Tyurinパラメータと佐藤理論

ref: nlin.SI/0307030
(to be revised)

- 代数曲線 ($g \neq 0$) 上の Lax・零曲率方程式: 何が問題か?
- Kricheverのアイディア: Tyurinパラメータ
- AKNS (NLS) 階層の $g=1$ 類似
- 佐藤理論への翻訳

I. 代数曲線上のLax・零曲率方程式
— 何が問題か?

$$[\partial_t - M(P), L(P)] = 0 \quad (\text{Lax})$$

$$[\partial_t - M(P), \partial_x - L(P)] = 0 \quad (\text{零曲率})$$

$L(P), M(P)$: $r \times r$, $P \in \Gamma$

代数曲線 Γ 上の有理型函数の行列

有限個の極 $P_1, \cdots, P_N$
位数 $m_1, \cdots, m_N$ } 有限個の従属変数（もじゅうり）

<u>例</u> $\Gamma = \mathbb{P}^1$, $L = L(\lambda)$, $M = M(\lambda)$ } 有理函数の行列

→ 数多くの例, Riemann-Hilbert 問題などによる解構成
(Zakharov & Shabat, …)

困難 $g>0$ では, $L(P)$, $M(P)$ を一般的な形（$P_1,\cdots,P_N$, $m_1,\cdots,m_N$ を与えてきまる）に選ぶとき

方程式の数 > 従属変数の数

（つまり overdetermined）となって，意味のある系が得られない
（Zakharov & Shabat）

注意 L, M が特殊な構造（対称性などに基づく）をもてば意味のある方程式系が得られることもある.

Gaudin模型もその仲間

例 Γ = 楕円曲線

$$L(\lambda)=\sum_{a=1}^{3} w_a(\lambda)\, S_a \sigma_a \quad \text{(LL方程式), etc}$$

$$w_a(\lambda)=\sqrt{\wp(\lambda)-e_a}$$

および その SL_r 拡張（Belavinの $\mathbb{Z}_r$ 対称な Boltzman weight を用いる）

II. Krichever のアイデイア：Tyurin パラメータ

(Commun. Math. Phys. 229 (2002), 229-269)

- $L(P)$, $M(P)$ に「動く極」を追加する。
  $\gamma_1, \cdots, \gamma_{rg} \in \Gamma$

- これらの極は「見かけの特異点」とする。

$$\left.\begin{array}{l}(\partial_x - L(P))\Psi(P) = 0 \\ (\partial_t - M(P))\Psi(P) = 0\end{array}\right\}$$
(零曲率方程式の場合)

$\Psi(P)$ は $\gamma_1, \cdots, \gamma_{rg}$ で正則

(ただし退化する： $\det\Psi(P) = 0$ at γ_s)

— より正確には $P \to \gamma_s$ で

留数は階数1の行列

$$L(P) = \frac{\beta_s {}^t\alpha_s}{z(P) - z(\gamma_s)} + \cdots, \quad M(P) 同様$$

という形をとるものとする。(ベクトル α_s は $\neq 0$ $L(P)$, $M(P)$ に共通。)

$$z : \Gamma \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

— 各 s に γ_s, α_s は x, t の函数として

$$\partial_x \gamma_s + {}^t\alpha_s \beta_s = 0,$$
$$\partial_x {}^t\alpha_s + {}^t\alpha_s L_{s,1} = \kappa_s {}^t\alpha_s, \text{ etc}$$

という方程式をみたす（「見かけ」であるための条件）．ここで $L_{s,1}$ は展開の次の係数：
$$L(P) = \frac{\beta_s {}^t\alpha_s}{z(P) - z(\gamma_s)} + L_{s,1} + \cdots$$

$$\boxed{\begin{array}{l}(\gamma_s, \alpha_s) \in \Gamma \times \mathbb{P}^{r-1},\ s=1,\cdots,rg \\ \text{— Tyurin パラメータ}\end{array}}$$

注意・Γ 上の階数 r，次数 rg の（安定）ベクトル束の構成と関係がある（Hecke-Tyurin parametrization）

・可換微分作用素対の記述にも現れた．

Ⅲ. AKNS(NLS)階層のg=1類似

Kricheverのアイディアに従って
非線形Schrödinger(NLS)型AKNS階層
の楕円曲線に伴う類似を構成できる

$$[\partial_x - A(z),\ \partial_{t_n} - A_n(z)] = 0 \quad (n=1,2,\cdots)$$

$A(z)$, $A_n(z)$ はトーラス $\Gamma = \mathbb{C}/(2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_3\mathbb{Z})$
上の有理型函数の 2×2 行列,
一連の条件によって一意的にきまる.

