超弦の場の理論における解析的なtachyonic lump解

高工研, 奈良女大理[A]　○岸本 功, 高橋智彦[A]

Reference:

I. Kishimoto, T. Takahashi, JHEP01(2006)013 [hep-th/0510224]

超弦の場の理論の復習

- Wittenの開弦の場の理論の超弦への拡張として
  BerkovitsのWZW型の超弦の場の理論が知られている。

NS（＋）セクターの作用:

$$
\begin{aligned}
&S[\Phi] \\
&= \frac{1}{2g^2}\langle\langle (e^{-\Phi}Q_{\mathrm{B}}e^{\Phi})(e^{-\Phi}\eta_0 e^{\Phi}) - \int_0^1 dt(e^{-t\Phi}\partial_t e^{t\Phi})\{(e^{-t\Phi}Q_{\mathrm{B}}e^{t\Phi}),(e^{-t\Phi}\eta_0 e^{t\Phi})\}\rangle\rangle \\
&= -\frac{1}{g^2}\int_0^1 dt\langle\langle(\eta_0\Phi)(e^{-t\Phi}Q_{\mathrm{B}}e^{t\Phi})\rangle\rangle \\
&= -\frac{1}{g^2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m+n+2)(m+n+1)m!n!}\langle\langle(\eta_0\Phi)\Phi^m(Q_{\mathrm{B}}\Phi)\Phi^n\rangle\rangle\,.
\end{aligned}
$$

弦場 Φ： ghost数 0, picture数 0, Grassmann even,
$X^\mu, \psi^\mu, b, c, \phi, \xi, \eta$ $\;(\beta = e^{-\phi}\partial\xi, \gamma = \eta e^{\phi})$ で表現されている。

$$Q_{\mathrm{B}} = \oint \frac{dz}{2\pi i}(c(T^{\mathrm{m}} - \tfrac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \partial^2\phi + \partial\xi\eta) + bc\partial c + \eta e^{\phi}G^{\mathrm{m}} - \eta\partial\eta e^{2\phi}b)(z)$$

$$\eta_0 = \oint \frac{dz}{2\pi i}\eta(z)$$

- 作用の変分: $\delta S = \frac{1}{g^2}\langle\langle e^{-\Phi}\delta e^{\Phi}\,\eta_0(e^{-\Phi}Q_{\mathrm{B}}e^{\Phi})\rangle\rangle$
- 運動方程式: $\eta_0(e^{-\Phi}Q_{\mathrm{B}}e^{\Phi}) = 0$
- ゲージ変換: $\delta e^{\Phi} = Q_{\mathrm{B}}\Lambda_0 * e^{\Phi} + e^{\Phi} * \eta_0\Lambda_1$
- 古典解 Φ_0 のまわりで作用を再展開すると :

$$S[\Phi] = S[\Phi_0] + S'[\Phi'] \qquad (\ e^{\Phi} = e^{\Phi_0}e^{\Phi'}\ )$$

ここで $S'[\Phi'] = S[\Phi']|_{Q_{\mathrm{B}}\to Q'_{\mathrm{B}}}$.

新しいBRST operator Q'_{B} :

$$Q'_{\mathrm{B}}A = Q_{\mathrm{B}}A + e^{-\Phi_0}Q_{\mathrm{B}}e^{\Phi_0} * A - (-1)^{|A|}A * e^{-\Phi_0}Q_{\mathrm{B}}e^{\Phi_0}$$

$Q'^2_{\mathrm{B}} = 0,\ \{Q'_{\mathrm{B}}, \eta_0\} = 0$ を満たしていることがわかる。

超カレントを用いた古典解の構成

- リー群Gに関する超カレントがあるとする:

$$\mathbf{J}^a(z,\theta) = \psi^a(z) + \theta J^a(z) \qquad (a = 1, \cdots, \mathrm{dim}G)$$

