Pfaff-戸田階層の差分Fay等式

高崎金久（京都大学大学院人間・環境学研究科）

筧[1] と Willox[2] は DKP 階層（結合型 KP 階層，Pfaff 格子などの別名をもつ）の戸田的類似を導入した．ここではそれを仮に（パフィアン的な戸田階層という意味で）Pfaff-戸田階層と呼ぶことにする．その τ 函数は 2 個の離散変数 (s,r) と 2 系列の連続変数 $\boldsymbol{t}=(t_1,t_2,\ldots)$, $\bar{\boldsymbol{t}}=(\bar{t}_1,\bar{t}_2,\ldots)$ の函数 $\tau=\tau(s,r,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})$ であり，

$$\begin{aligned}
&\oint\frac{dz}{2\pi i}z^{s'+r'-s-r}e^{\xi(\boldsymbol{t}'-\boldsymbol{t},z)}\tau(s',r',\boldsymbol{t}'-[z^{-1}],\bar{\boldsymbol{t}}')\tau(s,r,\boldsymbol{t}+[z^{-1}],\bar{\boldsymbol{t}})\\
&\quad+\oint\frac{dz}{2\pi i}z^{s+r-s'-r'-4}e^{\xi(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}',z)}\tau(s'+1,r'+1,\boldsymbol{t}'+[z^{-1}],\bar{\boldsymbol{t}}')\tau(s-1,r-1,\boldsymbol{t}-[z^{-1}],\bar{\boldsymbol{t}})\\
&=\oint\frac{dz}{2\pi i}z^{s'-r'-s+r}e^{\xi(\bar{\boldsymbol{t}}'-\bar{\boldsymbol{t}},z^{-1})}\tau(s'+1,r',\boldsymbol{t}',\bar{\boldsymbol{t}}'-[z])\tau(s-1,r,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}+[z])\\
&\quad+\oint\frac{dz}{2\pi i}z^{s-r-s'+r'}e^{\xi(\bar{\boldsymbol{t}}-\bar{\boldsymbol{t}}',z^{-1})}\tau(s',r'+1,\boldsymbol{t}',\bar{\boldsymbol{t}}'+[z])\tau(s,r-1,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}-[z])
\end{aligned}\tag{1}$$

という型双線形方程式に従う（正確に言えば，Willox はこの方程式を少し修正したものを考えている）．ここで左辺の積分路は $z=\infty$ の周りを，右辺の積分路は $z=0$ の周りを一周する単純閉路であり，$\xi(\boldsymbol{t},z)$ と $[z]$ は例によって $\xi(\boldsymbol{t},z)=\sum_{k=1}^{\infty}t_kz^k$, $[z]=(z,\frac{z^2}{2},\frac{z^3}{3},\ldots)$ というものである．この双線形方程式からよく知られた手順によって無限個の広田型双線形方程式を導出することができる．特に，最低次の方程式として

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}D_{t_1}D_{\bar{t}_1}\tau(s,r)\cdot\tau(s,r)+\tau(s-1,r)\tau(s+1,r)-\tau(s,r-1)\tau(s,r+1)=0,\\
&D_{t_1}\tau(s,r)\cdot\tau(s+1,r-1)+D_{\bar{t}_1}\tau(s,r-1)\cdot\tau(s+1,r)=0
\end{aligned}\tag{2}$$

が得られる．

荷電フェルミオン系 ψ_n,ψ_n^* とそのチャージ s の基底状態 $\langle s|$, $|s\rangle$ を用いれば，(1) の解は

$$\tau(s,r,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})=\langle s+r\mid e^{H(\boldsymbol{t})}ge^{-\bar{H}(\bar{\boldsymbol{t}})}\mid s-r\rangle\tag{3}$$

という期待値で与えられる．ここで $H(\boldsymbol{t}),\bar{H}(\bar{\boldsymbol{t}})$ は戸田階層の場合と同じもの

$$H(\boldsymbol{t})=\sum_{k=1}^{\infty}t_kJ_k,\quad \bar{H}(\bar{\boldsymbol{t}})=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{t}_kJ_{-k},\quad J_k=\sum_{n=-\infty}^{\infty}:\psi_n\psi_{n+k}^*$$

であるが，g はチャージを変える成分を含むクリフォード演算子，典型的には

$$g=\exp\Bigl(\sum_{m,n}a_{mn}\psi_m\psi_n^*+\sum_{m,n}b_{mn}\psi_m\psi_n+\sum_{m,n}c_{mn}\psi_m^*\psi_n^*\Bigr)$$

である．ちなみに，$l\in\mathbf{Z}$ を固定するとき，$\tau(l+r,r,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})$ と $\tau(l-r,r,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})$ はそれぞれ $(\boldsymbol{t},r)$ と $(\bar{\boldsymbol{t}},r)$ に関して DKP 階層（正確には神保・三輪の D'_∞ 型階層[3]）の τ 函数になる．

この階層に対して次のような結果を得た．

[1] 筧三郎，数理解析研究所講究録 1221, pp. 199-208.
[2] R. Willox, 応用力学研究所研究会報告集 I3ME-S4, pp. 18-23.
[3] M. Jimbo and T. Miwa, Publ. RIMS 19 (1983), 943–1001.