通常のNLS場 u, v に加えて
Tyurinパラメータ γ_1, γ_2, α_1, α_2
を従属変数として含む.　$\mathbb{P}^1$のアフィン座標.

$${}^t\alpha_1 = (\alpha_1 \quad 1)$$
$${}^t\alpha_2 = (\alpha_2 \quad 1)$$

$A(z)$

1. $z=0, \gamma_1, \gamma_2$ で極, 他では正則

2. $z\to 0$ で

$$A(z)=\begin{pmatrix} z^{-1} & u \\ v & -z^{-1}\end{pmatrix}+O(z)$$

3. $z\to\gamma_s$ $(s=1,2)$ で

$$A(z)=\frac{\beta_s{}^t\alpha_s}{z-\gamma_s}+O(1)$$

次のような形に決まる:

$$A(z)=\sum_{s=1,2}\beta_s{}^t\alpha_s\left(\zeta(z-\gamma_s)+\zeta(\gamma_s)\right)+\begin{pmatrix}\zeta(z) & u \\ v & -\zeta(z)\end{pmatrix},$$

$$\beta_1=\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\begin{pmatrix}-1\\-\alpha_2\end{pmatrix},\quad \beta_2=\frac{1}{\alpha_1-\alpha_2}\begin{pmatrix}1\\ \alpha_1\end{pmatrix}.$$

$A_n(z)$

1. $A_n(z)$は $z=0, \gamma_1, \gamma_2$で極, 他では正則

2. $z \to 0$で

$$A_n(z) = U(z) z^{-n} + O(z).$$

ここで $U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n z^n$ は $A(z)$から求まるある母函数行列. 係数 U_n は $u, v, \gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_2$ の xについての微分多項式からなる.

3. $z \to \gamma_s \ (s=1,2)$で

$$A_n(z) = \frac{\beta_{n,s}\, {}^t\alpha_s}{z-\gamma_s} + O(1).$$

- $A_n(z)$も具体的に表示できる.
- 具体的表示を諦めれば一般の代数曲線でも同様のものが考えられる.
- $r \times r$への拡張も可能.

IV. 佐藤理論への翻訳

退化点を許すRiemann-Hilbert問題を仲介にして無限次元Grassmann多様体の上の力学系に翻訳できる. 力学系の相空間はTyurinパラメータの初期値によってきまるある部分多様体である.

1. 以下 t_1 を x と同一視する: $\underline{t_1 = x}$, $\underline{A_1(z) = A(z)}$

線形系

$$\partial_{t_n} \psi = A_n(z) \psi \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

の積分可能条件 $[\partial_{t_m} - A_m(z), \partial_{t_n} - A_n(z)] = 0$ はみたされている. この線形系に対して二種類の解が考えられる.

1) $z=0$ のまわりの Laurent 級数解

$$\psi(z)=\phi(t,z)\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}t_n J z^{-n}\right),$$

$$J=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},$$

$$\phi(t,z)=I+\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(t)z^n$$

2) $t=(t_1,t_2,\cdots)=0$ で正規化条件

$$\chi(0,z)=I$$

をみたす解 $\psi(z)=\chi(t,z)$.

これは z について次の性質をもつ：

- $z\neq 0,\ \gamma_1(0),\ \gamma_2(0)$ ($t=0$での値)
  で正則な Γ_I の函数
- $z=0$ で真性特異点
- $z=\gamma_s(0)$ $(s=1,2)$ で

$$\chi(t,z)=\frac{\tilde{\beta}_s(t)\,{}^t\alpha_s(0)}{z-\gamma_s(0)}+O(1)$$

Tyurin パラメータの $t=0$ での初期値が現れることに注意!