$$\begin{aligned}
\psi^a(y)\psi^b(z) &\sim \frac{1}{y-z}\frac{1}{2}\Omega^{ab}, \\
J^a(y)\psi^b(z) &\sim \frac{1}{y-z} f^{ab}{}_c \psi^c(z), \\
J^a(y)J^b(z) &\sim \frac{1}{(y-z)^2}\frac{1}{2}\Omega^{ab} + \frac{1}{y-z} f^{ab}{}_c J^c(z),
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
& f^{ab}{}_c = -f^{ba}{}_c, \\
& f^{ab}{}_d f^{cd}{}_e + f^{bc}{}_d f^{ad}{}_e + f^{ca}{}_d f^{bd}{}_e = 0, \\
& \Omega^{ab} = \Omega^{ba}, \\
& f^{ab}{}_c \Omega^{cd} + f^{ad}{}_c \Omega^{cb} = 0.
\end{aligned}$$

∃ Ω_{ab} s.t. $\Omega^{ac}\Omega_{cb} = \delta^a_b$, → matter 超Virasoro operatorは菅原構成で与えられる:

$$\begin{aligned}
T^{\mathrm{m}}(z) &= \Omega_{ab} :(J^a J^b + \partial\psi^a \psi^b):(z) + \frac{2}{3}\Omega_{ad}\Omega_{be} f^{de}{}_c :(J^a :\psi^b \psi^c: + \psi^a :(\psi^b J^c - J^b \psi^c):):(z), \\
G^{\mathrm{m}}(z) &= 2\Omega_{ab} :J^a \psi^b:(z) + \frac{4}{3}\Omega_{ad}\Omega_{be} f^{de}{}_c :\psi^a :\psi^b \psi^c::(z),
\end{aligned}$$

このときcentral chargeは $c^{\mathrm{m}} = \frac{3}{2}\mathrm{dim}G - f^{ac}{}_d f^{bd}{}_c \Omega_{ab}$. [Mohammedi(1994)]

今の超弦の場の理論の場合は $c^{\mathrm{m}} = 15$ とする。

このとき、超弦の場の理論の古典解を構成できる: [Kishimoto-Takahashi (2005)]

$$\Phi_0 = -\tilde{V}_L^a(F_a) I\,,$$

$$\tilde{V}_L^a(F_a) \equiv \int_{C_{\rm left}} \frac{dz}{2\pi i} F_a(z)\tilde{v}^a(z), \quad F_a(-1/z) = z^2 F_a(z)\,,$$

$$\tilde{v}^a(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} c\xi e^{-\phi}\psi^a(z)\,,$$

ここで I はidentity string field.

実際:

$$e^{-\Phi_0} Q_{\rm B} e^{\Phi_0} = e^{\tilde{V}_L^a(F_a)} Q_{\rm B} e^{-\tilde{V}^a(F_a)} I$$
$$= -V_L^a(F_a) I + \frac{1}{8}\Omega^{ab} C_L(F_a F_b) I$$

ただし

$$V_L^a(G) \equiv \int_{C_{\rm left}} \frac{dz}{2\pi i} G(z) v^a(z),$$
$$v^a(z) = \frac{i}{2\sqrt{\alpha'}} cJ^a(z) + \frac{1}{\sqrt{2}} \eta e^{\phi}\psi^a(z),$$
$$C_L(G) \equiv \int_{C_{\rm left}} \frac{dz}{2\pi i} G(z) c(z).$$

$$\Rightarrow \quad \eta_0(e^{-\Phi_0} Q_{\rm B} e^{\Phi_0}) = 0$$

※この解における作用の値はゼロになる:

$$S[\Phi_0] \;=\; \frac{1}{g^2}\int_0^1 dt \langle\langle \Phi_0\, \eta_0(e^{-t\Phi_0} Q_{\rm B} e^{t\Phi_0})\rangle\rangle = 0.$$

