



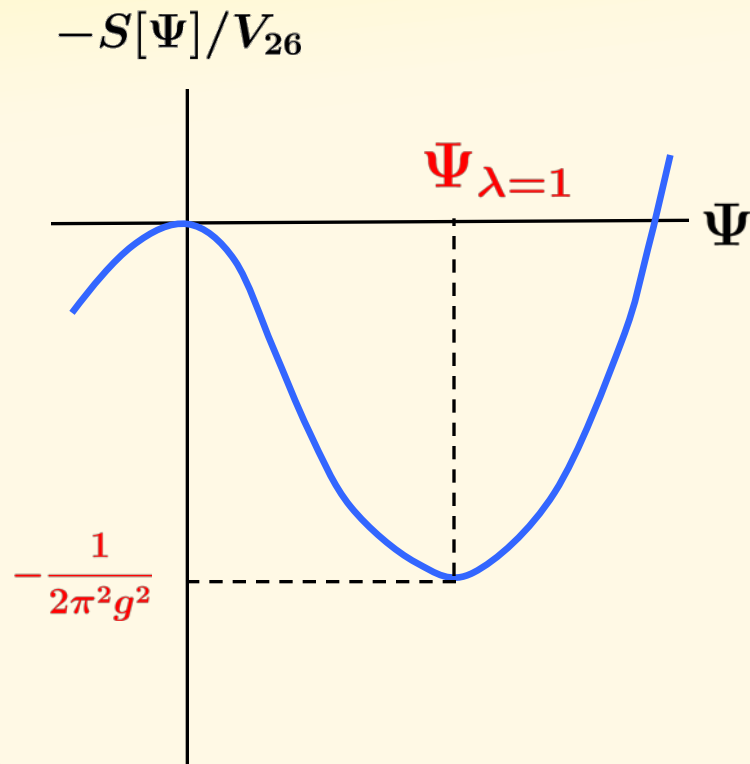
# SCHNABL 解に対する あるゲージ不変量の計算

 **岸本 功**

共同研究者：川野氏、九後氏、高橋氏

# 序

- ◆ Wittenの開弦の場の理論における Schnabl解は非摂動的真空をあらわす（と思われる）。
  - ◆ potentialの高さ（作用の値）がD25-brane tensionに等しい。[Schnabl,...]
  - ◆ 解のまわりのBRST cohomologyが自明。[Ellwood-Schnabl]
- ◆ phantom項など微妙な点もある。
- ◆ Schnabl解 ( $\lambda = 1$ ) では、D-braneは消滅し開弦の自由度はなくなっているとしても**閉弦**は？



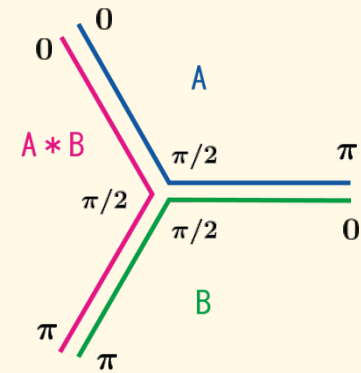
# Wittenの開弦の場の理論

$$S[\Psi] = -\frac{1}{g^2} \left( \frac{1}{2} \langle \Psi, Q\Psi \rangle + \frac{1}{3} \langle \Psi, \Psi * \Psi \rangle \right)$$

$$|\Psi\rangle = \phi(x)c_1|0\rangle + A_\mu(x)\alpha_{-1}^\mu c_1|0\rangle + iB(x)c_0|0\rangle + \dots$$

$$Q = \oint \frac{dz}{2\pi i} \left( cT^m + bc\partial c + \frac{3}{2}\partial^2 c \right)$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{array}{c} 0 \qquad \qquad \pi \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \pi \qquad \qquad 0 \end{array}$$



