

開弦の場の理論の数値解について

岸本 功

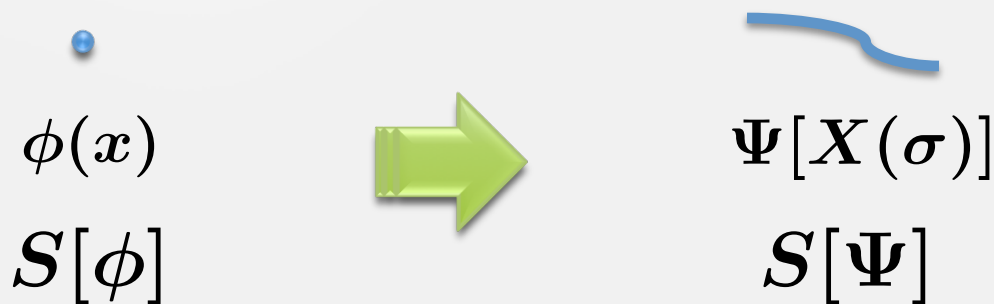


References:

- I.K.-T.Takahashi, Theor.Math.Phys.163(2010)710; 717;
PTP108(2002)591
I.K., talk@SFT2010, YITP, Kyoto Univ.
(+その後の計算)

Introduction

- 標準模型、量子重力を含む「究極の理論」の最有力候補：超弦理論
- その定式化の一つの手法：弦の場の理論
- 弦の場の理論：
 - 通常の点粒子の場の理論を弦の場に拡張したもの



- 摂動論を超えるときに「弦の場の理論」は通常の第一量子化の方法よりも役に立つと期待される。

ここで考える開弦の場の理論

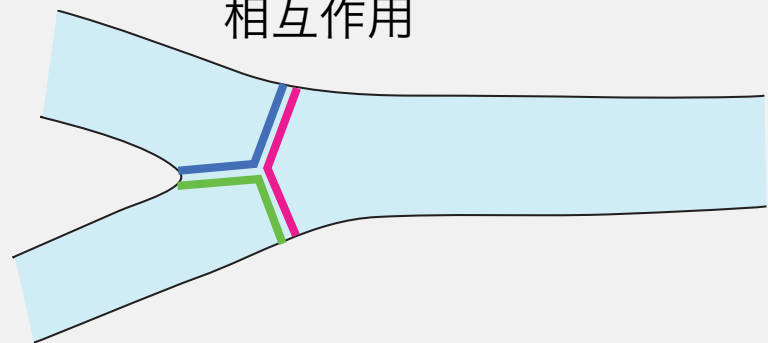
- Witten (1986)

$$S[\Psi] = -\frac{1}{g^2} \left(\frac{1}{2} \langle \Psi, Q\Psi \rangle + \frac{1}{3} \langle \Psi, \Psi * \Psi \rangle \right)$$

$$Q = c_0 L_0 + b_0 M + \tilde{Q}$$

:加藤-小川の弦の第一量子化の
BRST operator (1983)

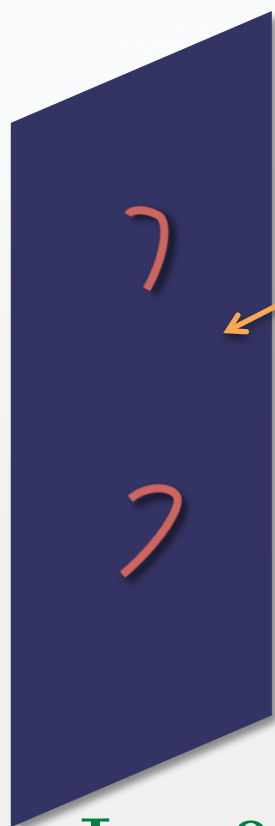
Goto-Witten typeの
相互作用



$$|\Psi\rangle = \phi(x)c_1|0\rangle + A_\mu(x)\alpha_{-1}^\mu c_1|0\rangle + \chi(x)c_0|0\rangle + \dots$$

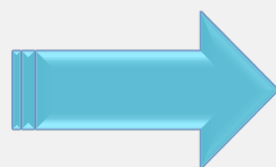
: 弦場は、通常の間を無限個含む

開弦の場の理論の非摂動的真空

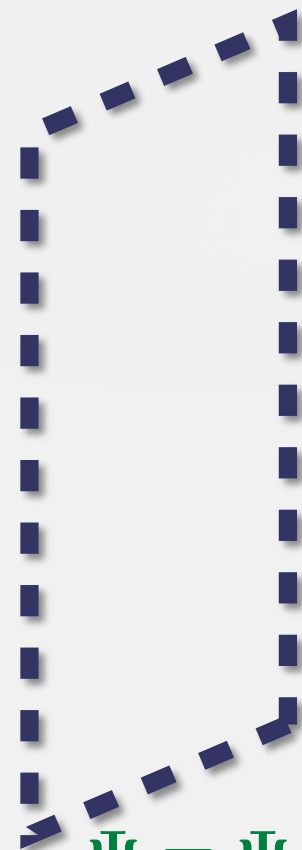


$$\Psi = 0$$

ボゾニック弦では摂動的には
タキオンが存在し不安定



Senの予想 (1999)



開弦の場の理論の運動方程式

$$Q\Psi + \Psi * \Psi = 0$$

$$\Psi = \Psi_t$$

タキオン凝縮解

タキオン凝縮解 (の候補) としては...

- Siegelゲージの数値解 $b_0 \Psi_N = 0$
Sen-Zwiebach (1999), Moeller-Taylor (2000),
Gaiotto-Rastelli (2002),...
- 高橋-谷本による解析解 (TT解) (2002~)
“Identity-based”な形の解
- Schnablによる解析解 (2005~)
“Identity-based”ではない形の解

今回の計算...

Siegelゲージの数値解を構成し、ゲージ不変量を評価した。



レベルトランケーションの世界記録を更新！

up to level (18,54) :Gaiotto-Rastelli, hep-th/0211012

up to level (20,60) :2009.10 (proceedings of SFT2009@Moscow)

up to level (24,72) :2009.12 (talk@APCTP workshop, Korea)

up to level (26,78) :2010.10 (talk@SFT2010, YITP, Kyoto)

TT解周りの理論のSiegelゲージの数値解を構成し、ゲージ不変量を評価した。

up to level 6 :Zeze's PhD thesis(2003), Drukker-Okawa(2005)

up to level (16,48) :2009.04 I.K.-T.T. arXiv:0904.1095

up to level (20,60) :2009.10 (proceedings of SFT2009@Moscow)

up to level (24,72) :2009.12 (talk@APCTP workshop, Korea)

up to level (26,78) :2010.10 (talk@SFT2010, YITP, Kyoto, $l=1$ について)

($l=2,3$ のlevel (26,78)については2010年11月に得られた。)

数値計算の結果(1)

- Numerical solution to $Q\Psi + \Psi * \Psi = 0$ in Siegel gauge

Level	Potential height	Gauge inv. overlap
(0,0)	-0.6846162	0.7165627
(2,6)	-0.9593766	0.8898618
(4,12)	-0.9878218	0.9319524
(6,18)	-0.9951771	0.9510789
(8,24)	-0.9979301	0.9611748
(10,30)	-0.9991825	0.9681148
(12,24)	-0.9998223	0.9725595
(14,42)	-1.0001737	0.9761715
(16,48)	-1.0003755	0.9786768
(18,54)	-1.0004937	0.9809045
(20,60)	-1.0005630	0.9825168
(22,66)	-1.0006023	0.9840334
(24,72)	-1.0006227	0.9851603
(26,78)	-1.0006312	0.9862619

Normalization

Potential height:

$$V(\Psi_{\text{Sch}}) = -\frac{2\pi^2 g^2 S[\Psi_{\text{Sch}}]}{V_{26}} = -1$$

Gauge inv. overlap:

$$\mathcal{O}_V(\Psi_{\text{Sch}}) = 1$$

数値計算の結果(2-1)

- Numerical solution to $Q'\Phi + \Phi * \Phi = 0$ in Siegel gauge

Level	Potential height	Gauge inv. overlap
(0,0)	2.3105795	-1.0748441
(2,6)	2.5641847	-1.0156983
(4,12)	1.6550774	-0.9539832
(6,18)	1.6727496	-0.9207572
(8,24)	1.4193393	-0.9377548
(10,30)	1.4168893	-0.9110994
(12,24)	1.3035715	-0.9237917
(14,42)	1.2986472	-0.9056729
(16,48)	1.2357748	-0.9229035
(18,54)	1.2310583	-0.9086563
(20,60)	1.1915648	-0.9212376
(22,66)	1.1874828	-0.9103838
(24,72)	1.1605884	-0.9231608
(26,78)	1.1571287	-0.9142181

in the theory around

$$\Psi_{l=1, a=-1/2}$$

数値計算の結果(2-2)

