



# Gauge Invariant Overlaps for Classical Solutions in Open String Field Theory

岸本 功  
(理研)

References:


T. Kawano, I.K., T. Takahashi, NPB803(2008)135[arXiv:0804.1541],  
arXiv0804.4414

# Wittenの開弦の場の理論

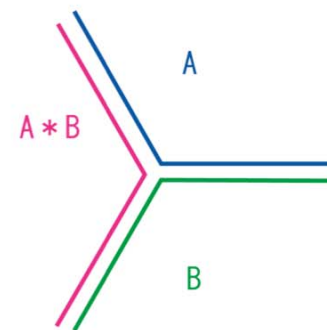
作用：
$$S[\Psi] = -\frac{1}{g^2} \left( \frac{1}{2} \langle \Psi, Q\Psi \rangle + \frac{1}{3} \langle \Psi, \Psi * \Psi \rangle \right)$$

弦場：
$$|\Psi\rangle = \phi(x)c_1|0\rangle + A_\mu(x)\alpha_{-1}^\mu c_1|0\rangle + iB(x)c_0|0\rangle + \dots$$

BRST演算子：
$$Q = \oint \frac{dz}{2\pi i} \left( cT^m + bc\partial c + \frac{3}{2}\partial^2 c \right)$$

BPZ内積：

スタ一積：



運動方程式：
$$Q\Psi + \Psi * \Psi = 0$$

ゲージ変換：
$$\delta_\Lambda \Psi = Q\Lambda + \Psi * \Lambda - \Lambda * \Psi \rightarrow \delta_\Lambda S[\Psi] = 0$$

# 非摂動論的真空 (Schnabl解)

2005年11月Schnablが“Schnablゲージ”  
解析的に構成した。

$$\mathcal{B}_0 |\Psi_{\lambda=1}\rangle = 0 \text{ の解を}$$

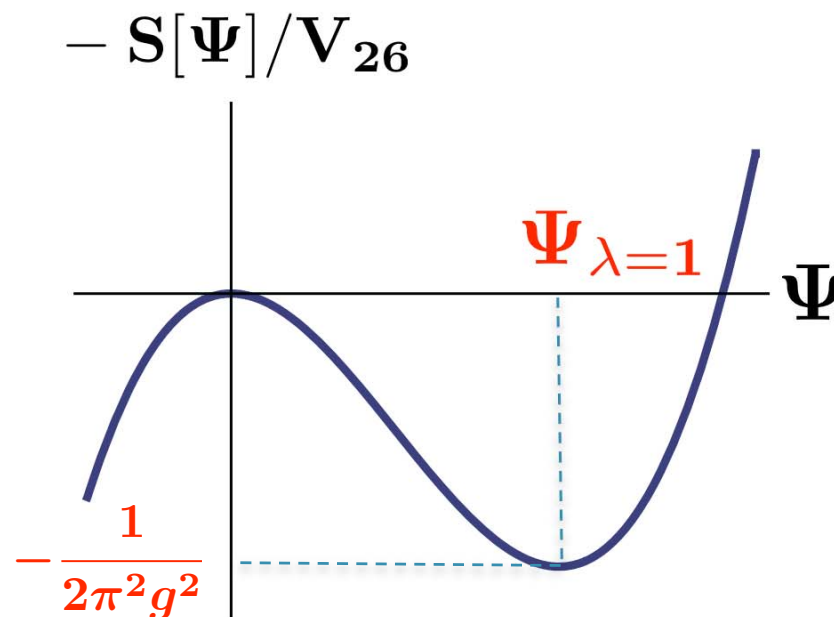
Schnabl解:  $\Psi_{\lambda=1} = \text{非摂動論的真空}$

potentialの高さ = D25-brane tension  
[Schnabl(2005),...]

解の周りでBRST cohomologyが自明  
[Ellwood-Schnabl(2006)]

phantom項 (?)

解の周りで閉弦は?



