有理スペクトル曲線をもつ可積分系

高崎 金久 (Kanehisa Takasaki)
京大総合人間学部 (Kyoto University)

可積分系のスペクトル曲線と言えば正種数の代数曲線を想像するのが普通だが，スペクトル曲線が有理曲線になる例もある．ここではそのような例を紹介する．

有理スペクトル曲線をもつ可積分系の例

1. 非周期有限戸田格子（いわゆる戸田分子）
2. 有理型 Calogero-Moser（CM）系（ただし A 型）
3. 有理型 Ruijsenaars-Schneider（RS）系（ただし A 型）

これらの例はスペクトルパラメータ z をもつ L 行列 $L(z)$ をもち，そのスペクトル曲線

$$\det(\zeta I - L(z)) = 0$$

は有理曲線になる．

注意：例はこの他にもまだあるように思われる．たとえば有限非周期的 Ruijsenaars-戸田格子はどうだろうか？

スペクトル曲線の具体的な形　有理型 CS 系と有理型 RS 系の場合について説明する．

有理型 CM 系には

$$L(z) = \sum_{j=1}^{N} p_j E_{jj} + gi \sum_{j \neq k} \left(\frac{1}{q_j - q_k} + \frac{1}{z} \right) E_{jk}$$

という形の L 行列がある（p_j, q_j は正準座標）．これは

$$L(z) = L + \frac{gi}{z}(\mathbf{e}\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{e} - I)$$

というように表わせる．ここで L はスペクトルパラメータをもたない L 行列，$\mathbf{e}$ は ${}^{\mathrm{t}}(1, \ldots, 1)$ という列ベクトルを表わす．

有理型 RS 系には

$$L(z)=\sum_{j,k=1}^{N}\left(\frac{1}{q_j-q_k+\gamma}+\frac{1}{z}\right)h_jE_{jk}$$

という L 行列がある．ここで h_j は $e^{p_j}V_j$ （V_j は座標のある函数）という形の量である．これは

$$L(z)=L+\frac{1}{z}\mathbf{h}\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{e}$$

と表わせる．ここで $\mathbf{h}$ は ${}^{\mathrm{t}}(h_1,\ldots,h_N)$ という列ベクトル，L はスペクトルパラメータを含まない L 行列である．

これらの行列はある行列に階数 1 の行列を加えた形 $X=C+\mathbf{a}\,{}^{\mathrm{t}}\mathbf{b}$ をもつ．この形の行列の特性多項式は

$$\det(\zeta I-X)\quad=\det(\zeta I-C)(1-{}^{\mathrm{t}}\mathbf{b}(\zeta I-C)^{-1}\mathbf{a})$$

と表わせる．これを有理型 CM 系と有理型 RS 系の $L(z)$ の特性多項式に適用すれば，右辺の $\det(\cdots)$ の部分はあまり意味がなく，$(1-\cdots)$ の部分から

$$\text{有理型 CM 系：}\qquad \frac{z}{gi}={}^{\mathrm{t}}\mathbf{e}\Big(\tilde{\zeta}I-L\Big)^{-1}\mathbf{e}$$

$$\text{有理型 RS 系：}\qquad z={}^{\mathrm{t}}\mathbf{e}(\zeta I-L)^{-1}\mathbf{h}$$

という方程式が得られる（ここで $\tilde{\zeta}=\zeta+\dfrac{gi}{z}$ とおいた）． これらは有理曲線を与える．

なお，戸田分子の場合にも計算の原理は可能であるが，そこから出てくるのは $z=P(\zeta)$ (P は多項式）という曲線（すなわち多項式のグラフ）である．

変数分離法　この有理スペクトル曲線に基づいて「変数分離」を行うこともできる．これは通常の手続きによるもので，適当な正規化ベクトル $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_N)$ を選べば

$${}^{\mathrm{t}}\alpha\,\mathrm{Adj}(\zeta I-L(z))=0$$

（Adj は余因子行列を表わす）という方程式によってスペクトル曲線上の点 (ζ_j,z_j) $(j=1,\ldots,N-1)$ が決まり，それらが分離座標を与える．今の場合，$\tilde{\zeta}_j=\zeta_j+\dfrac{gi}{z_j}$ あるいは ζ_j が

$$\text{有理型 CM 系：}\qquad {}^{\mathrm{t}}\alpha(\tilde{\zeta}I-L)^{-1}\mathbf{e}=0$$

$$\text{有理型 SR 系：}\qquad {}^{\mathrm{t}}\alpha(\zeta I-L)^{-1}\mathbf{h}=0$$

という方程式によって先に決まる（z_j はそれから前述のスペクトル曲線の方程式で決まる）という仕組みになっている．