• GSO(−) セクターへの拡張

[Berkovits,Berkovits-Sen-Zwiebach(2000)]

non-BPS D-brane上の超弦の場の理論のNSセクターの作用:

$$S[\hat{\Phi}] = -\frac{1}{2g^2}\int_0^1 dt\, \mathrm{Tr}\langle\langle(\hat{\eta}_0\hat{\Phi})(e^{-t\hat{\Phi}}\hat{Q}_{\mathrm{B}}e^{t\hat{\Phi}})\rangle\rangle\,,$$

$$\hat{Q}_{\mathrm{B}} = Q_{\mathrm{B}}\otimes\sigma_3, \qquad \hat{\eta}_0 = \eta_0\otimes\sigma_3\,,$$

$$\hat{\Phi} = \Phi_+\otimes 1 + \Phi_-\otimes\sigma_1\,,$$

$$\Phi_+ : \ \mathrm{GSO}(+), \quad \Phi_- : \ \mathrm{GSO}(-).$$

※ 代数的な性質はGSO projectionをかけた理論と同じ。

運動方程式: $\hat{\eta}_0(e^{-\hat{\Phi}}\hat{Q}_{\mathrm{B}}e^{\hat{\Phi}}) = 0\,.$

BPS (GSO-projected) D-brane上の超弦の場の理論の運動方程式と同じ形。

⇩

超カレントがGSO(−) 成分をもてば、GSO(−)の解を同様に構成できる。

GSO(−)セクター を含む解の構成

X^9方向を半径 $R=\sqrt{2\alpha'}$ の S^1 にコンパクト化すると
SU(2)超カレント $\mathrm{J}^a(z,\theta)=\psi^a(z)+\theta J^a(z)$ が得られる:

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}^1(z,\theta) &= \sqrt{2}\sin\left(\frac{X^9}{\sqrt{2\alpha'}}\right)(z)\otimes\sigma_2+\theta(-\sqrt{2})\psi^9\cos\left(\frac{X^9}{\sqrt{2\alpha'}}\right)(z)\otimes\sigma_1\,,\\
\mathrm{J}^2(z,\theta) &= \sqrt{2}\cos\left(\frac{X^9}{\sqrt{2\alpha'}}\right)(z)\otimes\sigma_2+\theta\sqrt{2}\psi^9\sin\left(\frac{X^9}{\sqrt{2\alpha'}}\right)(z)\otimes\sigma_1\,,\\
\mathrm{J}^3(z,\theta) &= \psi^9(z)\otimes\sigma_3+\theta\frac{i}{\sqrt{2\alpha'}}\partial X^9(z)\otimes 1\,.
\end{aligned}$$

$\exp\left(in\frac{X^9}{\sqrt{2\alpha'}}\right)$ (n :odd) は “fermion”として扱うべきなので、
適当にcocycle因子(Pauli行列)をかけている。

※これはボゾニック弦でのSU(2)カレントに対応するものである。

$$J^1=\sqrt{2}\cos\left(\frac{X^{25}}{\sqrt{\alpha'}}\right),\quad J^2=\sqrt{2}\sin\left(\frac{X^{25}}{\sqrt{\alpha'}}\right),\quad J^3=\frac{i}{\sqrt{2\alpha'}}\partial X^{25}\qquad (R=\sqrt{\alpha'})$$

実際、 $\Omega^{ab}=2\delta^{a,b}$, $f^{ab}{}_c=-i\epsilon_{abc}$ のSU(2)超カレント代数を満たしており、
菅原構成による

$$T^9(z)=\left(-\frac{1}{4\alpha'}(\partial X^9)^2(z)-\frac{1}{2}\psi^9\partial\psi^9(z)\right)\otimes 1\,,\qquad G^9(z)=\frac{i}{\sqrt{2\alpha'}}\psi^9\partial X^9(z)\otimes\sigma_3$$

は $c=\frac{3}{2}$ のsuper Virasoro代数をなす。

よって運動方程式 $\hat{\eta}_0(e^{-\hat{\Phi}}\hat{Q}_{\rm B}e^{\hat{\Phi}})=0$ の解：

$$\hat{\Phi}_0=-\tilde{V}_L^a(F_a)I\,,$$

$$\tilde{V}_L^a(F_a)\equiv\int_{C_{\rm left}}\frac{dz}{2\pi i}F_a(z)\tilde{v}^a(z),\quad F_a(-1/z)=z^2F_a(z)\,,$$

$$\tilde{v}^a(z)\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}(c\xi e^{-\phi}\otimes\sigma_3)\,\psi^a(z)\,,\qquad a=1,2,3.$$

