浅野-加藤ゲージにおける ゲージ不変量の数値計算

理研，奈良女大理[A]　　岸本功，高橋智彦[A]

Kishimoto-Takahashi, in preparation
(cf. Kawano-Kishimoto-Takahashi, NPB803(2008)135)

2008.9.23　物理学会@山形大学

開弦の場の理論の非摂動論的真空

- Schnablの解析解 $\Psi_{\lambda=1}$

非自明なゲージ不変量

（1）作用の値: D-brane tension

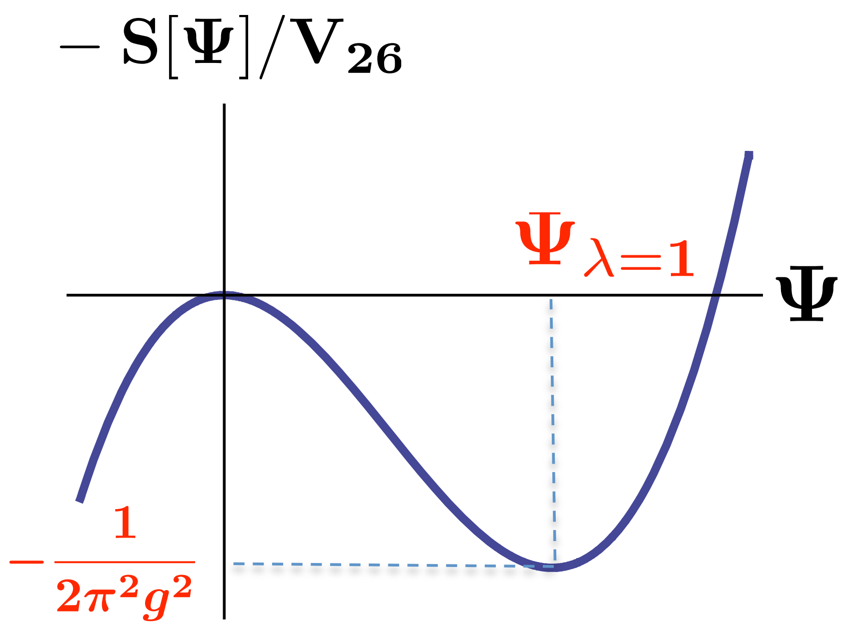
$$S[\Psi_{\lambda=1}]/V_{26} = \frac{1}{2\pi^2 g^2}$$

[Schnabl(2005),Okawa,Fuchs-Kroyter(2006)]

（2）Gauge invariant overlap:

$$\mathcal{O}_\eta(\Psi_{\lambda=1}) = \frac{1}{2\pi}$$

[Ellwood,Kawano-Kishimoto-Takahashi(2008)]



レベルトランケーションによる数値解

- Siegelゲージ：$b_0|\Psi_{\mathrm{N}}\rangle = 0$ の数値解 [Sen-Zwiebach(1999),...]
  についてもほぼ同一の値:

（1） $S[\Psi_{\lambda=1}] \simeq S[\Psi_{\mathrm{N}}]$

(12,24)近似で 99.98%，(10,30)近似で 99.92%

[Gaiotto-Rastelli(2002)] (18,54)近似で100.05%

（2） $\mathcal{O}_\eta(\Psi_{\lambda=1}) \simeq \mathcal{O}_\eta(\Psi_{\mathrm{N}})$

(12,24)近似で 97.23%，(10,30)近似で 96.81%

[Kawano-Kishimoto-Takahashi(2008)]とその後の計算

$\Psi_{\lambda=1} \sim \Psi_{\mathrm{N}}$:ゲージ同値という期待と整合する！

浅野-加藤ゲージの数値解

- 1-パラメータ a を含むゲージ：

$$(b_0 M + a\, b_0 c_0 \tilde{Q})|\Psi_a\rangle = 0$$

のレベルトランケーションによる数値解について

（1） $S[\Psi_{\lambda=1}] \simeq S[\Psi_a]$ [Asano-Kato(2006)]

$a = \infty$
$a = 4.0$
$a = 0.5$
$a = -2.0$

-ゲージの解：(6,18)近似で

96.09%
92.45%
100.45%
97.99%

（2） $\mathcal{O}_\eta(\Psi_{\lambda=1}) \simeq \mathcal{O}_\eta(\Psi_a)$ （？） (今回の計算)

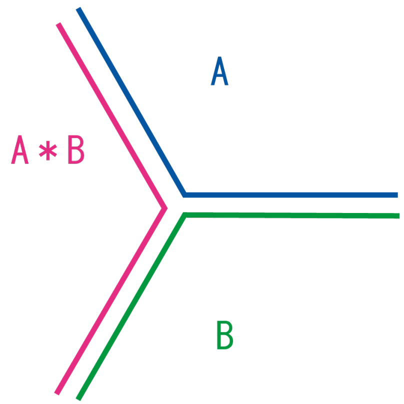
解が互いにゲージ同値かconsistencyを調べよう！

Cubic bosonic Open String Field Theory

作用：$$S[\Psi] = -\frac{1}{g^2}\left(\frac{1}{2}\langle\Psi, Q\Psi\rangle + \frac{1}{3}\langle\Psi, \Psi * \Psi\rangle\right)$$

$$|\Psi\rangle = \phi(x)c_1|0\rangle + A_\mu(x)\alpha^\mu_{-1}c_1|0\rangle + iB(x)c_0|0\rangle + \cdots$$

$$Q = \oint \frac{dz}{2\pi i}\left(cT^{\mathrm{m}} + bc\partial c + \frac{3}{2}\partial^2 c\right)$$



