2000.3.28

数学会

トーラス上の等モノドロミー変形

高崎金久

$\boxed{\text{訂正}}$ (5) $H_k \to H_0$

(1)式: $\to \dfrac{d^2y}{dz^2} = p(z)y$

(2)式: $\theta_j^2 \to \theta_j^2 - 1$

(18)と(19)の間: $gh = hg$

$\longrightarrow gh = \omega hg$

(27)式: $\to \sum_{j=1}^{N} A_j^{aa} = 0$

(28)式: $e^{\pm Q} \to e^{\pm 2\pi i Q}$

訂正版予稿:

http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~takasaki/research/expo.html

はじめに

Painlevé, Gambier : Painlevé eqns $P_I \sim P_{VI}$

R. Fuchs : 二つのアプローチ

isomonodromy

↓

Schlesinger

Garnier

⋮

'70s Barouch, McCoy, Tracy, Wu

Jimbo, Miwa, Môri, Sato

Ueno

Flaschka, Newell

Riemann 球面 $\mathbb{P}^1$

↓

開 Riemann 面 ?

eg. Röhrl : Riemann 問題の解の存在

↓

elliptic integral

↓

Painlevé

⋮

Manin

Levin, Olshanetsy

Hitchin

'90s

「Painlevé–Calogero 対応」

→ 可積分系との関係

Malmquist :

Hamiltonian structure

⋮

Okamoto, Kimura } Painlevé eqns, Garnier system

$\sum_j H_j dt_j = d \log \tau$

τ 函数 ⟶ 対称性

幾何学的アプローチ

Iwasaki：一般の閉Riemann面上で等モノドロミー変形の幾何学的定式化（→ Hamilton構造の解釈）

$\mathbb{P}^1$：Garnier系

トーラス：Okamoto（'71, '77, '79）
Kawai（'95）

以下紹介すること：

- トーラス上の「スカラー型」（＝射影接続の）等モノドロミー変形
- トーラス上の「行列型」等モノドロミー変形の例
  - Gaudin型
  - Calogero-Gaudin型
  - Calogero型
- Painlevé - Calogero対応
  - Fuchs, Painlevé, Manin
  - 多成分化

「コマの幾何学」（共立出版）買ってネ♥

スカラー型の等モノドロミー変形

・$\mathbb{P}^1$ 上の 2階 Fuchs 型方程式

$$\frac{d^2y}{dz^2} = p(z)\,y$$

$$\cancel{p(z) = \sum_{j=1}^{N} \frac{3}{4}\frac{1}{(z-\lambda_j)^2} - \sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j}{z-\lambda_j} + \sum_{j=1}^{N}\frac{\theta_j^2-1}{4}\frac{1}{(z-t_j)^2} + \sum_{j=1}^{N}\frac{H_j}{z-t_j}}$$

λ_j : みかけの特異点 — 変形の従属変数

t_j : 一般的特異点 — 〃 独立変数

$t_{N+1} = 0,\ t_{N+2} = 1$

t_j のまわりのモノドロミー (の共役類) を一定に保つ

$$\longrightarrow \quad \frac{d^2\lambda_j}{dt_k^2} = \cdots \qquad (\text{Garnier 系})$$

さらに λ_j, μ_j を正準変数, H_j を Hamiltonian として Hamilton 系.

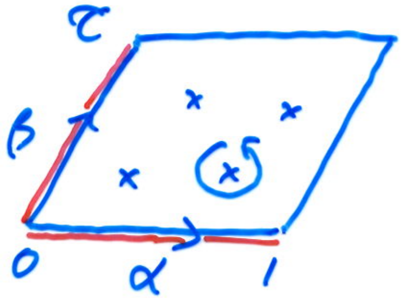
$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_k} = \frac{\partial H_k}{\partial \mu_j}, \quad \frac{\partial \mu_j}{\partial t_k} = -\frac{\partial H_k}{\partial \lambda_j}$$

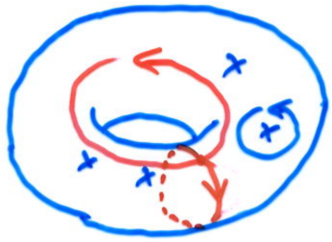
に書き直せる (非自励系). (Okamoto '86)

