

非交差経路の数え上げとその応用
—3次元 Young 図形を巡って—

認知情報学系 溝口佑爾

2008/01/31

目次

1	はじめに	4
2	Young 図形についての基本的な事項	5
2.1	Young 図形と整数分割	5
2.1.1	Young 図形	5
2.1.2	整数分割	5
2.1.3	整数分割と格子経路	6
2.1.4	q -二項係数の明示式	8
2.2	3次元 Young 図形と平面分割	12
2.3	差積・Vandermonde 行列式・Krattenthaler の公式	14
2.3.1	差積と Vandermonde 行列式	14
2.3.2	Krattenthaler の公式	16
3	非交差経路の数え上げと LGV 公式	18
3.1	格子経路の組と非交差経路	18
3.2	非交差経路の総数を求める	20
3.3	いくつかの例	23
3.4	LGV 公式の一般形	28
4	3次元 Young 図形の数え上げ	34
4.1	直方体に収まる 3次元 Young 図形の個数の行列式表示	35
4.1.1	非交差経路への帰着	35
4.1.2	行列式の計算	37
4.2	3次元 Young 図形の個数の母関数に対する行列式表示	42
4.3	行列式の計算	46
4.4	巡回対称 3次元 Young 図形	52
5	Schur 関数とその応用	56
5.1	半標準盤と Schur 関数	56
5.2	対称多項式	58
5.3	Jacobi-Trudi 公式	59
5.4	Weyl 公式	62
5.5	3次元 Young 図形の母関数との関係	64
5.6	対称 3次元 Young 図形	66
6	de Bruijn 閉路 の数え上げ	69
6.1	3次元 Young 図形の数え上げを見直す	69

6.2	対称性を持った3次元 Young 図形の数え上げを de Bruijn 閉路で見直す	75
6.2.1	巡回対称3次元 Young 図形の数え上げの見直し	75
6.2.2	完全対称3次元 Young 図形の数え上げ	76
6.2.3	対称3次元 Young 図形の数え上げの見直し	76

1 はじめに

本論文のテーマは非交差経路の数え上げの手法とその様々な応用である。非交差経路の数え上げの問題については Lindström と Gessel, Viennot による数え上げの母関数を表す公式 (LGV 公式) が知られている。LGV 公式は交差する経路も考慮に入れた和を考えて、それらの各項に符号をつけることで交差する経路からの寄与を打ち消す、というアイデアに基づく。この公式を用いることによって、例えば平面上の非交差格子経路の数え上げが行列式の計算に帰着する。そのようにして得られた行列式は Krattenthaler の公式などを用いて具体的に計算することができる。その結果として MacMahon による 3 次元 Young 図形の数え上げの母関数が得られる [2]。

LGV 公式はこの他にも様々な問題に応用される。一例として、組み合わせ論や表現論では Schur 関数と呼ばれるものが重要な役割を果たしているが [4, 7], Schur 関数の行列式表示 (Jacobi-Trudi 公式) を LGV 公式によって導出することもできる。また MacMahon による 3 次元 Young 図形の母関数公式には様々な一般化が知られており、その中には交代符号行列予想と呼ばれる組み合わせ論的な予想の解決とも関係するものがあるが [2], そこでも LGV 公式とその変種 [8] (行列式の代わりに Pfaff 式が現れる) が基本的な役割を果たしている。

本論文では LGV 公式を用いる数え上げの方法とその 3 次元 Young 図形に関連するいくつかの問題への応用を解説する。特に最終的な目標として、最近の研究である Di Francesco らによるある種の閉路 (de Bruijn 閉路と呼ばれる) の数え上げを紹介し、その 3 次元 Young 図形に対する応用を扱う。

本論文の構成は以下の通りである。第 2 章では [1] を参考に Young 図形に関する基本的な事項について触れる。ここで Young 図形の母関数や Young 図形による二項係数の拡張を扱い、3 次元 Young 図形と平面分割について軽く述べる。第 3 章では格子経路における非交差経路の数え上げの問題を扱った後、[8, 6] を参考に一般の経路における非交差経路の問題を LGV 公式の観点から考察する。第 4 章では直方体の内部に制限された 3 次元 Young 図形の個数と、個数に関する母関数を非交差経路の数え上げ問題に帰着させることで行列式表示として求め、その結果として MacMahon の公式も導く。また回転に対する対称性を備えた 3 次元 Young 図形についても扱う。第 5 章では Schur 関数を組み合わせ論的な観点から導入し、Jacobi-Trudi 公式を非交差経路の数え上げに帰着して導出する。またそこから得られる Weyl 公式を使って直方体内部の 3 次元 Young 図形の母関数を 4 章と違うやり方で導出し、さらに対称性を持つ 3 次元 Young 図形の母関数の導出も行う。最後に第 6 章において de Bruijn 閉路の数え上げに関する Di Francesco らの研究 [3] を紹介する。また de Bruijn 閉路の応用として対称性を持つ 3 次元 Young 図形の数え上げを再び扱う。

2 Young 図形についての基本的な事項

この章ではまず Young 図形と整数分割の基本的な事項を説明する. さらに 3 次元 Young についても軽くふれた後, 差積や Vandermonde の行列式などの対称式を使った等式についてもふれる.

2.1 Young 図形と整数分割

2.1.1 Young 図形

Young 図形とは, 1 辺の長さが 1 の正方形の箱を縦横に図のような形で敷き詰めたものである.

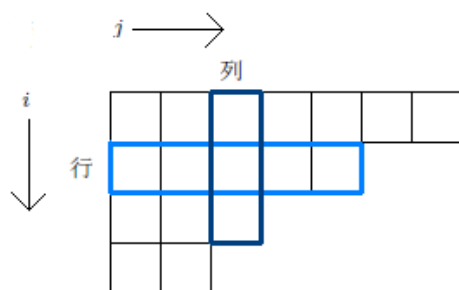


図 1: 分割 $\lambda = (7, 5, 3, 2)$ に対応する Young 図形. 2 番目の行と 3 番目の列をマークした.

図 1 のように, 上部は水平な辺で, 左側は垂直な辺で, そして左下の角から右上の角に至るまでは階段状の縁が囲った形をしている.

Young 図形の行と列を行列にならって次のように定める. Young 図形の i 番目の行とは, Young 図形の中で横一列に端から端まで並んだ部分で上から i 番目のもののことである. Young 図形の j 番目の列とは, Young 図形の中で縦一列に端から端まで並んだ部分で左から j 番目のもののことである.

2.1.2 整数分割

整数分割 (integer partition) とは, 自然数 n を $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m$ というようにいくつかの自然数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ (文献 [1] に従って和因子と呼ぶ) の和に分けたものである. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ が n の分割である, すなわち $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m$ であることを記号 \vdash を使って $\lambda \vdash n$ と表す.

和因子の順番を入れ替えても同一の分割を表すものとみなし, 通常は $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq$

$\dots \geq \lambda_m$ という条件を置く. このように並べると λ に対して, i 行目の正方形の数が λ_i となる Young 図形が 1 対 1 に対応する.

λ の和 $\lambda_1 + \dots + \lambda_m$ を記号 $|\lambda|$ で表す. また, 和因子の個数 m を λ の長さと呼び, 記号 $l(\lambda)$ で表す. $|\lambda|$ は Young 図形の正方形の個数に, $l(\lambda)$ は Young 図形の行の数に対応する.

例外的に 0 の分割も考えて, 記号 \emptyset で表すことにする. \emptyset は空の Young 図形に対応するものである.

以降表記の上では Young 図形と整数分割を同じものと見なす.

自然数 n の分割の総数を分割数 (partition number) と呼び, 記号 $p(n)$ で表す. 分割数を母関数で表せば次のようになる.

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} p(n)q^n = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + \dots$$

和因子に, 使用できる自然数が 1 から l , 使用回数が p 回以内という条件が加わったときの母関数は, 整数 i を使用する回数を t_i として次のように求まる.

$$\begin{aligned} & \sum_{t_1=0}^p q^{t_1} \sum_{t_2=0}^p (q^2)^{t_2} \dots \sum_{t_l=0}^p (q^l)^{t_l} \\ &= \prod_{i=1}^l \sum_{t_i=0}^p (q^i)^{t_i} \\ &= \prod_{i=1}^l \frac{1 - (q^i)^{p+1}}{1 - q^i}. \end{aligned}$$

よって, 使用できる数の制限も使用回数の上限もないときには母関数は, 上式において $l, p \rightarrow \infty$ とすれば求まり (ただし $|q| < 1$ とする),

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^i}$$

となる. さらに $p(0) = 1$ と定めれば, これは

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^i}$$

と書き直せる.

2.1.3 整数分割と格子経路

格子経路とは, 格子上的始点 $(0, 0)$ から出発して, $(1, 0)$ 方向または $(0, 1)$ 方向に距離 1 だけ移動することを繰り返して終点 (m, n) へと至る道のことである.

合計 $m+n$ のステップのうち m ステップが $(1,0)$, 残り n ステップが $(0,1)$ となるので経路の総数は $\binom{m+n}{m}$ となる. 例として $m=3, n=2$ のときの経路全てを図2に示す. 総数は $\binom{3+2}{3} = 10$ 通りである.

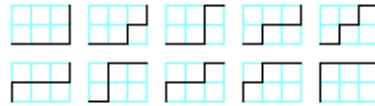


図 2: $m=3, n=2$ となる格子経路を全て挙げたもの.

各格子経路の左上に1辺の長さが1の正方形を敷き詰めれば Young 図形ができる(図3). Young 図形と分割は1対1対応するので, 格子経路に分割が1対1対応

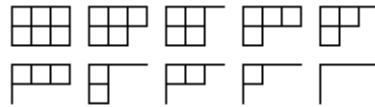


図 3: 図2の10通りの格子経路に正方形を敷き詰めたもの.

する. 例えば図3の10通りの格子経路に対応する分割はそれぞれ,

$$\begin{array}{cccccc} (3,3) & (3,2) & (2,2) & (3,1) & (2,1) & \\ (3) & (1,1) & (2) & (1) & \emptyset & \end{array}$$

となる.

終点が (m, n) のときの格子経路に対応する $\binom{m+n}{m}$ 個の分割の q を変数とした母関数を, 二項係数の組み合わせ論的定義の類似として $\left[\begin{matrix} m+n \\ m \end{matrix} \right]$ と表記することにする. $\left[\begin{matrix} m+n \\ m \end{matrix} \right]$ を q -二項係数と呼ぶ. 例えば先の $m=3, n=2$ のときの q -二項係数 $\left[\begin{matrix} 3+2 \\ 3 \end{matrix} \right]$ は次のように求まる.

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} 3+2 \\ 3 \end{matrix} \right] &= q^{3+3} + q^{3+2} + q^{2+2} + q^{3+1} + q^{2+1} + q^3 + q^{1+1} + q^2 + q^1 + q^0 \\ &= 1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6. \end{aligned}$$

一般に q -二項係数は次のように定義される.

$$\begin{bmatrix} N+M \\ M \end{bmatrix} = \sum_{\lambda \in \mathcal{B}(M,N)} q^{|\lambda|}.$$

ただし $\mathcal{B}(M, N)$ は縦の長さが M で横の長さが N の長方形の形をした Young 図形であり, $\lambda \in \mathcal{B}(M, N)$ は λ に対応する Young 図形がこの長方形に含まれることを表す.

q -二項係数 $\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}$ は $q=1$ としたとき $\binom{m+n}{m}$ と一致する.

2.1.4 q -二項係数の明示式

二項係数の多くの性質が q -二項係数に拡張される. 例えば, 二項係数の対称性

$$\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$$

に対応する q -二項係数の対称性

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix}$$

は, Young 図形において行と列を入れ替える操作 (この操作によって得られる Young 図形はもとの Young 図形の共役と呼ばれる) を考えれば自然に導かれる. ここでは, 二項係数の明示式

$$\binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$$

に対応する q -二項係数の明示式を求めたい.

二項係数の明示式は, 二項係数の再帰的關係

$$\binom{m+n}{m} = \binom{m+n-1}{m-1} + \binom{m+n-1}{n-1}$$

と境界条件

$$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$$

によって復元できる. そこで二項係数の再帰的關係と境界条件に対応するような q -二項係数の再帰的關係と境界条件を利用して q -二項係数の明示式を求めるという方針が得られる.

公式 1 (q -二項係数の再帰的關係)

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + q^m \begin{bmatrix} m+n-1 \\ n-1 \end{bmatrix}.$$

証明

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} &= \sum_{\lambda \subseteq n^m} q^{|\lambda|} \\
 &= \sum_{\lambda \subseteq n^{m-1}} q^{|\lambda|} + \sum_{\lambda=(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \subseteq n^m, \lambda_m \geq 1} q^{|\lambda|} \\
 &= \sum_{\lambda \subseteq n^{m-1}} q^{|\lambda|} + \sum_{\lambda=(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \subseteq n^m, \lambda_m \geq 1} q^m q^{|\lambda_1-1, \lambda_2-1, \dots, \lambda_{m-1}|} \\
 &= \sum_{\lambda \subseteq n^{m-1}} q^{|\lambda|} + q^m \sum_{\mu \subseteq (n-1)^m} q^{|\mu|} \\
 &= \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + q^m \begin{bmatrix} m+n-1 \\ n-1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

q.e.d.

この証明では図 4 において♡部分に正方形が詰まっているかどうかで場合分けをした. ♡部が空である Young 図形に関しては, m 番目の行を取り除いてしまう

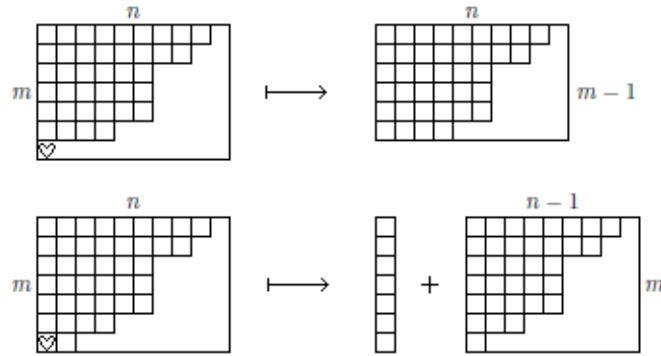


図 4:

ことが出来るので, 横の長さ n , 縦の長さ $m-1$ の長方形に入っているということが出来る. 他方♡部に正方形が詰まっている Young 図形に関しては, 1 番目の列と 2 列目以降を分ければ $1 \times m$ の長方形と, 横の長さ $n-1$, 縦の長さ m の長方形に入っている Young 図形とを分けて数えることに帰着する.

公式 2 (q -二項係数の境界条件)

$$\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} = 1.$$

証明 どちらも長方形ではなく線分となるので、可能な経路は \emptyset に対応するものだけである。よって、母関数は $q^{|\emptyset|} = 1$ となる。

q.e.d

q -二項係数の再帰的關係と境界条件から q -二項係数の明示式を求める。

公式 3 (q -二項係数の明示式)

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{(1-q^{m+n})(1-q^{m+n-1})\cdots(1-q^{n+1})}{(1-q^m)\cdots(1-q)}$$

証明

$$(*) : \begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^m \frac{1-q^{n+i}}{1-q^i}$$

を演繹的に示す。

$m+n=1$ のとき、右辺は 1 であり、また $m=0$ か $n=0$ なので境界条件から左辺も 1 となるので $(*)$ は成立する。

ある l について、 $m+n=l$ を満たす全ての $m, n \geq 0$ について $(*)$ が成立すると仮定する。このとき q -二項定理の再帰的關係より、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m+n+1 \\ m+1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} + q^{m+1} \begin{bmatrix} m+n \\ n-1 \end{bmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^m \frac{1-q^{n+i}}{1-q^i} + q^{m+1} \prod_{i=1}^{m+1} \frac{1-q^{n-1+i}}{1-q^i} \\ &= \frac{(1-q^{m+1}) \prod_{i=1}^m (1-q^{n+i})}{\prod_{i=1}^{m+1} (1-q^i)} + q^{m+1} \frac{(1-q^n) \prod_{i=1}^m (1-q^{n+i})}{\prod_{i=1}^{m+1} (1-q^i)} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^m (1-q^{n+i})}{\prod_{i=1}^{m+1} (1-q^i)} \left((1-q^{m+1}) + q^{m+1}(1-q^n) \right) \\ &= \frac{\prod_{i=1}^m (1-q^{n+i})}{\prod_{i=1}^{m+1} (1-q^i)} (1-q^{m+n+1}) \\ &= \prod_{i=1}^{m+1} \frac{1-q^{n+i}}{1-q^i}. \end{aligned}$$

よって $m+n=l+1$ を満たす全ての $m, n \geq 0$ についても $(*)$ が成立する。

q.e.d.

q -二項係数の明示式的具体例として $m=3, n=2$ のときの q -二項係数 $\begin{bmatrix} 3+2 \\ 3 \end{bmatrix}$

を求めると

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 3+2 \\ 3 \end{bmatrix} &= \frac{(1-q^5)(1-q^4)(1-q^3)}{(1-q^3)(1-q^2)(1-q)} \\
 &= \frac{1-q^5}{1-q} \frac{1-q^4}{1-q^2} \\
 &= (1+q+q^2+q^3+q^4)(1+q^2) \\
 &= 1+q+2q^2+2q^3+2q^4+q^5+q^6
 \end{aligned}$$

となり, 先の値と一致する.

q -二項係数の明示式は

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{(1-q^{m+n})(1-q^{m+n-1})\cdots(1-q)}{(1-q^m)\cdots(1-q)(1-q^n)\cdots(1-q)}$$

となることを示しているが,

$$1+q+q^2+\cdots+q^{i-1} = \frac{1-q^i}{1-q}$$

を整数 i の q -類似と考えるとこの式は二項係数の明示式 $\binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$ の自然な拡張であることがわかる.

また

$$(x; q)_k = (1-x)(1-xq)(1-xq^2)\cdots(1-xq^{k-1})$$

という記法を使えば, q -二項係数の明示式は

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{(q; q)_{m+n}}{(q; q)_m (q; q)_n} = \frac{(q^{n+1}; q)_m}{(q; q)_m}$$

と表せる.

明示式を使えば q -二項係数において $m, n \rightarrow \infty$ とすることによって, 分割数についての母関数が次のようにして得られる.

$$\begin{aligned}
 \lim_{m, n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^m \frac{1-q^{n+i}}{1-q^i} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^m \frac{1}{1-q^i} \\
 &= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^i}.
 \end{aligned}$$

格子経路については次章でより一般的な定義を与えた上で再び考察する.

2.2 3次元 Young 図形と平面分割

3次元 Young 図形とは, 図のように3次元空間の第一象限において原点のある隅に向かって一辺の長さ1の立方体を, $(-1, -1, -1)$ 方向の重力に対して安定になるように隙間なく積んだものである.

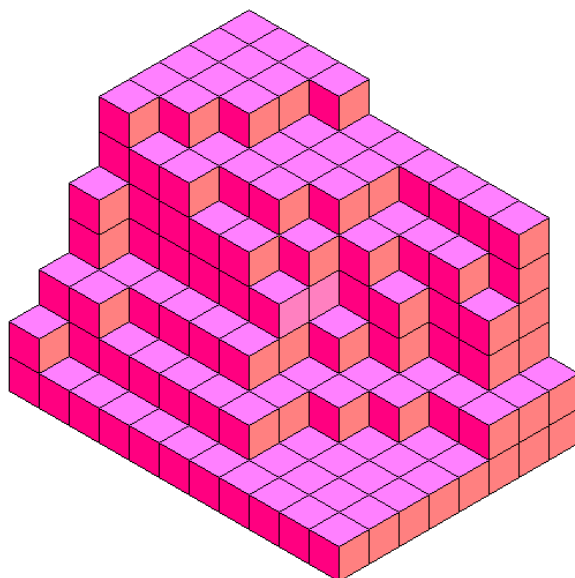


図 5: 3次元 Young 図形の例

これまでは2次元的な Young 図形を直線的な整数分割に対応させてきたが, 3次元 Young 図形には平面的な整数分割に対応させる. 平面的な整数分割 (平面分割, plane partition) とは整数分割の平面版であり, 与えられた整数 n を次のような条件を満たす和因子 π_{ij} に分割する.

$$\pi = (\pi_{ij})_{i,j \geq 1}, \pi_{ij} \in \mathbb{Z}$$

$$\pi_{ij} \geq \pi_{i+1,j} \geq 0, \pi_{ij} \geq \pi_{i,j+1} \geq 0.$$

平面分割を3次元 Young 図形に対応付けるには, 平面分割の各和因子の場所に和因子の値だけ立方体を積み上げていけばよい. 例えば, 図5の3次元 Young 図形は,

$$\left(\begin{array}{cccccccccc} 7 & 7 & 7 & 7 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 2 \\ 7 & 7 & 7 & 6 & 6 & 6 & 5 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 7 & 6 & 6 & 6 & 5 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 7 & 6 & 6 & 6 & 5 & 4 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 7 & 6 & 6 & 5 & 5 & 4 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

に関しては母関数の公式

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^i}$$

があるが, $pp(n)$ の母関数の公式としては次の MacMahon の公式が知られている.

