



Gauge Invariant Overlaps for Classical Solutions in Open String Field Theory

岸本 功
(理研)

References:

T. Kawano, I.K., T. Takahashi, arXiv:0804.1541 (to appear in NPB), arXiv0804.4414

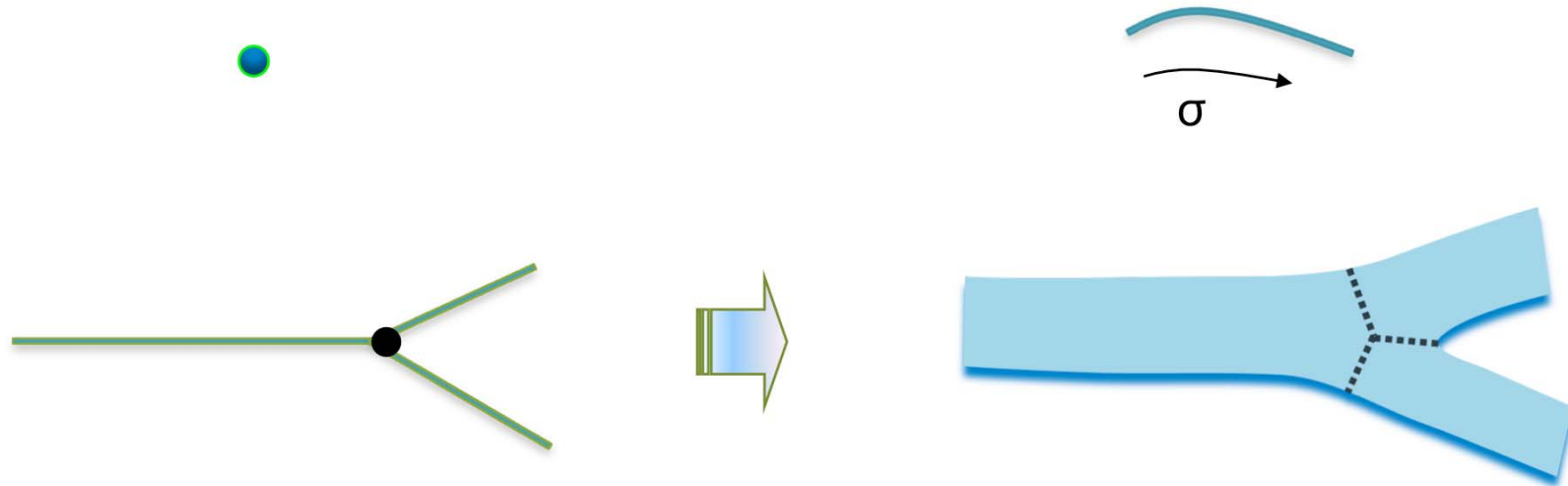
seminar@Rikkyo Univ. (2008.7.15)

目次

- bosonicな開弦の場の理論について
- ゲージ不変量(gauge invariant overlap)
- 非摂動論的真空を表す古典解(Schnablの解析解, 従来のSiegelゲージの数値解)の場合の計算
(2007.12理研シンポジウム、2008.3物理学会 + その後の計算結果)
- marginal解におけるgauge invariant overlapの評価
- まとめと展望

弦の場の理論

- ボゾニック開弦の場の理論 [Witten (1986)]



$$\int dx (\phi(x))^3$$

$$= \int dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 - x_2) \delta(x_2 - x_3)$$

$$\phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3)$$

$$\langle \Psi, \Psi * \Psi \rangle$$

$$= \langle V_3(1, 2, 3) | \Psi \rangle_1 | \Psi \rangle_2 | \Psi \rangle_3$$

$$\sim \int \prod_{0 \leq \sigma \leq \pi/2} (\delta(X^{(1)}(\pi - \sigma) - X^{(2)}(\sigma)) \delta(X^{(2)}(\pi - \sigma) - X^{(3)}(\sigma))$$

$$\times \delta(X^{(3)}(\pi - \sigma) - X^{(1)}(\sigma)) (bc \text{ ghost } \dots)$$

$$\times \Psi[X^{(1)}(\sigma), \dots] \Psi[X^{(2)}(\sigma), \dots] \Psi[X^{(3)}(\sigma), \dots]$$

Wittenの開弦の場の理論


作用：

$$S[\Psi] = -\frac{1}{g^2} \left(\frac{1}{2} \langle \Psi, Q\Psi \rangle + \frac{1}{3} \langle \Psi, \Psi * \Psi \rangle \right)$$

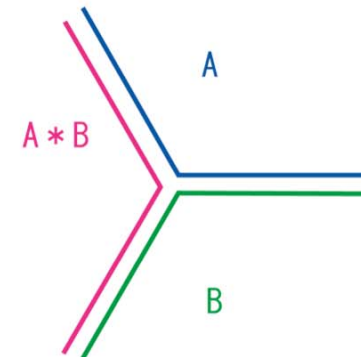
弦場： $\Psi[X(\sigma), b(\sigma), c(\sigma)] = \langle X(\sigma), b(\sigma), c(\sigma) | \Psi \rangle$

加藤-小川のBRST演算子： $Q = \oint \frac{dz}{2\pi i} \left(cT^m + bc\partial c + \frac{3}{2} \partial^2 c \right)$

BPZ内積：



スタ一積：



運動方程式, ゲージ変換

$$Q^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 26\text{次元時空}$$

$$\langle A, B \rangle = (-1)^{|A||B|} \langle B, A \rangle \quad \langle A, B * C \rangle = \langle A * B, C \rangle$$

$$\langle A, QB \rangle = -(-1)^{|A|} \langle QA, B \rangle \quad \text{:部分積分}$$

$$Q(A * B) = (QA) * B + (-1)^{|A|} A * (QB)$$

:スター積に関してderivation

$$A * (B * C) = (A * B) * C \quad \text{:associative (一般にスター積は非可換)}$$

運動方程式 :

$$Q\Psi + \Psi * \Psi = 0$$

ゲージ変換 :

$$\delta_\Lambda \Psi = Q\Lambda + \Psi * \Lambda - \Lambda * \Psi$$

$$\rightarrow \delta_\Lambda S[\Psi] = 0$$

弦場

- 時空の成分場：無限個含む。

$$|\Psi\rangle = \phi(x)c_1|0\rangle + A_\mu(x)\alpha_{-1}^\mu c_1|0\rangle + iB(x)c_0|0\rangle + \dots$$

$$X^\mu(\sigma) = x^\mu + i\sqrt{\alpha'/2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \cos n\sigma, \dots$$

