

Schnabl解に対する あるゲージ不変量の計算

川野輝彦（東大理），^o岸本功（理研），
九後汰一郎（京大基研），高橋智彦（奈良女大理）

Open SFTの非摂動論的真空

Schnabl解 $\Psi_{\lambda=1}$ = 非摂動論的真空

potentialの高さ = D25-brane tension

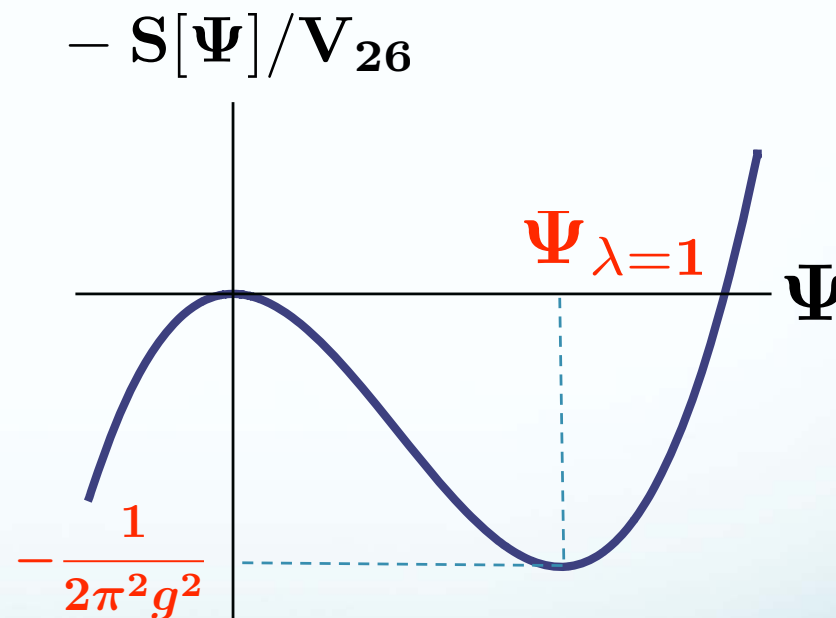
[Schnabl(2005),...]

解の周りでBRST cohomologyが自明

[Ellwood-Schnabl(2006)]

phantom項 (?)

解の周りで閉弦は?



Witten's Open SFT

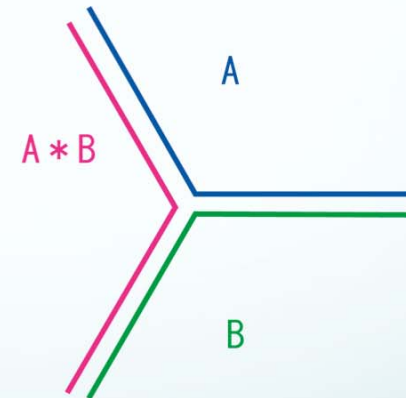
作用：
$$S[\Psi] = -\frac{1}{g^2} \left(\frac{1}{2} \langle \Psi, Q\Psi \rangle + \frac{1}{3} \langle \Psi, \Psi * \Psi \rangle \right)$$

$$|\Psi\rangle = \phi(x)c_1|0\rangle + A_\mu(x)\alpha_{-1}^\mu c_1|0\rangle + iB(x)c_0|0\rangle + \dots$$

$$Q = \oint \frac{dz}{2\pi i} \left(cT^m + bc\partial c + \frac{3}{2}\partial^2 c \right)$$

運動方程式：
$$Q\Psi + \Psi * \Psi = 0$$

ゲージ変換：
$$\delta_\Lambda \Psi = Q\Lambda + \Psi * \Lambda - \Lambda * \Psi$$



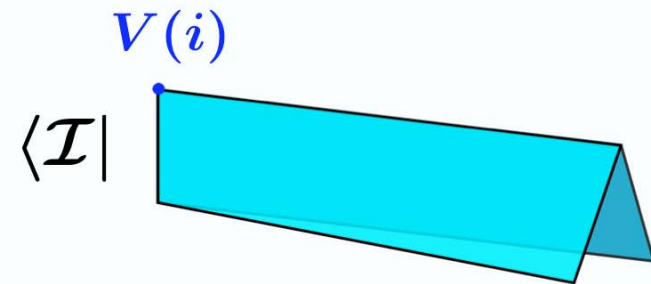
Open SFTのゲージ不変量

on-shell閉弦状態に対応するゲージ不変量 [Zwiebach,...]

