



● 開弦の場の理論における  
古典解とゲージ不変量

岸本 功  
(理研)

References:

T. Kawano, I.K., T. Takahashi,  
arXiv:0804.1541 (accepted for publication in NPB), arXiv0804.4414

seminar@nara-wu, 6/6 (2008)

# 弦理論

- 弦理論：素粒子の標準模型および量子重力を含む究極の理論の最有力候補
- 弦理論の摂動論（第1量子化）

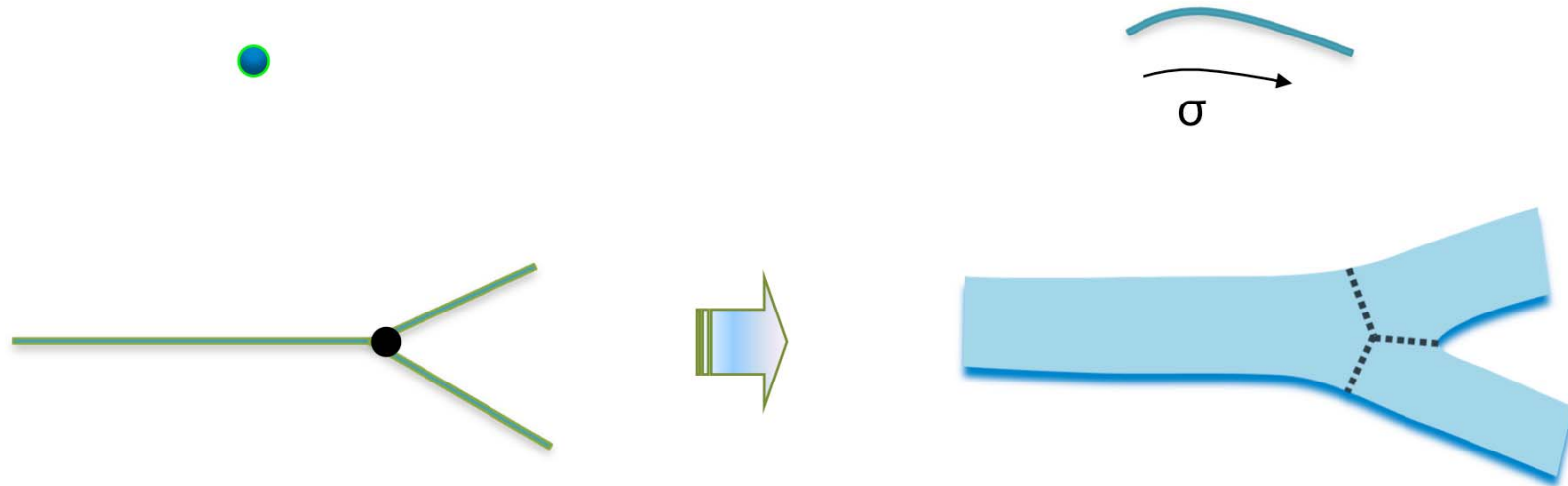


- 深い理解には弦理論の非摂動論的定式化が必要  
→ 弦の場の理論（第2量子化）

$$\phi(x) \quad \longrightarrow \quad \Psi[X(\sigma)]$$

# 弦の場の理論

- ボゾニック開弦の場の理論 [Witten (1986)]



$$\int dx (\phi(x))^3$$

$$= \int dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 - x_2) \delta(x_2 - x_3)$$

$$\phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3)$$

$$\langle \Psi, \Psi * \Psi \rangle$$

$$= \langle V_3(1, 2, 3) | \Psi \rangle_1 | \Psi \rangle_2 | \Psi \rangle_3$$

$$\sim \int \prod_{0 \leq \sigma \leq \pi/2} (\delta(X^{(1)}(\pi - \sigma) - X^{(2)}(\sigma)) \delta(X^{(2)}(\pi - \sigma) - X^{(3)}(\sigma))$$

$$\times \delta(X^{(3)}(\pi - \sigma) - X^{(1)}(\sigma)) (bc \text{ ghost } \dots)$$

$$\times \Psi[X^{(1)}(\sigma), \dots] \Psi[X^{(2)}(\sigma), \dots] \Psi[X^{(3)}(\sigma), \dots]$$