運動項：

$$\langle \Psi, Q\Psi \rangle = \int d^{26}x \left(\phi(-\alpha'\square - 1)\phi \quad \leftarrow \text{タキオン場} \right. \\ \left. - \alpha' A_\mu \square A^\mu + 2\sqrt{2\alpha'} B \partial_\mu A^\mu + 2B^2 + \dots \right)$$

$B(x)$ を運動方程式で消去すると
 $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ ($F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$)

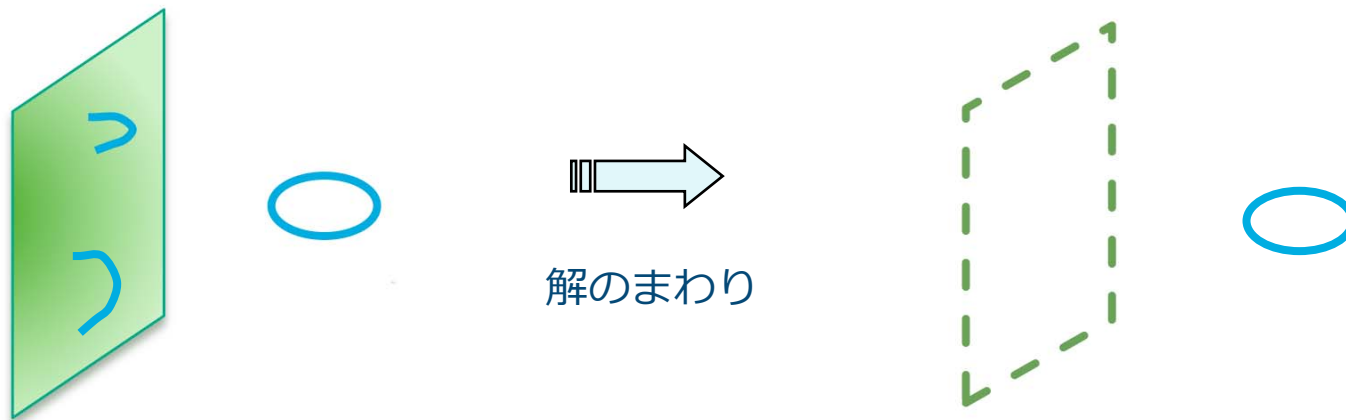
↑
massiveな場

Senの予想

- ボゾニックな開弦理論 (=D25-brane上の理論) では摂動論的にはタキオンがあり不安定 \Rightarrow 非摂動論的には安定な真空がある。(?)

Senの予想 (1999) : 非摂動論的真空ではD25-braneが消滅していて開弦の自由度がない。

- 開弦の場の理論を用いてSenの予想の証明へ



非摂動論的真空（数値解）

- 1999～2002 Sen-Zwiebach, ..., Gaiotto-Rastelli (Table I)

Siegelゲージ $b_0|\Psi_N\rangle = 0$ の解をlevel truncation近似で求め、
potentialの高さを評価⇒ potentialの高さ = D25-brane tension

| L | $-2\pi^2 g^2 S[\Psi_N]/V_{26}$ |
|----|--------------------------------|
| 0 | -0.6846161 |
| 2 | -0.9485534 |
| 4 | -0.9864034 |
| 6 | -0.9947727 |
| 8 | -0.9977795 |
| 10 | -0.9991161 |
| 12 | -0.9997907 |
| 14 | -1.0001580 |
| 16 | -1.0003678 |
| 18 | -1.00049 |

(L,2L)近似

| L | $-2\pi^2 g^2 S[\Psi_N]/V_{26}$ |
|----|--------------------------------|
| 0 | -0.6846161 |
| 2 | -0.9593766 |
| 4 | -0.9878218 |
| 6 | -0.9951771 |
| 8 | -0.9979302 |
| 10 | -0.9991825 |
| 12 | -0.9998223 |
| 14 | -1.0001737 |
| 16 | -1.0003754 |
| 18 | -1.0004937 |

(L,3L)近似

非摂動論的真空 (Schnabl解)

2005年11月Schnablが“Schnablゲージ”
解析的に構成した。

$$\mathcal{B}_0|\Psi_{\lambda=1}\rangle = 0 \text{ の解を}$$

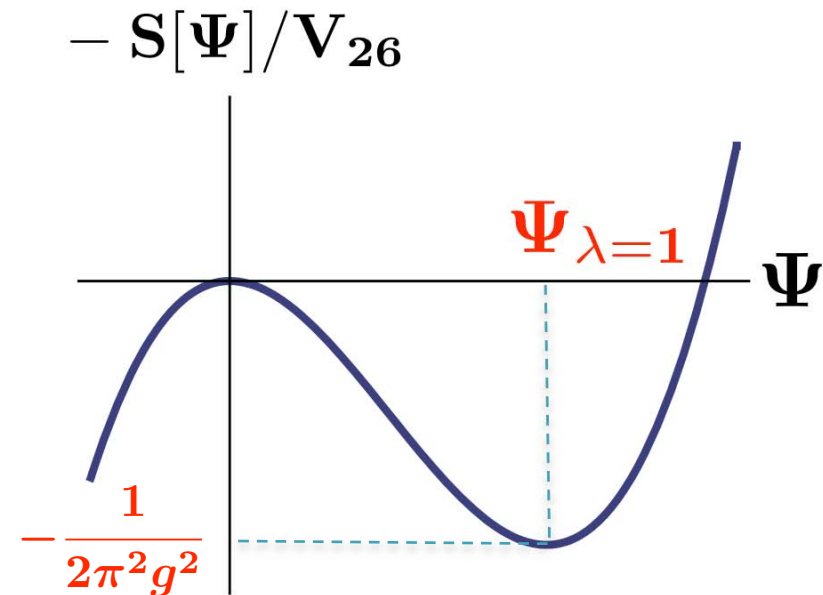
Schnabl解: $\Psi_{\lambda=1} = \text{非摂動論的真空}$

potentialの高さ = D25-brane tension
[Schnabl(2005),...]

解の周りでBRST cohomologyが自明
[Ellwood-Schnabl(2006)]

phantom項 (?)

