



開弦の場の理論の解析解 をめぐる最近の進展



岸本 功

序

- 1999年～

Senの予想をWittenの弦の場の理論

$$S[\Psi] = -\frac{1}{g^2} \left(\frac{1}{2} \langle \Psi, Q\Psi \rangle + \frac{1}{3} \langle \Psi, \Psi * \Psi \rangle \right)$$

を用いて証明しようとする試み

→ **運動方程式 $Q\Psi + \Psi * \Psi = 0$ を解く。**

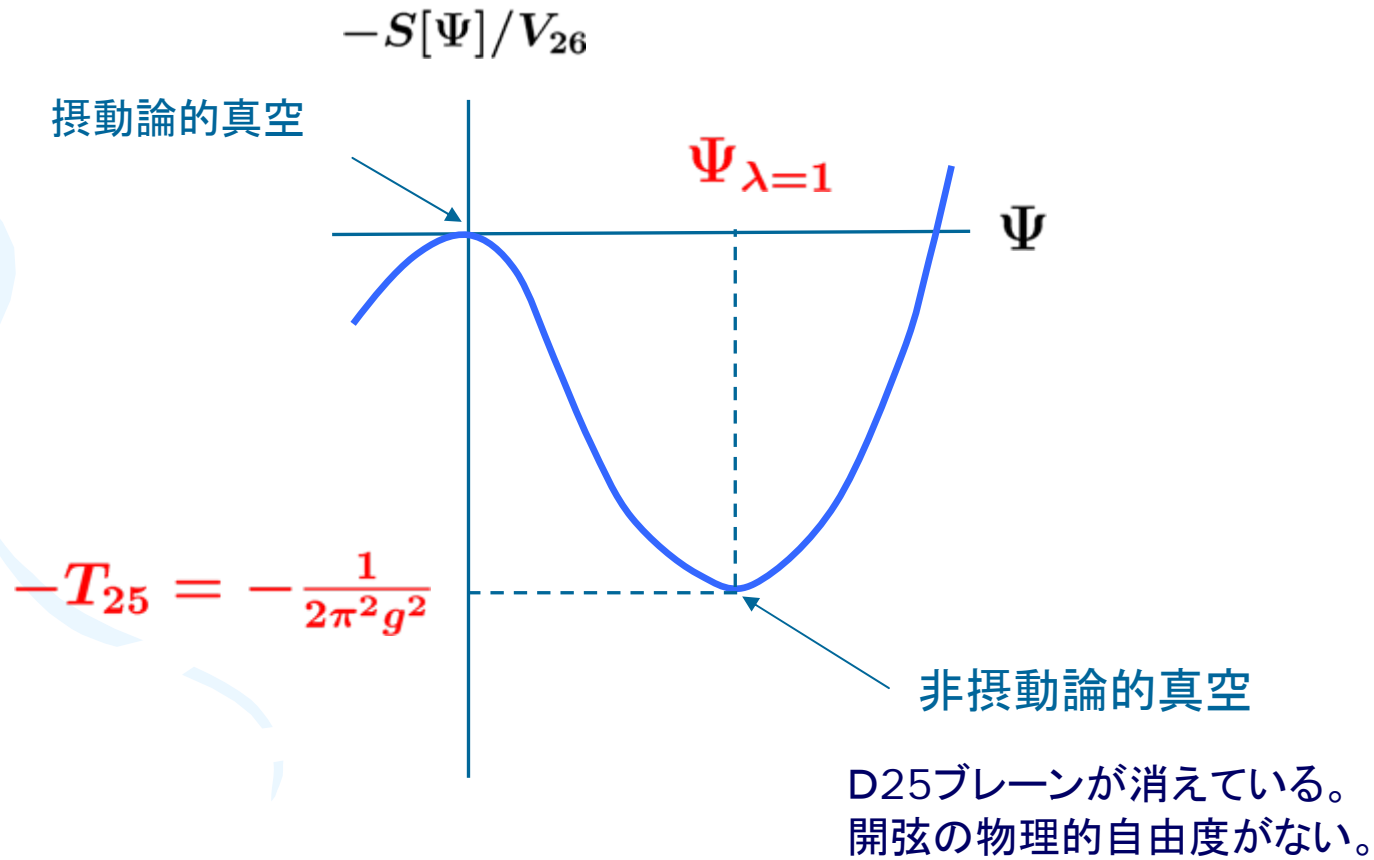
Siegelゲージでのレベルランケーション近似による数値解を用いたもの。
(identity stateに基づく)解析解によるもの。

...

• 2005年

Adv.Theor.Math.Phys.10(2006)433[hep-th/0511286]

Schnablのタキオン凝縮解 $\Psi_{\lambda=1}$



[I.K., "弦の場の理論における解析解についての最近の進展,"素粒子論研究114-6,F-13 (2007-3)]

- 2006年 JHEP02(2007)096[hep-th/0606142]

Ellwood-SchnablはSchnabl解まわりのBRSTコホモロジーが消えていることを示した。

$$S[\Psi_{\lambda=1} + \Psi'] = S[\Psi']|_{Q \rightarrow Q'} + S[\Psi_{\lambda=1}]$$

$$A \equiv \frac{\pi}{2} B_1^L \int_1^2 dr |r\rangle$$

$$Q'A = QA + \Psi_{\lambda=1} * A + A * \Psi_{\lambda=1} = \mathcal{I}$$

実際このとき、

$$Q'B = 0$$

$$\Rightarrow B = \mathcal{I} * B = (Q'A) * B = Q'(A * B) + A * (Q'B) = Q'(A * B)$$

• 2007年, 新たなmarginal解

nonsingular marginal operatorによる変形に対する解

Schnabl, hep-th/0701248; Kiermaier-Okawa-Rastelli-Zwiebach, hep-th/0701249

運動方程式: $Q\Psi + \Psi * \Psi = 0$ の解

Schnabl/KORZのmarginal解の超弦の場の理論への拡張

Erlar, JHEP07(2007)050[arXiv:0704.0930]; Okawa, arXiv:0704.0936, arXiv:0704.3612

運動方程式: $\eta_0(e^{-\Phi} Q e^{\Phi}) = 0$ の解



これらは実はidentity stateに基づく単純な解から生成される。

I.K.-Y.Michishita, "Comments on Solutions for Nonsingular Currents in Open String Field Theories," PTP118(2007)347[arXiv:0706.0409]

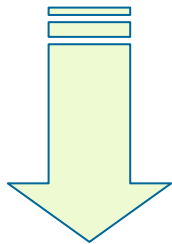
(さらに一般化も可能)

nonsingularでない場合の別の新たなmarginal解

Fuchs-Kroyter-Potting, arXiv:0704.2222 (bosonic SFT)

Fuchs-Kroyter, arXiv:0706.0717 (super SFT)

$J = i\lambda_\mu \partial X^\mu$ の場合で、形式的なpure gaugeの形から解を構成...