この解のまわりの新しいBRST operatorは

$$\begin{aligned}&\hat{Q}'_{\rm B}\hat{A}\\&=\hat{Q}_{\rm B}\hat{A}+\left[\left(-V_L^a(F_a)+\frac{1}{4}C_L(F_aF_a)\right)I\right]*\hat{A}-(-1)^{{\rm gh}(\hat{A})}\hat{A}*\left[\left(-V_L^a(F_a)+\frac{1}{4}C_L(F_aF_a)\right)I\right]\\&=\left((Q_{\rm B}+\frac{1}{4}C(F_aF_a))\sigma_3-V^3(F_3)-V_L^1(F_1)-V_L^2(F_2)-(-1)^{\hat{F}+\hat{n}}(V_R^1(F_1)+V_R^2(F_2))\right)\hat{A}.\end{aligned}$$

ここで $V^a_{L/R}(F) = \int_{C_{\mathrm{left/right}}} \frac{dz}{2\pi i} F(z) v^a(z),$

$$v^a(z) \equiv [\hat{Q}_{\mathrm{B}}, \tilde{v}^a(z)] = \frac{1}{\sqrt{2}} c\sigma_3 J^a(z) + \frac{1}{\sqrt{2}} \eta e^{\phi} \psi^a(z), \quad a = 1, 2, 3.$$

$\hat{n} = \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{i}{\sqrt{2\alpha'}} \partial X^9(z)$: X^9 方向の運動量

$(-1)^{\hat{F}}$: GSO(±)

$$\hat{F} = \oint \frac{dz}{2\pi i} \left(\sum_{k=1}^{5} : \psi^k_+ \psi^k_- : (z) - \partial\phi(z) \right),$$

$$\psi^1_\pm \equiv \frac{i}{\sqrt{2}} (\psi^0 \pm \psi^1), \quad \psi^k_\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi^{2k-2} \pm i\psi^{2k-1}),$$

$k = 2, 3, 4, 5.$

以下では特に $F_a(z) = \delta^1_a F(z)$ および

$$\tilde{v}^1(z) = -ic\xi e^{-\phi} \sin\left(\frac{X^9}{\sqrt{2\alpha'}} \right)(z) \otimes \sigma_1$$

で与えられる解を具体的に議論する。

テクニカルにはCFTでのSenの議論にしたがって fermionization と rebosonization をする:

$$e^{\pm\frac{i}{\sqrt{2\alpha'}}X^9(z)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^9(z) \pm i\eta^9(z)) \otimes \tau_1 \ : \ (\psi^9, X^9) \to (\psi^9, \xi^9, \eta^9)$$

$$\xi^9(z) \pm i\psi^9(z) = \sqrt{2}e^{\pm\frac{i}{\sqrt{2\alpha'}}\phi^9(z)} \otimes \tilde{\tau}_1 \ : \ (\psi^9, \xi^9, \eta^9) \to (\phi^9, \eta^9)$$

Cocycle因子としてPauli行列 $\tau_i, \tilde{\tau}_i \ (i = 1, 2, 3)$ を導入した。

新しいBRST operatorは次のようになる:

$$\begin{aligned}
\hat{Q}'_{\mathrm{B}} &= (Q_{\mathrm{B}} + \frac{1}{4}C(F^2))\sigma_3 - V^1_L(F) - (-1)^{\hat{F}+\hat{n}}V^1_R(F) \\
&= \begin{cases}
e^{-\frac{i}{2\sqrt{\alpha'}}(\phi^9_L(F)+\phi^9_R(F))\sigma_1\tau_2}\hat{Q}_{\mathrm{B}}\, e^{\frac{i}{2\sqrt{\alpha'}}(\phi^9_L(F)+\phi^9_R(F))\sigma_1\tau_2} \\
\qquad\qquad \text{for} \quad (-1)^{\hat{F}+\hat{n}} = +1 \\
e^{-\frac{i}{2\sqrt{\alpha'}}(\phi^9_L(F)-\phi^9_R(F))\sigma_1\tau_2}\hat{Q}_{\mathrm{B}}\, e^{\frac{i}{2\sqrt{\alpha'}}(\phi^9_L(F)-\phi^9_R(F))\sigma_1\tau_2} \\
\qquad\qquad \text{for} \quad (-1)^{\hat{F}+\hat{n}} = -1
\end{cases}
\end{aligned}$$