# Schnablの解析解(one parameter)

$$\begin{aligned}\Psi_\lambda &= \frac{\lambda \partial_r}{\lambda e^{\partial_r} - 1} \psi_r|_{r=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(\lambda)}{n!} \partial_r^n \psi_r|_{r=0} \\ &= \begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \psi_{N+1} - \sum_{n=0}^N \partial_r \psi_r|_{r=n} \right) & (\lambda = 1) \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \partial_r \psi_r|_{r=n} & (\lambda \neq 1) \end{cases}\end{aligned}$$

$$\psi_r \equiv \frac{2}{\pi} U_{r+2}^\dagger U_{r+2} \left[ -\frac{1}{\pi} (\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_0^\dagger) \tilde{c}\left(\frac{\pi r}{4}\right) \tilde{c}\left(-\frac{\pi r}{4}\right) + \frac{1}{2} \left( \tilde{c}\left(-\frac{\pi r}{4}\right) + \tilde{c}\left(\frac{\pi r}{4}\right) \right) \right] |0\rangle$$

解の2行目の表式を用いて作用は解析的に評価されている：

$$S[\Psi_\lambda]/V_{26} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2 g^2} & (\lambda = 1) \\ 0 & (|\lambda| < 1) \end{cases}$$

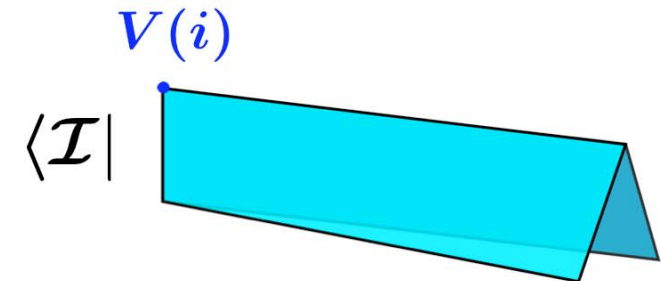
# ゲージ不変量(gauge invariant overlap)

- 開弦の場の理論における、作用以外のゲージ不変量として *onshell closed string state* を使ったものがある : [Zwiebach,...]

$$\mathcal{O}_V(\Psi) = \langle \mathcal{I} | V(i) | \Psi \rangle = \langle \Phi_V, \Psi \rangle$$

$$V(i) = c(i)c(-i)V_m(i, -i)$$

matter primary, dim (1,1)



$$Q\Phi_V = 0, \quad \langle \Phi_V, \Psi * \Lambda \rangle = \langle \Phi_V, \Lambda * \Psi \rangle$$

on-shell

midpoint

$$\therefore \mathcal{O}_V(\delta_\Lambda \Psi) = 0$$

特にpure gauge解に対してはゼロ :

$$\mathcal{O}_V(e^{-\Lambda} Q e^\Lambda) = 0$$

# gauge invariant overlapの解析的評価

$$\Phi_V = \lim_{M \rightarrow +\infty} \Phi_{V,M} \equiv \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{m,n} \zeta_{mn} U_1^\dagger U_1 \tilde{c} \tilde{V}_m(iM) \tilde{c} \tilde{V}_n(-iM) |0\rangle$$

“sliver frame”

$$V_m(y)V_n(z) \sim \frac{v_{mn}}{(y-z)^2} + \text{finite} \quad (y \rightarrow z) \quad \text{のとき}$$

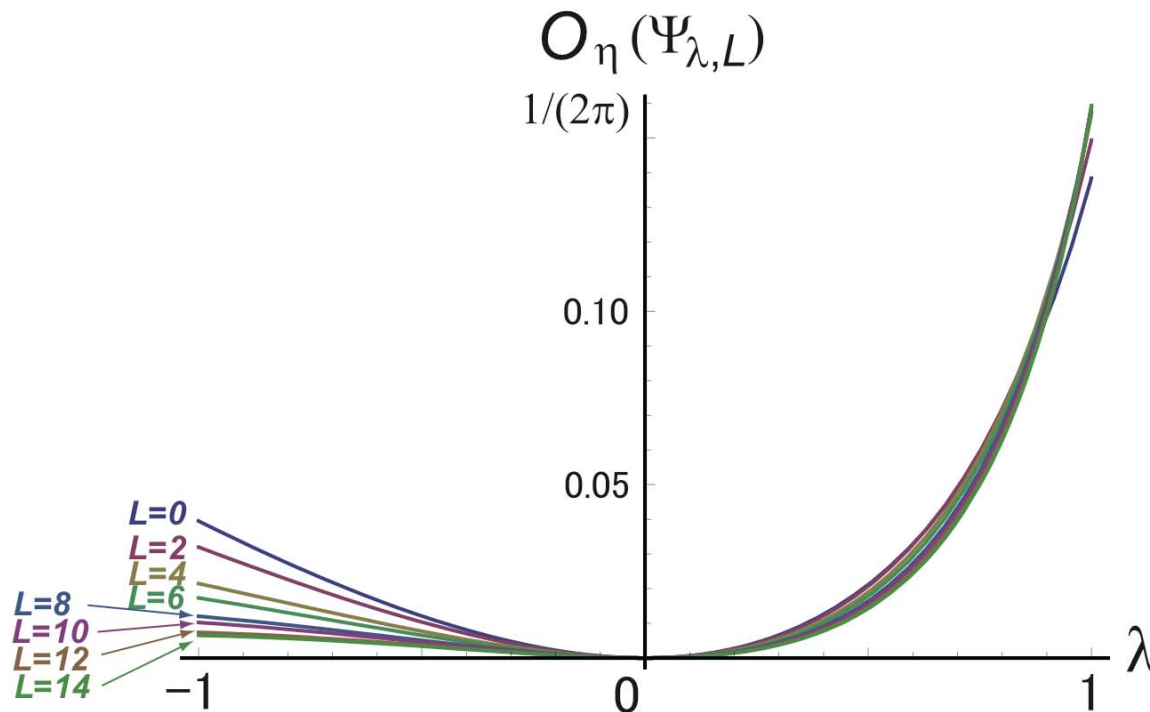
$$\langle \Phi_V, \psi_r \rangle = \lim_{M \rightarrow +\infty} \langle \Phi_{V,M}, \psi_r \rangle = \frac{C_V}{2\pi i} \quad C_V = \sum_{m,n} \zeta_{mn} v_{mn}$$