$$\mathcal{O}_V(\Psi) = \langle \mathcal{I} | V(i) | \Psi \rangle = \langle \Phi_V, \Psi \rangle$$

$$V(i) = c(i)c(-i)V_m(i, -i)$$

matter primary, dim (1,1)



$$Q\Phi_V = 0, \quad \langle \Phi_V, \Psi * \Lambda \rangle = \langle \Phi_V, \Lambda * \Psi \rangle$$

on-shell

midpoint

$$\therefore \mathcal{O}_V(\delta_\Lambda \Psi) = 0$$

特にpure gauge解に対してはゼロ :

$$\mathcal{O}_V(e^{-\Lambda} Q e^\Lambda) = 0$$

Schnabl解

$$\begin{aligned}\Psi_\lambda &= \frac{\lambda \partial_r}{\lambda e^{\partial_r} - 1} \psi_r|_{r=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(\lambda)}{n!} \partial_r^n \psi_r|_{r=0} \\ &= \begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\psi_{N+1} - \sum_{n=0}^N \partial_r \psi_r|_{r=n} \right) & (\lambda = 1) \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \partial_r \psi_r|_{r=n} & (\lambda \neq 1) \end{cases}\end{aligned}$$

$$\psi_r \equiv \frac{2}{\pi} U_{r+2}^\dagger U_{r+2} \left[-\frac{1}{\pi} (\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_0^\dagger) \tilde{c}\left(\frac{\pi r}{4}\right) \tilde{c}\left(-\frac{\pi r}{4}\right) + \frac{1}{2} \left(\tilde{c}\left(-\frac{\pi r}{4}\right) + \tilde{c}\left(\frac{\pi r}{4}\right) \right) \right] |0\rangle$$

解の2行目の表式を用いて作用は解析的に評価されている：

$$S[\Psi_\lambda]/V_{26} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2 g^2} & (\lambda = 1) \\ 0 & (|\lambda| < 1) \end{cases}$$

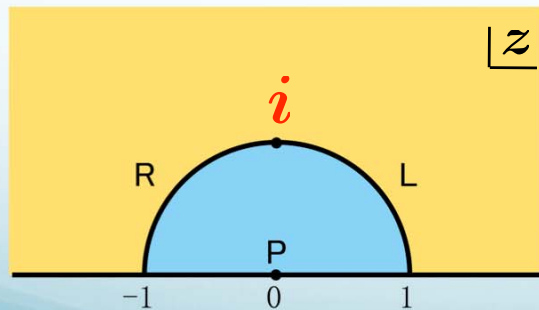
Sliver frameでの閉弦状態

$$\begin{aligned}\Phi_V &= \sum_{m,n} \zeta_{mn} c(i) V_m(i) c(-i) V_n(-i) |\mathcal{I}\rangle \\ &= \sum_{m,n} \zeta_{mn} U_1^\dagger U_1 \tilde{c}(i\infty) \tilde{V}_m(i\infty) \tilde{c}(-i\infty) \tilde{V}_n(-i\infty) |0\rangle\end{aligned}$$

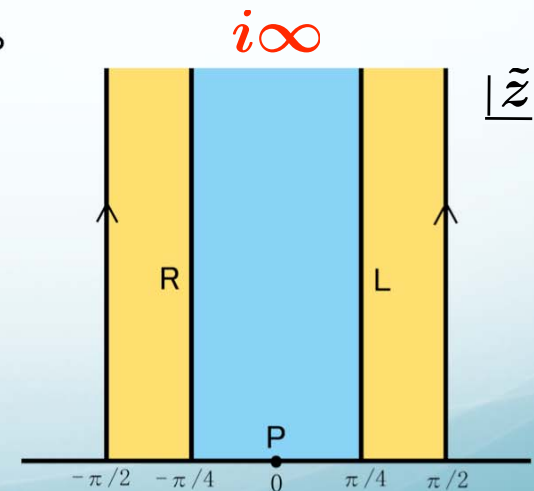
一旦、 $\pm i\infty$ を $\pm iM$ とし、

$$\Phi_{V,M} \equiv \sum_{m,n} \zeta_{mn} U_1^\dagger U_1 \tilde{c}(iM) \tilde{V}_m(iM) \tilde{c}(-iM) \tilde{V}_n(-iM) |0\rangle$$