定理 1 (MacMahon の平面分割公式)

$$\sum_{n=0}^{\infty} pp(n)q^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^i)^i}, \quad \text{ただし } |q| < 1, \text{ また } pp(0) = 1 \text{ と定めた.}$$

MacMahon の公式の証明は本論の一つの山場である. この証明は 4 章の最後に与えられる.

2.3 差積・Vandermonde 行列式・Krattenthaler の公式

2 章の最後に, Young 図形とは直接的な関係はないが後に使う道具として重要になる差積周辺的话题を押さえておこう.

2.3.1 差積と Vandermonde 行列式

定理 2 $f(x_1, \dots, x_n)$ が d 次の交代多項式であれば,

$$\frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)}$$

は $d - \frac{n(n-1)}{2}$ 次の対称多項式である.

証明 まず f を x_1 についての多項式と見る. f を $x_1 - x_2$ で割ったときの商を $g_2(x_1, \dots, x_n)$, 余りを $r(x_2, \dots, x_n)$ とする.

$$(*) : f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - x_2)g_2(x_1, \dots, x_n) + r(x_2, \dots, x_n).$$

このとき,

$$f(x_2, x_1, \dots, x_n) = -f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (f \text{ は交代式なので})$$

に $x_1 = x_2$ を代入すれば,

$$\begin{aligned} f(x_2, x_2, \dots, x_n) &= -f(x_2, x_2, \dots, x_n) \\ \Leftrightarrow f(x_2, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

となるので, (*) に $x_1 = x_2$ を代入すれば $r(x_2, \dots, x_n) = 0$ であることがわかる.

以上から

$$(**): f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - x_2)g_2(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

先と同様にして, $f(x_3, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$ であることがわかるので, (**) に $x_1 = x_3$ を代入すると

$$0 = (x_3 - x_2)g_2(x_3, x_2, x_3, \dots, x_n).$$

よって, $g_2(x_3, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$ となるので, g_2 は $x_1 - x_3$ で割り切れる. つまり, このときの商を $g_3(x_1, \dots, x_n)$ とすれば

$$g_2(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - x_3)g_3(x_1, \dots, x_n)$$

となる. よって, f は $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)$ で割り切れる.

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)g_3(x_1, \dots, x_n).$$

これを続けると,

$$f(x_1, \dots, x_n) = h_1(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=2}^n (x_1 - x_i).$$

となる.

次に, f を x_2 についての多項式と見て, $x_2 = x_3, x_2 = x_4, \dots, x_2 = x_n$ として先の操作を続けると,

$$f(x_1, \dots, x_n) = h_2(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=2}^n (x_1 - x_i) \prod_{i=3}^n (x_2 - x_i).$$

を得る.

同様の操作を x_{n-1} まで続けると,

$$f(x_1, \dots, x_n) = h_{n-1}(x_1, \dots, x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

を得る. $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ は $\frac{n(n-1)}{2}$ 次の交代式なので, h_{n-1} は $d - \frac{n(n-1)}{2}$ 次の対称多項式であることがわかる.

q.e.d.

公式 4 (Vandermonde 行列式)

$$\det(x_j^{n-i}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

証明 $\det(x_j^{n-i})$ は $\frac{n(n-1)}{2}$ 次の交代式なので、定理 2 より

$$\frac{\det(x_j^{n-i})}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)} = C \quad (C \text{ は定数})$$

となる. $x_1^{n-1} x_2^{n-2} \cdots x_{n-1}$ の係数を比べて $C = 1$ を得る.
q.e.d.

2.3.2 Krattenthaler の公式

定理 2 を使うことで、Krattenthaler の公式を導くことが出来る. Krattenthaler の公式は後に行列式の計算で使う.

公式 5 (Krattenthaler の公式)

$$\det \left(\left(\prod_{k=j+1}^n (x_i + a_k) \prod_{k=2}^j (x_i + b_k) \right)_{i,j=1}^n \right) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \prod_{2 \leq i \leq j \leq n} (b_i - a_j).$$

行列式の中身

$$\left(\prod_{k=j+1}^n (x_i + a_k) \prod_{k=2}^j (x_i + b_k) \right)_{i,j=1}^n$$

は、次のような行列を表現したものである.

$$\begin{pmatrix} (x_1 + a_n) \cdots (x_1 + a_2) & \cdots & (x_1 + a_n) \cdots (x_1 + a_{j+1})(x_1 + b_j) \cdots (x_1 + b_2) & \cdots & (x_1 + b_n) \cdots (x_1 + b_2) \\ (x_2 + a_n) \cdots (x_2 + a_2) & \cdots & (x_2 + a_n) \cdots (x_2 + a_{j+1})(x_2 + b_j) \cdots (x_2 + b_2) & \cdots & (x_2 + b_n) \cdots (x_2 + b_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_n + a_n) \cdots (x_n + a_2) & \cdots & (x_n + a_n) \cdots (x_n + a_{j+1})(x_n + b_j) \cdots (x_n + b_2) & \cdots & (x_n + b_n) \cdots (x_n + b_2) \end{pmatrix}$$

証明 $\det \left(\left(\prod_{k=j+1}^n (x_i + a_k) \prod_{k=2}^j (x_i + b_k) \right)_{i,j=1}^n \right)$ は x_1, \dots, x_n についての交代式であるので、定理 2 より、

$$\frac{\det \left(\left(\prod_{k=j+1}^n (x_i + a_k) \prod_{k=2}^j (x_i + b_k) \right)_{i,j=1}^n \right)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)} = C \quad (C = \text{定数})$$

とおける. というのも、 $\det \left(\prod_{k=j+1}^n (x_i + a_k) \prod_{k=2}^j (x_i + b_k) \right)_{i,j=1}^n$ は x_1, \dots, x_n は $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ と同じく、各 x_i について $n-1$ 次の多項式なので、 C は x_1, \dots, x_n について独立となるからである.

$2 \leq i \leq n$ にである i について $x_i = -a_i$ と代入することで、 C の値を求める。

まず $x_i = -a_i, (2 \leq i \leq n)$ としたときの、分子 $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ の値は、

$$\begin{aligned} & \prod_{j=2}^n (x_1 + a_j) \prod_{i=2}^n \prod_{j=i+1}^n (-a_i + a_j) \\ &= \prod_{k=2}^n (x_1 + a_k) \prod_{2 \leq i < j \leq n} (-a_i + a_j) \end{aligned}$$

となる。

次に $x_i = -a_i, (2 \leq i \leq n)$ としたときの分母 $\det \left(\prod_{k=j+1}^n (x_i + a_k) \prod_{k=2}^j (x_i + b_k) \right)_{i,j=1}^n$ の値を求める。このとき、行列 $\left(\prod_{k=j+1}^n (-a_i + a_k) \prod_{k=2}^j (-a_i + b_k) \right)_{i,j=1}^n$ は $i > j$ となる要素が全て 0 で、対角線の要素の i 番目の値が

$$\begin{cases} \prod_{k=2}^n (x_1 + a_k), & i = 1 \text{ のとき} \\ \prod_{k=i+1}^n (-a_i + a_k) \prod_{k=2}^i (-a_i + b_k), & i \geq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

である上三角行列となる。よってこのときの分母の値は、

$$\begin{aligned} & \prod_{k=2}^n (x_1 + a_k) \prod_{i=2}^n \left(\prod_{k=i+1}^n (-a_i + a_k) \prod_{k=2}^i (-a_i + b_k) \right) \\ &= \prod_{k=2}^n (x_1 + a_k) \prod_{2 \leq i < j \leq n} (-a_i + a_j) \prod_{2 \leq i \leq j \leq n} (-a_i + b_j) \end{aligned}$$

となる。

よって $x_i = -a_i, (2 \leq i \leq n)$ としたときの

$$\frac{\det \left(\left(\prod_{k=j+1}^n (x_i + a_k) \prod_{k=2}^j (x_i + b_k) \right)_{i,j=1}^n \right)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)}$$

の値は

$$\prod_{2 \leq i < j \leq n} (b_j - a_i)$$

となり、これが C に等しいことがわかる。

以上から、公式 5 は証明された。

3 非交差経路の数え上げと LGV 公式

3次元 Young 図形の数え上げや母関数を求める問題に対する強力なアプローチの一つとして、非交差経路の数え上げに帰着させる方法がある。非交差経路の数え上げの問題については、Lindström-Gessel-Viennot 公式 (以下 LGV 公式) による解決が知られている。ここでは Stembridge [8], 香取 [6] を参考にしながら LGV 公式を扱う。

3.1 格子経路の組と非交差経路

- 格子経路とは、格子上の始点 α から出発して、 $(1, 0)$ 方向または $(0, 1)$ 方向に距離 1 だけ移動することを繰り返して終点 β へと至る道のことである。

始点 α と終点 β を固定したときの格子経路の集合を $\mathcal{P}(\alpha, \beta)$ と表す。 $\mathcal{P}(\alpha, \beta)$ に含まれる経路の総数を $|\mathcal{P}(\alpha, \beta)|$ で表すことにする。

$|\mathcal{P}(\alpha, \beta)|$ は組み合わせの数で与えられる。例えば $\alpha = (0, 0), \beta = (m, n)$ のとき、合計 $m + n$ のステップのうち m ステップが $(1, 0)$ 、残り n ステップが $(0, 1)$ となるので経路の総数は

$$|\mathcal{P}((0, 0), (m, n))| = \binom{m+n}{m}$$

となる。同様にして一般のときには、 $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y), \beta = (\beta_x, \beta_y)$ として総数を表すと

$$|\mathcal{P}(a, b)| = \binom{|\beta_x - \alpha_x| + |\beta_y - \alpha_y|}{|\beta_x - \alpha_x|}$$

となる。

- N 本の格子経路の組 (P_1, \dots, P_N) を、 $\mathbb{P} = (P_1, \dots, P_N)$ と定める。このように、経路の組は太字で \mathbb{P} と表す。

N 個の始点の組 $\mathbb{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ と N 個の終点の組 $\mathbb{B} = (\beta_1, \dots, \beta_N)$ を指定する。このとき \mathbb{A} の各点 α_i から \mathbb{B} のある点 β_j に至る経路の組を考える。ただし、終点 $(\beta_1, \dots, \beta_N)$ は互いに異なるものとする。このような経路の組全体の集合 $\mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ を

$$\mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \{\mathbb{P} = (P_1, \dots, P_N) \mid P_i \in \mathcal{P}(\alpha_i, \beta_{\sigma(i)}), i = 1, 2, \dots, N\}.$$

と表す。ここで、経路の組は終点が置換されたものも含むので始点 α_i に対して終点を $\beta_{\sigma(i)}$ と表している。 σ は $\{1, 2, \dots, N\}$ の置換となる。つまり $\sigma \in S_N$ である。ただし S_N で $\{1, 2, \dots, N\}$ の置換の集合全体を表す。 σ は $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ に対して一意に決まるので、そのことを強調する意味でこの σ を $\sigma_{\mathbb{P}}$ と表す。

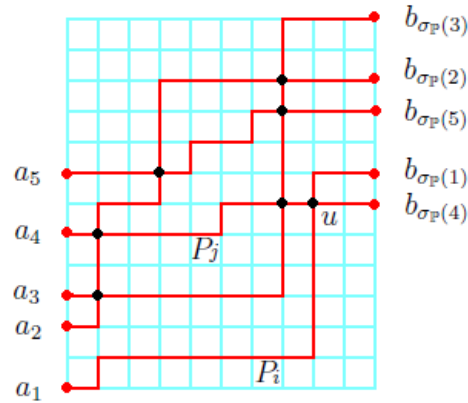


図 8: 交差する経路の組の例

- 経路の組 \mathbb{P} が交差するとは、 \mathbb{P} に含まれるいずれか 2 つの経路が交差することである。 \mathbb{P} 交差しないとき、経路の組 \mathbb{P} は非交差であるという。
- \mathbb{A} と終点の組 \mathbb{B} を固定したときの N 本の交差経路の組全体の集合 $\mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ を

$$\mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \{ \mathbb{P} \in \mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \mid \mathbb{P} \text{ は交差する} \}$$

と表す。始点の組 \mathbb{A} と終点の組 \mathbb{B} を固定したときの N 本の非交差経路の組全体の集合 $\mathcal{P}_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ を

$$\mathcal{P}_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \{ \mathbb{P} \in \mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \mid \mathbb{P} \text{ は交差しない} \}.$$

と表す。またその総数を $|\mathcal{P}_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})|$ と表す。

これまでの定義から明らかに、 $\mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ は $\mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ と $\mathcal{P}_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ の二つの部分に分かれる。つまり

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B}) &= \mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \cup \mathcal{P}_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}), \\ \mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \cap \mathcal{P}_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) &= \emptyset. \end{aligned}$$

となる。終点が置換された経路の組は必ず交差経路の組となるので、 $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ であれば $\sigma_{\mathbb{P}} = \text{id}$, となる。

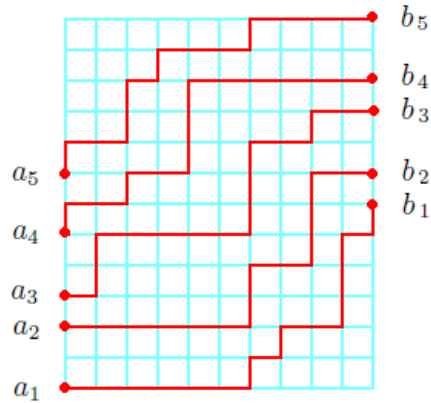


図 9: 非交差経路の例

3.2 非交差経路の総数を求める

非交差経路の総数を求めるにはどうすればよいだろうか.

$N = 1$ のときは単純な格子経路となるので, 組み合わせの数として求めることができる. $N \geq 2$ のときは, 素朴には $\prod_{i=1}^n |\mathcal{P}(A_i, B_i)|$ から交差するものを除いて非交差経路を求めるという方法が思いつく. しかしこのようなやり方では交差する経路の総数がわからず, すぐの方針がたたなくなる.

ではどのようにすれば非交差経路を数え上げることができるのか. この問題は LGV 公式の特別な場合として求めることができる. LGV 公式は, 交差する経路も考慮に入れてそれらの各項に符号をつけることで, 交差するものを打ち消すというアイデアに基づいたものである. このアイデアによって, 非交差経路の総数は

$$\sum_{\sigma \in S_N} \pm \prod_{i=1}^N |\mathcal{P}(A_i, B_{\sigma(i)})|$$

という形で求められることになる. この式にみられるように, LGV 公式は $\sigma(\mathbb{P}) = \text{id}$ となる交差経路の組の消去を, 終点の置換された経路の組 ($\sigma(\mathbb{P}) \neq \text{id}$ となる経路の組) をも考慮に入れることで実現するのである.

定理 3 (Lindström-Gessel-Viennot 公式 (格子経路で重み 1 の場合))

$$|\mathcal{P}_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})| = \det \left(|\mathcal{P}(A_i, B_j)| \right)_{i,j=1}^N.$$

証明

- $\sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) = 0$ であることを示す.
写像 $\iota: \mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \rightarrow \mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ を定義する.

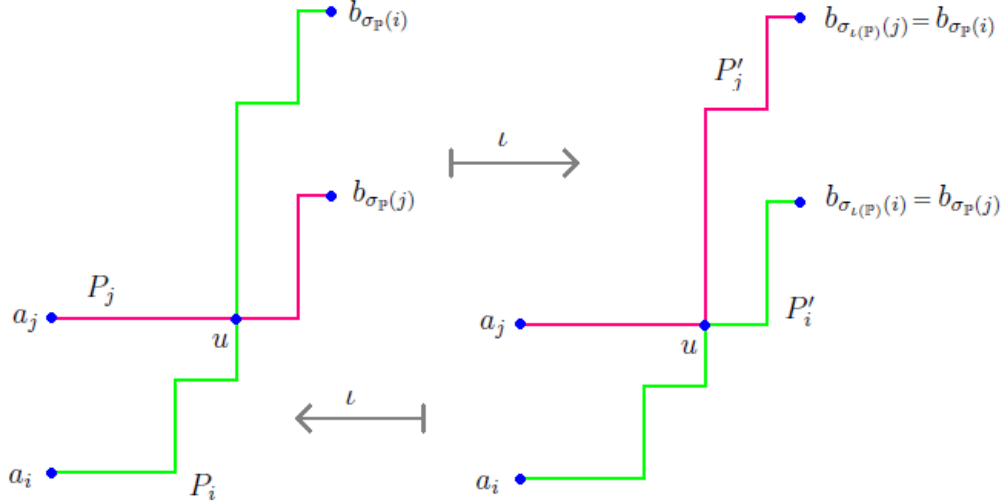


図 10: ι によって交差する格子経路を交換する

格子点全体に次のような全順序を与える.

$$(m, n) > (m', n') \Leftrightarrow m > m' \text{ or } m = m' \& n > n'.$$

そして交点のうち、順序が一番大きくなる点を u と名づける. u を通って交差している全ての経路の中で添え字の順序が一番小さいものを i , 二番目に小さいものを j と名づける.

$P_i(\rightarrow u)$ によって P_i のうち始点から u までの経路を表す, また $P_i(u \rightarrow)$ は P_i のうち u から終点までの経路である. 経路 Q の終点かと経路 R の始点に等しいとき, その連結を $Q \cdot R$ で表す. このとき $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ に対して, $\iota(\mathbb{P})$ を次のように定義する (図 10).

$$\iota(\mathbb{P}) = \mathbb{P}' = (P'_1, \dots, P'_N) \in \mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}).$$

$$P'_i = P_i(\rightarrow u) \cdot P_j(u \rightarrow),$$

$$P'_j = P_j(\rightarrow u) \cdot P_i(u \rightarrow),$$

$$P'_k = P_k, (k \neq i, j).$$

このように定めた ι は対合 (involution) となる. つまり,

$$\iota \cdot \iota = \text{id}$$

を満たす. よって, \mathbb{P} と $\iota(\mathbb{P})$ をペアとして扱って, $\mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ を次のような条件を満たす2つの部分集合 $\mathcal{P}_N^{\text{int}1}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ と $\mathcal{P}_N^{\text{int}2}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ に分割することができる.

$$\begin{aligned}\iota(\mathcal{P}_N^{\text{int}1}(\mathbb{A}, \mathbb{B})) &= \mathcal{P}_N^{\text{int}2}(\mathbb{A}, \mathbb{B}), \quad \iota(\mathcal{P}_N^{\text{int}2}(\mathbb{A}, \mathbb{B})) = \mathcal{P}_N^{\text{int}1}(\mathbb{A}, \mathbb{B}), \\ \mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) &= \mathcal{P}_N^{\text{int}1}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \cup \mathcal{P}_N^{\text{int}2}(\mathbb{A}, \mathbb{B}), \\ \mathcal{P}_N^{\text{int}1}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \cap \mathcal{P}_N^{\text{int}2}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) &= \emptyset.\end{aligned}$$

さらに, ι によって $\sigma_{\mathbb{P}}$ は, (i, j) を i と j の置換として

$$\sigma_{\mathbb{P}} \mapsto \sigma_{\iota(\mathbb{P})} = (\sigma_{\mathbb{P}}(i) \sigma_{\mathbb{P}}(j)) \cdot \sigma_{\mathbb{P}},$$

と変換されるので, $\sigma_{\mathbb{P}}$ の符号は

$$\text{sgn}(\sigma_{\iota(\mathbb{P})}) = -\text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}).$$

と変わる. 以上から,

$$\begin{aligned}& \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) \\ &= \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{int}1}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) + \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{int}2}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) \\ &= \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{int}1}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) + \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{int}1}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\iota(\mathbb{P})}) \\ &= \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{int}1}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) - \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{int}1}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) \\ &= 0\end{aligned}$$

となることがわかる.

- $\sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) = |\mathcal{P}_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})|$ であることを示す.