$$\mathcal{O}_V(\Psi_\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(\lambda)}{k!} \partial_r^k \langle \Phi_V, \psi_r \rangle |_{r=0} = f_0(\lambda) \langle \Phi_V, \psi_0 \rangle = \begin{cases} \frac{C_V}{2\pi i} & (\lambda = 1) \\ 0 & (\lambda \neq 1) \end{cases}$$

解の2行目の表式を用いるとphantom項  $\psi_{N+1}$  のみ寄与。

# level truncationによる数値的評価



L	$\mathcal{O}_\eta(\Psi_{\lambda=1,L})$
0	0.13837
2	0.14928
4	0.15686
6	0.15740
8	0.15880
10	0.15877
12	0.15922
14	0.15916

$$\mathcal{O}_\eta(\Psi_\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \simeq 0.159155 & (\lambda = 1) \\ 0 & (\lambda \neq 1) \end{cases}$$

に近づく!

# Siegelゲージの数値解の場合

(L,2L)近似

$$b_0 |\Psi_N\rangle = 0$$

(L,3L)近似

L	$\mathcal{O}_\eta(\Psi_N)$	場の変数	L	$\mathcal{O}_\eta(\Psi_N)$
0	0.114044	1	0	0.114044
2	0.139790	3	2	0.141626
4	0.147931	9	4	0.148325
6	0.151225	26	6	0.151369
8	0.152887	69	8	0.152976
10	0.154029	171	10	0.154080
12	0.154750	402	12	-

$\frac{1}{2\pi} \simeq 0.159155$  に近い値 ( $\sim 97\%$ ) :

$$\mathcal{O}_\eta(\Psi_N) \simeq \mathcal{O}_\eta(\Psi_{\lambda=1})$$



# ここまでのまとめ

- Schnabl解  $\Psi_\lambda$  に対し action, gauge invariant overlap は  $\lambda = 1$  でのみ非自明な値をとる。  
→  $\Psi_{\lambda=1}$  : 非自明な解 ( $\Psi_{-1 \leq \lambda < 1}$  : pure gauge 解)

- 非自明な Schnabl 解と Siegel ゲージの数値解はほぼ同じ action, gauge invariant overlap の値をとる。

←  $\Psi_{\lambda=1} \sim \Psi_N$

:ゲージ同値 (?)

# marginal解における計算は？

- 開弦の場の理論の別の古典解：*marginal解*

(identity state-based [Takahashi-Tanimoto(2001),...]でない解)

## Schnabl / Kiermaier-Okawa-Rastelli-Zwiebach 解

[[hep-th/0701248](#), [hep-th/0701249](#)]

次元 1 のmatter primary  $J$  (互いにnonsingularなOPE) から構成

$$\Psi_{\lambda_m}^J = \lambda_m c J(0) |0\rangle + \dots$$

## Fuchs-Kroyter-Potting / Kiermaier-Okawa 解

[[arXiv:0704.2222](#), [arXiv:0707.4472](#)]