運動方程式：$$Q\Psi + \Psi * \Psi = 0$$

ゲージ変換：$$\delta_\Lambda \Psi = Q\Lambda + \Psi * \Lambda - \Lambda * \Psi$$

$$\rightarrow \quad \delta_\Lambda S[\Psi] = 0$$

Gauge Invariant Overlap

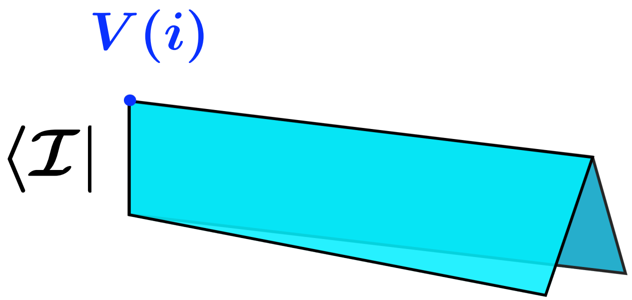
on-shell閉弦状態に対応するゲージ不変量 [Zwiebach(1992),...]

$$\mathcal{O}_V(\Psi) = \langle \mathcal{I} | V(i) | \Psi \rangle = \langle \hat{\gamma}(1_c, 2) | \Phi_V \rangle_{1_c} | \Psi \rangle_2$$

$$|\Phi_V\rangle = c_1 \bar{c}_1 | V_m \rangle$$

on-shellならゲージ不変量：

$$\delta_\Lambda \mathcal{O}_V(\Psi) = 0$$



特にpure gauge解の場合はゼロ：

$$\mathcal{O}_V(e^{-\Lambda} Q e^{\Lambda}) = 0$$

UNIVERSAL SPACEでの開弦場に対する GAUGE INVARIANT OVERLAP

- 数値計算では $|V_{\rm m}\rangle = \frac{-1}{26}\eta_{\mu\nu}\alpha^{\mu}_{-1}\bar{\alpha}^{\nu}_{-1}|0\rangle$ の場合のgauge invariant overlap $\mathcal{O}_\eta(\Psi)$ を評価する。

- 開弦場として、twist evenで

$$L^{(\rm m)}_{-n_1}\cdots L^{(\rm m)}_{-n_p}b_{-j_1}\cdots b_{-j_q}c_{-k_1}\cdots c_{-k_q}c_1|0\rangle$$

の線形結合で表されるもの: $\Psi_{\rm univ}$だけを考える。このとき $V_{\rm m}$ のnormalizationをfixすると $\mathcal{O}_V(\Psi_{\rm univ})$ は $V_{\rm m}$に依存しない。

$$\begin{aligned}\Psi_{\rm univ} \quad = \quad & (t_1 + t_2 b_{-1}c_{-1} + t_3 L^{(\rm m)}_{-2} + t_4 b_{-3}c_{-1} + t_5 b_{-2}c_{-2} + t_6 b_{-1}c_{-3} \\ & + t_7 L^{(\rm m)}_{-2}b_{-1}c_{-1} + t_8 L^{(\rm m)}_{-4} + t_9 (L^{(\rm m)}_{-2})^2 + \cdots)c_1|0\rangle\end{aligned}$$

のとき

$$\mathcal{O}_V(\Psi_{\rm univ}) = \frac{1}{4}t_1 - \frac{1}{4}t_2 - \frac{3}{4}t_3 + \frac{1}{4}t_5 + \frac{3}{4}t_7 + \frac{3}{2}t_8 + \frac{11}{2}t_9 + \cdots$$

浅野-加藤ゲージについて

- a-ゲージ：$(b_0 M + a\, b_0 c_0 \tilde{Q})|\Psi_a\rangle = 0$
  - ここで　$Q = \tilde{Q} + c_0 L_0 + b_0 M$
  - L_0-レベル, universal space, twist evenを保存。

  ⇒　レベルトランケーションと相性がよい

  - $a = 0$　：Siegelゲージ　$b_0|\Psi_0\rangle = 0$　と等価
  - $a = \infty$　：Landauゲージ　$b_0 c_0 \tilde{Q}|\Psi_\infty\rangle = 0$

各ゲージでの数値解の構成

- 弦場をuniversal, twist evenでレベルLまで用意： $\boldsymbol{\Psi_L}$

$$
\begin{aligned}
\Psi_L = & (t_1 + t_2 b_{-1}c_{-1} + t_3 L^{(\mathrm{m})}_{-2} + t_4 b_{-3}c_{-1} + t_5 b_{-2}c_{-2} + t_6 b_{-1}c_{-3} \\
& + t_7 L^{(\mathrm{m})}_{-2} b_{-1}c_{-1} + t_8 L^{(\mathrm{m})}_{-4} + t_9 (L^{(\mathrm{m})}_{-2})^2 + \cdots) c_1|0\rangle \\
& + (\tilde{t}_1 b_{-1} + \tilde{t}_2 b_{-4} + \tilde{t}_3 b_{-2}b_{-1}c_{-1} + \tilde{t}_4 L^{(\mathrm{m})}_{-2} b_{-2} + \tilde{t}_5 L^{(\mathrm{m})}_{-3} b_{-1} + \cdots) c_0 c_1|0\rangle
\end{aligned}
$$

