佐藤理論から見たLandau-Lifshitz方程式

高崎　金久（京大総合人間学部）(2003年11月改訂版)

よく知られているように，古典スピン場 $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$ に対するLandau-Lifshitz（以下LLと略する）方程式 $\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \times \mathbf{S}_{xx} + \mathbf{S} \times \mathbf{J}(\mathbf{S})$, $\mathbf{J}(\mathbf{S}) = (J_1 S_1, J_2 S_2, J_3 S_3)$, の Lax 表示はトーラス上のスペクトルパラメータに依存する行列で構成される [E. Sklyanin, LOMI E-3-79, 1979]．この方程式に対しては既に数多くの研究がなされているが，Grassmann多様体を用いる佐藤理論の視点に即した研究は少ない．比較的近い立場からのものとしては伊達，神保，柏原，三輪によるトーラス上の自由フェルミ場を用いた研究 [J. Phys. A: Math. Gen. **16** (1983), 221–236] が掲げられるが，Grassmann多様体との関係がすぐに読み取れるようにはなっていない．また，トーラス上のループ群によってLL方程式を扱うCarey, Hannabus, Mason, Singerの研究 [Commun. Math. Phys. **154** (1993), 25–47] はその中で部分的にGrassmann多様体を利用しているという点では注目される．しかしながら，そこでのGrassmann多様体の使い方はやや不自然なもので，議論全体の要をなしているとはとうてい言えない．その根本的な理由はこのGrassmann多様体がLL方程式の背後にある幾何学的構造をきちんと取り入れていないことにある．

この講演では佐藤理論に即した形でLL方程式とその仲間を定式化する方法を紹介する．これは本質的に新しい結果とは言えないが，従来の取り扱いに比べて少なくとも見通しはよくなっている．また，正種数のRiemann面をスペクトルパラメータの定義域とするようなソリトン方程式を探求する，という問題に対して一つの指針（佐藤理論からのアプローチの方法）を示唆しているように思われる．

トーラスを $\Sigma = \mathbf{C}/(2\omega_1\mathbf{Z} + 2\omega_3\mathbf{Z})$ $(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0)$ と表わし，その原点 $z = 0$ を中心とする小円周 $|z| = \epsilon$ の近傍から $\mathrm{sl}(2, \mathbf{C})$ への正則写像 $z \mapsto X(z)$ のなすループ代数 $\mathfrak{g}$ を考える．このループ代数は部分Lie代数への直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathrm{in}} \oplus \mathfrak{g}_{\mathrm{out}} \tag{1}$$

をもつ [A.G. Reyman and M.A. Semenov-Tian-Shansky, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **150** (1986), 104–118; J. Soviet Math. **46** (1989), 1631–1640]．ここで $\mathfrak{g}_{\mathrm{in}}$ は $|z| < \epsilon$ まで正則写像として延長できるようなものからなる．また $\mathfrak{g}_{\mathrm{out}}$ の方は，$\mathbf{C} \setminus (2\omega_1\mathbf{Z} + 2\omega_3\mathbf{Z})$ まで正則写像として延長され，

$$X(z + 2\omega_a) = \sigma_a X(z) \sigma_a \quad (a = 1, 2, 3) \tag{2}$$

という等式を満たし（σ_a はPauli行列である），$2\omega_1\mathbf{Z} + 2\omega_3\mathbf{Z}$ の各点で1位以上の極をもつものからなる．$\mathfrak{g}_{\mathrm{out}}$ の要素に要求した条件はLL型方程式のLax表示に現れる行列の解析的性質に他ならないが，幾何学的にはトーラス上の $\mathrm{sl}(2, \mathbf{C})$ 束

と関係がある．おなじみの Boltzmann 荷重 $w_a(z) = \sqrt{\wp(z) - e_a}$ から $\mathfrak{g}_{\rm out}$ の基底 $\partial_z^n w_a(z)\sigma_a$ $(a = 1,2,3,\ n = 0,1,2,\ldots)$ が得られる．$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}_{\rm out}$ への射影 $(\cdot)_{\rm out}$ は次のようなものになる：

$$\left(z^{-n-1}\sigma_a\right)_{\rm out} = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n!}\partial_z^n w_a(z)\sigma_a & (n \geq 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases} \tag{3}$$

Guil と Mañas [Phys. Lett. A **153** (1991), 90–94] はこの直和分解に基づいて LL 型ソリトン方程式の高次時間発展の階層を構成している．その構成法は通常のループ代数の場合と同様で，$\mathfrak{g}$ から可換な要素列 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ を適当に選び，(1) に対応するループ群の乗法的分解 $G \approx G_{\rm in}G_{\rm out}$ への $\exp(\sum_{n=1}^\infty t_n\gamma_n)$ の左作用を $G_{\rm in}$ に射影する．射影された力学系の従属変数を $\phi \in G_{\rm in}$ として，それから決まる行列

$$A_n = \left(\phi\gamma_n\phi^{-1}\right)_{\rm out}, \quad \psi = \phi\exp\left(\sum_{j=1}^\infty t_n\gamma_n\right) \tag{4}$$

を導入すれば，これらは零曲率方程式 $[\partial_{t_m} - A_m, \partial_{t_n} - A_n] = 0$ と線形方程式 $\partial_{t_n}\psi = A_n\psi$ を満たす．ちなみに，この構成法にならって Bogomolny 方程式や自己双対 Yang-Mills 方程式に相当する高次元階層も定式化できる．

このLL 型階層を Grassmann 多様体の言葉に翻訳するために，2×2 行列値 Laurent 級数のなすベクトル空間

$$V = {\rm gl}(2,\mathbf{C}) \otimes \mathbf{C}((z)), \quad V_- = {\rm gl}(2,\mathbf{C}) \otimes \mathbf{C}[[z]]z \tag{5}$$

を用意して

$$\begin{aligned} {\rm Gr}_{-4} \quad = \quad & \{\,\text{線形部分空間}\ W \subset V \mid \text{合成写像}\ W \hookrightarrow V \to V/V_-\ \text{について} \\ & \dim{\rm Ker}(W \to V/V_-) = \dim{\rm Coker}(W \to V/V_-) - 4 < \infty\} \end{aligned} \tag{6}$$

という Grassmann 多様体を考える．LL 型階層に対応するのはその中の

$$W = W_0\phi \quad (\phi \in G_{\rm in}), \tag{7}$$

という形の線形部分空間からなる部分集合である．ここで W_0 と書いたのは，(2) を満たす正則写像 $X : \mathbf{C} \setminus (2\omega_1\mathbf{Z} + 2\omega_3\mathbf{Z}) \to {\rm gl}(2,\mathbf{C})$ 全体の中で，$2\omega_1\mathbf{Z} + 2\omega_3\mathbf{Z}$ の各点で高々極をもつものからなる線形空間である（$|z| = \epsilon$ の近傍で Laurent 展開すれば V の線形部分空間とみなせる）．これは $\mathfrak{g}_{\rm out}$ と似ているが，${\rm gl}(2,\mathbf{C})$ に値をとることと $z = 0$ で正則なもの（つまり定数写像）も許すことに注意されたい．この W_0 に LL 型方程式の幾何学的構造が組み込まれているわけである．時間発展 $\phi \mapsto \phi(t_1, t_2, \ldots)$ は $\exp(-\sum_{n=1}^\infty t_n\gamma_n)$ の右からの作用で生成される．すなわち

$$\phi(t_1, t_2, \ldots) \in W_0\phi\exp\left(-\sum_{n=1}^\infty t_n\gamma_n\right) \tag{8}$$

によって決まる．