解の周りで閉弦は?



Schnablの解析解(one parameter)

$$\Psi_\lambda = \frac{\lambda \partial_r}{\lambda e^{\partial_r} - 1} \psi_r|_{r=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(\lambda)}{n!} \partial_r^n \psi_r|_{r=0}$$

$$= \begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\psi_{N+1} - \sum_{n=0}^N \partial_r \psi_r|_{r=n} \right) & (\lambda = 1) \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \partial_r \psi_r|_{r=n} & (\lambda \neq 1) \end{cases}$$

$$\psi_r \equiv \frac{2}{\pi} U_{r+2}^\dagger U_{r+2} \left[-\frac{1}{\pi} (\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_0^\dagger) \tilde{c}\left(\frac{\pi r}{4}\right) \tilde{c}\left(-\frac{\pi r}{4}\right) + \frac{1}{2} \left(\tilde{c}\left(-\frac{\pi r}{4}\right) + \tilde{c}\left(\frac{\pi r}{4}\right) \right) \right] |0\rangle$$

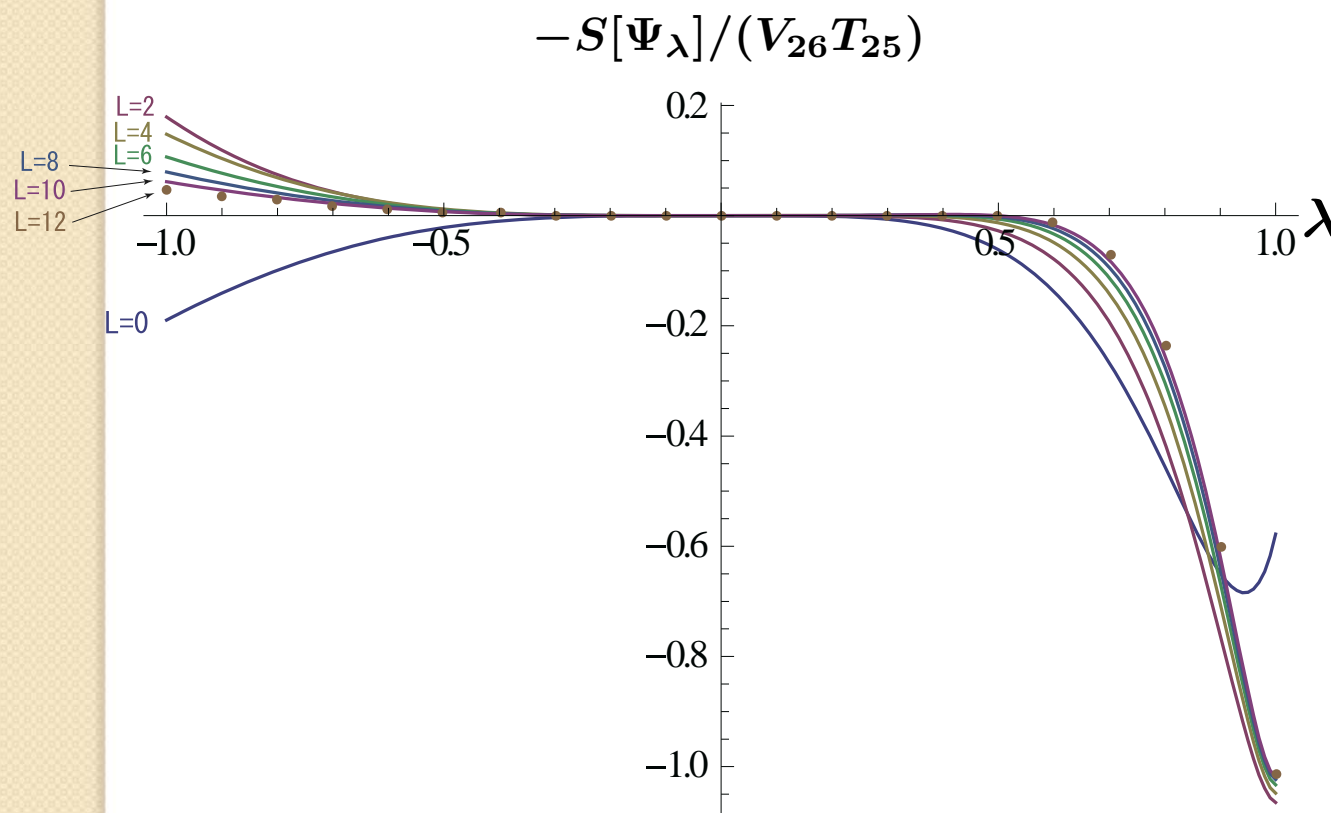
解の2行目の表式を用いて作用は解析的に評価されている：

$$S[\Psi_\lambda]/V_{26} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2 g^2} & (\lambda = 1) \\ 0 & (|\lambda| < 1) \end{cases}$$

Level truncationでの作用の評価

level truncation近似では“phantom項”は効かない： $\Psi_\lambda = -\sum_{n \geq 0} \lambda^{n+1} (\partial_r \psi_r|_{r=n})_L$
($-1 \leq \lambda \leq 1$)

[Schnabl(2005), Takahashi(2007)]



| L | $-S[\Psi_{\lambda=1}]/(V_{26} T_{25})$ |
|----|--|
| 0 | -0.57792 |
| 2 | -1.06518 |
| 4 | -1.04798 |
| 6 | -1.03287 |
| 8 | -1.02326 |
| 10 | -1.01705 |
| 12 | -1.01287 |

“(L,3L)”近似

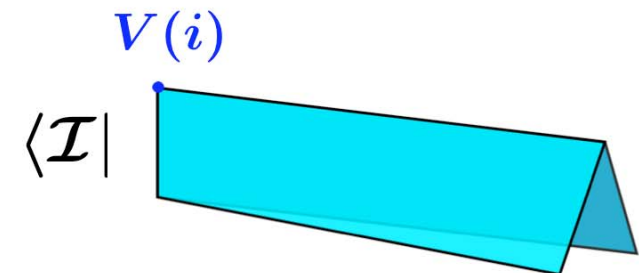
ゲージ不変量(gauge invariant overlap)

- 開弦の場の理論における、作用以外のゲージ不変量として onshell closed string state を使ったものがある : [Zwiebach,...]

