トーラス上の等モノドロミー変形
(Isomonodromic deformations on tori)

高崎 金久　京大総合人間学部
(Kanehisa Takasaki)　(Kyoto University)

概 要

トーラス上の常微分方程式の等モノドロミー変形ならびにそれらと可積分系・共形場理論・Painlevé 方程式との関係に関する最近の研究の概要を紹介する．

1　はじめに

２０世紀初頭，R. Fuchs[1] が Painlevé VI 型方程式に対して Fuchs 型２階常微分方程式のモノドロミーを一定に保つ変形（等モノドロミー変形）としての特徴付けを与えて以来，等モノドロミー変形はさまざまな視点から研究されてきた．Fuchs と同時代の Schlesinger[2] や Garnier[3] は Fuchs の仕事を連立系や不確定特異点をもつ方程式に拡張した．１９７０年代後半にはこれらの等モノドロミー変形の理論と統計物理学や場の理論の可解模型との思いがけない接点が見いだされた [4]．これが契機となって，等モノドロミー変形の概念は８０年代から９０年代にかけて，ソリトン方程式，２次元重力，ランダム行列，超対称場の理論，位相的場の理論，Frobenius 多様体など，数理物理のさまざまな問題に応用された．

初期の理論的研究やその後の応用はおもに Riemann 球面上の常微分方程式の等モノドロミー変形に関するものだったが，常微分方程式の舞台として球面以外の閉 Riemann 面を考えることもできる．実際，等モノドロミー変形と密接に関連する問題として，モノドロミーデータを与えてそれを実現する方程式の存在を問う「Riemann 問題」（あるいは「Riemann-Hilbert 問題」）があるが，これは閉 Riemann 面上で定式化することによって幾何学の問題として解決された [5]．このことは等モノドロミー変形を球面以外の閉 Riemann 面上に拡張する可能性を示唆する．

R. Fuchs や Garnier が考えたような単独方程式の場合，等モノドロミー変形の球面以外への拡張は研究がすでにかなり進んでいる．岡本 [6] の先駆的研究はそのような例をトーラス上で構成するものである．これは Garnier が球面上の等モノドロミー変形として構成したもの（Painlevé VI 型方程式の多変数化 [7]）のトーラス版に他ならない．岩崎 [8] は一般の閉 Riemann 面上でこのような等モノドロミー変形を幾何学的に定式化し，その応用として，Garnier や岡本の方程式がもつ Hamilton 構造の起源を説明した．これらの等モノドロミー変形は確定特異点の位置を変数として動かすことで得られるものだが，河井 [9] は岡本のトーラス上の例を再検討し，トーラスの複素構造も同時に動かす（すなわち，トーラスのモジュラスも変数に含めた）変形が可能であることを指摘した．

これに比べて，連立系の等モノドロミー変形（その典型はSchlesingerが与えた例である）の球面以外（特にトーラス）への拡張の試みは比較的最近になって本格化した [10, 11, 12, 13, 14]．しかも，これらの試みは動機・方法においても単独方程式の場合の研究とは異なるもので，いずれも（古典あるいは量子）可積分系や共形場の理論から手掛かりを得ていることに大きな特徴がある．

最近のこのような研究はManin[15]が与えたPainlevé VI型方程式の別表現（楕円函数からなるポテンシャルをもつ非自励Hamilton系）とも直接・間接に深い関わりをもつ．Maninの表現は，Painlevé方程式と可積分系との新たな関連を示す視点として興味深いのみならず，トーラス上の等モノドロミー変形を探るうえで重要な材料を提供する．

以下では，トーラスの場合に焦点を絞り，これらの研究の概要を紹介する．便宜上，ここで扱う等モノドロミー変形を次のように分類する：

- スカラー型
- Calogero-Gaudin 型
- Gaudin 型
- Calogero-Moser 型

最初の「スカラー型」はあまり適切な呼び名ではないが，岡本・岩崎・河井が扱ったような単独高階方程式（幾何学的には射影接続）から得られるものを意味する．残りはすべて「行列型」の連立系から得られる系であるが，いずれも可積分系との対応があるので，対応する可積分系族の名称で代表させている．

2 スカラー型の等モノドロミー変形

最も基本的なものとして，ここでは２階のFuchs型方程式

$$\frac{d^2y}{dz^2} = p(z)y \tag{1}$$

の等モノドロミー変形に話を限定する．これがR. FuchsとGarnierが球面上で，また岡本と河井がトーラス上で扱った場合である．$p(z)$ は球面上の方程式では有理函数，トーラス上の方程式では楕円函数であり，Fuchs型（すなわちすべての極が確定特異点）であるためには極の位数が高々２位であればよい．

