~~結合型~~ 2成分 BKP階層の無分散極限

高崎金久

$\boxed{\text{1成分 BKP (1-BKP)}}$ [DJKM II, IV, V, VI]

- $$\partial_{t_{2n+1}} L = [B_{2n+1}, L], \quad t_1 = x,$$
  $$L^* = -\partial_x \cdot L \cdot \partial_x^{-1}, \quad B_{2n+1} \cdot 1 = 0$$

- $$\oint \frac{dz}{2\pi i z} e^{\xi(t'-t,z)} \tau(t' - 2[z^{-1}]) \times \tau(t + 2[z^{-1}]) = \tau(t')\tau(t),$$

  $$\xi(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} t_{2n+1} z^{2n+1},$$

  $$[z^{-1}] = \left(z^{-1}, \frac{z^{-3}}{3}, \cdots, \frac{z^{-2n-1}}{2n+1}, \cdots\right)$$

- Schurの Q-函数との関係.

$\boxed{\text{2成分BKP (2-BKP)}}$　[DJKM "VII"]

$\mathbf{t} = (t_1, t_3, t_5, \cdots)$
$\bar{\mathbf{t}} = (\bar{t}_1, \bar{t}_3, \bar{t}_5, \cdots)$ 〉 それぞれについて 1-BKP

- $\tau(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})$ のみたす双線形方程式

$$\oint \frac{dz}{2\pi i z} e^{\xi(\mathbf{t}'-\mathbf{t}, z)} \tau(\mathbf{t}' - 2[z^{-1}], \bar{\mathbf{t}}') \times \tau(\mathbf{t} + 2[z^{-1}], \bar{\mathbf{t}})$$

$$= \oint \frac{dz}{2\pi i z} e^{\xi(\bar{\mathbf{t}}'-\bar{\mathbf{t}}, z)} \tau(\mathbf{t}', \bar{\mathbf{t}}' - 2[z^{-1}]) \times \tau(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}} + 2[z^{-1}])$$

- フェルミオン表示、

$$[\varphi_j, \varphi_k]_+ = (-1)^j \delta_{j+k,0} \quad (j, k \in \mathbb{Z})$$

$$\varphi_j |0\rangle = 0 \ (j<0), \quad \langle 0| \varphi_j = 0 \ (j>0)$$

$$H(\mathbf{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} t_{2n+1} H_{2n+1}, \quad \bar{H}(\bar{\mathbf{t}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{t}_{2n+1} H_{-2n-1}$$

$$H_k = \frac{1}{2} \sum_j (-1)^{j+1} \varphi_j \varphi_{-j-k-1}$$

$$\tau(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \langle 0| e^{H(\mathbf{t})} g e^{-\bar{H}(\bar{\mathbf{t}})} |0\rangle$$

※ Toda階層のτ函数の表示に似ている

- 補助線形問題

$$\Psi(z) = \frac{\tau(t-2[z^{-1}], \bar{t})}{\tau(t, \bar{t})} e^{\xi(t,z)},$$

$$\bar{\Psi}(z) = \frac{\tau(t, \bar{t}-2[z^{-1}])}{\tau(t, \bar{t})} e^{\xi(\bar{t},z)}.$$

$$\begin{cases} \partial_{t_{2n+1}} \Psi = B_{2n+1}(\partial_{t_1}) \Psi \\ \partial_{\bar{t}_{2n+1}} \Psi = \bar{B}_{2n+1}(\partial_{\bar{t}_1}) \Psi, \\ (\partial_{t_1}\partial_{\bar{t}_1} - u) \Psi = 0 \end{cases} \quad (\Psi = \Psi(z), \bar{\Psi}(z))$$

ここで $u = -2\partial_{t_1}\partial_{\bar{t}_1} \log \tau$,

$B_{2n+1}(\partial_{t_1}) \cdot 1 = 0$,

$\bar{B}_{2n+1}(\partial_{\bar{t}_1}) \cdot 1 = 0$

$\longrightarrow$ Lax 表示 (Shiota, Krichever, …)

無分散極限への道

— τ函数経由 —

$\tau(\hbar, t, \bar{t}) \longrightarrow$ rescaling

$$\tau_\hbar(t, \bar{t}) = \tau(\hbar, \hbar^{-1}t, \hbar^{-1}\bar{t}) = \exp\left(\hbar^{-2}F(t, \bar{t}) + O(\hbar^{-1})\right)$$

(仮定)

線積分型双線形方程式

$\downarrow$ 特殊化

微分型Fay恒等式

$\downarrow$ $\hbar \to 0$

無分散広田方程式

KPにおいて知られていたものの類似物

$\updownarrow$

— 波動函数経由 —

Hamilton-Jacobi方程式 $\xleftarrow[\hbar \to 0]{}$ 補助線形方程式

$\updownarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\updownarrow$

無分散Lax方程式 $\xleftarrow[\hbar \to 0]{}$ Lax方程式

波動函数の準古典近似

$$\Psi(z) = \exp(\hbar^{-1} S(z) + O(\hbar^0)),$$
$$\bar{\Psi}(z) = \exp(\hbar^{-1} \bar{S}(z) + O(\hbar^0)),$$