# Wittenの開弦の場の理論


作用：

$$S[\Psi] = -\frac{1}{g^2} \left( \frac{1}{2} \langle \Psi, Q\Psi \rangle + \frac{1}{3} \langle \Psi, \Psi * \Psi \rangle \right)$$

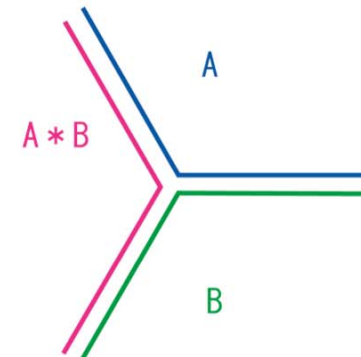
弦場： $\Psi[X(\sigma), b(\sigma), c(\sigma)] = \langle X(\sigma), b(\sigma), c(\sigma) | \Psi \rangle$

加藤-小川のBRST演算子： $Q = \oint \frac{dz}{2\pi i} \left( cT^m + bc\partial c + \frac{3}{2} \partial^2 c \right)$

BPZ内積：



スタ一積：



# 運動方程式, ゲージ変換

$$Q^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 26\text{次元時空}$$

$$\langle A, B \rangle = (-1)^{|A||B|} \langle B, A \rangle \quad \langle A, B * C \rangle = \langle A * B, C \rangle$$

$$\langle A, QB \rangle = -(-1)^{|A|} \langle QA, B \rangle \quad \text{:部分積分}$$

$$Q(A * B) = (QA) * B + (-1)^{|A|} A * (QB)$$

:スター積に関してderivation

$$A * (B * C) = (A * B) * C \quad \text{:associative (一般にスター積は非可換)}$$

運動方程式 :

$$Q\Psi + \Psi * \Psi = 0$$

ゲージ変換 :

$$\delta_\Lambda \Psi = Q\Lambda + \Psi * \Lambda - \Lambda * \Psi$$

$$\rightarrow \delta_\Lambda S[\Psi] = 0$$

# 弦場

- 時空の成分場：無限個含む。

$$|\Psi\rangle = \phi(x)c_1|0\rangle + A_\mu(x)\alpha_{-1}^\mu c_1|0\rangle + iB(x)c_0|0\rangle + \dots$$

$$X^\mu(\sigma) = x^\mu + i\sqrt{\alpha'/2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \cos n\sigma, \dots$$

運動項：

$$\langle \Psi, Q\Psi \rangle = \int d^{26}x \left( \phi(-\alpha'\square - 1)\phi \quad \leftarrow \text{タキオン場} \right. \\ \left. - \alpha' A_\mu \square A^\mu + 2\sqrt{2\alpha'} B \partial_\mu A^\mu + 2B^2 + \dots \right)$$

$B(x)$  を運動方程式で消去すると  
 $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  ( $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ )

↑  
massiveな場

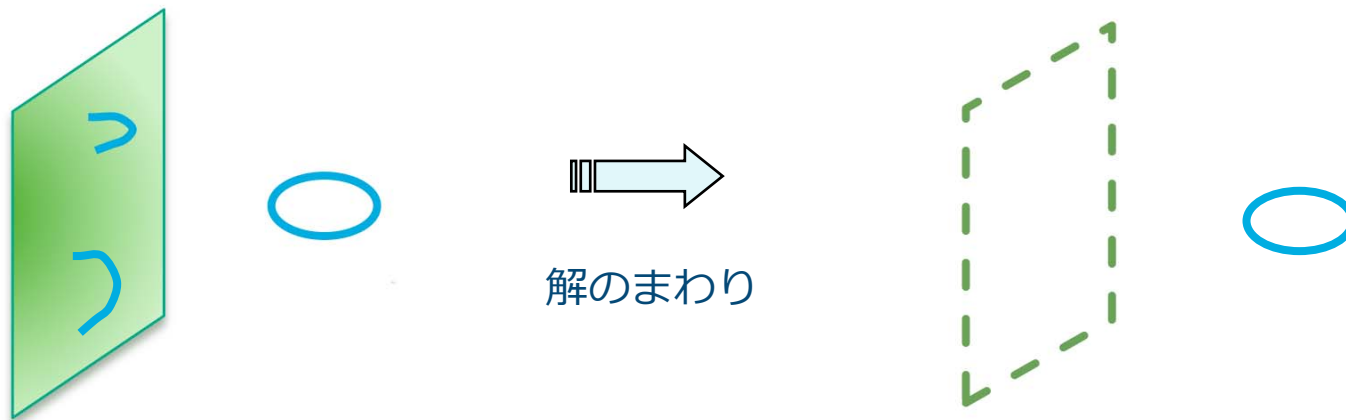


# Senの予想

- ボゾニックな開弦理論 (=D25-brane上の理論) では摂動論的にはタキオンがあり不安定  $\Rightarrow$  非摂動論的には安定な真空がある。(?)

Senの予想 (1999) : 非摂動論的真空ではD25-braneが消滅していて開弦の自由度がない。

- 開弦の場の理論を用いてSenの予想の証明へ



# 非摂動論的真空（数値解）

- 1999～2002 Sen-Zwiebach, ..., Gaiotto-Rastelli

Siegelゲージ  $b_0|\Psi_N\rangle = 0$  の解をlevel truncation近似で求め、  
potentialの高さを評価⇒ potentialの高さ = D25-brane tension

L	$-2\pi^2 g^2 S[\Psi_N]/V_{26}$
0	-0.6846161
2	-0.9485534
4	-0.9864034
6	-0.9947727
8	-0.9977795
10	-0.9991161
12	-0.9997907
14	-1.0001580
16	-1.0003678
18	-1.00049

(L,2L)近似

L	$-2\pi^2 g^2 S[\Psi_N]/V_{26}$
0	-0.6846161
2	-0.9593766
4	-0.9878218
6	-0.9951771
8	-0.9979302
10	-0.9991825
12	-0.9998223
14	-1.0001737
16	-1.0003754
18	-1.0004937

(L,3L)近似



# 非摂動論的真空 (Schnabl解)

2005年11月Schnablが“Schnablゲージ”  
解析的に構成した。

$$\mathcal{B}_0|\Psi_{\lambda=1}\rangle = 0 \text{ の解を}$$

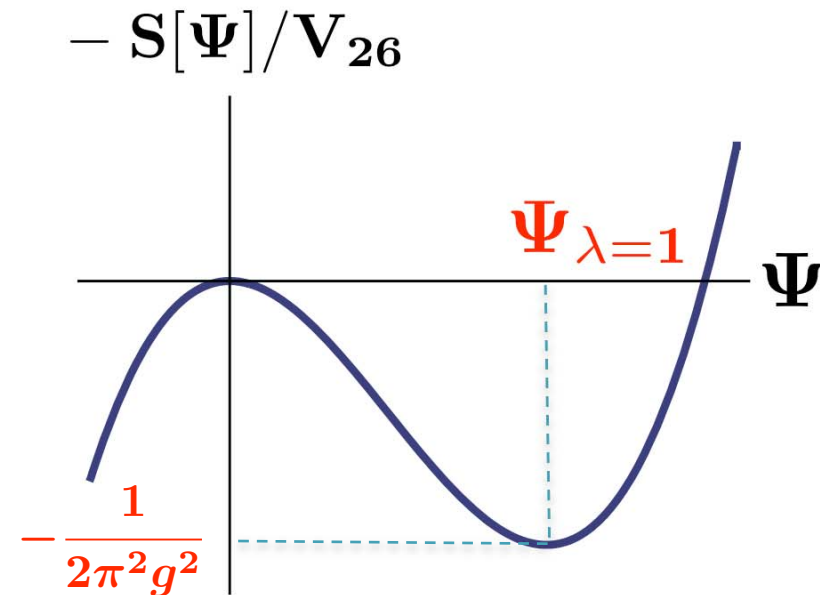
Schnabl解:  $\Psi_{\lambda=1} = \text{非摂動論的真空}$

potentialの高さ = D25-brane tension  
[Schnabl(2005),...]

解の周りでBRST cohomologyが自明  
[Ellwood-Schnabl(2006)]

phantom項 (?)

解の周りで閉弦は?



