# 2 個の $q$-パラメータをもつ ランダム平面分割の可積分構造

高崎金久（京都大学大学院人間・環境学研究科）

ランダム平面分割は平面分割 $\pi = (\pi_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ （３次元ヤング図形を表す）を系の状態とする統計力学的模型であり，ボルツマン重みを $q^{|\pi|}$ （$|\pi| = \sum_{i,j=1}^{\infty} \pi_{ij}$, $0 < q < 1$）に選んだ場合の分配函数は閉じた形で求められること

$$Z = \sum_{\pi} q^{|\pi|} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-n}$$

が知られている．$q^{|\pi|}$ に対して $\pi$ の主対角断面 $\pi(0) = (\pi_{ii})_{i=1}^{\infty}$ （通常の分割と見なせる）で定まる重み $Q^{|\pi(0)|}$ を乗じた場合の分配函数（５次元超対称ゲージ理論と関係がある）も同様の形で求められる．この模型をさらに

$$\Phi_k(s, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} (q^{k(s+\lambda_i-i+1)} - q^{k(s-i+1)}) + q^k \frac{1 - q^{sk}}{1 - q^k}$$

というポテンシャルの線形結合 $\Phi(\boldsymbol{t}, s, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \Phi_k(s, \lambda)$ で変形した場合の分配函数

$$Z(\boldsymbol{t}, s, Q) = \sum_{\pi} q^{|\pi|} Q^{|\pi(0)|} e^{\Phi(\boldsymbol{t}, s, \pi(0))} \tag{1}$$

はこのように閉じた形では求められないが，$\pi(0)$ 以外の対角断面 $\pi(m) = (\pi_{i,i+m})$ の寄与を先に総和する方法によって，$\lambda = \pi(0)$ に関する総和

$$Z(\boldsymbol{t}, s, Q) = \sum_{\lambda} s_\lambda(q^\rho)^2 Q^{|\lambda|} e^{\Phi(\boldsymbol{t}, s, \lambda)} \tag{2}$$

に書き直すことができる．ここで $s_\lambda(q^\rho)$ は無限変数のシューア函数 $s_\lambda(x_1, x_2, \ldots)$ の

$$q^\rho = (q^{1/2}, q^{3/2}, \ldots, q^{k+1/2}, \ldots)$$

における特殊値（フック積表示をもつ）である．この表示をフェルミオンを用いて書き直し，その背後にある量子トーラス代数の構造を利用することによって，$Z(\boldsymbol{t}, s, Q)$ が１次元戸田階層の τ 函数に簡単な因子を乗じたものであることがわかる（T. Nakatsu and K.T., arXiv:0710.5339, Commun. Math. Phys., to appear).

この講演では (2) と戸田階層との関係がシューア函数の中の $q$ を $q$ と異なる値 $q_1, q_2$ に置き換えた場合[1]

$$Z(\boldsymbol{t}, s, Q) = \sum_{\lambda} s_\lambda(q_1^\rho) s_\lambda(q_2^\rho) Q^{|\lambda|} e^{\Phi(\boldsymbol{t}, s, \lambda)} \tag{3}$$

に一般化されることを報告する．おもな結果は次のようにまとめられる．

[1] このような置き換えのアイディアは位相的弦理論の「位相的頂点」に関する Iqbal らの最近の研究（A. Iqbal, C. Kozçaz and K. Shabbir, arXiv:0803.2260）に基づく．

**定理１**　$q_1, q_2, q$ **が**

$$q_1 = q^{1/N_1}, \quad q_2 = q^{1/N_2} \tag{4}$$

**（**$N_1, N_2$ **は正整数）という関係にあるとする．このとき** $Z(\boldsymbol{t}, s, Q)$ **は荷電フェルミオン** $\psi_n, \psi_n^*$ **とそのチャージ** $s$ **の基底状態** $\langle s|,\ |s\rangle$ **を用いて**

$$\begin{aligned} Z(\boldsymbol{t}, s, Q) &= \phi(\boldsymbol{t}) \langle s| \exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{N_1 k} t_k J_{N_1 k}\Big) g |s\rangle \\ &= \phi(\boldsymbol{t}) \langle s| g \exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{N_2 k} t_k J_{-N_2 k}\Big) |s\rangle \end{aligned} \tag{5}$$

**と表せる．ここで** $\phi(\boldsymbol{t})$ **は**

$$\phi(\boldsymbol{t}) = \exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k t_k}{1 - q^k}\Big) (q_1 q_2)^{-s(s+1)(2s+1)/12}$$

**という函数である．**$J_{\pm k}$ **はフェルミオンの** $U(1)$ **カレントのフーリエモード**

$$J_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \psi_n \psi_{n+k}^* :,$$

$g$ **は** $q_1, q_2, Q$ **に依存する** $GL(\infty)$ **の要素（具体的な形は省略する）であり，これらは**

$$(-1)^{N_1 k} J_{N_1 k} g = g (-1)^{N_2 k} J_{-N_2 k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{6}$$

**という代数的関係式を満たす．**

(5) の $\langle s| \cdots |s\rangle$ の部分は２次元戸田階層の τ 函数の一般的表示

$$\tau(s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}) = \langle s| \exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty} t_k J_k\Big) g \exp\Big(-\sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k J_{-k}\Big) |s\rangle$$

において時間変数 $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots)$, $\bar{\boldsymbol{t}} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots)$ を部分空間に制限したものと見なせる．(6) はこの τ 函数が

$$(-1)^{N_1 k} \frac{\partial \tau}{\partial t_{N_1 k}} + (-1)^{N_2 k} \frac{\partial \tau}{\partial \bar{t}_{N_2 k}} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

という条件を満たすものであることを意味する．$Z(\boldsymbol{t}, s, Q)$ に対して (5) のように複数の表示があるのはこのことによる．(2) の場合には（$N_1 = N_2 = 1$）これは１次元戸田階層への簡約条件に他ならない．

(4) が満たされない場合には戸田階層との関係については何も言えないが，それとは独立に（$q_1, q_2$ の任意の値に対して）次の奇妙な結果が得られる．

**定理２**　$Z(\boldsymbol{t}, s, Q)$ **は** $Q$ **に関して双線形方程式**

$$\begin{aligned} &Z(\boldsymbol{t}, s, q_1 q_1 Q) Z(\boldsymbol{t}, s, Q) - Z(\boldsymbol{t}, s, q_1 Q) Z(\boldsymbol{t}, s, q_2 Q) \\ &\qquad = Q^{-1} Z(\boldsymbol{t}, s+1, Q) Z(\boldsymbol{t}, s-1, q_1 q_2 Q) \end{aligned} \tag{8}$$

**（戸田方程式の** $q$-**差分化の一種）を満たす．**