運動方程式： $Q\Psi + \Psi * \Psi = 0$

ゲージ変換： $\delta_\Lambda \Psi = Q\Lambda + \Psi * \Lambda - \Lambda * \Psi$

# Schnabl解

- ◆ パラメータ  $\lambda$  の入った解の形：

$$\Psi_\lambda = \frac{\lambda \partial_r}{\lambda e^{\partial_r} - 1} \psi_r|_{r=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(\lambda)}{n!} \partial_r^n \psi_r|_{r=0}$$

$$\frac{\lambda x}{\lambda e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(\lambda)}{n!} x^n, \quad f_n(\lambda) = \begin{cases} B_n & (\lambda = 1) \\ -n\lambda \text{Li}_{1-n}(\lambda) - \delta_{n,0}\lambda & (\lambda \neq 1) \end{cases}$$

$$\psi_r \equiv \frac{2}{\pi} U_{r+2}^\dagger U_{r+2} \left[ -\frac{1}{\pi} (\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_0^\dagger) \tilde{c}\left(\frac{\pi r}{4}\right) \tilde{c}\left(-\frac{\pi r}{4}\right) + \frac{1}{2} \left( \tilde{c}\left(-\frac{\pi r}{4}\right) + \tilde{c}\left(\frac{\pi r}{4}\right) \right) \right] |0\rangle$$

- ◆  $\lambda$  に関する展開形（+Euler-Maclaurinの公式）：

$$\Psi_\lambda = \begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \psi_{N+1} - \sum_{n=0}^N \partial_r \psi_r|_{r=n} \right) & (\lambda = 1) \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \partial_r \psi_r|_{r=n} & (\lambda \neq 1) \end{cases}$$

を用いて、作用が解析的に評価できる：

$$S[\Psi_\lambda]/V_{26} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2 g^2} & (\lambda = 1) \\ 0 & (|\lambda| < 1) \end{cases}$$

# Wittenの開弦の場の理論のゲージ不変量

- ◆ on-shell 閉弦状態に対応するゲージ不変量：

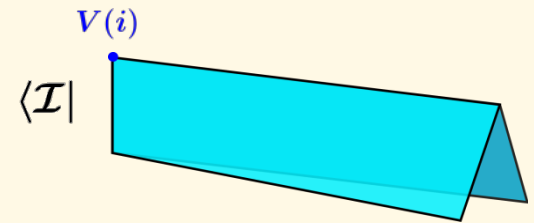
[Zwiebach,...]

$$\mathcal{O}_V(\Psi) = \langle \mathcal{I} | V(i) | \Psi \rangle = \langle \Phi_V, \Psi \rangle$$

$$V(i) = c(i)c(-i)V_m(i, -i)$$



matter primary, dim (1,1)



- ◆ 実際、次の関係式を満たす：

$$Q\Phi_V = 0, \quad \langle \Phi_V, \Psi * \Lambda \rangle = \langle \Phi_V, \Lambda * \Psi \rangle$$

on-shell

midpoint

$$\therefore \mathcal{O}_V(\delta_\Lambda \Psi) = 0$$

- ◆ 特にpure gauge解に対しては零： $\mathcal{O}_V(e^{-\Lambda} Q e^\Lambda) = 0$

# ゲージ不変量の解析的評価

- ◆ sliver frameでSchnablのスター積の公式を用いて計算する。

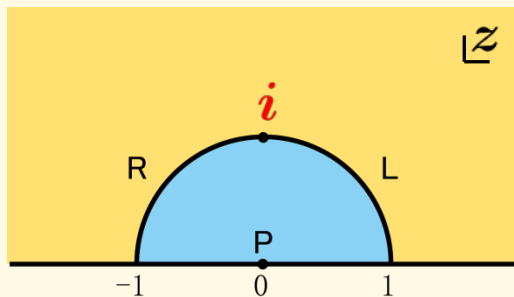
$$\begin{aligned}\Phi_V &= \sum_{m,n} \zeta_{mn} c(i) V_m(i) c(-i) V_n(-i) |\mathcal{I}\rangle \\ &= \sum_{m,n} \zeta_{mn} U_1^\dagger U_1 \tilde{c}(i\infty) \tilde{V}_m(i\infty) \tilde{c}(-i\infty) \tilde{V}_n(-i\infty) |0\rangle.\end{aligned}$$

sliver frame

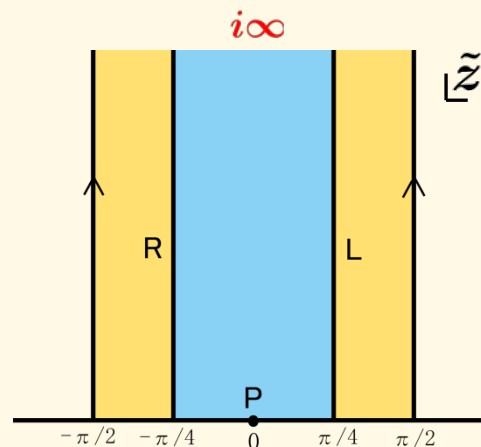
一旦、 $\pm i\infty$  を  $\pm iM$  とし、

$$\Phi_{V,M} \equiv \sum_{m,n} \zeta_{mn} U_1^\dagger U_1 \tilde{c}(iM) \tilde{V}_m(iM) \tilde{c}(-iM) \tilde{V}_n(-iM) |0\rangle$$

