変数分離・代数曲面・Seiberg-Witten 理論から見た 有理函数の空間上の可積分系とその拡張

高崎金久（京大総合人間学部）
武部尚志（お茶の水女子大理学部）

Donaldson の結果によれば，SU(2) モノポールのモジュライ空間は共通因子をもたない二つ多項式

$$
\begin{aligned}
A(\lambda) &= \lambda^N + u_2\lambda^{N-2} + \cdots + u_N, \\
B(\lambda) &= \lambda^{N-1} + v_1\lambda^{N-2} + \cdots + v_{N-1}
\end{aligned}
$$

の商としてあらわされる有理式の $2N-2$ 次元空間

$$
\mathcal{M} = \Big\{ f(\lambda) \mid f(\lambda) = \frac{B(\lambda)}{A(\lambda)} \Big\}
$$

と同一視できる．Atiyah と Hitchin は，この空間の超 Kähler 構造のツイスター記述のために，閉 2 次微分形式

$$
\Omega = \sum_{j=1}^{N} d\log B(\alpha_j) \wedge d\alpha_j
$$

の定めるシンプレクティック構造を考えた（正確には，$A(\lambda)$ に $u_1\lambda^{N-1}$ を加え，$B(\lambda)$ の λ^{N-1} に係数 v_0 を導入してから，これらを $u_1 = 0$, $v_0 = 1$ に固定するシンプレクティック簡約を行う）．ここで α_j は $A(\lambda)$ の N 個の根である．$A(\lambda)$ の係数 u_n は根 $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ の函数（基本対称式）であるから，明らかに Poisson 可換

$$
\{u_m, u_n\} = 0
$$

である．こうして $\mathcal{M}$ は $u_2, \ldots, u_N$ を可換な Hamiltonian とする可積分系の構造をもつことがわかる．この可積分系はもともと Moser が非周期的有限戸田格子系から見出したもので，線形系の制御理論や Kostant-戸田系にも現れることが知られている（Krishnaprasad, Nakamura, Faybusovich, Gekhtman）．

本講演では，この（ほとんど自明とも言うべき）可積分系が表題に掲げた変数分離，代数曲面，ならびに Seiberg-Witten 理論の簡単なモデルでもあることに注目し，それに基づくいくつかの拡張を示す．

変数分離法との関係は Ω を

$$
\Omega = \sum_{k=1}^{N-1} d\log A(\lambda_k) \wedge d\lambda_k
$$

と書き直すことで見えてくる．ここで λ_k は $B(\lambda)$ の $N-1$ 個の根である．これは λ_k と $\mu_k = \log A(\lambda_k)$ が新たな正準座標系を与えることを示す．さらに

$$z_k = e^{\mu_k} = A(\lambda_k)$$

と置くと，(λ_k, z_k) は (λ, z) 平面上の方程式

$$z = A(\lambda)$$

で定義される曲線に乗った $N-1$ 個の点の系（次数 $N-1$ の因子）とみなせる．この曲線を「スペクトル曲線」，(λ_k, z_k) を「分離座標」と解釈すれば，これは通常の可積分系（たとえば周期的有限戸田格子系）に対する Sklyanin 流の変数分離と同様の設定である．

代数曲面に基づく可積分系の構成（Beauville, Hurtubise）との関連を見るには，(λ, z) 平面を $\omega = dz \wedge d\lambda / z$ という（特異点をもつ）シンプレクティック形式をもつ代数曲面 S とみなす．その $N-1$ 重対称積 $S^{(N-1)}$ に

$$\Omega = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{dz_k \wedge d\lambda_k}{z_k}$$

でシンプレクティック構造を入れて，連立１次方程式

$$z_1 = A(\lambda_1), \quad \ldots, \quad z_{N-1} = A(\lambda_{N-1})$$

で決まる函数 $u_n = u_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}, z_1, \ldots, z_{N-1})$ を Hamiltonian として選んだのが前述の可積分系に他ならない．

Seiberg-Witten 理論との関連を見るには前述の曲線 $z = A(\lambda)$ 上の微分形式 $\log z d\lambda$ （あるいは $\lambda d \log z$）に注目する．これが Seiberg-Witten 微分の役割を演じる．実際，これから

$$S = \sum_{k=1}^{N-1} \int^{\lambda_k} \log A(\lambda) d\lambda$$

という母函数を構成すれば，u_n の正準共役変数（角変数）

$$\phi_n = \frac{\partial S}{\partial u_n} = \sum_{k=1}^{N-1} \int^{\lambda_k} \frac{\lambda^{N-n}}{A(\lambda)} d\lambda$$

が得られるが，これは因子 $\sum_{k=1}^{N-1} [(\lambda_k, z_k)]$ の（一般化）Abel-Jacobi 写像による像と解釈できる．また，α_j を係数 u_n の函数と見たものが Seiberg と Witten の周期（特殊座標）に相当する．なお，Braden と Marshakov は通常の Seiberg-Witten 理論の弱結合極限の考察から同じ結論を得ている．

$A(\lambda), B(\lambda)$ を三角・双曲線函数や楕円函数に置き換えることによって，同様の構造をもつ新しい可積分系の例ができる．詳細は講演の際に述べる．