等モノドロミー変形を考えるためには，確定特異点として「本当の特異点」と「見かけの特異点」の２種類を用意する．設定は球面とトーラスで若干異なる：

- 球面の場合は前者を後者よりも３個多く用意し，そのうちの３個を $z = 0, 1, \infty$ に固定する．残りの N 個の位置を $z = t_1, \cdots, t_N$，見かけの特異点の位置を $z = \lambda_1, \cdots, \lambda_N$ とする．

- トーラスの場合は本当の特異点と見かけの特異点を同数個用意する．トーラスを $E_\tau = \mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z})$ とあらわして，$\mathbf{C}$ の座標 z に関して本当の特異点の位置を $z = t_1, \cdots, t_N$，見かけの特異点の位置を $z = \lambda_1, \cdots, \lambda_N$ とする．

トーラスの場合，モノドロミーデータとして各特異点の周りの道のモノドロミーに加えてトーラスの 2 つのサイクル α, β に沿うモノドロミーを考えなければならない．

いずれの場合も，等モノドロミー変形を考えるときには $t_1, \cdots, t_N$ が変形のパラメータ（すなわち「時間変数」）である．トーラスの場合にはさらに τ も時間変数に加わる．$\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ はこれらの時間変数の函数である．前述のモノドロミーデータが一定に保たれるためにはこれらの函数がある微分方程式に従わなければならない．これが変形の方程式である．

トーラスの場合の岡本・河井の結果は，球面の場合 [7] と同様に，Hamilton 形式をとる．$p(z)$ は Weierstrass の $\wp$-函数と ζ-函数を用いて次のような形に書ける：

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{j=1}^{N} \frac{3}{4}\wp(z-\lambda_j) - \sum_{j=1}^{N} \mu_j \zeta(z-\lambda_j) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{4}(\theta_j^2 - 1)\wp(z-t_j) + \sum_{j=1}^{N} H_j \zeta(z-t_j) + H_0. \end{aligned} \tag{2}$$

ここに現れた量 μ_j, H_j はそれぞれ λ_j の正準共役変数と t_j に関する変形の Hamiltonian である．t_j 達に関する等モノドロミー変形の方程式は時間依存の Hamiltonian をもつ（つまり非自励）Hamilton 系

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_k} = \frac{\partial H_k}{\partial \mu_j}, \quad \frac{\partial \mu_j}{\partial t_k} = -\frac{\partial H_k}{\partial \lambda_j} \tag{3}$$

の形に書ける（これは球面の場合と同じ）．H_0 はトーラスの場合に特有の量で，ほぼ τ に関する変形の Hamiltonian に相当する．正確には

$$H_\tau = H_0 - 2\eta_1 \sum_{j=1}^{N} t_j H_j \tag{4}$$

が τ に関する等モノドロミー変形の Hamiltonian であり（ここで η_1 は $\zeta(z+1) = \zeta(z) + 2\eta_1$ において現れる定数），変形方程式は

$$2\pi i \frac{\partial \lambda_j}{\partial \tau} = \frac{\partial H_\tau}{\partial \mu_j}, \quad 2\pi i \frac{\partial \mu_j}{\partial \tau} = -\frac{\partial H_\tau}{\partial \lambda_j} \tag{5}$$

となる．

なお，河井の未公刊の結果によれば，上の設定を少し変えることによって，Manin の与えた Painlevé VI 型方程式の別表現もトーラス上の等モノドロミー変形として扱えるとのことである．

3　Manin の方程式と Painlevé-Calogero 対応

行列型の例の説明に入る前に，Manin[15] が与えた Painlevé VI 型方程式について復習しておきたい．

Painlevé VI 型方程式は

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda^2}{dt^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}+\frac{1}{\lambda-t}\right)\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{\lambda-t}\right)\frac{d\lambda}{dt}\\ &\quad +\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha+\beta\frac{t}{\lambda^2}+\gamma\frac{t-1}{(\lambda-1)^2}+\delta\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right)\end{aligned} \tag{6}$$

という非線形微分方程式である．ちなみに，これは前節で触れた球面上の等モノドロミー変形では $N=1$ の場合に相当する．

Manin は R. Fuchs[1] が前述の等モノドロミー変形による解釈と併せて書き記したアイディアを手掛かりにしてこの方程式を書き換えた．書き換えは

$$\lambda=\frac{\wp(q)-e_1}{e_2-e_1},\quad t=\frac{e_3-e_1}{e_2-e_1} \tag{7}$$

という独立変数・従属変数の変換 $(\lambda,t)\to(q,\tau)$ による．ここで e_1,e_2,e_3 はトーラス（前節同様に基本周期を $1,\tau$ に選ぶ）の３つの半周期点 $\omega_1=\frac{1}{2}$, $\omega_2=\frac{1+\tau}{2}$, $\omega_3=\frac{\tau}{2}$ における $\wp$-函数の値である．この変数変換によって Painlevé VI 型方程式は

$$(2\pi i)^2\frac{d^2q}{d\tau^2}=\sum_{k=0}^{3}\alpha_k\wp'(q+\omega_k) \tag{8}$$