- Numerical solution to $Q'\Phi + \Phi * \Phi = 0$ in Siegel gauge

Level	Potential height	Gauge inv. overlap
(0,0)	288.8224425	-5.3742203
(2,6)	92.1238442	-3.1048971
(4,12)	48.7033363	-2.6003723
(6,18)	31.6992499	-2.2279366
(8,24)	22.6595219	-2.0575256
(10,30)	17.2812044	-1.8761349
(12,24)	13.8061273	-1.7589056
(14,42)	11.4523287	-1.6466427
(16,48)	9.7610020	-1.5812240
(18,54)	8.5029788	-1.5129234
(20,60)	7.5338958	-1.4632552
(22,66)	6.7726232	-1.4139118
(24,72)	6.1591160	-1.3803795
(26,78)	5.6571904	-1.3453959

in the theory around

$$\Psi_{l=2, a=-1/2}$$

数値計算の結果(2-3)

- Numerical solution to $Q'\Phi + \Phi * \Phi = 0$ in Siegel gauge

Level	Potential height	Gauge inv. overlap
(0,0)	3669.1147320	-12.5398475
(2,6)	1069.0267362	-6.9447829
(4,12)	469.8576394	-5.6412136
(6,18)	264.1631512	-4.4016913
(8,24)	169.6466508	-3.9168243
(10,30)	118.8569322	-3.4132963
(12,24)	88.1014995	-3.1705974
(14,42)	68.1558589	-2.8864809
(16,48)	54.5068784	-2.7221662
(18,54)	44.7485588	-2.5342661
(20,60)	37.5395492	-2.4137280
(22,66)	32.0687967	-2.2791648
(24,72)	27.8108828	-2.1939288
(26,78)	24.4312138	-2.0969334

in the theory around

$$\Psi_{l=3, a=-1/2}$$

Contents

- Introduction
 - 弦の場の理論とそれを用いた今回の結果
- Schnabl解について
 - 近年の開弦の場の理論の進展について
- TT解について
 - TT解まわりのBRSTコホモロジー
- TT解まわりの理論の数値解
 - $l=1$ の場合
 - $l=2,3$ の場合
- まとめと展望

Schnabl解について (1)

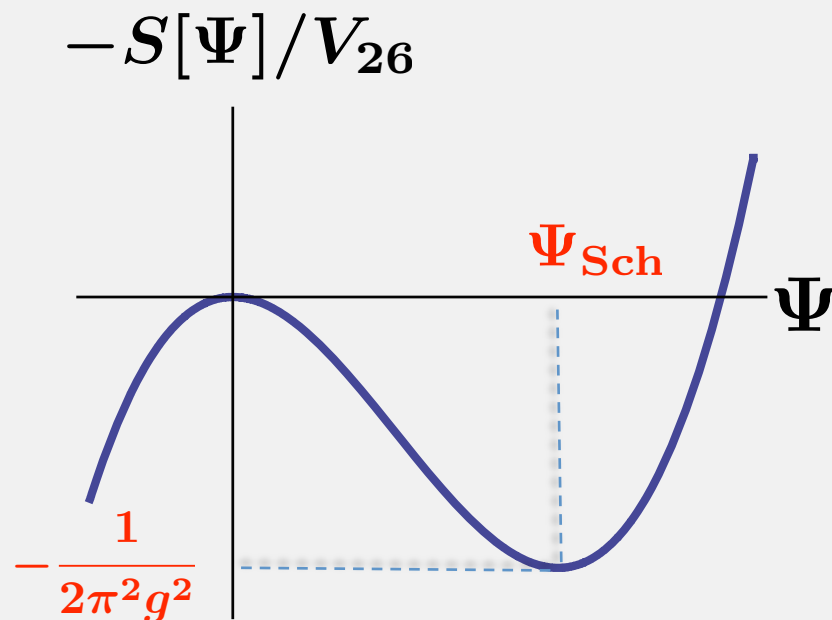
- 運動方程式: $Q\Psi + \Psi * \Psi = 0$ の解析解 Ψ_{Sch}

あらわな表式が書き下されている。
Siegelゲージ条件は満たさない。

- ポテンシャルの高さ = D brane tension

$$S[\Psi_{\text{Sch}}]/V_{26} = \frac{1}{2\pi^2 g^2}$$

[Schnabl(2005), Okawa, Fuchs-Kroyter(2006)]



Schnabl解について (2)

- Gauge invariant overlapの値: $\mathcal{O}_V(\Psi_{\text{Sch}}) = \frac{1}{2\pi} \langle B | c_0^- | \phi_V \rangle$
 $\mathcal{O}_V(\Psi) := \langle \hat{\gamma}(1_c, 2) | \phi_V \rangle_{1_c} | \Psi \rangle_2$

[Ellwood, Kawano-Kishimoto-Takahashi(2008)]



ゲージ変換: $\delta_\Lambda \Psi = Q\Lambda + \Psi * \Lambda - \Lambda * \Psi$ で不変

- 解のまわりのBRSTコホモロジーが消えている:
 $Q' = Q + [\Psi_{\text{Sch}}, \cdot]_* \quad (Q'A = \mathcal{I}, \exists A)$

[Ellwood-Schnabl(2006)]

Schnabl解のまわりでは、物理的なopen stringの自由度がない
～ D braneが消えている!

TT解について

- Schnabl解以前の「解析解」の一つ: 高橋-谷本解

$$\Psi_{l,a} = Q_L(e^{h_a^l} - 1)\mathcal{I} - C_L((\partial h_a^l)^2 e^{h_a^l})\mathcal{I}$$

$$h_a^l(z) = \log \left(1 - \frac{a}{2}(-1)^l \left(z^l - (-1)^l \frac{1}{z^l} \right)^2 \right)$$

$$= -\log((1 - Z(a))^2) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{ln}}{n} Z(a)^n (z^{2ln} + z^{-2ln})$$

$$l = 1, 2, 3, \dots \quad Z(a) = \frac{1 + a - \sqrt{1 + 2a}}{a} \quad a \geq -1/2$$

- identity state ~ 弦場のスター積に関する単位元

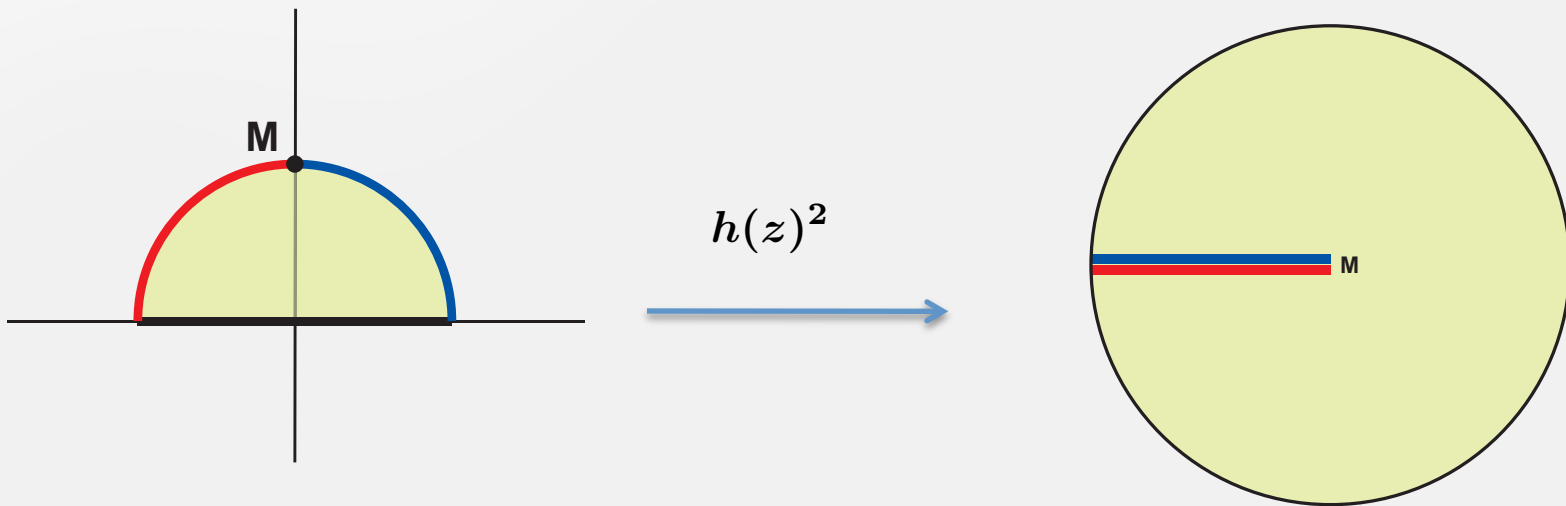
$$\mathcal{I} * A = A * \mathcal{I} = A \quad \forall A$$