一般化

Kiermaier-Okawa,

arXiv:0707.4472 (bosonic SFT), arXiv:0708.3394 (super SFT)

→ 理研研究会「弦の場の理論07」(10/6,7)での大川氏の講演(多分)

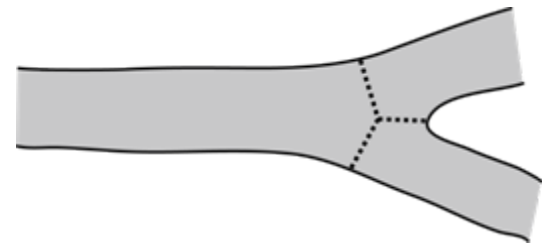
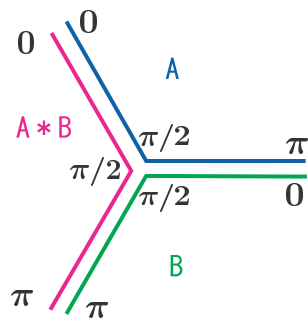
Wittenのbosonicな弦の場の理論

作用:
$$S[\Psi] = -\frac{1}{g^2} \left(\frac{1}{2} \langle \Psi, Q\Psi \rangle + \frac{1}{3} \langle \Psi, \Psi * \Psi \rangle \right)$$

弦場:
$$|\Psi\rangle = \phi(x)c_1|0\rangle + A_\mu(x)\alpha_{-1}^\mu c_1|0\rangle + iB(x)c_0|0\rangle + \dots$$

BRST operator:
$$Q = \oint \frac{dz}{2\pi i} \left(cT^m + bc\partial c + \frac{3}{2}\partial^2 c \right)$$

スタ一積:



運動方程式:

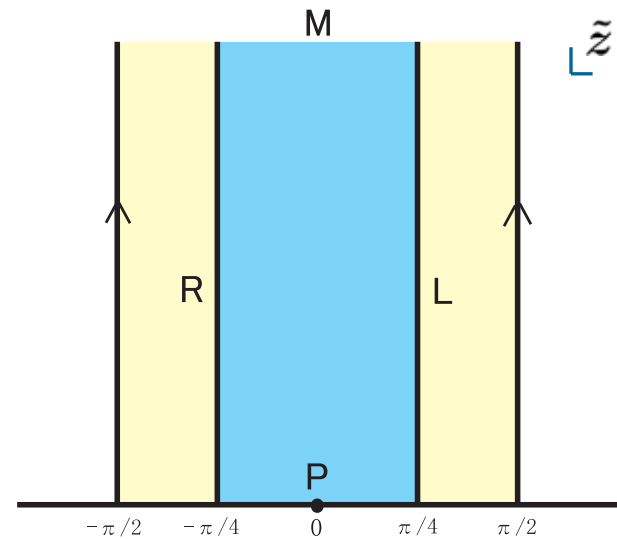
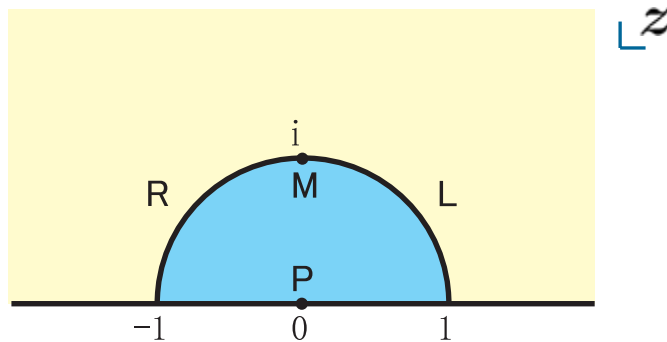
$$Q\Psi + \Psi * \Psi = 0$$

ゲージ変換:

$$\delta_\Lambda \Psi = Q\Lambda + \Psi * \Lambda - \Lambda * \Psi$$

Sliver frame

上半面 z から半無限シリンダーへ $\tilde{z} = \arctan z$ で変換



primary場 $\phi(z) \longrightarrow \tilde{\phi}(\tilde{z}) = \left(\frac{dz}{d\tilde{z}}\right)^h \phi(z) = (\cos \tilde{z})^{-2h} \phi(\tan \tilde{z})$

Sliver frameでのモードは元のモードのある線形結合:

$$\mathcal{L}_0 \equiv \tilde{L}_0 = L_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} L_{2k}, \quad K_1 \equiv \tilde{L}_{-1} = L_1 + L_{-1},$$

$$\mathcal{B}_0 \equiv \tilde{b}_0 = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} b_{2k}, \quad B_1 \equiv \tilde{b}_{-1} = b_1 + b_{-1},$$

...

また

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_0^\dagger, \quad K_1^{L/R} = \frac{1}{2} K_1 \pm \frac{1}{\pi} \hat{\mathcal{L}},$$

$$\hat{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_0^\dagger, \quad B_1^{L/R} = \frac{1}{2} B_1 \pm \frac{1}{\pi} \hat{\mathcal{B}}$$

を以下でよく使う。

Sliver frameでのVirasoroの零モードによる

$$U_r = \begin{pmatrix} 2 \\ - \\ r \end{pmatrix}^{\mathcal{L}_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ - \\ r \end{pmatrix}^{L_0} e^{-\frac{r^2-4}{3r^2}L_2 + \frac{r^4-16}{30r^4}L_4 + \dots}$$

を使うと次のような比較的単純なスター積の公式を得る:

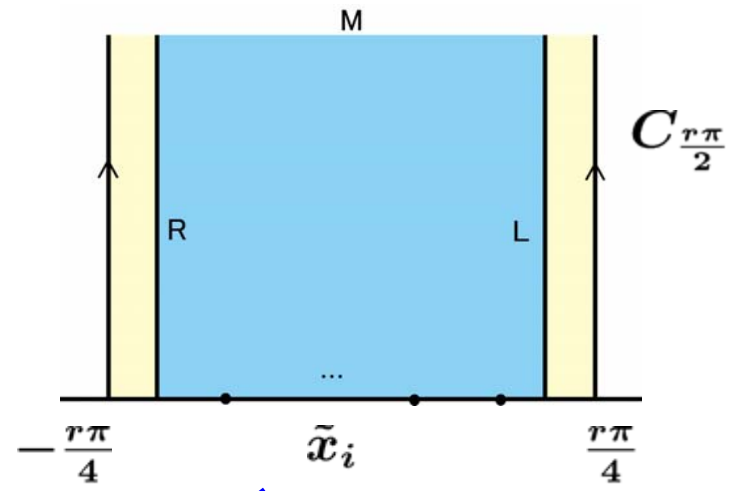
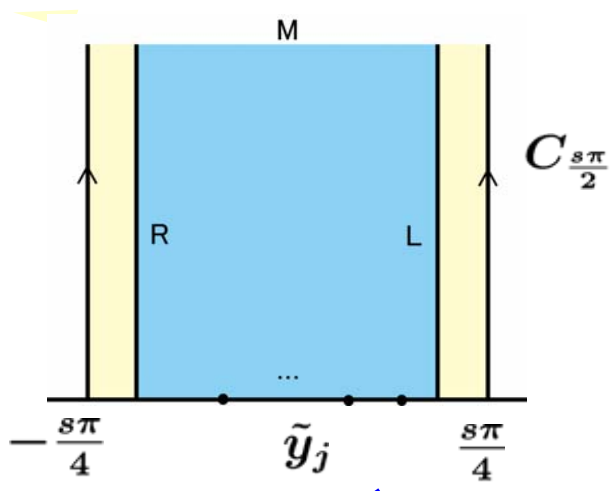
$$U_r^\dagger U_r \tilde{\phi}_1(\tilde{x}_1) \cdots \tilde{\phi}_n(\tilde{x}_n) |0\rangle * U_s^\dagger U_s \tilde{\psi}_1(\tilde{y}_1) \cdots \tilde{\psi}_m(\tilde{y}_m) |0\rangle = \\ U_{r+s-1}^\dagger U_{r+s-1} \tilde{\phi}_1(\tilde{x}_1 + \frac{\pi}{4}(s-1)) \cdots \tilde{\phi}_n(\tilde{x}_n + \frac{\pi}{4}(s-1)) \tilde{\psi}_1(\tilde{y}_1 - \frac{\pi}{4}(r-1)) \cdots \tilde{\psi}_m(\tilde{y}_m - \frac{\pi}{4}(r-1)) |0\rangle$$