（$\alpha_0=\alpha,\ \alpha_1=-\beta,\ \alpha_3=\gamma,\ \alpha_3=\frac{1}{2}-\delta$）という方程式に変わる．これは

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}p^2-\sum_{k=0}^{3}\alpha_k\wp(q+\omega_k). \tag{9}$$

を Hamiltonian とする Hamilton 系

$$2\pi i\frac{dq}{d\tau}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p},\quad 2\pi i\frac{dp}{d\tau}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q} \tag{10}$$

と等価である．$\wp$-函数が τ にも依存するので，これも非自励系である．

この結果が興味深いのは，この Hamilton 系が「Calogero-Moser 系」と総称される一群の可積分系（この種の可積分系については Olshanetsky と Perelomov の総説や本 [16] が詳しい）とよく似ているからである．Calogero-Moser 系は１次元多体系の一種で，Hamiltonian

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\ell}p_j^2+V_2(q_1,\cdots,q_\ell)+V_1(q_1,\cdots,q_\ell) \tag{11}$$

の２体ポテンシャル部分 V_2 が u^{-2}, $\sin^{-2}(u)$, $\sinh^{-2}(u)$, $\wp(u)$ という函数（それぞれ有理型・三角型・双曲型・楕円型と呼ばれる）から構成され，１体ポテンシャル部分 V_1 もそれに準じた函数からなる．ポテンシャル全体の形はルート系で決まる構造をもつ．

実際，Manin の非自励系の Hamiltonian は「Inozemtsev 系」[17] と呼ばれるものの特別な場合の Hamiltonian と一致する．Inozemtsev 系は BC_ℓ ルート系に付随する Calogero-Moser 系の変種で，楕円型の場合には

$$\begin{aligned} V_2 &= g_m^2 \sum_{j\neq k}\Big(\wp(q_j-q_k)+\wp(q_j+q_k)\Big), \\ V_1 &= \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{k=0}^{3} g_k^2 \wp(q_j+\omega_k). \end{aligned} \tag{12}$$

というポテンシャルをもつ．特に $\ell=1$ の場合には２体ポテンシャルは消えて１体ポテンシャルだけが残り，ちょうど Manin の Hamiltonian と同じ形になる．

ただし，Inozemtsev 系をはじめとする Calogero-Moser 系はすべて自励系である．特に楕円型の場合には τ は定数として扱われ，それとは独立に時間変数 t が用意されている．

このように，自励系と非自励系の違いを別にすれば，Manin の得た Hamilton 系と（$\ell=1$ の）楕円型 Inozemtsev 系は共通の Hamilton 構造をもつ．このことに最初に注目したのは Levin と Olshanetsky で，彼らは Painlevé 方程式と Calogero-Moser 系のこの関係を「Painlevé-Calogero 対応」と呼んだ [11]．ちなみに，Manin の論文は Calogero-Moser 系には言及しておらず，代わりに KdV 方程式に関連する Treibich と Verdier の研究 [18] （間接的にはやはり Calogero-Moser 系と関係がある）との類似性を指摘している．

4　Calogero-Gaudin 型と Gaudin 型の場合

4.1　背景

Calogero-Gaudin 型と Gaudin 型の等モノドロミー問題は Schlesinger の等モノドロミー変形をトーラス上に拡張するものである．その背景には Calogero-Gaudin 系および Gaudin 模型と呼ばれる可積分系があり，さらにこの可積分系と共形場理論（あるいは KZ 型方程式）との関係がある．そして，これらに共通する構造が Hamilton 構造（あるいはその背後の「r-行列」）なのである．

Gaudin 模型はスピン自由度をもつ量子可積分系で，Calogero-Moser 系と同様，有理型・三角型・楕円型（あるいは XXX・XXZ・XYZ）の三種類がある．Gaudin 模型には古典論的対応物があるが，それも可積分系である．特に，有理型の模型は Sklyanin の「変数分離法」[19] の良い応用例であり（ちなみに，前述の λ_j, μ_j は可積分系で

見れば Sklyanin の意味の変数分離座標に他ならない！），さらに，Frenkel 達はこの場合の変数分離法の幾何学意味を Hitchin 系 [20]（正確にはその穴あき Riemann 面への拡張）とその量子化に基づく Beilinson と Drinfeld の幾何学的 Langlands 対応 [21] の枠組みの中で解明している [22].