TT解とゲージ不変量

- TT解に対するポテンシャルの高さおよびgauge invariant overlapの値はともに $\langle \mathcal{I} | (\dots) | \mathcal{I} \rangle$ の形で与えられる。



素朴な直接計算では不定値



$$\langle \mathcal{I} | \phi \rangle = \langle h_{\mathcal{I}}[\phi(0)] \rangle_{\text{UHP}}$$

$$h_{\mathcal{I}}(z) = h^{-1}(h(z)^2) = \frac{2z}{1-z^2}$$

TT解周りのコホモロジー

- TT解周りの理論:

$$\begin{aligned} S_{l,a}[\Phi] &\equiv S[\Psi_{l,a} + \Phi] - S[\Psi_{l,a}] \\ &= -\frac{1}{g^2} \left(\frac{1}{2} \langle \Phi, Q' \Phi \rangle + \frac{1}{3} \langle \Phi, \Phi * \Phi \rangle \right) \end{aligned}$$

- 新たなBRST operatorのコホモロジー: [Kishimoto-Takahashi (2002)]

$$Q' = Q + [\Psi_{l,a}, \cdot]_* = Q(e^{h_a^l}) - C((\partial h_a^l)^2 e^{h_a^l})$$

$$\Rightarrow Q' = e^{q(h_a^l)} Q e^{-q(h_a^l)}$$

$a > -1/2$: 通常に加藤-小川のBRST演算子と全く同様に開弦スペクトラムがある

$$\Rightarrow \Psi_{l,a > -1/2} : \text{pure gauge}$$

$a = -1/2$: 上記similarity変換がill-definedになりghost数1セクターではコホモロジーが消えている(物理的開弦がない)

$$\Rightarrow \Psi_{l,a = -1/2} : \text{tachyon vacuum}$$

TT解周りの理論の数値解

- 運動方程式: $Q'\Phi + \Phi * \Phi = 0$
構成法から $\Phi = -\Psi_{l,a}$ が解であるが、これを用いたのでは、ゲージ不変量の定量的評価が困難。
代わりにSiegelゲージ: $b_0\Phi = 0$ の数値解を構成し評価する

 $L_{l,a}\Phi + b_0(\Phi * \Phi) = 0$ を数値的に解く!

$$\begin{aligned} L_{l,a} &= \{b_0, Q'\} \\ &= (1+a)(L'_0 - 1) - \frac{(-1)^l}{2} a(L'_{2l} + L'_{-2l}) + 4l^2 a Z(a) \end{aligned}$$

$$L'_n = L_n^{\text{mat}} + L_n^{\text{gh}'}$$

$$L_n^{\text{gh}'} \equiv L_n^{\text{gh}} + nq_n + \delta_{n,0} \quad \leftarrow \quad j_{\text{gh}}(z) = cb(z) = \sum_n q_n z^{-n-1}$$

逐次近似による数値解の構成

- 「ニュートン法」

$$L_{l,a}\Phi^{(n)} + b_0(\Phi^{(n)} * \Phi^{(n)})$$

$$+ L_{l,a}(\Phi^{(n+1)} - \Phi^{(n)}) + b_0(\Phi^{(n)} * (\Phi^{(n+1)} - \Phi^{(n)}) + (\Phi^{(n+1)} - \Phi^{(n)}) * \Phi^{(n)}) = 0$$



$$L_{l,a}\Phi^{(n+1)} + b_0(\Phi^{(n)} * \Phi^{(n+1)} + \Phi^{(n+1)} * \Phi^{(n)}) = b_0(\Phi^{(n)} * \Phi^{(n)})$$

$\Phi^{(n+1)}$ については線形方程式

$$n \rightarrow \infty$$



$$L_{l,a}\Phi^{(\infty)} + b_0(\Phi^{(\infty)} * \Phi^{(\infty)}) = 0$$

もし収束すれば解が得られる

収束するように initial configuration $\Phi^{(0)}$ を選ぶ

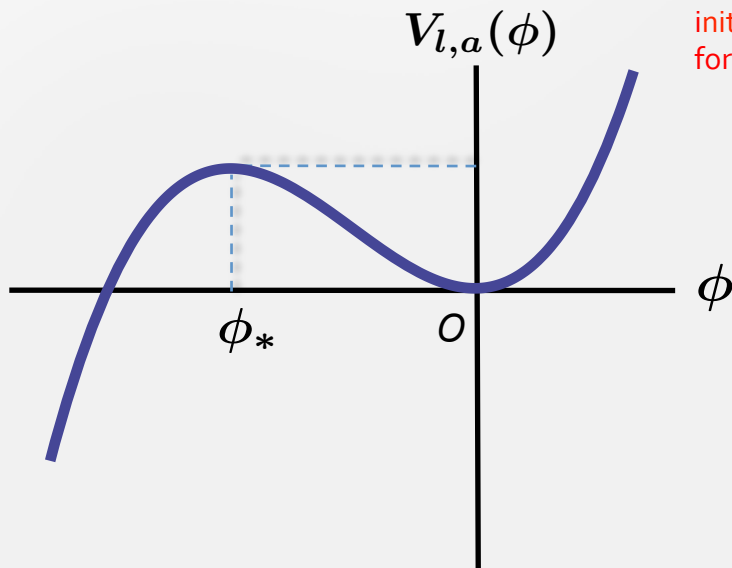
レベルゼロの近似

- Ansatz: $\Phi_{L=0} = \phi c_1 |0\rangle$

$$V_{l,a}(\phi) = -2\pi^2 g^2 S_{l,a}[\Phi_{L=0}] / V_{26}$$

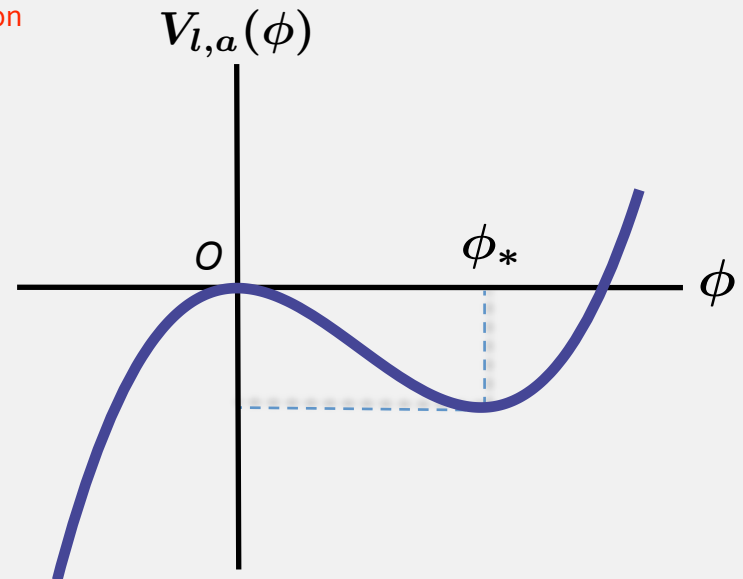
$$= 2\pi^2 \left(\frac{1}{2} ((4l^2 - 1)(a + 1) - 4l^2 \sqrt{1 + 2a}) \phi^2 + \frac{27\sqrt{3}}{64} \phi^3 \right)$$

$$\Rightarrow \phi_* = \frac{-64}{81\sqrt{3}} ((4l^2 - 1)(a + 1) - 4l^2 \sqrt{1 + 2a})$$



unstable solution $(a \gtrsim -1/2)$

initial configuration
for $a = -1/2, 0$



stable solution $(a \sim 0)$

レベルトランケーション近似

- Level $(L, 3L)$ truncation $L = L_0 + 1$

Φ : up to level L

$$|A * B\rangle = \sum_i |\phi^i\rangle \langle V_3(1, 2, 3) | \phi_i \rangle_1 |A\rangle_2 |B\rangle_3$$

up to total level $3L$

- 更にconsistentなtruncation:

$$(-1)^{L_0+1} \Phi = \Phi \quad : \text{twist even}$$

$$\Phi \sim L_{-n_1}^{\text{mat}} L_{-n_2}^{\text{mat}} \cdots L_{-n_1}^{\text{gh}'} L_{-n_2}^{\text{gh}'} \cdots c_1 |0\rangle \quad : \text{universal and } \text{su}(1,1) \text{ singlet}$$

$$\mathcal{G}\Phi = X\Phi = Y\Phi = 0$$

$$\mathcal{G} = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{-n} b_n - b_{-n} c_n) \quad X = - \sum_{n=1}^{\infty} n c_{-n} c_n \quad Y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} b_{-n} b_n$$