特に場が挿入されていないとき

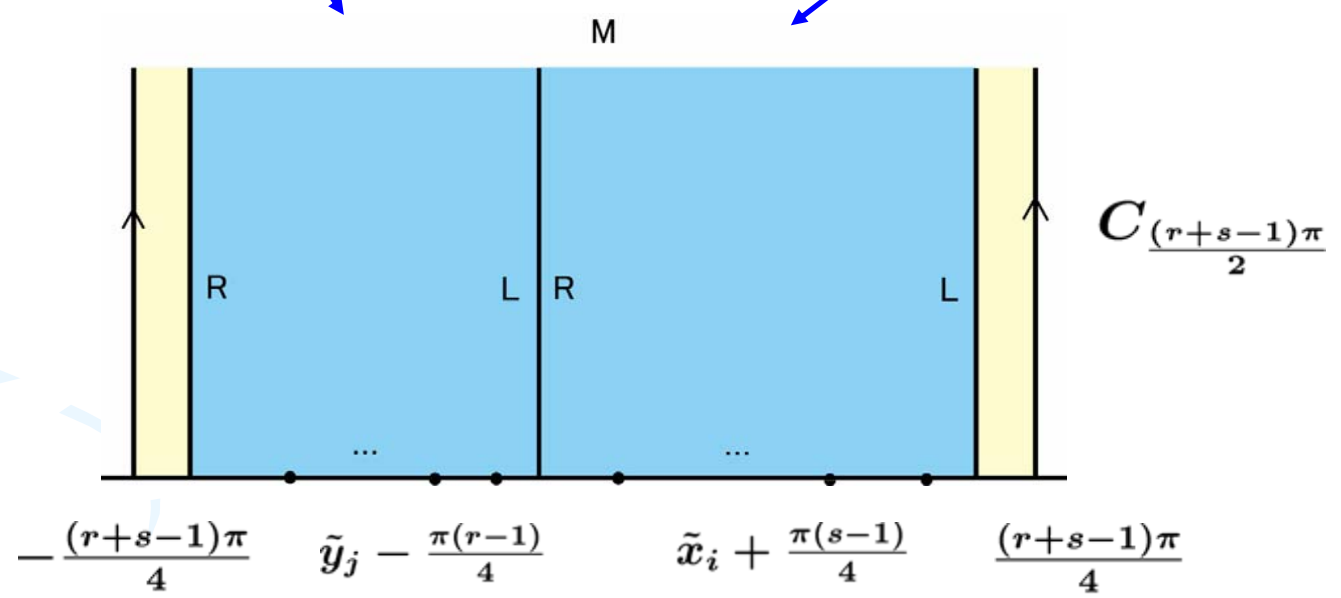
wedge state: $|r = \alpha + 1\rangle = U_{\alpha+1}^\dagger U_{\alpha+1} |0\rangle = P_\alpha$

同士のスター積に帰着する: $P_\alpha * P_\beta = P_{\alpha+\beta}$

($|r = 1\rangle = U_1^\dagger U_1 |0\rangle = \mathcal{I}$ はidentity state)



スタ一積



Schnablのタキオン凝縮解

- スター積の公式と $\{Q, \tilde{c}(\bar{z})\} = \tilde{c}\tilde{d}\tilde{c}(\bar{z}), \quad \{Q, \hat{\mathcal{B}}\} = \hat{\mathcal{L}}$
より

$$\hat{\mathcal{L}}^n \tilde{c}_{p_1} \tilde{c}_{p_2} \cdots \tilde{c}_{p_N} |0\rangle, \quad \hat{\mathcal{B}} \hat{\mathcal{L}}^m \tilde{c}_{q_1} \tilde{c}_{q_2} \cdots \tilde{c}_{q_M} |0\rangle,$$

の線形結合はスター積と Q の作用で閉じる。

※それぞれ \mathcal{L}_0 -レベル(固有値)

$n - p_1 - p_2 \cdots - p_N, \quad 1 + m - q_1 - q_2 \cdots - q_M$ を持つ。

※ \mathcal{L}_0 -レベル h_1, h_2 を持つ上記の形の項同士のスター積をとったとき出てくる項の \mathcal{L}_0 -レベル h_{12} は $h_{12} \geq h_1 + h_2$

ghost数1の解のansatz:

$$\Psi = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ p \leq 1}} f_{n,p} \hat{\mathcal{L}}^n \tilde{c}_p |0\rangle + \sum_{\substack{n \geq 0 \\ p,q \leq 1}} f_{n,p,q} \hat{\mathcal{B}} \hat{\mathcal{L}}^n \tilde{c}_p \tilde{c}_q |0\rangle .$$

Siegelゲージ条件: $b_0 \Psi = 0$ に対応して Schnablゲージ条件:

$$\mathcal{B}_0 \Psi = 0 \Leftrightarrow 2f_{n,p,0} + (n+1)f_{n+1,p} = 0 .$$

さらに、twist対称性: $(-1)^{L_0+1} \Psi = \Psi$

$$\Leftrightarrow f_{n,p} = 0, (p : \text{even}), f_{n,p,q} = 0, (p+q : \text{even})$$

も課しておく。

ここでゲージ条件を満たす取り方として(それぞれ $p, p+q$ が奇数の場合)

$$f_{n,p} = \frac{(-1)^n \pi^{-p}}{2^{n-2p+1} n!} f_{n-p+1}, \quad f_{n,p,q} = \frac{(-1)^{n+q} \pi^{-p-q}}{2^{n-2(p+q)+3} n!} f_{n-p-q+2}$$

とにおいて、運動方程式をあらわに書き下し $\hat{\mathcal{L}}^N \tilde{c}_1 \tilde{c}_0 |0\rangle$ の係数に注目すると

$$-\frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{2}\right)^N \left((N-1) \frac{f_N}{N!} + \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} \frac{f_n f_m}{n! m! (N-n-m)!} \right) = 0$$

という条件が課される。

→ 母関数 $f(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!} x^n$ に関する微分方程式:

$$\left(x \frac{d}{dx} - 1 \right) f(x) + e^x f(x)^2 = 0.$$

微分方程式の解: $f(x) = \frac{\lambda x}{\lambda e^x - 1}$



運動方程式の解(の候補)

$$\Psi_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p \geq -1, p:\text{odd}} \frac{(-1)^n \pi^p}{n! 2^{n+2p+1}} f_{n+p+1} \hat{\mathcal{L}}^n \tilde{c}_{-p} |0\rangle$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p,q \geq -1, p+q:\text{odd}} \frac{(-1)^{n+q} \pi^{p+q}}{n! 2^{n+2(p+q)+3}} f_{n+p+q+2} \hat{\mathcal{B}} \hat{\mathcal{L}}^n \tilde{c}_{-p} \tilde{c}_{-q} |0\rangle,$$

$$f_n = \begin{cases} B_n & (\lambda = 1) \\ -n\lambda \text{Li}_{1-n}(\lambda) - \delta_{n,0}\lambda & (\lambda \neq 1) \end{cases} \quad \leftarrow \text{ベルヌイ数}$$