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) &= \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) + \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) \\ &= \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) \quad \left(\sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) w(\mathbb{P}) = 0 \text{ より} \right) \\ &= \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} 1 \quad (\sigma_{\mathbb{P}} = \text{id} \text{ より}) \\ &= |\mathcal{P}_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})|.\end{aligned}$$

- $\sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) = \det(|\mathcal{P}(\alpha_i, \beta_j)|)_{i,j=1}^N$ であることを示す.

ここで、和 $\sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}})$ を置換 σ についての和としてとらえれば、

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) &= \sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn}(\sigma) \sum_{\mathbb{P} \in \{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \mid \sigma_{\mathbb{P}} = \sigma\}} 1 \\ &= \sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^N |\mathcal{P}(\alpha_i, \beta_{\sigma(i)})|. \end{aligned}$$

最後に行列式の定義から、

$$\sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^N |\mathcal{P}(\alpha_i, \beta_{\sigma(i)})| = \det\left(|\mathcal{P}(\alpha_i, \beta_j)|\right)_{i,j=1}^N$$

となる.

q.e.d.

3.3 いくつかの例

この節では後に帰着される非交差経路を中心に LGV 公式適用の具体例を挙げる. ここから先は格子経路の進む方向は $(1, 0)$ と $(0, 1)$ に限らず, $(-1, 0)$ 方向と $(0, 1)$ 方向に進む格子経路なども考えることにする.

- i) 始点と終点を $\alpha_i = (i, 1), \beta_j = (1, j), 1 \leq i, j \leq a$ と設定する. このとき

$$|\mathcal{P}(\alpha_i, \beta_j)| = \binom{i+j-2}{i-1}$$

となるので、非交差経路の総数は

$$|\mathcal{P}_a^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})| = \det\left(\binom{i+j-2}{i-1}\right)_{i,j=1}^a$$

と表される. 以降

$$T_{ij} = \binom{i+j-2}{i-1}$$

と表記し, T_{ij} を成分とする $a \times b$ 行列を

$$T(a, b) = (T_{ij})_{1 \leq i \leq a, 1 \leq j \leq b}$$

と表すことにする.

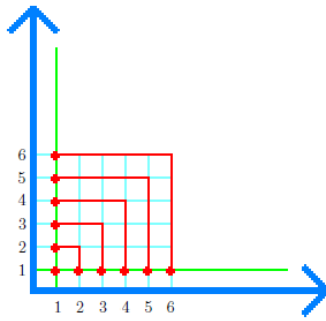


図 11: i) $a = 6$ としたときの非交差経路の例

この表記を使えば先の非交差経路の総数は

$$|\mathcal{P}_a^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})| = \det T(a, a)$$

と表される. 11 からわかるとおり, この設定では非交差経路は 1 通りしかできない. 実際 $\det T(a, a)$ の値は必ず 1 である (掃きだし法によって必ず対角成分が全て 1 の三角行列に変形できる).

ii) 始点と終点を $\alpha_i = (a_i, 1), \beta_j = (1, b_j), 1 \leq i, j \leq m, 1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_m \leq a, 1 \leq b_1 \leq \dots \leq b_m \leq b$ と設定する. このとき

$$|\mathcal{P}(\alpha_i, \beta_j)| = \binom{\alpha_i + \beta_j - 2}{\alpha_i - 1} = T_{\alpha_i \beta_j}$$

となるので, 非交差経路の総数は

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}_m^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})| &= \det \left(\binom{\alpha_i + \beta_j - 2}{\alpha_i - 1} \right)_{i,j=1}^m \\ &= \det \left(T(a, b)_{\alpha_i \beta_j} \right)_{i,j=1}^m \end{aligned}$$

と求まる.

iii) 始点と終点を $\alpha_i = (i, 1), \beta_j = (j, j), 1 \leq i, j \leq a$ と設定する. このとき

$$|\mathcal{P}(\alpha_i, \beta_j)| = \binom{i-1}{j-1} = \binom{i-1}{i-j}$$

となるので, 非交差経路の総数は

$$|\mathcal{P}_a^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})| = \det \left(\binom{i-1}{j-1} \right)_{i,j=1}^a$$

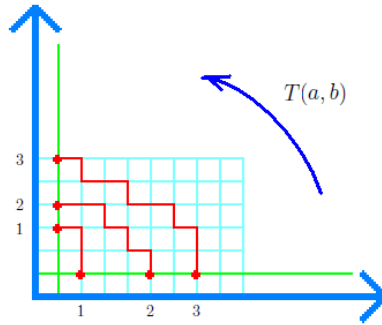


図 12: ii) $m = 3, a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 7, b_1 = 3, b_2 = 4, b_3 = 6$ としたときの非交差経路の例

と求まる. 以降

$$W_{ij} = \binom{i-1}{j-1}$$

と表記し, W_{ij} を成分とする $a \times b$ 行列を

$$W(a, b) = (W_{ij})_{1 \leq i \leq a, 1 \leq j \leq b}$$

と表すことにする.

この表記を使えば先の非交差経路の総数は

$$|\mathcal{P}_a^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})| = \det W(a, a)$$

と求まる. 11 からわかるとおり, この設定では i) と同じく非交差経路は 1 通りしかできない. 実際 $\det W(a, a)$ の値は必ず 1 である.

iv) 始点と終点を $\alpha_i = (a_i, 1), \beta_j = (b_j, b_j), 1 \leq i, j \leq m, 1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_m \leq a, 1 \leq b_1 \leq \dots \leq b_m \leq b$ と設定する. このとき

$$|\mathcal{P}(\alpha_i, \beta_j)| = \binom{\alpha_i - 1}{\beta_i - 1} = W_{\alpha_i \beta_j}$$

となるので, 非交差経路の総数は

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}_m^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})| &= \det \left(\binom{\alpha_i - 1}{\beta_i - 1} \right)_{i,j=1}^m \\ &= \det \left(W(a, b)_{\alpha_i \beta_j} \right)_{i,j=1}^m \end{aligned}$$

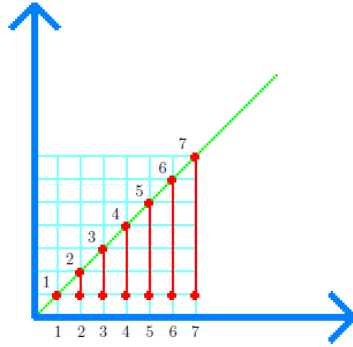


図 13: iii) $a = 7$ としたときの非交差経路の例

と求まる. 定義からもわかるように, T と W の関係は次のようになる.

$$T(a, b) = W(a, c) {}^tW(c, b), \quad \text{ただし } c \geq \min(a, b).$$

これを示すには

$$(1+x)^{i+j-2} = (1+x)^{i-1}(1+x)^{j-1}$$

の x^{i-1} の係数をとればよい.

$$\begin{aligned} \binom{i+j-2}{i-1} &= \sum_{1 \leq k \leq c} \binom{i-1}{i-k} \binom{j-1}{k-1} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq c} \binom{i-1}{i-k} \binom{j-1}{j-k} \\ \Leftrightarrow T(a, b)_{ij} &= \sum_{1 \leq k \leq c} W(a, c)_{ik} W(b, c)_{jk} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq \min(a, b)} W_{ik} W_{jk} \quad (k \geq \min(a, b) \text{ となる } k \text{ については } W_{ik} = 0) \\ &= \left(W(a, c) {}^tW(c, b) \right)_{ij} \end{aligned}$$

v) 始点と終点を $\alpha_i = (b+i-1, i-1), \beta_j = (j-1, c+j-1), 1 \leq i, j \leq a$ と設定する. このとき

$$|\mathcal{P}(\alpha_i, \beta_j)| = \binom{b+c}{c-i+j}$$

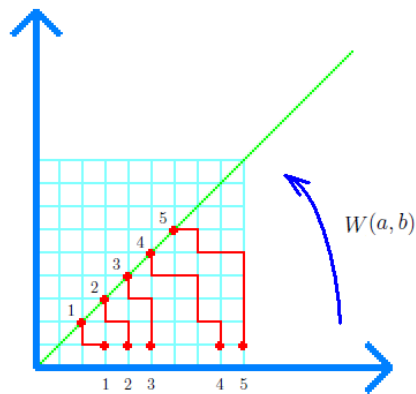


図 14: iv) $m = 5, a_1 = 3, a_2 = 4, a_3 = 5, a_4 = 8, a_5 = 9, b_1 = 2, b_2 = 3, b_3 = 4, b_4 = 5, b_5 = 6$ としたときの非交差経路の例

となるので, 非交差経路の総数は

$$|\mathcal{P}_a^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})| = \det \left(\left(\binom{b+c}{c-i+j} \right)_{i,j=1}^a \right)$$

と求まる. これ以降

$$(H_{b,c})_{ij} = \binom{b+c}{c-i+j}$$

と表記し, $(H_{b,c})_{ij}$ を成分とする $a \times a$ 行列を

$$H_{b,c}(a) = \left((H_{b,c})_{ij} \right)_{i,j=1}^a$$

と表すことにする.

この表記を使えば先の非交差経路の総数は

$$|\mathcal{P}_a^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})| = \det H_{b,c}(a)$$

と求まる. この値は Krattenthaler の公式を用いて

$$\prod_{(i,j,k) \in \mathcal{B}(a,b,c)} \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}$$

と表せることを 4 章で確認する.

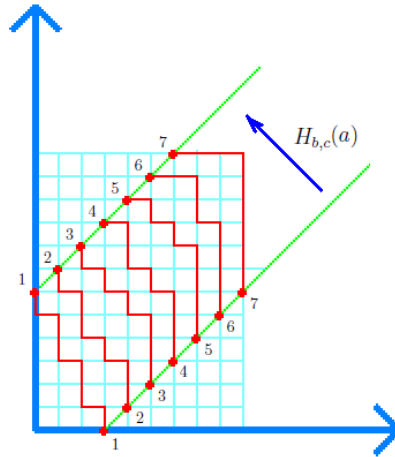


図 15: v) $a = 7, b = 3, c = 6$ としたときの非交差経路の例

vi) $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ は分割とする. $l(\lambda) = k$ とし, λ の和因子を用いて始点と終点を次のように設定する. $\alpha_i = (1, k - i), \beta_j = (n, k - j + \lambda_j), 1 \leq i, j \leq k,$

図

このとき

$$|\mathcal{P}(\alpha_i, \beta_j)| = \binom{n-1}{\lambda_j + i - j}$$

となるので, 非交差経路の総数は

$$|\mathcal{P}_k^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})| = \det \left(\binom{n-1}{\lambda_j + i - j} \right)_{i,j=1}^k$$

と求まる.

3.4 LGV 公式の一般形

ここで一般の LGV 公式を証明する. 一般の LGV 公式では総数の拡張として経路に与える重みを考え, また経路も格子経路に限らない一般の経路とする. これにより後の母関数を求める作業の見通しが得られる.

- V を全順序 $<$ を持った頂点の集合, E を有向辺の集合, $D = (V, E)$ を有向グラフとする.

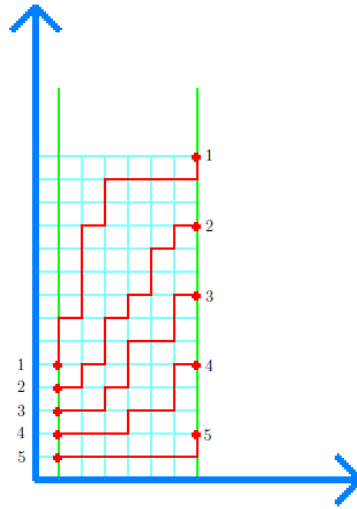


図 16: vi) $n = 7, \lambda = (9, 7, 5, 3, 1)$ としたときの非交差経路の例

- $v_0, \dots, v_m \in V, e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E, (i = 0, \dots, m-1)$ であれば, v_0 から出発して e_i を巡にたどり v_m に至る経路が決まる. この経路を頂点の列 (v_0, v_1, \dots, v_m) で表す. このとき v_0 を始点, v_m を終点と呼ぶ.

辺に対する重さの関数を $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ と定める. 経路 $P \in \mathcal{P}(a, b)$ 上の各辺 e に重さ $w(e)$ が指定されているとき, 経路 P の重さを次のように定義する.

$$w(P) = \prod_{e \in P} w(e).$$

- 閉路とは, 経路 (v_0, v_1, \dots, v_k) のうちで $v_0 = v_k$ となるもののことである. 以下 D が閉路なしの有向グラフであるとして話を進める.
- $a, b \in V$ として, 始点 a から終点 b へと至る経路全体の集合を $\mathcal{P}(a, b)$ とする. このとき, a を始点, b を終点とする経路 $P \in \mathcal{P}(a, b)$ の重みの総和を

$$G(a, b) = \sum_{P \in \mathcal{P}(a, b)} w(P)$$

と表し, これを Green 関数と呼ぶ.

- N 個の経路 P_1, \dots, P_N の組を $\mathbb{P} = (P_1, \dots, P_N)$ と定める. 経路の組の重み $w(\mathbb{P})$ を次のように定める.

$$w(\mathbb{P}) = \prod_{j=1}^N w(P_j) = \prod_{j=1}^N \prod_{e \in P_j} w(e).$$

- 「 $\mathbb{V} = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$ が昇順に並んでいる」とは、 V に定められた順序で $v_1 < \dots < v_m$ となっているということであると定義する。

$\mathbb{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ と $\mathbb{B} = (\beta_1, \dots, \beta_N)$ がそれぞれ昇順に並んでいるとき、「 \mathbb{A} が \mathbb{B} と整合的である」とは、 $\alpha_i < \alpha_j$ かつ $\beta_{i'} > \beta_{j'}$ であれば任意の経路 $P \in \mathcal{P}(\alpha_i, \beta_{i'})$ が任意の経路 $P' \in \mathcal{P}(\alpha_j, \beta_{j'})$ と交差するということである。

- 昇順に並んでいる始点の組 $\mathbb{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \subset V$ と昇順に並んでいる終点の組 $\mathbb{B} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\} \subset V$ が整合的であるとする。

この条件のもとで始点の組 \mathbb{A} と終点の組 \mathbb{B} を固定したときの N 本の経路の組全体の集合 $\mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ を

$$\mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \{\mathbb{P} = (P_1, \dots, P_N) \mid P_i \in \mathcal{P}(\alpha_i, \beta_{\sigma(i)}), i = 1, 2, \dots, N\}.$$

と表す。 σ は $\{1, 2, \dots, N\}$ の置換となる。 σ は $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ に対して一意に決まるので、そのことを強調する意味でこの σ を $\sigma_{\mathbb{P}}$ と表す。

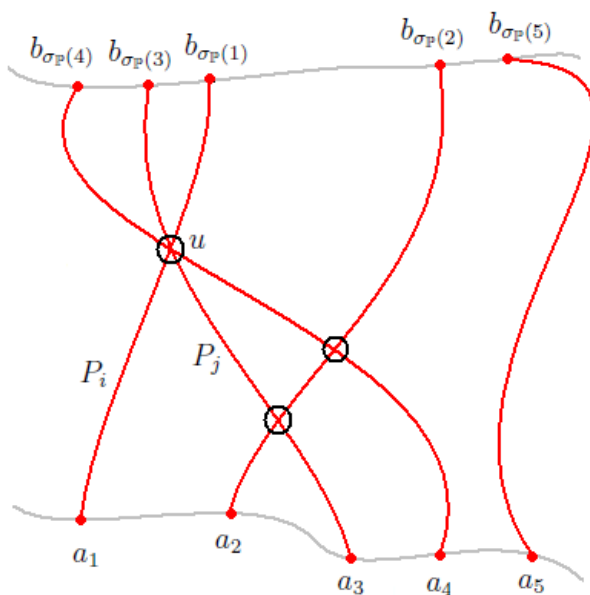


図 17: 一般的な経路の組で交差するものの例

- 経路の組 \mathbb{P} が交差するとは、 \mathbb{P} に含まれるいずれか 2 つの経路が交差することである。 \mathbb{P} が交差しないとき、経路の組 \mathbb{P} は非交差であるという。
- 以下、それぞれ昇順に並んでいて整合的であるような始点の組 $\mathbb{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ と終点の組 $\mathbb{B} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$ のみを考える。

\mathbb{A} と終点の組 \mathbb{B} を固定したときの N 本の交差経路の組全体の集合 $\mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ を

$$\mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \mid \mathbb{P} \text{ は交差する} \}$$

と表す. 始点の組 \mathbb{A} と終点の組 \mathbb{B} を固定したときの N 本の実交差経路の組全体の集合 $\mathcal{P}_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ を

$$\mathcal{P}_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \mid \mathbb{P} \text{ は交差しない} \}.$$

と表す. これまでの定義から明らかに, $\mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ は $\mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ と $\mathcal{P}_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ の二つの部分に分かれる. つまり

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B}) &= \mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \cup \mathcal{P}_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \\ \mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \cap \mathcal{P}_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) &= \emptyset \end{aligned}$$

となる.

- \mathbb{A} と \mathbb{B} は整合的なので, $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ であれば $\sigma_{\mathbb{P}} = \text{id}$, となる.
- \mathbb{A} と \mathbb{B} を指定したときの非交差経路についての Green 関数を次のように定義する.

$$G_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} w(\mathbb{P}).$$

定理 4 (Lindström-Gessel-Viennot 公式) 次の条件が満たされているとする.

- グラフ $D = (V, E)$ が閉路なしの有向グラフで, V が全順序を持つ.
- $\mathbb{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N), \mathbb{B} = (\beta_1, \dots, \beta_N) \subset V$ は並んでいて, 整合的である.

このとき N 本の経路からなる非交差経路の重みは次のように求められる.

$$G_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \det \left(G(\alpha_i, \beta_j) \right)_{i,j=1}^N.$$

証明

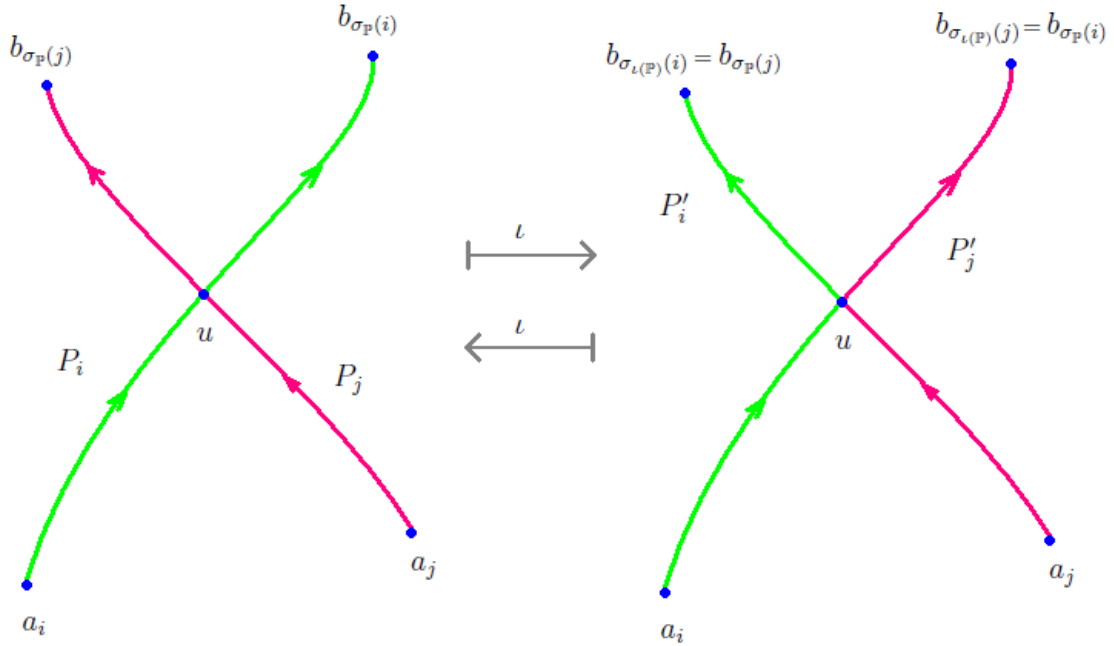


図 18: 一般の経路における ι による交差経路の交換

- $\sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) w(\mathbb{P}) = 0$ であることを示す.

写像 $\iota : \mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \rightarrow \mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ を定義する.

交点のうちで、順序が一番大きくなる点を u と名づける. u を通って交差している全ての経路の中で添え字の順序が一番小さいものを i , 二番目に小さいものを j と名づける.