有理型 Gaudin 模型のこのような幾何学的解釈に現れる Riemann 面は穴あき球面であり，従って，穴あきトーラスに進めば楕円型 Gaudin 模型が得られるように思えるが，実はそうではない．代わりに得られるのが Calogero-Gaudin 系である [24, 25]．これは Gaudin 系のスピン自由度に加えて Calogero-Moser 系に現れたような１次元粒子系の自由度 q_j（およびその運動量 p_j）を含む（従って本当は Calogero-Moser-Gaudin 系と呼ぶべきだろう）.

黒木と武部 [23] は幾何学的設定を少し変えることによって Calogero-Moser 型自由度の出現が抑えられて楕円型 Gaudin 模型が復元されることを示した．この場合，対応する共形場理論も WZW 模型と少し違うもの（「ひねられた WZW 模型」）になる.

4.2 Schlesinger の等モノドロミー変形

トーラス上の等モノドロミー変形の例を考える前に，議論の原型として，有理型 Gaudin 模型と Schlesinger の等モノドロミー変形の対応関係を説明しておこう.

有理型 Gaudin 模型（以下古典論のみ考える）は

$$L(z) = \sum_{j=1}^{N} \frac{A_j}{z - a_j} \tag{13}$$

という形の L-行列（そこから Gaudin 模型の Hamiltonian が決まる）をもつが，a_j を新たな変数 t_j に読み替えれば，$L(z)$ は Schlesinger の扱った１階連立系

$$\frac{dY}{dz} = L(z)Y = \sum_{j=1}^{N} \frac{A_j}{z - t_j} Y \tag{14}$$

の係数行列と同一視できる．後者の等モノドロミー変形は

$$\frac{\partial L(z)}{\partial t_j} + \frac{\partial A_j(z)}{\partial z} + [A_j(z), L(z)] = 0 \tag{15}$$

という Lax 方程式に従う．ただしここで $A_j(z) = A_j/(z - t_j)$ である．さらに A_j の行列要素間の Poisson 括弧を $gl(n, \mathbf{C}) \simeq gl(n, \mathbf{C})^*$ 上の Kostant-Kirillov 括弧で定義すれば，変形方程式を

$$\frac{\partial A_j}{\partial t_k} = \{A_j, H_k\} \tag{16}$$

という非自励 Hamilton 系の形に書ける．Hamiltonian は

$$H_j = \operatorname*{Res}_{z=t_j} \frac{1}{2} \operatorname{Tr} L(z)^2 \tag{17}$$

で与えられるが，実はこれは Gaudin 模型の Hamiltonian （の古典論的対応物）に他ならないのである．

4.3 Gaudin 型の等モノドロミー変形

Calogero-Gaudin 型の例と Gaudin 型の例のうち先に発見されたのは前者であるが，ここでは説明の都合で後者を先に紹介する．

Gaudin 型の等モノドロミー変形 [12, 14] は楕円型 Gaudin 模型（L-行列はトーラスの上に定義される）を同様に読み替えることによって得られる．$SU(n)$ Gaudin 模型の場合，L-行列は

$$L(z) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{(ab)\neq(00)} w_{ab}(z-t_j) J_{ab} A_j^{ab}. \tag{18}$$

で与えられる．記号は黒木と武部の論文に従う：添え字 a, b は n-周期的に解釈し，$\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ を走るものとする．A_j^{ab} はスピン変数の古典論的対応物で，等モノドロミー変形の従属変数となる．J_{ab} は $sl(n, \mathbf{C})$ の特別な基底で，Heisenberg 関係 $gh = \omega hg$（$\omega = \exp(2\pi i/n)$）を満たす行列（適当な表現をとる）によって $J_{ab} = g^a h^b$ で定義される．$w_{ab}(z)$ は可解格子模型の理論で Belavin の「$\mathbf{Z}_n$-対称 Boltzman 荷重」と呼ばれるものの一種の古典極限で，$1/n$-characteristic をもつ 1 変数の Riemann ϑ-函数 $\vartheta_{[ab]}(z) = \vartheta_{\frac{a}{n}-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\frac{b}{n}}(z, \tau)$ を用いて

$$w_{ab}(z) = \frac{\vartheta_{[ab]}(z)\vartheta'_{[00]}(0)}{\vartheta_{[ab]}(0)\vartheta_{[00]}(z)} \tag{19}$$