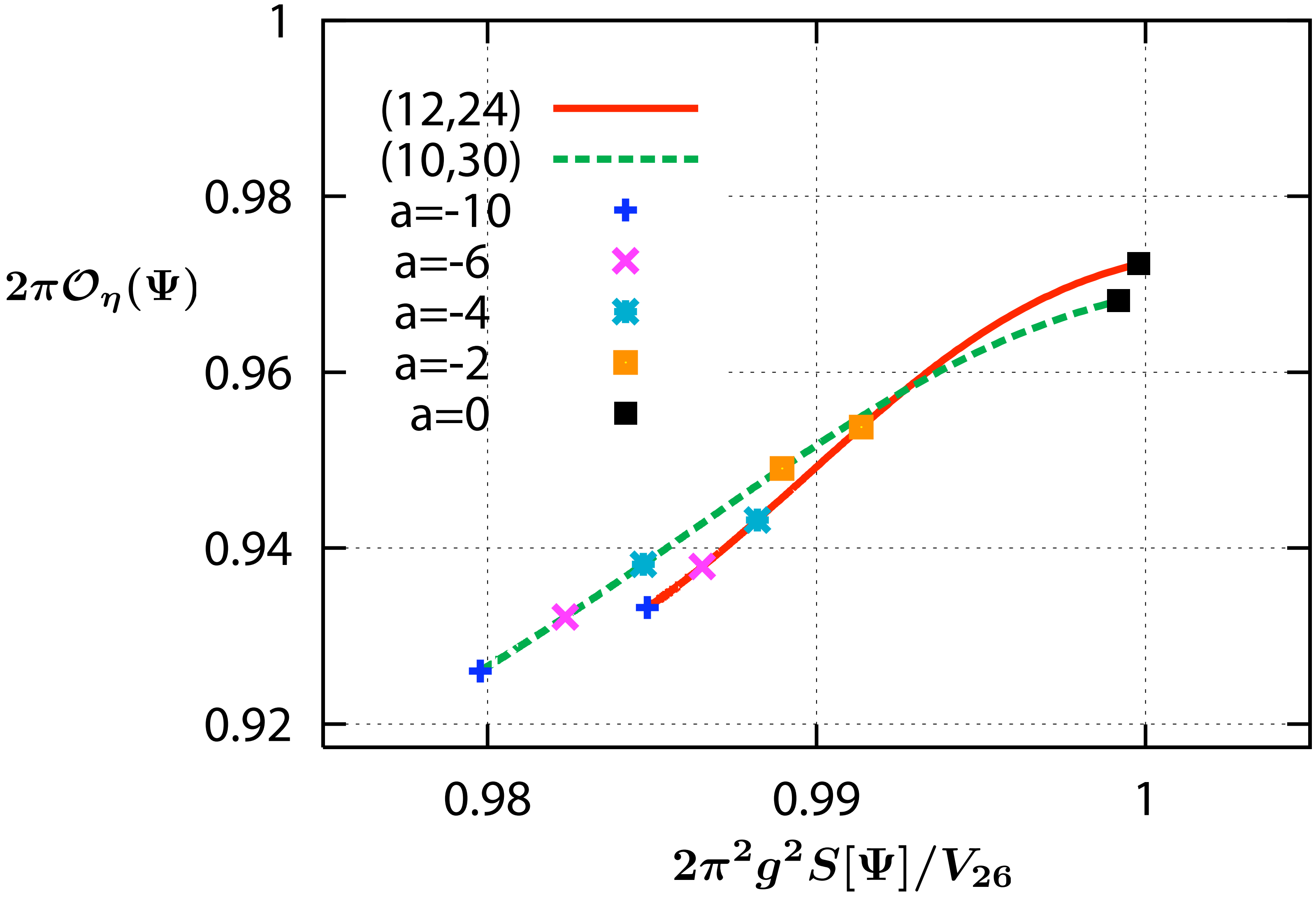
- ゲージ条件をあらわに解いたものを作用に代入：

$$
\begin{aligned}
\frac{S[\Psi_L|_a]}{-2\pi^2 g^2 V_{26}} = & -\frac{1}{2}t_1^2 + \frac{27}{64}\sqrt{3}t_1^3 - \frac{33}{64}\sqrt{3}t_1^2 t_2 + \frac{9}{16}\sqrt{3}a t_1^2 t_2 - \frac{t_2^2}{2} - \frac{9}{4}a t_2^2 + \frac{9}{8}a^2 t_2^2 + \frac{19 t_1 t_2^2}{64\sqrt{3}} + \frac{3}{8}\sqrt{3}a t_1 t_2^2 + \frac{3}{16}\sqrt{3}a^2 t_1 t_2^2 \\
& - \frac{t_2^3}{64\sqrt{3}} - \frac{703 a t_2^3}{432\sqrt{3}} + \frac{47 a^2 t_2^3}{144\sqrt{3}} - \frac{195}{64}\sqrt{3}t_1^2 t_3 + \frac{39}{16}\sqrt{3}a t_1^2 t_3 - \frac{39}{2}a t_2 t_3 + \frac{39}{4}a^2 t_2 t_3 + \frac{715 t_1 t_2 t_3}{96\sqrt{3}} - \frac{13 a t_1 t_2 t_3}{4\sqrt{3}} \\
& + \frac{13}{8}\sqrt{3}a^2 t_1 t_2 t_3 - \frac{1235 t_2^2 t_3}{1728\sqrt{3}} - \frac{12649 a t_2^2 t_3}{1296\sqrt{3}} + \frac{637 a^2 t_2^2 t_3}{432\sqrt{3}} + \frac{13 t_3^2}{2} - \frac{169}{4}a t_3^2 + \frac{169}{8}a^2 t_3^2 + \frac{7553 t_1 t_3^2}{192\sqrt{3}} - \frac{845 a t_1 t_3^2}{24\sqrt{3}} \\
& + \frac{169 a^2 t_1 t_3^2}{16\sqrt{3}} - \frac{83083 t_2 t_3^2}{5184\sqrt{3}} + \frac{2483 a t_2 t_3^2}{432\sqrt{3}} - \frac{7267 a^2 t_2 t_3^2}{1296\sqrt{3}} - \frac{272363 t_3^3}{5184\sqrt{3}} + \frac{98189 a t_3^3}{1296\sqrt{3}} - \frac{10985 a^2 t_3^3}{432\sqrt{3}} + \cdots
\end{aligned}
$$

