

Introduction

曲線  $H(x, y) = 0$   $\xrightarrow[\text{古典極限}]{\text{量子化}}$  量子曲線  $\hat{H}(\hat{x}, \hat{y})\Psi = 0$   
 (曲線の量子化)

DOE/OAE

$[\hat{x}, \hat{y}] \neq 0$  (普通  $[\hat{x}, \hat{y}] = 0$ )

①  $\hat{x} = x, \hat{y} = -\hbar \partial_x$   $[\hat{x}, \hat{y}] = \hbar$   
 ②  $\hat{x} = x, \hat{y} = e^{-\hbar \partial_x} = \hat{y} \Psi(x) = \Psi(x - \hbar)$   
 ③  $\hat{x} = x, \hat{y} = e^{-\hbar \partial_x^2} = \hat{y} \Psi(x) = \Psi(x)$   
 $\hat{y} \Psi(x) = \Psi(x)$

(3)  $H(x, e^y) \rightarrow \hat{H}(e^{\hat{x}}, e^{\hat{y}})$   
 $\hat{x} = x, \hat{y} = -\hbar \partial_x$

<量子曲線の出現場所>

- 量子力学理論 (A 形式) = 位相的極限化式 (Eynard-Oursin, Gukov-Sulkowski)
- 量子可積分系 (変数分離, Baxter 方程式 (TR))
- 位相的弦理論
  - ↳ 2D の曲線の量子化
- Seiberg-Witten 理論 (4D/5D 超弦理論) (Narasimhaiah 曲面の数)
- Painlevé 方程式 (量子 Painlevé 方程式)
  - ↳ AGT 対応 (GT/GFT 対応)

全部関係する

<この話の全体の2次元> 量子力学の観点で弦理論/場の理論を学ぶ

- <項目>
1. 局所的な CY 多様体 (3次元) と古典可積分
  2. 位相的弦理論
  3. 位相的極限と strip geometry
  4. Seiberg-Witten 曲線の量子化と量子可積分
  5. ST/TS 対応
- 量子可積分  $\rightarrow$  物質 (2D の曲線の量子化)  $\rightarrow$  完全 SW 解の存在性問題
- (5. ST/TS 対応)  $\rightarrow$  研究進行中

1. 最新の Calabi-Yau 多様体

3次元 Calabi-Yau 多様体  
 2次元 Calabi-Yau 多様体

〈構成〉  $X = \mathbb{C}^{k+3} // G, \quad G = U(1)^k \subset \mathbb{C}^{k+3}$

増大  
11-7-88

$\int \bar{c}_i dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k \wedge dx_l \wedge dx_m$

G の作用:  $(e^{i\theta_\alpha})_{\alpha=1}^k : X = (x_1, \dots, x_{k+3}) \rightarrow (\dots, e^{i\theta_\alpha} x_i, \dots)$

2.2.5  $\vec{c}^\alpha = (c_i^\alpha)_{i=1}^{k+3} \in \mathbb{Z}^{k+3}$  は  $\alpha$  番目の  $U(1)$  の作用の重数

2次元 Calabi-Yau

Calabi-Yau 条件  $\sum_{i=1}^{k+3} c_i^\alpha = 0$

3次元 Calabi-Yau

$\mu_\alpha(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^{k+3} c_i^\alpha |x_i|^2, (\alpha=1, \dots, k)$  :  $U(1)$  の作用の重数

$Q^k$  の 2次元  
 2次元 Calabi-Yau  
 4-7-1-5x-78  
 4-7-1-5x-78  
 2次元 Calabi-Yau

$\mathbb{C}^{k+3} // G = \{ (x_1, \dots, x_{k+3}) \in \mathbb{C}^{k+3} \mid \mu_\alpha(x_1, \dots, x_{k+3}) = t_\alpha / U(1)^k \}$   
 $= \mu^{-1}(t_1, \dots, t_k) / U(1)^k$

$t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}_+$  : 4-7-1-5x-78 のパラメータ

$(Q_\alpha = e^{-t_\alpha})$

〈ト-4-7-1-5x-78〉  $\vec{v}^{(i)} \in \mathbb{Z}^2, (i=1, \dots, k) : \sum_{i=1}^{k+3} c_i^\alpha \vec{v}^{(i)} = 0$