# Schnablの解析解(one parameter)

$$\Psi_\lambda = \frac{\lambda \partial_r}{\lambda e^{\partial_r} - 1} \psi_r|_{r=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(\lambda)}{n!} \partial_r^n \psi_r|_{r=0}$$

$$= \begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \psi_{N+1} - \sum_{n=0}^N \partial_r \psi_r|_{r=n} \right) & (\lambda = 1) \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \partial_r \psi_r|_{r=n} & (\lambda \neq 1) \end{cases}$$

$$\psi_r \equiv \frac{2}{\pi} U_{r+2}^\dagger U_{r+2} \left[ -\frac{1}{\pi} (\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_0^\dagger) \tilde{c}\left(\frac{\pi r}{4}\right) \tilde{c}\left(-\frac{\pi r}{4}\right) + \frac{1}{2} \left( \tilde{c}\left(-\frac{\pi r}{4}\right) + \tilde{c}\left(\frac{\pi r}{4}\right) \right) \right] |0\rangle$$

解の2行目の表式を用いて作用は解析的に評価されている：

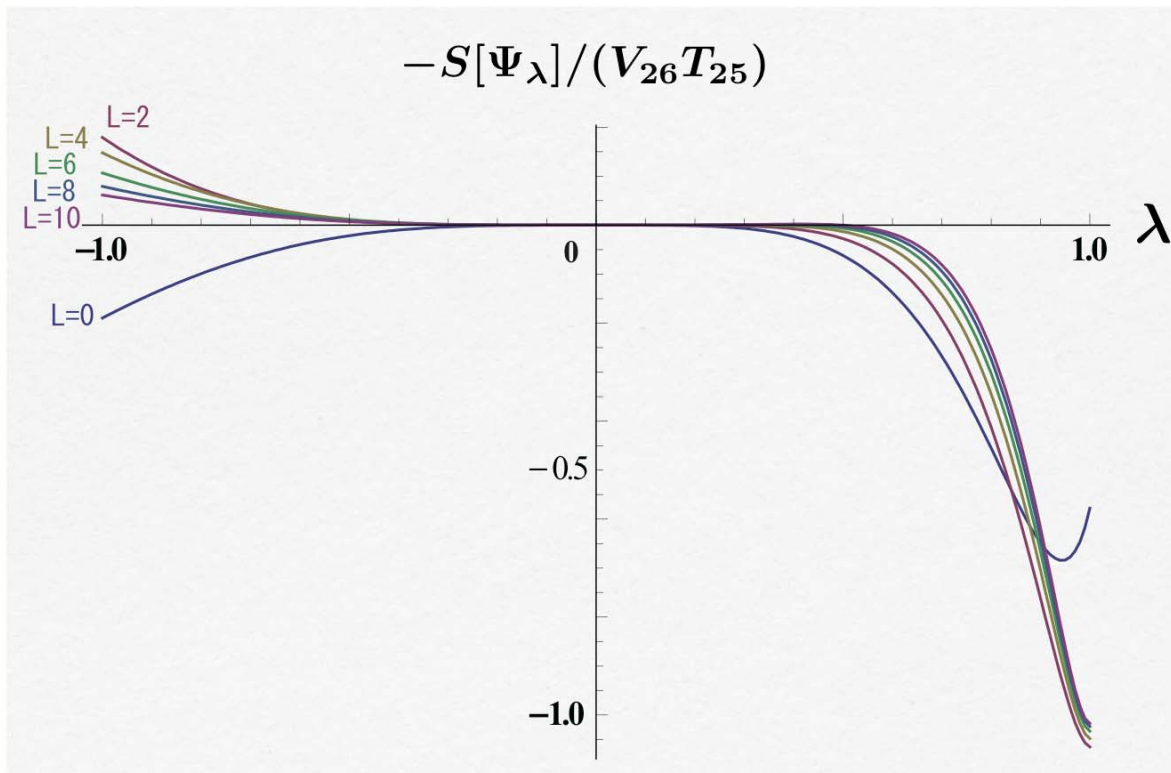
$$S[\Psi_\lambda]/V_{26} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2 g^2} & (\lambda = 1) \\ 0 & (|\lambda| < 1) \end{cases}$$