$$\mathcal{O}_V(\Psi) = \langle \mathcal{I} | V(i) | \Psi \rangle = \langle \Phi_V, \Psi \rangle$$

$$V(i) = c(i)c(-i)V_m(i, -i)$$

matter primary, dim (1,1)



$$Q\Phi_V = 0, \quad \langle \Phi_V, \Psi * \Lambda \rangle = \langle \Phi_V, \Lambda * \Psi \rangle$$

on-shell

midpoint

$$\therefore \mathcal{O}_V(\delta_\Lambda \Psi) = 0$$

特に pure gauge 解に対してはゼロ : $\mathcal{O}_V(e^{-\Lambda} Q e^\Lambda) = 0$

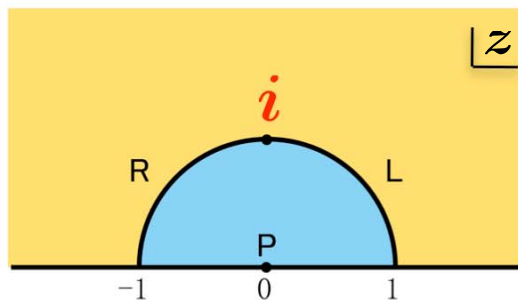
Sliver frameでの閉弦状態

$$\begin{aligned}\Phi_V &= \sum_{m,n} \zeta_{mn} c(i) V_m(i) c(-i) V_n(-i) |\mathcal{I}\rangle \\ &= \sum_{m,n} \zeta_{mn} U_1^\dagger U_1 \tilde{c}(i\infty) \tilde{V}_m(i\infty) \tilde{c}(-i\infty) \tilde{V}_n(-i\infty) |0\rangle\end{aligned}$$

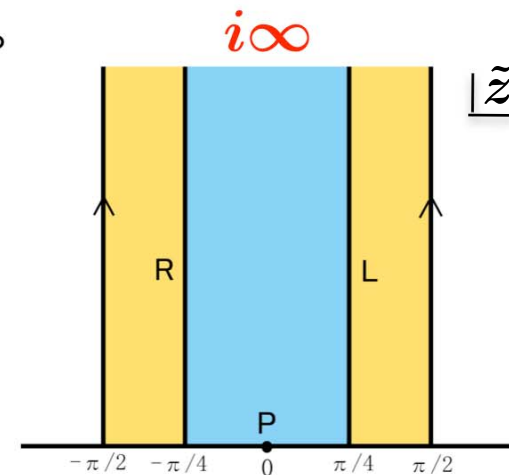
一旦、 $\pm i\infty$ を $\pm iM$ とし、

$$\Phi_{V,M} \equiv \sum_{m,n} \zeta_{mn} U_1^\dagger U_1 \tilde{c}(iM) \tilde{V}_m(iM) \tilde{c}(-iM) \tilde{V}_n(-iM) |0\rangle$$

を用いて計算し最後に $M \rightarrow +\infty$ とする。



$$\arctan z = \tilde{z}$$



Gauge invariant overlapの解析的評価

$$V_m(y)V_n(z) \sim \frac{v_{mn}}{(y-z)^2} + \text{finite} \quad (y \rightarrow z) \quad \text{のとき}$$

$$\langle \Phi_{V,M}, \psi_r \rangle = \frac{C_V}{2\pi i} \left(\sinh \frac{4M}{r+1} - \frac{4M}{\pi} \sin \frac{\pi}{r+1} \right) \left(\cosh \frac{4M}{r+1} - \cos \frac{\pi}{r+1} \right) \left(\sinh \frac{4M}{r+1} \right)^{-2},$$

$$C_V = \text{mat} \langle 0|0 \rangle_{\text{mat}} \sum_{m,n} \zeta_{mn} v_{mn}.$$

$$\therefore \langle \Phi_V, \psi_r \rangle = \lim_{M \rightarrow +\infty} \langle \Phi_{V,M}, \psi_r \rangle = \frac{C_V}{2\pi i}$$



$$\mathcal{O}_V(\Psi_\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(\lambda)}{k!} \partial_r^k \langle \Phi_V, \psi_r \rangle |_{r=0} = f_0(\lambda) \langle \Phi_V, \psi_0 \rangle = \begin{cases} \frac{C_V}{2\pi i} & (\lambda = 1) \\ 0 & (\lambda \neq 1) \end{cases}$$

解の2行目の表式を用いるとphantom項 ψ_{N+1} のみ寄与。

零運動量dilaton状態

$$\begin{aligned}\Phi_\eta &= \frac{1}{52\alpha' i} \eta_{\mu\nu} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} c(e^{i\theta}) \partial X^\mu(e^{i\theta}) c(e^{-i\theta}) \partial X^\nu(e^{-i\theta}) |\mathcal{I}\rangle \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{13} \sum_{n,m=1}^{\infty} mn \cos \frac{(m-n)\pi}{2} \alpha_{-m} \cdot \alpha_{-n} \right) e^E c_0 c_1 |0\rangle, \\ E &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(-\frac{1}{2n} \alpha_{-n} \cdot \alpha_{-n} + c_{-n} b_{-n} \right)\end{aligned}$$

これはBRST不変: $Q|\Phi_\eta\rangle = 0$

特に: $(L_{2n}^{\text{mat}} - L_{-2n}^{\text{mat}})|\Phi_\eta\rangle = (-1)^n 3n|\Phi_\eta\rangle$
 $(L_{2n-1}^{\text{mat}} + L_{-2n+1}^{\text{mat}})|\Phi_\eta\rangle = 0$

Level truncationによる評価

- 通常の振動子表示では

$$\psi_{r-2} = \left[\prod_{k=1, \leftarrow}^{\infty} e^{u_{2k}(r)L_{-2k}} \right] \left[\frac{1}{\pi} \sin \frac{2\pi}{r} \left(1 - \frac{r}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{r} \right) \sum_{p \geq -1; p: \text{odd}} \left(\frac{2}{r} \cot \frac{\pi}{r} \right)^p c_{-p} |0\rangle \right. \\ \left. + \frac{r}{2\pi^2} \left(\sin \frac{2\pi}{r} \right)^2 \sum_{s \geq 2; s: \text{even}} \frac{(-1)^{\frac{s}{2}+1} \left(\frac{2}{r} \right)^s}{s^2 - 1} \sum_{p, q \geq -1; p+q: \text{odd}} (-1)^q \left(\frac{2}{r} \cot \frac{\pi}{r} \right)^{p+q} b_{-s} c_{-p} c_{-q} |0\rangle \right]$$

$$u_2(r) = -\frac{r^2 - 4}{3r^2}, \quad u_4(r) = \frac{r^4 - 16}{30r^4}, \quad u_6(r) = -\frac{16(r^2 - 4)(r^2 - 1)(r^2 + 5)}{945r^6}, \dots$$