次元 1 のmatter primary  $J$  (OPEはnonsingularでなくてもよい) から構成

$$\Psi_{L,\lambda_m}^J = \lambda_m c J(0) |0\rangle + \dots$$

# FKP / KO解の場合 [Ellwood, arXiv:0804.1131]

- ここでは  $J$  同士のOPEがnonsingularな場合を考える。
- FKP/KO解のあらわな形は

$$\Psi_{L,\lambda_m}^J = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m^n \psi_{L,n}^J$$

$$\begin{aligned} \psi_{L,n}^J = & U_{n+1}^\dagger U_{n+1} \tilde{c} \tilde{J}\left(\frac{\pi}{4}(n-1)\right) \times \\ & (-1)^{n-1} \int_{\frac{\pi}{4}(n-3)}^{\frac{\pi}{4}(n-1)} d\tilde{x}_1 \int_{\frac{\pi}{4}(n-5)}^{\tilde{x}_1} d\tilde{x}_2 \cdots \int_{\frac{\pi}{4}(-(n-1))}^{\tilde{x}_{n-2}} d\tilde{x}_{n-1} \tilde{J}(\tilde{x}_1) \tilde{J}(\tilde{x}_2) \cdots \tilde{J}(\tilde{x}_{n-1}) |0\rangle \end{aligned}$$

- Schnabl解の場合と全く同様に onshell closed string state との内積を計算:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_V(\Psi_{L,\lambda_m}^J) &= \langle \Phi_V, \Psi_{L,\lambda_m}^J \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m^n \lim_{M \rightarrow +\infty} \langle \Phi_{V,M}, \psi_{L,n}^J \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{m,n} \zeta_{mn} \langle V_{m,w}(0) V_{n,\bar{w}}(0) \left( e^{-\lambda_m \oint dw J_w(w)} - 1 \right) \rangle_{\text{disk}} \end{aligned}$$

# Schnabl / KORZ解の場合

- 解のあらわな形は  $\Psi_{\lambda_m}^J = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m^n \psi_{m,n}$

$$\psi_{m,k+1} = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^k \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_k U_{\gamma^{(k)}+1}^\dagger U_{\gamma^{(k)}+1} \prod_{m=0}^k \tilde{J}(\tilde{x}_m^{(k)}) \\ \times \left[ -\frac{1}{\pi} (\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_0^\dagger) \tilde{c}(\tilde{x}_0^{(k)}) \tilde{c}(\tilde{x}_k^{(k)}) + \frac{1}{2} \left( \tilde{c}(\tilde{x}_0^{(k)}) + \tilde{c}(\tilde{x}_k^{(k)}) \right) \right] |0\rangle$$

$$\text{ここで } \gamma^{(k)} = 1 + \sum_{l=1}^k x_l, \quad \tilde{x}_m^{(k)} = \frac{\pi}{4} \left( \gamma^{(k)} - 1 - 2 \sum_{l=1}^m x_l \right)$$

- Schnabl解のときと全く同様な計算で

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \langle \Phi_{V,M}, \psi_{m,k+1} \rangle = \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_k \frac{2i(-\pi)^k}{(1 + \sum_{l=1}^k x_l)^{k+1}} \sum_{m,n} \zeta_{mn} \langle 0 | V_m(i) V_n(-i) \prod_{l=0}^k \tilde{J}(y_l) | 0 \rangle, \\ y_m \equiv \frac{\pi \left( \sum_{l=1}^k x_l - 2 \sum_{l=1}^m x_l \right)}{2(1 + \sum_{l=1}^k x_l)}$$

# gauge invariant overlapの評価

- disk上のcorrelatorにして変数変換しそのJacobian, 回転・入替の対称性に注意すると...

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \langle \Phi_{V,M}, \psi_{m,k+1} \rangle = \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i (k+1)!} \sum_{m,n} \zeta_{mn} \langle V_{m,w}(0) V_{n,\bar{w}}(0) \left( \int_0^{2\pi} d\theta i e^{i\theta} J_w(e^{i\theta}) \right)^{k+1} \rangle_{\text{disk}}^{\text{mat}}$$



$$\mathcal{O}_V(\Psi_{\lambda_m}^J) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m,n} \zeta_{mn} \langle V_{m,w}(0) V_{n,\bar{w}}(0) \left( e^{-\lambda_m \oint dw J_w(w)} - 1 \right) \rangle_{\text{disk}}^{\text{mat}}$$

FKP/KO解の計算結果と同じ形：

$$\mathcal{O}_V(\Psi_{\lambda_m}^J) = \mathcal{O}_V(\Psi_{L,\lambda_m}^J)$$

←  $\Psi_{\lambda_m}^J \sim \Psi_{L,\lambda_m}^J$  : ゲージ同値 (?)