- トーラス $E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$ 上の
2階 Fuchs 型方程式

$$\frac{d^2y}{dz^2} = p(z)y$$

$$p(z) = \sum_{j=1}^{N} \frac{3}{4}\wp(z-\lambda_j) - \sum_{j=1}^{N} \mu_j \zeta(z-\lambda_j) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\theta_j^2-1}{4}\wp(z-t_j) + \sum_{j=1}^{N} H_j \zeta(z-t_j) + H_0 .$$





> t_j のまわりのモノドロミー(の共役類)と
> α, β に沿うモノドロミー(の共役類)を
> 一定に保つ
> $\longrightarrow$ $t_1, \cdots, t_N$ および τ に関する変形方程式

t_j についての変形 $\longleftrightarrow$ H_j

τ についての変形 $\longleftrightarrow$ $H_\tau = H_0 - 2\eta_1 \sum_{j=1}^{N} t_j H_j$

$$2\pi i \frac{\partial \lambda_j}{\partial \tau} = \frac{\partial H_\tau}{\partial \mu_j}, \quad 2\pi i \frac{\partial \mu_j}{\partial \tau} = -\frac{\partial H_\tau}{\partial \lambda_j} \qquad \text{(Kawai '95)}$$

行列型等モノドロミー変形

- $\mathbb{P}^1$ 上の行列型等モノドロミー変形
  (Schlesinger系)

$$\frac{dY}{dz} = L(z)Y,$$

$$L(z) = \sum_{j=1}^{N} \frac{A_j}{z-t_j} \quad : n \times n \text{ 行列}$$

t_j : 独立変数

A_j : 従属変数

$\boxed{\text{$t_j$ のまわりのモノドロミー(の共役類)を一定に保つ → t_j に関する変形方程式}}$

Lax表示 : $\dfrac{\partial L(z)}{\partial t_j} + \dfrac{\partial A_j(z)}{\partial z} + [A_j(z), L(z)] = 0$

ただし $A_j(z) = \dfrac{A_j}{z-t_j}$

$A_j \in \mathcal{O}_j \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})^*$: (co)adjoint orbit

Hamilton 形式:

$$\frac{\partial A_j}{\partial t_k} = \{A_j, H_k\}.$$

ただし $H_k = \operatorname*{Res}_{z=t_k} \frac{1}{2} \operatorname{Tr} L(z)^2 = \sum_{j(\neq k)} \frac{\operatorname{Tr}(A_j A_k)}{t_j - t_k}$

$\{\ ,\ \}$: $\bigoplus_{j=1}^{N} gl(n,\mathbb{C})^*$ 上の Kostant-Kirillov bracket (Poisson 構造)

可積分系との関係

$t_j \to a_j$: 定数におきかえ

$L(z) = \sum_{j=1}^{N} \frac{A_j}{z - a_j}$: 古典可積分系の L 行列

+定数行列

(Moser 系)

$A_j \to \cdots I \otimes \underset{(j)}{S_a \sigma_a} \otimes I \cdots \in \operatorname{End}(\bigoplus_{j=1}^{N} V_j)$ スピン自由度

($n=2$, $sl(2,\mathbb{C})$)

: 量子可積分系の L 行列

(Gaudin 模型) "XXX"

Hamiltonian の表示は共通,

可換 : $\{H_j, H_k\} = 0$ あるいは $[H_j, H_k] = 0$

(古典) (量子)

等スペクトル変形 v.s. 等モノドロミー変形

例

$$L(z)=\sum_{j=1}^{N}\frac{A_j}{z-a_j}$$

$$\frac{\partial L(z)}{\partial t_j}+[A_j(z), L(z)]=0$$

$$\frac{\partial A_k}{\partial t_j}=\{A_k, H_j\}$$

$$L(z)=\sum_{j=1}^{N}\frac{A_j}{z-t_j}$$

$$\frac{\partial L(z)}{\partial t_j}+\frac{\partial A_j(z)}{\partial z}+[A_j(z), L(z)]=0$$

$$\frac{\partial A_k}{\partial t_j}=\{A_k, H_j\}$$

- a_jは定数, t_jは変数
- 等モノドロミー変形の Lax 表示には余分の項（zで微分する項）
- H_j, $\{\ \}$は共通.
  ただし等モノドロミー変形ではH_jの中に時間変数が陽に現れる.（等スペクトル変形ではt_jは定数a_jにおきかえられている.）

