ソリトン

高崎金久（岩波数学辞典第４版）

［英］soliton　［仏］soliton　［独］Soliton

A. ソリトン方程式

KdV (Korteweg-de Vries) 方程式

(1) $$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0$$

はブシネ（Boussinesq）方程式とともに 19 世紀から知られている非線形波動のモデル方程式である．1965 年頃，M.D. Kruskal と N. Zabusky はこの方程式を計算機によって数値的に解いて，パルス状の孤立波が衝突を繰り返しながら一種の粒子のように安定に振る舞う現象に出会い，これらの孤立波をソリトンと命名した．まもなくこの現象を数学的に解明する研究が始まり，KdV 方程式が無限個の保存量をもつ一種の積分可能系で，逆散乱法によって厳密に解けることなどが明らかになった．その後同様の特徴をもつ方程式が次々に発見され，近年は差分方程式の中にも類似の例が数多く見出されている．これらの方程式を総称して**ソリトン方程式**（**soliton equation**）という．

代表的なソリトン方程式には KdV 方程式以外に戸田格子の運動方程式 $q_{n,tt} = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n - q_{n+1}}$，サイン・ゴルドン方程式 $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$，非線形シュレディンガー方程式 $iu_t = -u_{xx} \pm |u|^2 u$ などがある．KdV 方程式を 2 次元空間に拡張した **KP（Kadomtsev-Petviashvili）方程式**

(2) $$3u_{yy} + (-4u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x = 0$$

も重要である．この方程式は u が y に依存しない場合には KdV 方程式に帰着し，t に依存しない場合にはブシネ方程式になる．さらに，ソリトン方程式の範疇には入らないが類似の取り扱いが可能なものとして，3 次元のボゴモルニ（Bogomolny）方程式や４次元の自己双対ヤン・ミルズ（Yang-Mills）方程式がある．

B. ラックス表示と逆散乱法

KdV 方程式は $L = \partial_x^2 + u$, $M = -4\partial_x^3 - 6u\partial_x - 3u_x$ $(\partial_x = \partial/\partial x)$ という微分作用素 † によって

(3) $$L_t = [M, L]$$

という形に表わせる．同様に，$L = \partial_x^2 + u$, $M = \partial_x^3 + (3u/2)\partial_x + v$ に対する方程式

(4) $$L_t - M_y = [M, L]$$

から v を消去すれば KP 方程式が得られる．一般に，与えられた問題を (3) や (4) のような形（L, M として微分作用素以外に差分作用素や行列も用いられる）に表わすことを**ラックス表示**（**Lax representation**）という．(3) と (4) をそれぞれ**ラックス方程式**（**Lax equation**）および**零曲率方程式**（**zero-curvature equation**）と呼ぶ．L, M が微分作用素の場合の零曲率方程式は**ザハロフ・シャバット（Zakharov-Shabat）方程式**とも呼ばれる．

ラックス方程式は連立線形方程式 $L\psi = \lambda\psi$, $\psi_t = M\psi$ の両立条件であり，固有値問題 † $L\psi = \lambda\psi$ のスペクトル † が t に依らず一定であることを意味する [6, 10]．KdV 方程式の遠方で急減少する解の場合には，$L\psi = \lambda\psi$ は u をポテンシャルとするポテンシャル散乱問題（→散乱理論）とみなせるが，スペクトルが一定であることに加えてその**散乱データ**（**scattering data**）も単純な時間発展則に従う．そこで，時間発展した散乱データから散乱の逆問題の解法によって u を復元すれば，KdV 方程式の解が求められたことになる．これが**逆散乱法**（**inverse scattering method**）である．特に無反射ポテンシャルと呼ばれる場合には逆問題は線形代数的に解けて**多重ソリトン解**（**multi-soliton solution**）が得られる．

同様の意味で，零曲率方程式は連立線形方程式 $\psi_y = L\psi$, $\psi_t = M\psi$ の両立条件である．この場合にも逆

散乱法やそれを拡張した解法が開発されている (V.E. Zakharov, A.B. Shabat).

C. ハミルトン構造

急減少関数や周期的関数のなす無限次元関数空間を相空間と見れば，KdV 方程式は積分可能なハミルトン系 † の構造をもつ [5, 4]．一般に，このような偏微分方程式のハミルトン系としての定式化は変分形式

$$u_t = P\frac{\delta H}{\delta u} \tag{5}$$

に基づく．ここで H は u の汎関数 †，$\delta H/\delta u$ は変分導関数 †，P は２個の汎関数 F, G に対する括弧式

$$\{F, G\} = \int \frac{\delta F}{\delta u} P \frac{\delta G}{\delta u} dx \tag{6}$$

がポアソンの括弧式 † の性質をもつように選ばれた微分作用素である．KdV 方程式の場合には $P = \partial_x$, $H = \int((1/2)u_x^2 - u^3)dx$ と選べる．さらに，H に始まる無限個の包合的な（すなわち $\{H_m, H_n\} = 0$ となる）保存量 H_n, $n = 1, 2, \ldots$ が存在する．

これらの保存量は互いに可換な時間発展（高次 KdV 方程式）$u_{t_n} = P\delta H_n/\delta u$ を定める．その全体を **KdV 階層**（**KdV hierarchy**）という．高次 KdV 方程式もラックス表示 $L_{t_n} = [M_n, L]$ をもつ．ここで M_n は L の擬微分作用素 † としての分数べき $L^{(2n+1)/2}$ から微分作用素の部分を取り出したもの $(L^{(2n+1)/2})_+$ である [7].