2. これらは同じ線形系の解なので"比"

$$\chi(t,z)^{-1}\,\phi(t,z)\exp\left(\sum_n t_n J z^{-n}\right)$$

は t によらない．$t=0$ での値と等値すれば

$$\boxed{\begin{aligned}&\phi(0,z)\exp\left(-\sum_n t_n J z^{-n}\right)\\ &\quad = \chi(t,z)^{-1}\,\phi(t,z)\end{aligned}}$$

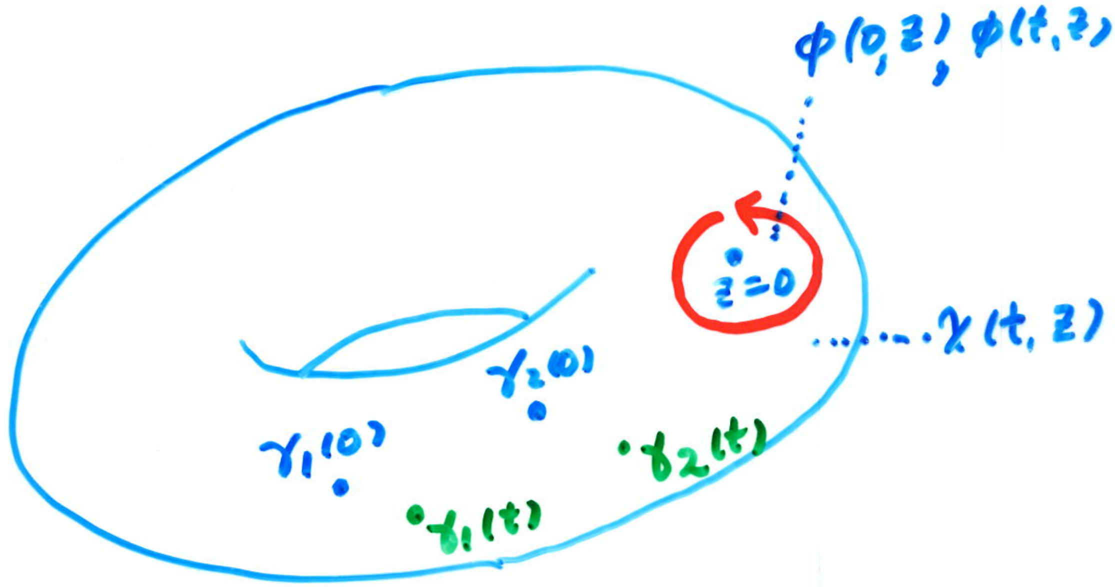
という等式が得られる．これは一種の

Riemann-Hilbert 問題である．

（ $\phi(0,z)$ を与えて $\chi(t,z)$, $\phi(t,z)$ を求める）

これは退化点をもつ．

（ $\det\chi(t,z)=0$ at $z=\gamma_s(t)$ ）



3. Laurent級数の2×2行列からなるベクトル空間

$$V = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n z^n \;\middle|\; w_n \in gl(2,\mathbb{C}) \right\}$$
$$\cup$$
$$V_- = \left\{ \sum w_n z^n \;\middle|\; w_n = 0 \text{ for } n \leq 0 \right\}$$

(適当な収束性を要求する)から無限次元Grassmann多様体

$$Gr = \{ W \subset V \mid W \hookrightarrow V \to V/V_- \text{ は Fredholm 写像, index} = 0 \}$$

をつくる. その中の特別な点("真空")$W_0 \in Gr$を選び(あとで説明する),

$$\boxed{\mathcal{M} = \left\{ W_0 \phi(z) \;\middle|\; \phi(z) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n z^n,\; \phi_n \in gl(2,\mathbb{C}) \right\}}$$

とおいたものが求める相空間である.

注意 NLS階層やLL階層も W_0を変える だけで全く同様に記述できる.(春の数学会で話した)

W_0 これは次の 2×2 行列値有理型函数族

$x_{nij}(z)$ $(n=0,1,2,\cdots,\ i,j=1,2)$ ($z=0$ でのLaurent展開)で張られる部分空間である.

1) $x_{nij}(z)$ は $z \neq 0, \gamma_1(0), \gamma_2(0)$ で正則

2) $x_{nij}(z) = E_{ij} z^{-n} + O(z) \quad (z \to 0)$

3) $x_{nij}(z) = \dfrac{\beta_{nijs}\,{}^t\alpha_s(0)}{z - \gamma_s(0)} + O(1) \quad (z \to \gamma_s(0))$

