結合型BKP階層の無分散極限

高崎金久（京都大学人間・環境学研究科）

表題の「結合型BKP階層」は従来「２成分BKP階層」と呼ばれていたものであるが，いくつかの理由でこのように呼ぶ方がふさわしいように思われるので，あえてこの名称を採用する．

BKP階層はソリトン方程式に関する伊達・神保・柏原・三輪の一連の仕事の中でKP階層の変種の一つとして導入された[1]．結合型の場合には２系列の時間変数 $\boldsymbol{t} = (t_1, t_3, \ldots, t_{2n+1}, \ldots)$, $\bar{\boldsymbol{t}} = (\bar{t}_1, \bar{t}_3, \ldots, \bar{t}_{2n+1}, \ldots)$ を用意する．階層の一つの定式化は τ 函数 $\tau(\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}})$ に対する双線形方程式

$$
\begin{aligned}
&\oint_{\lambda=\infty} \frac{d\lambda}{2\pi i\lambda} e^{\xi(\boldsymbol{t}'-\boldsymbol{t},\lambda)} \tau(\boldsymbol{t}' - 2[\lambda^{-1}], \bar{\boldsymbol{t}}') \tau(\boldsymbol{t} + 2[\lambda^{-1}], \bar{\boldsymbol{t}}) \\
&= \oint_{\lambda=\infty} \frac{d\lambda}{2\pi i\lambda} e^{\xi(\bar{\boldsymbol{t}}'-\bar{\boldsymbol{t}},\lambda)} \tau(\boldsymbol{t}', \bar{\boldsymbol{t}}' - 2[\lambda^{-1}]) \tau(\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}} + 2[\lambda^{-1}])
\end{aligned}
$$

（任意の $\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \boldsymbol{t}', \bar{\boldsymbol{t}}'$ に対して成立するものとする）によって与えられる．ここで両辺の積分は例によって $\lambda = \infty$ のまわりを一周する閉曲線に関するもの（あるいは代数的な留数）を表す．また慣用の記号として

$$
\xi(\boldsymbol{t}, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} t_{2n+1} \lambda^{2n+1}, \quad [\lambda] = (\lambda, \frac{\lambda^3}{3}, \ldots, \frac{\lambda^{2n+1}}{2n+1}, \ldots)
$$

を用いている．１対の波動函数

$$
\begin{aligned}
\Psi(\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \lambda) &= \frac{\tau(\boldsymbol{t} - 2[\lambda^{-1}], \bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}})} e^{\xi(\boldsymbol{t},\lambda)}, \\
\bar{\Psi}(\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \Psi) &= \frac{\tau(\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}} - 2[\lambda^{-1}])}{\tau(\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}})} e^{\xi(\bar{\boldsymbol{t}},\lambda)}
\end{aligned}
$$

を導入すれば上の双線形方程式は

$$
\oint_{\lambda=\infty} \frac{d\lambda}{2\pi i\lambda} \Psi(\boldsymbol{t}', \bar{\boldsymbol{t}}', \lambda) \Psi(\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, -\lambda) = \oint_{\lambda=\infty} \frac{d\lambda}{2\pi i\lambda} \bar{\Psi}(\boldsymbol{t}', \bar{\boldsymbol{t}}', \lambda) \bar{\Psi}(\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, -\lambda)
$$

と書き直せる．これから $\Psi = \Psi(\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \lambda), \bar{\Psi}(\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \lambda)$ が共通の線形方程式

$$
\begin{aligned}
&\partial_{t_{2n+1}} \Psi = B_{2n+1}(\partial_{t_1}) \Psi, \quad \partial_{\bar{t}_{2n+1}} \Psi = \bar{B}_{2n+1}(\partial_{\bar{t}_1}) \Psi, \\
&(\partial_{t_1} \partial_{\bar{t}_1} - u) \Psi = 0 \qquad (u = -2\partial_{t_1} \partial_{\bar{t}_1} \log \tau)
\end{aligned}
$$

を満たすことがわかる．ここで $B_{2n+1}(\partial_{t_1}), \bar{B}_{2n+1}(\partial_{\bar{t}1_1})$ はそれぞれ t_1, $\bar{t}_1$ に関する $2n+1$ 階線形微分作用素 $\partial_{t_1}^{2n+1} + \cdots$, $\partial_{\bar{t}_1}^{2n+1} + \cdots$ である．第１・第２の線形

[1]Phisica **4D** (1982), 343–365; J. Phys. Soc. Japan **50** (1981), 3823–3818.