1. 高次時間発展も含めて，補助線形方程式系全体の構造を明らかにした．$t_1, \bar{t}_1$ に関する補助線形方程式は Willox が見出したものと一致する．

2. (1) から差分 Fay 等式（KP 階層の微分 Fay 等式や戸田階層の差分 Fay 等式[4]に相当するもの）を導出し，それが補助線形方程式系の母函数的表現であること（特に，もとの階層そのものと同値であること）を確かめた．

3. 差分 Fay 等式の無分散（準古典）極限を導出した．児玉と Pierce[5] が DKP 階層の無分散極限に対して与えた「スペクトル曲線の変形方程式」としての解釈はこの場合にも当てはまる．

詳細は講演の際に述べる．結果全体の要をなす差分 Fay 等式は全部で６個あり，いずれも (1) の変数を特殊化することによって得られる．その一つは

$$\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{t} + [\lambda^{-1}] + [\mu^{-1}], \quad \bar{\boldsymbol{t}}' = \boldsymbol{t}, \quad s' = s + 1 \quad , r' = r$$

という特殊化（ λ, μ は任意パラメータである）によって得られるもので，

$$\begin{aligned}
&\tau(s+1, r+1, \boldsymbol{t} + [\lambda^{-1}] + [\mu^{-1}], \bar{\boldsymbol{t}})\tau(s+1, r, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}) \\
&\qquad = -\frac{\mu}{\lambda - \mu}\tau(s+1, r, \boldsymbol{t} + [\mu^{-1}], \bar{\boldsymbol{t}})\tau(s+1, r+1, \boldsymbol{t} + [\lambda^{-1}], \bar{\boldsymbol{t}}) \\
&\qquad\quad + \frac{\lambda}{\lambda - \mu}\tau(s+1, r, \boldsymbol{t} + [\lambda^{-1}], \bar{\boldsymbol{t}})\tau(s+1, r+1, \boldsymbol{t} + [\mu^{-1}], \bar{\boldsymbol{t}}) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{\lambda\mu}\tau(s+2, r+1, \boldsymbol{t} + [\lambda^{-1}] + [\mu^{-1}], \bar{\boldsymbol{t}})\tau(r, s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}),
\end{aligned} \tag{4}$$

という等式になる．s', r', s, r の関係のみを少し変えた場合

$$\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{t} + [\lambda^{-1}] + [\mu^{-1}], \quad \bar{\boldsymbol{t}}' = \boldsymbol{t}, \quad s' = s \quad , r' = r + 1$$

からは

$$\begin{aligned}
&\tau(s+1, r+1, \boldsymbol{t} + [\lambda^{-1}] + [\mu^{-1}], \bar{\boldsymbol{t}})\tau(s, r+1, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}) \\
&\qquad = -\frac{\mu}{\lambda - \mu}\tau(s, r+1, \boldsymbol{t} + [\mu^{-1}], \bar{\boldsymbol{t}})\tau(s+1, r+1, \boldsymbol{t} + [\lambda^{-1}], \bar{\boldsymbol{t}}) \\
&\qquad\quad + \frac{\lambda}{\lambda - \mu}\tau(s, r+1, \boldsymbol{t} + [\lambda^{-1}], \bar{\boldsymbol{t}})\tau(s+1, r+1, \boldsymbol{t} + [\mu^{-1}], \bar{\boldsymbol{t}}) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{\lambda\mu}\tau(s+1, r+2, \boldsymbol{t} + [\lambda^{-1}] + [\mu^{-1}], \bar{\boldsymbol{t}})\tau(r, s, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}),
\end{aligned} \tag{5}$$

という等式が得られる．他の４個の方程式（紙幅が足りないのでここには書ききれない）も同様に $s, r, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}}$ を適当にずらした τ 函数の積からなる４項双線形関係式の形をしている．４項双線形関係式が現れるのは補助線形方程式が２成分波動函数に対する 2×2 行列形式であること（DKP 階層の場合と共通する特徴）とも関係している．スカラー形式の補助線形方程式系をもつ戸田階層では差分 Fay 等式は３項双線形関係式である．

[4]K. Takasaki, arXiv:0710.5356

[5]Y. kodama and V.U. Pierce, arXiv:0811.0351