２個の q-パラメータをもつ
ランダム平面分割の可積分構造

高崎金久（京都大学大学院人間・環境学研究科）

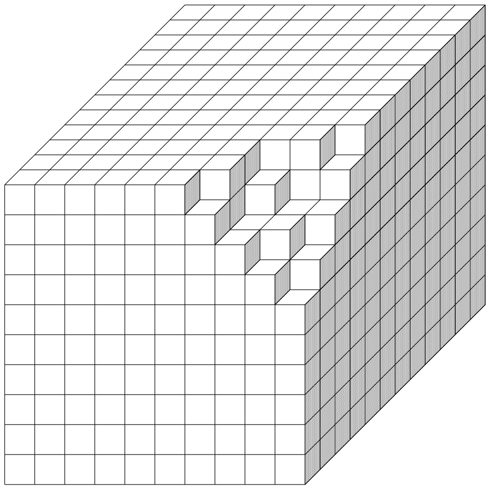
溶解結晶模型と呼ばれる平面分割の統計力学的模型（５次元の超対称ゲージ理論のインスタントン和という解釈も有する）に特別な形の外部ポテンシャルを導入するとき，その分配函数は１次元戸田階層の τ 函数に簡単な因子を乗じたものになる．この講演ではこの結果の一つの一般化を紹介し，そこにもう一つの可積分構造として q 差分戸田方程式が内在していることも指摘する．

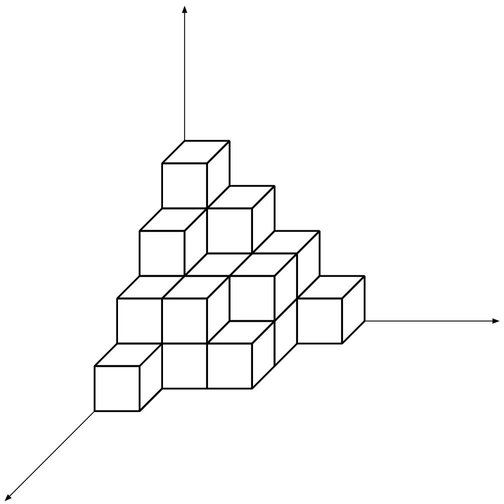
Ref: K. Takasaki, arXiv:0903.2607 [math-ph]

1．ランダム平面分割（溶解結晶模型）

1.1 物理的設定

３次元ユークリッド空間の第１象限を埋める結晶（単位立方体からなる）が少し溶けた状況を考える．$(1,1,1)$ の方向から結晶面を見るときオーバーハングがない状態のみを考慮に入れることにすれば，第１象限に対する結晶の補集合はヤング図形の３次元版と見なせる．この状態のエネルギーが３次元ヤング図形の体積に比例するものと仮定して，この系を統計力学的正準集団として扱う．





1.2 平面分割による定式化

３次元ヤング図形は平面分割で表現できる．平面分割は $\pi_{ij} \geq \pi_{i,j+1}$，$\pi_{ij} \geq \pi_{i+1,j}$ という条件を満たす非負整数 $\pi_{ij} \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ の２次元的配列

$$\pi = (\pi_{ij})_{i,j=1}^{\infty} = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

である．π_{ij} は xy 平面の (i,j) 番目の格子点に積み上げられた単位立方体の個数と解釈される．３次元ヤング図形の体積はそれらの和

$$|\pi| = \sum_{i,j=1}^{\infty} \pi_{ij}$$

として表せるから，その指数函数 $q^{|\pi|}$ （q は $0 < q < 1$ の範囲の定数）がボルツマン重みを与える．対応する分配函数は次のような無限乗積表示をもつ：