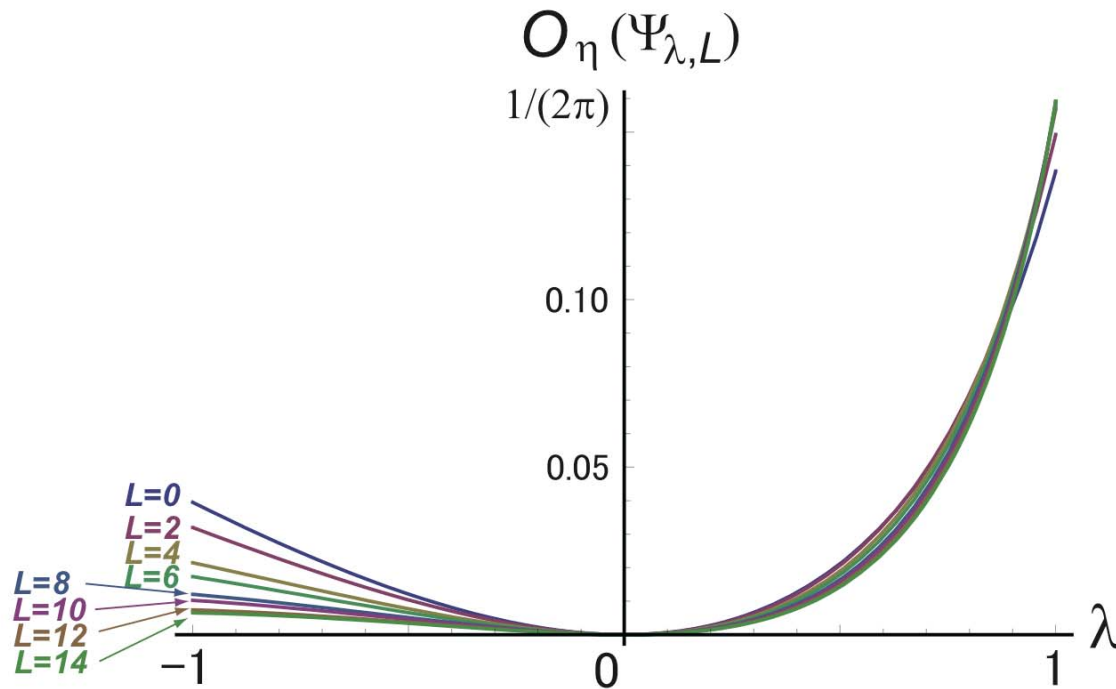
level Lまで計算：

$$(-1 \leq \lambda \leq 1)$$

$$\mathcal{O}_\eta(\Psi_{\lambda, L}) = - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \partial_r \langle \Phi_\eta, \psi_{r, L} \rangle |_{r=n}$$