- 微分して多変数二次方程式を解く： $\partial_{t_i} S[\Psi_L|_a] = 0$

（レベル０の非自明解 $\Psi_0 = \dfrac{64}{81\sqrt{3}} c_1|0\rangle$ に「近い」ものを探す。）

数値計算の結果 *MATHEMATICA6*



逐次近似による解の構成

- 初期値 $\Psi_0 = \frac{64}{81\sqrt{3}} c_1|0\rangle$ から始めて逐次近似をする：

$$\Psi_{n+1} = P_{\Psi_n}(\Psi_n * \Psi_n)$$

[Gaiotto-Rastelli(2002)]

- $n \to \infty$ で収束すれば運動方程式（の一部）を満たす：

$$\mathcal{P}(Q\Psi_\infty + \Psi_\infty * \Psi_\infty) = 0$$

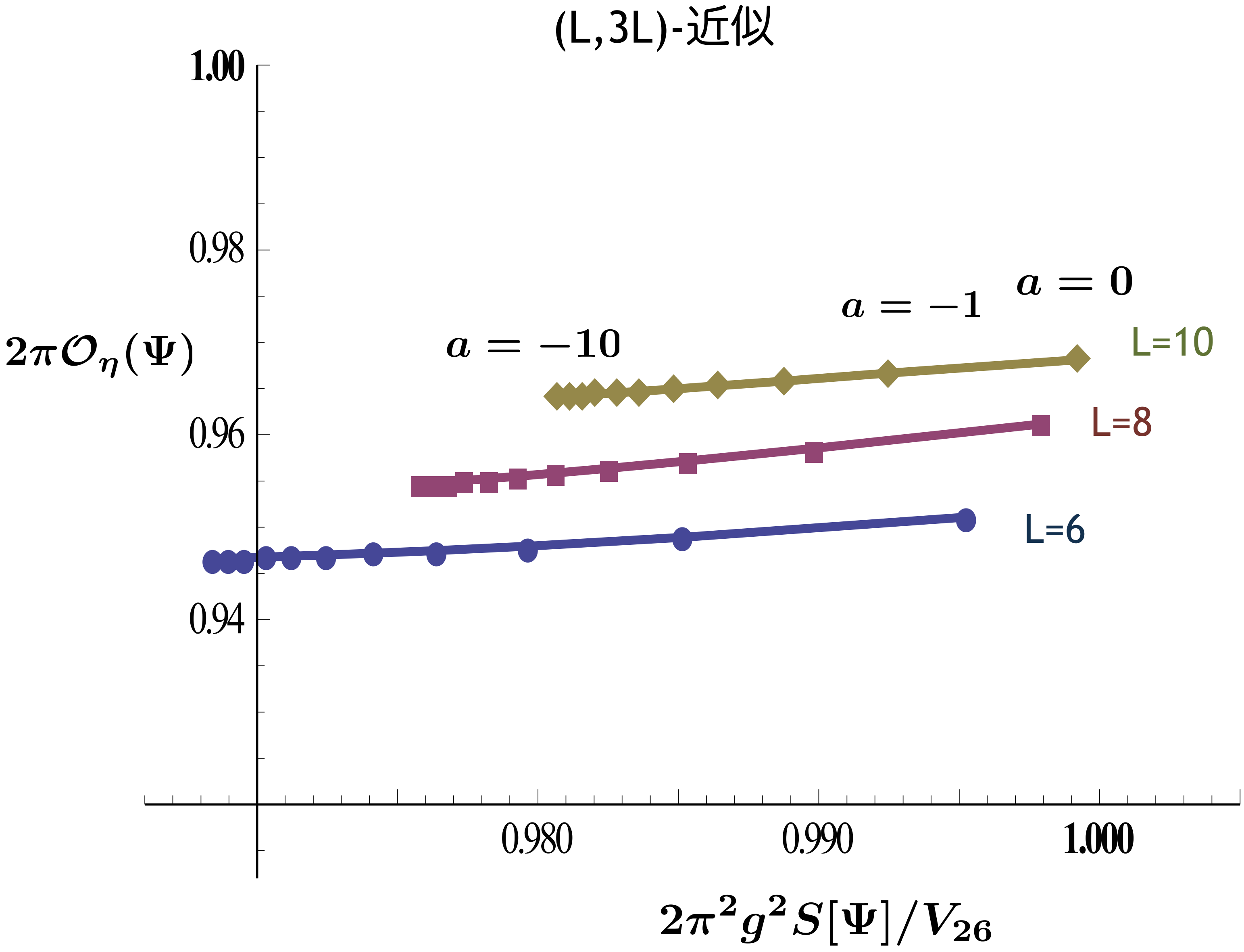
- ここで $(b_0 M + a\, b_0 c_0 \tilde{Q})\Psi_{n+1} = 0$

$$\mathcal{P}(Q_{\Psi_n}\Psi_{n+1} - \Psi_n * \Psi_n) = 0 \qquad P_{\Psi_n} \sim (Q_{\Psi_n})^{-1}$$