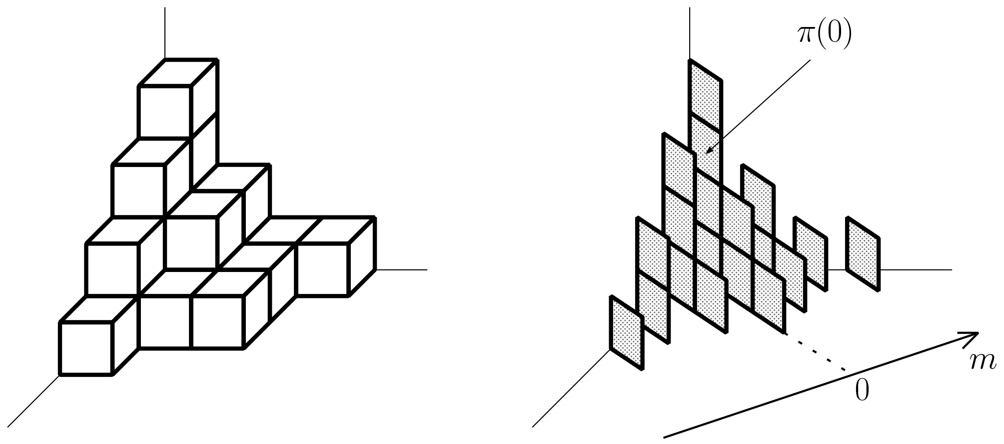
$$Z = \sum_{\pi} q^{|\pi|} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{-n} \text{ (マクマホン函数)}$$

1.3 対角断面

３次元ヤング図形を $y - x = m$（$m \in \mathbf{Z}$）の平面に沿って切断すると，断面は通常の（２次元）ヤング図形になる．これを対角断面という．対角断面は

$$\pi(m) = \begin{cases} (\pi_{i,i+m})_{i=1}^{\infty} & (m \geq 0) \\ (\pi_{j-m,j})_{j=1}^{\infty} & (m < 0) \end{cases}$$

という分割で表現される．



(a) (b)

1.4 ポテンシャルの導入

主対角断面 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) = \pi(0)$ の形状（ヤング図形）に依存する以下のようなポテンシャルを導入する.

(1) $Q^{|\lambda|}$, $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots$, $Q > 0$.

(2) $\Phi(\boldsymbol{t}, \lambda, s) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \Phi_k(\lambda, s)$, $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots)$, $s \in \mathbf{Z}$, ここで

$$\Phi_k(\lambda, s) = \sum_{i=1}^{\infty} q^{k(s+\lambda_i-i+1)} - \sum_{i=1}^{\infty} q^{k(-i+1)}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} (q^{k(s+\lambda_i-i+1)} - q^{k(s-i+1)}) + q^k \frac{1-q^{sk}}{1-q^k}$$

これらによって変形された溶解結晶模型の分配函数を $Z(\boldsymbol{t}, Q, s)$ と表す：

$$Z(\boldsymbol{t}, Q, s) = \sum_{\pi} q^{|\pi|} Q^{|\pi(0)|+s(s+1)/2} e^{\Phi(\boldsymbol{t}, \pi(0), s)}.$$

1.5 シューア函数の特殊値による展開公式

隣接する対角断面 $\pi(m), \pi(m+1)$ 同士は包含関係にあり，その差集合は水平帯（horizontal strip）をなす．このことから，平面分割の左半分の対角断面列 $\{\pi(m)\}_{m=0}^{\infty}$ と右半分の対角断面列 $\{\pi(-m)\}_{m=0}^{\infty}$ はそれぞれ主対角断面 $\lambda = \pi(0)$ の上に半標準盤 T, T' を定めることがわかる．こうして分配函数は λ と T, T' に関する総和に書き直され，そこから無限変数のシューア函数の特殊値による展開公式

$$Z(\boldsymbol{t}, Q, s) = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(q^{\rho})^2 Q^{|\lambda|+s(s+1)/2} e^{\Phi(\boldsymbol{t},\lambda,s)}$$

が得られる．ここで

$$q^{\rho} = (q^{1/2}, q^{3/2}, \ldots, q^{k+1/2}, \ldots).$$

特に $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}$（すなわちポテンシャルが $Q^{|\lambda|+s(s+1)/2}$ のみ）の場合には，コーシー等式を用いて右辺の和を実行することができて，マクマホン函数が得られる：

$$Z(\boldsymbol{0}, Q, s) = Q^{s(s+1)/2} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - Qq^n)^{-n}.$$

1.6 以前の結果ならびにここで扱う一般化

定理　$Z(\boldsymbol{t}, Q, s)$ は1次元Toda階層のある τ 函数に簡単な因子を乗じたものに等しい．(T. Nakatsu & K.T., Commun. Math. Phys. 285 (2009), 445–468)