$P_i(\rightarrow u)$ によって P_i のうち始点から u までの経路を表す, また $P_i(u \rightarrow)$ は P_i のうち u から終点までの経路である. 経路 Q の終点と経路 R の始点に等しいとき, その連結を $Q \cdot R$ で表す. このとき $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ に対して, $\iota(\mathbb{P})$ を次のように定義する (図 18).

$$\iota(\mathbb{P}) = \mathbb{P}' = (P'_1, \dots, P'_N) \in \mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}).$$

$$P'_i = P_i(\rightarrow u) \cdot P_j(u \rightarrow),$$

$$P'_j = P_j(\rightarrow u) \cdot P_i(u \rightarrow),$$

$$P'_k = P_k, (k \neq i, j).$$

このように定めた ι は対合 (involution) となる. つまり,

$$\iota \circ \iota = \text{id}.$$

を満たす. よって, \mathbb{P} と $\iota(\mathbb{P})$ をペアとして扱って, $\mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ を次のような条件を満たす2つの部分集合 $\mathcal{P}_N^{\text{int}1}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ と $\mathcal{P}_N^{\text{int}2}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ に分割することができる.

$$\begin{aligned}\iota(\mathcal{P}_N^{\text{int}1}(\mathbb{A}, \mathbb{B})) &= \mathcal{P}_N^{\text{int}2}(\mathbb{A}, \mathbb{B}), \quad \iota(\mathcal{P}_N^{\text{int}2}(\mathbb{A}, \mathbb{B})) = \mathcal{P}_N^{\text{int}1}(\mathbb{A}, \mathbb{B}). \\ \mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) &= \mathcal{P}_N^{\text{int}1}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \cup \mathcal{P}_N^{\text{int}2}(\mathbb{A}, \mathbb{B}), \\ \mathcal{P}_N^{\text{int}1}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \cap \mathcal{P}_N^{\text{int}2}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) &= \emptyset.\end{aligned}$$

また, 辺の重みの積なので ι によって $w(\mathbb{P})$ の値は変わらない, つまり,

$$w(\iota(\mathbb{P})) = w(\mathbb{P})$$

である. さらに, ι によって $\sigma_{\mathbb{P}}$ は

$$\sigma_{\mathbb{P}} \mapsto \sigma_{\iota(\mathbb{P})} = (\sigma_{\mathbb{P}}(i) \sigma_{\mathbb{P}}(j)) \cdot \sigma_{\mathbb{P}}$$

と変換されるので, $\sigma_{\mathbb{P}}$ の符号は

$$\text{sgn}(\sigma_{\iota(\mathbb{P})}) = -\text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}})$$

と変わる. 以上から,

$$\begin{aligned}& \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) w(\mathbb{P}) \\ &= \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{int}1}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) w(\mathbb{P}) + \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{int}2}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) w(\mathbb{P}) \\ &= \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{int}1}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) w(\mathbb{P}) + \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{int}1}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\iota(\mathbb{P})}) w(\iota(\mathbb{P})) \\ &= \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{int}1}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) w(\mathbb{P}) - \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{int}1}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) w(\mathbb{P}) \\ &= 0\end{aligned}$$

となることがわかる.

- $\sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \text{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) w(\mathbb{P}) = G_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ であることを示す.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \operatorname{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) w(\mathbb{P}). \\
&= \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \operatorname{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) w(\mathbb{P}) + \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \operatorname{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) w(\mathbb{P}) \\
&= \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \operatorname{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) w(\mathbb{P}) \quad (\sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \operatorname{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) w(\mathbb{P}) = 0 \text{ より}) \\
&= \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} w(\mathbb{P}) \quad (\sigma_{\mathbb{P}} = \text{id} \text{ より}) \\
&= G_N^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}).
\end{aligned}$$

- $\sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \operatorname{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) w(\mathbb{P}) = \det(G(\alpha_i, \beta_j))_{i,j=1}^N$ であることを示す.

ここで、和 $\sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \operatorname{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) w(\mathbb{P})$ を置換 σ についての和としてとらえれば、

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \operatorname{sgn}(\sigma_{\mathbb{P}}) w(\mathbb{P}) &= \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\mathbb{P} \in \{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \mid \sigma_{\mathbb{P}} = \sigma\}} w(\mathbb{P}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{(P_1, \dots, P_N) \in \{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_N(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \mid P_i \in \mathcal{P}(\alpha_i, \beta_{\sigma(i)})\}} \prod_{i=1}^N w(P_i) \\
&= \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^N \sum_{P \in \mathcal{P}(\alpha_i, \beta_{\sigma(i)})} w(P) \\
&= \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^N G(\alpha_i, \beta_{\sigma(i)}).
\end{aligned}$$

となる.

最後に行列式の定義から、

$$\sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^N G(\alpha_i, \beta_{\sigma(i)}) = \det(G(\alpha_i, \beta_j))_{i,j=1}^N.$$

となる.

q.e.d.

4 3次元 Young 図形の数え上げ

この章では直方体の内部にある3次元 Young 図形の個数とその母関数を非交差経路の数え上げに帰着させ、行列式の形で表すことを目標とする。また一つの到達点として最後に MacMahon の公式 (定理 1) を導く。

4.1 直方体に収まる3次元 Young 図形の個数の行列式表示

この節では $a \times b \times c$ の直方体 $\mathcal{B}(a, b, c)$ の内部に納まる3次元 Young 図形の個数を非交差経路に帰着させることで行列式表示し, さらにその値を計算する. この節での計算の流れは後の母関数を求めるときの流れの概略となっている.

4.1.1 非交差経路への帰着

$\mathcal{B}(a, b, c)$ 内部の3次元 Young 図形を, 3種類のひし形による六角形 $\mathcal{H}(a, b, c)$ のタイリングであると捉える. このとき3種類のタイルのうち, 連続した2種類のタイルをつないだ道の組を考える (図19). この道は de Bruijn 経路と呼ばれること

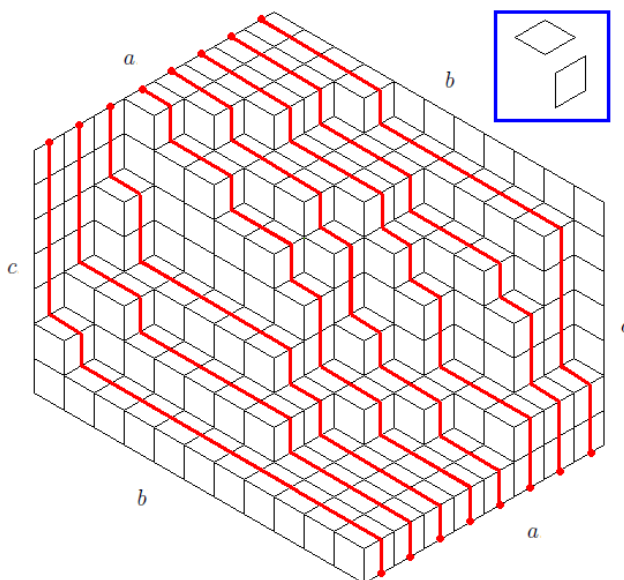


図19: de Bruijn 経路の描き方1. 図5をひし形のタイリングと見なし, 図の右上部分に示した2種類のタイルをつないだ道.

もある.

ひし形ではなく辺に注目することでも同様の道を得ることが出来る. それには a 方向, b 方向, c 方向の3方向ある辺の中から1つの方向を選び, その辺の中心をつないでいけばよい. つまり2種類のひし形の代わりに, その2種類のひし形が共有する辺に注目することでも同じ図形が得られうということだ. 辺に注目するのであれば, つなぐ点は中心でなくともよい. 例えば a 方向の辺に注目し, その下側の頂点を b 方向に長さ1の辺あるいは c 方向に長さ1の辺によってつないでいけば図20を得る. 図20の方がより格子経路に対応付けしやすいので, 今回はこちらを扱うことにする.

図20の上に b 方向と c 方向を軸とする斜交格子を描くと, 図21となる.

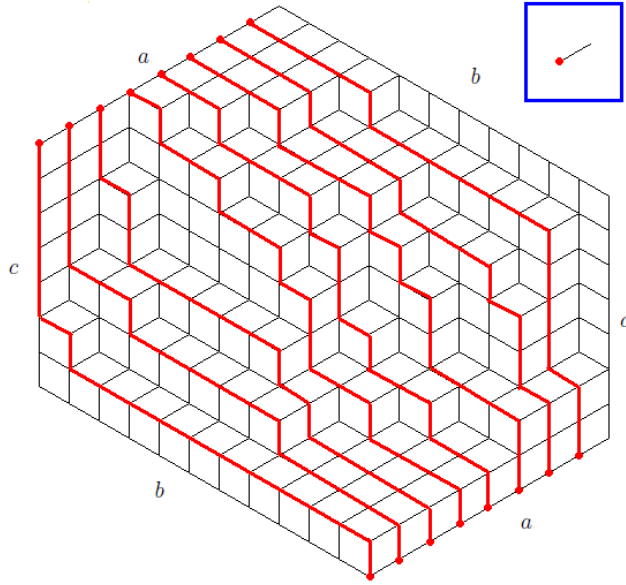


図 20: de Bruijn 経路の描き方 2. 図 5 の a 方向の辺の下側の頂点 (図の右上部分に赤い点で示した) に注目して得られた道.

図 21 の斜交格子を直行する格子に直せば, 図 22 となり, 非交差経路が得られる.

始点の組 \mathbb{A} と終点の組 \mathbb{B} は次のようになる.

$$\mathbb{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_a) = (b + i - 1, i - 1)_{i=1}^a,$$

$$\mathbb{B} = (\beta_1, \dots, \beta_a) = (j - 1, c + j - 1)_{j=1}^a.$$

よって

$$|\mathcal{P}(a_i, b_j)| = \binom{b+c}{c-i+j}$$

となるので求める数は

$$|\mathcal{P}_a^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})| = \det \left(\binom{b+c}{c-i+j} \right)_{i,j=1}^a$$

である.

これは 3.3 節の例 v) になっている. 3.3 節での記号

$$(H_{b,c})_{ij} = \binom{b+c}{c-i+j}$$

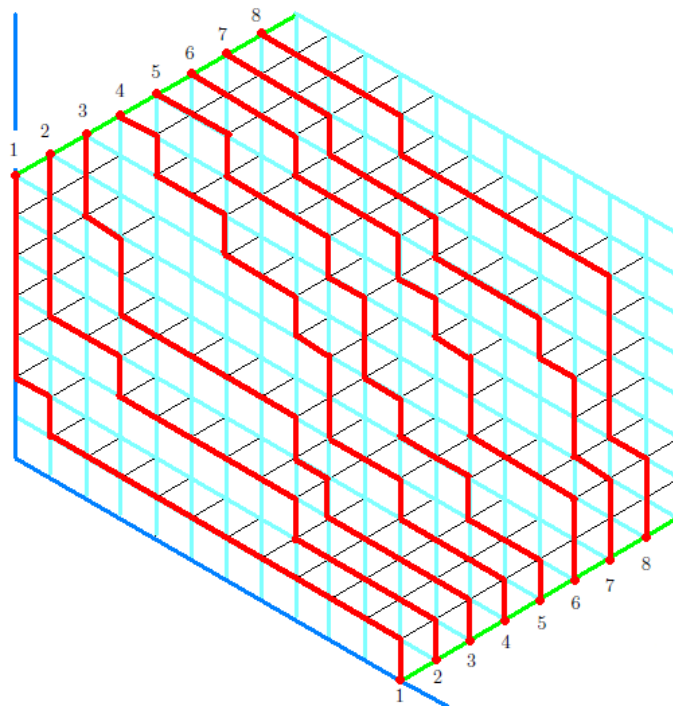


図 21: 図 20 に b 方向と c 方向を軸とする斜交格子を描いたもの. さらに道の始点と終点に番号を振った.

$$H_{b,c}(a) = \left((H_{b,c})_{ij} \right)_{i,j=1}^a$$

を使えば

$$|\mathcal{P}_a^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})| = \det H_{b,c}(a)$$

と表せる.

4.1.2 行列式の計算

$$\det \left(\left(\begin{array}{c} b+c \\ c-i+j \end{array} \right) \right)_{i,j=1}^a \text{ の値を求める.}$$

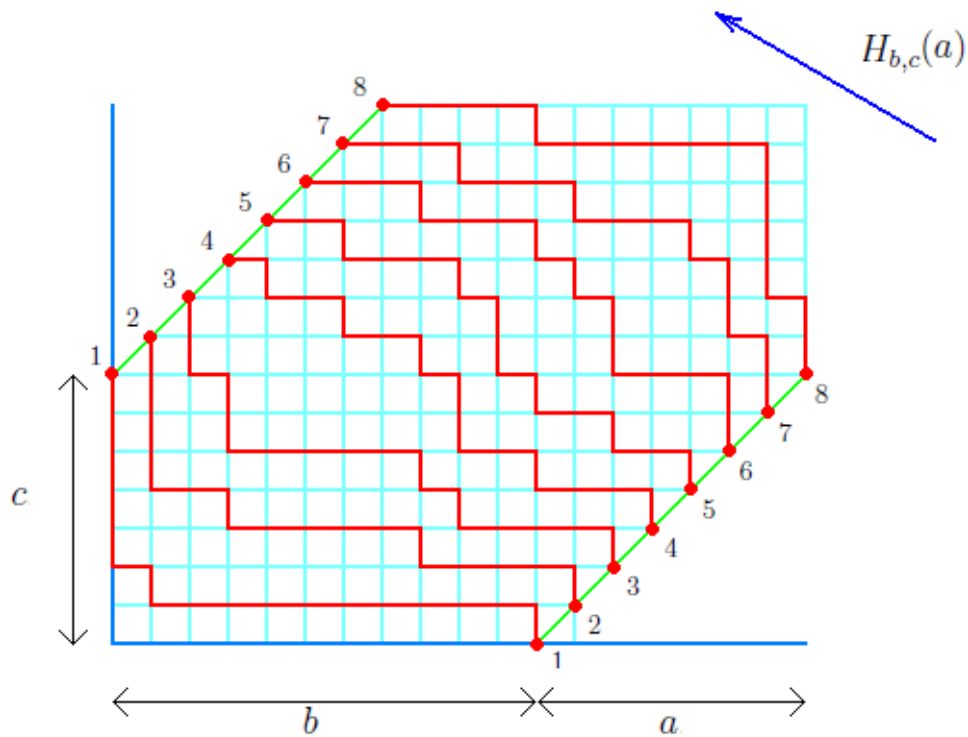


図 22: 図 21 の斜交格子を歪めて直行格子にしたもの. この場合経路の数は a 本となる.

- 二項係数の明示式を使って行列式中の中身を変形する.

$$\begin{aligned}
 & \det \left(\left(\begin{array}{c} b+c \\ c-i+j \end{array} \right) \right)_{i,j=1}^a \\
 &= \det \left(\frac{(b+c)!}{(c-i+j)!(b+i-j)} \right)_{i,j=1}^a \\
 &= \det \left(\frac{(b+c)!}{(c-i+a)!(b+i-1)!} \frac{(c-i+a)!(b+i-1)!}{(c-i+j)!(b+i-j)!} \right)_{i,j=1}^a \\
 &= \prod_{i=1}^a \frac{(b+c)!}{(c-i+a)!(b+i-1)!} \det \left(\frac{(c-i+a)!(b+i-1)!}{(c-i+j)!(b+i-j)!} \right)_{i,j=1}^a.
 \end{aligned}$$

- 行列式の中身を Krattenthaler の公式が使える形に直す.

$$\begin{aligned}
\frac{(c-i+a)!}{(c-i+j)!} &= (c-i+a)(c-i+a-1)\cdots(c-i+j+1) \\
&= \prod_{k=j+1}^a (c-i+k) \\
&= (-1)^{a-j} \prod_{k=j+1}^a (i-c+k).
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
\frac{(b+i-1)!}{(b+i-j)!} &= (b+i-1)(b+i-2)\cdots(b+i-j+1) \\
&= \prod_{k=2}^j (i+b+1-k).
\end{aligned}$$

以上から

$$\begin{aligned}
&\det \left(\frac{(c-i+a)! (b+i-1)!}{(c-i+j)! (b+i-j)!} \right)_{i,j=1}^a \\
&= \det \left((-1)^{a-j} \prod_{k=j+1}^a (i-c+k) \prod_{k=2}^j (i+b+1-k) \right)_{i,j=1}^a \\
&= (-1)^{\frac{(a-1)a}{2}} \det \left(\prod_{k=j+1}^a (i-c+k) \prod_{k=2}^j (i+b+1-k) \right)_{i,j=1}^a.
\end{aligned}$$

- ここで Krattenthaler の公式

$$\det \left(\left(\prod_{k=j+1}^n (x_i + a_k) \prod_{k=2}^j (x_i + b_k) \right)_{i,j=1}^n \right) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \prod_{2 \leq i \leq j \leq n} (b_i - a_j).$$

を適用する. $x_i = i, a_i = -i - c, b_i = -i + b + 1$ とおけば,

$$\det \left(\prod_{k=j+1}^a (i-c+k) \prod_{k=2}^j (i+b+1-k) \right)_{i,j=1}^a = \prod_{a \leq i < j \leq a} (i-j) \prod_{2 \leq i \leq j \leq a} ((-i+b+1) - (-j-c))$$

となる. よって

$$\begin{aligned}
&\det \left(\prod_{k=j+1}^a (i-c+k) \prod_{k=2}^j (i+b+1-k) \right)_{i,j=1}^a \\
&= (-1)^{\frac{(a-1)a}{2}} \prod_{a \leq i < j \leq a} (j-i) \prod_{2 \leq i \leq j \leq a} (-i+j+b+c+1)
\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} & \det \left(\left(\begin{array}{c} b+c \\ c-i+j \end{array} \right) \right)_{i,j=1}^a \\ &= \prod_{i=1}^a \frac{(b+c)!}{(c-i+a)!(b+i-1)!} \prod_{a \leq i < j \leq a} (j-i) \prod_{2 \leq i \leq j \leq a} (-i+j+b+c+1). \end{aligned}$$

• $\prod_{i=1}^a \frac{(b+c)!}{(c-i+a)!(b+i-1)!} \prod_{a \leq i < j \leq a} (j-i) \prod_{2 \leq i \leq j \leq a} (-i+j+b+c+1) = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \frac{c+i+j-1}{i+j-1}$
を示す.

$$\begin{aligned} \prod_{a \leq i < j \leq a} (j-i) &= \prod_{i=1}^{a-1} i! = \prod_{i=1}^a (i-1)! \\ \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b (i+j-1) &= \prod_{i=1}^a \frac{(i+b-1)!}{(i-1)!} \end{aligned}$$

であることから次の等式が成り立つ.

$$\frac{\prod_{i=1}^a (i+b-1)!}{\prod_{a \leq i < j \leq a} (j-i)} = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b (i+j-1).$$

また,

$$\begin{aligned} \prod_{2 \leq i \leq j \leq a} (-i+j+b+c+1) &= \prod_{i=1}^{a-1} \frac{(b+c+i)!}{(b+c)!} \\ &= \prod_{i=1}^a \frac{(b+c+i-1)!}{(b+c)!} \end{aligned}$$

より

$$\prod_{i=1}^a (b+c)! \prod_{2 \leq i \leq j \leq a} (-i+j+b+c+1) = \prod_{i=1}^a (b+c+i-1)!$$

であることと,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^a (c-i+a)! &= \prod_{i=1}^a (c+i-1)! \\ \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b (c+i+j-1) &= \prod_{i=1}^a \frac{(c+i+b-1)!}{(c+i-1)!} \end{aligned}$$

より

$$\prod_{i=1}^a (c-i+a)! \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b (c+i+j-1) = \prod_{i=1}^a (b+c+i-1)!$$

であることから次の等式が成り立つ.

$$\prod_{i=1}^a (b+c)! \prod_{2 \leq i \leq j \leq a} (-i+j+b+c+1) = \prod_{i=1}^a (c-i+a)! \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b (c+i+j-1).$$

これを次のように変形する.

$$\frac{\prod_{i=1}^a (b+c)! \prod_{2 \leq i \leq j \leq a} (-i+j+b+c+1)}{\prod_{i=1}^a (c-i+a)!} = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b (c+i+j-1).$$

以上2つの等式により,

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^a \frac{(b+c)!}{(c-i+a)!(b+i-1)!} \prod_{1 \leq i < j \leq a} (j-i) \prod_{2 \leq i \leq j \leq a} (-i+j+b+c+1) \\ &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq a} (j-i)}{\prod_{i=1}^a (i+b-1)!} \cdot \frac{\prod_{i=1}^a (b+c)! \prod_{2 \leq i \leq j \leq a} (-i+j+b+c+1)}{\prod_{i=1}^a (c-i+a)!} \\ &= \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \frac{c+i+j-1}{i+j-1}. \end{aligned}$$

- 以上から求める値は,

$$\begin{aligned} & \det \left(\left(\begin{array}{c} b+c \\ c-i+j \end{array} \right) \right)_{i,j=1}^a \\ &= \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \frac{c+i+j-1}{i+j-1} \\ &= \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \frac{i+j}{i+j-1} \frac{i+j+1}{i+j} \cdots \frac{i+j+c-1}{i+j+c-2} \\ &= \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2} \\ &= \prod_{(i,j,k) \subseteq \mathcal{B}(a,b,c)} \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2} \end{aligned}$$

となる.