$\psi_{N+1} = O(N^{-3})$ ($N \rightarrow \infty$) よりphantom項は寄与しない！

Level truncationの計算結果

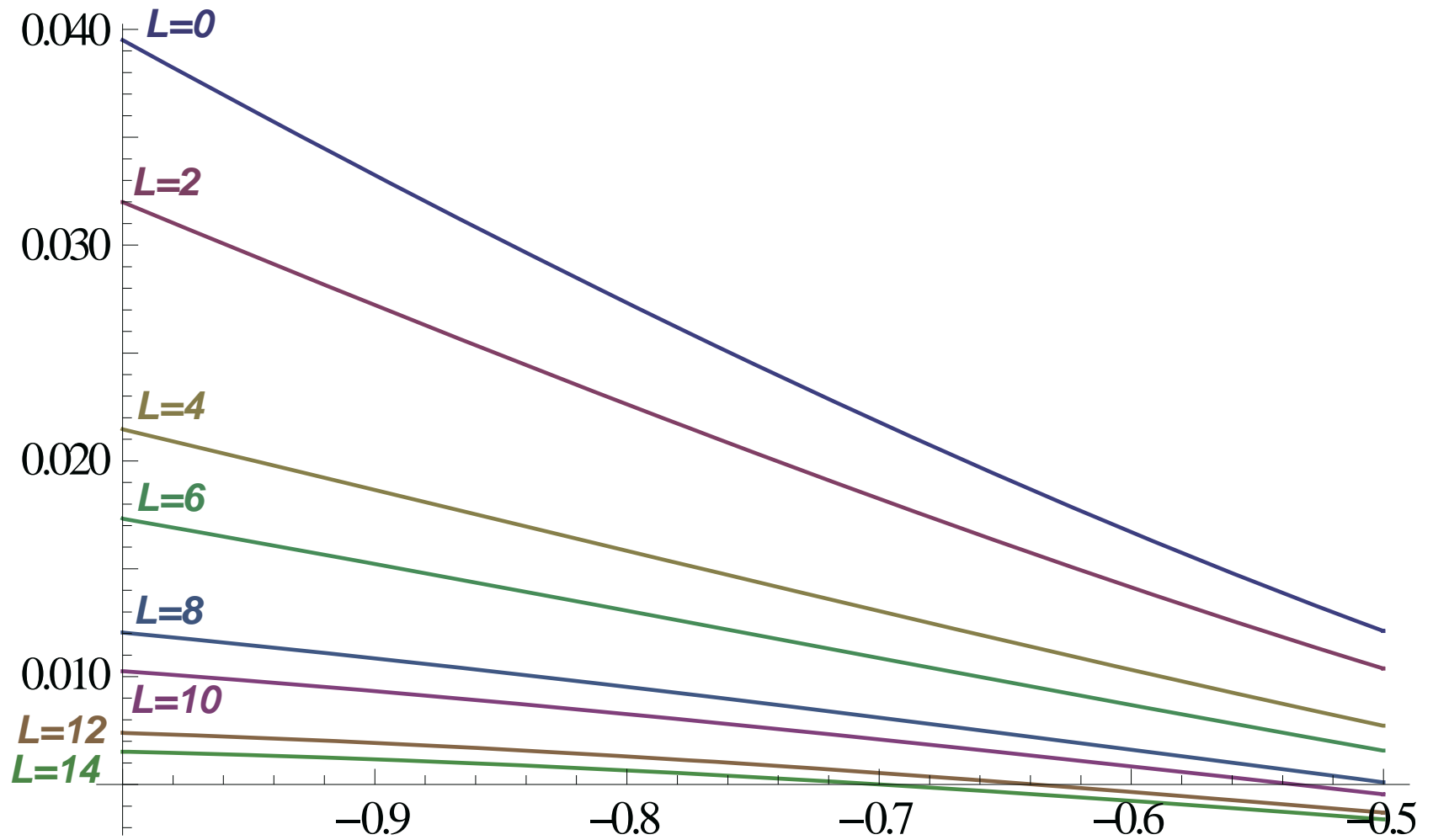


| L | $\mathcal{O}_\eta(\Psi_{\lambda=1,L})$ |
|----|--|
| 0 | 0.13837 |
| 2 | 0.14928 |
| 4 | 0.15686 |
| 6 | 0.15740 |
| 8 | 0.15880 |
| 10 | 0.15877 |
| 12 | 0.15922 |
| 14 | 0.15916 |

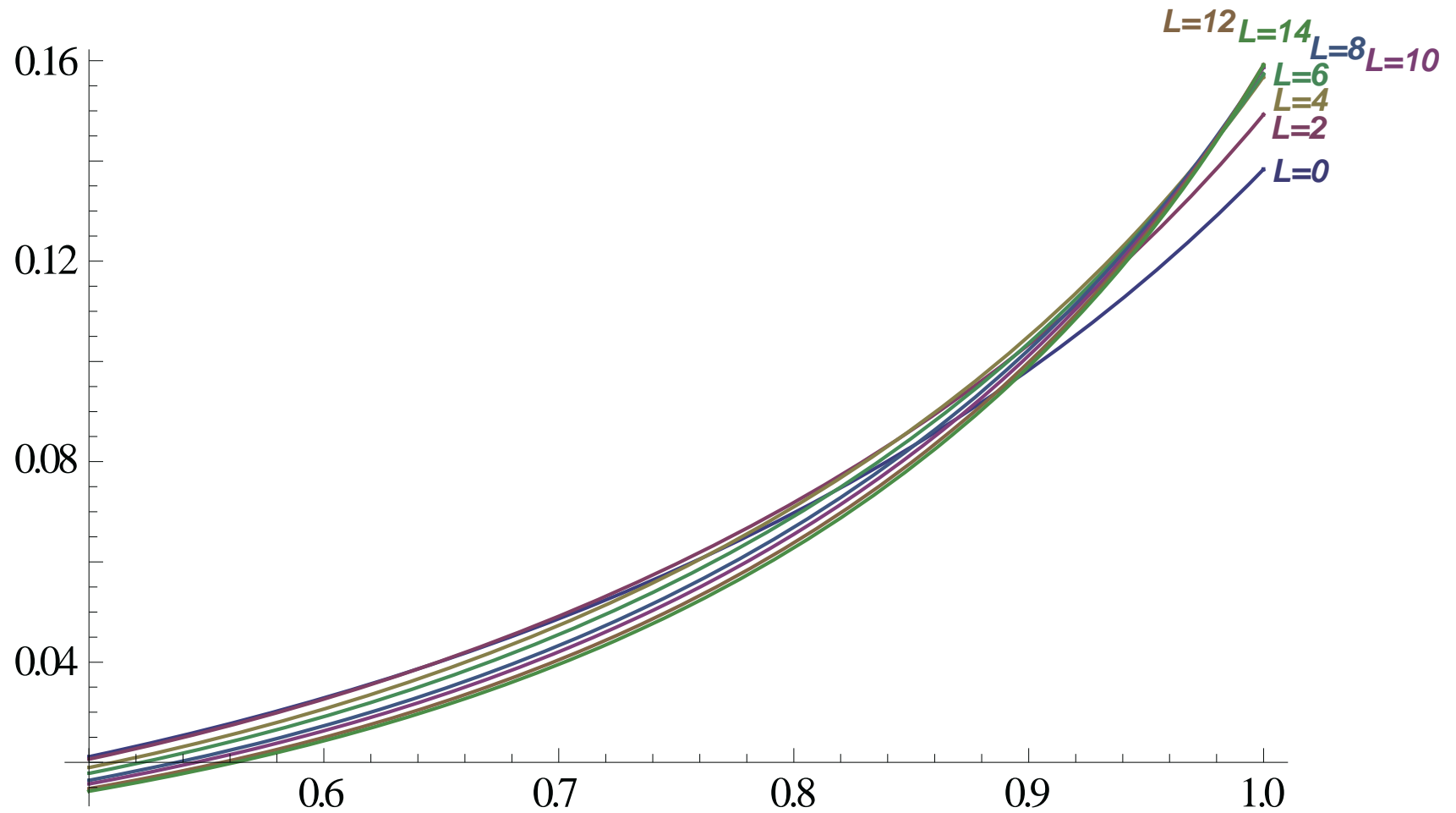
$$\mathcal{O}_\eta(\Psi_\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \simeq 0.159155 & (\lambda = 1) \\ 0 & (\lambda \neq 1) \end{cases}$$

に近づく!

$\lambda < -0.5$ の部分



$\lambda > 0.5$ の部分



Siegelゲージの数値解の場合

(L,2L)近似

| L | $\mathcal{O}_\eta(\Psi_N)$ |
|----|----------------------------|
| 0 | 0.114044 |
| 2 | 0.139790 |
| 4 | 0.147931 |
| 6 | 0.151225 |
| 8 | 0.152887 |
| 10 | 0.154029 |
| 12 | 0.154750 |

場の変数

1

3

9

26

69

171

402

(L,3L)近似

| L | $\mathcal{O}_\eta(\Psi_N)$ |
|----|----------------------------|
| 0 | 0.114044 |
| 2 | 0.141626 |
| 4 | 0.148325 |
| 6 | 0.151369 |
| 8 | 0.152976 |
| 10 | 0.154080 |
| 12 | - |