Dimension of truncated space

L	$\dim H^+_{univ}$	$\dim H^+_{singl}$
0	1	1
2	3	3
4	9	8
6	26	21
8	69	51
10	171	117
12	402	259
14	898	549
16	1925	1124
18	3985	2236
20	7995	4328
22	15606	8176
24	29736	15121
26	55433	27419

$$\mathcal{H}^+_{univ}$$

twist even, universal space,
Siegel gauge, ghost number 1

$$\mathcal{H}^+_{singl}$$

twist even, universal space,
Siegel gauge, ghost number 1,
 $su(1,1)$ singlet

弦場の相互作用項

展開したときの各項の計算は...

$$\langle V(1, 2, 3) | \phi_1 \rangle | \phi_2 \rangle | \phi_3 \rangle$$

$$= \langle V(1, 2, 3) | \phi_1 \rangle | \phi_2 \rangle | \phi_3 \rangle |_{\text{mat}} \langle V(1, 2, 3) | \phi_1 \rangle | \phi_2 \rangle | \phi_3 \rangle |_{\text{gh}}$$

32ビット int を超える数!

$$\frac{1}{6} \cdot 2436 \cdot (2436 + 1) \cdot (2436 + 2) \simeq 2.41221 \times 10^9 > 2^{(32-1)}$$

↑ matter と ghost セクターそれぞれこれくらいの種類の相互作用項がある。

Dimension of $\{ L_{-n_1}^{\text{mat}} L_{-n_2}^{\text{mat}} \cdots |0\rangle_{\text{mat}} \}$ or $\{ L_{-n_1}^{\text{gh}'} L_{-n_2}^{\text{gh}'} \cdots c_1 |0\rangle_{\text{gh}} \}$
up to level (26,78)

レベル(26,78)までの計算に用いたマシン



PC cluster @ Nara Women's Univ.



RIKEN Integrated Cluster of Clusters (RICC)

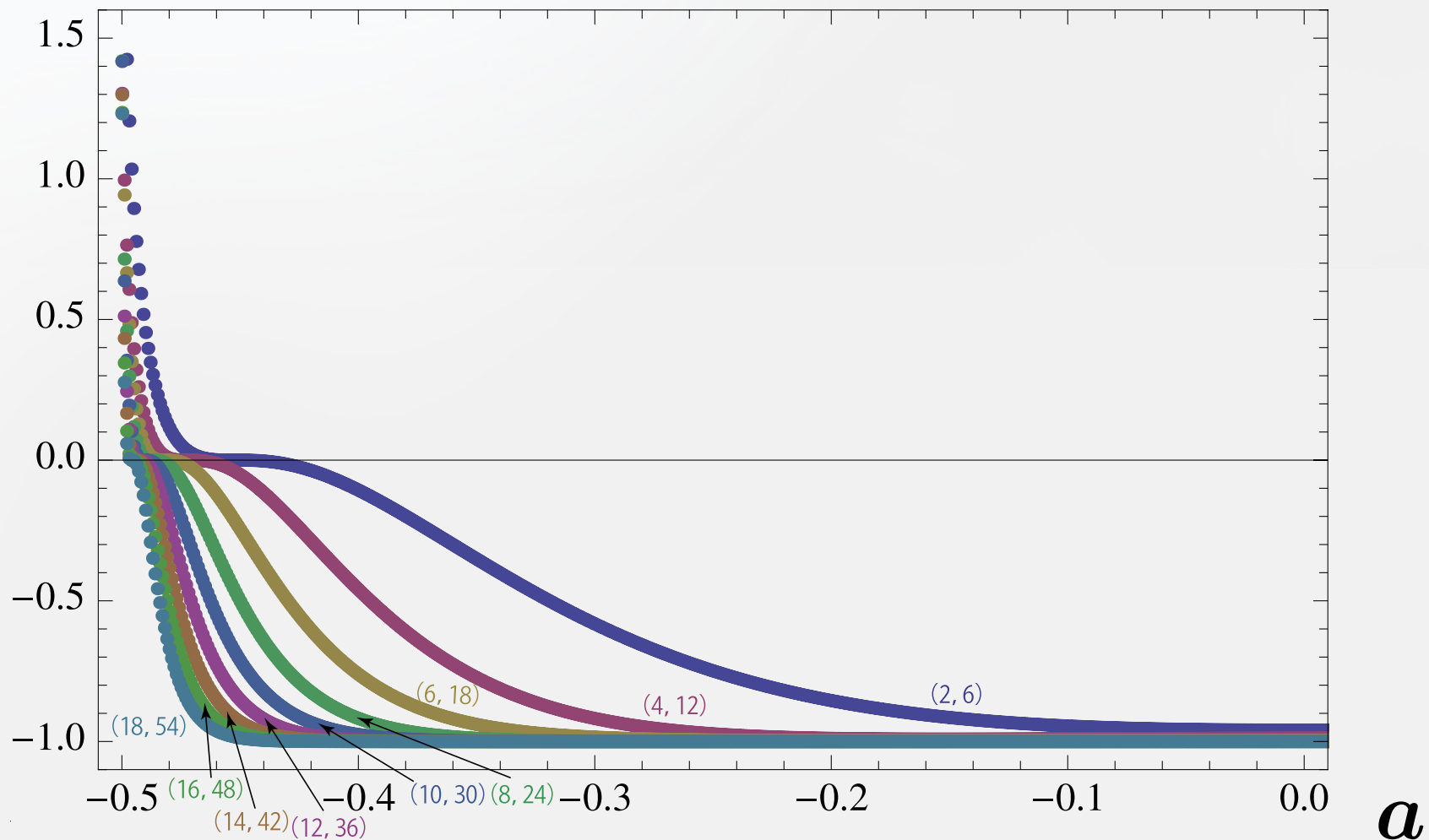
特に大容量メモリ:
64×3+48
+120+20
+... (GB)
を用いて計算



MacPro@RIKEN

Potential height at Φ_t in SFT around $\Psi_{l=1,a}$

$$V_{l=1,a}(\Phi_t)$$



Comments on solution for $a = 0$ ($Q' = Q$)

- potential heightの外挿法：

fitting function:
$$F_N(L) = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(L+1)^n} \quad [\text{Gaiotto-Rastelli (2002)}]$$

