

単位弦場に基づくマージナル解周りの 弦の場の理論の数値解

岸本 功, 高橋智彦^A

新潟大教育, 奈良女大理^A

2013年3月27日
日本物理学会第68回年次大会
(広島大学東広島キャンパス)

発表の内容

- 1 イントロダクション
 - 単位弦場に基づくマージナル解とその周りの理論
 - KBc 代数を用いた解析解
- 2 レベルトランケーションによる数値解
 - レベルトランケーションした弦場
 - Siegel ゲージの数値解
 - Landau ゲージの数値解
- 3 M -ブランチと V -ブランチ
 - Q_B の理論
 - Q' の理論
 - $x = -0.5$ の場合
 - $x = -1$ の場合
 - $|x|$: 大のときの振る舞い
- 4 まとめと展望

An identity-based solution in bosonic SFT

Identity-based marginal solution [Takahashi-Tanimoto(2001)]:

$$\Psi_0 = - \int_{C_{\text{left}}} \frac{dz}{2\pi i} \frac{i}{2\sqrt{\alpha'}} F(z)c(z)\partial X^{25}(z)I \\ + \frac{1}{4} \int_{C_{\text{left}}} \frac{dz}{2\pi i} F(z)^2 c(z)I.$$

以下では簡単のため $F(z) = -x(z + 1/z)z^{-1}$ とする。

→ 1-パラメータ x が入っている。

Q' の理論

Ψ_0 周りで作用を展開したとき $Q_B \rightarrow Q'$ となる :

$$S'[\Phi] \equiv S[\Psi_0 + \Phi] - S[\Psi_0] = - \left(\frac{1}{2} \langle \Phi, Q' \Phi \rangle + \frac{1}{3} \langle \Phi, \Phi * \Phi \rangle \right),$$

$$Q' = Q_B + \frac{x}{\sqrt{2}} \sum_n c_n (\alpha_{-n-1}^{25} + \alpha_{-n+1}^{25}) + \frac{x^2}{4} (2c_0 + c_{-2} + c_2).$$

弦場 Φ に関する運動方程式 :

$$Q' \Phi + \Phi * \Phi = 0$$

$K'Bc$

Q_B の代わりに Q' を用いると

$$KBC \rightarrow K'Bc \text{ [Inatomi-Kishimoto-Takahashi(2012)]}$$

$$Q'B = K', \quad Q'K = 0, \quad Q'c = cK'c, \\ Bc + cB = 1, \quad B^2 = c^2 = 0, \quad BK' = K'B$$

これにより解析解を構成できる。特にタキオン凝縮解は

$$\Phi_T = \frac{1}{\sqrt{1+K'}}(c + cK'Bc) \frac{1}{\sqrt{1+K'}}.$$

パラメータ $x \rightarrow 0$ とすると $\Phi_T \rightarrow \Psi_{ES}$ (Erler-Schnabl 解)

真空エネルギーについて

実際 Φ_T に対し、真空エネルギーは

$$E = -S'[\Phi_T] = -\frac{1}{2\pi^2} \quad (= -S[\Psi_{\text{ES}}])$$

と計算され、D ブレーンが消滅したタキオン真空を表すと解釈できる。一方、パラメータ x について微分して積分することにより $S[\Psi_0 + \Phi_T] = S[\Psi_{\text{ES}}]$ が得られ、上式とあわせて

$$S[\Psi_0] = 0.$$

Ψ_0 は identity-based 解なのでこの直接計算は難しい。
→ 別のゲージの解でも調べて整合性を確かめよう。

弦場の基底

consistent なトランケーション ghost 数 1 の空間で $c_1|0\rangle$ 上

- matter ゼロモード : $p^\mu = 0$
- X^{25} 方向以外については $c = 25$ の Virasoro generator :
 $L_{-n}^{(m)'} (n > 1)$
- その他 : $\alpha_{-n}^{25} (n > 0), b_{-n} (n > 0), c_{-n} (n \geq 0)$
- $(-1)^{L_0+1}$ と $(\alpha_{-n}^{25} \rightarrow -\alpha_{-n}^{25})$ を同時にやって even

一般的な基底の形 :

$$L_{-n_1}^{(m)'} \cdots L_{-n_l}^{(m)'} \alpha_{-m_1}^{25} \cdots \alpha_{-m_a}^{25} b_{-k_1} \cdots b_{-k_b} c_{-l_1} \cdots c_{-l_b} c_1 |0\rangle$$

$$n_1 \geq \cdots n_l \geq 2, \quad m_1 \geq \cdots m_a \geq 1, \quad k_1 > \cdots k_b \geq 1, \quad l_1 > \cdots l_b \geq 0,$$

$$n_1 + \cdots n_l + m_1 + \cdots m_a + k_1 + \cdots k_b + l_1 + \cdots l_b + a = \text{even}$$