多重対数関数

この形で $\hat{\mathcal{L}}^N \tilde{c}_1 \tilde{c}_0 |0\rangle$ 以外の項についても、運動方程式を満たすことは *Mathematica* で数百項については確かめた。
 解析的に全ての項が零になることの証明は難しい。

$$\begin{aligned}
 & Q\Psi_\lambda + \Psi_\lambda * \Psi_\lambda \\
 &= \sum_{\substack{N \geq 0; p, q \leq 1 \\ p+q:\text{odd}}} \frac{(-1)^N \pi^{-p-q}}{N! 2^{N+2-2(p+q)}} \left[(p-q - (-1)^q N) f_{N+1-p-q} \right. \\
 &+ \sum_{\substack{k=0 \\ k+l:\text{odd}}}^{1-p} \sum_{l=0}^{1-q} \binom{1-p}{k} \binom{1-q}{l} \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^l \sum_{m=0}^{N-j+k} \binom{N}{j} \binom{l}{n} \binom{N-j+k}{m} (-1)^l f_{n+1+j-p-k} f_{m+1-q-l} \\
 &+ \left. \sum_{\substack{k=0 \\ k+l:\text{even}}}^{1-p} \sum_{l=0}^{1-q} \binom{1-p}{k} \binom{1-q}{l} \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{N-j+k+l} \binom{N}{j} \binom{N-j+k+l}{n} (-1)^{l+q} f_n f_{j+2-k-l-p-q} \right] \hat{\mathcal{L}}^N \tilde{c}_p \tilde{c}_q |0\rangle \\
 &+ \sum_{\substack{N \geq 0; p, q, r \leq 1 \\ p+q+r:\text{odd}}} \frac{(-1)^N \pi^{-p-q-r}}{N! 2^{N+4-2(p+q+r)}} \left[-(-1)^r 2(p-q) f_{N+2-p-q-r} \right. \\
 &+ \sum_{k_1=0}^{1-p} \sum_{k_2=0}^{1-q} \sum_{l=0}^{1-r} \binom{1-p}{k_1} \binom{1-q}{k_2} \binom{1-r}{l} \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{k_2+l} \sum_{m=0}^{N-j+k_1} \binom{N}{j} \binom{k_2+l}{n} \binom{N-j+k_1}{m} \\
 &\quad \left. \times ((-1)^{q+l} - (-1)^{r+k_2}) f_{n+1+j-p-k_1} f_{m+2-q-r-k_2-l} \right] \hat{\mathcal{B}} \hat{\mathcal{L}}^N \tilde{c}_p \tilde{c}_q \tilde{c}_r |0\rangle \\
 &= 0 \quad (?)
 \end{aligned}$$

別の表示に移ると、運動方程式を証明できる。

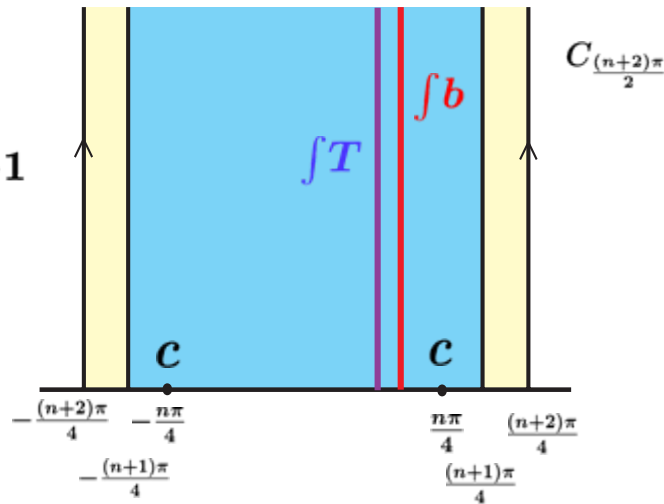
$$\Psi_\lambda = \frac{\lambda \partial_r}{\lambda e^{\partial_r} - 1} \psi_r |_{r=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{k!} \partial_r^k \psi_r |_{r=0}$$

$$\begin{aligned} \psi_r &\equiv \frac{2}{\pi} \hat{U}_{r+2} \left[-\frac{1}{\pi} \hat{\mathcal{B}} \tilde{c}\left(\frac{\pi r}{4}\right) \tilde{c}\left(-\frac{\pi r}{4}\right) + \frac{1}{2} \left(\tilde{c}\left(-\frac{\pi r}{4}\right) + \tilde{c}\left(\frac{\pi r}{4}\right) \right) \right] |0\rangle \\ &= \frac{2}{\pi} P_{1/2} * U_1^\dagger U_1 c_1 |0\rangle * B_1^L P_r * U_1^\dagger U_1 c_1 |0\rangle * P_{1/2} \\ &= \sum_{\substack{n \geq 0; p \geq -1 \\ p: \text{odd}}} \frac{(-1)^n \pi^p}{n! 2^{n+2p+1}} r^{n+p+1} \hat{\mathcal{L}}^n \tilde{c}_{-p} |0\rangle \\ &\quad + \sum_{\substack{n \geq 0; p, q \geq -1 \\ p+q: \text{odd}}} \frac{(-1)^{n+q} \pi^{p+q}}{n! 2^{n+2p+2q+3}} r^{n+p+q+2} \hat{\mathcal{B}} \hat{\mathcal{L}}^n \tilde{c}_{-p} \tilde{c}_{-q} |0\rangle \end{aligned}$$

λ の冪について展開すると

$$\Psi_\lambda = -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n e^{n\partial_r} \partial_r \psi_r|_{r=0} = - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \partial_r \psi_r|_{r=n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1}$$



$$= (Q\lambda\Lambda_0) * \frac{1}{1 - \lambda\Lambda_0}, \quad \Lambda_0 \equiv B_1^L c_1|0\rangle$$

pure gaugeの形 → 運動方程式の解

しかし $\lambda = 1$ のときのみ $f_0 = 1 (\neq 0)$

→ 別の展開が必要。Euler-Maclaurin展開をする。

$$\begin{aligned}\Psi_{\lambda=1} &= \psi_{\infty} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (\partial_r^n \psi_r |_{r=\infty} - \partial_r^n \psi_r |_{r=0}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\psi_{N+1} - \sum_{n=0}^N \partial_r^n \psi_r |_{r=n} \right)\end{aligned}$$

ここで、最後の式で「正則化」をした。

この第1項(phantom)は実は通常の L_0 -レベルトランケーションの意味では零になる:

$$\begin{aligned}\psi_{N+1} &= \frac{1}{N^3} \frac{4\pi^2}{3} \left[\prod_{k=1, \leftarrow}^{\infty} e^{u_{2k}(\infty)L_{-2k}} \right] \sum_{p \geq -1; p: \text{odd}} \left(\frac{2}{\pi} \right)^p c_{-p} |0\rangle \\ &\quad + \frac{1}{N^3} \frac{8}{3} \left[\prod_{k=1, \leftarrow}^{\infty} e^{u_{2k}(\infty)L_{-2k}} \right] \sum_{p, q \geq -1; p+q: \text{odd}} (-1)^q \left(\frac{2}{\pi} \right)^{p+q} b_{-2} c_{-p} c_{-q} |0\rangle + \dots \\ &= \mathcal{O}(N^{-3})\end{aligned}$$