# Ellwoodのproposalについて

- Gauge invariant overlapはSFTの古典解  $\Psi$  に対しdisk上のclosed stringの1点関数の差を与える（だろう）。

$$\mathcal{O}_V(\Psi) = \mathcal{A}_\Psi^{\text{disk}}(V) - \mathcal{A}_0^{\text{disk}}(V)$$

- Schnabl / KORZ および FKP / KO のmarginal解の場合：

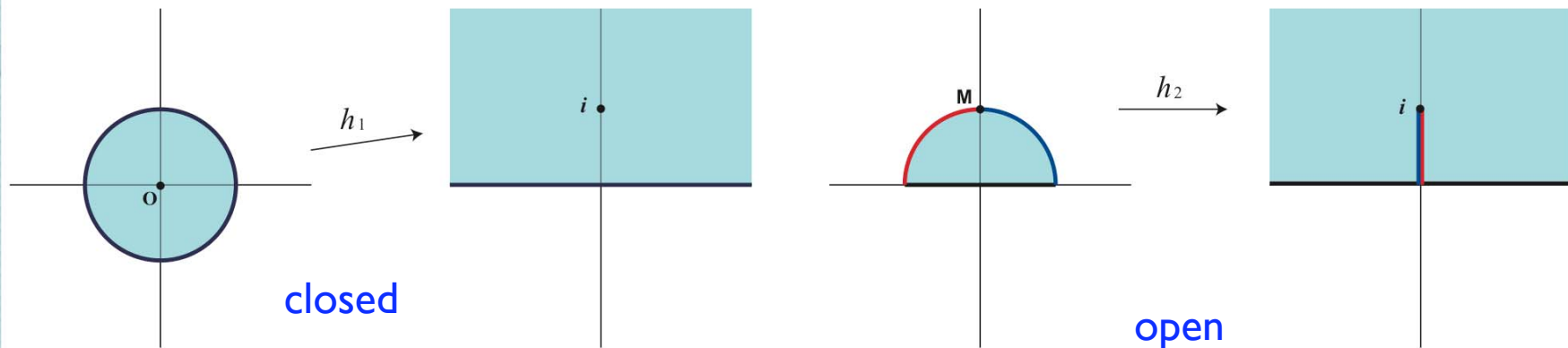
$$\mathcal{O}_V(\Psi_{\lambda_m}^J) = \mathcal{O}_V(\Psi_{L, \lambda_m}^J) = \frac{1}{2\pi i} \langle V_m(0) e^{-\lambda_m \oint J} \rangle_{\text{disk}}^{\text{mat}} - \frac{1}{2\pi i} \langle V_m(0) \rangle_{\text{disk}}^{\text{mat}}$$

- 非摂動論的真空（Schnabl解および数値解）の場合：

$$\mathcal{O}_V(\Psi_{\lambda=1}) = \mathcal{O}_V(\Psi_N) = 0 - \frac{1}{2\pi i} \langle V_m(0) \rangle_{\text{disk}}^{\text{mat}}$$

# Shapiro-Thorn vertexによる表現

$$\langle \hat{\gamma}(1_c, 2) |$$



- gauge invariant overlap :

$$\mathcal{O}_V(\Psi) = \langle \hat{\gamma}(1_c, 2) | V_c \rangle_{1_c} | \Psi \rangle_2$$

- 「閉弦状態」 :  $|\Phi_V\rangle_3 = \langle \hat{\gamma}(1_c, 2) | V_c \rangle_{1_c} |R(2, 3)\rangle$

# 境界状態との対応

$$\langle \hat{\gamma}(1_c, 2) | \Psi_{\lambda=1} \rangle_2 \mathcal{P} b_0^- = \frac{1}{2\pi} \langle B_N | + \langle \hat{\gamma}(1_c, 2) | \chi \rangle_2 \mathcal{P} b_0^-$$



D25-braneを表す境界状態    onshell閉弦状態に効かない

$$\psi_r = \frac{2}{\pi} c_1 |0\rangle + \mathcal{O}(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_0^\dagger, \mathcal{B}_0 - \mathcal{B}_0^\dagger, c_k + (-1)^k c_{-k})$$



$$\Psi_{\lambda=1} = \frac{2}{\pi} c_1 |0\rangle + \mathcal{O}(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_0^\dagger, \mathcal{B}_0 - \mathcal{B}_0^\dagger, c_k + (-1)^k c_{-k})$$



||  
|χ⟩

$\psi_0 = \frac{2}{\pi} c_1 |0\rangle$  の部分が境界状態を再現している。



# marginal解の場合

- nonsingular current  $J$  に対し同様な分解ができる :