$\frac{1}{2\pi} \simeq 0.159155$ に近い値 ($\sim 97\%$) :

$$\mathcal{O}_\eta(\Psi_N) \simeq \mathcal{O}_\eta(\Psi_{\lambda=1})$$

ここまでのまとめ

- ▶ on-shell閉弦状態に対応するゲージ不変量を評価した。
- ▶ Schnabl解 Ψ_λ では $\lambda = 1$ の場合のみ非自明な値。

解析的および数値的に確かめた。

⇒ 従来の作用の評価と整合性がある。

- ▶ Siegelゲージの数値解 Ψ_N でも評価しほぼ同一の値を得た。

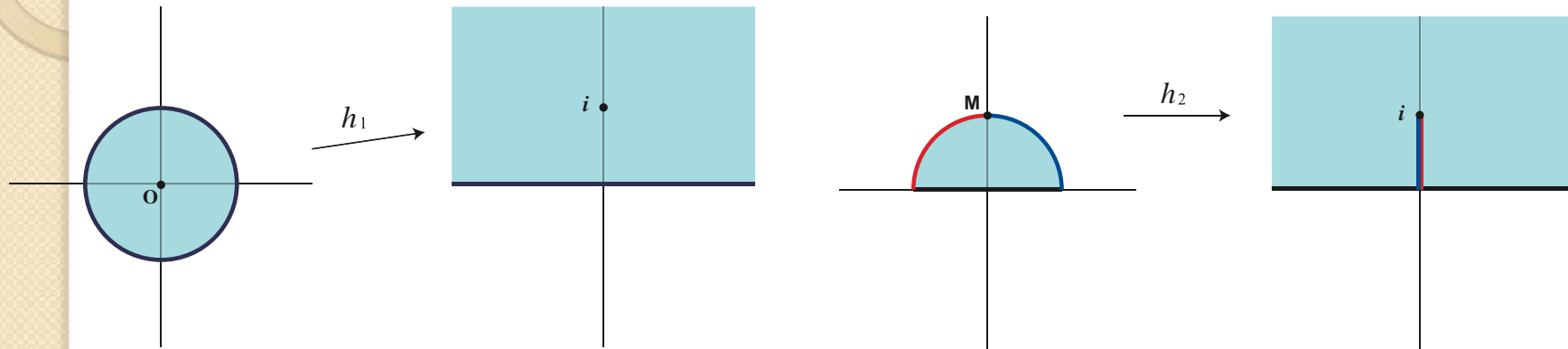
⇒ $\Psi_{\lambda=1} \sim \Psi_N$ (ゲージ同値?)

- ▶ 物理的意味は? open-closed SFT?

Ellwoodによると: $\mathcal{O}_V(\Psi) = \mathcal{A}_\Psi^{\text{disk}}(V) - \mathcal{A}_0^{\text{disk}}(V)$

Shapiro-Thorn vertexによる表現

$$\langle \hat{\gamma}(1_c, 2) |$$



- ゲージ不変量 : $\mathcal{O}_V(\Psi) = \langle \hat{\gamma}(1_c, 2) | V_c \rangle_{1_c} | \Psi \rangle_2$
- 「閉弦状態」 : $|\Phi_V\rangle_3 = \langle \hat{\gamma}(1_c, 2) | V_c \rangle_{1_c} |R(2, 3)\rangle$
ex.) 零運動量dilaton状態は

$$|V_c\rangle = \frac{-1}{26} \alpha_{-1} \cdot \bar{\alpha}_{-1} c_1 \bar{c}_1 |0\rangle$$

marginal解における計算は？

- 開弦の場の理論の別の古典解： *marginal* 解
(identity state-based [Takahashi-Tanimoto,...] でない解)

Schnabl / Kiermaier-Okawa-Rastelli-Zwiebach 解

[[hep-th/0701248](#), [hep-th/0701249](#)]

次元 1 のmatter primary J (互いにnonsingularなOPE) から構成

$$\Psi_{\lambda_m}^J = \lambda_m c J(0) |0\rangle + \dots$$

Fuchs-Kroyter-Potting / Kiermaier-Okawa 解

[[arXiv:0704.2222](#), [arXiv:0707.4472](#)]

次元 1 のmatter primary J (OPEはnonsingularでなくてもよい) から構成

$$\Psi_{L,\lambda_m}^J = \lambda_m c J(0) |0\rangle + \dots$$

FKP/KO解の場合 [Ellwood, arXiv:0804.1131]

- ここでは J 同士のOPEがnonsingularな場合を考える。
- FKP/KO解のあらわな形は(Schnabl的なconventionで)

$$\Psi_{L,\lambda_m}^J = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m^n \psi_{L,n}^J$$

$$\begin{aligned} \psi_{L,n}^J = & U_{n+1}^\dagger U_{n+1} \tilde{c} \tilde{J}\left(\frac{\pi}{4}(n-1)\right) \times \\ & (-1)^{n-1} \int_{\frac{\pi}{4}(n-3)}^{\frac{\pi}{4}(n-1)} d\tilde{x}_1 \int_{\frac{\pi}{4}(n-5)}^{\tilde{x}_1} d\tilde{x}_2 \cdots \int_{\frac{\pi}{4}(-(n-1))}^{\tilde{x}_{n-2}} d\tilde{x}_{n-1} \tilde{J}(\tilde{x}_1) \tilde{J}(\tilde{x}_2) \cdots \tilde{J}(\tilde{x}_{n-1}) |0\rangle \end{aligned}$$

- Schnabl解の場合と全く同様にonshell closed string stateとの内積を計算:

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow +\infty} \langle \Phi_{V,M}, \psi_{L,n}^J \rangle = & 2i \sum_{k,l} \zeta_{kl} \frac{(-1)^{n-1}}{\sin^2 \frac{\pi}{2n}} \langle V_k(i) V_l(-i) J\left(\cot \frac{\pi}{2n}\right) \times \\ & \int_{\cot \frac{3\pi}{2n}}^{\cot \frac{\pi}{2n}} dx_1 \int_{\cot \frac{5\pi}{2n}}^{x_1} dx_2 \cdots \int_{\cot \frac{(2n-1)\pi}{2n}}^{x_{n-2}} dx_{n-1} J(x_1) J(x_2) \cdots J(x_{n-1}) \rangle_{\text{UHP}}^{\text{mat}} \end{aligned}$$

Gauge invariant overlapの評価

- disk上 ($|w|^2 \leq 1$) のcorrelatorに書き直す
(回転対称性、 J の入れ替えの対称性も使う) :