ここで $\phi^9_{L/R}(F) \equiv \int_{C_{\mathrm{left/right}}} \frac{dz}{2\pi i}F(z)\phi^9(z).$

これは、この解が次のような弦場の再定義をひきおこすことを意味する:

$$\hat{\Phi}'' = e^{\frac{i}{2\sqrt{\alpha'}}\phi_L^9(F)I\sigma_1\tau_2} * \hat{\Phi}' * e^{-\frac{i}{2\sqrt{\alpha'}}\phi_L^9(F)I\sigma_1\tau_2}$$

$$= \begin{cases} e^{\frac{i}{2\sqrt{\alpha'}}(\phi_L^9(F)+\phi_R^9(F))\sigma_1\tau_2}\hat{\Phi}' & \text{for} \quad (-1)^{\hat{F}+\hat{n}} = +1 \\ e^{\frac{i}{2\sqrt{\alpha'}}(\phi_L^9(F)-\phi_R^9(F))\sigma_1\tau_2}\hat{\Phi}' & \text{for} \quad (-1)^{\hat{F}+\hat{n}} = -1 \end{cases}$$

実際、作用は

$$S[\hat{Q}_{\rm B};\hat{\Phi}] = \underset{0}{\underset{\parallel}{S[\hat{Q}_{\rm B};\hat{\Phi}_0]}} + S[\hat{Q}'_{\rm B};\hat{\Phi}'] = S[\hat{Q}_{\rm B};\hat{\Phi}''].$$

$$(\ e^{\hat{\Phi}} = e^{\hat{\Phi}_0}e^{\hat{\Phi}'}\ )$$

解の作り方から $F(-1/z) = z^2F(z)$ より $\int_{C_{\rm left}}\frac{dz}{2\pi i}F(z) + \int_{C_{\rm right}}\frac{dz}{2\pi i}F(z) = 0$ なので

$\phi_L^9(F) + \phi_R^9(F)$ は ϕ^9 のゼロモード部分 $\hat{\phi}_0^9$ を含まない。

一方、 $\phi_L^9(F) - \phi_R^9(F) = 2f\hat{\phi}_0^9 + \cdots$ ただし $f \equiv \int_{C_{\rm left}}\frac{dz}{2\pi i}F(z).$

⇩

弦場の再定義により $(-1)^{\hat{F}+\hat{n}} = -1$ セクターは ϕ^9 方向の 運動量は $\pm\frac{f}{\sqrt{\alpha'}}$ ずれる。

- $f = \dfrac{2m+1}{\sqrt{2}}, \ (m \in \mathrm{Z})$ のとき

$$(-1)^{\hat{F}+\hat{n}} \partial\phi^9(z) (-1)^{-(\hat{F}+\hat{n})} = +\partial\phi^9(z)\,,$$

$$(-1)^{\hat{F}+\hat{n}} e^{i\frac{2m+1}{\sqrt{2\alpha'}}\hat{\phi}_0^9} (-1)^{-(\hat{F}+\hat{n})} = -e^{i\frac{2m+1}{\sqrt{2\alpha'}}\hat{\phi}_0^9}$$ に注意すると

弦場の再定義により

$(-1)^{\hat{F}+\hat{n}} = -1$ セクター $\rightarrow$ $(-1)^{\hat{F}+\hat{n}} = +1$

$(-1)^{\hat{F}+\hat{n}} = +1$ セクター $\rightarrow$ $(-1)^{\hat{F}+\hat{n}} = +1$

再定義をしたあとの弦場は

$$\hat{\Phi}'' = \Psi_+^{\mathrm{e}} \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + \Psi_+^{\prime\mathrm{e}} \otimes 1 \otimes \tau_1 \otimes \tilde{\tau}_1 + \Psi_-^{\mathrm{o}} \otimes \sigma_1 \otimes \tau_2 \otimes \tilde{\tau}_1 + \Psi_-^{\prime\mathrm{o}} \otimes \sigma_1 \otimes \tau_3 \otimes 1$$