# Level truncationでの作用の評価

level truncation近似では“phantom項”は効かない： $\Psi_\lambda = -\sum_{n \geq 0} \lambda^{n+1} (\partial_r \psi_r|_{r=n})_L$

[Schnabl(2005), Takahashi(2007)]

$$(-1 \leq \lambda \leq 1)$$



L	$-S[\Psi_{\lambda=1}]/(V_{26} T_{25})$
0	-0.57792
2	-1.06518
4	-1.04798
6	-1.03287
8	-1.02326
10	-1.01705

“(L,3L)”近似

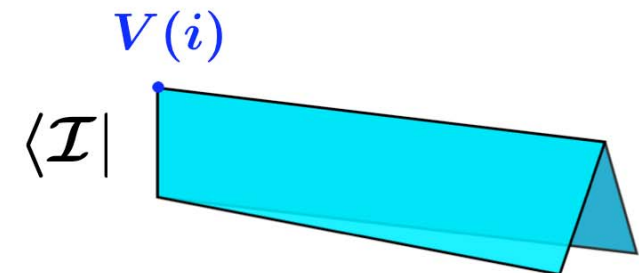
# ゲージ不変量(gauge invariant overlap)

- 開弦の場の理論における、作用以外のゲージ不変量として onshell closed string state を使ったものがある : [Zwiebach,...]

$$\mathcal{O}_V(\Psi) = \langle \mathcal{I} | V(i) | \Psi \rangle = \langle \Phi_V, \Psi \rangle$$

$$V(i) = c(i)c(-i)V_m(i, -i)$$

matter primary, dim (1,1)



$$Q\Phi_V = 0, \quad \langle \Phi_V, \Psi * \Lambda \rangle = \langle \Phi_V, \Lambda * \Psi \rangle$$

on-shell

midpoint

$$\therefore \mathcal{O}_V(\delta_\Lambda \Psi) = 0$$

特に pure gauge 解に対してはゼロ :  $\mathcal{O}_V(e^{-\Lambda} Q e^\Lambda) = 0$

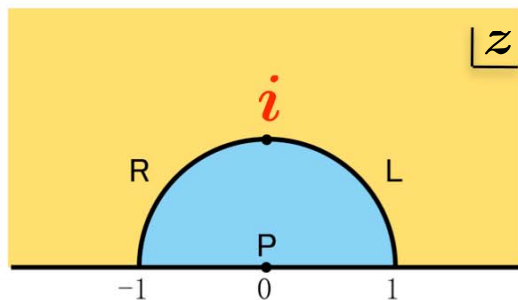
# Sliver frameでの閉弦状態

$$\begin{aligned}\Phi_V &= \sum_{m,n} \zeta_{mn} c(i) V_m(i) c(-i) V_n(-i) |\mathcal{I}\rangle \\ &= \sum_{m,n} \zeta_{mn} U_1^\dagger U_1 \tilde{c}(i\infty) \tilde{V}_m(i\infty) \tilde{c}(-i\infty) \tilde{V}_n(-i\infty) |0\rangle\end{aligned}$$

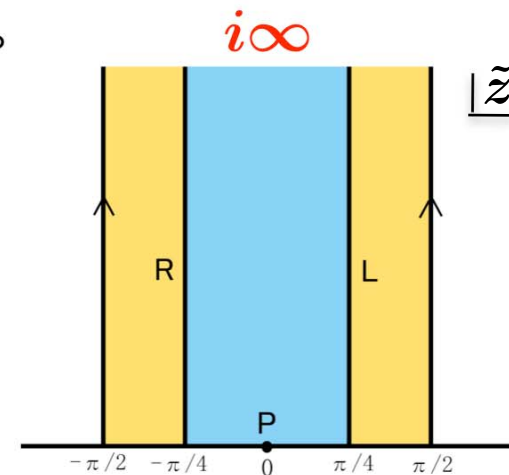
一旦、 $\pm i\infty$  を  $\pm iM$  とし、

$$\Phi_{V,M} \equiv \sum_{m,n} \zeta_{mn} U_1^\dagger U_1 \tilde{c}(iM) \tilde{V}_m(iM) \tilde{c}(-iM) \tilde{V}_n(-iM) |0\rangle$$