を用いて計算。最後に  $M \rightarrow +\infty$  極限をとる。



$$\arctan z = \tilde{z}$$



# ゲージ不変量の解析的評価

- matter部分のOPEが  
だとすると

$$V_m(y)V_n(z) \sim \frac{v_{mn}}{(y-z)^2} + \text{finite} \quad (y \rightarrow z)$$

$$\langle \Phi_{V,M}, \psi_r \rangle = \frac{C_V}{2\pi i} \left( \sinh \frac{4M}{r+1} - \frac{4M}{\pi} \sin \frac{\pi}{r+1} \right) \left( \cosh \frac{4M}{r+1} - \cos \frac{\pi}{r+1} \right) \left( \sinh \frac{4M}{r+1} \right)^{-2},$$
$$C_V = \text{mat} \langle 0|0 \rangle_{\text{mat}} \sum_{m,n} \zeta_{mn} v_{mn}.$$

したがって  $r$  に依らずに  $\langle \Phi_V, \psi_r \rangle = \lim_{M \rightarrow +\infty} \langle \Phi_{V,M}, \psi_r \rangle = \frac{C_V}{2\pi i}$



$$\mathcal{O}_V(\Psi_\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(\lambda)}{k!} \partial_r^k \langle \Phi_V, \psi_r \rangle |_{r=0} = f_0(\lambda) \langle \Phi_V, \psi_0 \rangle = \begin{cases} \frac{C_V}{2\pi i} & (\lambda = 1) \\ 0 & (\lambda \neq 1) \end{cases}$$

$\lambda = 1$  のとき解の別の表示ではphantom項  $\psi_{N+1}$  だけが寄与している！

# on-shellの閉弦tachyon状態

- ◆ Dp-brane上の理論を考え、Dirichlet方向のみ運動量  $k_i$  を持たせたon-shell閉弦tachyon状態:

$$\begin{aligned}\Phi_k &= \frac{1}{4i} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} c(e^{i\theta})c(e^{-i\theta}) : e^{ik \cdot X(e^{i\theta}, e^{-i\theta})} : |\mathcal{I}\rangle \\ &= i \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} c(e^{i\theta}) : e^{\frac{i}{2}k \cdot X(e^{i\theta})} : c(e^{-i\theta}) : e^{-\frac{i}{2}k \cdot X(e^{-i\theta})} : |\mathcal{I}\rangle = \frac{1}{4} e^{E_m + E_{gh}} c_0 c_1 |0\rangle,\end{aligned}$$

$$E_m = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} \alpha_{-n} \cdot \alpha_{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2i\sqrt{2\alpha'}(-1)^n}{2n-1} k \cdot \alpha_{-2n+1}, \quad E_{gh} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_{-n} b_{-n}.$$

- ◆ ここで  $Q|\Phi_k\rangle = 4(\alpha'k^2 - 4) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m c_{-2m} |\Phi_k\rangle$  よりon-shell条件  $k^2 = 4/\alpha'$  を用いている。
- ◆ Schnabl解の運動量が零であることと閉弦tachyonのon-shell条件を両立させるためにDirichlet方向が必要になる。



# 零運動量dilaton状態

- ◆ massless閉弦状態ではtrace部分がゲージ不変量に寄与する  
→ 零運動量dilaton状態の場合を考える。

$$\begin{aligned}\Phi_\eta &= \frac{1}{52\alpha' i} \eta_{\mu\nu} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} c(e^{i\theta}) \partial X^\mu(e^{i\theta}) c(e^{-i\theta}) \partial X^\nu(e^{-i\theta}) |\mathcal{I}\rangle \\ &= \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{13} \sum_{n,m=1}^{\infty} mn \cos \frac{(m-n)\pi}{2} \alpha_{-m} \cdot \alpha_{-n} \right) e^{E_{\mathcal{I},m} + E_{\text{gh}}} c_0 c_1 |0\rangle.\end{aligned}$$

$$E_{\mathcal{I},m} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} \alpha_{-n} \cdot \alpha_{-n}$$