同様にしてトーラスの場合にも等スペクトル変形(可積分系)のL行列から等モノドロミー変形が得られるのではないか？

• トーラス上のGaudin型等モノドロミー変形

Gaudin模型 (量子可積分系)
- XXX 有理型
- XXZ 三角(双曲)型
- XYZ 楕円型

○ 楕円型Gaudin模型の L 行列 ($SU(n)$ へ拡張):

$$L(z) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{(ab)\neq(00)} w_{ab}(z-t_j) J_{ab} A_j^{ab}$$

1) $a, b \in \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

2) $J_{ab} = g^a h^b, \quad gh = e^{2\pi i/n} hg$

($n=2$ のとき Pauli 行列に帰着)

3) $$w_{ab}(z) = \frac{\vartheta_{[ab]}(z)\, \vartheta'_{[00]}(0)}{\vartheta_{[ab]}(0)\, \vartheta_{[00]}(z)}$$

ただし $\vartheta_{[ab]}(z) = \vartheta_{\frac{a}{n}-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{b}{n}}(z)$

(Belavin の $\mathbb{Z}_n$-対称 Boltzmann 荷重の古典極限)

$$w_{ab}(z) = \frac{1}{z} + \cdots \quad (z \to 0)$$

$$w_{ab}(z+1) = e^{2\pi i a/n} w_{ab}(z)$$

$$w_{ab}(z+\tau) = e^{2\pi i b/n} w_{ab}(z)$$

$$\left(\to L(z+1) = h^{-1} L(z) h, \quad L(z+\tau) = g L(z) g^{-1}\right)$$

○ Hamiltonian: $H_1, \cdots, H_N, H_0 \quad \left(\sum_{j=1}^{N} H_j = 0\right)$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, L(z)^2 = \sum_{j=1}^{N} C_j \wp(z-t_j) + \sum_{j=1}^{N} H_j \zeta(z-t_j) + H_0$$

$$\left(C_j = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, A_j^2 \ : \text{Casimir} \right)$$

互いに可換　$[H_j, H_k] = 0$ 量子論　（あるいは $\{H_j, H_k\} = 0$）古典論

○ 線形方程式　$\dfrac{dY}{dz} = L(z)\, Y$　（ここで古典論に移る）

t_j のまわりのモノドロミー（の共役類）と
α, β に沿うモノドロミー（の共役類）を一定に
→ t_j, τ についての変形方程式

Lax表示：
$$\frac{\partial L(z)}{\partial t_j} + \frac{\partial A_j(z)}{\partial z} + [A_j(z), L(z)] = 0$$
$$2\pi i \frac{\partial L(z)}{\partial \tau} + \frac{\partial A_\tau(z)}{\partial z} + [A_\tau(z), L(z)] = 0$$

Hamilton形式：
$$\frac{\partial A_j^{ab}}{\partial t_k} = \{A_j^{ab}, H_k\},$$
$$2\pi i \frac{\partial A_j^{ab}}{\partial \tau} = \{A_j^{ab}, H_\tau\},$$

ただし　$H_\tau = H_0 - 2\eta_1 \sum_{j=1}^{N} t_j H_j$

• トーラス上の Calogero-Gaudin 型等モノドロミー変形

○ Calogero-Gaudin 模型 (Nekrasov '96, Enriquez & Rubtsov '96) の L 行列 ($G = SU(n)$ の場合):

$$L(z) = \sum_{a=1}^{n} \Big(p_a + \sum_{j=1}^{N} \rho(z - t_j) A_j^{aa} \Big) E_{aa}$$

$$+ \sum_{a \neq b} \sum_{j=1}^{N} \sigma(q_a - q_b, z - t_j) A_j^{ab} E_{ab} .$$