• 作用の値の評価

$$\langle \tilde{c}(\tilde{x}) \tilde{c}(\tilde{y}) \tilde{c}(\tilde{z}) \rangle / V_{26} = \sin(\tilde{x} - \tilde{y}) \sin(\tilde{x} - \tilde{z}) \sin(\tilde{y} - \tilde{z})$$

の規格化のもとに

$$\langle \psi_n, Q\psi_m \rangle / V_{26} = \frac{1}{\pi^2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi(m-n)}{m+n+2}\right) \right) \left(-1 + \frac{m+n+2}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{m+n+2}\right) \right) \\ + 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{m+n+2}\right) \left[-\frac{m+n+1}{\pi^2} + \frac{mn}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi(m-n)}{m+n+2}\right) + \frac{(m+n+2)(m-n)}{2\pi^3} \sin\left(\frac{\pi(m-n)}{m+n+2}\right) \right],$$

$$\langle \psi_n, \psi_m * \psi_k \rangle / V_{26} = \frac{(n+m+k+3)^2}{\pi^3} \sin^2\left(\frac{\pi}{n+m+k+3}\right) \\ \times \left[\sin\left(\frac{2\pi(n+1)}{n+m+k+3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi(m+1)}{n+m+k+3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi(k+1)}{n+m+k+3}\right) \right]$$

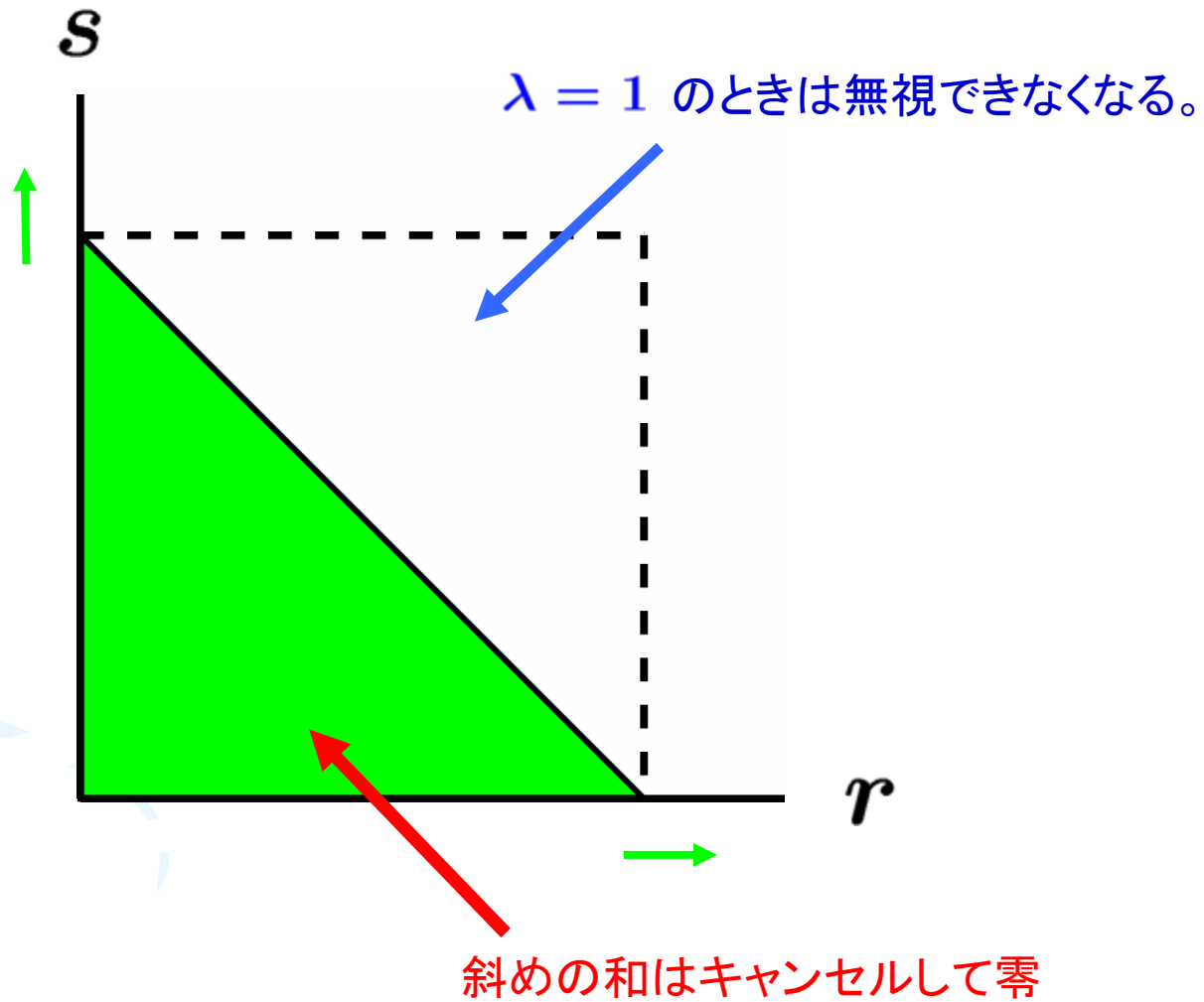
と計算され、これを微分して和をとることで $S[\Psi_\lambda]$ を評価できる。

$$\sum_{m=0}^n \langle \partial_r \psi_r |_{r=m}, Q \partial_s \psi_s |_{s=n-m} \rangle = 0,$$

$$\sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{n-m} \langle \partial_r \psi_r |_{r=m}, \partial_s \psi_s |_{s=k} * \partial_t \psi_t |_{t=n-m-k} \rangle = 0$$

