertexのあらわな構成(LPP流) (boson化しない版 [HIKKO(1987)])

  ここでは、ノイマン係数の計算の都合上、bosonizeする:

$$\psi^{\pm a} = e^{\pm\phi^a} c_{\pm e^a},\ \tilde{\psi}^{\pm a} = e^{\pm\tilde{\phi}^a} \tilde{c}_{\pm e^a},\ (a = 1, \cdots, 5)$$ :matter fermion

$$\beta = e^{-\phi}\partial e^{\chi},\ \gamma = e^{\phi-\chi},\ \ \tilde{\beta} = e^{-\tilde{\phi}}\bar{\partial} e^{\tilde{\chi}},\ \tilde{\gamma} = e^{\tilde{\phi}-\tilde{\chi}}$$ :superghost

bosonizeした場の各セクターに対しLPP vertexは

$$\phi(y)\phi(z) \sim \varepsilon \log(y-z), \qquad T(z) = \frac{1}{2}\varepsilon(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}Q\partial^2\phi,$$

$$\langle V_3^{\rm LPP}|A_1\rangle|A_2\rangle|A_3\rangle = \langle h_1[\mathcal{O}_{A_1}]h_2[\mathcal{O}_{A_2}]h_3[\mathcal{O}_{A_3}]\rangle$$

からconformal mapを決めると具体的に構成される。 [LeClair-Peskin-Preitschopf (1989)]

- Oscillatorによる表示

$$\langle V_3^{\rm LPP}| = \sum_{q_1,q_2,q_3} \delta_{q_1+q_2+q_3+Q,0}\langle -q_i - Q| e^{\frac{1}{2}\varepsilon\sum_{m,n\geq 0}\sum_{r,s=1}^{3} j_m^r \mathcal{N}_{mn}^{rs} j_n^s}$$

ここでノイマン係数は　$\mathcal{N}_{mn}^{rs} = \bar{N}_{mn}^{rs},\ \mathcal{N}_{0m}^{rs} = \bar{N}_{0m}'^{rs} - \frac{1}{2}K_m'^{s}, \cdots$

$\bar{N}_{mn}^{rs}, \bar{N}_{0m}'^{rs}$　はbosonic stringのmatterと同じノイマン係数。

$K_m'^{s}$ はQのためにずれで、HIKKO型の貼り合わせの場合、

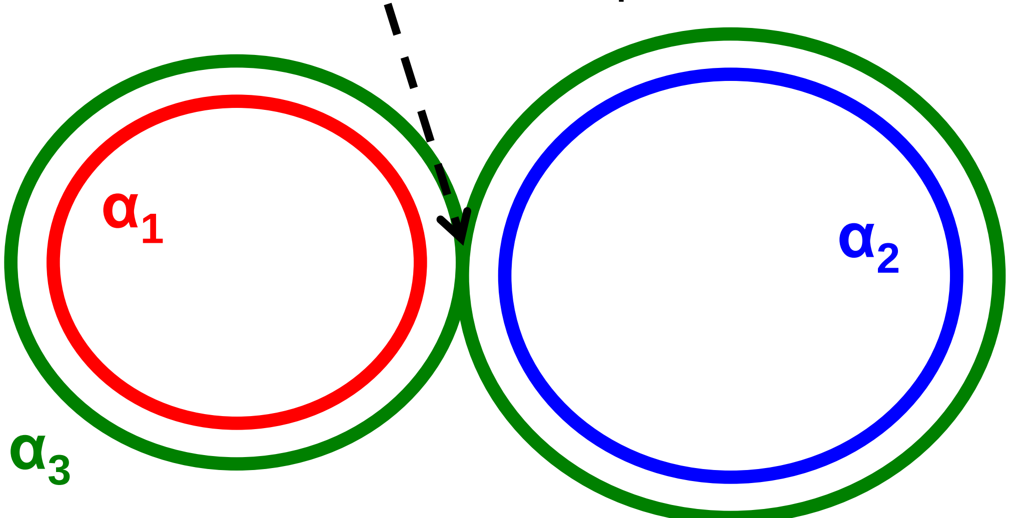
$$K_m'^{1} = \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\frac{e^{m\frac{\tau_0}{\alpha_1}}}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\Gamma(-m\alpha_2/\alpha_1+1)}{k!\,\Gamma(-m\alpha_2/\alpha_1-k+1)}\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^{m-1-k}$$