を用いて計算し最後に $M \rightarrow +\infty$ とする。



$$\arctan z = \tilde{z}$$



ゲージ不変量の解析的評価

$$V_m(y)V_n(z) \sim \frac{v_{mn}}{(y-z)^2} + \text{finite} \quad (y \rightarrow z) \quad \text{のとき}$$

$$\langle \Phi_{V,M}, \psi_r \rangle = \frac{C_V}{2\pi i} \left(\sinh \frac{4M}{r+1} - \frac{4M}{\pi} \sin \frac{\pi}{r+1} \right) \left(\cosh \frac{4M}{r+1} - \cos \frac{\pi}{r+1} \right) \left(\sinh \frac{4M}{r+1} \right)^{-2},$$

$$C_V = \text{mat} \langle 0|0 \rangle_{\text{mat}} \sum_{m,n} \zeta_{mn} v_{mn}.$$

$$\therefore \langle \Phi_V, \psi_r \rangle = \lim_{M \rightarrow +\infty} \langle \Phi_{V,M}, \psi_r \rangle = \frac{C_V}{2\pi i}$$



$$\mathcal{O}_V(\Psi_\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(\lambda)}{k!} \partial_r^k \langle \Phi_V, \psi_r \rangle |_{r=0} = f_0(\lambda) \langle \Phi_V, \psi_0 \rangle = \begin{cases} \frac{C_V}{2\pi i} & (\lambda = 1) \\ 0 & (\lambda \neq 1) \end{cases}$$

解の 2行目の表式 を用いると phantom 項 ψ_{N+1} のみ寄与。

phantom項の吸収

$$\begin{aligned}\Psi_{\lambda=1} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\underline{\underline{\psi_{N+1}}} - \sum_{n=0}^N \partial_r \psi_r |_{r=n} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\psi_0 + \sum_{n=0}^N (\psi_{n+1} - \psi_n - \partial_r \psi_r |_{r=n}) \right) \\ &= \underline{\underline{\psi_0}} + \sum_{n=0}^{\infty} \underline{\underline{(\psi_{n+1} - \psi_n - \partial_r \psi_r |_{r=n})}}\end{aligned}$$

$\lambda = 1$ のときphantom項を引っ込めると ψ_0 が出る。

零運動量dilaton状態

$$\begin{aligned}\Phi_\eta &= \frac{1}{52\alpha' i} \eta_{\mu\nu} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} c(e^{i\theta}) \partial X^\mu(e^{i\theta}) c(e^{-i\theta}) \partial X^\nu(e^{-i\theta}) |\mathcal{I}\rangle \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{13} \sum_{n,m=1}^{\infty} mn \cos \frac{(m-n)\pi}{2} \alpha_{-m} \cdot \alpha_{-n} \right) e^E c_0 c_1 |0\rangle, \\ E &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(-\frac{1}{2n} \alpha_{-n} \cdot \alpha_{-n} + c_{-n} b_{-n} \right)\end{aligned}$$

これはBRST不変: $Q|\Phi_\eta\rangle = 0$

特に: $(L_{2n}^{\text{mat}} - L_{-2n}^{\text{mat}})|\Phi_\eta\rangle = (-1)^n 3n|\Phi_\eta\rangle$

Level truncationによる評価

- 通常の振動子表示では

$$\psi_{r-2} = \left[\prod_{k=1, \leftarrow}^{\infty} e^{u_{2k}(r)L-2k} \right] \left[\frac{1}{\pi} \sin \frac{2\pi}{r} \left(1 - \frac{r}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{r} \right) \sum_{p \geq -1; p: \text{odd}} \left(\frac{2}{r} \cot \frac{\pi}{r} \right)^p c_{-p} |0\rangle \right. \\ \left. + \frac{r}{2\pi^2} \left(\sin \frac{2\pi}{r} \right)^2 \sum_{s \geq 2; s: \text{even}} \frac{(-1)^{\frac{s}{2}+1}}{s^2-1} \left(\frac{2}{r} \right)^s \sum_{p, q \geq -1; p+q: \text{odd}} (-1)^q \left(\frac{2}{r} \cot \frac{\pi}{r} \right)^{p+q} b_{-s} c_{-p} c_{-q} |0\rangle \right]$$

$$u_2(r) = -\frac{r^2-4}{3r^2}, \quad u_4(r) = \frac{r^4-16}{30r^4}, \quad u_6(r) = -\frac{16(r^2-4)(r^2-1)(r^2+5)}{945r^6}, \dots$$