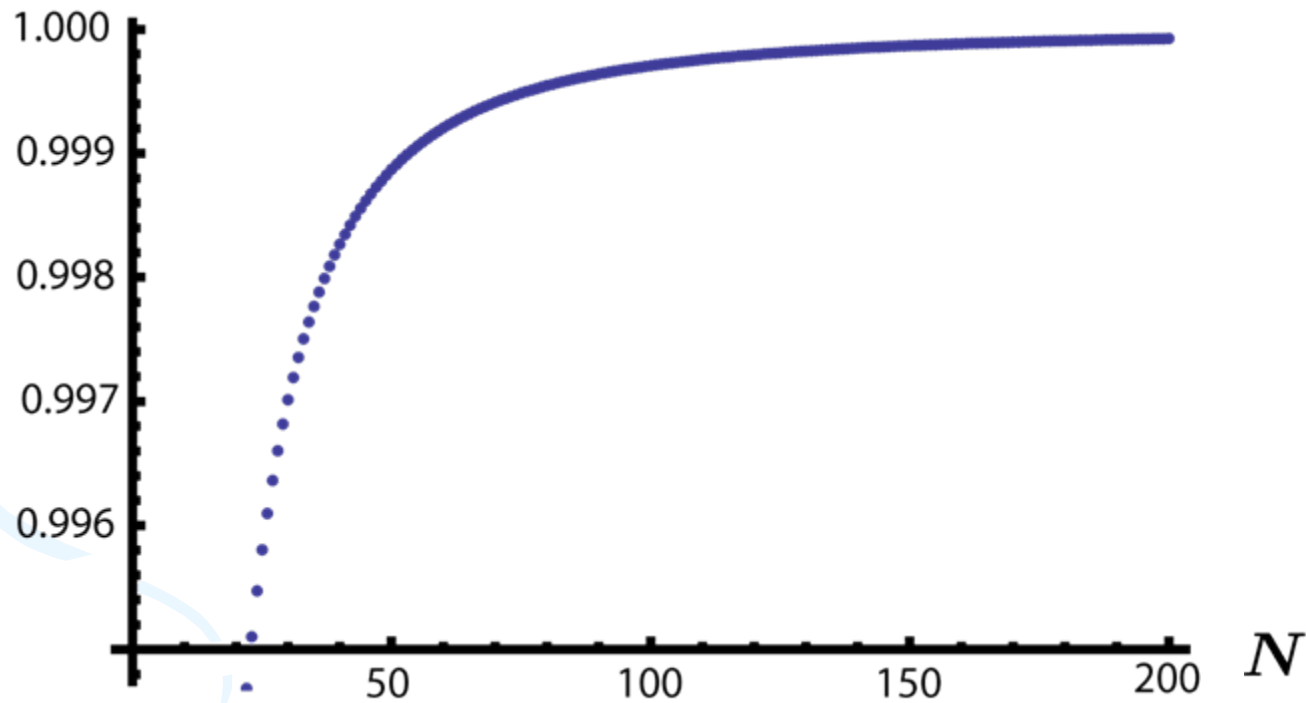
より素朴には零！

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^{r+s+2} \langle \partial_r \psi_r, Q \partial_s \psi_s \rangle$$



$\lambda = 1$ のとき $\Psi_{\lambda=1}^{(N)} \equiv \psi_{N+1} - \sum_{n=0}^N \partial_r \psi_r|_{r=n}$ として作用を評価すると

$$(2\pi^2 g^2) S[\Psi_{\lambda=1}^{(N)}] / V_{26}$$



実はこの極限は解析的に評価できて、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S[\Psi_{\lambda=1}^{(N)}] / V_{26} = \frac{1}{2\pi^2 g^2}$$

同様に $\Psi_{\lambda \neq 1}^{(N)} \equiv - \sum_{n=0}^N \lambda^{n+1} \partial_r \psi_r |_{r=n}$ とおくと

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S[\Psi_{|\lambda| < 1}^{(N)}] / V_{26} = 0$$

以上より

$$S[\Psi_\lambda] / V_{26} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2 g^2} = T_{25} & (\lambda = 1) \quad : \text{タキオン真空} \\ 0 & (|\lambda| < 1) \quad : \text{pure gauge} \end{cases}$$

Schnabl / KORZのmarginal解

- 解を解に写す変換:

$$QP_\alpha = 0, \quad P_\alpha * P_\beta = P_{\alpha+\beta}, \quad P_{\alpha=0} = \mathcal{I}$$

を満たす $\{P_\alpha\}_{\alpha \geq 0}$ および、これに付随して $QA^{(\gamma)} = \mathcal{I} - P_\gamma$

を満たす弦場 $A^{(\gamma)}$ が与えられたとする。このとき、

$$\Psi^{(\alpha, \beta)}(\psi) = P_\alpha * \frac{1}{1 + \psi * A^{(\alpha+\beta)}} * \psi * P_\beta$$

は運動方程式の解を解に写す変換になっている。

実際、 Q がスター積に関する微分であることから一般に

$$\begin{aligned} & Q\Psi^{(\alpha,\beta)}(\psi) + \Psi^{(\alpha,\beta)}(\psi) * \Psi^{(\alpha,\beta)}(\psi) \\ &= P_\alpha * \frac{1}{1 + \psi * A^{(\alpha+\beta)}} * (Q\psi + \psi * \psi) * \frac{1}{1 + A^{(\alpha+\beta)} * \psi} * P_\beta \end{aligned}$$

と計算されるので、 $Q\psi + \psi * \psi = 0$ ならば

$$Q\Psi^{(\alpha,\beta)}(\psi) + \Psi^{(\alpha,\beta)}(\psi) * \Psi^{(\alpha,\beta)}(\psi) = 0.$$

• $\{P_\alpha\}_{\alpha \geq 0}$ および $A^{(\gamma)}$ の具体例:

$$P_\alpha = |\alpha + 1\rangle = U_{\alpha+1}^\dagger U_{\alpha+1} |0\rangle = e^{-\frac{\alpha-1}{2}\hat{\mathcal{L}}} |0\rangle = e^{-\frac{\pi}{2}\alpha K_1^L} \mathcal{I},$$

$$A^{(\gamma)} = \int_0^\gamma d\alpha \frac{\pi}{2} B_1^L P_\alpha.$$

- $\Psi^{(\alpha,\beta)}(\cdot)$ の変換で運動方程式の解を求めるには、

$$Q\psi + \psi * \psi = 0$$

を満たす運動方程式の解 ψ が必要。

その代わりにBRST不変かつ冪零

$$Q\hat{\psi} = 0, \quad \hat{\psi} * \hat{\psi} = 0$$

というより強い条件を満たす(運動方程式の解) $\hat{\psi}$ は比較的簡単に構成できる。

この $\hat{\psi}$ から $\Psi^{(\alpha,\beta)}(\hat{\psi})$ により解を生成できる！

- BRTS不変かつ冪零な弦場の例:

$$\hat{\psi} = \lambda_s \hat{\psi}_s + \lambda_m \hat{\psi}_m,$$

$$\hat{\psi}_s = Q \hat{\Lambda}_0, \quad \hat{\Lambda}_0 \equiv U_1^\dagger U_1 B_1^L c_1 |0\rangle,$$

$$\hat{\psi}_m = U_1^\dagger U_1 c J(0) |0\rangle.$$

ただし $J(z)$ は nonsingular marginal operator:

$$J(z)J(0) \sim \text{finite} \quad (z \rightarrow 0)$$

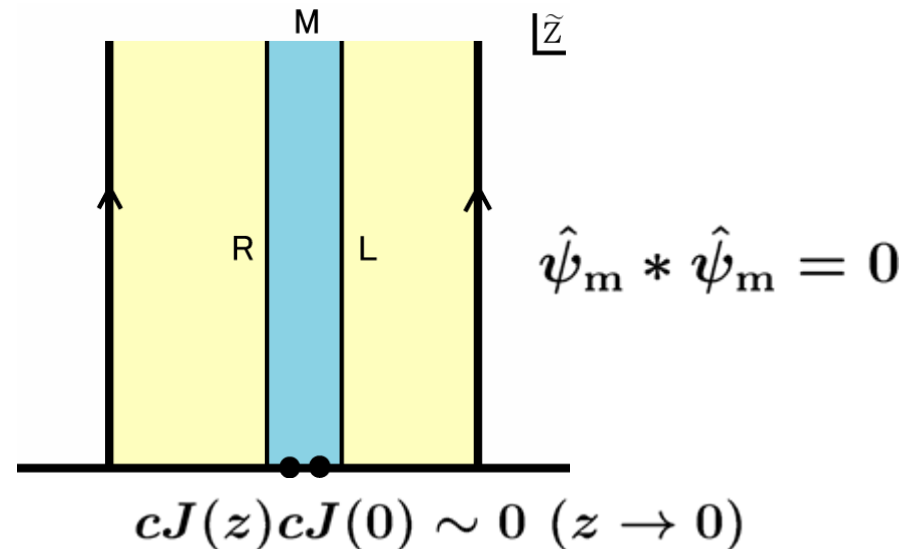
例)

$$J = i\partial X^+$$

Light-cone方向

$$J = :e^{X^0}:$$

Rolling tachyon



marginal解

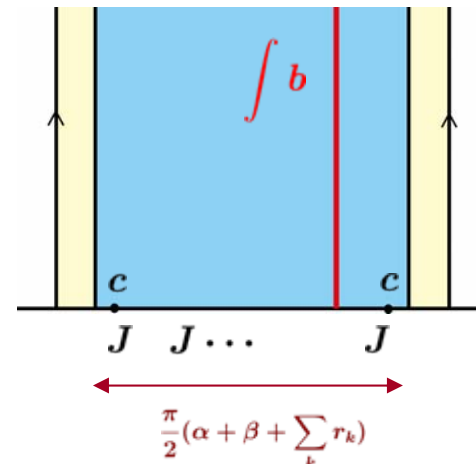
$$\Psi^{(\alpha, \beta)}(\lambda_m \hat{\psi}_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m^n \psi_{m,n}$$