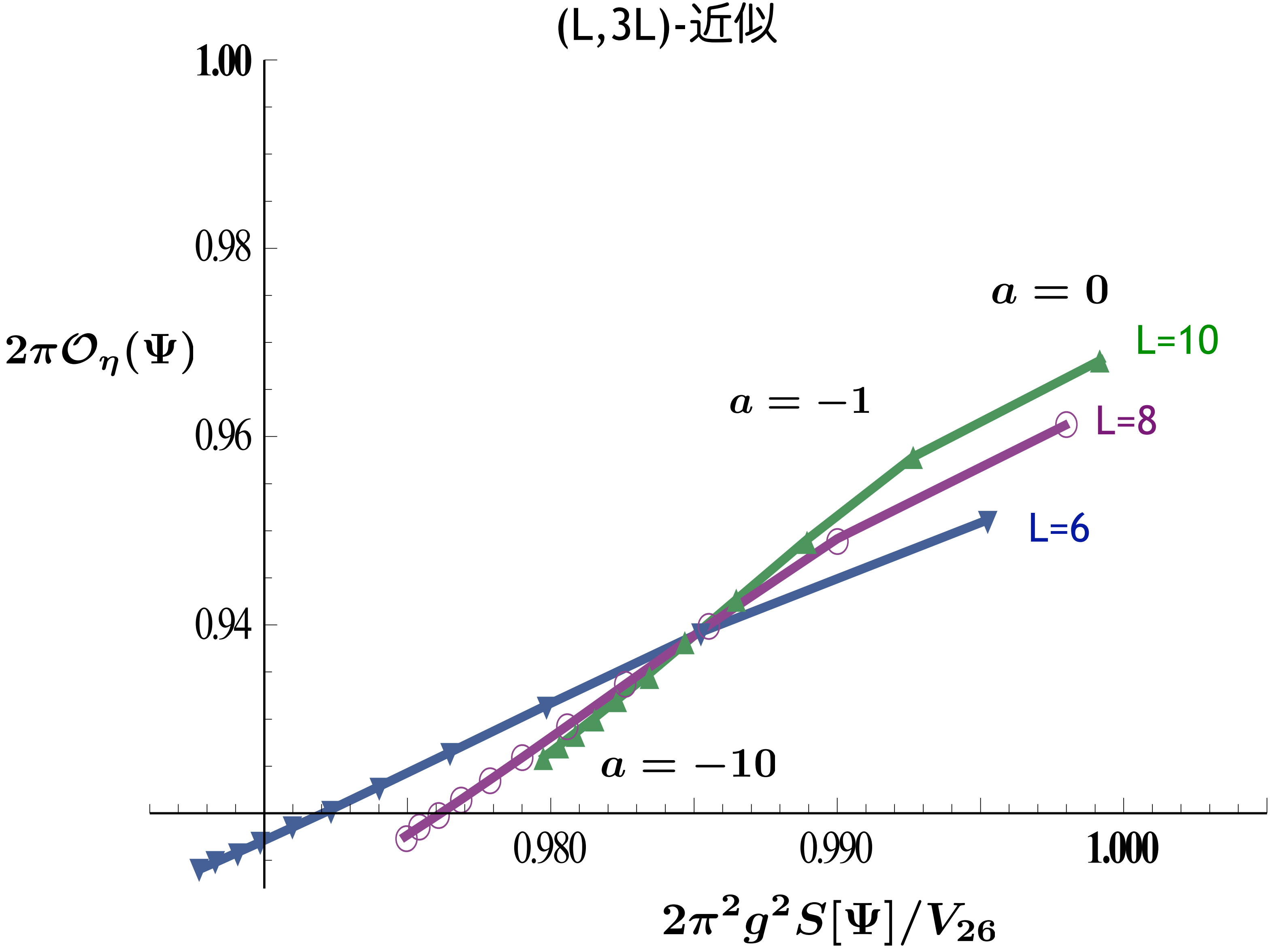
$$Q_{\Psi_n}\Phi \equiv Q\Phi + \Psi_n * \Phi - (-1)^{|\Phi|}\Phi * \Psi_n$$