$L=0,2,4,6,8,10,12,14,16$ ($N=9$) のデータを使ってフィットすると

$$F_{N=9}(L = 18) = -1.0004937$$

$$F_{N=9}(L = 20) = -1.0005630$$

$$F_{N=9}(L = 22) = -1.0006023$$

$$F_{N=9}(L = 24) = -1.0006229$$

$$F_{N=9}(L = 26) = -1.0006313$$

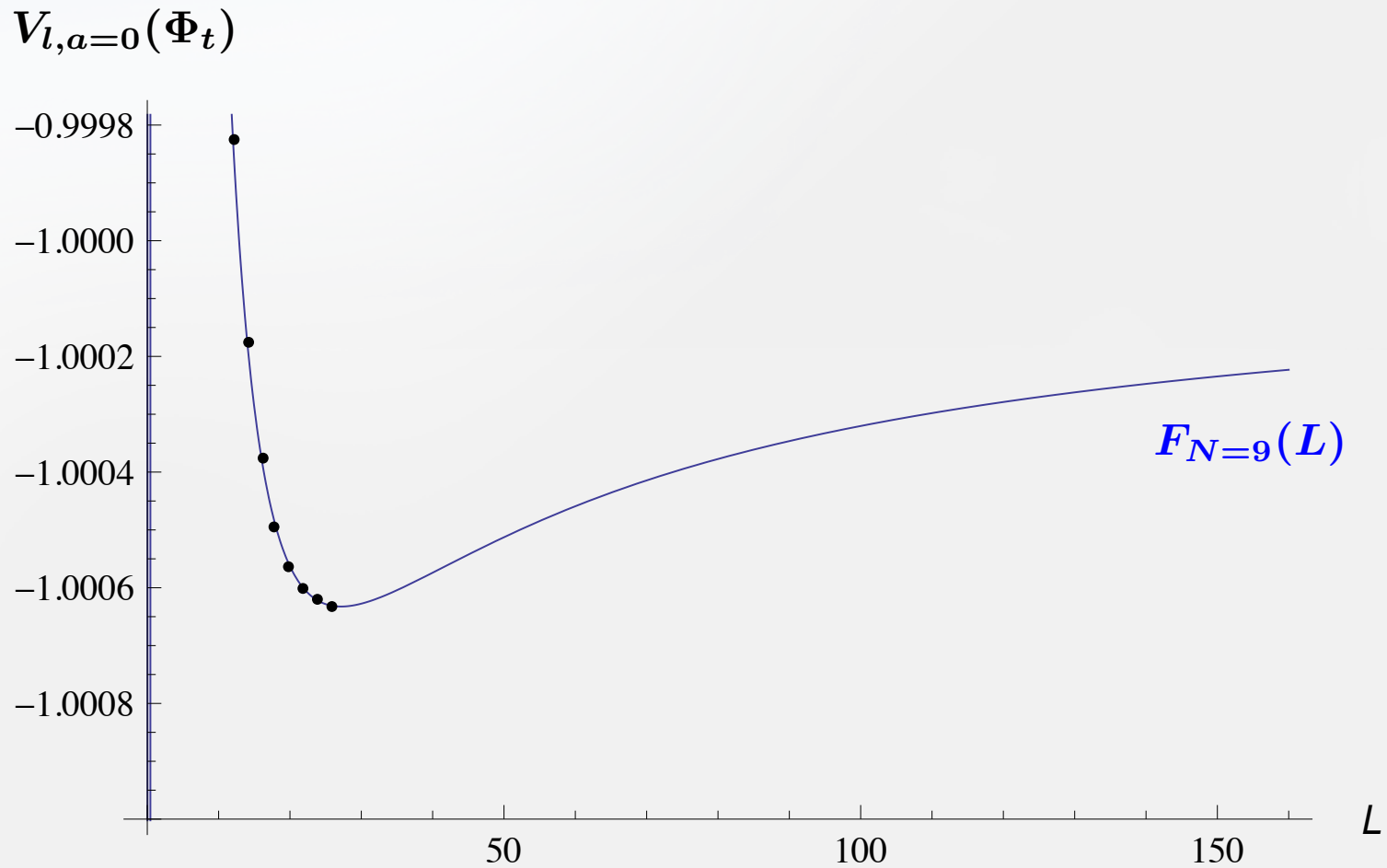
$$F_{N=9}(L = \infty) = -1.0000293$$

直接的計算とよく合致している！

← -1.0006227

← -1.0006312

Extrapolation of potential height at $a = 0$ ($Q' = Q$)



Extrapolation of potential height for $l = 1, a = -\frac{1}{2}$

L	Extrapolation of $V_{l=1, a=-1/2}(\Phi_t)$
4∞	0.9893181
$4\infty + 2$	0.9909238

← $(L=0,4,8,12,16,20,24;N=7)$

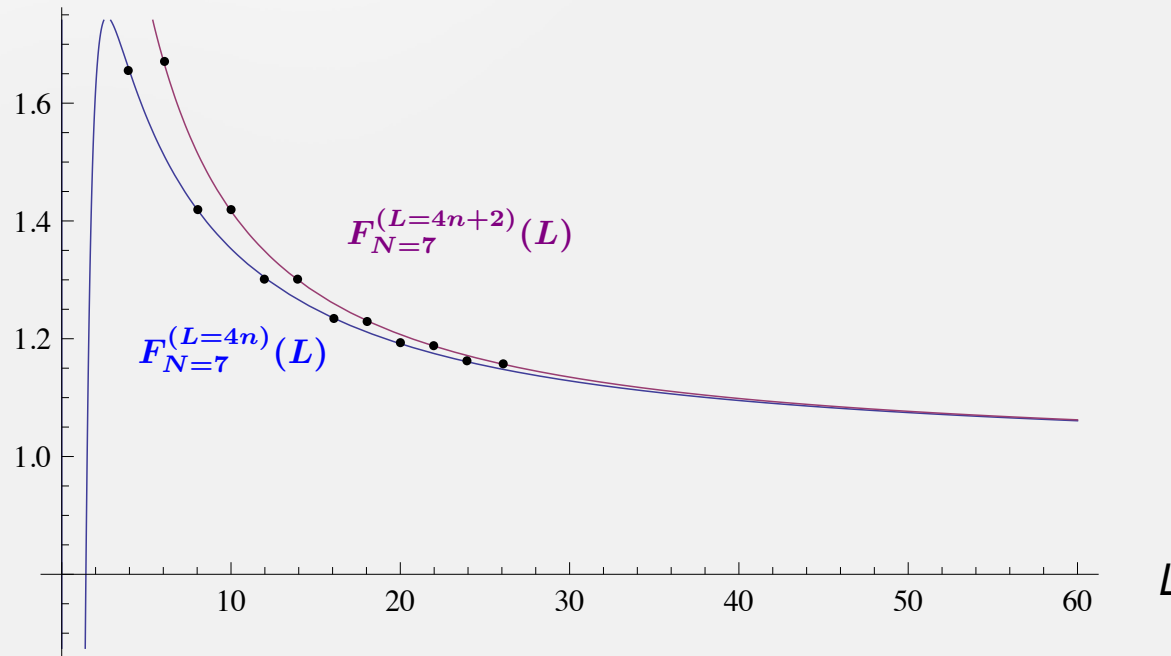
← $(L=2,6,10,14,18,22,26;N=7)$

99% +1 (!?)

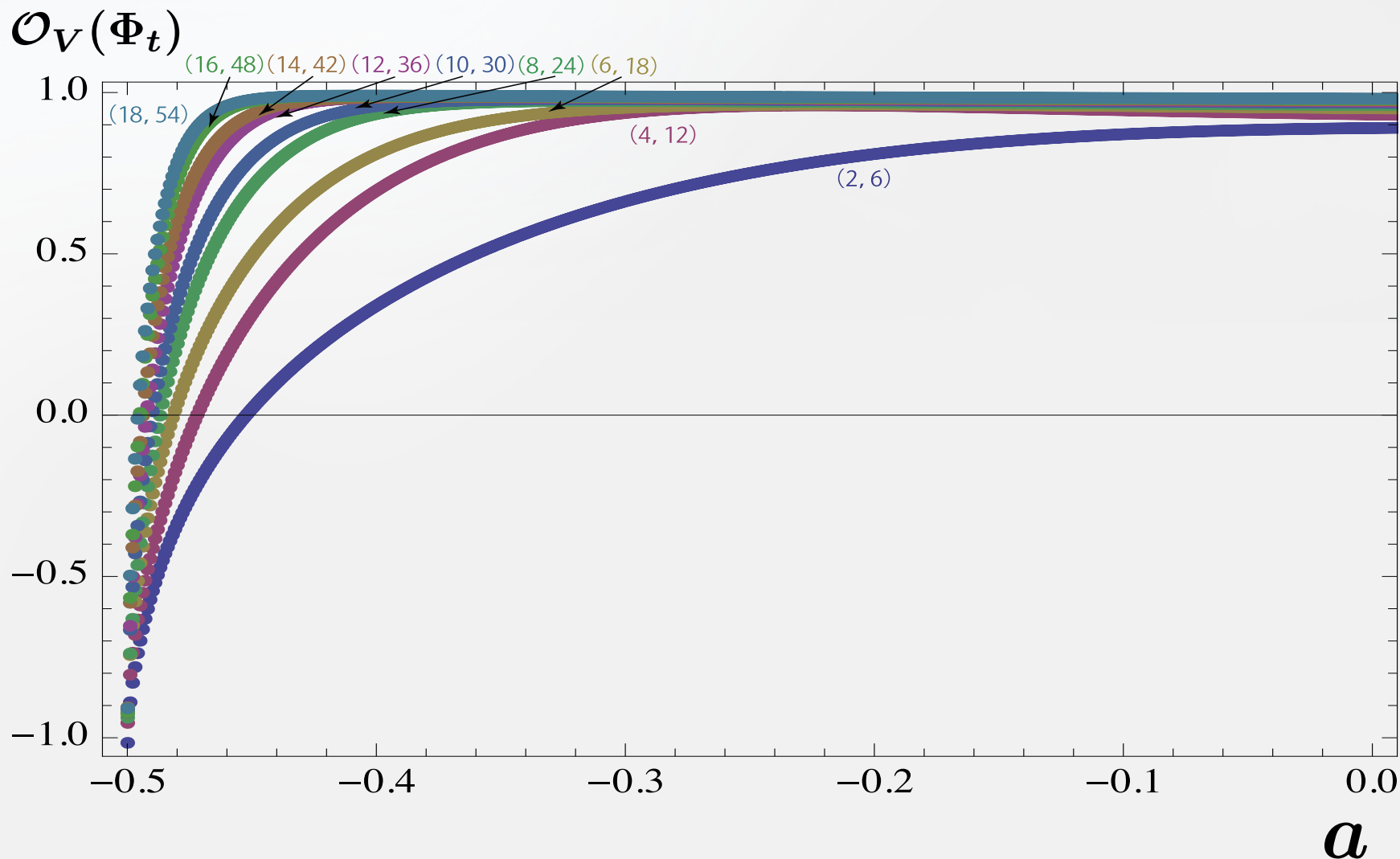
fitting function:

$$F_N(L) = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{(L+1)^n}$$

$V_{l=1, a=-1/2}(\Phi_t)$

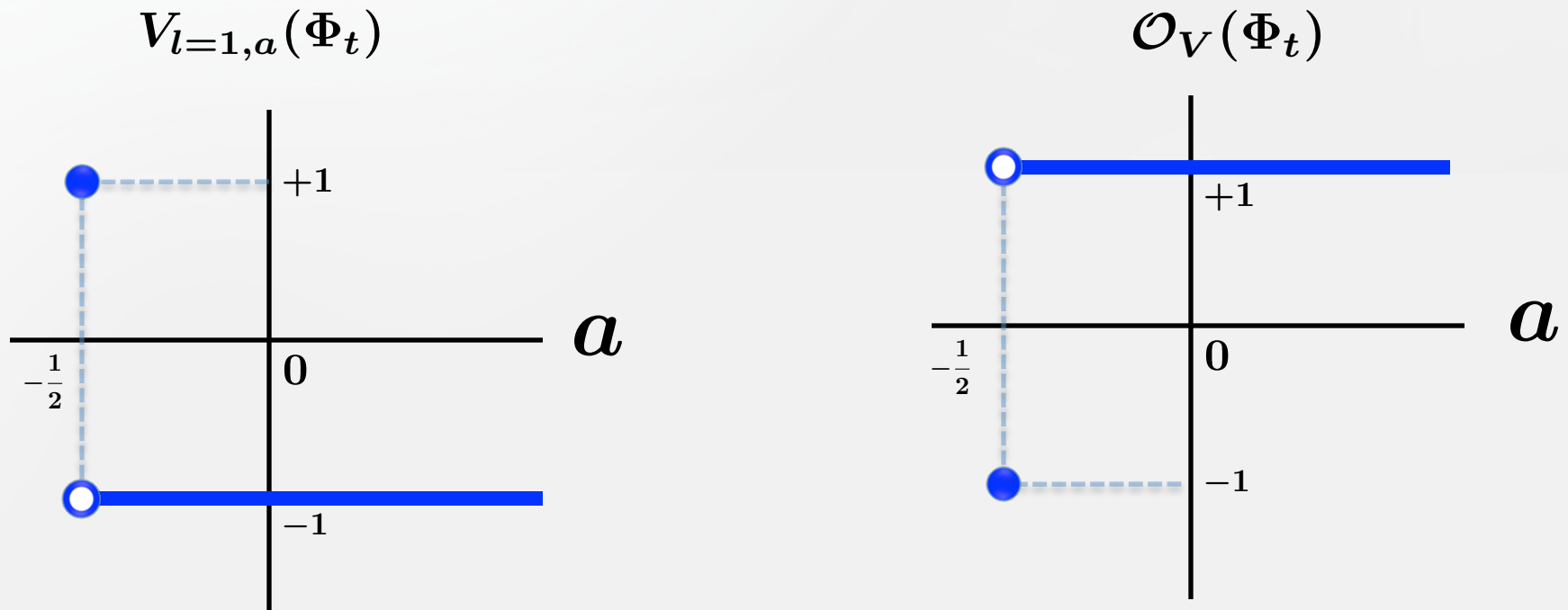


Gauge inv overlap at Φ_t in SFT around $\Psi_{l=1,a}$



TT解($l=1$)周りの理論の数値解のまとめ

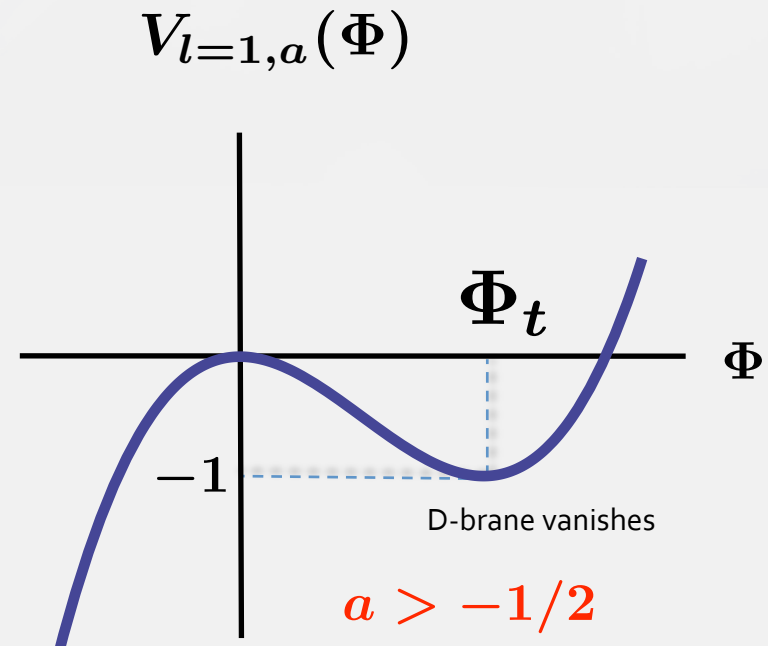
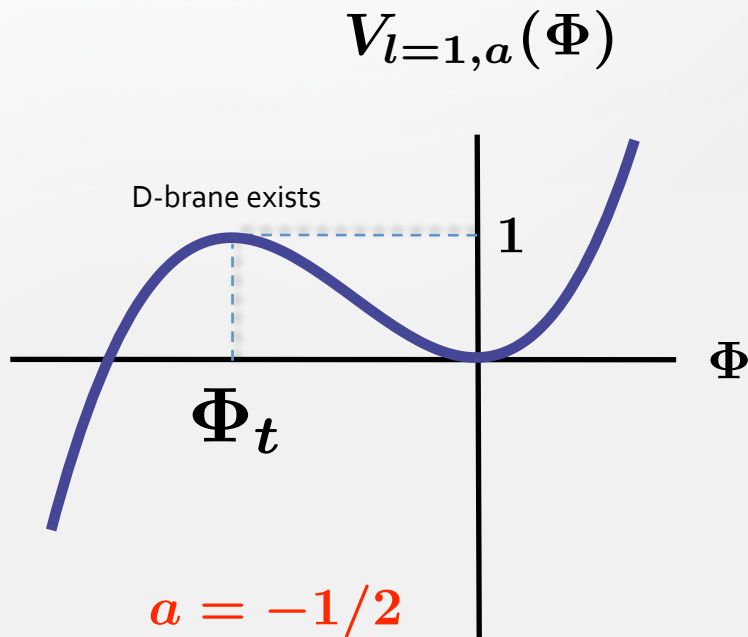
レベルを上げていくとゲージ不変量の値は階段関数的になる：



※ともに、Schnabl解における値で規格化している。

TT解($l=1$)周りの理論の構造

Numerical results for Φ_t s.t. $Q'\Phi_t + \Phi_t * \Phi_t = 0$ suggest:



$\Psi_{l=1,a=-1/2}$: tachyon vacuum

$\Psi_{l=1,a>-1/2}$: pure gauge

TT解($l=2,3$)周りの理論について

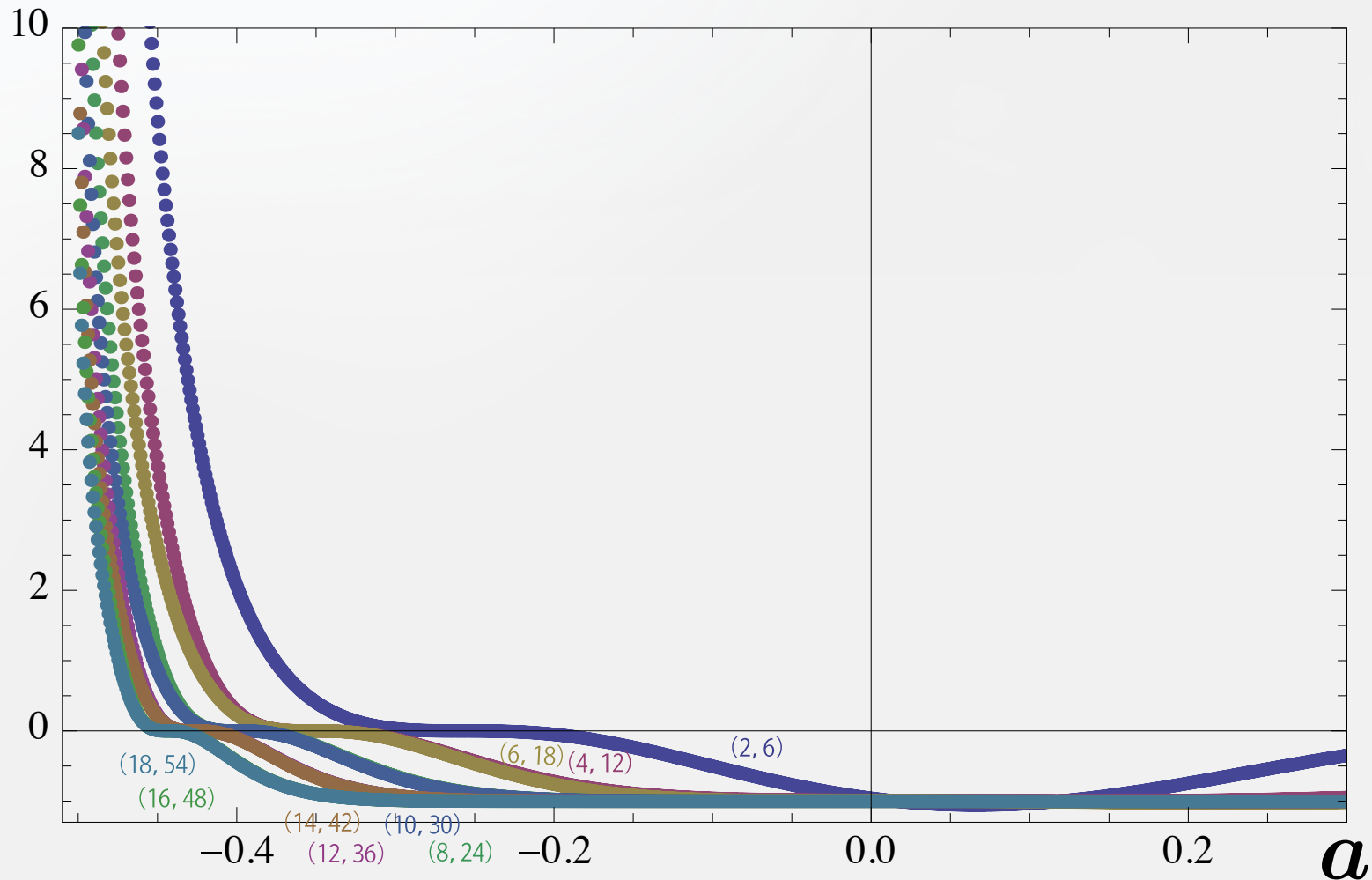
コホモロジーの解析結果[Kishimoto-Takahashi(2002)]から、 a を変えたときに $l=2,3,\dots$ の場合も $l=1$ と同様に振る舞う。

TT解($l=1,2,3,\dots$)同士のゲージ変換の解析など
[Igarashi-Itoh-Katsumata-Takahashi-Zeze(2005)]

ここではTT解 $l=2,3$ 周りの理論のSiegelゲージの数値解をレベル(26,78)まで $l=1$ と同様に調べた。
しかし、 $l=2,3$ では運動項がより高いレベルを混ぜるので、 $a=-1/2$ の定量的な振る舞いはまだはっきりとはみえていない。
ただし、 $l=2,3$ ともにレベルを上げると階段関数的になり、 $a>-1/2$ ではpotential height は-1, gauge invariant overlapは +1 にそれぞれ近づいていくことは見えている。

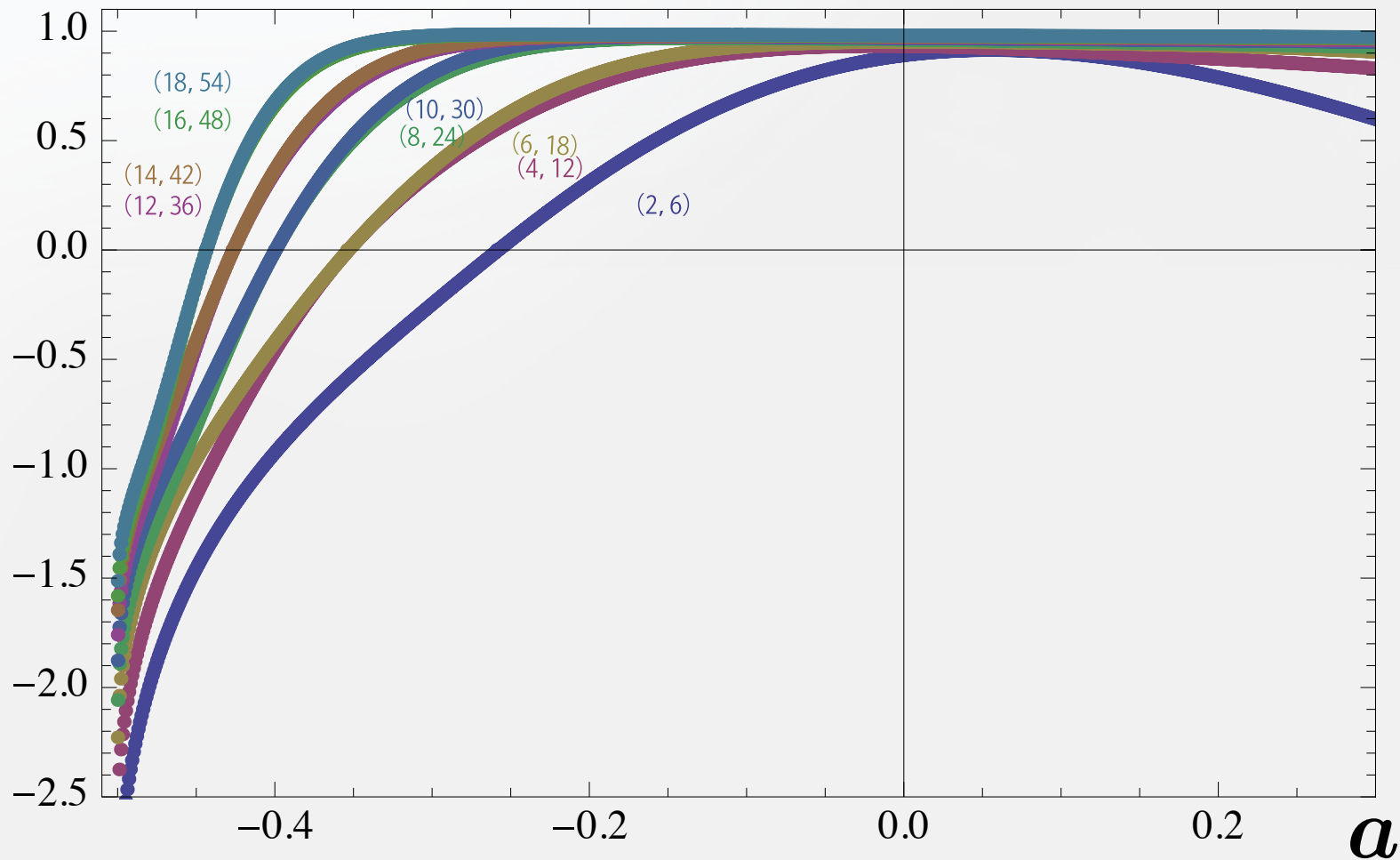
Potential height at Φ_t in SFT around $\Psi_{l=2,a}$