特に $\alpha = \beta = 1/2$ の場合
Schnabl / KORZ (2007)の解

$$\psi_{m,1} = U_{\alpha+\beta+1}^\dagger U_{\alpha+\beta+1} \tilde{c} \tilde{J}\left(\frac{\pi}{4}(\beta - \alpha)\right) |0\rangle,$$

$$\begin{aligned} \psi_{m,k+1} = & \left(-\frac{\pi}{2}\right)^k \int_0^{\alpha+\beta} dr_1 \cdots \int_0^{\alpha+\beta} dr_k U_{\alpha+\beta+1+\sum_{l=1}^k r_l}^\dagger U_{\alpha+\beta+1+\sum_{l=1}^k r_l} \prod_{m=0}^k \tilde{J}\left(\frac{\pi}{4}(\beta - \alpha - \sum_{l=1}^m r_l + \sum_{l=m+1}^k r_l)\right) \\ & \times \left[-\frac{1}{\pi} \hat{\mathcal{B}} \tilde{c}\left(\frac{\pi}{4}(\beta - \alpha + \sum_{l=1}^k r_l)\right) \tilde{c}\left(\frac{\pi}{4}(\beta - \alpha - \sum_{l=1}^k r_l)\right) + \frac{1}{2} \left(\tilde{c}\left(\frac{\pi}{4}(\beta - \alpha + \sum_{l=1}^k r_l)\right) + \tilde{c}\left(\frac{\pi}{4}(\beta - \alpha - \sum_{l=1}^k r_l)\right) \right) \right] |0\rangle. \end{aligned}$$

$$\Psi^{(\alpha, \beta)}(\lambda_m \hat{\psi}_m) \sim \sum \lambda_m^n \int dr_k$$



タキオン解(再)

BRST不変かつ冪零な $\lambda_s \hat{\psi}_s$ から生成される解を考えよう:

$$\Psi^{(\alpha, \beta)}(\lambda_s \hat{\psi}_s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_s^n \psi_{s,n}$$

各項は次のように式変形できる:

$$\begin{aligned} \psi_{s,n} &= P_\alpha * (Q \hat{\Lambda}_0) * P_\beta * (P_\alpha * \hat{\Lambda}_0 * P_\beta - \mathcal{I})^{n-1} \\ &= - \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-l} (n-1)!}{l!(n-1-l)!} \partial_t \psi_{t,l}^{(\alpha, \beta)} \Big|_{t=0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{t,n}^{(\alpha, \beta)} &= \frac{2}{\pi} U_{n(\alpha+\beta)+t+\alpha+\beta+1}^\dagger U_{n(\alpha+\beta)+t+\alpha+\beta+1} \left[\right. \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \hat{\mathcal{B}} \tilde{c} \left(\frac{\pi}{4} (\beta - \alpha + t + n(\alpha + \beta)) \right) \tilde{c} \left(\frac{\pi}{4} (\beta - \alpha - t - n(\alpha + \beta)) \right) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left\{ \tilde{c} \left(\frac{\pi}{4} (\beta - \alpha + t + n(\alpha + \beta)) \right) + \tilde{c} \left(\frac{\pi}{4} (\beta - \alpha - t - n(\alpha + \beta)) \right) \right\} \right] |0\rangle. \end{aligned}$$

2重和の順序を入れ替えると

$$\Psi^{(\alpha, \beta)}(\lambda_S \hat{\psi}_S) = - \sum_{l=0}^{\infty} \lambda_S^{l+1} \partial_t \psi_{t,l}^{(\alpha, \beta)} \Big|_{t=0}.$$

ここで展開パラメータを再定義した: $\lambda_S \equiv \frac{\lambda_S}{\lambda_S + 1}.$

さらに式変形して形式的に和をとると

$$\begin{aligned} \Psi^{(\alpha, \beta)}(\lambda_S \hat{\psi}_S) &= e^{\frac{\pi}{4}(\beta - \alpha)K_1} (\alpha + \beta)^{\frac{D}{2}} \left(- \sum_{l=0}^{\infty} \lambda_S^{l+1} \partial_r \psi_r \Big|_{r=l} \right) \\ &= e^{\frac{\pi}{4}(\beta - \alpha)K_1} (\alpha + \beta)^{\frac{D}{2}} \frac{\lambda_S \partial_r}{\lambda_S e^{\partial_r} - 1} \psi_r \Big|_{r=0} \\ &= e^{\frac{\pi}{4}(\beta - \alpha)K_1} (\alpha + \beta)^{\frac{D}{2}} \Psi_{\lambda = \lambda_S}. \end{aligned}$$

元のSchnabl解の形

$$K_1 = L_1 + L_{-1}, \quad D = \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_0^\dagger$$

はBPZ oddかつ Q と可換でスター積に関する微分。

この関係式とSchnablのタキオン解 Ψ_λ の性質から

$$\begin{aligned} S[\Psi^{(\alpha,\beta)}(\lambda_s \hat{\psi}_s)]/V_{26} &= S[\Psi_{\lambda=\lambda_s}]/V_{26} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2 g^2} & (\lambda_s = 1) \\ 0 & (|\lambda_s| < 1) \end{cases} \end{aligned}$$

$\lambda_s = 1 \leftrightarrow \lambda_s = \infty$ に注意。

また、解は形式的にpure gaugeの形にも書ける：

$$\Psi^{(\alpha,\beta)}(\lambda_s \hat{\psi}_s) = Q(\lambda_s P_\alpha * \hat{\Lambda}_0 * P_\beta) * \frac{1}{1 - \lambda_s P_\alpha * \hat{\Lambda}_0 * P_\beta}$$

超弦の場の理論への拡張

BerkovitsのWZW型の超弦の場の理論(NSセクター):

$$S_{\text{NS}}[\Phi] = -\frac{1}{g^2} \int_0^1 dt \langle\langle (\eta_0 \Phi)(e^{-t\Phi} Q e^{t\Phi}) \rangle\rangle.$$