など、全てあらわに計算できる係数で、実は**相互作用点**でのpoleの寄与。

$$\langle V_3^{\rm LPP}| \sim \langle v_3| e^{-\frac{Q}{2}\phi(z_{\rm int})}$$

$\uparrow$

素朴な接続条件で決まる部分



- Dp braneをあらわす境界状態 [Callan et.al.(1987),…,Yost(1989)]

$$(\alpha_n^\mu + S^\mu{}_\nu \tilde{\alpha}^\nu{}_{-n})|B;\eta\rangle = 0, \ (\psi_r^\mu - i\eta S^\mu{}_\nu \tilde{\psi}^\nu{}_{-r})|B;\eta\rangle = 0,$$

$$S^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu \text{ (Neumann)}; -\delta^\mu_\nu \text{ (Dirichlet)},$$

$$(c_n + \tilde{c}_{-n})|B;\eta\rangle = 0, \ (b_n - \tilde{b}_{-n})|B;\eta\rangle = 0,$$

$$(\gamma_t + i\eta\tilde{\gamma}_{-t})|B;\eta\rangle = 0, \ (\beta_t + i\eta\tilde{\beta}_{-t})|B;\eta\rangle = 0, \quad (\eta = \pm 1)$$

を満たす（bosonizeした）解： $|B;\eta\rangle_P = |B_{\text{bosonic}}\rangle \otimes |B;\eta\rangle^\psi \otimes |B;\eta\rangle_P^{\beta\gamma}$

$$|B;\eta\rangle^\psi = \sum_{s^1,\cdots,s^5} \prod_{b=1}^{5} (\eta\eta^b)^{s^b+c} e^{-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} j^a_{-n}\tilde{j}^a_{-n}} |s^a, -s^a\rangle, \quad (c = 0\,(\mathrm{NS}^2);\ -\frac{1}{2}\,(\mathrm{R}^2))$$

$$\eta^b = 1 \text{ (Neumann)}; -1 \text{ (Dirichlet)},$$

$$|B;\eta\rangle_P^{\beta\gamma} = \sum_s (i\eta)^{s-P} e^{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} j_{-n}\tilde{j}_{-n}} |s, -s-2\rangle_\phi \otimes |B_{P-s}\rangle_\chi, \quad ((P, -P-2)\text{-picture})$$

ここでχセクターは

$$\begin{aligned} |B_m\rangle_\chi &:= \eta_0 e^{-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\chi_{-n}\tilde{\chi}_{-n}} |m+1, -m\rangle_\chi = \tilde{\eta}_0 e^{-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\chi_{-n}\tilde{\chi}_{-n}} |m, -m+1\rangle_\chi \\ &= \oint \frac{d\theta}{2\pi} e^{-im\theta} e^{-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}(\chi_{-n}\tilde{\chi}_{-n} + \chi_{-n}e^{in\theta} + \tilde{\chi}_{-n}e^{-in\theta})} |m, -m\rangle_\chi \end{aligned}$$

- 境界状態の「＊積」は？

bosonicのときと同様に $|\Phi_B\rangle = c_0^- b_0^+ |B\rangle$ として

$$\langle \Phi_B * \Phi_B | \sim \langle V_3^{\mathrm{LPP}} | (X(z_{\mathrm{int}}) \tilde{X}(\bar{z}_{\mathrm{int}})) b_0^- |\Phi_B\rangle_1 \, b_0^- |\Phi_B\rangle_2$$

とみなすことにする。ここでpicture changing operator

$$X(z) = e^{\phi}(i\psi^{\mu}\partial X_{\mu}) + c\partial e^{\chi} - e^{2\phi}(\partial e^{-\chi})b - \partial(e^{2\phi-\chi}b)$$

を入れるのは***open*** superstring field theory（Witten版)の類推。
(つまりNSNSセクターが (-1,-1) pictureのとき)

- 計算上有用なノイマン係数の関係式

$\bar{N}^{rs}_{mn}$ に関してはbosonicのときのGreen-Schwarz,Yoneyaの公式および

$$K'^{r}_{m} = \sum_{k=1}^{\infty} (\cos k\sigma^{(3)}_{\mathrm{int}})(k^{-1}\delta^{3,r}\delta_{k,m} - \bar{N}^{3r}_{km})$$

- matterセクター

$$\langle V_3^{\mathrm{LPP}}|B(x_\perp);\eta_1\rangle_1|B(y_\perp);\eta_2\rangle_2$$
$$=\delta^{9-p}(x_\perp-y_\perp)(2\pi\delta(0))^5\,\delta_{\eta_1,\eta_2}\det{}^{-\frac{15}{2}}(1-(\tilde{N}^{33})^2)C_{12}\langle B(y_\perp);\eta_2|$$