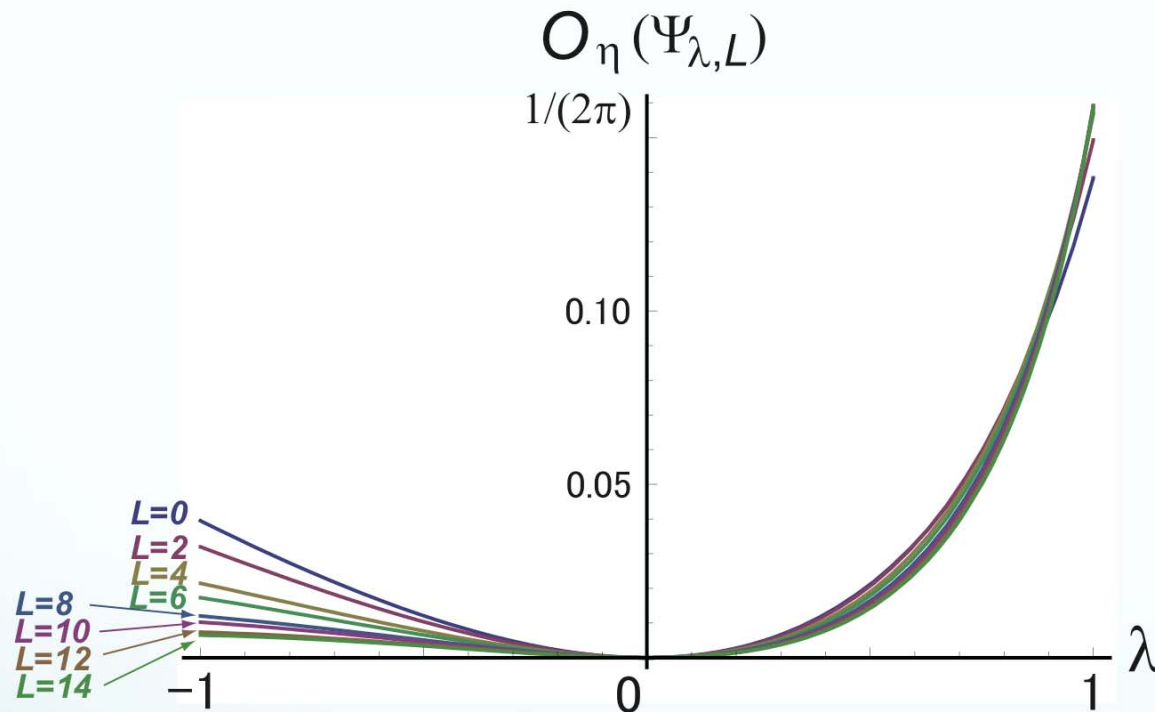
level Lまで計算：

$$(-1 \leq \lambda \leq 1)$$

$$\mathcal{O}_\eta(\Psi_{\lambda, L}) = - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \partial_r \langle \Phi_\eta, \psi_{r, L} \rangle |_{r=n}$$

$\psi_{N+1} = O(N^{-3})$ ($N \rightarrow \infty$) より phantom項 は寄与しない！

Level truncationの計算結果



L	$\mathcal{O}_\eta(\Psi_{\lambda=1,L})$
0	0.13837
2	0.14928
4	0.15686
6	0.15740
8	0.15880
10	0.15877
12	0.15922
14	0.15916

$$\mathcal{O}_\eta(\Psi_\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \simeq 0.159155 & (\lambda = 1) \\ 0 & (\lambda \neq 1) \end{cases}$$

に近づく!