ハミルトン構造とラックス方程式の間に見られるこの関係は，KdV 方程式に限らず一般的に，リー代数 † の双対空間 † における群作用の**余随伴軌道**（**coadjoint orbit**）の言葉で説明できる [1]．零曲率方程式で表わされる方程式に対しても同様の群論的解釈がある（A.G. Reyman, M.A. Semenov-Tian-Shansky）.

D. 代数幾何学的方法

KdV 方程式において u を進行波 $u = u(x - ct)$ の形に仮定すれば楕円関数 † の解（あるいはそれが三角関数に退化したソリトン解）が得られる．これを特別な場合として含む解の一族として，代数幾何学的方法によって扱うことのできる**準周期的解**（**quasi-periodic solution**）がある．

KdV 方程式の準周期的解の一群は，x について周期的で，対応する L のスペクトルが**有限帯的**（**finite-band**）あるいは**有限空隙的**（**finite-gap**）と呼ばれる特殊な構造をもつものとして現れる [3]．これらの解はそれぞれに固有の超楕円曲線 † を伴っていて，そのリーマンの Θ 関数 † $\theta(z)$ $(z \in \mathbf{C}^g)$ によって $u = 2\partial_x^2 \log\theta(xv + tw + c) + D$ という形に表わされる．ここで c は任意定数ベクトル，v, w と D は超楕円曲線で決まる定数ベクトルおよび定数である．

KdV 方程式の一般的な準周期的解も超楕円曲線を伴っているが，これは可換微分作用素対の特別な場合として理解することができる [9]．一般に，１変数微分作用素の対 L, M が可換すなわち $[L, M] = 0$ という関係にあれば，２変数の定数係数多項式 $f(\lambda, \mu)$ が存在して，同時固有値問題 $L\psi = \lambda\psi$, $M\psi = \mu\psi$ のスペクトル対 (λ, μ) は代数曲線 † $f(\lambda, \mu) = 0$ を描く．この曲線を**スペクトル曲線**（**spectral curve**）という．さらに L, M 自体も等式 $f(L, M) = 0$ を満たす．特に L, M の階数が互いに素である場合には，スペクトル曲線に付随するリーマンの Θ 関数などを用いて L, M を具体的に記述できる．このような一般の可換微分作用素対には KP 方程式の準周期的解が対応する．L が２階で M が $2g + 1$ 階の場合には種数 g の超楕円曲線を伴う KdV 方程式の準周期解が得られる．

E. 双線形化法

双線形化法（**bilinearization method**）は，従属変数の変換によって方程式を双線形形式に書き換えて，逆散乱法などを介さず直接的に解を求める方法であり [8]，**広田の直接法**（**Hirota's direct method**）とも呼ばれる．双線形形式は新しい方程式を発見することなどにも活用されている．

たとえば，KdV 方程式 (1) は $u = 2\partial_x^2 \log f$ という変数変換によって $(D_tD_x + D_x^4)f \cdot f = 0$ という形に双線形化される．ここで広田の記法 $P(D_x, D_t)f \cdot g = P(\partial_x - \partial_{x'}, \partial_t - \partial_{t'})f(x, t)g(x', t')|_{x'=x, t'=t}$ を用いた．また，KP 方程式 (2) は $u = 2\partial_x^2 \log f$ という変数変換によって $(3D_y^2 - 4D_tD_x + D_x^4)f \cdot f = 0$ という形に双線形化される．方程式によっては複数の従属変数 $f, g, \ldots$ を導入する場合もある．

双線形化された方程式を解くには，解を $f = 1 +$

$f_1 + f_2 + \cdots$ というような形に仮定して低次の項から順次決めて行くという素朴な方法もあるが，近年は行列式に関するさまざまな恒等式（→行列式）を利用した巧妙な方法が開発されている．

F. KP 階層

KdV 階層と同様に，KP 方程式に対しても可換な高次時間発展からなる **KP 階層**（**KP hierarchy**）が構成できる [12]．KP 階層自体にもいくつかの拡張や類似（たとえば戸田格子に関連するもの [15]）があるが，それらはいずれもさまざまなソリトン方程式を特殊化として含む一つの普遍的枠組みを与える．