ここで $C_{12}$ は　NSNS∗NSNS～NSNS のとき +1
NSNS∗RR～RR,  RR∗NSNS～RR, RR∗RR～NSNS のとき $\eta_2(-1)^{(9-p)/2}$

⇒ bosonizeしているので、determinantファクターはキャンセルしないが、bosonic closed SFTのときと同様、境界状態は「冪等」になっている。
※picture changing operatorがある場合は $\psi^\mu\partial X_\mu\tilde{\psi}^\nu\bar{\partial}X_\nu$ などがかかる。

- ghostセクター

bc部分はbosonic closed SFTのときと同じ:

$$\langle V_3^{\mathrm{LPP}}|b_0^+|B\rangle_1\,b_0^+|B\rangle_2=\mu^2\det(1-(\tilde{N}^{33})^2)\langle B|c_0^-$$

※picture changing operatorがある場合は、ほかにも項がでうる。

- superghostセクター

$$\langle V_3^{\mathrm{LPP}}|e^{\phi(z_{\mathrm{int}})}e^{\tilde{\phi}(\bar{z}_{\mathrm{int}})}|B;\eta_1\rangle_{P_1}|B;\eta_2\rangle_{P_2}$$
$$= 2\pi\delta(0)\delta_{\eta_1,-\eta_2}\mu^{-\frac{3}{4}}\det{}^{-1}(1-(\tilde{N}^{33})^2)C_{\phi\chi}$$
$$\times\ {}_{(-P_1-P_2-3)}\langle B^{\sigma^{(3)}_{\mathrm{int}}};\eta_2|\int_{C_1}\frac{dz}{2\pi i}e^{-\chi(z)}\int_{C_2}\frac{d\bar{z}}{2\pi i}e^{-\tilde{\chi}(\bar{z})}$$

ここで $${}_P\langle B^{\sigma^{(3)}_{\mathrm{int}}};\eta|\oint\frac{d\theta}{2\pi}e^{i\theta(L_0-\tilde{L}_0)}\sim {}_P\langle B;\eta|$$

$$C_{\phi\chi}=(-\beta)(1+\beta)e^{-\frac{7\tau_0}{4\alpha_3}-\sum_{n\geq1}\frac{\cos^2 n\sigma^{(3)}_{\mathrm{int}}}{4n}-\frac{1}{4}\sum_{m,n\geq1}\tilde{N}^{33}_{mn}\cos m\sigma^{(3)}_{\mathrm{int}}\cos n\sigma^{(3)}_{\mathrm{int}}}$$

⇨ matter部分とあわせてGSO projectionなどを議論するには最終的な3-string vertexの形のcocycle factorを精密に決定する必要がある。結果はclosed super SFTの作用のゲージ不変性と無矛盾であるべき。今の場合、全体の係数は自明にキャンセルする形ではなく、正則化して評価する必要がある。
※picture changing operatorによるほかの項もでうる。

# 境界状態のスター積（Green-Schwarz形式）

- 3-string vertex [Green-Schwarz-Brink(1983)]

$$|V_3\rangle = X^i \tilde{X}^j v_{ij}(Y)|v_3\rangle,$$

$$X^i = \mathrm{P}^i - \sum_{r=1}^{3}\sum_{n\geq 1}\frac{\alpha_{123}}{\alpha_r}(\bar{N}^r C)_n \alpha_{-n}^{i(r)}, \quad \tilde{X}^i = \mathrm{P}^i - \sum_{r=1}^{3}\sum_{n\geq 1}\frac{\alpha_{123}}{\alpha_r}(\bar{N}^r C)_n \tilde{\alpha}_{-n}^{i(r)},$$

$$v_{ij}(Y) = \delta^{ij} - \frac{i}{\alpha_{123}}\gamma_{ab}^{ij} Y^a Y^b + \frac{1}{6(\alpha_{123})^2}\gamma_{[ab}^{ik}\gamma_{cd]}^{jk} Y^a Y^b Y^c Y^d$$
$$- \frac{4i}{6!(\alpha_{123})^3}\gamma_{ab}^{ij}\varepsilon^{abcdefgh} Y^c Y^d Y^e Y^f Y^g Y^h + \frac{16}{8!(\alpha_{123})^4}\delta^{ij}\varepsilon^{abcdefgh} Y^a Y^b Y^c Y^d Y^e Y^f Y^g Y^h,$$

$$Y^a = \Lambda^a - \alpha_{123}\sum_{r=1}^{3}\sum_{n\geq 1}\hat{N}_n^r\left(e^{i\pi/4} S_{-n}^{(r)} + e^{-i\pi/4}\tilde{S}_{-n}^{(r)}\right),$$