と定義される z-平面上の有理型函数である．それらがトーラスの基本周期に沿って示すモノドロミーから，$L(z)$ 自体が

$$L(z+1) = h^{-1} L(z) h, \quad L(z+\tau) = g L(z) g^{-1} \tag{20}$$

というモノドロミー変換に従うことがわかる．この変換則は幾何学的にはトーラス上のベクトル束（主束ではない）を定めている．それに基づいて岩崎 [8] の流儀による等モノドロミー変形の幾何学的解釈もできる．

有理型の場合に習って $L(z)$ から Hamiltonian を定義するが，楕円型 Gaudin 模型の場合には前述のような $H_1, \ldots, H_N$ （$H_1 + \cdots + H_N = 0$ なので独立なものは実は $N-1$ 個）に加えて余分の H_0 が現れることがよく知られている．これらは

$\mathrm{Tr}\, L(z)^2/2$ の次のような展開式に係数として現れる：

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\, L(z)^2 = \sum_{j=1}^{N} C_j \wp(z-t_j) + \sum_{j=1}^{N} H_j \zeta(z-t_j) + H_0 \tag{21}$$

（C_j は Casimir 函数すなわち A_j^{ab} のすべてと Poisson 可換な量となる）．この式とスカラー型等モノドロミー変形の場合の係数 $p(z)$ の展開式との著しい類似性に注目されたい（行列型の場合には A_j^{ab} 達が変形の従属変数となるので，見かけの特異点に対応する項は不要である）．このことから，H_0 が τ に関する等モノドロミー変形と関係があることが予想されるが，実際，河井の例と同様に H_0 を

$$H_\tau = H_0 - 2\eta_1 \sum_{j=1}^{N} t_j H_j \tag{22}$$

で置き換えれば τ に関する変形の Hamiltonian になることがわかる．

この場合の等モノドロミー変形の方程式はこれらの Hamiltonian の定める非自励 Hamilton 系

$$\frac{\partial A_j^{ab}}{\partial t_k} = \{A_j^{ab}, H_k\}, \quad 2\pi i \frac{\partial A_j^{ab}}{\partial \tau} = \{A_j^{ab}, H_\tau\} \tag{23}$$

で与えられる．$L(z)$ は

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(z)}{\partial t_j} + \frac{\partial A_j(z)}{\partial z} + [A_j(z), L(z)] &= 0, \\ 2\pi i \frac{\partial L(z)}{\partial \tau} + \frac{\partial A_\tau(z)}{\partial z} + [A_\tau(z), L(z)] &= 0 \end{aligned} \tag{24}$$

という Lax 方程式を満たす（$A_j(z)$，$A_\tau(z)$ の形は少し複雑になるので省略する）．このことから等モノドロミー性が従う．

4.4 Calogero-Gaudin 型の等モノドロミー変形

すでに触れたように，Hitchin 系や WZW 模型の視点からトーラス上で素直に Schlesinger の等モノドロミー変形の類似を求めれば，むしろ Calogero-Gaudin 型の例が得られる．実際，Korotkin と Samtleben[10] はトーラス上の $SU(2)$ WZW 模型を介してそのような等モノドロミー変形の例を初めて見いだした．Levin と Olshanetsky はこの結果を拡張して，一般の閉 Riemann 面の上で（構造群 G も一般にして）等モノドロミー変形を構成した．またその応用として，Manin の方程式のトーラス上の等モノドロミー変形としての解釈を（ただしパラメータ α_j が互いに等しい場合に限って）与えた．

Calogero-Gaudin 系とそれに対応する等モノドロミー変形の L-行列は次のような形をしている（ただし，簡単のため $G = SU(n)$ のベクトル表現の上で構成したも

のを示している）：

$$
\begin{aligned}
L(z) \quad = \quad & \sum_{a=1}^{n}\Big(p_a + \sum_{j=1}^{N}\rho(z-t_j)A_j^{aa}\Big)E_{aa} \\
& + \sum_{a\neq b}\sum_{j=1}^{N}\sigma(q_a-q_b, z-t_j)A_j^{ab}E_{ab}.
\end{aligned} \tag{25}
$$

Gaudin 型変数 A_j^{ab} に加えて Calogero-Moser 型変数 q_a, p_a が現れていることに注意されたい．ただしここでは，a, b は行と列の添え字であり，E_{ab} は (a, b) 要素のみ 1 で他が 0 の行列である．$\sigma(u, z)$ と $\rho(z)$ は Felder と Wieczerkovski がトーラス上の WZW 模型の共形ブロックを記述する Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard (KZB) 方程式の定義の際に用いた u, z-平面上の有理型函数で，Jacobi の ϑ-函数 ϑ_1 を用いて

$$
\sigma(u, z) = \frac{\vartheta_1(z-u)\vartheta_1'(0)}{\vartheta_1(z)\vartheta(-u)}, \quad \rho(z) = \frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} \tag{26}
$$