を用いて計算し最後に  $M \rightarrow +\infty$  とする。



$$\arctan z = \tilde{z}$$





# Gauge invariant overlapの解析的評価

$$V_m(y)V_n(z) \sim \frac{v_{mn}}{(y-z)^2} + \text{finite} \quad (y \rightarrow z) \quad \text{のとき}$$

$$\langle \Phi_{V,M}, \psi_r \rangle = \frac{C_V}{2\pi i} \left( \sinh \frac{4M}{r+1} - \frac{4M}{\pi} \sin \frac{\pi}{r+1} \right) \left( \cosh \frac{4M}{r+1} - \cos \frac{\pi}{r+1} \right) \left( \sinh \frac{4M}{r+1} \right)^{-2},$$

$$C_V = \text{mat} \langle 0|0 \rangle_{\text{mat}} \sum_{m,n} \zeta_{mn} v_{mn}.$$

$$\therefore \langle \Phi_V, \psi_r \rangle = \lim_{M \rightarrow +\infty} \langle \Phi_{V,M}, \psi_r \rangle = \frac{C_V}{2\pi i}$$



$$\mathcal{O}_V(\Psi_\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(\lambda)}{k!} \partial_r^k \langle \Phi_V, \psi_r \rangle |_{r=0} = f_0(\lambda) \langle \Phi_V, \psi_0 \rangle = \begin{cases} \frac{C_V}{2\pi i} & (\lambda = 1) \\ 0 & (\lambda \neq 1) \end{cases}$$

解の2行目の表式を用いるとphantom項  $\psi_{N+1}$  のみ寄与。

# 零運動量dilaton状態

$$\begin{aligned}\Phi_\eta &= \frac{1}{52\alpha' i} \eta_{\mu\nu} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} c(e^{i\theta}) \partial X^\mu(e^{i\theta}) c(e^{-i\theta}) \partial X^\nu(e^{-i\theta}) |\mathcal{I}\rangle \\ &= \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{13} \sum_{n,m=1}^{\infty} mn \cos \frac{(m-n)\pi}{2} \alpha_{-m} \cdot \alpha_{-n} \right) e^E c_0 c_1 |0\rangle, \\ E &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( -\frac{1}{2n} \alpha_{-n} \cdot \alpha_{-n} + c_{-n} b_{-n} \right)\end{aligned}$$

これはBRST不変:  $Q|\Phi_\eta\rangle = 0$

特に:  $(L_{2n}^{\text{mat}} - L_{-2n}^{\text{mat}})|\Phi_\eta\rangle = (-1)^n 3n|\Phi_\eta\rangle$

# Level truncationによる評価

- 通常の振動子表示では

$$\psi_{r-2} = \left[ \prod_{k=1, \leftarrow}^{\infty} e^{u_{2k}(r)L_{-2k}} \right] \left[ \frac{1}{\pi} \sin \frac{2\pi}{r} \left( 1 - \frac{r}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{r} \right) \sum_{p \geq -1; p: \text{odd}} \left( \frac{2}{r} \cot \frac{\pi}{r} \right)^p c_{-p} |0\rangle \right. \\ \left. + \frac{r}{2\pi^2} \left( \sin \frac{2\pi}{r} \right)^2 \sum_{s \geq 2; s: \text{even}} \frac{(-1)^{\frac{s}{2}+1} \left( \frac{2}{r} \right)^s}{s^2 - 1} \sum_{p, q \geq -1; p+q: \text{odd}} (-1)^q \left( \frac{2}{r} \cot \frac{\pi}{r} \right)^{p+q} b_{-s} c_{-p} c_{-q} |0\rangle \right]$$

$$u_2(r) = -\frac{r^2 - 4}{3r^2}, \quad u_4(r) = \frac{r^4 - 16}{30r^4}, \quad u_6(r) = -\frac{16(r^2 - 4)(r^2 - 1)(r^2 + 5)}{945r^6}, \dots$$