FKP/KO解

$$\Psi_{L,\lambda_m}^J = -\frac{U_1^{-1}}{\pi} \left( e^{-\lambda_m \oint_{|w|=1} dw J_w(w)} - 1 \right) c_1 |0\rangle + \mathcal{O}(K_1, \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_0^\dagger, c_n + (-1)^n c_{-n})$$

Schnabl/KORZ解

$$\Psi_{\lambda_m}^J = -\frac{U_1^{-1}}{\pi} \left( e^{-\lambda_m \oint_{|w|=1} dw J_w(w)} - 1 \right) c_1 |0\rangle + \mathcal{O}(K_1, \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_0^\dagger, \mathcal{B}_0 - \mathcal{B}_0^\dagger, c_n + (-1)^n c_{-n})$$



$$\mathcal{A}_\Psi^{\text{disk}}(V) - \mathcal{A}_0^{\text{disk}}(V)$$

を与える。



onshell閉弦状態に効かない

# 今後の課題

Open superstring field theoryへの拡張：

- Modified cubic superstring field theory,
- Berkovits' WZW-type superstring field theory  
の古典解[Erler, Aref'eva-Gorbachev-Menedev, Fuchs-Kroyter,  
Okawa,...]に対して

Gauge invariant overlap (のsuperstring版)  
をそれぞれ計算してみる。

閉弦状態をoff-shellに拡張したときのopen-closed  
string field theoryにおける意味づけは？

# rolling tachyon解の場合(I)

- Hellerman-Schnablが示したこと

linear dilaton background, light-like rolling

$J = e^{\beta X^+}$  ( $\beta \equiv \frac{1}{\alpha' V^+}$ ) の場合、Schnabl解に収束 :

$$\lim_{x^+ \rightarrow +\infty} \Psi_{\lambda_m}^J = \lim_{\lambda_m \rightarrow +\infty} \Psi_{\lambda_m}^J = \Psi_{\lambda=1}$$

前頁の結果と[Hellerman-Schnabl] § 5を使うと

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{V_\zeta}(\Psi_{\lambda_m}^J) &= \int d^D x \frac{1}{2\pi i} \zeta_{\mu\nu} (\mathcal{A}^{\mu\nu}(x)|_{\lambda=2\pi\lambda_m} - \mathcal{A}^{\mu\nu}(x)|_{\lambda=0}) \\ &= \frac{\alpha'}{4\pi i} \int d^D x e^{-V \cdot x} \left( \zeta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} (e^{-2\pi\lambda_m e^{\beta x^+}} - 1) - 4\pi\beta^2 \alpha' \lambda_m \zeta_{--} e^{\beta x^+ - 2\pi\lambda_m e^{\beta x^+}} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda_m \rightarrow +\infty} \mathcal{O}_{V_\zeta}(\Psi_{\lambda_m}^J) = \mathcal{O}_{V_\zeta}(\Psi_{\lambda=1}).$$

# rolling tachyon解の場合(II)

- 通常のtime-like rolling:  $J = e^{X^0}$  の場合  
弦場そのものをみると“wild oscillation” [Schnabl, KORZ]

$$\lim_{x^0 \rightarrow +\infty} \Psi_{\lambda_m}^J = \lim_{\lambda_m \rightarrow +\infty} \Psi_{\lambda_m}^J \neq \Psi_{\lambda=1}$$

前頁の結果と [Larsen-Naqvi-Terashima]の結果を使うと

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{V_\zeta}(\Psi_{\lambda_m}^J) &= \int d^d x \frac{1}{2\pi i} \zeta_{\mu\nu} (\mathcal{A}^{\mu\nu}(x)|_{\lambda=\lambda_m} - \mathcal{A}^{\mu\nu}(x)|_{\lambda=0}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int d^d x \zeta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} (f(x^0) - 1) \quad f(x^0) \equiv \frac{1}{1 + 2\pi\lambda_m e^{x^0}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda_m \rightarrow +\infty} \mathcal{O}_{V_\zeta}(\Psi_{\lambda_m}^J) = \mathcal{O}_{V_\zeta}(\Psi_{\lambda=1}).$$

(?)