4.2 3次元 Young 図形の個数の母関数に対する行列式表示

今までは個数に関する数を考えていたが、今度はその母関数 $\sum_{\pi \in \mathcal{B}(a,b,c)} q^{|\pi|}$ を考えてみよう.

- 母関数を求めるためには、経路に対して重みを定義する必要がある.

重みを次のように定義する. ただし今回は辺の重みを経路 $P_i \in \mathcal{P}_a(\alpha_i, \beta_{\sigma_{\mathbb{P}}(i)})$ ごとに変えなければならないので、辺 e の経路 P_i における重みを $w_{P_i}(e)$ と表すことにする.

$\alpha_{i,y}$ を α_i の y 座標, $\beta_{\sigma_{\mathbb{P}}(i),x}$ を $\beta_{\sigma_{\mathbb{P}}(i)}$ の x 座標とする. このとき格子点 $v = (\gamma, \delta)$ に対して, $(-1, 0)$ 方向に 1 移動する辺の重みと $(0, 1)$ 方向に 1 移動する辺の重みをそれぞれ次のように定める.

$$\begin{aligned} w_{P_i}(v, v + (-1, 0)) &= q^{\frac{1}{2}(\delta - \alpha_{i,y})}, \\ w_{P_i}(v, v + (0, 1)) &= q^{\frac{1}{2}(\gamma - \beta_{\sigma_{\mathbb{P}}(i),x})}. \end{aligned}$$

これをまとめると次のようになる. $v = (\gamma, \delta), w = v + (-1, 0), v + (0, 1)$ として,

$$w_{P_i}(v, w) = q^{\frac{1}{2}(w-v) \cdot (-\delta - \alpha_{i,y}, \gamma - \beta_{\sigma_{\mathbb{P}}(i),x})}.$$

経路 P_i を点の列で $(v_0, v_1, \dots, v_{b+c})$ と表記する. また $e_i = (v_i, v_{i+1})$ とおく. $v_k = (\gamma_k, \delta_k)$ と表記する. また, $v_k(P_i), e_k(P_i)$ をそれぞれ, 経路 P_i における点 v_k と辺 e_k を指すものとして定める.

このとき, 経路 P_i の重みは

$$\begin{aligned} w(P_i) &= \prod_{k=1}^{b+c-1} w_{P_i}(e_k(P_i)) \\ &= q^{\sum_{k=1}^{b+c-1} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \gamma_{k+1} - \gamma_k \\ \delta_{k+1} - \delta_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(\delta_k - \alpha_{i,y}) \\ \gamma_k - \beta_{\sigma_{\mathbb{P}}(i),x} \end{pmatrix}} \\ &= q^{|\lambda(P_i)|} \end{aligned}$$

となる. ただし $\lambda(P_i)$ は P_i に対応する分割である.

経路 $P_i \in \mathcal{P}(\alpha_i, \beta_{\sigma_{\mathbb{P}}(i)})$ の Green 関数は,

$$\begin{aligned} G(\alpha_i, \beta_{\sigma_{\mathbb{P}}(i)}) &= \sum_{P_i \in \mathcal{P}(\alpha_i, \beta_{\sigma_{\mathbb{P}}(i)})} q^{|\lambda(P_i)|} \\ &= \begin{bmatrix} b+c \\ c-i+\sigma_{\mathbb{P}}(i) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

と q -二項係数で表すことが出来る.

\mathbb{P} の重みは,

$$w(\mathbb{P}) = \prod_{i=1}^a w_{P_i}$$

となる.

以上の重みを使えば求める母関数は,

$$\sum_{\pi \subseteq \mathcal{B}(a,b,c)} q^{|\pi|} = \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_a^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} w(\mathbb{P})$$

と表すことができる.

- 重みの関数 w が写像 ι に対して保存されないことを示す.

LGV 公式 (公式 4) を使うには $G^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = 0$ が成立する必要があるが, そのためには経路の組 \mathbb{P} に対する重み $w(P_i)$ が写像 ι について不変でなければならない. しかしこの w は ι について不変ではない. まずは $w(\mathbb{P})$ が ι によって

$$w(\iota(\mathbb{P})) = q^{-(i-j) (\sigma_{\mathbb{P}}(i) - \sigma_{\mathbb{P}}(j))} w(\mathbb{P})$$

と値を変えることを示す. その後に w に若干の修正を加えて, ι について不変になるような重みの関数 w' を定める.

$\mathbb{P} \in \mathcal{P}_a^{\text{int}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ とし, 交点の中で順序が一番大きくなる点を u と名づける. u を通って交差している全ての経路の中で添え字の順序が一番小さいものを i , 二番目に小さいものを j と名づける. このとき次のように定める.

$$v_k(P_i) = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \quad k \in N, k \leq a.$$

$$v_k(P_j) = \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}, \quad k \in N, k \leq a.$$

$$v_0(P_i) = \alpha_i = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+i-1 \\ i-1 \end{pmatrix}.$$

$$v_0(P_j) = \alpha_j = \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+j-1 \\ j-1 \end{pmatrix}.$$

$$v_{b+c}(P_i) = \beta_{\sigma_{\mathbb{P}}(i)} = \begin{pmatrix} x_{b+c} \\ y_{b+c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{\mathbb{P}}(i) - 1 \\ c + \sigma_{\mathbb{P}}(i) - 1 \end{pmatrix}.$$

$$v_{b+c}(P_j) = \beta_{\sigma_{\mathbb{P}}(j)} = \begin{pmatrix} p_{b+c} \\ q_{b+c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{\mathbb{P}}(j) - 1 \\ c + \sigma_{\mathbb{P}}(j) - 1 \end{pmatrix}.$$

$$u = v_n(P_i) = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = v_n(P_j) = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

このとき,

$$\begin{aligned}
\log_q w(P_i) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{b+c-1} \begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ -(y_{k+1} - y_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(y_k - y_0) \\ x_k - x_0 \end{pmatrix} \\
\log_q w(P_j) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{b+c-1} \begin{pmatrix} p_{k+1} - p_k \\ -(q_{k+1} - q_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(q_k - q_0) \\ p_k - p_0 \end{pmatrix} \\
\log_q w(P'_i) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ -(y_{k+1} - y_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(y_k - y_0) \\ x_k - x_0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{b+c-1} \begin{pmatrix} p_{k+1} - p_k \\ -(q_{k+1} - q_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(q_k - y_0) \\ p_k - x_0 \end{pmatrix} \\
\log_q w(P'_j) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} p_{k+1} - p_k \\ -(q_{k+1} - q_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(q_k - q_0) \\ p_k - p_0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{b+c-1} \begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ -(y_{k+1} - y_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(y_k - q_0) \\ x_k - p_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}
&2 \log_q \frac{w(\mathbb{P})}{w(\iota(\mathbb{P}))} \\
&= 2 \log_q \frac{w(P_i) \cdot w(P_j)}{w(P'_i) \cdot w(P'_j)} \\
&= \sum_{k=n+1}^{b+c} \begin{pmatrix} x_k - x_{k-1} \\ -(y_k - y_{k-1}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 - q_0 \\ -(x_0 - p_0) \end{pmatrix} \\
&\quad + \sum_{k=n+1}^{b+c} \begin{pmatrix} p_k - p_{k-1} \\ -(q_k - q_{k-1}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(y_0 - q_0) \\ x_0 - p_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_{b+c} - x_n \\ -(y_{b+c} - y_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 - q_0 \\ -(x_0 - p_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{b+c} - \alpha_n \\ -(q_{b+c} - q_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(y_0 - q_0) \\ x_0 - p_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_{b+c} - p_{b+c} + p_n - x_n \\ y_{b+c} - q_{b+c} + q_n - y_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 - q_0 \\ x_0 - p_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_{b+c} - p_{b+c} \\ y_{b+c} - q_{b+c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 - q_0 \\ x_0 - p_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\sigma_{\mathbb{P}}(i) - 1) - (\sigma_{\mathbb{P}}(j) - 1) \\ (c + \sigma_{\mathbb{P}}(i) - 1) - (c + \sigma_{\mathbb{P}}(j) - 1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (i - 1) - (j - 1) \\ (b + i - 1) - (b + j - 1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma_{\mathbb{P}}(i) - \sigma_{\mathbb{P}}(j) \\ \sigma_{\mathbb{P}}(i) - \sigma_{\mathbb{P}}(j) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i - j \\ i - j \end{pmatrix} \\
&= 2 (i - j) (\sigma_{\mathbb{P}}(i) - \sigma_{\mathbb{P}}(j)).
\end{aligned}$$

以上から

$$\begin{aligned} w(P'_i) \cdot w(P'_j) &= q^{-(i-j)(\sigma_{\mathbb{P}}(i)-\sigma_{\mathbb{P}}(j))} w(P_i) \cdot w(P_j) \\ \Leftrightarrow w(\iota(\mathbb{P})) &= q^{-(i-j)(\sigma_{\mathbb{P}}(i)-\sigma_{\mathbb{P}}(j))} w(\mathbb{P}) \end{aligned}$$

となることがわかる.

- 重みの関数 w が写像 ι に対して保存されないことがわかったが, うまく重みを調節することで ι に対して不変で, なおかつ非交差経路に関しては w による値と一致するような重みの関数 w' を作ることが出来る.

先の途中の式より,

$$\begin{aligned} w(P'_i) \cdot w(P'_j) &= q^{-(i-j)(\sigma_{\mathbb{P}}(i)-\sigma_{\mathbb{P}}(j))} w(P_i) \cdot w(P_j) \\ \Leftrightarrow q^{i(i-\sigma_{\mathbb{P}}(j))} w(P'_i) \cdot q^{j(j-\sigma_{\mathbb{P}}(i))} w(P'_j) &= q^{i(i-\sigma_{\mathbb{P}}(i))} w(P_i) \cdot q^{i(i-\sigma_{\mathbb{P}}(i))} w(P_j) \\ \Leftrightarrow q^{i(i-\sigma_{\iota(\mathbb{P})}(i))} w(P'_i) \cdot q^{j(j-\sigma_{\iota(\mathbb{P})}(j))} w(P'_j) &= q^{i(i-\sigma_{\mathbb{P}}(i))} w(P_i) \cdot q^{i(i-\sigma_{\mathbb{P}}(i))} w(P_j) \\ \Leftrightarrow \prod_{i=1}^N q^{i(i-\sigma_{\iota(\mathbb{P})}(i))} w(P'_i) &= \prod_{i=1}^N q^{i(i-\sigma_{\mathbb{P}}(i))} w(P_i). \end{aligned}$$

よって新しい重みの関数 w' を,

$$w'(P_i) = q^{i(i-\sigma_{\mathbb{P}}(i))} w(P_i), w'(\mathbb{P}) = \prod_{i=1}^N q^{i(i-\sigma_{\mathbb{P}}(i))} w(P_i)$$

と定義すれば,

$$w'(\iota(\mathbb{P})) = w'(\mathbb{P})$$

となって, $w'(\mathbb{P})$ が ι によらない値になることがわかる. この重みの関数 w' を使えば, LGV 公式が利用できる. \mathbb{P} が交差経路のときには $\sigma_{\mathbb{P}} = \text{id}$ となるので, 定義により $w'(\mathbb{P})$ は $w(\mathbb{P})$ と一致する.

以上のことから, $w'(\mathbb{P})$ を使うことで3次元 Young 図形の母関数を, 行列式を使って記述できることがわかる.

$$\begin{aligned}
& \sum_{\pi \in \mathcal{B}(a,b,c)} q^{|\pi|} \\
= & \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_a^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} w(\mathbb{P}) \\
= & \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_a^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \prod_{i=1}^a w(P_i) \\
= & \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_a^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \prod_{i=1}^a w'(P_i) \\
= & G'_a{}^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \\
= & \det(G'(\mathbb{A}, \mathbb{B}))_{i,j=1}^a \\
= & \det \left(q^{i(i-j)} \begin{bmatrix} b+c & \\ & c-i+j \end{bmatrix} \right)_{i,j=1}^a.
\end{aligned}$$

4.3 行列式の計算

$\left(q^{i(i-j)} \begin{bmatrix} b+c & \\ & c-i+j \end{bmatrix} \right)_{i,j=1}^a$ の値を求める.

- まず q -二項係数の明示式を使って行列式の中身を変形する.

$$\begin{aligned}
& \det \left(q^{i(i-j)} \begin{bmatrix} b+c & \\ & c-i+j \end{bmatrix} \right)_{i,j=1}^a \\
= & \det \left(q^{i(i-j)} \frac{(q; q)_{b+c}}{(q; q)_{c-i+j} (q; q)_{b+i-j}} \right)_{i,j=1}^a \\
= & \det \left(q^{i(i-j)} \frac{(q; q)_{b+c}}{(q; q)_{c-i+a} (q; q)_{b+i-1}} \frac{(q; q)_{c-i+a} (q; q)_{b+i-1}}{(q; q)_{c-i+j} (q; q)_{b+i-j}} \right)_{i,j=1}^a \\
= & \prod_{i=1}^a \frac{(q; q)_{b+c}}{(q; q)_{c-i+a} (q; q)_{b+i-1}} \det \left(q^{i(i-j)} \frac{(q; q)_{c-i+a} (q; q)_{b+i-1}}{(q; q)_{c-i+j} (q; q)_{b+i-j}} \right)_{i,j=1}^a.
\end{aligned}$$

- 行列式の中身を Krattenthaler の公式が使える形に直す.

$$\begin{aligned}
\frac{(q; q)_{c-i+a}}{(q; q)_{c-i+j}} &= (1 - q^{c-i+a})(1 - q^{c-i+a-1}) \dots (1 - q^{c-i+j+1}) \\
&= (q^{-i}(q^i - q^{c+a})) (q^{-i}(q^i - q^{c+a-1})) \dots (q^{-i}(q^i - q^{c+j+1})) \\
&= q^{-i(a-j)} (q^i - q^{c+a}) (q^i - q^{c+a-1}) \dots (q^i - q^{c+j+1}) \\
&= q^{-i(a-j)} \prod_{k=j+1}^a (q^i - q^{c+k}).
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
\frac{(q; q)_{b+i-1}}{(q; q)_{b+i-j}} &= (1 - q^{b+i-1})(1 - q^{b+i-2}) \dots (1 - q^{b+i-j+1}) \\
&= (-q^{b-1}(q^i - q^{-b+1})) (-q^{b-2}(q^i - q^{-b+2})) \dots (q^{b-j+1}(q^i - q^{-b+j-1})) \\
&= (-1)^{j-1} q^{\frac{(2b-j)(j-1)}{2}} (q^i - q^{-b+1}) (q^i - q^{-b+2}) \dots (q^i - q^{-b+j-1}) \\
&= (-1)^{j-1} q^{\frac{(2b-j)(j-1)}{2}} \prod_{k=2}^j (q^i - q^{-b-1+k}).
\end{aligned}$$

以上から

$$\begin{aligned}
&\det \left(q^{i(i-j)} \frac{(q; q)_{c-i+a} (q; q)_{b+i-1}}{(q; q)_{c-i+j} (q; q)_{b+i-j}} \right)_{i,j=1}^a \\
&= \det \left((-1)^{j-1} q^{i(i-j)-i(a-j)+\frac{(2b-j)(j-1)}{2}} \prod_{k=j+1}^a (q^i - q^{c+k}) \prod_{k=2}^j (q^i - q^{-b-1+k}) \right)_{i,j=1}^a \\
&= \det \left((-1)^{j-1} q^{i^2-ai+b(j-1)+\frac{(2b-j)(j-1)}{2}} \prod_{k=j+1}^a (q^i - q^{c+k}) \prod_{k=1}^{j-1} (q^i - q^{-b+k}) \right)_{i,j=1}^a \\
&= (-1)^{\sum_{j=1}^a (j-1)} q^{\sum_{i=1}^a (i^2-ai)+\sum_{j=1}^a (b(j-a)+\frac{(2b-j)(j-1)}{2})} \\
&\quad \times \det \left(\prod_{k=j+1}^a (q^i - q^{c+k}) \prod_{k=2}^j (q^i - q^{-b-1+k}) \right)_{i,j=1}^a.
\end{aligned}$$

ここで,

$$\sum_{j=1}^a (j-1) = \frac{a(a-1)}{2},$$

また,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^a (i^2 - ai) + \sum_{j=1}^a (b(j-a) + \frac{(2b-j)(j-1)}{2}) \\
&= \sum_{i=1}^a \left((i^2 - ai) + b(i-1) - \frac{i(i-1)}{2} \right) \\
&= \sum_{i=1}^a \left(b(i-1) - ai + \frac{i(i+1)}{2} \right) \\
&= b \frac{(a-1)a}{2} - a \frac{a(a+1)}{2} + \frac{a(a+1)(a+2)}{6} \\
&= b \frac{(a-1)a}{2} - \frac{(a-1)a(a+1)}{3}.
\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}
& \det \left(q^{i(i-j)} \frac{(q; q)_{c-i+a} (q; q)_{b+i-1}}{(q; q)_{c-i+j} (q; q)_{b+i-j}} \right)_{i,j=1}^a \\
&= (-1)^{\frac{(a-1)a}{2}} q^{b \frac{(a-1)a}{2} - \frac{(a-1)a(a+1)}{3}} \det \left(\prod_{k=j+1}^a (q^i - q^{c+k}) \prod_{k=2}^j (q^i - q^{-b-1+k}) \right)_{i,j=1}^a.
\end{aligned}$$

• ここで Krattenthaler の公式

$$\det \left(\left(\prod_{k=j+1}^n (x_i + a_k) \prod_{k=2}^j (x_i + b_k) \right)_{i,j=1}^n \right) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \prod_{2 \leq i \leq j \leq n} (b_i - a_j).$$

を適用する. $x_i = q^i, a_i = -q^{c+i}, b_i = -q^{-b-1+i}$ とおけば,

$$\det \left(\prod_{k=j+1}^a (q^i - q^{c+k}) \prod_{k=2}^j (q^i - q^{-b-1+k}) \right)_{i,j=1}^a = \prod_{1 \leq i < j \leq a} (q^i - q^j) \prod_{2 \leq i \leq j \leq a} (-q^{-b-1+i} + q^{c+j})$$

となる. これをさらに変形すれば,

$$\begin{aligned}
&= \prod_{1 \leq i < j \leq a} q^i (1 - q^{j-i}) \prod_{2 \leq i \leq j \leq a} (-q^{-b-1+i}) (1 - q^{c+b+j-i+1}) \\
&= \prod_{j=2}^a q^{\frac{j(j-1)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq a} (1 - q^{j-i}) \prod_{j=2}^a (-q^{-b(j-1) + \frac{j(j-1)}{2}}) \prod_{2 \leq i \leq j \leq a} (1 - q^{c+b+j-i+1}) \\
&= (-1)^{\frac{(a-1)a}{2}} q^{\sum_{j=1}^{a-1} j(j+1) - bj} \prod_{1 \leq i < j \leq a} (1 - q^{j-i}) \prod_{2 \leq i \leq j \leq a} (1 - q^{c+b+j-i+1}) \\
&= (-1)^{\frac{(a-1)a}{2}} q^{-b \frac{(a-1)a}{2} + \frac{(a-1)a(a+1)}{3}} \prod_{1 \leq i < j \leq a} (1 - q^{j-i}) \prod_{2 \leq i \leq j \leq a} (1 - q^{c+b+j-i+1})
\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} & \det \left(q^{i(i-j)} \begin{pmatrix} b+c \\ c-i+j \end{pmatrix} \right)_{i,j=1}^a \\ &= \prod_{i=1}^a \frac{(q; q)_{b+c}}{(q; q)_{c-i+a} (q; q)_{b+i-1}} \prod_{1 \leq i < j \leq a} (1 - q^{j-i}) \prod_{2 \leq i \leq j \leq a} (1 - q^{c+b+j-i+1}) \end{aligned}$$

である.