- 実際の数値計算ではprojectionは $\mathcal{P} = c_0 b_0$ としてレベルトランケーションをした。

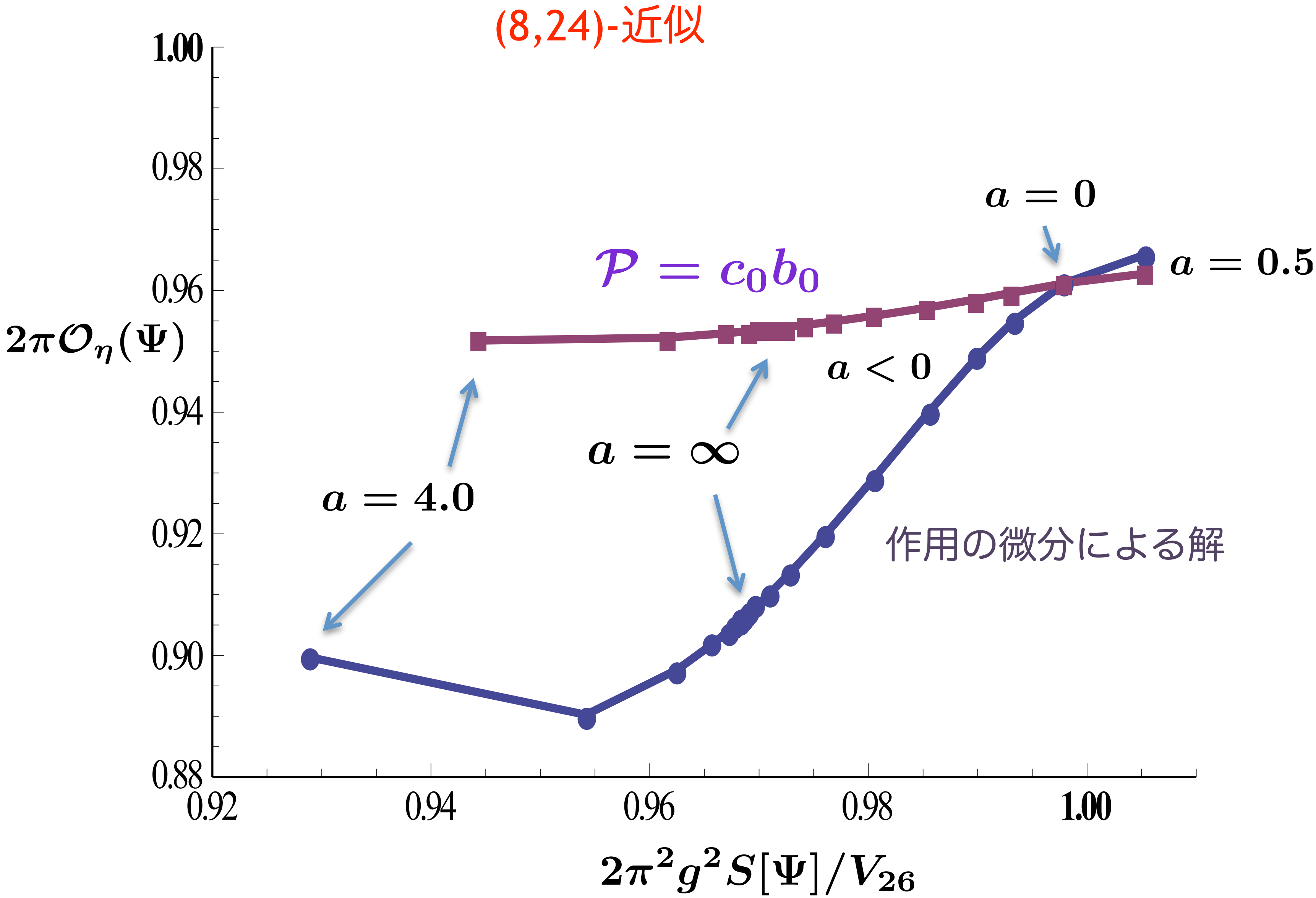
逐次近似による数値計算 $\mathcal{P} = c_0 b_0$



作用の微分で求めた解の場合



ゲージをさらに変えていくと...



まとめ

- a-ゲージにおけるレベルトランケーションの数値解を(12,24)近似、(10,30)近似まで構成した。
- どのゲージの解でも、Schnablの解析解と同じゲージ不変量の値(action, gauge invariant overlap)をおおむね再現する。
- これらの数値解は全てSchnablの解析解とゲージ同値でuniqueな非摂動論的真空を表す解である、という期待と整合する。

（これらの解はゲージ同値であることを前提とすると）

- ゲージによりレベルトランケーションの精度は違う。
- Gauge invariant overlapのほうがactionより収束が遅い。
- 運動方程式の「project outされる部分」（BRST不変性）については、解の構成法により収束性が違い、一般には「ノルム収束」はしていないように見える。