$(L, 3L)$ 近似

$L(= 0, 1, 2, 3, \dots)$ を一つ固定して、
 弦場 Φ : 最大レベル ($L_0 + 1$ の固有値) L
 弦場のスター積の各項: $|A * B\rangle = \sum_i |\phi^i\rangle \langle V_3 | \phi_i \rangle |A\rangle |B\rangle$
 で $|\phi_i\rangle, |A\rangle, |B\rangle$ のレベルの和が最大 $3L$
 → 弦場は有限個の係数で表され、数値計算可能。

以上より、弦場の基底の数 N_L および
 さらに (Siegel or Landau) ゲージ条件を課した基底の数 M_L :

L	0	1	2	3	4	5	6	7	8
N_L	1	2	6	12	29	56	118	218	420
M_L	1	2	5	9	20	37	75	135	255
L	9	10	11	12	13	14	15	16	...
N_L	745	1348	2307	3985	6614	11011	17799	28764	...
M_L	446	797	1351	2315	3817	6317	10161	16346	...

Siegel ゲージのポテンシャル

Siegel ゲージ条件 : $b_0|\Phi\rangle = 0$ を課するとき

D ブレーン張力で正規化したポテンシャル $V_S(\Phi)$ は

$$V_S(\Phi) = 2\pi^2 \left(\frac{1}{2} \langle \Phi, c_0 L' \Phi \rangle + \frac{1}{3} \langle \Phi, \Phi * \Phi \rangle \right),$$

$$L' \equiv \{b_0, Q'\} = L_0 + \frac{x}{\sqrt{2}} (\alpha_{-1}^{25} + \alpha_1^{25}) + \frac{x^2}{2}.$$

この $V_S(\Phi)$ の極値をレベルトランケーションで数値的に求める。

数値計算の結果 (Siegel ゲージ)

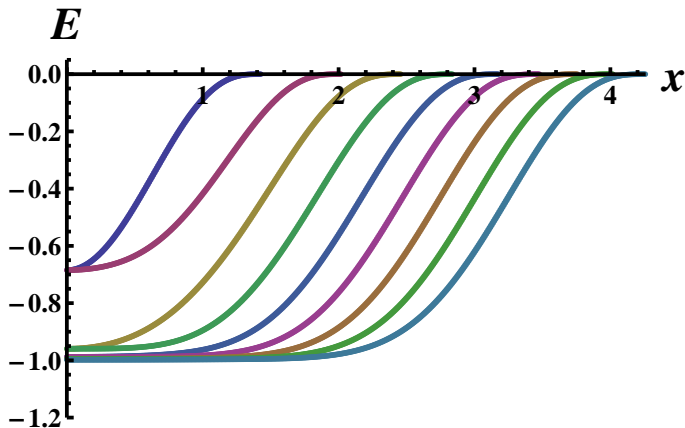
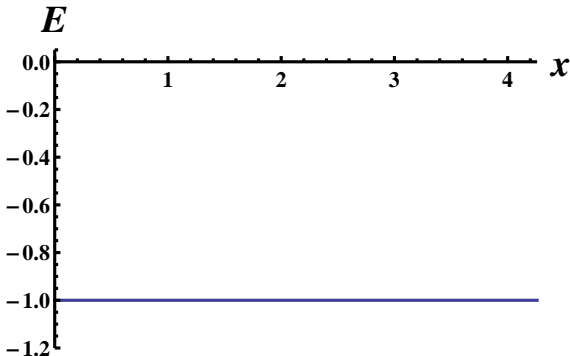


Figure: 左上から順に $L = 0, 1, 2 \dots, 8$ の結果

グラフの傾向 (Siegel ゲージ)

レベルを上げると、各 x で $E = -1$ に近づき、 $E \simeq -1$ となる x の領域が広がっていく。よって、 $L \rightarrow \infty$ とすると、



のように**全ての x で $E = -1$** と予想される。

Landau ゲージのポテンシャル

Landau ゲージ条件: [Asano-Kato(2006)]

$$b_0 c_0 \tilde{Q} |\Phi\rangle = 0, \quad Q_B = \tilde{Q} + c_0 L_0 + b_0 M$$

を課す場合、D ブレーン張力で正規化したポテンシャル $V_L(\Phi)$ は

$$V_L(\Phi) = 2\pi^2 \left(\frac{1}{2} \langle \Phi, Q' \Phi \rangle + \frac{1}{3} \langle \Phi, \Phi * \Phi \rangle \right)$$

で評価し、この $V_L(\Phi)$ の極値をレベルトランケーションで数値的に求める。

数値計算の結果 (Landau ゲージ)