• $\prod_{i=1}^a \frac{(q; q)_{b+c}}{(q; q)_{c-i+a} (q; q)_{b+i-1}} \prod_{1 \leq i < j \leq a} (1 - q^{j-i}) \prod_{2 \leq i \leq j \leq a} (1 - q^{-i+j+b+c+1}) = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \frac{1 - q^{c+i+j-1}}{1 - q^{i+j-1}}$
を示す.

$$\begin{aligned} \prod_{a \leq i < j \leq a} (1 - q^{j-i}) &= \prod_{i=1}^{a-1} (q; q)_i \\ \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b (1 - q^{i+j-1}) &= (1 - q) \prod_{i=2}^a \frac{(q; q)_{i+b-1}}{(q; q)_{i-1}} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^a (q; q)_{i+b-1}}{\prod_{i=1}^{a-1} (q; q)_i} \end{aligned}$$

であることから次の等式が成り立つ.

$$\frac{\prod_{i=1}^a (q; q)_{i+b-1}}{\prod_{a \leq i < j \leq a} (1 - q^{j-i})} = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b (1 - q^{i+j-1}).$$

また,

$$\begin{aligned} \prod_{2 \leq i \leq j \leq a} (1 - q^{-i+j+b+c+1}) &= \prod_{i=1}^{a-1} \frac{(q; q)_{b+c+i}}{(q; q)_{b+c}} \\ &= \prod_{i=1}^a \frac{(q; q)_{b+c+i-1}}{(q; q)_{b+c}} \end{aligned}$$

より

$$\prod_{i=1}^a (q; q)_{b+c} \prod_{2 \leq i \leq j \leq a} (1 - q^{-i+j+b+c+1}) = \prod_{i=1}^a (q; q)_{b+c+i-1}$$

であることと,

$$\prod_{i=1}^a (q; q)_{c-i+a} = \prod_{i=1}^a (q; q)_{c+i-1}$$

$$\prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b (1 - q^{c+i+j-1}) = \prod_{i=1}^a \frac{(q; q)_{c+i+b-1}}{(q; q)_{c+i-1}}$$

より

$$\prod_{i=1}^a (q; q)_{c-i+a} \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b (1 - q^{c+i+j-1}) = \prod_{i=1}^a (q; q)^{b+c+i-1}$$

であることから次の等式が成り立つ.

$$\prod_{i=1}^a (q; q)_{b+c} \prod_{2 \leq i \leq j \leq a} (1 - q^{-i+j+b+c+1}) = \text{prod}_{i=1}^a (q; q)_{c-i+a} \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b (1 - q^{c+i+j-1}).$$

これを次のように変形する.

$$\frac{\prod_{i=1}^a (q; q)_{b+c} \prod_{2 \leq i \leq j \leq a} (1 - q^{-i+j+b+c+1})}{\prod_{i=1}^a (q; q)_{c-i+a}} = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b (1 - q^{c+i+j-1}).$$

以上2つの等式により,

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^a \frac{(q; q)_{b+c}}{(q; q)_{c-i+a} (q; q)_{b+i-1}} \prod_{1 \leq i < j \leq a} (1 - q^{j-i}) \prod_{2 \leq i \leq j \leq a} (1 - q^{-i+j+b+c+1}) \\ &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq a} (1 - q^{j-i}) \prod_{i=1}^a (q; q)_{b+c} \prod_{2 \leq i \leq j \leq a} (1 - q^{-i+j+b+c+1})}{\prod_{i=1}^a (q; q)_{i+b-1} \prod_{i=1}^a (q; q)_{c-i+a}} \\ &= \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \frac{1 - q^{c+i+j-1}}{1 - q^{i+j-1}}. \end{aligned}$$

- 以上から求める値は,

$$\begin{aligned}
& \det \left(q^{i(i-j)} \begin{pmatrix} b+c \\ c-i+j \end{pmatrix} \right)_{i,j=1}^a \\
&= \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \frac{1-q^{c+i+j-1}}{1-q^{i+j-1}} \\
&= \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \frac{1-q^{i+j}}{1-q^{i+j-1}} \frac{1-q^{i+j+1}}{1-q^{i+j}} \cdots \frac{1-q^{c+i+j-1}}{1-q^{c+i+j-2}} \\
&= \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{1-q^{i+j+k-1}}{1-q^{i+j+k-2}} \\
&= \prod_{(i,j,k) \subseteq \mathcal{B}(a,b,c)} \frac{1-q^{i+j+k-1}}{1-q^{i+j+k-2}}
\end{aligned}$$

となる.

- 最後に MacMahon の公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{pp}(n) q^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^i)^i}$$

を導く.

まず $\mathcal{B}(a,b,c)$ を無限に大きくすれば $\sum_{\pi \subset \mathcal{B}(a,b,c)} q^{|\pi|}$ は $\sum_{n=0}^{\infty} \text{pp}(n) q^n$ と一致する.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{pp}(n) q^n = \sum_{\pi \subset \mathcal{B}(a,b,c)} q^{|\pi|}.$$

ここで $l = i + j + k - 2$ とおき, $\sum_{\pi \subset \mathcal{B}(a,b,c)} q^{|\pi|}$ を l についての積として捉えれば,

$$\begin{aligned}
& \lim_{a,b,c \rightarrow \infty} \prod_{(i,j,k) \in \mathcal{B}(a,b,c)} \frac{1-q^{i+j+k-1}}{1-q^{i+j+k-2}} \\
&= \prod_{l=1}^{\infty} \prod_{i+j+k-2=l} \frac{1-q^{i+j+k-1}}{1-q^{i+j+k-2}} \\
&= \prod_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1-q^{l+1}}{1-q^l} \right)^{\frac{l(l+1)}{2}} \\
& \quad (i+j+k=l+2 \text{ を満たす自然数 } i, j, k \text{ の組は } \frac{l(l+1)}{2} \text{ 通りある.}) \\
&= \frac{1}{1-q} \prod_{l=2}^{\infty} \frac{(1-q^l)^{\frac{(l-1)l}{2}}}{(1-q^l)^{\frac{l(l+1)}{2}}} \\
&= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^i)^i}.
\end{aligned}$$

以上により MacMahon の公式が示された.

4.4 巡回対称 3 次元 Young 図形

巡回対称 (cyclically symmetric) 3 次元 Young 図形とは, 原点を通る $(1, 1, 1)$ 方向の軸に関して $\frac{2\pi}{3}$ 回転させても一致する 3 次元 Young 図形のことであり, 次のような条件を満たす $\pi \in \mathcal{B}(a, a, a)$ のことである (図 23).

$$(i, j, k) \in \pi \Rightarrow (j, k, i) \in \pi$$

巡回対称 3 次元 Young 図形 $\pi \in \mathcal{B}(a, a, a)$ を次のように変形することで非交差経

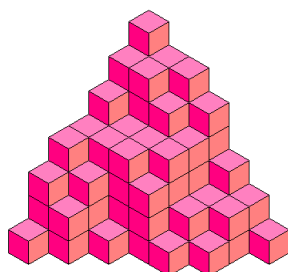


図 23: 巡回対称 3 次元 Young 図形 1

路へと帰着させることが出来る. ここではその作業を要点的にまとめよう.

まず図 24 のように π の外殻を向こう側から剥がしていく. それぞれの外殻は長

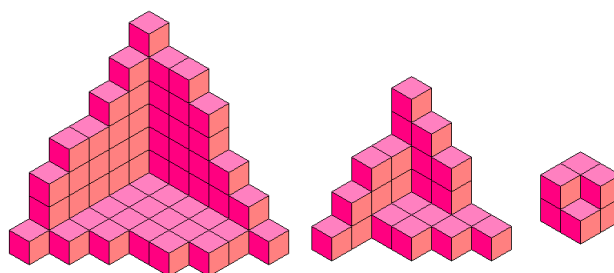


図 24: 巡回対称 3 次元 Young 図形 2

さがそれぞれ a_1, a_2, a_3 の骨格と、骨格の間を埋める Young 図形とに分けることが出来る (図 25).

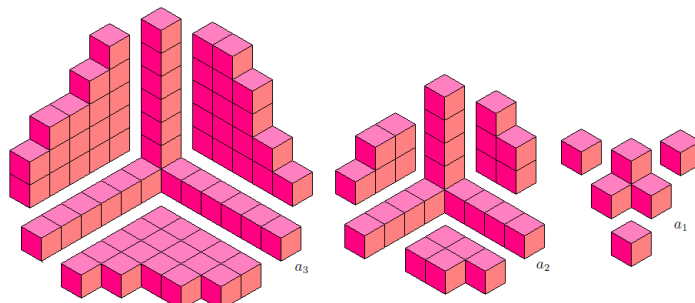


図 25: $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 7$ である.

外殻の底面だけを残すと図 26 となる. ここで隅をそろえるようにしてこれらの

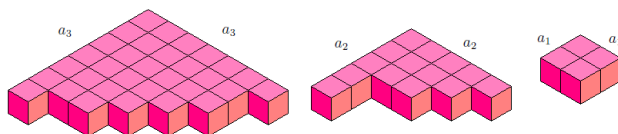


図 26: 巡回対称 3 次元 Young 図形 4

底面を積み上げたのが図 27 である. 図 27 を上から見れば, それぞれの底面の外形が非交差経路となっている (図 28).

この非交差経路の始点の組と終点の組は一致し, $\mathbb{A} = (a_i, 1)_{i=1}^m, \mathbb{B} = (1, a_j)_{j=1}^m$ となる.

$$|\mathcal{P}(\alpha_i, \beta_j)| = \binom{a_i + a_j - 2}{a_i - 1}$$

であることから, m 本の非交差経路の組 $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_m^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ の総数は,

$$\mathcal{P}_m^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \det \left(\binom{a_i + a_j - 2}{a_i - 1} \right)$$

となる. 経路が m 本のときの和をとるには $1 \leq a_1 < \dots < a_m \leq a$ を満たす

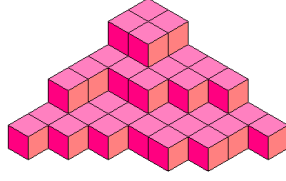


図 27: 巡回対称 3 次元 Young 図形 5

a_1, \dots, a_m すべてについて $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_m^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ を足し挙げればよいので, その値は

$$\sum_{1 \leq a_1 < \dots < a_m \leq a} \det \left(\begin{pmatrix} a_i + b_j - 2 \\ a_i - 1 \end{pmatrix} \right)$$

となる.

これまでは経路の数が m 本のもののみを考えていたが, 立方体内の巡回対称 3 次元 Young 図形の総数を求めるには経路の本数に対しても和を取る必要がある.

$$\sum_{m=1}^a \sum_{1 \leq a_1 < \dots < a_m \leq a} \det \left(\begin{pmatrix} a_i + b_j - 2 \\ a_i - 1 \end{pmatrix} \right)$$

この値は, 次の Fredholm の展開公式を使うことで求められる.

公式 6 (Fredholm の展開公式)

$$\sum_{\{p_1, \dots, p_m\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} \det(A_{p_i p_j})_{i, j=1}^m = \det(\delta_{ij} + A_{ij})_{i, j=1}^n = \det(I + A)_{n \times n}.$$

証明

$$\begin{aligned} & \sum_{\{p_1, \dots, p_m\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} \det(A_{p_i p_j})_{i, j=1}^m \\ &= \sum_{\{p_1, \dots, p_m\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^m A_{p_i p_{\sigma(i)}}. \end{aligned}$$

ここで, 置換 τ を次のように定義する.

- $i \in \{p_1, \dots, p_m\}$ のとき, $i = p_k$ として $\tau(i) = \sigma(p_k)$
- $i \notin \{p_1, \dots, p_m\}$ のとき, $\tau(i) = i$

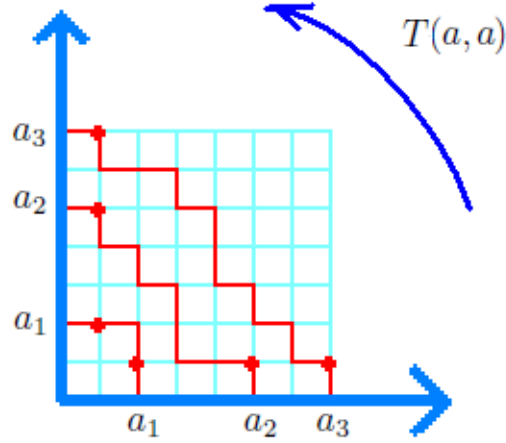


図 28: 図 27 を上から見たもの. 3.3 節の例 iv) にあたる.

このとき $\text{sgn}(\tau) = \text{sgn}(\sigma)$ となるので, S_U を $i, j \in U$ となる i, j についてのみ置換する演算子の全体として, 求める値は次のように変形できる.

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{U \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} \sum_{\tau \in S_U} \text{sgn}(\tau) \prod_{i \in U} A_i \tau(i) \\
 &= \sum_{U \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} \sum_{\tau \in S_U} \text{sgn}(\tau) \prod_{i \notin U} 1 \prod_{i \in U} A_i \tau(i) \\
 &= \sum_{\rho \in S_n} \text{sgn}(\rho) \prod_{i=1}^n (\delta_{i\rho(i)} + A_i \rho(i)) \\
 &= \det(\delta_{ij} + A_{ij})_{i,j=1}^n \\
 &= \det_{n \times n}(I + A).
 \end{aligned}$$

q.e.d.

Fredholm の展開公式により $\mathcal{B}(n, n, n)$ 内の巡回対称 3 次元 Young 図形の総数は

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\{a_1, \dots, a_m\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} \det \left(\left(\begin{array}{c} a_i + a_j - 2 \\ a_i - 1 \end{array} \right)_{i,j=1}^m \right) \\
 &= \det \left(I_n + \left(\begin{array}{c} i + j - 2 \\ i - 1 \end{array} \right)_{i,j=1}^n \right).
 \end{aligned}$$

と求まる.

また巡回対称 3 次元 Young 図形の個数の母関数は, 重みを適切に与えれば, 二項係数 $\binom{a_i + a_j - 2}{a_i - 1}$ を q -二項係数 $q^{3a_i - 2} \begin{bmatrix} a_i + a_j - 2 \\ a_i - 1 \end{bmatrix}_{q^3}$ に置き換えるだけで容易に求めることができる. ただし $\begin{bmatrix} m + n \\ m \end{bmatrix}_{q^3}$ は $\begin{bmatrix} m + n \\ m \end{bmatrix}$ の変数を q から q^3 に代えたものである.

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in \text{mathcal{B}(a,a,a)/C_3}} q^{|\lambda|} &= \sum_{\{a_1, \dots, a_m\} \subseteq \{1, 2, \dots, a\}} \det \left(q^{3a_i - 2} \begin{bmatrix} a_i + a_j - 2 \\ a_i - 1 \end{bmatrix}_{q^3} \right)_{i,j=1}^m \\ &= \det \left(I_a + \left(q^{3i-2} \begin{bmatrix} i + j - 2 \\ i - 1 \end{bmatrix}_{q^3} \right)_{i,j=1}^a \right). \end{aligned}$$

ただし $\mathcal{B}(a, a, a)/C_3$ は $\mathcal{B}(a, a, a)$ の内部にある 3 次元 Young 図形のなかで巡回対称であるもの全体の集合を表す.

5 Schur 関数とその応用

Schur 関数は様々な応用を持ち, Young 図形の組み合わせ論でも重要な意味を持っている. この節ではそのうちの一部を紹介する. Schur 関数にはいくつかの表示があるが, 組み合わせ的な定義からは行列式の表示を導くことができ (Jacobi-Trudi 公式), そこから表現論的な表示としての Weyl 公式も導くことができる. Weyl 公式により, 3 次元 Young 図形の母関数を求めることができる.

5.1 半標準盤と Schur 関数

- Young 盤とは, Young 図形に自然数を一定の条件を満たすように書き込んだものである.

- 標準盤 (standard tableaux) とは, Young 盤のうちで次のような制約を課したものである. Young 図形 $\lambda \vdash n$ の n 個の中に自然数 $1, 2, \dots, n$ を, 次の条件を満たすように埋めていく.

- ◇ 各行で, 数は左から右に増加する.
- ◇ 各列で, 数は上から下に増加する.
- ◇ $1, \dots, n$ がそれぞれ 1 回ずつ現れる.

1	2	6	11	14	15	16
3	5	7	13	17		
4	8	9				
10	12					

図 29: 分割 $\lambda = (7, 5, 3, 2)$ に対応する標準盤の一つ

● 半標準盤 (semistandard tableaux) とは, Young 盤のうちで次のような制約を課したものである. Young 図形 λ を自然数 $1, 2, \dots, m$ を使って, 次の条件を満たすように埋めていく.

◇ 各行で, 数は左から右に非減少である.

◇ 各列で, 数は上から下に増加する.

半標準盤においては, 自然数 $1, \dots, m$ が全て現れる必要はなく, また複数回現れる数があってもよい. 列の中では数が増加しなければならないので, $m \geq l(\lambda)$ を満たさなければならない.

<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td></td></tr></table>	1	1	1	2	2		<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td></td></tr></table>	1	1	2	2	2		<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td></td></tr></table>	1	1	1	2	3		<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td></td></tr></table>	1	2	3	2	3		<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td></td></tr></table>	1	2	2	3	3	
1	1	1																																
2	2																																	
1	1	2																																
2	2																																	
1	1	1																																
2	3																																	
1	2	3																																
2	3																																	
1	2	2																																
3	3																																	
<table border="1"><tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td></td></tr></table>	2	2	2	3	3		<table border="1"><tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td></td></tr></table>	2	2	3	3	3		<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td></td></tr></table>	1	2	2	2	3		<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td></td></tr></table>	1	1	3	2	3		<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td></td></tr></table>	1	1	2	3	3	
2	2	2																																
3	3																																	
2	2	3																																
3	3																																	
1	2	2																																
2	3																																	
1	1	3																																
2	3																																	
1	1	2																																
3	3																																	
<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td></td></tr></table>	1	1	3	3	3		<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td></td></tr></table>	1	1	1	3	3		<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td></td></tr></table>	1	2	3	3	3		<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td></td></tr></table>	1	1	2	2	3		<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td></td></tr></table>	1	1	3	2	2	
1	1	3																																
3	3																																	
1	1	1																																
3	3																																	
1	2	3																																
3	3																																	
1	1	2																																
2	3																																	
1	1	3																																
2	2																																	

図 30: 分割 $\lambda = (3, 2)$ に対応する Young 図形を, 自然数 $1, 2, 3$ を書き込んだ半標準盤を全て並べたもの. このような条件を満たす半標準盤は 15 通りある.

Schur 関数の組み合わせ論的な定義を与えるために, 半標準盤において整数 i を変数 x_i に置き換えたものを考える. Young 図形 λ を次の条件に従って変数 x_1, \dots, x_n で埋めていく.

◇ 各行で, 変数の添え字は左から右に非減少である.

◇ 各列で, 変数の添え字は上から下に増加する.

このような半標準盤全体の集合を $\mathcal{T}_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ と表す. 半標準盤 \mathbf{T} に現れる x_i を全て掛けたものを $x^{\mathbf{T}}$ とする. つまり \mathbf{T} の中に現れる x_i の個数を $\nu(i)$ と表記したとき, $|\lambda|$ 次の単項式 $x^{\mathbf{T}}$ は

$$x^{\mathbf{T}} = \prod_{i=1}^n x_i^{\nu(i)}$$

となる.

以上の記法を使って Schur 関数 $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ を次のように定義する.

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}_\lambda(x_1, \dots, x_n)} x^{\mathbf{T}}$$

$s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ に現れる $\prod_{i=1}^n x_i^{N(i)}$ ($N(1) + \dots + N(n) = |\lambda|$) の係数は半標準盤 $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ のうちで $x^{\mathbf{T}} = \prod_{i=1}^n x_i^{N(i)}$ となる半標準盤の個数である. 例えば, 図 30 から $s_{(3,2)}(x_1, x_2, x_3)$ の値が次のように求まる.

$$\begin{aligned} s_{(3,2)}(x_1, x_2, x_3) &= x_1^3 x_2^2 + x_2^3 x_3^2 + x_3^3 x_1^2 + x_1^2 x_2^3 + x_2^2 x_3^3 + x_3^2 x_1^3 \\ &\quad + x_1^3 x_2 x_3 + x_2^3 x_3 x_1 + x_3^3 x_1 x_2 + 2x_1 x_2^2 x_3^2 + 2x_2 x_3^2 x_1^2 + 2x_3 x_1^2 x_2^2. \end{aligned}$$

5.2 対称多項式

ここで後の計算に必要な対称多項式について軽く触れておく.