の形をしている。ここで上付添字 e/o は $\hat{n}$ の偶奇、 下付添字 ±は $(-1)^{\hat{F}}$。

このとき $\hat{Q}_{\mathrm{B}} = Q_{\mathrm{B}} \otimes \sigma_3 \otimes \tau_3 \otimes \tilde{\tau}_3, \quad \hat{\eta}_0 = \eta_0 \otimes \sigma_3 \otimes \tau_3 \otimes \tilde{\tau}_3.$

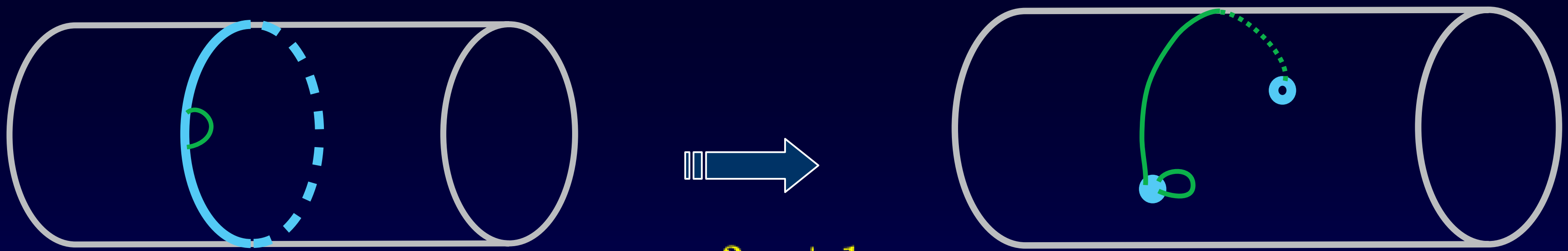
再定義したあとの作用 $S[\hat{Q}_{\rm B};\hat{\Phi}'']$ は

$$\hat{Q}_{\rm B}=Q_{\rm B}\otimes\sigma_3\otimes 1,\qquad \hat{\eta}_0=\eta_0\otimes\sigma_3\otimes 1,$$

$$\hat{\Phi}''=\Psi^{\rm e}_{+}\otimes 1\otimes 1+\Psi'^{\rm e}_{+}\otimes 1\otimes\tau_3+\Psi^{\rm o}_{-}\otimes\sigma_1\otimes\tau_1+\Psi'^{\rm o}_{-}\otimes\sigma_1\otimes\tau_2$$

としたものと同じ構造をもつ。

σ_i / τ_i をinternal/external CP因子とみなし、T-dual (運動量 $\longleftrightarrow$ 巻付数)をとっているとみると、この作用は1枚のD-braneと1枚のanti-D-braneが対蹠点にある D-brane-anti-D-brane系における超弦の場の理論をあらわしている。



$$f=\frac{2m+1}{\sqrt{2}}$$

non-BPS D-brane　　　　D-brane-anti-D-brane

この描像はSenによる、boundary CFTを用いた議論(1998)と一致している！

まとめと展望

- Berkovitsの超弦の場の理論の枠組みにおける超カレントを用いた解の構成法をGSO(−)部分を含むnon-BPS D-brane上の超弦の場の理論の場合への拡張を考えた。
- 例として、一つの方向を半径$\sqrt{2\alpha'}$ にコンパクト化して得られるSU(2) 超カレントを用いて古典解を構成した。
- 具体的にはsine型の解のまわりのBRST operatorを調べた。
  特にこの解に含まれるパラメータ f が特別な値のとき,
  non-BPS D-brane → D-brane-anti-D-brane
  となっていることを示した。これはSenの議論と一致している。

- この解のまわりのRamondセクターは？
- 有限なpotentialの高さを持つ古典解の構成は？
  特にlevel truncationで得られている解に対応する厳密解は？