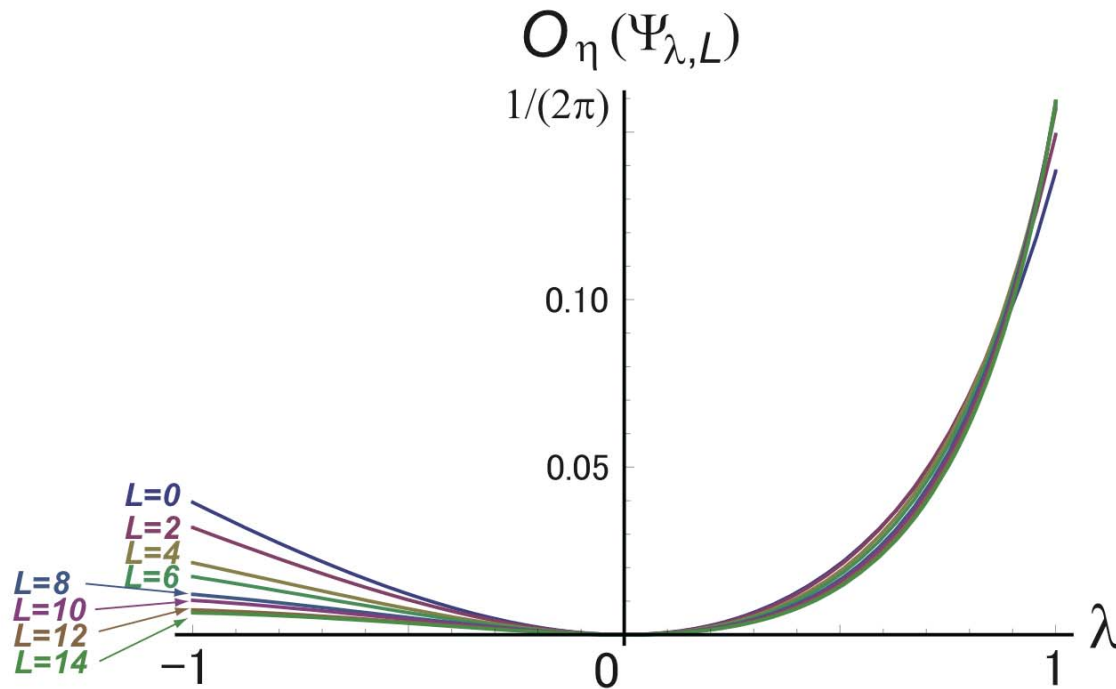
level Lまで計算：

$$(-1 \leq \lambda \leq 1)$$

$$\mathcal{O}_\eta(\Psi_{\lambda, L}) = - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \partial_r \langle \Phi_\eta, \psi_{r, L} \rangle |_{r=n}$$

$\psi_{N+1} = O(N^{-3})$  ( $N \rightarrow \infty$ ) よりphantom項は寄与しない！

# Level truncationの計算結果



L	$\mathcal{O}_\eta(\Psi_{\lambda=1,L})$
0	0.13837
2	0.14928
4	0.15686
6	0.15740
8	0.15880
10	0.15877
12	0.15922
14	0.15916

$$\mathcal{O}_\eta(\Psi_\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \simeq 0.159155 & (\lambda = 1) \\ 0 & (\lambda \neq 1) \end{cases}$$

に近づく!

# Siegelゲージの数値解の場合

(L,2L)近似

L	$\mathcal{O}_\eta(\Psi_N)$
0	0.114044
2	0.139790
4	0.147931
6	0.151225
8	0.152887
10	0.154029
12	0.154750

場の変数

1

3

9

26

69

171

402

(L,3L)近似

L	$\mathcal{O}_\eta(\Psi_N)$
0	0.114044
2	0.141626
4	0.148325
6	0.151369
8	0.152976
10	0.154080
12	-

$\frac{1}{2\pi} \simeq 0.159155$  に近い値 ( $\sim 97\%$ ) :

$$\mathcal{O}_\eta(\Psi_N) \simeq \mathcal{O}_\eta(\Psi_{\lambda=1})$$



# まとめと展望

- ▶ on-shell閉弦状態に対応するゲージ不変量を評価した。
- ▶ Schnabl解  $\Psi_\lambda$  では  $\lambda = 1$  の場合のみ非自明な値。