と定義される．さらに係数の Cartan 部分 A_j^{aa} に対して

$$
\sum_{j=1}^{N} A_j^{aa} = 0 \tag{27}
$$

という拘束条件を課す．このとき $L(z)$ はトーラスの基本周期に沿って

$$
L(z+1) = L(z), \quad L(z+\tau) = e^{2\pi iQ}L(z)e^{-2\pi iQ} \tag{28}
$$

というモノドロミー変換に従う．ただしここで $Q = \mathrm{diag}(q_1, \cdots, q_n)$ と置いた．これは背後にトーラス上の G-主束が存在する（$q_1, \cdots, q_n$ はそのモジュライ）ことを示している．

この $L(z)$ から出発して，等モノドロミー変形の Hamiltonian（この場合も t_j に関する変形の Hamiltonian H_j と τ に関する変形の Hamiltonian H_τ がある）を定義したり，Lax 方程式を書き下したりすることができるが，上に述べた拘束条件の存在のため，議論がかなり複雑になる．

5 Calogero-Moser 型等モノドロミー変形

Calogero-Moser 型の等モノドロミー変形の原型は Levin と Olshanetsky の仕事 [11] の中に現れるのだが，彼らの与えた例は，Calogero-Gaudin 模型の特別な場合には Gaudin スピンの自由度が消去できて Calogero-Moser 系が得られる，という事情に基づいている．実はそのように Calogero-Gaudin 系の特別な場合として扱える Calogero-Moser 系は限られており，特に，もともと単純 Lie 群に対応していない

BC 型の系（中でも Manin の方程式と関係のある Inozemtsev 系）は扱えない．彼らが Manin の方程式の取り扱いを特殊なパラメータの場合に限っているのは，それがちょうどこの特殊事情に当てはまる場合だからである．

そこで，さまざまな楕円型 Calogero-Moser 系の Lax 表示を構成するための統一的な枠組みが望まれるわけだが，幸いにしてそのようなものが Bordner 達の一連の研究 [26] により開発された．なお，この研究の直前に D'Hoker と Phong による同様の研究 [27] が現れた．彼らの枠組みも使えなくはないが，残念ながら Inozemtsev 系が含まれていない．Bordner 達の Lax 表示はルート系の構造のみを用いて構成される（L-行列はルート系の Weyl 群の表現空間に作用する）ので，BC 型のように単純 Lie 代数と対応しない場合も扱えるのである．

この Bordner 達の Lax 表示を援用することで様々な楕円型 Calogero-Moser 系に対応する等モノドロミー変形が構成できる [13]．特にこれは，すでに触れた河井の定式化とは異なる形で，Manin の方程式のトーラス上の等モノドロミー変形としての特徴付けを与える．以下にこの結果の要点を示す．

変形方程式自体は Hamilton 形式で説明する方が簡単である．実際，それは Inozemtsev 系と Manin の方程式の関係をそのまま他の楕円型 Calogero-Moser 系に敷延して得られるものである．すなわち，与えられた楕円型 Calogero-Gaudin 系の Hamiltonian （トーラスの基本周期は例のごとく $1, \tau$ に正規化しておく）を $\mathcal{H}$ とするとき，変形方程式は τ を時間変数とする非自励 Hamilton 系

$$2\pi i \frac{dq_j}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}, \quad 2\pi i \frac{dp_j}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \tag{29}$$

で与えられる．もとの Calogero-Moser 系（τ は定数でそれとは独立に時間変数 t がある）の Hamilton 表示で機械的に $d/dt \to 2\pi i d/d\tau$ という置き換えを行ったのであるから，これは微分方程式としてはまったく別のものであるが，Hamilton 構造（相空間と Hamiltonian）は確かに同じである．

問題はこれがトーラス上の何らかの常微分方程式の等モノドロミー変形であることを示すことであるが，Bordner 達がもとの自励系の Lax 表示 $dL(z)/dt = [L(z), M(z)]$ のために構成した (L, M)-対 $L(z), M(z)$（ただしその構成に用いる基本的函数 $x(u, z)$ を前述の $\sigma(u, z) \times (-1)$ で置き換えておく）を用いて常微分方程式

$$\frac{dY}{dz} = L(z)Y \tag{30}$$

をつくれば，それが求めるものであることがわかる．実際，τ を時間とする上の Hamilton 方程式のもとで，$L(z)$ と $M(z)$ は

$$2\pi i \frac{\partial L(z)}{\partial \tau} + \frac{\partial M(z)}{\partial z} = [L(z), M(z)] \tag{31}$$