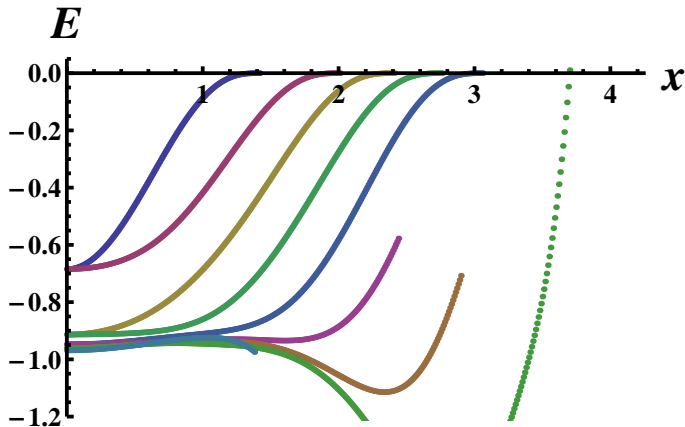


Figure: 左上から順に $L = 0, 1, 2 \dots, 8$ の結果

グラフの傾向 (Landau ゲージ)

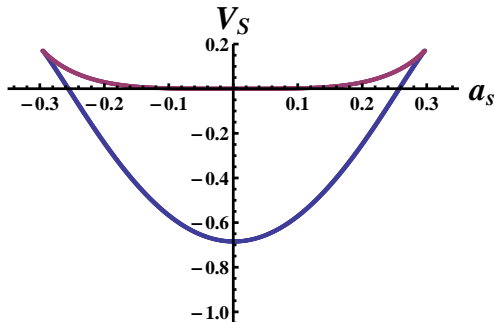
レベルを上げると $L = 4$ までは、Siegel ゲージと同様に各 x で $E = -1$ に近づき、 $E \simeq -1$ となる x の領域が広がっていく。

ところが、 $L = 5$ 以上では、 x の値が大きくなると数値解が同様には見つからない。(解が見つかって $x > 2$ では $E = -1$ から外れる。)

M, V-ブランチ ($x = 0$)

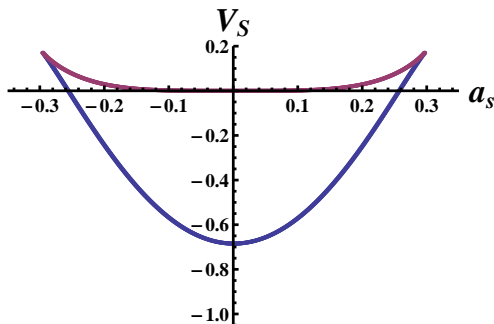
$L = 1$ のレベルトランケーションの弦場 :

$|\Phi\rangle = t_0 c_1 |0\rangle + a_s \alpha_{-1}^{25} c_1 |0\rangle$ をポテンシャル $V_S(x=0)$ に代入し t_0 に関し極値を求め a_s の関数とすると $a_s \rightarrow 0$ で $V_S = 0$ の M-ブランチと $V_S \neq 0$ の V-ブランチが存在 :



M, V-ブランチ ($x = 0$)

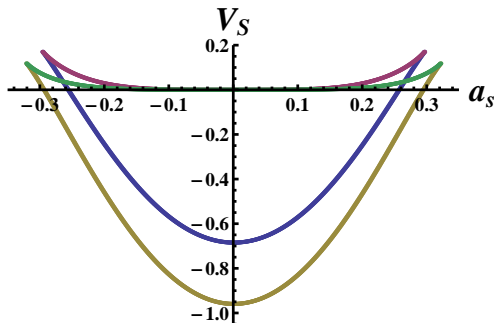
レベルを上げると次のようになる [Sen-Zwiebach(2000)]



レベルを上げてても a_s の有限のところでは M-ブランチが持ち上がり V-ブランチと融合する傾向にある。

M, V-ブランチ ($x = 0$)

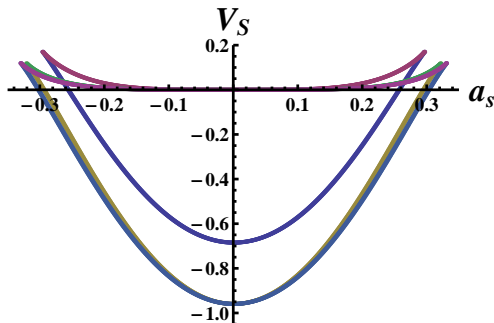
レベルを上げると次のようになる [Sen-Zwiebach(2000)]



レベルを上げてても a_s の有限のところでは M-ブランチが持ち上がり V-ブランチと融合する傾向にある。

M, V-ブランチ ($x = 0$)

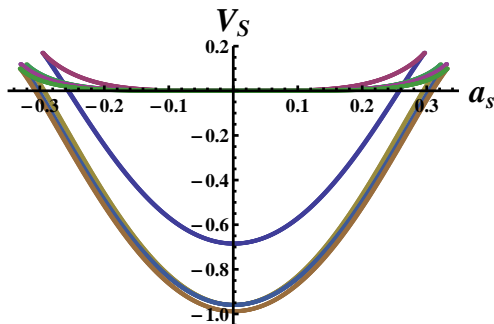
レベルを上げると次のようになる [Sen-Zwiebach(2000)]



