有理型函数対の空間の上の可積分系

高崎　金久（京都大学総合人間学部）
武部　尚志（お茶の水女子大学理学部）

Atiyah と Hitchin は SU(2) モノポールの研究において，互いに素な多項式 $A(\lambda) = \lambda^N + u_2\lambda^{N-2} + \cdots + u_N$, $B(\lambda) = \lambda^{N-1} + v_2\lambda^{N-2} + \cdots + v_N$ を分母・分子とする有理函数 $B(\lambda)/A(\lambda)$ の空間 $\mathcal{M}$（$2N-2$ 次元）を考えて，その上にシンプレクティック構造を導入した．そのシンプレクティック形式 Ω は $A(\lambda)$ の根 $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ を用いて

$$\Omega = \sum_{j=1}^{N} d_{\mathcal{M}} \log B(\alpha_j) \wedge d_{\mathcal{M}}\alpha_j$$

と表わせる（$d_{\mathcal{M}}$ は $\mathcal{M}$ 上の全微分をあらわす）．特に $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ は Ω の定める Poisson 括弧について可換であり，したがって，それらの基本対称式である $u_2, \ldots, u_N$ も同様である．こうして $u_2, \ldots, u_N$ を包合的な Hamilton 函数の組として $\mathcal{M}$（の開集合）は可積分系の構造をもつ．これが非周期的有限戸田格子の別表現であるということも知られている．詳細や文献については最近書いたレヴュー（K. Takasaki, Integrable systems whose spectral curve is the graph of a function, arXiv:nlin.SI/0211021）を参照されたい．

この可積分系の一般化を考えるには，有理式という表現にこだわるよりも，むしろ多項式 $A(\lambda), B(\lambda)$ の対 (A, B) を基本的な対象と考える方が自然である．昨年春の分科会では，多項式対の代わりに三角函数や楕円函数の対を考えればこの可積分系の変種が構成できること，それらはいずれも $A(\lambda)$ のグラフ $C = \{(\lambda, z) \mid z = A(\lambda)\}$ を「スペクトル曲線」とする「変数分離」の簡単なモデルと解釈できること，などを報告した（K. Takasaki and T. Takebe, An integrable system on the moduli space of rational functions and its variants, arXiv:nlin.SI/0202042）．今回はその結果を任意種数の複素代数曲線に一般化する一つのアイディアを紹介する．

種数 g の（非特異）複素代数曲線 C_0 とその上の N 個の点 $R_1, \ldots, R_N$ を用意する．このとき，$R_1, \ldots, R_N$ でのみ高々１位の極をもつ C_0 上の有理型函数の線形空間 $L(R_1 + \cdots + R_N)$ を考えることができる．この線形空間の零でない要素 A, B を用いたらどうか，というのが今回の話の基本的なアイディアである．$N > 2g-2$（あるいは $N > g$ かつ $R_1, \ldots, R_N$ が一般の位置にある）ならば，この線型空間の次元は $N-g+1$ である．そこで，射影空間 $\mathbf{P}L(R_1 + \cdots + R_N) \simeq \mathbf{P}^{N-g}$ の二つの要素 $[A], [B]$ の対からなる $2N-2g$ 次元空間 $\mathcal{M} = \{([A], [B]) \mid A, B \in L(R_1 + \cdots + R_N) \setminus \{0\}\}$（必要に応じて open condition を置いて開部分集合に縮めるものとする）を考える．

$L(R_1+\cdots+R_N)$ の適当な基底 $f_0,\ldots,f_{N-g}$ を選び，A,B を

$$A(P)=\sum_{\ell=0}^{N-g} u_\ell f_\ell(P), \quad B(P)=\sum_{\ell=0}^{N-g} v_\ell f_\ell(P) \tag{1}$$

と表わせば，$(u_\ell)_{\ell=0}^{N-g},(v_\ell)_{\ell=0}^{N-g}$ を射影空間の斉次座標とみなして非斉次化することによって $\mathcal{M}$ の座標（すなわち $[A],[B]$ 対のモジュライ）が得られる．

$\mathcal{M}$（の開集合）上にシンプレクティック構造を導入するため，C_0 の零でない正則微分形式 $d\lambda$ を一つ選び，その（多価）原始函数 $\lambda(P)=\int_{P_0}^P d\lambda$ を考える．Atiyah と Hitchin のシンプレクティック形式の類似は $A(P)$ の零点 $P_1,\ldots,P_N$ を用いて

$$\Omega=\sum_{j=1}^{N} d_{\mathcal{M}}\log B(P_j)\wedge d_{\mathcal{M}}\lambda(P_j) \tag{2}$$

で与えられる（$d_{\mathcal{M}}$ はここでも $\mathcal{M}$ 上の全微分をあらわす）．$B(Q)$ の零点を $Q_1,\ldots,Q_N$ と書けば，留数定理に基づく簡単な議論によって Ω を

$$\Omega=\sum_{j=1}^{N} d_{\mathcal{M}}\log A(Q_j)\wedge d_{\mathcal{M}}\lambda(Q_j) \tag{3}$$

と表わすこと（いわば双対表示）もできる．さらに，$A(P)$ の展開係数の比 $E_\ell=u_\ell/u_0$（すなわち $[A]$ のモジュライ）と

$$\phi_\ell=\sum_{j=1}^{N}\int_{P_0}^{P}\frac{f_\ell(P)d\lambda(P)}{A(P)/u_0} \tag{4}$$

を導入すれば，Ω に対する第三の表示

$$\Omega=\sum_{\ell=1}^{N-g} d_{\mathcal{M}}E_\ell\wedge d_{\mathcal{M}}\phi_\ell \tag{5}$$

が得られる．[1]多項式・三角函数・楕円函数の対の場合にもこの三つの表示に相当するものが登場して基本的な役割を演じた．その解釈は今の場合にもほぼそのまま通用する．すなわち，(5) から，E_ℓ が Poisson 括弧について互いに可換であり，これらを作用変数，ϕ_ℓ を角変数とする可積分系の構造が $\mathcal{M}$（の開集合）の上にできたということがわかる．また，(3) は $\lambda_j=\lambda(Q_j)$, $z_j=A(Q_j)/u_0$ が変数分離の「分離変数」の類似物であることを示している．ただし，λ_j,z_j $(j=1,\ldots,N)$ は全体としては独立な変数ではない（独立な変数の個数は $2N-2g$ のはずである）．このことが Hamilton 函数をこれらの変数の函数として書き下す際の障害になる．

[1] Abel の定理によって

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda(Q_j)=\sum_{j=1}^{N}\lambda(R_j)+\oint_\gamma d\lambda$$

（γ はある整数係数ホモロジー類），したがって $\sum_{j=1}^{N} d_{\mathcal{M}}\lambda(Q_j)=0$ という等式が成立する．このことを計算の途中で用いる