以下ではこの結果を2個の q パラメータをもつ融解結晶模型に一般化する．この一般化は前述のシューア函数の特殊値による展開表示において

$$s_\lambda(q^\rho)^2 \longrightarrow s_\lambda(q_1^\rho)s_\lambda(q_2^\rho)$$

という置き換えを行って得られる．ここでパラメータ q_1, q_2 は $0 < q_1 < 1$, $0 < q_2 < 1$ の範囲にあるものとする．さらにポテンシャル $\Phi(\boldsymbol{t}, \lambda, s)$ にはこれとは独立のパラメータ q を残しておくものとする．こうして得られた分配函数

$$Z(\boldsymbol{t}, Q, s; q_1, q_2) = \sum_\lambda s_\lambda(q_1^\rho)s_\lambda(q_2^\rho)Q^{|\lambda|+s(s+1)/2}e^{\Phi(\boldsymbol{t},\lambda,s)}$$

が以下の考察の対象となる．記号を簡単にするため，以下ではこれを $Z(\boldsymbol{t}, Q, s)$ と略記する．

2．主結果

2.1 戸田階層との関係

定理　q_1, q_2 が q と

$$q_1 = q^{1/N_1},\ q_2 = q^{1/N_2}$$

（N_1, N_2 は正整数）という関係にあるとする．このとき以下のことが成立する．
1. 2 次元戸田階層のある τ 函数 $\tau(\boldsymbol{T}, \bar{\boldsymbol{T}}, s)$, $\boldsymbol{T} = (T_1, T_2, \ldots)$, $\bar{\boldsymbol{T}} = (\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots)$, が存在して，$Z(\boldsymbol{t}, Q, s)$ は

$$\begin{aligned} Z(\boldsymbol{t}, Q, s) &= \phi(\boldsymbol{t})\tau(T_{N_1 k} = (-1)^{N_1 k} t_k\ (k = 1, 2, \ldots),\ \text{他の変数} = 0) \\ &= \phi(\boldsymbol{t})\tau(\bar{T}_{N_2 k} = -(-1)^{N_2 k} t_k\ (k = 1, 2, \ldots),\ \text{他の変数} = 0) \end{aligned}$$

と表せる．ここで

$$\phi(\boldsymbol{t}) = (q_1 q_2)^{-s(s+1)(2s+1)/12} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k t_k}{1 - q^k}\right).$$

2．この τ 函数 $\tau(\boldsymbol{T}, \bar{\boldsymbol{T}}, s)$ は

$$(-1)^{N_1 k}\frac{\partial\tau}{\partial T_{N_1 k}} + (-1)^{N_2 k}\frac{\partial\tau}{\partial \bar{T}_{N_2 k}} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

という条件を満たす.

注意　1．$\tau(\boldsymbol{T}, \bar{\boldsymbol{T}}, s)$ が満たす条件をラックス作用素 $L, \bar{L}$ に翻訳すれば

$$(-L)^{N_1} = (-\bar{L})^{-N_2}$$

となる．この条件の両辺は簡約されたラックス作用素

$$\mathcal{L} = (-e^{\partial_s})^{N_1} + b_1 e^{(N_1-1)\partial_s} + \cdots + b_{N_1+N_2}(-e^{\partial_s})^{-N_2}$$

を定める.

2．証明の方法は $q_1 = q_2 = q$ の場合と同様である．すなわち，$Z(\boldsymbol{t}, Q, s)$ のフェルミオン表示から出発して，その背後にある量子トーラス代数の基底の間の特別な代数的関係式に注目する.

2.2 q 差分戸田方程式との関係

定理　$Z(\boldsymbol{t},Q,s)$ は Q について

$$Z(\boldsymbol{t},q_1q_2Q,s)Z(\boldsymbol{t},Q,s)-Z(\boldsymbol{t},q_1Q,s)Z(\boldsymbol{t},q_2Q,s)\\ =(q_1q_2)^{s+1/2}Z(\boldsymbol{t},Q,s+1)Z(\boldsymbol{t},q_1q_2Q,s-1)$$

という q 差分方程式を満たす.

注意　1．前定理と違ってこの定理は q_1,q_2,q の任意の値に対して成立する.
2．$Z(\boldsymbol{t},Q,s)$ は 2 次元 q 差分戸田方程式

$$f(q_1x,q_2y,s)f(x,y,s)-f(x,q_2y,s)f(q_1x,y,s)\\ =xtf(x,y,s+1)f(q_1x,q_2y,s-1)$$

(K. Kajiwara & J. Satsuma, J. Phys. Sos. Japan **60** (1991), 3986–3989) の $f(x,y,s)=f(xy,s)$ という条件を満たす解と関係がある．上の定理はこのことからの帰結である.