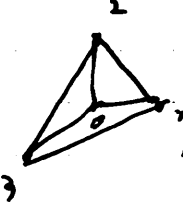
(2次元 Calabi-Yau の場合)

Calabi-Yau の条件  
 4次元 Calabi-Yau  
 2次元 Calabi-Yau  
 (6次元 Calabi-Yau)

$\vec{v}^{(i)}$  は  $\mathbb{Z}^2$  の基底  
 3次元 Calabi-Yau の場合、 $\{\vec{v}^{(i)}\}$  は  $\mathbb{Z}^2$  の基底

例  $lowd P^2 = K_{P^2}$  (標準束の全空間)  $= \mathcal{O}(-3) \rightarrow P^2$

$v^{(1)} = (0, 1), v^{(2)} = (1, 0), v^{(3)} = (0, 1), v^{(4)} = (-1, -1)$



線分を結ぶと面積  $1/2$  の格子三角形が  $P^2$  を覆う  
 (P^2 の各点から出発すると各方向が4方向ある)

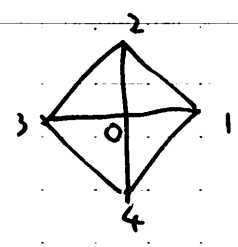
$C_0 = -3, C_1 = C_2 = C_3 = 1$

4次元 Calabi-Yau 多様体の

X の Calabi-Yau 多様体 ← 3次元 Calabi-Yau 多様体

同位ト707 CY3の  
 奥座標の72.574-77  
 由面Sの標準系KS  
 の全空間233.

local  $P^1 \times P^1 = K_{P^1 \times P^1}$

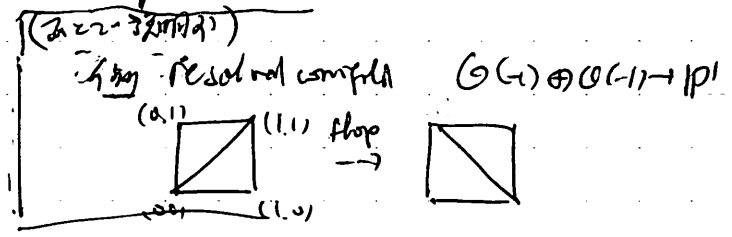
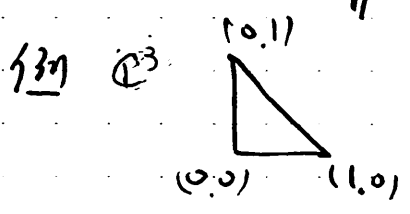


$v^{(0)} = (0,0), v^{(1)} = (1,0), v^{(2)} = (0,1), v^{(3)} = (1,0), v^{(4)} = (0,1)$

これ七面体  $V_2$  の3角形と5角形と格子多角形  
 の3角形分割  $u_{23}, u_{32}$ .

反射的7角形  
 (115-117)

( $\rightarrow$  Hilzbruch 曲面  $F_m$  と  $P^2$  の  $\mathbb{R}$ -Blowup  $\tilde{F}_m \rightarrow F_m$  - 一般化  
 $P^1 \times P^1 = F_0 \xrightarrow{L, P^1}$  Painter's 方程式  $= P^1 \times P^1$ )



$\langle \mathbb{C}^3 \text{-曲線} \rangle$

$W(x,y) = \sum_{i=1}^k w_i x_i^2 y_i^2 = 0$

$\mathbb{C}^3: W(x,y) = x + y + 1 = 0$

local  $P^2: W(x,y) = x + y + x^2 y^2 + u = 0$

local  $P^1 \times P^1: W(x,y) = x + mx^2 + y + y^2 + u = 0$

定数  $x, y$  の  $\mathbb{C}^3$  の  $\mathbb{R}$ -Blowup:  $\mathbb{C}^3: W(x,y) = e^x + e^y + 1 = 0$

local  $P^2: W(x,y) = e^x + e^y + e^{-x-y} + u = 0$

local  $P^1 \times P^1: W(x,y) = e^x + me^{-x} + e^y + e^y + u = 0$

genus = 1795 の個数

2 の係数  $\{u_i\}_{i=1}^g: \mathbb{Z}^g$

境界上の点の個数の genus の導出  
 $\sum_{j=1}^g m_j^2$  (番号:  $x \rightarrow y$ )