という形の方程式を満たすことが示せるが，これはまさしく等モノドロミー版の Lax 方程式である（$M(z)$ は Calogero-Gaudin 型や Gaudin 型の場合の $A_\tau(z)$ に相当す

る）．このことと $L(z), M(z)$ の複素解析的な性質（極の性質やトーラスの基本周期に関するモノドロミー）から，τ についての変形が $L(z)$ を係数とする上の常微分方程式のモノドロミーデータを一定に保つことが従う．ちなみに，同様の議論は D'Hoker と Phong が与えた Lax 表示を用いても可能ではある．

こうして上の非自励 Hamilton 系に対してトーラス上の等モノドロミー変形としての解釈を与えることができる．

6 おわりに

以上のように，トーラス上の等モノドロミー変形にはいくつかの異なる型があり，それぞれの特徴をもっている．特に，連立常微分方程式系に基づく例は可積分系や共形場理論などと密接に関連している．そのような手掛かりなしにトーラス上の等モノドロミー変形を構成するのはかなり難しいようにも思われる．

新たな等モノドロミー変形ができれば，当然，それをさらに詳しく調べるという課題が待っている．たとえば Korotkin 達 [14] は Gaudin 型の例に対して Schlesinger 変換を構成している．Manin は導いた方程式の言葉で Painlevé VI 型方程式のアフィン Weyl 群対称性 [28] の説明を試みている．このようなことをさらに調べる必要がある．

「Painlevé-Calogero 対応」にもまだ未知の側面が沢山あるように思われる．たとえば，最近 V 型以下の方程式に対しても Manin の非自励系の類似が存在することが明らかになった [29]．面白いことに，それらは三角型（双曲型）や有理型の Inozemtsev 系 [17] にちょうど対応している．さらに，$\ell > 1$ の場合にも対応する Painlevé 型の方程式が存在するようである．それは Painlevé 方程式の「多成分」版というべきもので，2ℓ 個の正準変数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell, \mu_1, \cdots, \mu_\ell$ によって定式化される（その点は Garnier 系 [3, 7] と似ている）．

参考文献

[1] R. Fuchs, Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit im endlich gelegene wesentlich singulären Stellen, Math. Ann. **63** (1907), 301-321.

[2] L. Schlesinger, Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebliger Ordnumg mit festen kritischer Punkten, J. fü Math. **141** (1912), 96-145.

[3] R. Garnier, Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale est uniform et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont

l'intégrale générale a ses point critiques fixés, Ann. Sci. de l'ENS **29** (1912), 1-126.

[4] M. Jimbo, T. Miwa. Y. Môri and M. Sato, Holonomic quantum fields — the unanticipated link between dieformation theory of differential equations and quantum fields, Lect. Notes. Phys. Vol. 126 (Springer-Verlag, 1980), pp. 119-142.

[5] H. Röhrl, Das Riemann-Hilbertsche problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Math. Ann. **133** (1957), 1-25.

[6] K. Okamoto, On Fuchs' problem on a torus, I, Funkcial. Ekvac. **14** (1971), 137-152; Sur le problème de Fuchs sur un tore, II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math, **24** (1977), 357-352; Déformation d'une équation différentielle linéaire avec une singularité irrégulière sur un tore, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math, **26** (1979), 501-518; The Hamiltonian structure derived from the holonomic deformation of the linear ordinary differential equations on an elliptic curve, Sci. Pap. Col. Art. Sci. Univ. Tokyo **37** (1987), 1-11; On the holonomic deformation of linear ordinary differential equtions, Kyushu J. Math. **49** (1995), 281-308.

[7] K. Okamoto, Isomonodromic deformations and Painlevé equations, and the Garnier system, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math., **33** (1986), 575-618.

[8] K. Iwasaki, Moduli and deformation for Fuchsian projective connections on a Riemann surface, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, **38** (1991), 431-531; Fuchsian moduli on a Riemann surface — its Poisson structure and Poincaré-Lefschetz duality, Pacific J. Math. **155** (1992), 319-340.

[9] S. Kawai, Deformation of complex structures on a torus and monodromy preserving deforamtin, Thesis, University of Tokyo, 1995; Isomonodromic deforamtion of Fuchsian-type projective connections on elliptic curves, 数理解析研究所講究録 vol. 1022 (1997), pp. 53-57.

