Tyurinパラメータと佐藤理論

ref: nlin.SI/0307030
(to be revised)

- 代数曲線 ($g \neq 0$) 上の Lax・零曲率方程式：何が問題か？
- Kricheverのアイディア：Tyurinパラメータ
- AKNS (NLS) 階層の $g=1$ 類似
- 佐藤理論への翻訳

I. 代数曲線上の Lax・零曲率方程式 — 何が問題か？

$$[\partial_t - M(P), L(P)] = 0 \quad (\text{Lax})$$

$$[\partial_t - M(P), \partial_x - L(P)] = 0 \quad (\text{零曲率})$$

$L(P), M(P)$: $r \times r$, $P \in \Gamma$

代数曲線 Γ 上の有理型函数の行列

有限個の極 $P_1, \cdots, P_N$
位数 $m_1, \cdots, m_N$
} 有限個の従属変数（モジュライ）

例 $\Gamma = \mathbb{P}^1$, $L = L(\lambda)$, $M = M(\lambda)$ } 有理函数の行列

→ 数多くの例，Riemann-Hilbert 問題などによる解構成（Zakharov & Shabat, …）

困難 $g>0$ では，$L(P)$, $M(P)$ を一般的な形（$P_1, \cdots, P_N$, $m_1, \cdots, m_N$ を与えてきまる）に選ぶとき

方程式の数 > 従属変数の数

（つまり overdetermined）となって，意味のある系が得られない（Zakharov & Shabat）

注意 L, M が特殊な構造（対称性などに基づく）をもてば意味のある方程式系が得られることもある．

Gaudin 模型もその仲間

例 Γ = 楕円曲線

$$L(\lambda) = \sum_{a=1}^{3} w_a(\lambda) S_a \sigma_a \quad (\text{LL方程式}), \text{etc}$$

$$w_a(\lambda) = \sqrt{\wp(\lambda) - e_a}$$

およびその SL_r 拡張（Belavin の $\mathbb{Z}_r$ 対称な Boltzman weight を用いる）