Tyurin パラメータと佐藤理論

高崎金久（京都大学大学院人間・環境学研究科）

1．はじめに　最近 Krichever は複素代数曲線上のベクトル束の変形族を用いて Lax 方程式・零曲率方程式を構成する方法を示した [Commun. Math. Phys. **229** (2002), 229–269]．そこでは曲線上の有理型函数の行列（もちろん時間・空間変数にも依存する）によって Lax 方程式や零曲率方程式を構成する．これらの行列は「Tyurin パラメータ」と呼ばれるもので特徴付けられる構造をもつ．Tyurin パラメータは直線束と因子の間のよく知られた対応関係をベクトル束に拡張したもので，種数 g の曲線 Γ 上の階数 r のベクトル束の場合には，rg 個の点 $\gamma_1, \ldots, \gamma_{rg} \in \Gamma$ とそれぞれに付随した rg 個の複素方向ベクトル $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{rg} \in \mathbf{P}^{r-1}$ からなる．ちなみに，$\gamma_1, \ldots, \gamma_{rg}$ は等モノドロミー変形や Riemann-Hilbert 問題における「見かけの特異点」に相当する．これらを力学的自由度として取り入れることによって Lax 方程式や零曲率方程式を構成できる，というのが Krichever の主張である．

以下ではこの構成法により得られる方程式（いわばソリトン方程式の「正種数類似」）の一例を示し，それが佐藤理論の枠組でどのように位置づけられるかを明らかにする．説明を簡単かつ具体的にするためここでは $g = 1$ の場合のみ考えるが，$g > 1$ の場合も原理的には同様に扱える．

2．AKNS 階層の $g = 1$ 類似　ここで扱う方程式は AKNS 階層の正種数類似と呼ぶべきもので，

$$[\partial_x - A(z),\ \partial_{t_n} - A_n(z)] = 0 \quad (n = 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

という Lax 表示をもつ．$A(z)$ と $A_n(z)$ はトーラス上の $\mathrm{gl}(2, \mathbf{C})$ 値有理型函数で（$z \in \mathbf{C}$ の 2 重周期的函数として扱う），次の解析的性質をもつ．

1. 極は $z = 0, \gamma_1, \gamma_2$ にある．ここで，γ_1, γ_2（前述の Tyurin パラメータの半分）は x, t_n に依存する量である．

2. $z = 0$ において

$$\begin{aligned} A(z) &= \begin{pmatrix} z^{-1} & u \\ v & -z^{-1} \end{pmatrix} + O(z), \\ A_2(z) &= \begin{pmatrix} z^{-2} + w_3 & z^{-1}u + w_1 \\ z^{-1}v + w_2 & -z^{-2} - w_3 \end{pmatrix} + O(z), \quad \text{etc} \ldots . \end{aligned} \tag{2}$$

ここで u, v は通常の AKNS 階層の従属変数に相当する量であり，また，w_1, w_2, w_3 はそれらと γ_1, γ_2 ならびに後述の α_1, α_2 から構成されるやや複雑な量である（具体的な形はここでは省く）.

3. $z = \gamma_s$ $(s = 1, 2)$ において $A(z)$ と $A_n(z)$ は 1 位の極をもち，留数行列は次のような形をしている.

$$\operatorname*{Res}_{\gamma_s} A(z) = \boldsymbol{\beta}_s {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\alpha}_s, \quad \operatorname*{Res}_{\gamma_s} A_n(z) = \boldsymbol{\beta}_{n,s} {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\alpha}_s. \tag{3}$$

ここで $\boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_s, \boldsymbol{\beta}_{n,s}$ は x, t_n に依存する 2 次元列ベクトルである．$\boldsymbol{\alpha}_s$（Tyurin パラメータの残りの半分）は ${}^{\mathrm{t}}(\alpha_s, 1)$ という形に正規化しておく.

$A(z), A_n(z)$ はこれらの条件によって 一意的に定まり，Weierstrass の ζ 函数を用いて具体的に表わすこともできる．零曲率方程式から u, v, γ_s, α_s に対する一連の発展方程式が導かれる（逆も言える）.

3．佐藤理論への翻訳　$V = \mathrm{gl}(2, \mathbf{C}((z)))$ および $V_- = \mathrm{gl}(2, \mathbf{C}[[z]]z)$ というベクトル空間対から佐藤 Grassmannian

$$\mathrm{Gr} = \{W \subset V \mid W \hookrightarrow V \to V/V_- \text{ の核と余核の次元は有限で同一 }\} \tag{4}$$

をつくる．Tyurin パラメータの初期値 $\gamma_s^0 = \gamma_s|_{x=t_n=0}$, $\alpha_s^0 = \alpha_s|_{x=t_n=0}$ によって次のような部分空間 $W_0 \in \mathrm{Gr}$ が決まる.

$$\begin{aligned} W_0 \quad = \quad & \{\chi(z) \in V \mid \chi(z) \text{ はトーラス上の } \mathrm{gl}(2, \mathbf{C}) \text{ 値有理型函数で,} \\ & \text{極は } z = 0, \gamma_1^0, \gamma_2^0 \text{ にある．} \gamma_s^0 \text{ での極は 1 位で，留数行列は} \\ & \mathrm{Res}_{\gamma_s^0}\, \chi(z) = (\text{列ベクトル})(\alpha_s^0, 1) \text{ という形をしている.}\} \end{aligned} \tag{5}$$

W_0 は「真空」と言うべきもので，Gr の big cell に属している（すなわち $W_0 \to V/V_-$ は同型）．この真空に $\phi(z) = I + \phi_1 z + \phi_2 z^2 + \cdots$ という形の $\mathrm{gl}(2, \mathbf{C})$ 値 Laurent 級数で着物を着せた部分空間 $W = W_0 \phi(z) \in \mathrm{Gr}$ は上の正種数 AKNS 階層の一般の解に相当する．時間発展は行列値指数函数の作用

$$W \mapsto W \exp\Big(-\sum_{n=1}^{\infty} t_n J_n(z)\Big), \quad J_n(z) = z^{-n}\sigma_3, \tag{6}$$

によって引き起こされる（$t_1 = x$ とみなす）．ここからほぼ通常の処方に従って佐藤・Wilson 形式や Lax 形式の方程式が導かれる.

春の無限可積分系セッションでは Landau-Lifshitz 方程式の階層について同様の結果を報告した．性格の異なるこれらの方程式が佐藤理論によって統一的に理解できることは大変興味深い.