[10] D.A. Korotkin and J.A.H. Samtleben, On the quantization of isomonodromic deformations on the torus, e-print `hep-th/9511087`, Intern. J. Mod. Phys. **A12** (1997), 2013-2030.

[11] A.M. Levin and M.A. Olshanetsky, Painlevé-Calogero correspondence, e-print `alg-geom/9706012`, AMS Transl. (2) **191** (1999) (to appear); A.M.

Levin and M.A. Olshanetsky, Classical limit of the Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard equations as hierarchy of isomonodromic deformations, e-print `hep-th/9709207`.

[12] K. Takasaki, Gaudin Model, KZ Equation, and Isomonodromic Problem on Torus, e-print `hep-th/9711058`, Lett. Math. Phys. **44** (1998), 143-156.

[13] K. Takasaki, Elliptic Calogero-Moser Systems and Isomonodromic Deformations, e-print `math/9905101`, J. Math. Phys. **40** (1999), 5787-5821.

[14] D. Korotkin, N. Manojlović and H. Samtleben, Schlesinger transformations for elliptic isomonodromic deformations, e-print `solv-int/9910010`.

[15] Yu. I. Manin, Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of $\mathbf{P}^2$, e-print `alg-geom/9605010`, AMS Transl. (2) **186** (1998), 131-151.

[16] M.A. Olshanetsky and A.M. Perelomov, Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras, Physics Reports **71** (1981), 313-400.
A.M. Perelomov, Integrable systems of classical mechanics and Lie algebras, Vol. 1 (Birkhäuser, 1990).

[17] V.I. Inozemtsev and D.V. Meshcheryakov, Extension of the class of integrable dynamical systems connected with semisimple Lie algebras, Lett. Math. Phys. **9** (1985), 13-18.
V.I. Inozemtsev, The finite Toda lattices, Commun. Math. Phys. **121** (1989), 629-638.

[18] A. Treibich and J.-L. Verdier, Revêtements tangentiels et sommes de 4 nombre triangulaires, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., **311** (1990), 51-54.

[19] E.K. Sklyanin, Separation of variables — new trends, Prog. Theor. Phys. Suppl. **118** (1995), 35-60.

[20] N.J. Hitchin, Stable bundles and integrable systems, Duke Math. J. **54** (1987), 91-144.

[21] A.A. Beilinson and V.G. Drinfeld, Quantization of Hitchin's fibration and Langlands program, preprint 1994.

[22] E. Frenkel, Affine Algebras, Langlands Duality and Bethe Ansatz, e-print `q-alg/9506003`, In " Proceedings of XIth International Congress of Mathematical Physics", D. Iagolnitzer ed. (International Press, 1995), pp. 606-642

[23] G. Kuroki and T. Takebe, Twisted Wess-Zumino-Witten models on elliptic curves, e-print `q-alg/9612033`, Commun. Math. Phys. **190** (1997), 1-56.

[24] N. Nekrasov, Holomorphic bundles and many body problems, e-print `hep-th/9503157`, Commun. Math. Phys. **180** (1996), 587-603,

[25] B. Enriquez and V. Rubtsov, Hitchin systems, higher Gaudin operators and r-matrices, e-print `alg-geom/9503010`, Math. Res. Lett. **3** (1996), 343-357.

[26] A.J. Bordner, E. Corrigan and R. Sasaki, Calogero-Moser models I: A new formulation, e-print `hep-th/9805106`, Prog. Theor. Phys. **100** (1998), 1107-1129.
A.J. Bordner, R. Sasaki and K. Takasaki, Calogero-Moser models II: Symmetries and foldings, e-print `hep-th/9809068`, Prog. Theor. Phys. **101** (1999), 487-518.
A.J. Bordner and R. Sasaki, Calogero-Moser models III: Elliptic potentials and twisting, e-print `hep-th/9812232`, Prog. Theor. Phys. **101** (1999), 799-829.

[27] E. D'Hoker and D.H. Phong, Calogero-Moser Lax pairs with spectral parameter, e-print `hep-th/9804124`, Nucl. Phys. **B530** (1998), 537-610; Calogero-Moser and Toda systems for twisted and untwisted affine Lie algebras, e-print `hep-th/9804125`, Nucl. Phys. **B530** (1998), 611-640.

[28] K. Okamoto, Studies on the Painlevé equations I: Sixth Painlevé equation P_{VI}, Annali Mat. Pura Appl. **146** (1987), 337-381.

[29] 高崎金久，Calogero-Moser 系から見た Painlevé 方程式，URL `http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~takasaki/research/expo.html`，神戸大学研究集会「パンルヴェ方程式の大域解析」（１９９９年１０月）での講演に基づく.