- 基本対称多項式 $e_k(x_1, \dots, x_n)$ を次のように定義する.

$$\sum_{k=0}^n e_k(x_1, \dots, x_n) t^k = \prod_{j=1}^n (1 + x_j t).$$

具体的には,

$$\begin{aligned} e_0(x_1, \dots, x_n) &= 1, \\ e_1(x_1, \dots, x_n) &= x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\ e_2(x_1, \dots, x_n) &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n, \\ e_3(x_1, \dots, x_n) &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n, \\ &\vdots \\ e_k(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k} \end{aligned}$$

となる. また, $e_k^{(i)}(x_1, \dots, x_n)$ を次のように定義する.

$$\sum_{n=0}^{k-1} e_k^{(i)}(x_1, \dots, x_n) t^n = \prod_{1 \leq j \leq n, j \neq i} (1 + x_j t).$$

$e_k^{(i)}(x_1, \dots, x_n)$ は x_1, \dots, x_n の中から変数 x_i を除いた $n - 1$ 個の変数による基本対称多項式である.

- 完全対称多項式 $h_k(x_1, \dots, x_n)$ を次のように定義する.

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k(x_1, \dots, x_n) t^k = \prod_{j=1}^n \frac{1}{1 - x_j t}.$$

具体的には,

$$\begin{aligned} h_0(x_1, \dots, x_n) &= 1, \\ h_1(x_1, \dots, x_n) &= x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\ h_2(x_1, \dots, x_n) &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n, \\ h_3(x_1, \dots, x_n) &= x_1^3 + \dots + x_n^3 \\ &\quad + x_1^2 x_2 + \dots + x_{n-1}^2 x_n \\ &\quad + x_1 x_2^2 + \dots + x_{n-1} x_n^2 \\ &\quad + x_1 x_2 x_3 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n, \\ &\quad \vdots \\ h_k(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_k} \end{aligned}$$

となる.

5.3 Jacobi-Trudi 公式

定理 5 (Jacobi-Trudi 公式)

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \det \left(h_{\lambda_i + j - i}(x_1, \dots, x_n) \right)_{i,j=1}^k, \\ \text{ただし, } k = l(\lambda) (\leq n).$$

証明 辺に適切な重みを与えることで, 非交差経路の数え上げに帰着させて Jacobi-Trudi 公式を導く.

格子点 $v = (s, t)$ に対して $(1, 0)$ 方向に移動する重みと $(0, 1)$ 方向に移動する辺の重みを次のように定める.

$$\begin{aligned} w(v, v + (1, 0)) &= 1, \\ w(v, v + (0, 1)) &= x_s. \end{aligned}$$

完全対称多項式 $h_{b-a}(x_1, \dots, x_n)$ となる.

$$\begin{aligned}
 G(\alpha, \beta) &= G\left((1, a), (n, b)\right) \\
 &= \sum_{P \in \mathcal{P}(\alpha, \beta)} \prod_{k=1}^{l(\mu(P))} x_{\mu_k} \\
 &= \sum_{\mu \subseteq \mathcal{B}(b-a, n-1) | \mu(b-a) \geq 1} \prod_{k=1}^{b-a} x_{\mu_k+1} \\
 &= \sum_{0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{b-a} \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_{b-a}} \\
 &= h_{b-a}(x_1, \dots, x_n).
 \end{aligned}$$

ここで図 32 のようにして半標準盤 $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ を始点の組を $\mathbb{A} = (1, k-i)_{i=1}^k$, 終点の組を $\mathbb{B} = (n, k-j+\lambda_j)$ と定めた非交差経路 $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_{\mathbb{A}, \mathbb{B}}^{\text{nonint}}$ 対応付けられる. このときの経路の組の重み $w(\mathbb{P})$ の値は $x^{\mathbf{T}}$ の値と一致する. (図 32)

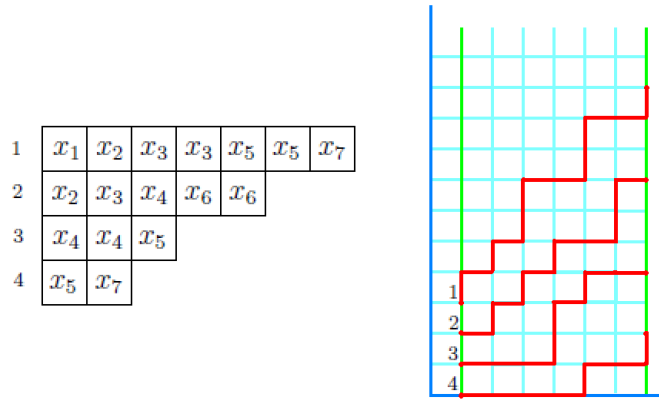


図 32: $n = 7, \lambda = (7, 5, 3, 2)$ のときの例. $k = l(\lambda) = 4$ である. 上から i 番目の経路は半標準盤の i 盤目の行に対応する. 重みの定義によりこの場合の非交差経路の重み $w(\mathbb{P})$ は $x_1 x_2^2 x_3^3 x_4^3 x_5^4 x_6^2 x_7^2$ となり, $x^{\mathbf{T}}$ と等しくなる.

以上と LGV 公式により,

$$\begin{aligned}
s_\lambda(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}_\lambda(x_1, \dots, x_n)} x^{\mathbf{T}} \\
&= \sum_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}_k^{\text{nonint}}} w(\mathbb{P}) \\
&= \det \left(G \left((1, k-i), (n, k-j+\lambda_j) \right) \right)_{i,j=1}^k \quad (\text{LGV 公式より}) \\
&= \det \left(h_{\lambda_i+j-i}(x_1, \dots, x_n) \right)_{i,j=1}^k.
\end{aligned}$$

q.e.d

5.4 Weyl 公式

Schur 関数は一般線形群の表現論とも関係がある. そこから得られる表示として Weyl 公式がある.

定理 6 (Weyl 公式)

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{\det(x_j^{n-i+\lambda_i})_{i,j=1}^n}{\det(x_j^{n-i})_{i,j=1}^n},$$

ただし $l(\lambda) < i \leq n$ となる i については $\lambda_i = 0$ として計算する.

ここでは Weyl 公式を Jacobi-Trudi 公式から導出してみよう.

証明 $l(\lambda) = k$ とし, $k+1 \leq i \leq n$ となる i については $\lambda_i = 0$ として計算する. (半標準盤の定義より, $n \geq k$ であることに注意されたい.) このとき,

$$\det(h_{\lambda_i+j-i}(x_1, \dots, x_n))_{i,j=1}^k = \frac{\det(x_j^{n-i+\lambda_i})_{i,j=1}^n}{\det(x_j^{n-i})_{i,j=1}^n}$$

であることを示す.

まずは行列 $A_\lambda, H_\lambda, H'_\lambda, M'$ を定める.

- $n \times n$ 行列 A_λ を次のように定める.

$$A_\lambda = (x_j^{n-i+\lambda_i})_{i,j=1}^n.$$

- $k \times k$ 行列 H_λ を次のように定める.

$$H_\lambda = (h_{\lambda_i+j-i}(x_1, \dots, x_n))_{i,j=1}^k.$$

その上で, $n \times n$ 行列 H'_λ を次のように定める.

$$H'_\lambda = \begin{pmatrix} H_\lambda & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}.$$

ただし I_{n-k} は $n-k \times n-k$ の単位行列である.

- $k \times n$ 行列 M を次のように定める.

$$M = \left((-1)^{n-i} e_{n-i}^j(x_1, \dots, x_n) \right)_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n}.$$

また $n-k \times n$ 行列 X を次のように定める.

$$X = (x_j^{n-k-i})_{1 \leq i \leq n-k, 1 \leq j \leq n}.$$

その上で $n \times n$ 行列 M' を次のように定める.

$$M' = \begin{pmatrix} M \\ X \end{pmatrix}.$$

このとき,

$$H'_\lambda M' = A_\lambda$$

が成り立つ. この等式の成立を見るには, 1行目から k 行目については次の式において $t^{n-i+\lambda_i}$ の係数をとればよい.

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} h_m(x_1, \dots, x_n) t^m \sum_{n=0}^{k-1} e_n^{(j)}(x_1, \dots, x_n) (-t)^n \\ &= \prod_{m=1}^k \frac{1}{1-x_m} \prod_{1 \leq n \leq k, n \neq j} (1-x_n t) \\ &= \frac{1}{1-x_j t} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (x_j t)^l. \end{aligned}$$

また, $k+1$ 行目から n 行目までについては, H' が単位行列であり, この部分では M' と A_λ が一致することから明らかである.

$H'_\lambda M' = A_\lambda$ であることから

$$\det(H'_\lambda)_{i,j=1}^n \det(M')_{i,j=1}^n = \det(A_\lambda)_{i,j=1}^n$$

が成り立つことがわかる.

$\det(M')$ の値を求めよう, そのためには便宜的に $\lambda = (0, \dots, 0)$ とおけばよい. このとき, H'_λ は対角線上の要素が全て 1 の上三角行列になるので $\det(H'_\lambda) = 1$ となる. また, $\det(A_\lambda) = \det(x_j^{n-i})$ となるので,

$$\det(M')_{i,j=1}^n = \det(x_j^{n-i})_{i,j=1}^n$$

であることがわかる.

また, H_λ と H'_λ の定義より

$$\det(H'_\lambda)_{i,j=1}^n = \det(H_\lambda)_{i,j=1}^k$$

である.

以上から,

$$\det(H_\lambda)_{i,j=1}^k = \frac{\det(A_\lambda)_{i,j=1}^n}{\det(x_j^{n-i})_{i,j=1}^n}$$

である.

q.e.d.

Weyl 公式を使えば, $s_{(3,2)}(x_1, x_2, x_3)$ の値は, 図を描くことなく

$$\begin{aligned} s_{(3,2)}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\begin{vmatrix} x_1^5 & x_2^5 & x_3^5 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \\ &= x_1^3 x_2^2 + x_2^3 x_3^2 + x_3^3 x_1^2 + x_1^2 x_2^3 + x_2^2 x_3^3 + x_3^2 x_1^3 \\ &\quad + x_1^3 x_2 x_3 + x_2^3 x_3 x_1 + x_3^3 x_1 x_2 + 2x_1 x_2^2 x_3^2 + 2x_2 x_3^2 x_1^2 + 2x_3 x_1^2 x_2^2 \end{aligned}$$

と計算することができる.

5.5 3次元 Young 図形の母関数との関係

任意の平面分割 $\pi \subseteq \mathcal{B}(a, b, c)$ に対して次の底面が $a \times b$ の平面分割 π' を足す.

$$\pi' = \begin{pmatrix} a & a & \cdots & a \\ a-1 & a-1 & \cdots & a-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

この操作により得られる平面分割は $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_a) = (b, b, \dots, b) = \mathcal{B}(a, b)$ 上の半標準盤と見なすことができる. c 方向の高さは 1 から $c+a$ までであるので, 変数を (q^{c+a}, \dots, q) とおけばよいから, その母関数は $s_{\mathcal{B}(a,b)}(q^{c+a}, \dots, q)$ となる.

3次元 Young 図形の母関数はそこから平面分割 π' を引けばよいので,

$$\sum_{\pi \subseteq \mathcal{B}(a,b,c)} q^{|\pi|} = q^{-\frac{sr(r+1)}{2}} s_{\mathcal{B}(a,b)}(q^{c+a}, \dots, q)$$

となる.

$q^{-\frac{sr(r+1)}{2}} s_{\mathcal{B}(a,b)}(q^{c+a}, \dots, q)$ の値を求めよう. Weyl 公式より

$$s_{\mathcal{B}(a,b)}(q^{c+a}, \dots, q) = \frac{X}{Y}$$

$$X = \det \left((q^{c+a+1-j})^{c+a-i+\lambda_i} \right)_{i,j=1}^{c+a}$$

$$Y = \det \left((q^{c+a+1-j})^{c+a-i} \right)_{i,j=1}^{c+a}$$

となる. 分子 X と分母 Y をそれぞれ次のように変形する

$$\begin{aligned} X &= \det \left((q^{c+a+1-j})^{c+a-i+\lambda_i} \right) \\ &= q^{ab + \frac{(c+a)(c+a-1)}{2}} \det \left((q^{c+a-j})^{c+a-i+\lambda_i} \right) \\ &= q^{ab + \frac{(c+a)(c+a-1)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq c+a} (q^{c+a-i+\lambda_i} - q^{c+a-j+\lambda_j}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= \det \left((q^{c+a+1-j})^{c+a-i} \right)_{i,j=1}^{c+a} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq c+a} (q^{c+a-i+1} - q^{c+a-j+1}) \quad (\text{Vandermonde 行列式より}) \\ &= q^{\frac{(c+a)(c+a-1)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq c+a} (q^{c+a-i} - q^{c+a-j}). \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
& q^{-\frac{sr(r+1)}{2}} s_{\mathcal{B}(a,b)}(q^{c+a}, \dots, q) \\
&= q^{-\frac{ba(a-1)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq c+a} \frac{q^{c+a-i+\lambda_i} - q^{c+a-j+\lambda_j}}{q^{c+a-i} - q^{c+a-j}} \\
&= q^{-\frac{ba(a-1)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq a} \frac{q^{c+a-i+b} - q^{c+a-j+b}}{q^{c+a-i} - q^{c+a-j}} \\
&\quad \times \prod_{1 \leq i \leq a, a+1 \leq j \leq c+a} \frac{q^{c+a-i+b} - q^{c+a-j}}{q^{c+a-i} - q^{c+a-j}} \\
&\quad \times \prod_{a+1 \leq i < j \leq c+a} \frac{q^{c+a-i} - q^{c+a-j}}{q^{c+a-i} - q^{c+a-j}} \\
&= q^{-\frac{ba(a-1)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq a} q^b \prod_{a+1 \leq i < j \leq c+a} \frac{q^{c+a-i+b} - q^{c+a-j}}{q^{c+a-i} - q^{c+a-j}} \prod_{a+1 \leq i < j \leq c+a} 1 \\
&= \prod_{a+1 \leq i < j \leq c+a} \frac{q^{c+a-i+b} - q^{c+a-j}}{q^{c+a-i} - q^{c+a-j}} \\
&= \prod_{i=1}^a \prod_{j=a+1}^{c+a} \frac{q^{c+a-i+b} - q^{c+a-j}}{q^{c+a-i} - q^{c+a-j}}.
\end{aligned}$$

ここで分母と分子に q^{j-c-a} を掛けると,

$$= \prod_{i=1}^a \prod_{j=a+1}^{c+a} \frac{1 - q^{-i+j+b}}{1 - q^{-i+j}}.$$

$j' = j - a, i' = a + 1 - i$ と置き換えれば

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i'=1}^a \prod_{j'=1}^c \frac{1 - q^{b+i'+j'-1}}{1 - q^{i'+j'-1}} \\
&= \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^c \prod_{k=1}^b \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-1}}.
\end{aligned}$$

以上から 4 章で求めた 3 次元 Young 図形の個数に関する母関数が再び得られた。

5.6 対称 3 次元 Young 図形

この節では Schur 関数の応用のもう一つの例として, 対称 3 次元 Young 図形の数え上げを扱う。

対称 (symmetric) 3 次元 Young 図形とは, 平面 $x = y$ に対して対称な 3 次元 Young 図形のことであり, 次のような条件を満たす $\pi \in \mathcal{B}(a, a, c)$ のことである。

$$(i, j, k) \in \pi \Rightarrow (j, i, k) \in \pi.$$

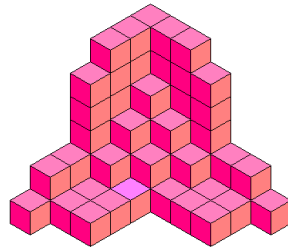


図 33: $\mathcal{B}(7, 7, 6)$ の内部にある対称 3 次元 Young 図形の例.

対称 3 次元 Young 図形を半標準盤に対応付けることで $\pi \subseteq \mathcal{B}(a, a, c)$ の母関数を Schur 関数を利用して求めることができる. ここではその作業を要点的にまとめよう.

変形を施す 3 次元 Young 図形を π と表して話を進める.

まず π を z 方向に 1 段ずつ輪切りにしていく (図 34).

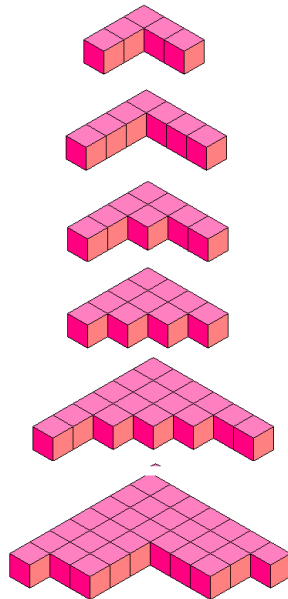


図 34: 対称 3 次元 Young 図形を z 方向に一段ずつ分けたもの. 当然どの段も平面 $x = y$ について対称である.

さらに各々の段を図 35 のように鍵型に分解する. 鍵型の一つ一つを真っ直ぐに

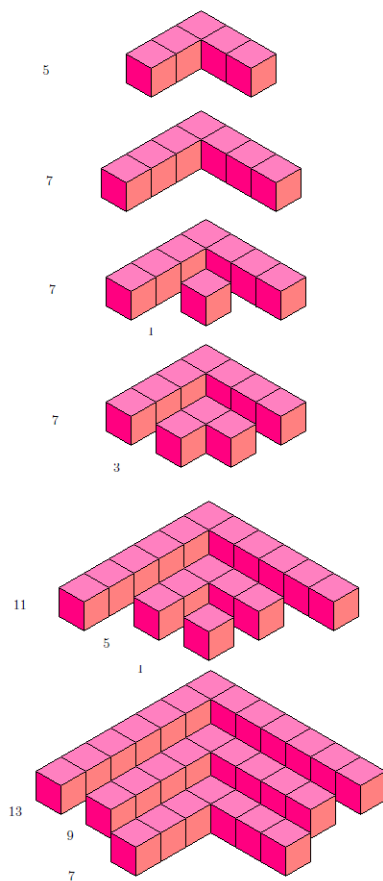


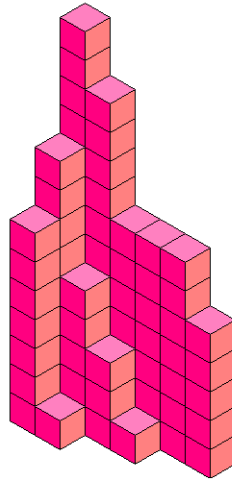
図 35: 各段を鍵の形に分解したもの. 平面 $x = y$ について対称なので, どの鍵型も奇数個の正方形から出来ていることがわかる.

して縦に並べなおせば次のような 3 次元 Young 図形 π' が得られる. π' の底面の形は π によって異なるが, その底面の形を整数分割 λ で表せば, $\lambda \subseteq \mathcal{B}(a, c)$ であり, π' は $\mathcal{T}_\lambda(q^{2a-1}, q^{2a-3}, \dots, q^3, q^1)$ に含まれる半標準盤となる (図 36).

よって π' の母関数は $\sum_{\lambda \subseteq \mathcal{B}(a, c)} s_\lambda(q^{2a-1}, q^{2a-3}, \dots, q^3, q)$ となる. π の母関数は π' の母関数と一致するので, これが求める母関数であることがわかる.

$$\sum_{\pi \in \mathcal{B}(a, a, c)/S_2} q^{|\pi|} = \sum_{\lambda \subseteq \mathcal{B}(a, c)} s_\lambda(q^{2a-1}, q^{2a-3}, \dots, q^3, q).$$

ただし $\mathcal{B}(a, a, c)/S_2$ は $\mathcal{B}(a, a, c)$ の内部にある 3 次元 Young 図形のなかで $x=y$ について対称なもの全体の集合を表す.



13	11	7	7	7	5
9	5	3	1		
7	1				

図 36: 鍵型を変形して得られる 3 次元 Young 図形 π' . 底面の形は $\lambda = (6, 4, 2)$ である.

ここではこれ以降の計算過程については触れないが、この値は次のように求められる.

$$\left(\prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^c \frac{1 - q^{2i+k-1}}{1 - q^{2i+k-2}} \right) \left(\prod_{1 \leq i < j \leq a} \prod_{k=1}^c \frac{1 - q^{2(i+j+k-1)}}{1 - q^{2(i+j+k-2)}} \right).$$

$q \rightarrow 1$ とすれば $\mathcal{B}(a, a, c)$ の内部にある対称 3 次元 Young 図形は

$$\left(\prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^c \frac{2i + k - 1}{2i + k - 2} \right) \left(\prod_{1 \leq i < j \leq a} \prod_{k=1}^c \frac{2(i + j + k - 1)}{2(i + j + k - 2)} \right)$$

と求まる. 計算過程については文献 [2] が詳しい.