- ◆ ghost部分は閉弦tachyon状態と同じ。
- ◆ 特にon-shell条件は

$$Q \left( \sum_{n,m=1}^{\infty} i^{m-n} mn \alpha_{-m}^\mu \alpha_{-n}^\nu e^{E_{\mathcal{I},m} + E_{\text{gh}}} c_0 c_1 |0\rangle \right) = -\eta^{\mu\nu} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m c_{-2m} e^{E_{\mathcal{I},m} + E_{\text{gh}}} c_0 c_1 |0\rangle$$

から確かめられる。

# level truncationによる評価

- ◆ 通常の振動子で有限のlevelまでで近似して計算。

Schnabl解を構成している  $\psi_{r-2}$  を通常の振動子表示に書き換える：

$$\psi_{r-2} = \left[ \prod_{k=1, \leftarrow}^{\infty} e^{u_{2k}(r)L_{-2k}} \right] \left[ \frac{1}{\pi} \sin \frac{2\pi}{r} \left( 1 - \frac{r}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{r} \right) \sum_{p \geq -1; p: \text{odd}} \left( \frac{2}{r} \cot \frac{\pi}{r} \right)^p c_{-p} |0\rangle \right. \\ \left. + \frac{r}{2\pi^2} \left( \sin \frac{2\pi}{r} \right)^2 \sum_{s \geq 2; s: \text{even}} \frac{(-1)^{\frac{s}{2}+1}}{s^2 - 1} \left( \frac{2}{r} \right)^s \sum_{p, q \geq -1; p+q: \text{odd}} (-1)^q \left( \frac{2}{r} \cot \frac{\pi}{r} \right)^{p+q} b_{-s} c_{-p} c_{-q} |0\rangle \right].$$

$$u_2(r) = -\frac{r^2 - 4}{3r^2}, \quad u_4(r) = \frac{r^4 - 16}{30r^4}, \quad u_6(r) = -\frac{16(r^2 - 4)(r^2 - 1)(r^2 + 5)}{945r^6}, \dots$$

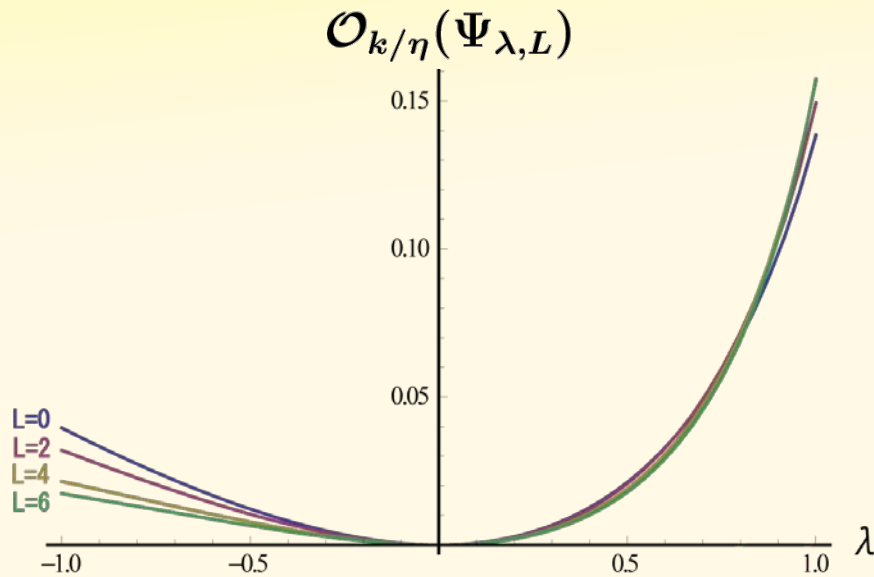
これと  $\Phi_k, \Phi_\eta$  との内積をlevel  $L$  まで計算し、微分して和をとって評価：

$$\mathcal{O}_{k/\eta}(\Psi_{\lambda, L}) = - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \partial_r \langle \Phi_{k/\eta}, \psi_{r, L} \rangle |_{r=n}$$

- ◆ 上の表示より  $\psi_{N+1} \sim \mathcal{O}(N^{-3})$  ( $N \rightarrow \infty$ ) なので **level truncation** ではphantom項  $\psi_{N+1}$  は効かない。

# level truncationによる評価

- ◆  $-1 \leq \lambda \leq 1$  のときに無限和が収束 → 数値的に評価



L	$\mathcal{O}_{k/\eta}(\Psi_{\lambda=1,L})$
0	0.138366
2	0.149284
4	0.156857
6	0.157395