(注意) $x(t,z) \in W_0$

flow NLS, LL などと同様に, $\mathcal{M}$ 上の flow は

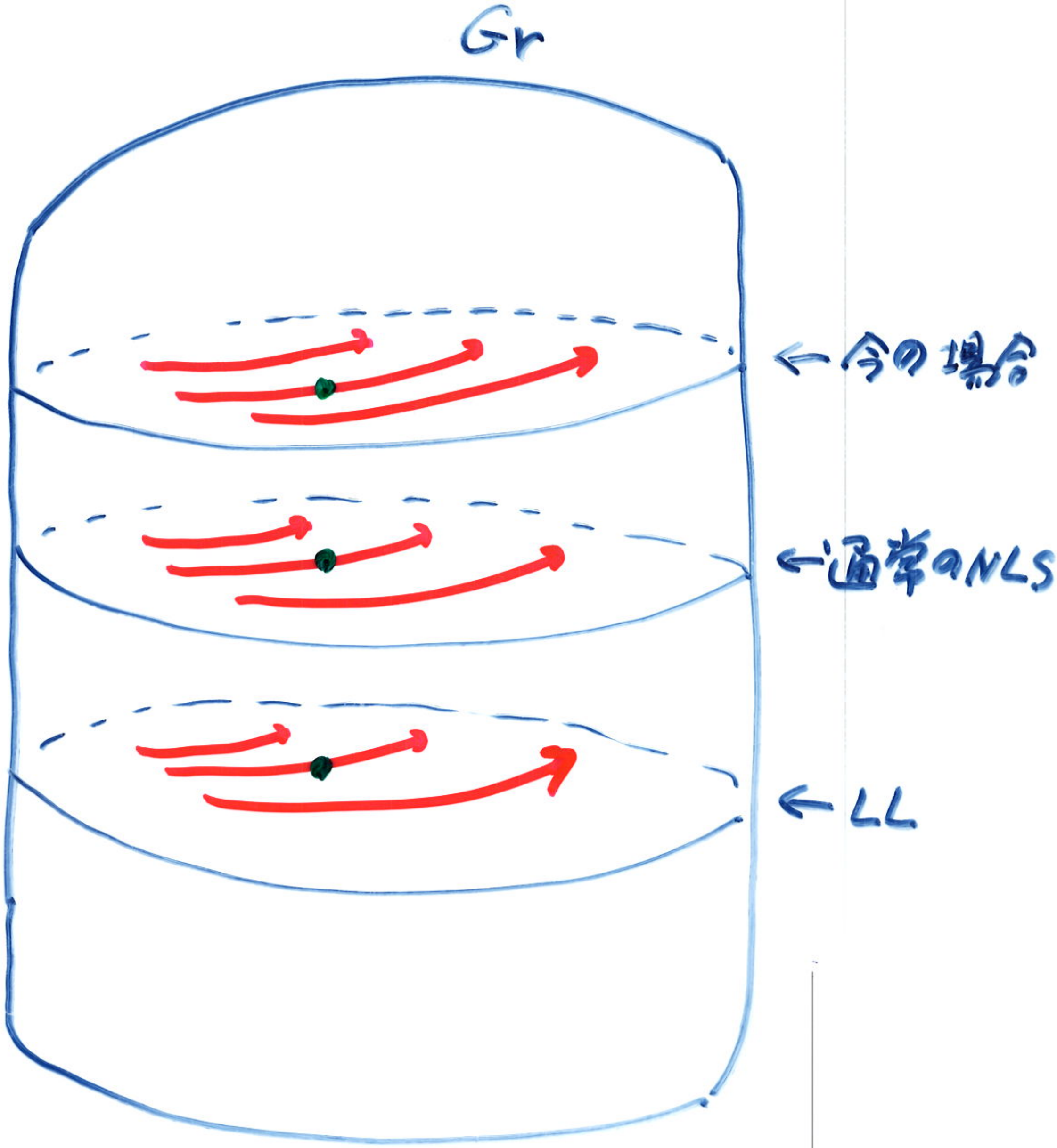
$$\boxed{W \mapsto W \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} t_n J z^{-n}\right)}$$

という形をとる.

注意 $A = \{ f(z) \mid \Gamma$ 上の有理型函数, $z=0$ のみで極をもつ$\}$ に対して

$AW \subseteq W$. (Schur pair との関係)

Perspectives?



→ flow $\exp(-\sum t_n J z^{-n})$

• W_0 背後のベクトル束の構造を反映

NLS — 自明束

LL — rigid 非自明

今の場合 — $\gamma_s(0), \alpha_s(0)$ に対応