KP 階層は 1 階の擬微分作用素 $L = \partial_x + u_2\partial_x^{-1} + u_3\partial_x^{-2} + \cdots$ に対するラックス方程式 $L_{t_n} = [B_n, L]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ からなる．ここで $B_n = (L^n)_+$ （L^n の微分作用素部分）と定義した．$B_1 = \partial_x$ であるから t_1 は x と同一視できる．t_2, t_3 は KP 方程式の独立変数 y, t に他ならない．B_n 自体は零曲率方程式系 $B_{m,t_n} - B_{n,t_m} + [B_m, B_n] = 0$ に従う．

さらに，$u_2 = \partial_x^2 \log\tau$ を始めとする一連の関係式によって新たな従属変数 $\tau = \tau(x, t_2, \ldots)$ が導入される．これはイジング模型（→可解模型）やモノドロミー保存変形（→パンルベ方程式）における類似の概念にならって τ **関数**（**tau function**）と呼ばれる．τ 関数は KP 方程式の双線形化の従属変数 f を KP 階層へ拡張したものであり，それによって KP 階層は無限個の双線形方程式の系に書き換えられる．

KP 階層は無限次元のグラスマン多様体 † の上の力学系に翻訳できる [12, 13]．この観点から見れば，τ 関数に対する双線形方程式はグラスマン多様体のプリュッカー座標 † が満たす代数的関係式に他ならない．また，グラスマン多様体の等質空間 † としての構造に由来する大きな対称性 † の存在（その一部は時間発展として現れている）もわかる．この対称性に基づいて KP 階層に含まれるさまざまなソリトン方程式や特殊解を系統的に分類することができる．特に，準周期的解の位置づけがこれによって明確になる [11]．このことはヤコビ多様体 † の特徴づけに関する S.P. Novikov の予想の解決につながった [14]．

KP 階層を自由場やフォック空間などの場の理論の枠組み（→第 2 量子化）によって定式化することもできる [2]．そこからカッツ・ムーディ代数（→無限次元リー代数）や弦理論・共形場理論（→共形場理論）との関係が明らかになる．

参考文献

[1] M. Adler, On a trace functional for formal pseudo-differential operators and the symplectic structure of the Korteweg-de Vries type equations, Invent. Math. **50** (1979), 219–248.

[2] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, Transformation theory for soliton equations, III and IV, J. Phys. Soc. Japan **50** (1982), 3806-3812, 3813-3818; ditto V, Physica **4D** (1982), 343-365; ditto VI, Publ. RIMS., Kyoto Univ., **18** (1982), 1077–1110.

[3] B.A. Dubrovin, V.B. Matveev, S.P. Novikov, Non-linear equations of Korteweg-de Vries type, finite-zone linear operators, and Abelian varieties, Russian Math. Surveys **31:1** (1976), 59–146.

[4] L.D. Faddeev, V.E. Zakharov, Korteweg-de Vries equation: a completely integrable Hamiltonian system, Funct. Anal. Appl. **5** (1971), 280–287.

[5] C.S. Gardner, Korteweg-de Vries equation and generalizations, IV. The Korteweg-de Vries equation as a Hamiltonian system, J. Math. Phys. **12** (1971), 1548–1551.

[6] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura, Method for solving the Korteweg-de Vries equation, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1095–1097.

[7] I.M. Gelfand, L.A. Dikii (Dickey), Asymptotic behavior of the resolvent of Sturm-Liouville equations and the algebra of the Korteweg-de Vries equation, Russian Math. Surveus **30:5** (1975), 77–113; Fractional powers of operators and Hamiltonian systems, Funct. Anal. Appl. **10** (1976), 259–273.

[8] R. Hirota, Direct method of finding exact solutions of nonlinear evolution equations, Lect. Notes. Math. **515** (Springer-Verlag, 1976), 40–68.

[9] I.M. Krichever, Integration of nonlinear equations by the method of algebraic geometry, Funct. Anal. Appl. **11** (1977), 12–26; Methods of algebraic geometry in the theory of nonlinear equations, Russian Math. Surveys **32:6** (1977), 185–213.

[10] P.D. Lax, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, Comm. Pure. Appl. Math. **21** (1968), 467–490.

[11] M. Mulase, Cohomological structure in soliton equations and Jacobian varieties, J. Diff. Geom. **19** (1984), 403–430.

[12] M. Sato, Soliton equations as dynamical systems on an infinite dimensional Grassmannian manifold, 数理解析研究所講究録 **439** (1981), 30–46; M. Sato, Y. Sato, ditto, Lect. Notes. Num. Anal. **5** (Kinokuniya, Tokyo, 1982), 259–271

[13] G.B. Segal, G. Wilson, Loop groups and equations of KdV type, Publ. Math. IHES **61** (1985), 5–65.

[14] T. Shiota, Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations, Invent. Math. **83** (1986), 333–382.

[15] K. Ueno, K. Takasaki, Toda lattice hierarchy, Advanced Studies in Pure Math. **4** (Kinokuniya, 1984), 1–94