レベルを上げてても a_s の有限のところでは M -ブランチが持ち上がり V -ブランチと融合する傾向にある。

M, V-ブランチ ($x = 0$)

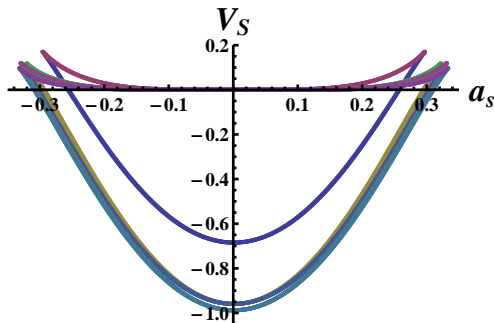
レベルを上げると次のようになる [Sen-Zwiebach(2000)]



レベルを上げてても a_s の有限のところでは M-ブランチが持ち上がり V-ブランチと融合する傾向にある。

M, V-ブランチ ($x = 0$)

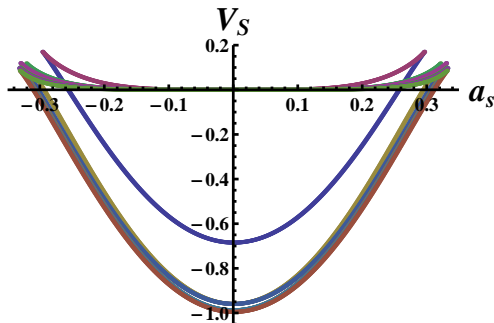
レベルを上げると次のようになる [Sen-Zwiebach(2000)]



レベルを上げてても a_s の有限のところでは M-ブランチが持ち上がり V-ブランチと融合する傾向にある。

M, V-ブランチ ($x = 0$)

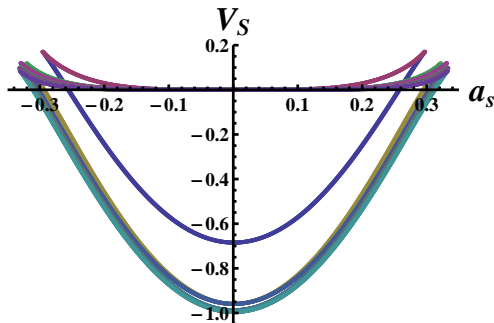
レベルを上げると次のようになる [Sen-Zwiebach(2000)]



レベルを上げてても a_s の有限のところでは M-ブランチが持ち上がり V-ブランチと融合する傾向にある。

M, V-ブランチ ($x = 0$)

レベルを上げると次のようになる [Sen-Zwiebach(2000)]



レベルを上げてても a_s の有限のところでは M-ブランチが持ち上がり V-ブランチと融合する傾向にある。

$x \neq 0$ の場合

Q' の理論 ($x \neq 0$) で同様に $L = 1$ のレベルトランケーションの弦場： $|\Phi\rangle = t_0 c_1 |0\rangle + a_s \alpha_{-1}^{25} c_1 |0\rangle$ をポテンシャル V_S に代入し t_0 に関し極値を求め a_s の関数とすると $a_s \rightarrow 0$ で $V_S = 0$ の M-ブランチと $V_S \neq 0$ の V-ブランチが存在：

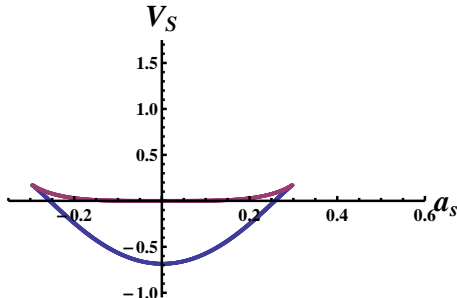


Figure: $x = 0$ のとき

$x \neq 0$ の場合

Q' の理論 ($x \neq 0$) で同様に $L = 1$ のレベルトランケーションの弦場： $|\Phi\rangle = t_0 c_1 |0\rangle + a_s \alpha_{-1}^{25} c_1 |0\rangle$ をポテンシャル V_S に代入し t_0 に関し極値を求め a_s の関数とすると $a_s \rightarrow 0$ で $V_S = 0$ の M -ブランチと $V_S \neq 0$ の V -ブランチが存在：