6 de Bruijn 閉路 の数え上げ

この章では文献 [3] を参考に、3 次元 Young 図形のもう一つの数え方として de Bruijn 閉路を使った数え上げの方法を紹介する.

6.1 3 次元 Young 図形の数え上げを見直す

3 次元 Young 図形を 3 種類のひし形によるタイリングとみなしたとき、タイリングの領域は 6 角形 $\mathcal{H}(a, b, c)$ になる. $\mathcal{H}(a, b, c)$ を図 37 のように 3 つの平行四辺形

$p(a, b), p(b, c), p(c, a)$ に分ける. 「中心点」 O から出る 3 本の半直線 A, B, C において 2 つの平行四辺形が接し, O においてのみ 3 つ平行四辺形が接する.

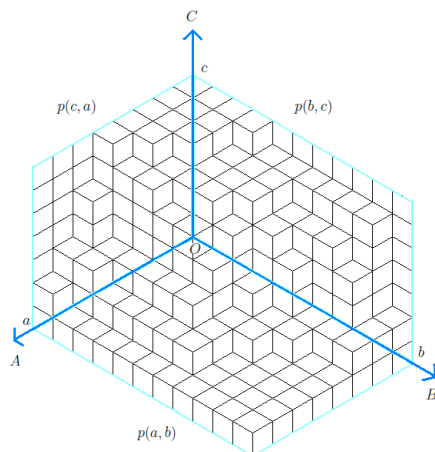


図 37: 平行四辺形へ分ける

ここでそれぞれの平行四辺形について, 他の平行四辺形と共有している辺に抜けるような de Bruijn 経路を引く. どのひし形のペアが de Bruijn 経路を構成するかについてはそれぞれの平行四辺形ごとに異なることに注意されたい. こうして出来た線の組は中心点の周りを周回する非交差な閉路を形作ることになる. (図 38)

この閉路を de Bruijn 閉路と呼ぶ. 4 章のときと同様に, 辺に注目することで同

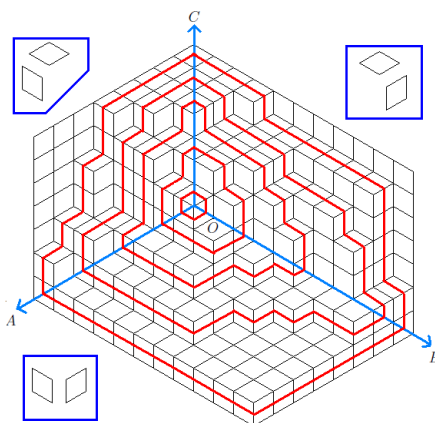


図 38: de Bruijn 閉路の描き方 1

様の閉路を作ることが出来る (図 39). $p(a, b)$ については C 軸と平行な辺の, 中心点 O から離れたほうの頂点を, A 方向の辺または B 方向の辺でつないだ線を考えればよい. $p(b, c)$ と $p(c, a)$ も同様である.

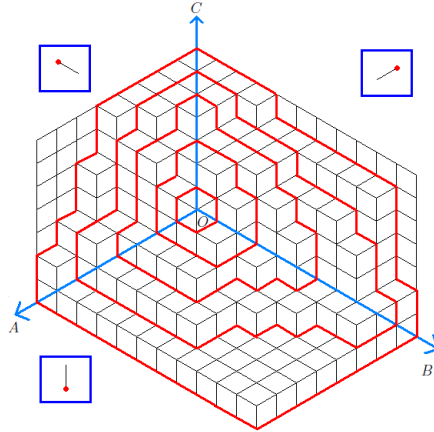


図 39: de Bruijn 閉路の描き方 2

こうして出来た d 本の閉路はそれぞれ、もともとの 3 次元 Young 図形の外殻を向こう側から剥がしていったときの d 枚の殻の形に対応する (図 40).

「中心点」 O の取り方にはもう 1 通りある (図 41). O' を採用した場合にできる de Bruijn 閉路は, タイリングの問題から 3 次元 Young 図形の問題に設定を読み替えるとすれば, O を採用した場合と違った意味を持つ. しかしどちらの点を採用したとしても得られる行列式は変わらない.

de Bruijn 閉路と非交差経路を対応付けよう.

中心点の周りに d 本の非交差な閉路が出来ているとする. 経路と A, B, C 軸が交わる点を内側からそれぞれ $(a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d), (c_1, \dots, c_d)$ とする. 平行四辺形 $p(a, b)$ 内にある d 本の非交差経路の組 \mathbb{P} について考える. \mathbb{P} の始点の組は $\mathbb{A} = (a_i, 1)_{i=1}^d$, 終点の組は $\mathbb{B} = (1, b_j)_{j=1}^d$ であることと,

$$|\mathcal{P}(a_i, b_j)| = \begin{pmatrix} a_i + b_j - 2 \\ a_i - 1 \end{pmatrix}$$

であることから, $p(a, b)$ 内の d 本の非交差経路の組 $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_d^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ の総数は,

$$\mathcal{P}_d^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \det \left(\begin{pmatrix} a_i + b_j - 2 \\ a_i - 1 \end{pmatrix} \right)_{i,j=1}^d$$

となる. 同じことを記号 $T_{ij} = \begin{pmatrix} i + j - 2 \\ i - 1 \end{pmatrix}$, $T(a, b) = (T_{ij})_{1 \leq i \leq a, 1 \leq j \leq b}$ を用いて表せば,

$$\mathcal{P}_d^{\text{nonint}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \det(T(a, b)_{a_i b_j})_{i,j=1}^d$$

となる. 同様にして $p(b, c)$ 内にある非交差経路の組の総数は $\det(T(b, c)_{b_i c_j})_{i,j=1}^d$ に, $p(c, a)$ 内にある非交差経路の組の総数は $\det(T(c, a)_{c_i a_j})_{i,j=1}^d$ に等しい.

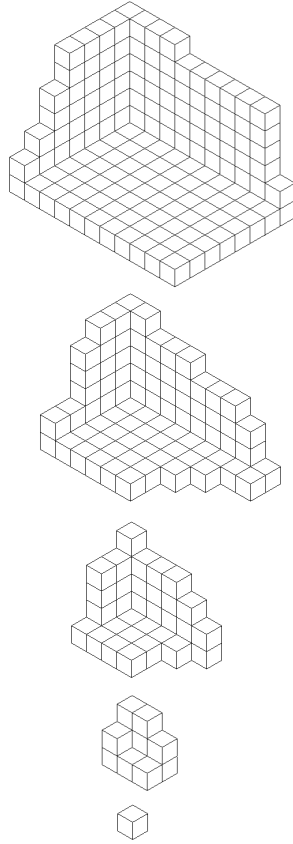


図 40: 3次元 Young 図形の外殻を剥く

以上から点の組 $(a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d), (c_1, \dots, c_d)$ を固定したときの de Bruijn 閉路の総数は

$$\begin{aligned} & \det(T(a, b)_{a_i b_j})_{i,j=1}^d \det(T(b, c)_{b_i c_j})_{i,j=1}^d \det(T(c, a)_{c_i a_j})_{i,j=1}^d \\ &= \det\left(\left(T(a, b)_{a_i b_j}\right)_{i,j=1}^d \left(T(b, c)_{b_i c_j}\right)_{i,j=1}^d \left(T(c, a)_{c_i a_j}\right)_{i,j=1}^d\right) \end{aligned}$$

となることがわかる. $\mathcal{H}(a, b, c)$ の内部にある d 本の de Bruijn 閉路の総数 $N_d(a, b, c)$ は $1 \leq a_1 < \dots < a_d \leq a, 1 \leq b_1 < \dots < b_d \leq b, 1 \leq c_1 < \dots < c_d \leq c$ を満たすように足し合わせたものなので,

$$\begin{aligned} & N_d(a, b, c) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq a_1 < \dots < a_d \leq a \\ 1 \leq b_1 < \dots < b_d \leq b \\ 1 \leq c_1 < \dots < c_d \leq c}} \det\left(\left(T(a, b)_{a_i b_j}\right)_{i,j=1}^d \left(T(b, c)_{b_i c_j}\right)_{i,j=1}^d \left(T(c, a)_{c_i a_j}\right)_{i,j=1}^d\right) \\ &= \sum_{1 \leq a_1 < \dots < a_d \leq a} \det\left(\left(T(a, b)T(b, c)T(c, a)\right)_{a_i a_j}\right)_{i,j=1}^d \end{aligned}$$

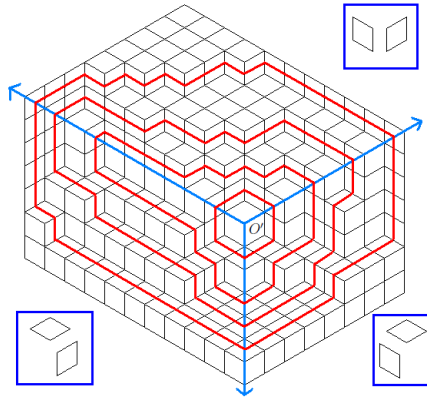


図 41: O' を中心にして作られた de Bruijn 閉路.

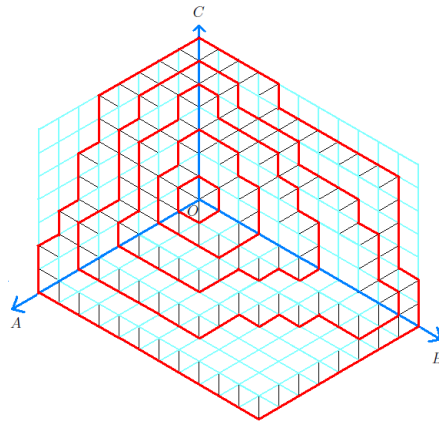


図 42: 3次元 Young 図形上に青で斜交格子を描き, その上に de Bruijn 閉路を引いた

である. ここで Fredholm の展開公式 (4.5 節参照) を使えば経路の本数による母関数表示が

$$\begin{aligned}
 & \sum_{d=0}^{\min(a,b,c)} \mu^d N_d(a,b,c) \\
 = & \sum_{d=0}^{\min(a,b,c)} \mu^d \sum_{1 \leq a_1 < \dots < a_d \leq a} \det \left((T(a,b)T(b,c)T(c,a))_{a_i a_j} \right)_{i,j=1}^d \\
 = & \det_{a \times a} (I + \mu T(a,b)T(b,c)T(c,a))
 \end{aligned}$$

と求まる. ここで $\mu = 1$ とすれば $\mathcal{H}(a,b,c)$ 内で可能な de Bruijn 閉路の総数が

$$\det_{a \times a} (I + T(a,b)T(b,c)T(c,a))$$

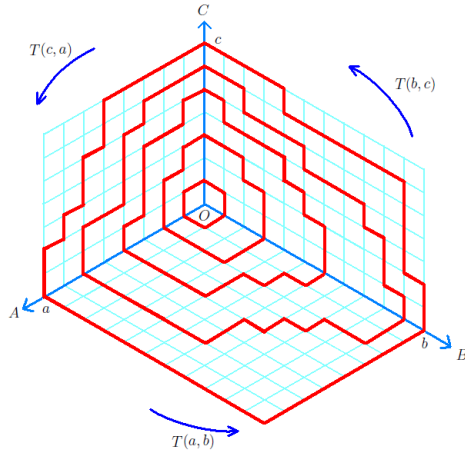


図 43: 図 42 において斜交格子と de Bruijn 閉路 だけを残したもの.

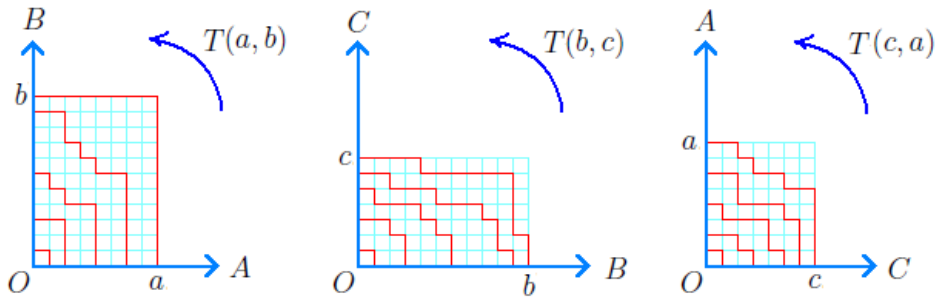


図 44: 図 43 の 3 つの平行四辺形 $p(a, b), p(b, c), p(c, a)$ をそれぞれ取り出して直交座標に直したもの.

で与えられることがわかる. この値は 4 章で得た $\mathcal{B}(a, b, c)$ 内に収まる 3 次元 Young 図形の個数

$$\det_{a \times a} H_{b,c}(a)$$

の別の表記になっている.

de Bruijn 閉路による表記を使えば, 例えば $\omega = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ として次のような等式が得られる.

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{B}(a,a,a)} \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2} &= \det_{a \times a} \left(I + T(a, a)^3 \right) \\ &= \det_{a \times a} \left(I + T(a, a) \right) \det_{a \times a} \left(I + \omega T(a, a) \right) \det_{a \times a} \left(I + \omega^2 T(a, a) \right). \end{aligned}$$

6.2 対称性を持った3次元 Young 図形の数え上げを de Bruijn 閉路で見直す

最後に de Bruijn 閉路の応用として, 巡回対称3次元 Young 図形, 完全対称3次元 Young 図形, そして対称3次元 Young 図形の個数の数え上げを行う.

6.2.1 巡回対称3次元 Young 図形の数え上げの見直し

巡回対称3次元 Young 図形に de Bruijn 閉路を引くと, 一周の $\frac{1}{3}$ に注目すればよいことがわかる. つまり B 軸と C 軸の間に非交差経路を引けば, 残りの部分は一意に決まる (図 45).

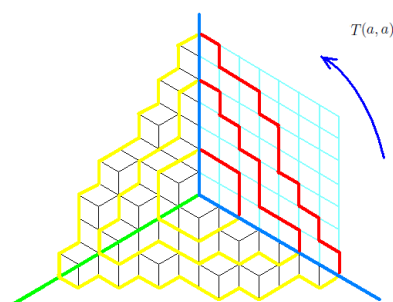


図 45: 図 23 に de Bruijn 閉路を引いたもの. この例では $a_1 = 2, a_2 = 5, a_7 = 7$ となっている. 一周の $\frac{1}{3}$ が決まれば残りの部分も全て決まることを強調した.

よって, 始点を $(i, 1), 1 \leq i \leq a$ の中から, 終点を $(1, j), 1 \leq j \leq a$ の中から, 始点の x 座標と終点の y 座標が一致するように選んだ非交差経路が $\mathcal{B}(a, a, a)$ の内部に収まる巡回対称3次元 Young 図形と一対一対応する. 以上から, $\mathcal{B}(a, a, a)$ の内部に収まる巡回対称3次元 Young 図形の総数は次のように求まる.

$$\sum_{d=0}^a \sum_{1 \leq a_1 < \dots < a_d \leq a} \left(T(a, a)_{a_i a_j} \right)_{i,j=1}^d$$

$$= \det_{a \times a} (I + T(a)).$$

これは4章での結果と同じものである.

6.2.2 完全対称 3 次元 Young 図形の数え上げ

完全対称 (totally symmetric) 3 次元 Young 図形とは, 巡回対称 3 次元 Young 図形でありかつ対称 3 次元 Young 図形でもあるような 3 次元 Young 図形のことである (図 46).

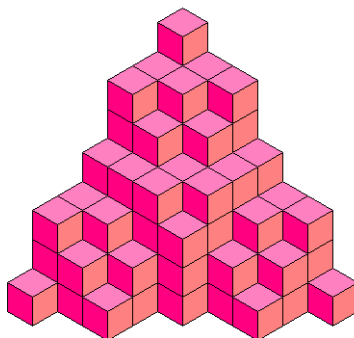


図 46: 完全対称多項式の例.

完全対称 3 次元 Young 図形に de Bruijn 閉路を引くと, 一周の $\frac{1}{6}$ に注目すればよいことがわかる. つまり B 軸と, B 軸と C 軸の二等分線との間に非交差経路を引けば, 残りの部分は一意に決まる (図 47). 始点の組 $\mathbb{A} = (a_i, 1)_{i=1}^d, 1 \leq a_1 < \dots < a_d \leq a$ と終点の組 $\mathbb{B} = (r_i, r_i)_{i=1}^d, 1 \leq r_1 < \dots < r_d \leq a$ を決めるとき,

$$|\mathcal{P}(a_i, b_j)| = \binom{a_i - 1}{b_j - 1} = W(a, a)_{a_i, b_j}$$

となる. $\mathcal{B}(a, a, a)$ の内部に収まる完全対称 3 次元 Young 図形の総数は次のように求まる.

$$\sum_{d=0}^a \sum_{1 \leq a_1 < \dots < a_d \leq a, 1 \leq r_1 < \dots < r_d \leq a} \left(W(a, a)_{r_i c_j} \right)_{i,j=1}^d.$$

6.2.3 対称 3 次元 Young 図形の数え上げの見直し

対称 3 次元 Young 図形に de Bruijn 閉路を引くと, 右か左のどちらか半分に注目すればよいことがわかる. つまり C 軸とその反対側の線分との間に非交差経路を引けば, 残り半分は一意に決まる (図 48). よって $\mathcal{B}(a, a, c)$ の内部に収まる対称

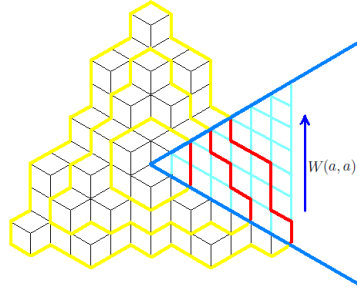


図 47: 図 46 に de Bruijn 閉路を引いたもの. この例では $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 7, r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 4$ となっている. 全体の $\frac{1}{6}$ が決まれば残りの部分も決まることを強調した.

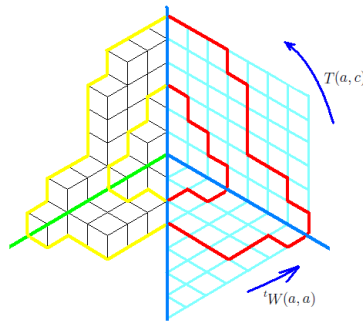


図 48: 図 33 に de Bruijn 閉路を引いたもの. この例では $r_1 = 2, r_2 = 3, c_1 = 3, c_2 = 7$ となっている. 半分が決まれば残り半分も決まることを強調した.

3次元 Young 図形の総数は次のように求まる.

$$\sum_{d=0}^a \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_d \leq a, 1 \leq c_1 < \dots < c_d \leq c} \left({}^t W(a, a) T(a, c)_{r_i c_j} \right)_{i, j=1}^d.$$

これは5章での結果

$$\left(\prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^c \frac{2i+k-1}{2i+k-2} \right) \left(\prod_{1 \leq i < j \leq a} \prod_{k=1}^c \frac{2(i+j+k-1)}{2(i+j+k-2)} \right)$$

の別表記になっている.

参考文献

- [1] Andrews, George. W. and Kimmo Eriksson, 2004. *Integer partitions*. Cambridge: Cambridge University Press (=佐藤文広訳, 2006. 『整数の分割』 東京: 数学書房.)
- [2] Bressoud, C., 1999. *Proofs and confirmations. The story of the alternating sign matrix conjecture*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [3] Francesco P. Di, P. Zinn-Justin and J.-B. Zuber, *Determinant formulæ for some tiling problems and application to fully packed loops*. preprint (arXiv.org/math-ph/041002)
- [4] Fulton, William, 1997. *Young Tableaux*. London Mathematical Society Student Texts vol. 35. Cambridge: Cambridge University Press.
- [5] Gessel, Ira, and Gérard Viennot, 1985. Binomial determinants, paths, and hook length formulae. *Advances in Mathematics* vol. 58, no. 3, pp. 295-308.
- [6] Katori, Makoto, 2004. *From vicious-walk transition densities to Chern-Simons partition functions*. これは中央大学での小研究会における香取眞理の配布資料である.
- [7] Macdonald, Ian G., 1995. *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. 2d ed. Oxford; Oxford University Press.
- [8] Stembridge, John, 1990. Nonintersecting paths, Pfaffians, and plane partitions *Advances in Mathematics* vol. 83, pp. 96-131.