Siegelゲージの数値解の場合

$b_0|\Psi_S\rangle = 0$ を満たすlevel truncationの解におけるゲージ不変量：

(L,2L)	$\mathcal{O}_\eta(\Psi_S)$
(0,0)	0.114044
(2,4)	0.139790
(4,8)	0.147931
(6,12)	0.151225
(8,16)	0.152887
(10,20)	0.154029

(L,3L)	$\mathcal{O}_\eta(\Psi_S)$
(0,0)	0.114044
(2,6)	0.141626
(4,12)	0.148325
(6,18)	0.151369
(8,24)	0.152976
(10,30)	(計算中)

$\frac{1}{2\pi} \simeq 0.159155$ に近い値($\sim 97\%$):

$$\mathcal{O}_\eta(\Psi_{\lambda=1}) \simeq \mathcal{O}_\eta(\Psi_S)$$

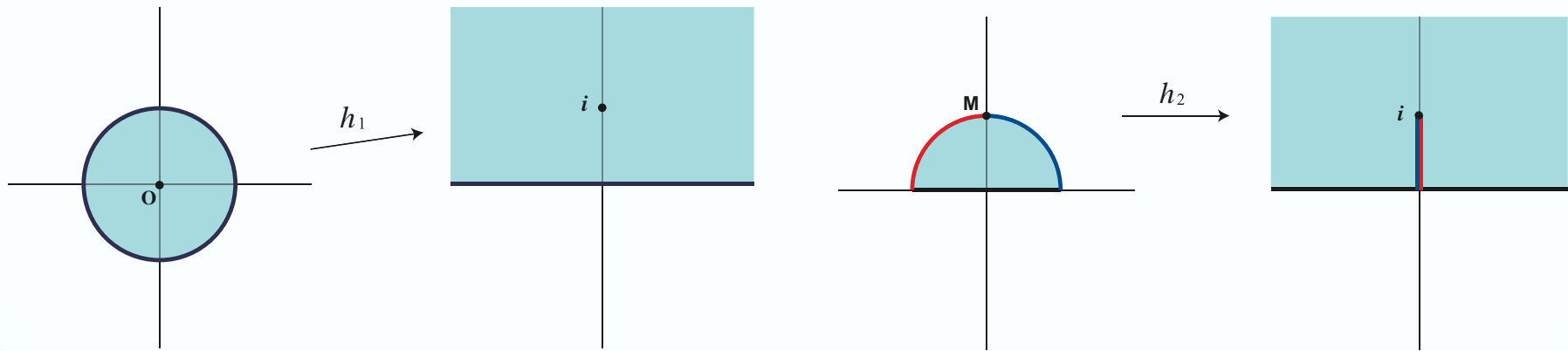
まとめと展望

- ▶ on-shell閉弦状態に対応するゲージ不変量を評価した。
- ▶ Schnabl解 Ψ_λ では $\lambda = 1$ の場合のみ非自明な値。
解析的および数値的に確かめた。
⇒ 作用の評価, cohomologyの議論と整合性がある。
- ▶ Siegelゲージの数値解 Ψ_S でも評価しほぼ同一の値を得た。
⇒ $\Psi_{\lambda=1} \sim \Psi_S$ (ゲージ同値?)
- ▶ 物理的意味は? open-closed SFT?

$$\mathcal{O}_V(\Psi_{\lambda=1}) = \langle \hat{\gamma}(1_c, 2) | \psi_0 \rangle_2 c_1^{(1)} \bar{c}_1^{(1)} | V_m \rangle_{1_c} \propto \langle B_N | c_0^- c_1 \bar{c}_1 | V_m \rangle$$

Shapiro-Thorn vertexによる表現

$\langle \hat{\gamma}(1_c, 2) |$



- ゲージ不変量 : $\mathcal{O}_V(\Psi) = \langle \hat{\gamma}(1_c, 2) | V_c \rangle_{1_c} | \Psi \rangle_2$
 - 「閉弦状態」 : $|\Phi_V\rangle_3 = \langle \hat{\gamma}(1_c, 2) | V_c \rangle_{1_c} |R(2, 3)\rangle$
- ex.) 零運動量dilaton状態は $|V_c\rangle = \frac{-1}{26} \alpha_{-1} \cdot \bar{\alpha}_{-1} c_1 \bar{c}_1 |0\rangle$