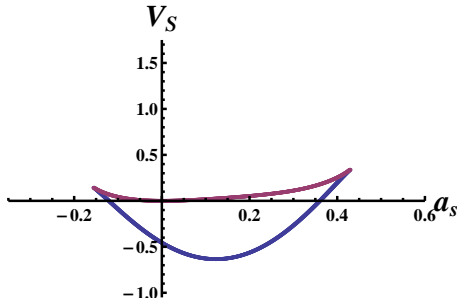


Figure: $x = -0.5$ のとき

x ≠ 0 の場合

Q' の理論 ($x \neq 0$) で同様に $L = 1$ のレベルトランケーションの弦場： $|\Phi\rangle = t_0 c_1 |0\rangle + a_s \alpha_{-1}^{25} c_1 |0\rangle$ をポテンシャル V_S に代入し t_0 に関し極値を求め a_s の関数とすると $a_s \rightarrow 0$ で $V_S = 0$ の M-ブランチと $V_S \neq 0$ の V-ブランチが存在：

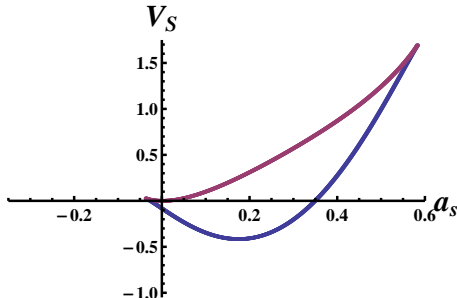
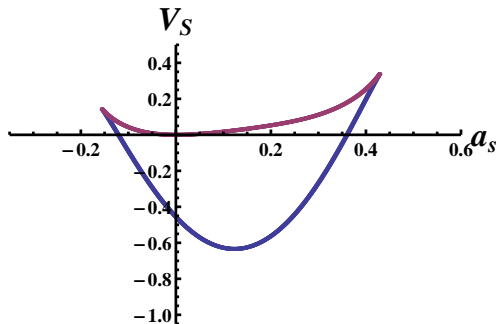


Figure: $x = -1$ のとき

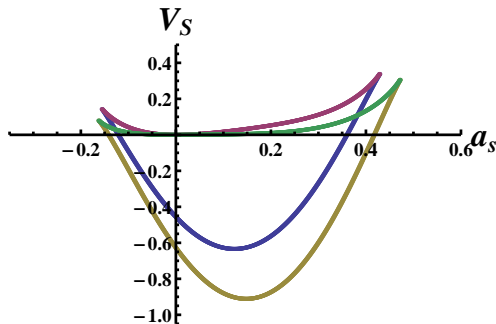
M, V-ブランチ ($x = -0.5$)

$x = -0.5$ の場合、 Q' の理論で $L = 7$ までレベルを上げると次のようになる：



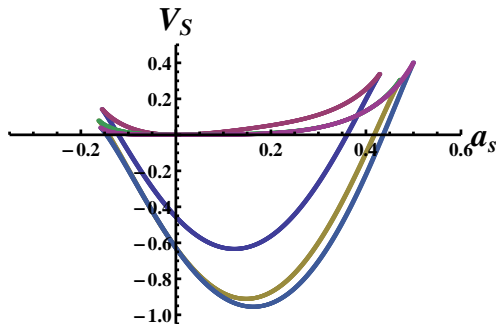
M, V-ブランチ ($x = -0.5$)

$x = -0.5$ の場合、 Q' の理論で $L = 7$ までレベルを上げると次のようになる：



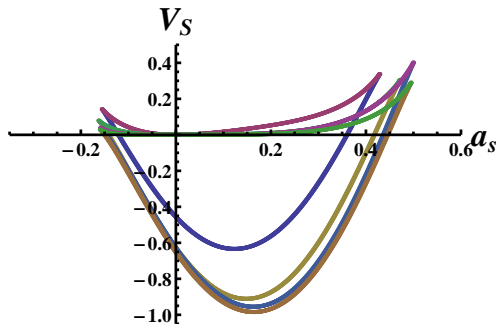
M, V-ブランチ ($x = -0.5$)

$x = -0.5$ の場合、 Q' の理論で $L = 7$ までレベルを上げると次のようになる：



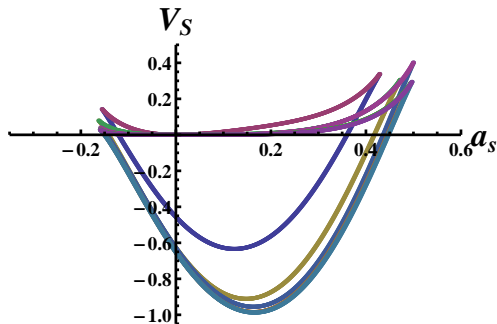
M, V-ブランチ ($x = -0.5$)

$x = -0.5$ の場合、 Q' の理論で $L = 7$ までレベルを上げると次のようになる：



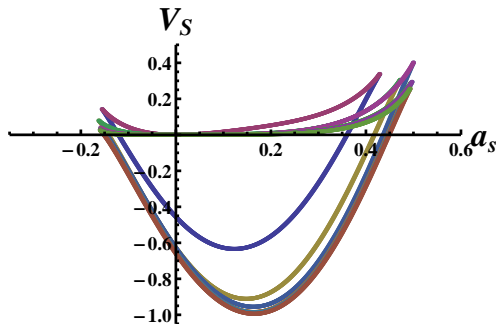
M, V-ブランチ ($x = -0.5$)