解析的および数値的に確かめた。

⇒ 作用の評価, cohomologyの議論と整合性がある。

- ▶ Siegelゲージの数値解  $\Psi_N$  でも評価しほぼ同一の値を得た。

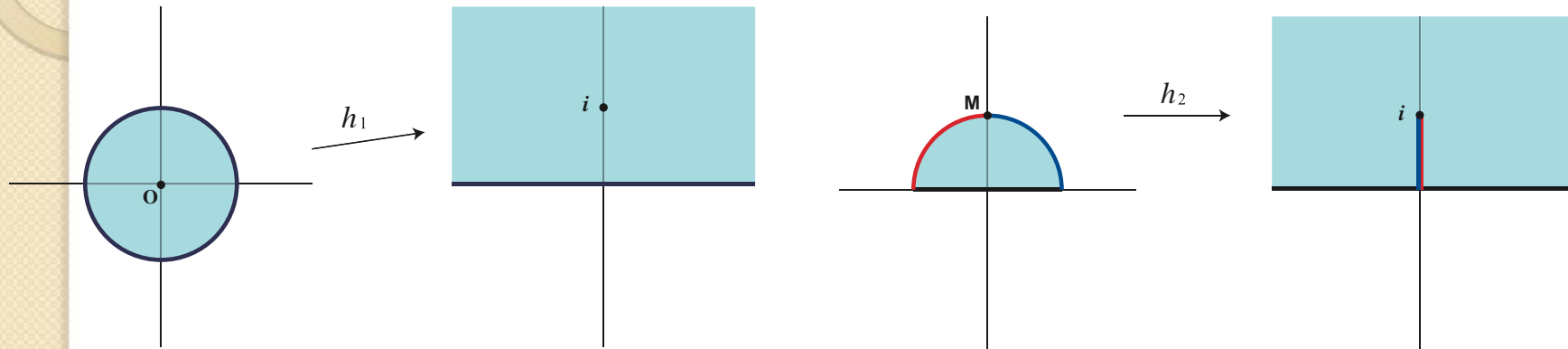
⇒  $\Psi_{\lambda=1} \sim \Psi_N$  (ゲージ同値?)

- ▶ 物理的意味は? open-closed SFT?

Ellwoodによると:  $\mathcal{O}_V(\Psi) = \mathcal{A}_\Psi^{\text{disk}}(V) - \mathcal{A}_0^{\text{disk}}(V)$

# Shapiro-Thorn vertexによる表現

$$\langle \hat{\gamma}(1_c, 2) |$$



- ゲージ不変量 :  $\mathcal{O}_V(\Psi) = \langle \hat{\gamma}(1_c, 2) | V_c \rangle_{1_c} | \Psi \rangle_2$
- 「閉弦状態」 :  $|\Phi_V\rangle_3 = \langle \hat{\gamma}(1_c, 2) | V_c \rangle_{1_c} |R(2, 3)\rangle$   
ex.) 零運動量dilaton状態は

$$|V_c\rangle = \frac{-1}{26} \alpha_{-1} \cdot \bar{\alpha}_{-1} c_1 \bar{c}_1 |0\rangle$$

# 境界状態との対応

$$\langle \hat{\gamma}(1_c, 2) | \Psi_{\lambda=1} \rangle_2 \mathcal{P} b_0^- = \frac{1}{2\pi} \langle B_N | + \langle \hat{\gamma}(1_c, 2) | \chi \rangle_2 \mathcal{P} b_0^-$$



D25-braneを表す境界状態

ここでSchnabl解のphantom項を引っ込めた式を使った：

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda=1} &= \psi_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (\psi_{n+1} - \psi_n - \partial_r \psi_r |_{r=n}) \\ &\equiv \psi_0 + \chi \end{aligned}$$

※非摂動論的真空まわりの理論の解とみなすこともできる：

$$\mathcal{Q}(-\Psi_{\lambda=1}) + (-\Psi_{\lambda=1}) * (-\Psi_{\lambda=1}) = 0$$

$\mathcal{Q} \equiv Q + \text{ad}_{\Psi_{\lambda=1}}$  :  $\Psi_{\lambda=1}$  まわりのBRST演算子