1) q_a, p_a : Calogero 自由度

2) $\sum_{j=1}^{N} A_j^{aa} = 0$: 拘束条件

3) $\sigma(u, z), \rho(z)$: 共形場理論の KZB 方程式に現れる

$$\sigma(u, z) = \frac{\vartheta_1(z-u)\,\vartheta_1'(0)}{\vartheta_1(z)\,\vartheta_1(-u)}, \quad \rho(z) = \frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)}$$

(2) の下で
$$L(z+1) = L(z),$$
$$L(z+\tau) = e^{2\pi i Q} L(z) e^{-2\pi i Q}$$
)

○ 幾何学的背景: 穴あきトーラス上の Higgs 束

$$(\, G\text{主束} + \text{Higgs場} + \underbrace{\text{放物構造}}_{A_j^{aa}})$$

$$\qquad q_a \qquad\qquad p_a$$

可積分系: (一般化) Hitchin 系

Markman

→ この設定でも t_j とについて等モノドロミー変形が記述できる（SU(2) のとき Korotkin & Samtleben，一般の G と一般の閉 Riemann 面のとき Levin & Olshanetsky）

• トーラス上の Calogero 型等モノドロミー変形

○ Calogero 系（あるいは Calogero-Moser 系）

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \frac{g^2}{2}\sum_{j \neq k} V_2(q_j - q_k) \left(+ \sum_j V_1(q_j) \right)$$

$$V_2(u) = \frac{1}{u^2},\ \frac{1}{\sinh^2 u},\ \frac{1}{\sin^2 u},\ \wp(u)$$

$\frac{1}{u^2}$ ↓ $V_1(u) = \omega^2 u^2$

$\frac{1}{\sin^2 u}$ ↑ Sutherland

○ 様々な拡張（ルート系に基づく：Olshanetsky & Perelomov）

（例）$\Delta = \{ e_j - e_k \mid j \neq k \}$ ： A_{n-1} 型ルート系

$$\Delta = \{ \pm e_j \pm e_k \ (j \neq k),\ e_j,\ 2e_j \ (j = 1 \cdots n) \}$$

BC_n 型ルート系

Inozemtsev ('85, …) ： BC_n 型の系の拡張

○ Calogero型の系

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

Lax表示(様々な形で構成されている):

$$\frac{dL}{dt} + [L, M] = 0$$

○ 楕円型の系 ($\wp(u) = \wp(u|1,\tau)$) では

トーラス $E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ 上の

(多価)函数の行列 $L(z)$ で Lax表示できる:

$$\frac{dL(z)}{dt} = [L(z), M(z)]$$

$\boxed{\text{例}}$ A_{n-1}型のとき: Krichever の L-行列

$$L(z) = \sum_{j=1}^{n} p_j E_{jj} + ig \sum_{j \neq k} x(q_j - q_k, z) E_{jk}$$

$$M(z) = \sum_{j=1}^{n} D_j E_{jj} + ig \sum_{j \neq k} y(q_j - q_k, z) E_{jk}$$

$$D_j = ig \sum_{k(\neq j)} \wp(q_j - q_k),$$

$$y(u, z) = \frac{\partial x(u, z)}{\partial u},$$

$x(u, z)$ は次のような函数方程式の解:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
& x(u,z)\,y(v,z) - y(u,z)\,x(v,z) \\
& \qquad = x(u+v,z)\bigl(\wp(u) - \wp(v)\bigr), \\
& x(u,z)\,x(-u,z) = \wp(z) - \wp(u)
\end{aligned}
}
$$

○ $x(u,z)$ を

$$x(u,z) = -\sigma(u,z) = \frac{\vartheta_1(u-z)\,\vartheta_1'(0)}{\vartheta_1(u)\,\vartheta_1(z)}$$

とえらぶと、

$$2\pi i \frac{\partial L(z)}{\partial \tau} = [L(z), M(z)] - \frac{\partial M(z)}{\partial z}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2\pi i \frac{dq_j}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad 2\pi i \frac{dp_j}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$\Longleftrightarrow$ トーラス上の線形微分方程式