$x = -0.5$ の場合、 Q' の理論で $L = 7$ までレベルを上げると次のようになる：



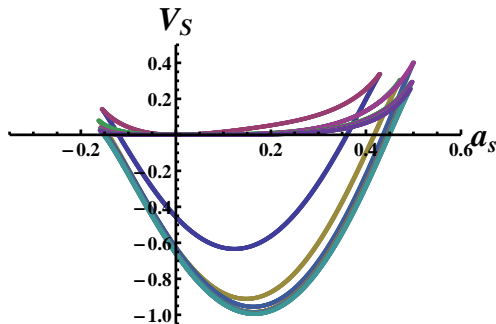
M, V-ブランチ ($x = -0.5$)

$x = -0.5$ の場合、 Q' の理論で $L = 7$ までレベルを上げると次のようになる：



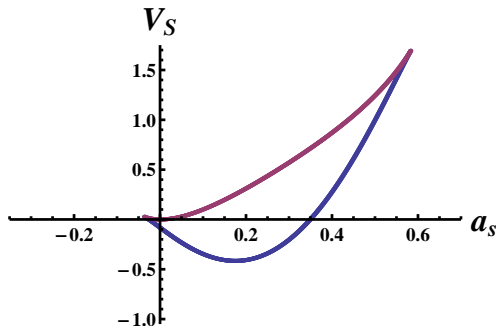
M, V-ブランチ ($x = -0.5$)

$x = -0.5$ の場合、 Q' の理論で $L = 7$ までレベルを上げると次のようになる :



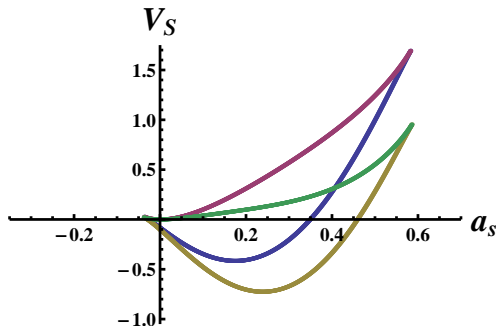
M, V-ブランチ ($x = -1$)

$x = -1$ の場合、 Q' の理論で $L = 7$ までレベルを上げると次のようになる :



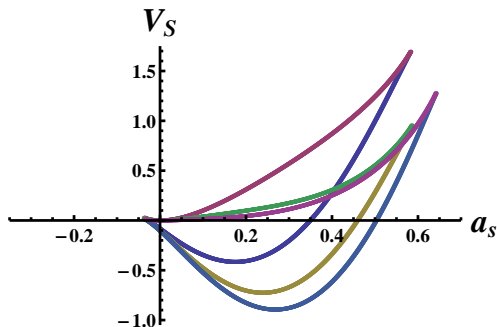
M, V-ブランチ ($x = -1$)

$x = -1$ の場合、 Q' の理論で $L = 7$ までレベルを上げると次のようになる :



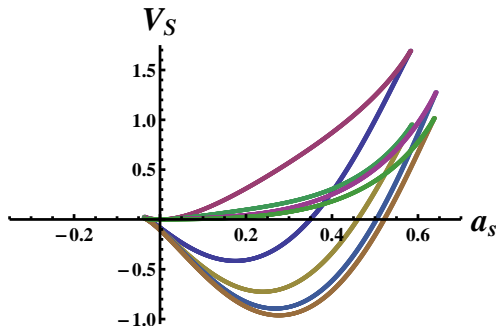
M, V-ブランチ ($x = -1$)

$x = -1$ の場合、 Q' の理論で $L = 7$ までレベルを上げると次のようになる :



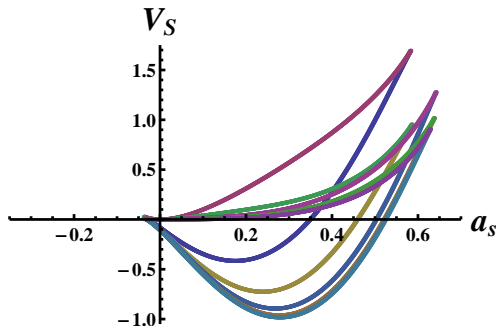
M, V-ブランチ ($x = -1$)

$x = -1$ の場合、 Q' の理論で $L = 7$ までレベルを上げると次のようになる：



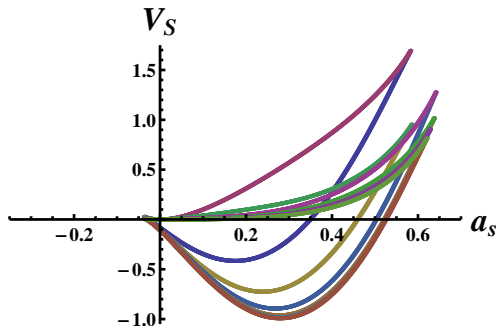
M, V-ブランチ ($x = -1$)