弦場 Φ : ghost数0, picture数0, Grassmann even, 特にゴースト部分は b, c, ϕ, ξ, η ($\beta = e^{-\phi} \partial \xi, \gamma = \eta e^{\phi}$) で表されている。

$$Q = \oint \frac{dz}{2\pi i} (c(T^m - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \partial^2\phi + \partial\xi\eta) + bc\partial c + \eta e^{\phi} G^m - \eta \partial \eta e^{2\phi} b)(z),$$

$$\eta_0 = \oint \frac{dz}{2\pi i} \eta(z).$$

運動方程式: $\eta_0(e^{-\Phi} Q e^{\Phi}) = 0 \iff Q(e^{\Phi} \eta_0 e^{-\Phi}) = 0$

ゲージ変換: $\delta e^{\Phi} = \Xi_1 * e^{\Phi} + e^{\Phi} * \Xi_2, \quad Q\Xi_1 = 0, \quad \eta_0\Xi_2 = 0.$

- この超弦の場の理論の運動方程式についても 解を解に写す変換をbosonicな弦の場の理論と同様に見つけることができる。

$$QP_\alpha = 0, \quad \eta_0 P_\alpha = 0,$$
$$P_\alpha * P_\beta = P_{\alpha+\beta}, \quad P_{\alpha=0} = \mathcal{I}$$

を満たす $\{P_\alpha\}_{\alpha \geq 0}$ およびこれに付随して

$$\eta_0 Q \hat{A}^{(\gamma)} = \mathcal{I} - P_\gamma$$

を満たす弦場 $\hat{A}^{(\gamma)}$ が与えられたとする。

$$\Phi_{(1)}^{(\alpha,\beta)}(\phi) = \log(1 + P_\alpha * f_{(1)}(\phi) * P_\beta),$$

$$f_{(1)}(\phi) = \frac{1}{1 + (e^\phi \eta_0 e^{-\phi}) Q \hat{A}^{(\alpha+\beta)}} (e^\phi - 1),$$

$$\Phi_{(2)}^{(\alpha,\beta)}(\phi) = \log(1 + P_\alpha * f_{(2)}(\phi) * P_\beta),$$

$$f_{(2)}(\phi) = (e^\phi - 1) \frac{1}{1 - \eta_0 \hat{A}^{(\alpha+\beta)} (e^{-\phi} Q e^\phi)},$$

$$\Phi_{(3)}^{(\alpha,\beta)}(\phi) = -\log(1 - P_\alpha * f_{(3)}(\phi) * P_\beta),$$

$$f_{(3)}(\phi) = \frac{1}{1 - (e^{-\phi} Q e^\phi) \eta_0 \hat{A}^{(\alpha+\beta)}} (1 - e^{-\phi}),$$

$$\Phi_{(4)}^{(\alpha,\beta)}(\phi) = -\log(1 - P_\alpha * f_{(4)}(\phi) * P_\beta),$$

$$f_{(4)}(\phi) = (1 - e^{-\phi}) \frac{1}{1 + Q \hat{A}^{(\alpha+\beta)} (e^\phi \eta_0 e^{-\phi})},$$

はそれぞれ運動方程式の解を解に写す変換である。

実際、一般に

$$e^{\Phi_{(1)}^{(\alpha,\beta)}(\phi)} \eta_0 e^{-\Phi_{(1)}^{(\alpha,\beta)}(\phi)} = e^{\Phi_{(4)}^{(\alpha,\beta)}(\phi)} \eta_0 e^{-\Phi_{(4)}^{(\alpha,\beta)}(\phi)} = P_\alpha \frac{1}{1 + (e^\phi \eta_0 e^{-\phi}) Q \hat{A}^{(\alpha+\beta)}} (e^\phi \eta_0 e^{-\phi}) P_\beta,$$

$$e^{-\Phi_{(2)}^{(\alpha,\beta)}(\phi)} Q e^{\Phi_{(2)}^{(\alpha,\beta)}(\phi)} = e^{-\Phi_{(3)}^{(\alpha,\beta)}(\phi)} Q e^{\Phi_{(3)}^{(\alpha,\beta)}(\phi)} = P_\alpha (e^{-\phi} Q e^\phi) \frac{1}{1 - \eta_0 \hat{A}^{(\alpha+\beta)}(e^{-\phi} Q e^\phi)} P_\beta$$

が成り立つことからわかる。

$\{P_\alpha\}_{\alpha \geq 0}$ および $\hat{A}^{(\gamma)}$ の具体例:

$$P_\alpha = |\alpha + 1\rangle = U_{\alpha+1}^\dagger U_{\alpha+1} |0\rangle = e^{-\frac{\alpha-1}{2} \hat{\mathcal{L}}} |0\rangle = e^{-\frac{\pi}{2} \alpha K_1^L} \mathcal{I},$$

$$\hat{A}^{(\gamma)} = \int_0^\gamma d\alpha \log\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) \left(\frac{\pi}{2} J_1^{--L} + \alpha \frac{\pi^2}{4} \tilde{G}_1^{-L} B_1^L \right) P_\alpha$$

$$J^{--}(z) \equiv \xi b(z), \quad \tilde{G}^- \equiv [Q, J^{--}(z)]$$

$$\Rightarrow J_1^{--L}, \tilde{G}_1^{-L} \text{ は } B_1^L \text{ と同様に定義する。}$$

- $\Phi_{(i)}^{(\alpha,\beta)}(\cdot)$ の変換で運動方程式の解を求めるには、

$$\eta_0(e^{-\phi} Q e^{\phi}) = 0$$

を満たす運動方程式の解 ϕ が必要。その代わりに

$$\eta_0 Q \hat{\phi} = 0, \quad \hat{\phi} * \hat{\phi} = 0, \quad \hat{\phi} * \eta_0 \hat{\phi} = 0, \quad \hat{\phi} * Q \hat{\phi} = 0$$

というより強い条件を満たす(運動方程式の解) $\hat{\phi}$ は例えば

$$\hat{\phi} = U_1^\dagger U_1 c \xi e^{-\phi} \psi^+(0) |0\rangle \quad (\text{light-cone 方向})$$

この $\hat{\phi}$ から $\Phi_{(i)}^{(\alpha,\beta)}(\hat{\phi})$ により 解を生成 できる！

$\alpha = \beta = 1/2$ とおくと Erler / Okawa の解を再現する。

まとめと展望

- Senの予想を証明できるSchnablのタキオン解(2005)の発見以降、開弦の場の理論の技術的な進展があった。
- 今年になってnonsingularな(super)currentに対応する新たなmarginal解がbosonicおよびsuperの両方の場合に構成された。
- それらはそれぞれ運動方程式の解を解に写す変換によって、ある単純化された解から生成されたものである。
- より一般の(super)currentに対しても別の新しいmarginal解が構成されている。

- その他の解は？

例えば、形式的にはidentity stateに基づく高橋-谷本解(bosonic), 岸本-高橋解(super)をそれぞれ「変換」すれば、新たなよりregularな解を得られるはずである。

- 解の間のゲージ同値性は？

- 得られた解の物理的意味は？その解のまわりでのBRSTコホモロジーは？

- 現段階では微妙な部分も多いので、弦場がregularであることの(物理的に妥当な)定義などをよりきちんと議論すべきであろう。

ゲージ同値性について

- スター積に関するpath-orderの形を(形式的に)使えば、「解を解に写す変換」はゲージ変換の形に書きなおせる。すると具体例では...

bosonic: $\Psi^{(\alpha, \beta)}(\hat{\psi}) \sim \hat{\psi}$

super: $\Phi_{(i)}^{(\alpha, \beta)}(\hat{\phi}) \sim \hat{\phi}$

↑
Identity stateを含まない
wedge stateたちに基づく解

↑
Identity stateに基づく解

ゲージ変換としてはsingularになっている可能性がある。