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \langle \Phi_{V,M}, \psi_{L,n}^J \rangle = \frac{(-1)^n}{2\pi i n!} \sum_{k,l} \zeta_{kl} \langle V_{k,w}(0) V_{l,\bar{w}}(0) \left(\int_0^{2\pi} d\theta i e^{i\theta} J_w(e^{i\theta}) \right)^n \rangle_{\text{disk}}^{\text{mat}}$$

- 和をとると gauge invariant overlapは

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_V(\Psi_{L,\lambda_m}^J) &= \langle \Phi_V, \Psi_{L,\lambda_m}^J \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m^n \lim_{M \rightarrow +\infty} \langle \Phi_{V,M}, \psi_{L,n}^J \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{m,n} \zeta_{mn} \langle V_{m,w}(0) V_{n,\bar{w}}(0) \left(e^{-\lambda_m \oint dw J_w(w)} - 1 \right) \rangle_{\text{disk}}^{\text{mat}} \end{aligned}$$

Schnabl/KORZ解の場合

- 解のあらわな形は

$$\Psi_{\lambda_m}^J = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m^n \psi_{m,n}$$

$$\begin{aligned} \psi_{m,k+1} &= \left(-\frac{\pi}{2}\right)^k \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_k U_{\gamma^{(k)}+1}^\dagger U_{\gamma^{(k)}+1} \prod_{m=0}^k \tilde{J}(\tilde{x}_m^{(k)}) \\ &\quad \times \left[-\frac{1}{\pi} (\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_0^\dagger) \tilde{c}(\tilde{x}_0^{(k)}) \tilde{c}(\tilde{x}_k^{(k)}) + \frac{1}{2} \left(\tilde{c}(\tilde{x}_0^{(k)}) + \tilde{c}(\tilde{x}_k^{(k)}) \right) \right] |0\rangle \end{aligned}$$

- ここで

$$\gamma^{(k)} = 1 + \sum_{l=1}^k x_l, \quad \tilde{x}_m^{(k)} = \frac{\pi}{4} \left(\gamma^{(k)} - 1 - 2 \sum_{l=1}^m x_l \right)$$

Gauge invariant overlapの評価(I)

- Schnabl解のときと全く同様な計算で

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \langle \Phi_{V,M}, \psi_{m,k+1} \rangle = \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_k \frac{2i(-\pi)^k}{(1 + \sum_{l=1}^k x_l)^{k+1}} \sum_{m,n} \zeta_{mn} \langle 0 | V_m(i) V_n(-i) \prod_{l=0}^k \tilde{J}(y_l) | 0 \rangle,$$

$$y_m \equiv \frac{\pi \left(\sum_{l=1}^k x_l - 2 \sum_{l=1}^m x_l \right)}{2(1 + \sum_{l=1}^k x_l)}$$

- disk上のcorrelatorとして書き直すと

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \langle \Phi_{V,M}, \psi_{m,k+1} \rangle = \frac{(-1)^{k+1}}{i} \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_k \frac{(2\pi)^k}{(1 + \sum_{l=1}^k x_l)^{k+1}}$$

$$\times \sum_{m,n} \zeta_{mn} \langle V_{m,w}(0) V_{n,\bar{w}}(0) \prod_{l=0}^k (ie^{2iy_l} J_w(e^{2iy_l})) \rangle_{\text{disk}}^{\text{mat}}$$

- 一見複雑に見えるが、変数変換しそのJacobianおよび積分範囲と回転対称性、入れ替え対称性に注意すると、、、

Gauge invariant overlapの評価(2)

- 結局

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \langle \Phi_{V,M}, \psi_{m,k+1} \rangle = \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i (k+1)!} \sum_{m,n} \zeta_{mn} \langle V_{m,w}(0) V_{n,\bar{w}}(0) \left(\int_0^{2\pi} d\theta i e^{i\theta} J_w(e^{i\theta}) \right)^{k+1} \rangle_{\text{disk}}^{\text{mat}}$$

- したがって和をとると gauge invariant overlapは

$$\mathcal{O}_V(\Psi_{\lambda_m}^J) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m,n} \zeta_{mn} \langle V_{m,w}(0) V_{n,\bar{w}}(0) \left(e^{-\lambda_m \oint dw J_w(w)} - 1 \right) \rangle_{\text{disk}}^{\text{mat}}$$

これはFKP/KO解に対する計算結果と厳密に同じ形 :

$$\mathcal{O}_V(\Psi_{\lambda_m}^J) = \mathcal{O}_V(\Psi_{L,\lambda_m}^J)$$

- FKP/KOの解と Schnabl/KORZ解は同じ $\lambda_m J(z)$ のとき互いに gauge equivalent であるという予想と consistent!

Ellwoodのproposalについて

- Gauge invariant overlapはSFTの古典解 Ψ に対しdisk上のclosed stringの1点関数の差を与える（だろう）。

$$\mathcal{O}_V(\Psi) = \mathcal{A}_\Psi^{\text{disk}}(V) - \mathcal{A}_0^{\text{disk}}(V)$$

- Schnabl / KORZ および FKP / KO のmarginal解の場合：

$$\mathcal{O}_V(\Psi_{\lambda_m}^J) = \mathcal{O}_V(\Psi_{L, \lambda_m}^J) = \frac{1}{2\pi i} \langle V_m(0) e^{-\lambda_m \oint J} \rangle_{\text{disk}}^{\text{mat}} - \frac{1}{2\pi i} \langle V_m(0) \rangle_{\text{disk}}^{\text{mat}}$$

- 非摂動論的真空（Schnabl解および数値解）の場合：

$$\mathcal{O}_V(\Psi_{\lambda=1}) = \mathcal{O}_V(\Psi_N) = 0 - \frac{1}{2\pi i} \langle V_m(0) \rangle_{\text{disk}}^{\text{mat}}$$

今後の課題

Open superstring field theoryへの拡張：

- Modified cubic superstring field theory,
- Berkovits' WZW-type superstring field theory
の古典解 [Erler, Aref'eva-Gorbachev-Menedev, Fuchs-Kroyter,
Okawa,...] に対して

Gauge invariant overlap (のsuperstring版)
をそれぞれ計算してみる。

閉弦状態をoff-shellに拡張したときのopen-closed
string field theoryにおける意味づけは？