$x = -1$ の場合、 Q' の理論で $L = 7$ までレベルを上げると次のようになる：



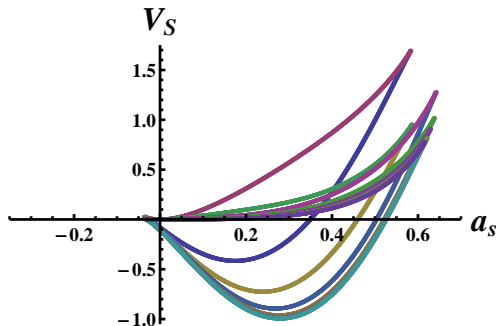
M, V-ブランチ ($x = -1$)

$x = -1$ の場合、 Q' の理論で $L = 7$ までレベルを上げると次のようになる :



M, V-ブランチ ($x = -1$)

$x = -1$ の場合、 Q' の理論で $L = 7$ までレベルを上げると次のようになる：



$|x|$: 大の場合

$|x|$ をさらに大きくしていくと
M-ブランチおよび V-ブランチはどのようなになるのか？

$|x|$ を大きくしたとき、ベクトル場の値 $|a_s|$ に上限はあるの
だろうか？

V-ブランチ ($L = 4$)

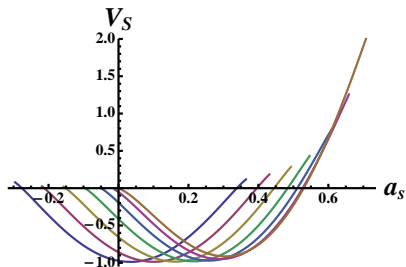


Figure: $x = 0 \sim -1.3$

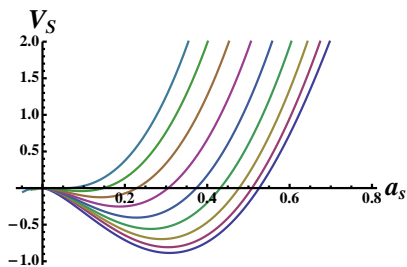


Figure: $x = -1.4 \sim -3.1$

M-ブランチ ($L = 4$)

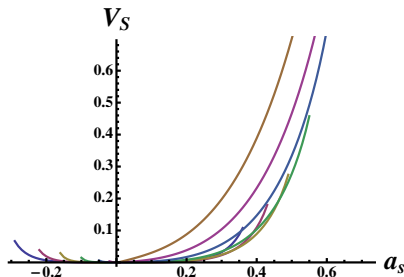


Figure: $x = 0 \sim -1.3$

$x = -1.4$ あたりで形が変わり、さらに $|x|$ を大きくすると、
V-ブランチと同じになる (?)

V-ブランチ ($L = 6$)

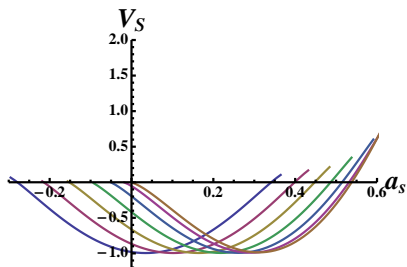


Figure: $x = 0 \sim -1.3$

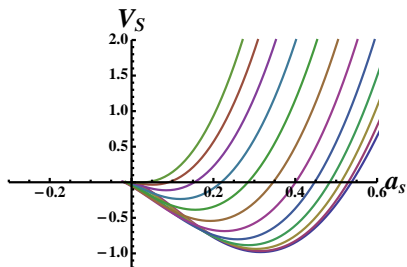


Figure: $x = -1.4 \sim -3.7$

M-ブランチ ($L = 6$)

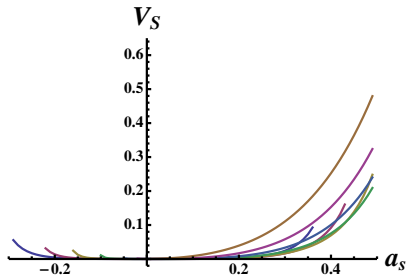


Figure: $x = 0 \sim -1.4$

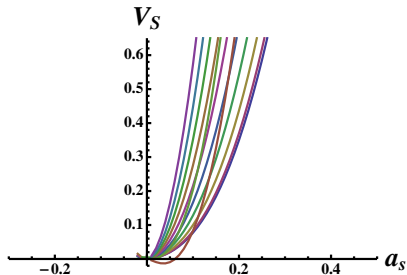


Figure: $x = -1.5 \sim -3.7$

$x = -1.4$ あたりで急に形が変わる。

$|x|$: 大のときの振る舞い

$L = 4, 6$ で $x = 0$ から $x \lesssim -3$ に減らしていったときの振る舞い :