$|v_3\rangle$ は素朴な接続条件で決まる部分でbosonic部分はbosonic closed SFTと同じ。
fermionic部分は

$$|v_3\rangle = \int d^8\lambda_1^a d^8\lambda_2^a d^8\lambda_3^a \delta^8(\lambda_1^a + \lambda_2^a + \lambda_3^a) e^{E_Q}|\lambda_r^a\rangle$$

$$E_Q = \frac{1}{2} S_{-m}^{(r)} \hat{X}_{mn}^{rs} S_{-n}^{(s)} + \frac{1}{2}\tilde{S}_{-m}^{(r)} \hat{X}_{mn}^{rs} \tilde{S}_{-n}^{(s)}$$
$$+ \frac{i}{2}\alpha_{123} S_{-m}^{(r)} \hat{N}_m^r \hat{N}_n^s \tilde{S}_{-n}^{(s)} - \Lambda \hat{N}_n^r\left(e^{-i\pi/4} S_{-n}^{(r)} + e^{i\pi/4}\tilde{S}_{-n}^{(r)}\right)$$

- Green-Schwarz形式での境界状態 [Green-Gutperle(1996)]

$$|B;\eta_\pm\rangle = e^{M_{ij}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha^i_{-n}\tilde{\alpha}^j_{-n} - i\eta_\pm M_{ab}\sum_{n=1}^{\infty}S^a_{-n}\tilde{S}^b_{-n}}|B_0\rangle$$

ここで $\eta_\pm$＝±1 で ｜$B_0$〉 はゼロモード部分:

$$|B_0\rangle = |B_0\rangle_{\mathrm{bosonic}} \otimes \left(M_{ij}|i\rangle|j\rangle - i\eta_\pm M_{\dot{a}\dot{b}}|\dot{a}\rangle|\dot{b}\rangle\right)$$

時空のSUSYを半分保つような定数行列M:

$$M_{ij} = \left(e^{\Omega_{kl}\Sigma^{kl}}\right)_{ij}, \ \left(\Sigma^{kl}_{ij} = \delta^k_i\delta^l_j - \delta^l_i\delta^k_j\right), \quad M_{ab} = \left(e^{\frac{1}{2}\Omega_{kl}\gamma^{kl}}\right)_{ab}, \quad M_{\dot{a}\dot{b}} = \left(e^{\frac{1}{2}\Omega_{kl}\gamma^{kl}}\right)_{\dot{a}\dot{b}}$$

Dp braneは $\Omega_{kl}$ で特徴づけられる。

特にfermionゼロモード依存性は（一般には）

$$\langle B_0|\lambda\rangle = \frac{1}{4}(\mathrm{Tr}M_{ij} + \eta_\pm \mathrm{Tr}M_{\dot{a}\dot{b}})\, e^{\frac{i}{\alpha}\lambda^a\Theta_{ab}\lambda^b}, \quad \Theta = \begin{cases} \tanh\left(\frac{1}{4}\Omega_{kl}\gamma^{kl}\right) & (\eta_\pm = +1) \\ \coth\left(\frac{1}{4}\Omega_{kl}\gamma^{kl}\right) & (\eta_\pm = -1) \end{cases}$$

# • 境界状態の非線形な関係式

$|B_0\rangle_{\text{bosonic}} = |p^i_\perp, \alpha\rangle$ として、「スター積」を直接計算すると

$$\langle B(-p^i_{\perp 1}, -\alpha_1)|\langle B(-p^i_{\perp 2}, -\alpha_2)|V_3\rangle = (4\epsilon)^{-4} V_{kl} E^{kl} e^{\Delta E} |B(p^i_{\perp 1}+p^i_{\perp 2}, \alpha_1+\alpha_2)\rangle$$

prefactor以外はbosonic closed SFTのときと全く同様な関係式が成り立つ。
ここでprefactorは行列M(あるいは$\Omega_{kl}$)に次のように依存する形:

$$E^{kl} = \epsilon^{-2}\left[\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2\delta_{k,p} + (\mathrm{P}^k + \alpha_1\alpha_2(BC^{\frac{1}{2}})_m \alpha^k_{-m})(\mathrm{P}^p + \alpha_1\alpha_2(BC^{\frac{1}{2}})_n \tilde{\alpha}^p_{-n})\right] M_{pl}\,,$$

$$\Delta E = \begin{cases} 0 & (M_{ab} = M_{ba}) \\ -\frac{\alpha_1\alpha_2}{4}(S^\dagger_m - i\eta_\pm \tilde{S}^\dagger_m M^T)^a (BC^{\frac{1}{2}})_m (\Theta^{-1})_{ab} (BC^{\frac{1}{2}})_n (S^\dagger_n - i\eta_\pm M \tilde{S}^\dagger_n)^b & (M_{ab} \neq M_{ba}) \end{cases},$$

$$V_{kl} = \frac{1}{6}\mathrm{det}_{a,b}(1-(1-\epsilon)\eta_\pm M)[\mathrm{Tr}(M_{ij}) + \eta_\pm \mathrm{Tr}(M_{\dot{a}\dot{b}})]\alpha_3^4 \int d^8\Lambda\, v_{kl}(\Lambda) e^{-\frac{i}{\alpha_{123}}\Lambda^a \Theta_{ab}\Lambda^b}$$

$V_{kl}$ の例:

D(-1), D7 braneに対して $\quad V_{kl} = \pm\epsilon^8 \frac{8}{3}(\alpha_1\alpha_2)^{-4}\,\delta_{k,l}$

anti- D(-1),D7 braneに対して $\quad V_{kl} = \pm\frac{2^{16}}{3^2}(\alpha_1\alpha_2)^{-4}\,\delta_{k,l}$

※特にprefactorの $\epsilon\,(\to 0)$ の冪がbraneの種類によって異なる。

# • コメント

- ノイマン行列の正則化: $\epsilon := 1 + \alpha_{123} \sum_{r,s=1,2} \sum_{m,n\geq 1} (\tilde{N}^r C \alpha_r^{-1})_m [(1+\tilde{N})^{-1}]^{rs}_{mn} \tilde{N}^s_n$

これはGreen-Schwarzの公式を素朴に使うとゼロになる量。
（レベルLまで足すと　オーダー　～　1/L or 1/log(L)（？））

- Fermionのnon zero modeの計算は

$$\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}^{rt}_{mk}\hat{X}^{ts}_{kn} = \delta^{r,s}\delta_{m,n}, \quad \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty} \hat{N}^t_k \hat{N}^t_k = 0, \quad \sum_{t=1}^{3}\sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}^{rt}_{mk}\hat{N}^t_k = -\hat{N}^r_m,$$

を使うとboson部分と同様に簡単化できる。特にfermionからくるdeterminantの因子は

$$\det{}^4_{r,s=1,2}(\delta^{r,s}\delta_{m,n} - \hat{X}^{rt}_{mk}\hat{X}^{ts}_{kn}) = \det{}^4(1-(\tilde{N}^{33})^2)(4\epsilon)^{-4}$$

と(少なくとも形式的には)式変形できる。

- prefactorのnonzero mode依存性　$(BC^{\frac{1}{2}})_n = -\frac{2\alpha_3}{\pi\alpha_1\alpha_2}\frac{\sin n\sigma^{(3)}_{\mathrm{int}}}{n}$ に沿った方向のみ。

# まとめと展望

- RNS、GS形式共に境界状態の3-string vertexによるスター積のもとで
  $B * B = (\ldots)B$ の形をしていることをあらわな計算で確かめた。

- RNS形式については、closed super SFTの作用の構成とあわせて 3-string vertex (スター積)の定義を精密化する必要がある。
(とくにpicture changing operatorの入れ方。cocycle factorの定義…)
- GS形式（Green-Schwarz-Brink）の3-string vertexを用いた計算では prefactor （…） の部分は発散を含んだ形で境界状態の種類に依存する。
  ⇨ 超弦理論の場合も系統的な<u>正則化が必要</u>である。

- bosonic closed SFTの場合と比べて複雑な関係式になっている。

  ⇨ “vacuum closed super SFT” の解が境界状態(Cardy状態)という見方をするのは難しい（？）

- prefactor （…） の部分に普遍な意味を見出せるか？
- pure spinor形式では？

- 少なくともここでの計算がclosed super SFTおよびその古典解の構成等に役立つと期待する。