$\dfrac{dY}{dz} = L(z)Y$ の等モノドロミー変形

（時間変数は τ）

BC_n 型や Inozemtsev 系などについても、$x(u,z)$ を修正したものを混ぜて用いることにより、等スペクトル変形かつ τ に関する等モノドロミー変形ができる。

— 特別な例：P_{VI} に対する Manin の表示

Painlevé - Calogero 対応

Painlevé VI (P_{VI}):

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t}\right)\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{\lambda-t}\right)\frac{d\lambda}{dt}$$

$$+ \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha + \beta\frac{t}{\lambda^2} + \gamma\frac{t-1}{(\lambda-1)^2} + \delta\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right)$$

$\downarrow$

Fuchs, Painlevé Manin	$\lambda = \dfrac{\wp(q)-e_1}{e_2-e_1}$ $t = \dfrac{e_3-e_1}{e_2-e_1}$

$\left(e_j = \wp(\omega_j)\right)$

$\left(\begin{array}{l} \omega_1 = \frac{1}{2},\ \omega_3 = \frac{\tau}{2} \\ \omega_2 = -\frac{1+\tau}{2} \end{array}\right)$

$$(2\pi i)^2 \frac{d^2 q}{d\tau^2} = \sum_{n=0}^{3} \alpha_n \wp'(q+\omega_n) \quad \text{(Manin '96)}$$

$\updownarrow$

$$2\pi i\frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad 2\pi i \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}$$

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} - \sum_{n=0}^{3} \alpha_n \wp(q+\omega_n)$$

(Inozemtsev Hamiltonian の特別な場合)

「Painlevé - Calogero 対応」 (Levin & Olshanetsky)

楕円曲線

$$y^2 = z(z-1)(z-t) \quad \cdots\cdots \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{\wp(u)-e_1}{e_2-e_1} \\[2ex] z = \dfrac{\wp'(u)}{2(e_2-e_1)^{3/2}} \end{array} \right.$$

Fuchs, Painlevé

最近わかったこと：

- P_{VI} 以下についても同様の「対応」がある．

$$
\begin{tikzcd}
P_{\mathrm{VI}} \arrow[r] & P_{\mathrm{V}} \arrow[r] \arrow[d] & P_{\mathrm{IV}} \arrow[d] & \\
& P_{\mathrm{III}} \arrow[r] & P_{\mathrm{II}} \arrow[r] & P_{\mathrm{I}}
\end{tikzcd}
$$

[Painlevé 方程式の退化図式]

「Calogero 側」にも同様の退化図式
（双曲型，有理型，etc の Inozemtsev Hamiltonian）

- 「多成分」化がある．（≠ Garnier 系）

例 $$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2} p_j^2 + \sum_{m=0}^{3} \alpha_m \wp(q_j + \omega_m) \right)$$

$$+ g^2 \sum_{j \neq k} \left(\wp(q_j - q_k) + \wp(q_j + q_k) \right)$$

(rank n の 楕円型 Inozemtsev Hamiltonian)

$$\Big\downarrow \quad \boxed{\lambda_j = \frac{\wp(q_j) - e_1}{e_2 - e_1}, \quad t = \frac{e_3 - e_1}{e_2 - e_1}}$$

$$\frac{d\lambda_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mu_j}, \quad \frac{d\mu_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_j}$$ （n 成分 P_{VI}）

$$H = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j(\lambda_j - 1)(\lambda_j - t)}{t(t-1)} \left[\mu_j^2 - \left(\frac{\kappa_0}{\lambda_j} + \frac{\kappa_1}{\lambda_j - 1} + \frac{\theta - 1}{\lambda_j - t} \right) \mu_j + \frac{\kappa}{\lambda_j(\lambda_j - 1)} \right]$$

$$+ \frac{g^2}{2t(t-1)} \sum_{j \neq k} \left[\frac{\lambda_j(\lambda_j - 1)(\lambda_j - t) + \lambda_k(\lambda_k - 1)(\lambda_k - t)}{8(\lambda_j - \lambda_k)^2} - 2(\lambda_j + \lambda_k) \right]$$