$V_{l=2,a}(\Phi_t)$



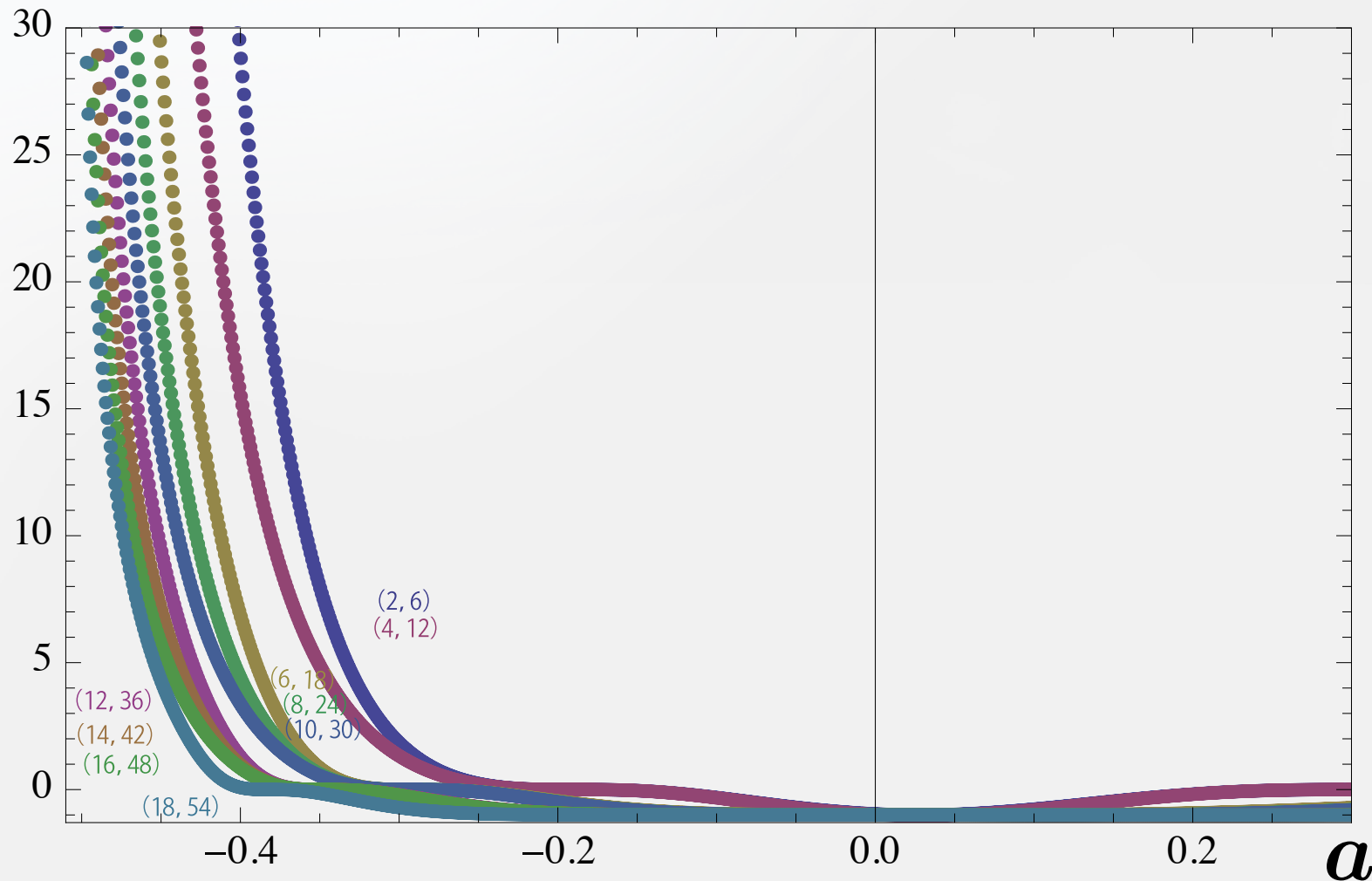
Gauge inv overlap at Φ_t in SFT around $\Psi_{l=2,a}$

$\mathcal{O}_V(\Phi_t)$

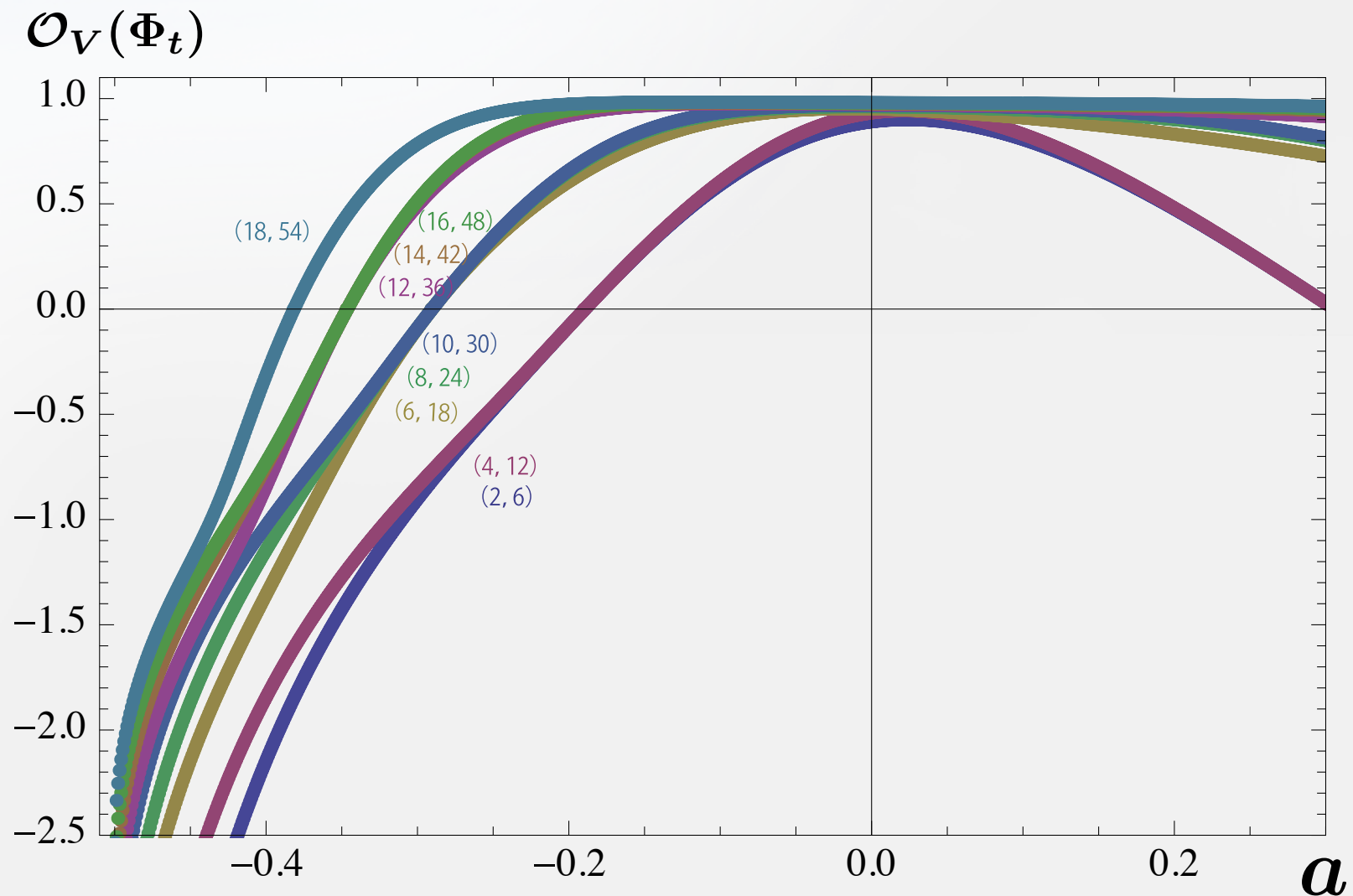


Potential height at Φ_t in SFT around $\Psi_{l=3,a}$

$V_{l=3,a}(\Phi_t)$



Gauge inv overlap at Φ_t in SFT around $\Psi_{l=3,a}$



まとめと展望

- TT解周りの理論のSiegelゲージの数値解をレベル(26,78)まで構成しゲージ不変量(ポテンシャルの高さとgauge invariant overlap)を評価した。
- 数値計算の結果は従来の解釈:

$\Psi_{l,a=-1/2}$: nontrivial solution

$\Psi_{l,a>-1/2}$: pure gauge

と整合する。さらにTT解($l=1, a=-1/2$)がSiegelゲージの数値解、Schnabl解とゲージ同値であることを定量的に示唆する。

- $l=2,3$ の場合は $a=-1/2$ の値の定量的な振る舞いはまだはっきりしない。
- Gauge invariant overlapのfitの仕方は？
- Siegelゲージの厳密解は？
- あるいはTT解周りの理論の別のゲージでの解析解は？
- TT解におけるゲージ不変量の直接的評価は？
(正則化の方法、そのためには弦場の空間の数学的な定義...)