変形 KP 階層の q 類似とその準古典極限

高崎金久（京都大学人間・環境学研究科）

ここで紹介する結果は戸田階層についても定式化できるが，話を簡単にするため変形 KP 階層で定式化し直したものを示す．

変形 KP 階層の τ 函数を $\tau(s,t)$, $t=(t_1,t_2,\ldots)$, $s\in\mathbf{Z}$, と表す．これらは $s'\ge s$ において双線形方程式

$$\oint_{\lambda=\infty}\tau(s',t'-[\lambda^{-1}])\tau(s,t+[\lambda^{-1}])\lambda^{s'-s}e^{\xi(t',\lambda)-\xi(t,\lambda)}d\lambda=0$$

（t,t' は任意）に従う．ただし $[\alpha]=(\alpha,\alpha/2,\ldots,\alpha^n/n,\ldots)$, $\xi(t,\lambda)=\sum_{n=1}^\infty t_n\lambda^n$ という標準的記号を用いた．ここで新たに一連の独立変数 $x=(x_1,x_2,\ldots)$ と定数 $q=(q_1,q_2,\ldots)$（$|q_n|<1$）を導入して

$$\tau_q(s,t,x)=\tau\Bigl(s,t+\sum_{n=1}^\infty[x_n]_{q_n}^{(n)}\Bigr)$$

というものを考える．ここで $[\alpha]_q^{(n)}$ は n の倍数の成分ごとに 0 でない量が現れるベクトル

$$[\alpha]_q^{(n)}=\Bigl(0,\cdots,0,\alpha,0,\ldots,0,\frac{(1-q)^2\alpha^2}{2(1-q^2)},\ldots,0,\ldots,0,\frac{(1-q)^k\alpha^k}{k(1-q^k)},\ldots\Bigr)$$

を表す．これは Mironov, Morozov, Vinet（Theor. Math. Phys. 100, 1995, pp. 890-899; hep-th/9312213）が戸田階層の τ 函数の q 類似として導入したもの（s,x_1 と x_1 の相方の変数について梶原・薩摩の q 戸田方程式の解の τ 函数になる）の変形 KP 階層版である．さらに，x_1 のみを残して他の x_n をゼロにすれば，Adler, Horozov, van Moerbeke (Phys. Lett. A242, 1998, pp. 139–151; solv-int/9712015）が（先行する Mironov 達の論文を知らずに）KP 階層の q 類似の τ 函数として論じたものになる．

この τ_q に対応する波動函数を

$$\begin{aligned}\Psi_q(s,t,x,\lambda)&=\frac{\tau_q(s,t-[\lambda^{-1}],x)}{\tau_q(s,t,x)}\lambda^s e^{\xi(t,\lambda)}\prod_{n=1}^\infty e_{q_n}^{x_n\lambda^n},\\ \Psi_q^*(s,t,x,\lambda)&=\frac{\tau_q(s,t+[\lambda^{-1}],x)}{\tau_q(s,t,x)}\lambda^{-s}e^{-\xi(t,\lambda)}\prod_{n=1}^\infty(e_{q_n}^{x_n\lambda^n})^{-1}\end{aligned}$$

と定める．ここで e_q^x は指数函数の q 類似

$$e_q^x=\exp\Bigl(\sum_{k=1}^\infty\frac{(1-q)^kx^k}{k(1-q^k)}\Bigr)=\prod_{k=0}^\infty(1-q^k(1-q)x)^{-1}$$

を表す．冒頭の双線形方程式ならびに $[x]_q^{(n)}$ がｑシフトに関して漸化式

$$[qx]_q^{(n)} = [x]_q^{(n)} - \sum_{m=0}^{n-1} [e^{2\pi i m/n}(1-q)^{1/n} x^{1/n}]$$

を満たすことから，$s' \geq s$ かつ $x'_n = q_n^{k_n} x_n$ （k_n は非負整数）のときこれらの波動函数が

$$\oint_{\lambda=\infty} \Psi_q(s', t', x', \lambda) \Psi_q^*(s, t, x, \lambda) d\lambda = 0$$

を満たすことがわかる．$t = t'$ に制限すれば τ_q に対して s, x のみの差分を含む双線形方程式が得られる．波動函数は戸田階層の場合に似た線形方程式

$$D_{q_n}(x_n)\Psi_q = B_n \Psi_q, \quad B_n = e^{n\partial_s} + \sum_{m=1}^{n} b_{nm} e^{(n-m)\partial_s}$$

を満たす．また，B_n は零曲率方程式のｑ類似

$$D_{q_n}(x_n)B_m - D_{q_m}(x_n)B_n + T_{q_n}(x_n)B_m \cdot B_n - T_{q_m}(x_m)B_n \cdot B_m = 0$$

に従う．ここで $D_q(x), T_q(x)$ はそれぞれ $D_q(x)f(x) = (f(qx) - f(x))/(qx - x)$, $T_q(x)f(x) = f(qx)$ というｑ差分作用素・ｑシフト作用素を表す．

この系の準古典極限を考えるためには，まず q_n を $q_n = q^n$, $q = e^{-\beta\hbar}$ （β は定数）と特殊化し，さらに s, x_n を $s/\hbar$, $x_n/(1-q^n)$ 置き換える．これによって e^{∂_s} と $D_{q^n}(x_n)$ は $e^{\hbar\partial_s}$ と $(1-q^n)D_{q^n}(x_n)$ に変わるので，波動函数に対する線形方程式は

$$(1-q^n)D_{q^n}(x_n)\Psi_q = B_n \Psi_q, \quad B_n = e^{n\hbar\partial_s} + \cdots,$$

となる． WKB 型の漸近形 $\Psi_q \sim e^{S/\hbar}$ を仮定すれば，相函数 S は

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Li}_2(x_n \lambda^n)}{n\beta} + s \log \lambda + O(\lambda^{-1}),$$

という Laurent 級数で（$\mathrm{Li}_2(x)$ は dilog 函数を表す）Hamilton-Jacobi 方程式

$$\frac{1 - e^{-n\beta x_n \partial S/\partial x_n}}{x_n} = \mathcal{B}_n, \quad \mathcal{B}_n = e^{n\partial S/\partial s} + \cdots,$$

を満たす．ここで $\mathcal{B}_n$ は B_n において $e^{\hbar\partial_s}$ を $e^{\partial S/\partial s}$ に，係数（一般には $\hbar$ に依存する）を $\hbar \to 0$ での極限値に置き換えたものである．さらに新たな変数 p を導入して $e^{\partial S/\partial s} = p$ を λ について逆に解いたものを $\lambda = \mathcal{L} = p + u_1 + u_2 p^{-1} + \cdots$ と定めれば，(p, s) に関する Poisson 括弧を用いて無分散戸田階層に類似の Lax 形式を定式化することができる．