可積分の  
 2つの曲線の  
 共通点の個数

位相的理論  $u_{23}, u_{32}$  の  $\mathbb{C}^3$ -射影体

$X \rightarrow \tilde{X}: z_1 z_2 + W(x,y) = 0$   
 (2nd (algebraic)  $\mathbb{C}^3$ )

$(x, y, z_1, z_2)$   
 の  $\mathbb{C}^3$  の射影

4

# 2. 位相的弦理論

$\Sigma$ : 2次元の曲面 (世界面)



$\phi$

空間  $X$  (Calabi-Yan 多様体)

弦理論

$\Sigma$  上の Riemann 計量  $g$

$\phi: \Sigma \rightarrow X$ : 写像

標的  $(\mathbb{R}^{1,3} \times X, \omega)$

( $\phi$  は正則写像)

Minkowski 空間 (4次元)

$\mathcal{L}_g(X, \phi)$  の変分

$\Sigma$  と  $\phi$  の両方を統計的力学として見る (W. P. A. Kähler 形式)

$$E = \int_{\Sigma} \sqrt{g} \exp(-\int_{\Sigma} \phi^* \omega)$$

$H(X, \mathbb{R}) = \oplus_{k=0}^3 \mathbb{R} \omega^k$

II 型超弦理論

twist (理論的)

A-model (位相弦理論)

B-model

対称性

$$Z_{\text{classical}} = \int_{\mathcal{M}(g, \phi)} \exp(-\int_{\Sigma} \phi^* \omega)$$

$$Z_{\text{quantum}} = \int_{\mathcal{M}(g, \phi)} \exp(-\int_{\Sigma} \phi^* \omega) \prod_{i=1}^s d\tau_i$$

$\phi: \Sigma \rightarrow X$  の変数  $\phi|_{\partial \Sigma} = \sum_{i=1}^s d\tau_i \theta_i = \beta$

$\beta = e^{\pm g_s} \text{ns}$  の変数 (Gopakumar-Vafa 不変量の理論) の世界面

弦理論  $\Sigma$ : genus  $g$ , holes  $h$   $\phi: (\Sigma, \omega) \rightarrow (X, \omega_X)$

$\partial \Sigma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_h$  special Lagrangian  $L(X, \omega_X)$

$\phi(\partial \Sigma) \subset L$  (3次元の端点のみを  $L$  に写す)

$\Sigma$  上の  $\omega$  の変数  $\omega = \sum_{i=1}^s d\tau_i \theta_i$

$h_1(\Sigma) = 2g + h$  の変数

$\partial \Sigma$  の  $h$  個の成分の巻き付け  $\phi|_{\partial \Sigma} = \sum_{i=1}^h \omega_i \theta_i$

$W = (w_1, \dots, w_h)$  ( $\theta_i$  の巻きの係数)

$$F_{g,h}(W) = \int_{\mathcal{M}(g,h)} \sqrt{g} \exp(-\int_{\Sigma} \phi^* \omega) = \int_{\mathcal{M}(g,h)} \sqrt{g} \prod_{i=1}^h d\tau_i e^{-\sum_{i=1}^h \tau_i \theta_i}$$

変数のリスト  $g_s, d\tau_i, \theta_i, w_i, h$

多項式  $(x_1, x_2, \dots)$  を用いて Seiberg 変換 (正則写像) を

$$Z(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\text{opm}} Z_n \text{Sylvester}$$

$W$  の同値類  $w = (a, b, c) \rightarrow k = (2, 1, 0) \rightarrow k_1 > k_2 > k_3 = -n$

変数のリスト  $Z(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\text{opm}} Z_n \text{Sylvester} = \sum_{\text{opm}} Z_n^{(k)} \lambda^{(m)}$