- ◆ level  $L$ :大で解析的な評価 :  $\mathcal{O}_{k/\eta}(\Psi_{\lambda}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \simeq 0.159155 & (\lambda = 1) \\ 0 & (\lambda \neq 1) \end{cases}$  に近づいている。
- ◆ 実はtachyonとdilatonに対応する量はlevelごとに厳密に等しい :

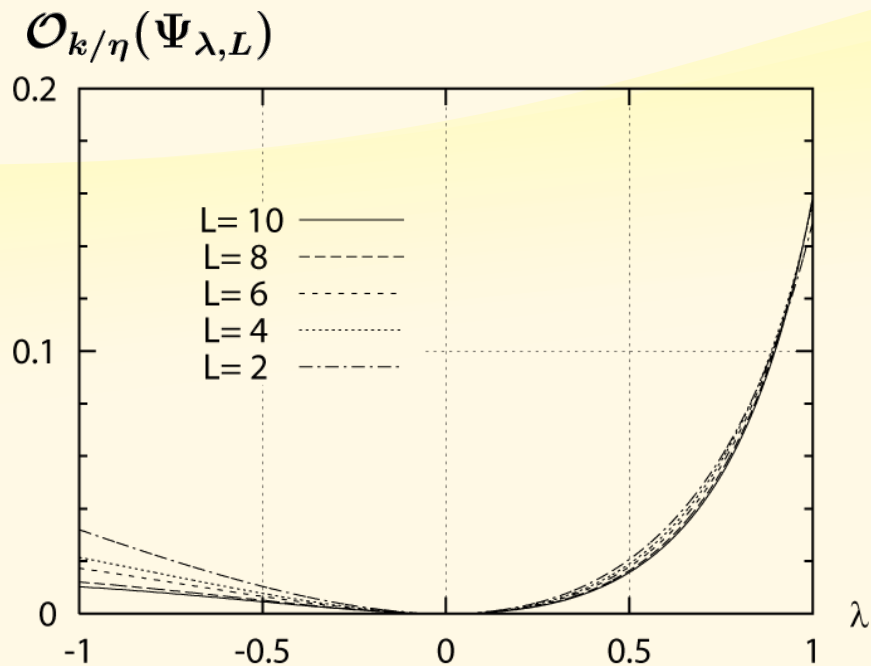
$$\mathcal{O}_k(\Psi_{\lambda,L}) = \mathcal{O}_{\eta}(\Psi_{\lambda,L})$$

# まとめと展望

- ◆ Schnabl解についてon-shell閉弦状態に対応するゲージ不変量を解析的に評価し $\lambda = 1$ の場合のみ非自明な値になった。
- ◆ on-shell閉弦tachyon状態、零運動量dilaton状態に対応するゲージ不変量についてはlevel truncationによる数値計算も $-1 \leq \lambda \leq 1$ の場合に行い、解析的な評価と整合性のある結果を得た。
- ◆  $\lambda = 1$  の場合のみ非自明な解であるという、従来の作用の評価およびcohomologyの議論による描像と整合性がある。
- ◆ 実はSiegelゲージの数値解においてもほぼ同一のゲージ不変量が得られる。⇒ Siegelゲージの数値解とSchnabl解がゲージ同値である可能性を示唆している。
- ◆ このゲージ不変量の物理的意味は？（open-closed SFTで）D braneによるback reaction？

# 付録

(高橋智彦氏によるレベルトランケーションのデータ)



L	$\mathcal{O}_{k/\eta}(\Psi_{\lambda=1,L})$
2	0.14928
4	0.15686
6	0.15740
8	0.15879
10	0.15876

(L, 2L)	$\mathcal{O}_k(\Psi_{\text{Siegel}})$
(2,4)	0.139790
(4,8)	0.147931
(6,12)	0.151225
(8,16)	0.152887
(10,20)	0.154029

Schnabl解  $\Psi_\lambda$  に対するゲージ不変量

Schnablゲージ条件を満たす： $\mathcal{B}_0 \Psi_\lambda = 0$

$$\mathcal{B}_0 = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} b_{2k}$$

Siegelゲージの数値解  $\Psi_{\text{Siegel}}$  に対するゲージ不変量

Siegelゲージ条件を満たす：

$$b_0 \Psi_{\text{Siegel}} = 0$$