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} t_{2n+1} z^{2n+1} - 2D(z)F,$$
$$\bar{S}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{t}_{2n+1} z^{2n+1} - 2\bar{D}(z)F,$$

$$D(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-2n-1}}{2n+1} \partial_{t_{2n+1}},$$

$$\bar{D}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-2n-1}}{2n+1} \partial_{\bar{t}_{2n+1}}.$$

- Hamilton-Jacobi 方程式

$$\partial_{t_{2n+1}} S(z) = \mathcal{B}_{2n+1}(\partial_{t_1} S(z)),$$
$$\partial_{\bar{t}_{2n+1}} S(z) = \bar{\mathcal{B}}_{2n+1}(\partial_{\bar{t}_1} S(z)),$$
$$\partial_{t_1} S(z) \cdot \partial_{\bar{t}_1} S(z) = u,$$

$\bar{S}(z)$ に対しても同じ方程式が成立

- $z \mapsto p(z) = \partial_{t_1} S(z)$, $z \mapsto \bar{p}(z) = \partial_{\bar{t}_1} \bar{S}(z)$ の逆函数 $z = \mathcal{Z}(p)$, $z = \bar{\mathcal{Z}}(\bar{p})$ に対して無分散 Lax 方程式が成立する（省略）

$\boxed{\text{微分型 Fay 恒等式}}$

1)
$$\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}\left(\lambda-\mu-\partial_{t_1}\log\frac{\tau(\boldsymbol{t}+2[\lambda^{-1}],\bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(\boldsymbol{t}+2[\mu^{-1}],\bar{\boldsymbol{t}})}\right)$$
$$=\left(\lambda+\mu-\partial_{t_1}\log\frac{\tau(\boldsymbol{t}+2[\lambda^{-1}]+2[\mu^{-1}],\bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})}\right)$$
$$\times\frac{\tau(\boldsymbol{t}+2[\lambda^{-1}]+2[\mu^{-1}],\bar{\boldsymbol{t}})\,\tau(\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(\boldsymbol{t}+2[\lambda^{-1}],\bar{\boldsymbol{t}})\,\tau(\boldsymbol{t}+2[\mu^{-1}],\bar{\boldsymbol{t}})}$$
(本質的に 1-BKP)

2) $\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}$ の役割入れかえ (〃)

3)
$$\lambda-\partial_{t_1}\log\frac{\tau(\boldsymbol{t}+2[\lambda^{-1}],\bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}+2[\mu^{-1}])}$$
$$=\left(\lambda-\partial_{t_1}\log\frac{\tau(\boldsymbol{t}+2[\lambda^{-1}],\bar{\boldsymbol{t}}+2[\mu^{-1}])}{\tau(\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})}\right)$$
$$\times\frac{\tau(\boldsymbol{t}+2[\lambda^{-1}],\bar{\boldsymbol{t}}+2[\mu^{-1}])\,\tau(\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(\boldsymbol{t}+2[\lambda^{-1}],\bar{\boldsymbol{t}})\,\tau(\boldsymbol{t}+2[\mu^{-1}],\bar{\boldsymbol{t}})}$$

4) $\boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}$ の役割入れかえ

無分散広田方程式

$$p(z) = \partial_{t_1} S(z) = z - 2D(z)\partial_{t_1} F ,$$
$$\bar{p}(z) = \partial_{\bar{t}_1} S(z) = z - 2\bar{D}(z)\partial_{\bar{t}_1} F ,$$
$$D(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-2n-1}}{2n+1}\partial_{t_{2n+1}}, \quad \bar{D}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-2n-1}}{2n+1}\partial_{\bar{t}_{2n+1}}$$

1) $$\frac{p(\lambda) - p(\mu)}{p(\lambda) + p(\mu)} = \frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu} \exp 4D(\lambda)D(\mu)F$$

2) $$\frac{\bar{p}(\lambda) - \bar{p}(\mu)}{\bar{p}(\lambda) + \bar{p}(\mu)} = \frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu} \exp 4\bar{D}(\lambda)\bar{D}(\mu)F$$

3) $$\frac{p(\lambda) - \partial_{t_1}\bar{S}(\mu)}{p(\lambda) + \partial_{t_1}\bar{S}(\mu)} = \exp 4D(\lambda)\bar{D}(\mu)F$$

4) $$\frac{\bar{p}(\mu) - \partial_{\bar{t}_1} S(\lambda)}{\bar{p}(\mu) + \partial_{\bar{t}_1} S(\lambda)} = \exp 4D(\lambda)\bar{D}(\mu)F$$

- 1) は Bogdanov と Konopelchenko によって別の方法（$\bar{\partial}$-dressing）によって見出された。（1-BKP と同値）

- 1)〜4) は 2-BKP の Hamilton-Jacobi 方程式と同値である。（Faber 多項式を用いて示せる）

真の結合型BKP？

D_∞型階層 (Jimbo & Miwa, Publ. RIMS.)

- 荷電フェルミオンによる実現

  結合型KP・Pfaff格子を含む

- 中性フェルミオンによる実現

  2個の2-BKPの結合系とみなせる

問題 このような結合系に対して無分散極限を定式化せよ.