運動方程式について

- ゲージ固定した作用の微分も、逐次近似法も、運動方程式をprojectした部分しか保証していない：

$$\mathcal{P}(Q\Psi + \Psi * \Psi) = 0$$

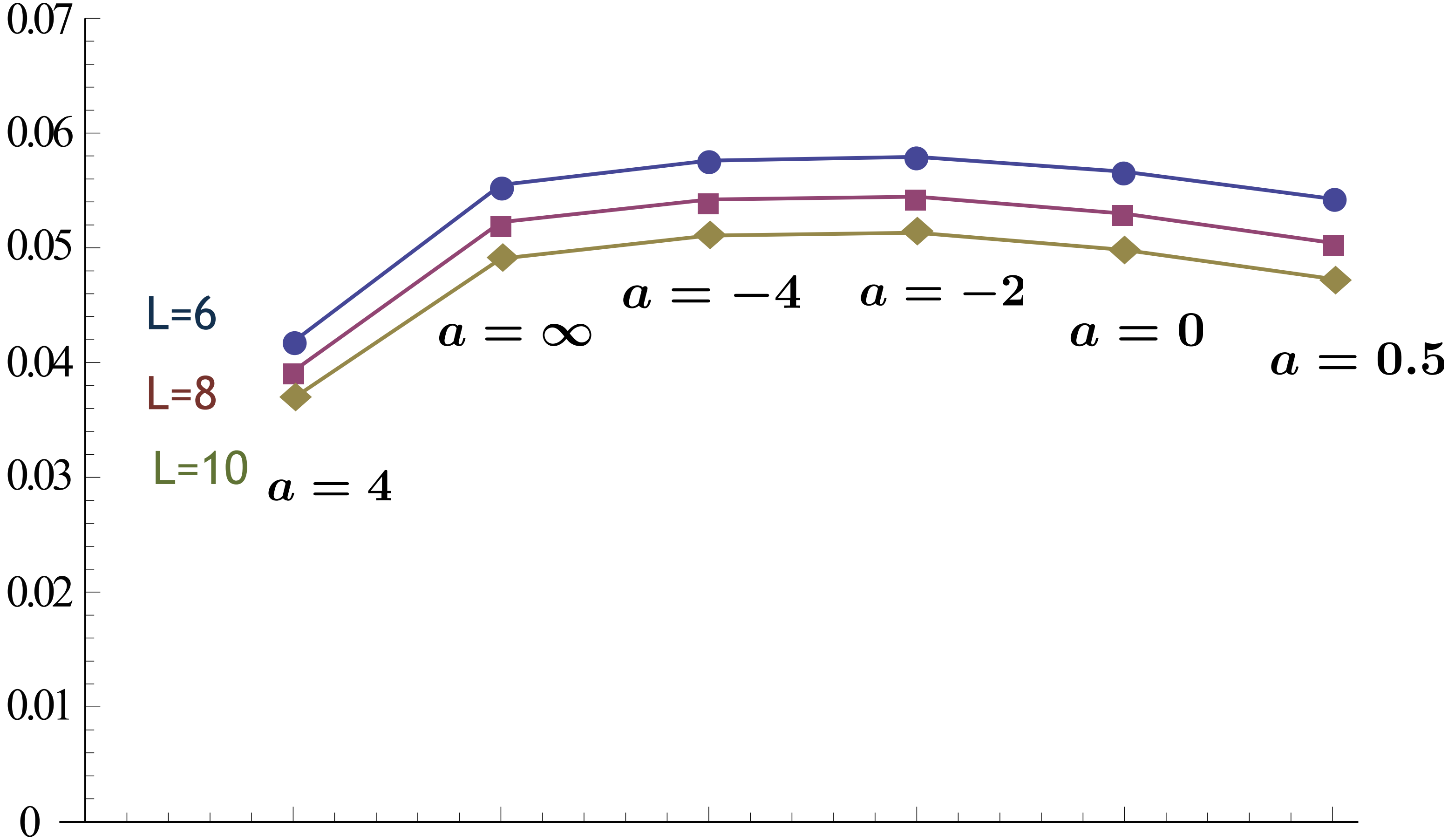
$$\Downarrow$$

古典解であるためには運動方程式のproject outされた部分も満たすべき。（解のBRST不変性）[Hata-Shinohara(2000)]