- まず $x = 0$ の M, V -ブランチが右にずれていく。
- V -ブランチの極小値となる a_s が $x \sim -1.5$ から左に戻っていく。
- $x \lesssim -3$ で V -ブランチと M -ブランチの区別できなくなる。
- M -ブランチは $x \lesssim -1.5$ から不安定になる。

まとめ

- identity-based 解 (1-パラメータ x を持つ marginal 解) 周りの Q' の理論におけるタキオン凝縮解を Siegel ゲージ (および Landau ゲージ) で求めた。
- Siegel ゲージではレベルを上げると真空エネルギーが D ブレーン張力と一致する x の領域が広がる。
- この identity-based 解の真空エネルギーがゼロであることと整合。
- Landau ゲージでは $|x|$: 大の振る舞いは微妙。
- Q' の理論で $|x| \lesssim 1$ なら M -ブランチ、 V -ブランチが存在し、有限の a_s で融合する。
- Q' の理論で $|x|$: 大としてもタキオン凝縮解の $|a_s|$ は有限にとどまる。

補足・展望

- Q' の理論におけるタキオン凝縮解の BRS 不変性（運動方程式の残り）の整合性は数値的に確認した。
- ゲージ不変オーバーラップの値も真空エネルギーと整合。
- 解の a_s の x 依存性に対する解析的表式は得られる。
- $|a_s|$ の上限は Siegel ゲージ特有か？
(identity-based 解としては $|x|$ に上限はない。)
- Landau ゲージでのより高いレベルの計算は？
- 超弦の場の理論の場合への拡張は？

BRS 不変性について

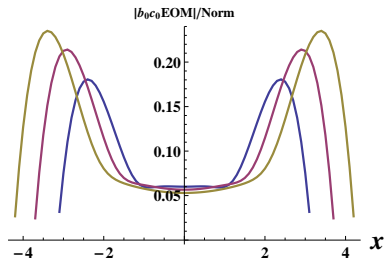


Figure: Q' の理論のタキオン真空解 Φ_T に対する
$$\frac{\|b_0 c_0 (Q' \Phi_T + \Phi_T * \Phi_T)\|}{\|\Phi_T\|}$$

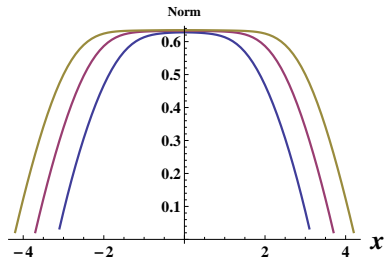


Figure: 左図に対応したタキオン真空解 Φ_T のノルム。
 ($L = 4, 6, 8$ の結果)

レベル大で BRS 不変性（運動方程式の残り）はよくなる。

ゲージ不変オーバーラップについて

$V \sim c\bar{c}\partial X^0\bar{\partial}X^0$ の場合のゲージ不変オーバーラップ
 $O_V(\Phi) = \langle I|V(i)|\Phi \rangle$ の値 :

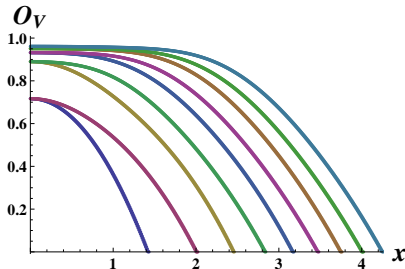


Figure: 左下から順に $L = 0, 1, \dots, 8$ の計算結果

レベルを上げると $\forall x$ で $O_V = 1$ に近づくように振舞う。
→ 真空エネルギーの結果と整合している。

ベクトル場の値の振る舞いについて

実は Q' でのタキオン真空解の a_s の x 依存性を計算できる。
 → Q_B の理論での $L = 26$ まで既知のデータを利用可能！

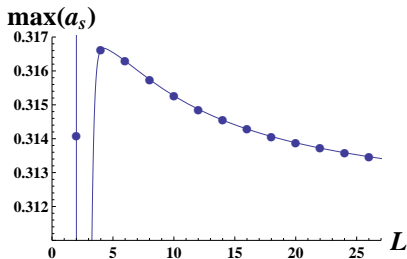


Figure: a_s の最大値。 $L = \infty$ の外挿値は
 $\max(a_s) = 0.3118$

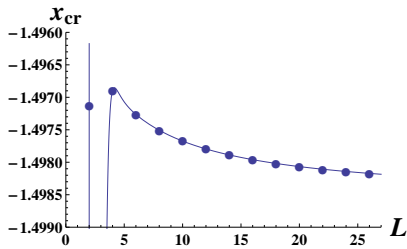


Figure: 左図を与える x の値。 $L = \infty$ の外挿値は
 $x_{cr} = -1.4986$