### 3. 位相的位点 & strip geometry

位相的位点 — (Agarwal & Klemm-Marinin-Vorfa (1995) 254-255)  
 — 图形的方法. (A-Diagram-KIV, Chap 261 (2006) 425)

位相的位点論の応用として非閉曲線  $\langle \sigma \rangle$  图形の基の記述  
 組合せ的位点 (一般, 特殊群の位点, in-1, 2) の位点系から得る

4次元の位点の系から得る  $\langle \sigma \rangle$

(Li-Liu-Liu-Zhan  
 Comm. Topol. 13 (2004) 527)

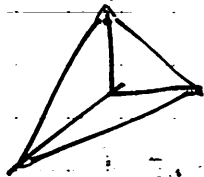
これは  
 $\mathbb{R}^3$  の  $\langle \sigma \rangle$  の  $\mathbb{C}$ -モデル  
 直線  $\rightarrow$  幾何的遷移 (geometric transition)

最近, 中位点と共帯  
 組合せ的位点の推定  
 予備的である

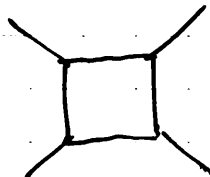
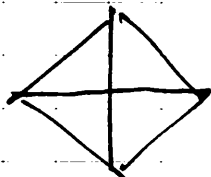
$\langle \sigma \rangle$  图形

$\langle \sigma \rangle$  图形 (三角面多面体の  
 の対称性, 辺の位点の幾何的意味がある,  
 (異なる二直線交る方向に向かう))

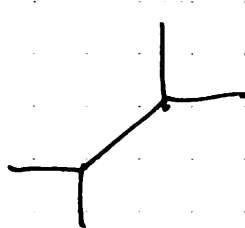
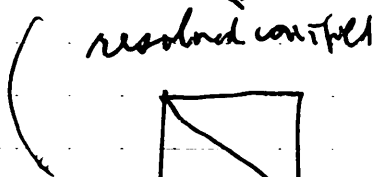
例 local  $\mathbb{P}^2$



local  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = \text{local } \mathbb{F}_0$



local  $\mathbb{F}_1$ , local  $\mathbb{F}_2$  是  
 正方形の位点  
 4角形から



の位点系

$\mathbb{C}^3$



6

$z = e^{-\lambda}$ ,  $\lambda = \rho st$

一般化

$Z = \sum_{\text{有界区}} C_{\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}} (-Q)^{|\alpha|} (1)^{|\alpha|}$

$t = 1 - \rho st \rightarrow$   
 対称性  
 2つの変数

外に与えられた  
 $n$ 個の変数  
 $z$ の  
 (Lagrangeの  
 乗数条件表現)

頂点部分  
 3個, 各点  
 分割の1/2

区間の分割

$C_{\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}} = q^{|\alpha|/2} S_{\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}}(q^{-1/2})$

変数  
 変数?

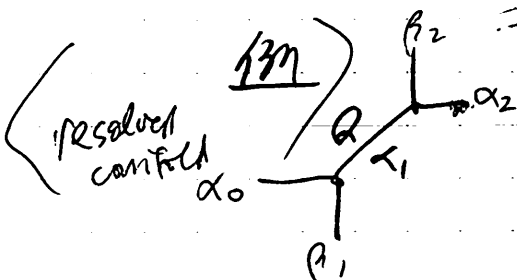
$\times \sum_{\alpha} S_{\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}}(q^{-1/2}) S_{\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}}(q^{-1/2})$

区間の分割  
 $\mathbb{C}^3$ の解法は区間の分割  
 区間の分割

$z = e^{-\lambda} = (q^{1/2}, q^{3/2}, \dots)$

$q^{-\lambda} = (q^{1/2 - \mu}, q^{3/2 - \mu}, \dots)$

$S_{\alpha}, S_{\beta}, \mu$  の無変数の区間分割



$z_{\alpha_0 \alpha_2} = \sum_{\alpha_1} C_{\alpha_0, \alpha_1} (-Q)^{|\alpha_1|} C_{\alpha_1, \alpha_2}$