$$(1 - \mathcal{P})(Q\Psi + \Psi * \Psi) = 0 \quad (?)$$

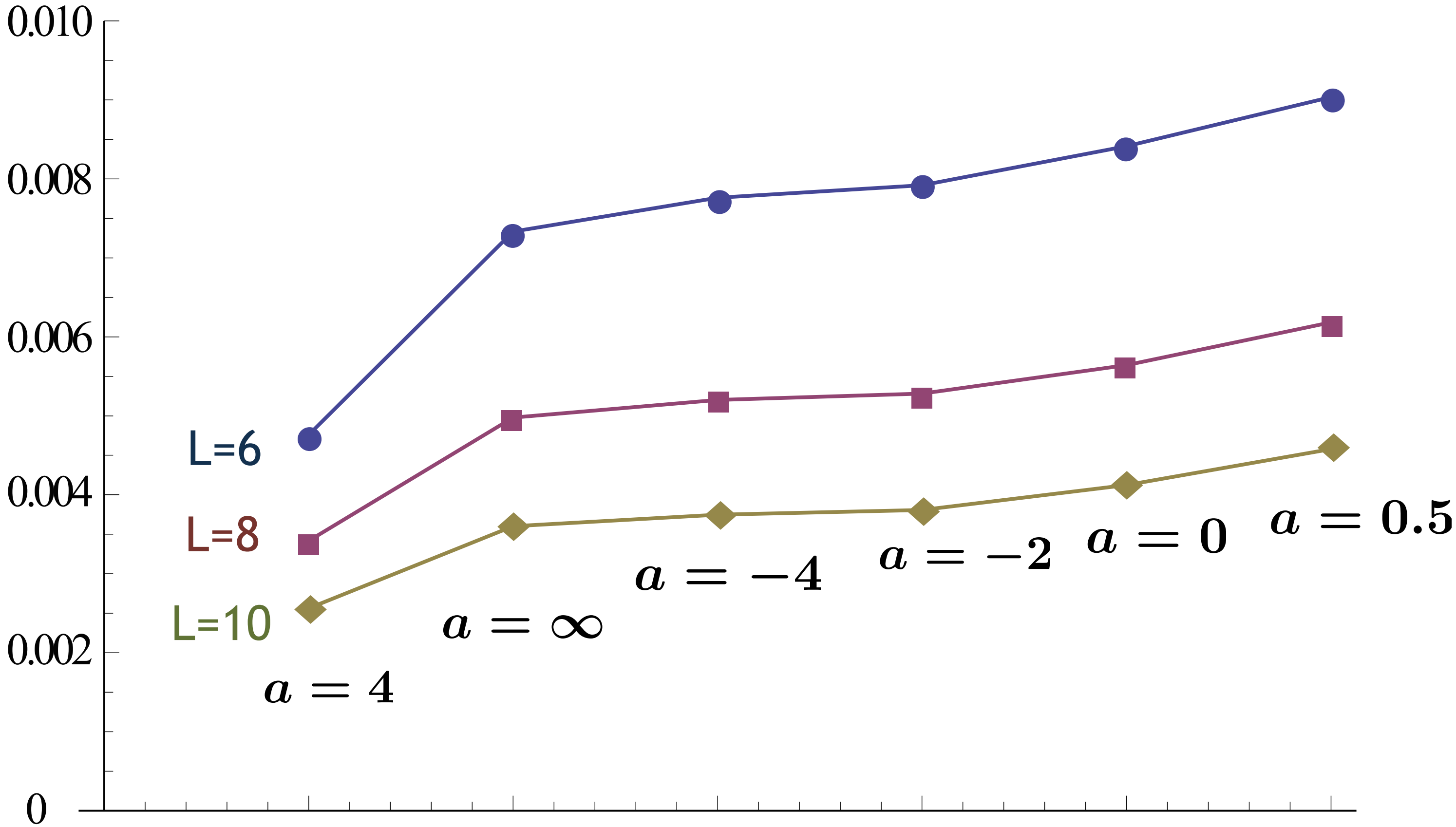
運動方程式の「ノルム」の評価　$\mathcal{P} = c_0 b_0$

$$\frac{||Q\Psi + \Psi * \Psi||}{||\Psi||}$$



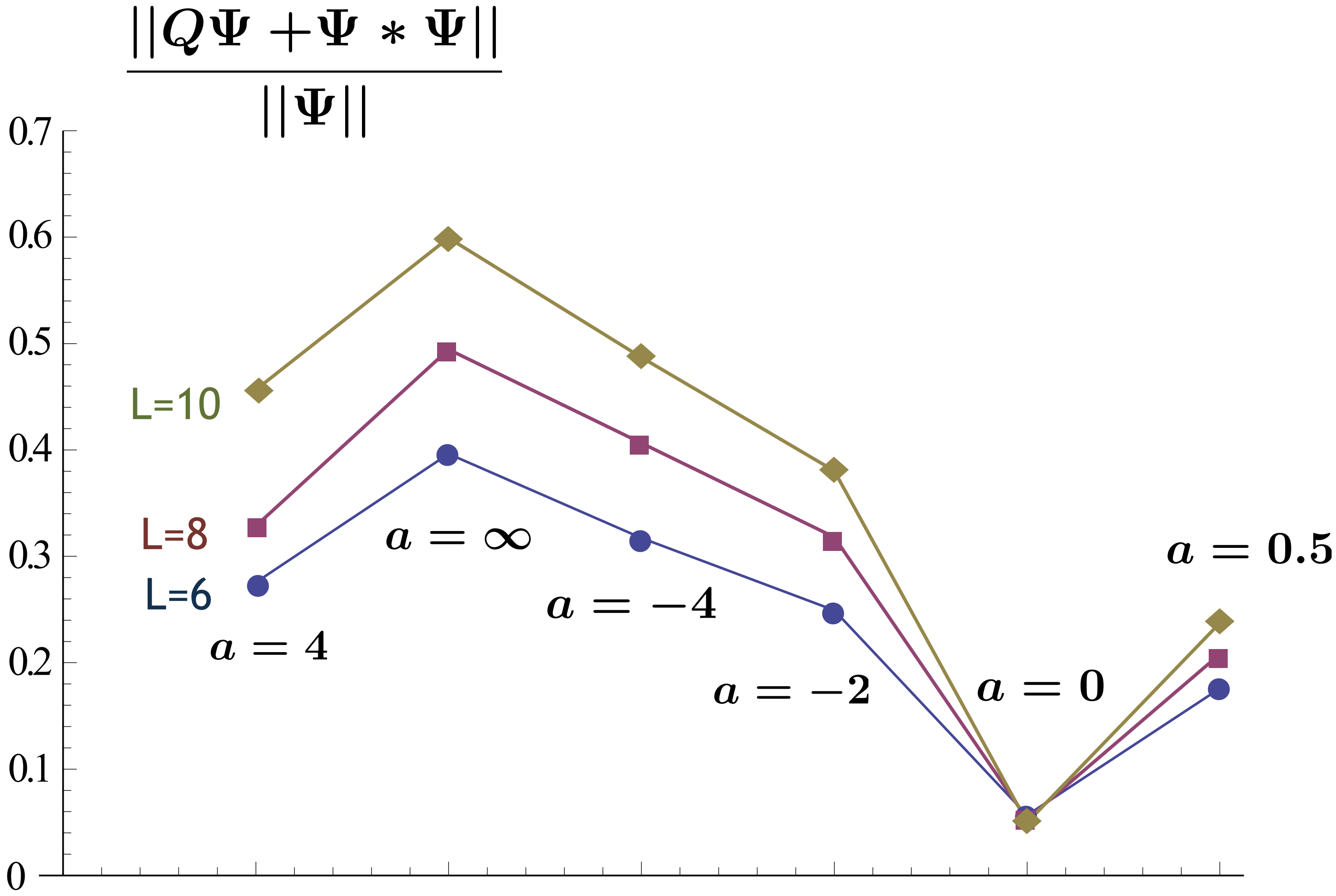
運動方程式の各係数の評価　$\mathcal{P} = c_0 b_0$

$b_0 c_0 (Q\Psi + \Psi * \Psi)$ のうち最低レベルの $c_{-2} c_1 |0\rangle$ の係数



運動方程式の「ノルム」の評価

ゲージ固定した作用の微分による解の場合



運動方程式の各係数の評価

$a = \infty$ （Landauゲージ）で
ゲージ固定した作用の微分による「解」の場合
$c_0 b_0 (Q\Psi + \Psi * \Psi)$ に含まれる状態の係数：

	$c_{-1}c_0\|0\rangle$	$L^{(\mathrm{m})}_{-2}c_0c_1\|0\rangle$
(2,4)	0.0383157	-0.0127719
(4,12)	0.0326549	-0.0108849
(6,18)	0.0330091	-0.011003
(8,24)	0.0340895	-0.0113632
(10,30)	0.0348611	-0.0116204