微分方程式はそれぞれ $\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}$ に関して（１成分の）BKP 階層を構成するものであり，第３の線形方程式によってこれらが結ばれている．

無分散極限を考えるには準古典極限の処方（すなわちプランク定数 $\hbar$ を導入して階層を定式化し直して $\hbar \to 0$ の極限をとること）を用いる．この処方によって波動函数の位相部分 S に関するハミルトン・ヤコビ方程式

$$
\begin{aligned}
&\partial_{t_{2n+1}} S = \mathcal{B}_{2n+1}(\partial_{t_1} S), \quad \partial_{\bar{t}_{2n+1}} S = \bar{\mathcal{B}}_{2n+1}(\partial_{\bar{t}_1} S), \\
&(\partial_{t_1} S)(\partial_{\bar{t}_1} S) - u = 0 \qquad (u = -2\partial_{t_1}\partial_{\bar{t}_1} F)
\end{aligned}
$$

が得られる．ここで $\mathcal{B}_{2n+1}(p), \bar{\mathcal{B}}_{2n+1}(\bar{p})$ は $B_{2n+1}(\partial_{t_1}), \bar{B}_{2n+1}(\partial_{\bar{t}_1})$ の古典極限，F はプレポテンシャル（$\log\tau$ の $\hbar \to 0$ での展開における主要部）を表す．実際には，$\Psi(\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \lambda), \bar{\Psi}(\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \lambda)$ に対応して２種類の S 函数

$$
\begin{aligned}
S(\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} t_{2n+1}\lambda^{2n+1} - 2D(\lambda)F, \\
\bar{S}(\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{t}_{2n+1}\lambda^{2n+1} - 2\bar{D}(\lambda)F
\end{aligned}
$$

がある．ここで $D(\lambda), \bar{D}(\lambda)$ は

$$
D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{-2n-1}}{2n+1}\frac{\partial}{\partial t_{2n+1}}, \quad \bar{D}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{-2n-1}}{2n+1}\frac{\partial}{\partial \bar{t}_{2n+1}}
$$

という微分作用素を表す．さらに，

$$
p = \partial_{t_1} S(\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \lambda), \quad \frac{u}{p} = \partial_{\bar{t}_1} \bar{S}(\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, \lambda)
$$

という等式を λ について解けばラックス作用素の古典極限 $\mathcal{L}(\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, p), \bar{\mathcal{L}}(\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}, p)$ が得られる．それらは無分散型ラックス方程式（交換子の代わりに p, t_1 に関するポアソン括弧を含む）に従う．

最近 L.V. Bogdanov と B.G. Knopelchenko は（１成分の）BKP 階層の無分散極限に対して無分散型広田方程式を導いた[2]．それは今の設定に次のように拡張できる．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial_{t_1} S(\lambda) - \partial_{t_1} S(\mu)}{\partial_{t_1} S(\lambda) + \partial_{t_1} S(\mu)} = \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu} \exp\bigl(4D(\lambda)D(\mu)F\bigr), \\
&\frac{\partial_{\bar{t}_1} \bar{S}(\lambda) - \partial_{\bar{t}_1} \bar{S}(\mu)}{\partial_{\bar{t}_1} \bar{S}(\lambda) + \partial_{\bar{t}_1} \bar{S}(\mu)} = \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu} \exp\bigl(4\bar{D}(\lambda)\bar{D}(\mu)F\bigr), \\
&\frac{\partial_{t_1} S(\lambda) - \partial_{t_1} \bar{S}(\mu)}{\partial_{t_1} S(\lambda) + \partial_{t_1} \bar{S}(\mu)} = \frac{-\partial_{\bar{t}_1} S(\lambda) + \partial_{\bar{t}_1} \bar{S}(\mu)}{\partial_{\bar{t}_1} S(\lambda) + \partial_{\bar{t}_1} \bar{S}(\mu)} = \exp\bigl(4D(\lambda)\bar{D}(\mu)F\bigr).
\end{aligned}
$$

[2] J. Nonlinear Math. Phys. **12**, Supp. 1 (2005), 64–73.