$z_{\alpha_0 \alpha_2} = q^{|\alpha_0|} S_{\alpha_0}(q^{-1/2}) S_{\alpha_2}(q^{-1/2}) \langle \alpha_0 | \alpha_1 \alpha_2 \rangle$

$\alpha_i, \beta_i$  の区間分割は区間分割の区間分割

区間分割の区間分割  
 区間分割の区間分割

$z_{\alpha\beta} = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - Q q^{i+j-1}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - Q q^n)^n$

区間分割の区間分割

$= \exp\left(\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{Q^m}{(q^{-m/2} - q^{m/2})^2}\right)$

区間分割の区間分割  
 区間分割の区間分割

$z_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}(q^{-1/2}) \prod_{j=1}^{\infty} (1 - Q q^{-t\beta i + i + j - 1})$

区間分割の区間分割

$z_{\alpha\beta} / z_{\beta\alpha}$  - 区間分割の区間分割

$z_{\alpha\beta} / z_{\beta\alpha}$   
 $z_{\alpha\beta} / z_{\beta\alpha}$   
 区間分割

$Z(\lambda) = \sum_{\beta} z_{\alpha\beta} S_{\beta}(\lambda)$  の KP の区間分割  
 ( $t_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^k$  の区間分割)

$S_{x,p}(x, q^{-1}) = S_{\text{strip}}(x, q^{-1}) = \beta = \dots = (1^n) \text{ の } q\text{-analogue}$

$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{z(1^n)\phi}{z\phi\phi} \quad \left( = \frac{z(x, 0, \dots)}{z\phi\phi} \right)$

zeta のこと

$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a; q/n) q^{n/2} x^n}{(q; q)_n}$

(本質的な)  $q$ -超幾何級数  
 $(a; q)_n = (q-a)(1-aq) \dots (1-aq^{n-1})$

2次元格子

$(1 - q^{x_0}) \Psi(x) = q^{y/2} x (1 - aq^{x_0}) \Psi(qx)$

7行

$\Delta W(a, q^{x_0}) \Psi = ((1 - q^{x_0}) - q^{y/2} x (1 - aq^{x_0})) \Psi(x) = 0$

$W(x, y) = (1 - y) - x(1 - ay) = 0$  の格子と一致する。

$\hat{x} = x$   
 $\hat{y} = q^{x_0} x$

$(a$  の値を  $1/3x - 9$  とする)



$q \rightarrow 1$   
 5項級数  
 $\Psi \sim e^{\frac{S(x)}{h}}$   
 $y = S'(x)$

... 2次元格子と一致する。

Strip geometry

resolved worldsheet の格子

高さ  $1/2$  の帯 (strip) の中の格子は  $1 - y$  の図形と一致する

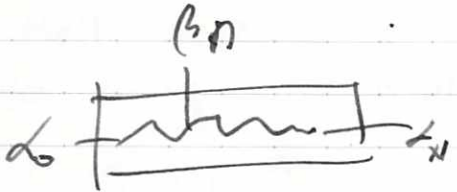
(台形の三角格子) strip geometry による

width  $\infty$



(各三角格子面積  $1/2 \rightarrow$  面積)

strip geometry の格子と同一格子の zeta 関数



$\Psi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{z\phi\phi}{z\phi\phi} \frac{\phi(1^n)\phi}{\beta_n}$

(1次元  $q$ -超幾何級数  $n=1$ )

Strip geometry  
 2次元格子  
 2次元格子の zeta 関数  
 (closed topological vector)

$B_n(q^{-1}q^{x_0}) (1 - q^{x_0}) \Psi_n(x) = q^{y/2} x C_n(q^{x_0}) \Psi_n(x)$

( $B(y), C(y)$  は  $1 - ay \neq 0$  の同因子を持つ)

$B_n(y) (1 - y) - x C_n(y) = 0$

格子 local FN の  $q$ -analogue

refined topological vector —  $\beta_n$  の  $q$ -analogue  
 $q$ -超幾何 zeta 関数 (定数の非同位性加算)

8

core 2D の完全 WKB 解析 とは 2D の 解析的 2D

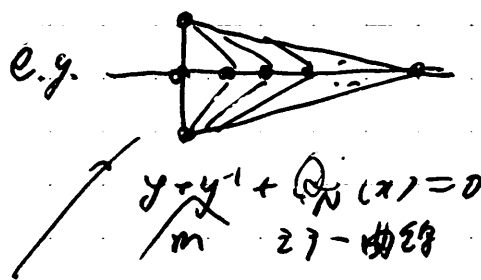
2D 曲線の 特異点? (genus 0)

他相の漸近式の係数 (Borot et al)

### 4. Seiberg-Witten 理論の量子化と量子同期 (Verbitskiy)

< geometric engineering > 2D 曲線の 特異点の 漸近式

高次元の Calabi-Yau 多様体  $\xrightarrow{\text{縮小}}$  4D  $N=2$  の  $\mathcal{N}=2$  理論  
Seiberg-Witten 理論 (低次元の有理解論)



$$H(x, y) = N(y + y^{-1}) + P(x) = 0$$

SW 曲線の (相対的) 2D 曲線 (SW 曲線)  $(\lambda = y \circ x)$

(Lax 形式と 2D の 可積分系の理論)

$$a_i = \oint_{A_i} \dots$$
$$a_i' = \oint_{B_i} \dots = \frac{\partial F_0(a)}{\partial a_i}$$

$\exists F_0 = F_0(a_i) \therefore$  SW 理論の答え (Lax 形式)

同期化の 可積分系 (Lax 形式) の 可積分性

### Nekrasov-Shatshvili

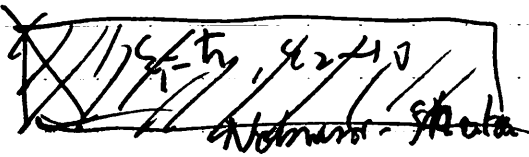
### Nekrasov-Okounkov

2D 可積分系 (Lax 形式) の 可積分性

$$Z(\epsilon_1, \epsilon_2) = \exp\left(-\frac{F_0(a)}{\epsilon_1 \epsilon_2} + \dots\right) \quad (\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0)$$

$F_0 =$  SW 理論の答え

### Nekrasov-Shatshvili



$$\epsilon_1 = t \neq 0$$

$$\epsilon_2 \rightarrow 0 \text{ 2D}$$

SW 曲線の量子化の理論

$$H(x, y) = 0 \rightarrow F_1(x, y) \Psi(x) = 0$$

2D 曲線の

(cf.) AGT 対応 (Lax 形式) の 可積分性 (Lax 形式) の 可積分性 (Lax 形式) の 可積分性

2D の 可積分系 (Lax 形式) の 可積分性

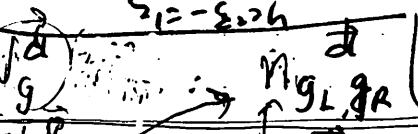
可積分系の Bethe 状態 / 変数分離 (Baxter 方程式)

### 2D 可積分系の refinement

$$Z(h) \rightarrow Z(\epsilon_1, \epsilon_2)$$

$\epsilon_1 = t, \epsilon_2 \rightarrow 0 \text{ 2D}$

Worldsheet (Lax 形式) の 可積分性



(高次元) SW 曲線の量子化と 2D 可積分系

Mironov-Morozov, Aganagic-Chen-Dijkgraaf, Krefl-Vafa

BPS 状態の 数と 2D 可積分系 (M2 brane) との関係

$$\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

xx xx



$\epsilon_1 = t_1 \neq 0, \epsilon_2 \rightarrow 0$   
 $\hat{n}_g^d = \sum_{g_L, g_R} n_{g_L, g_R}^d$

(2 sur for 3  $N_{j,L,R}^d$  の  
 2つの1/2)

波動関数

$F(\epsilon_1, \epsilon_2) = \sum_{g_L, g_R} \sum_{\omega} \frac{(1)^{2\omega} n_{g_L, g_R}^d}{\omega}$

$\epsilon_1 = t_1$   
 $\epsilon_2 \rightarrow 0$

Mohamud  
 $\beta = \sum d_i$   
 固有値の2数

$\frac{(q_L^{\omega/2} - q_L^{-\omega/2})^{2g_L} (q_R^{\omega/2} - q_R^{-\omega/2})^{2g_R}}{(q_L^{\omega/2} - q_L^{-\omega/2}) (q_R^{\omega/2} - q_R^{-\omega/2})}$

$q_L = q^{\epsilon_1}, q_R = q^{(\epsilon_1 - \omega)/2}$

$FNS(t) = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{\omega=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\hat{n}_g^d}{\omega^2} \frac{(q^{\omega/4} - q^{-\omega/4})^{2g}}{q^{\omega/2} - q^{-\omega/2}}$

cf.  $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = t_1, q = e^{\hbar}$   
 (unrefined top string)  $\hat{n}_g^d = n_{g,0}^d$   
 (GV 状態)

$= \sum_{\substack{g=0 \\ \omega=1}}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{N_{g,d}^d}{\omega^2} \frac{(q^{2d+1} - q^{-2d-1})^{2g}}{q^{2d+1} - q^{-2d-1}}$   
 (4 mod 2 の状態の数を数える)

WKB 解と量子周期  
 $\hat{H}(x, q^{2\partial_x}) \Psi = 0$

$H(e^{\hbar} \partial_x, e^{-\hbar \partial_x}) \Psi = 0$   
 量子力学の WKB 法

$\Psi = \exp \frac{S(x, \hbar)}{\hbar}, S(x, \hbar) = S_0(x) + S_1(x)\hbar + \dots$   
 $S_0, S_1, \dots$  の IR 法

Gutzwiller's  
 trace formula

eg.  $(q^{2\partial_x} + m q^{-2\partial_x} + Q(x)) \Psi = 0$   
 3次元



$a_i(\hbar) = \oint_{A_i} dS(x, \hbar)$   
 $a_i^0(\hbar) = \oint_{B_i} dS(x, \hbar)$

$= \frac{\partial F(\hbar)}{\partial a_i}$   
 量子周期  $a_i(\hbar)$   
 2次元の WKB 法  
 ( $\epsilon = 0$  in  $2\pi i \hbar \ln q$ )

(3次元)  $F(\hbar) = FNS(\hbar)$   
 (exact approximation)

Mironov-Morozov (1/2 次元の WKB)  
 2次元の WKB 法  
 高次元の WKB 法 (高次元の WKB 法)

2次元 exact WKB (all-order WKB)  
 の存在性

TS/ST 対応の研究 (高次元の WKB 法)  
 高次元の WKB 法

(1次元) 高次元の WKB 法 (高次元の WKB 法)  
 ( $S \sim S_0$ ) (all-order WKB 法)

exact WKB analysis  
2nd order all-order asymptotic expansion

beyond all-order expansion

別の表現

beyond all-order expansion

2nd order theory (TS/ST formalism) : beyond all-order expansion

2nd order theory is a special case

$$\Xi = \det(1 + KP)$$

[?] e.g.  $P = \begin{pmatrix} e^x + e^{-ix} & e^{-x-ix} \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

別種の不変量 FWS の存在 (木理の物理的理論の自由エネルギー (interfere))

3rd order:  $a_i(k) = \oint_{A_i} ds \alpha_i(k)$ ,  $a_i(p(k)) = \oint_{B_i} ds \beta_i(k)$

Voros coefficient is the same!

手書きの式:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{J(\mu + 2\pi i n, k)}$

Jはユニタリ行列の行列式 (FWS, FWS)

TS/ST formalism 2nd order expansion  $\Xi = \det(1 + KP)$

の研究 (この論文の固有値方程式の形) の中にあり、

その後、相関関数の研究が行われ、(Morino-Zakany 1606, 1706)

TSの最後は半可積分の解法 (固有値方程式の導出) を利用した (e.g. 量子力学, 可積分系) (Gruni-Morino 1806)

これは exact WKB 解法 (Voros coefficient) の拡張である。

この exact WKB 解法自体は、実は 2nd order expansion である。

[警告] TS/ST formalism  $k \rightarrow 0$  の場合

$k = 2\pi i$  の特殊事例は  $k \rightarrow \infty$  の極限で議論される (3次元理論の重要性)