Pfaff-戸田階層の差分Fay等式

高崎金久（京都大学大学院人間・環境学研究科）

ここで考察する可積分階層（「Pfaffian的」あるいは「Pfaffian化された」Toda階層という意味で暫定的に「Pfaff-Toda階層」と呼ぶことにする）は筧とWilloxによって次の文献で導入されたものである.

筧三郎, 数理解析研究所講究録1221 (2001), pp. 199–208
R. Willox, 応用力学研究所2002年研究会報告集13ME-S4, pp. 18-23
R. Willox, Glasgow Math. J. **47A** (2005), 221–231.

その後 Hu et al. ならびにSantini et al. によって階層の最低次の方程式が別の方向から再発見されている.（C.R. Gilson & J.C. Nimmo, J. Nonlin. Math. Phys. **12**, suppl. 2 (2005), 169–179 参照.）

この講演ではこの可積分階層の補助線形方程式系と「差分Fay等式」について報告する. 無分散極限についても結果が得られているが, 時間の関係で省略する.

1. Pfaff-Toda 階層の τ 函数

τ 函数 $\tau = \tau(s, r, \boldsymbol{t}, \overline{\boldsymbol{t}})$ は 2 個の離散変数 $s, r \in \mathbf{Z}$ と 2 系列の連続変数 $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots)$, $\overline{\boldsymbol{t}} = (\overline{t}_1, \overline{t}_2, \ldots)$ に依存する.

1.1 双線形方程式

$$
\begin{aligned}
&\oint \frac{dz}{2\pi i} z^{s'+r'-s-r} e^{\xi(\boldsymbol{t}'-\boldsymbol{t},z)} \tau(s', r', \boldsymbol{t}' - [z^{-1}], \overline{\boldsymbol{t}}') \tau(s, r, \boldsymbol{t} + [z^{-1}], \overline{\boldsymbol{t}}) \\
&+ \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{s+r-s'-r'-4} e^{\xi(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}',z)} \tau(s'+1, r'+1, \boldsymbol{t}'+[z^{-1}], \overline{\boldsymbol{t}}') \tau(s-1, r-1, \boldsymbol{t}-[z^{-1}], \overline{\boldsymbol{t}}) \\
&= \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{s'-r'-s+r} e^{\xi(\overline{\boldsymbol{t}}'-\overline{\boldsymbol{t}},z^{-1})} \tau(s'+1, r', \boldsymbol{t}', \overline{\boldsymbol{t}}' - [z]) \tau(s-1, r, \boldsymbol{t}, \overline{\boldsymbol{t}} + [z]) \\
&+ \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{s-r-s'+r'} e^{\xi(\overline{\boldsymbol{t}}-\overline{\boldsymbol{t}}',z^{-1})} \tau(s', r'+1, \boldsymbol{t}', \overline{\boldsymbol{t}}' + [z]) \tau(s, r-1, \boldsymbol{t}, \overline{\boldsymbol{t}} - [z]).
\end{aligned}
$$

ここで $[z] = (z, \frac{z^2}{2}, \frac{z^3}{3}, \ldots)$, $\xi(\boldsymbol{t}, z) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k z^k$

1.2 最低次の広田方程式

$$\frac{1}{2}D_1\bar{D}_1\tau(s,r)\cdot\tau(s,r)+\tau(s+1,r)\tau(s-1,r)-\tau(s,r+1)\tau(s,r-1)=0,$$
$$D_1\tau(s,r)\cdot\tau(s+1,r-1)+\bar{D}_1\tau(s,r-1)\cdot\tau(s+1,r)=0.$$

ここで $D_k, \bar{D}_k$ は $\partial_k=\partial/\partial t_k$, $\bar{\partial}_k=\partial/\partial\bar{t}_k$ に対応する広田微分作用素を表す.

1.3 フェルミオン表示

$$\tau(s,r,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})=\langle s+r|e^{H(\boldsymbol{t})}ge^{-\bar{H}(\bar{\boldsymbol{t}})}|s-r\rangle$$

は前述の双線形方程式を満たす. ここで

$$H(\boldsymbol{t})=\sum_{k=1}^{\infty}t_kH_k,\ \bar{H}(\bar{\boldsymbol{t}})=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{t}_kH_{-k},\ H_k=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{:}\psi_n\psi^*_{n+k}{:},$$
$$g=\exp\Bigl(\sum_{i,j}a_{ij}{:}\psi_i\psi^*_j{:}+\sum_{i,j}b_{ij}{:}\psi_i\psi_j{:}+\sum_{i,j}c_{ij}{:}\psi^*_i\psi^*_j{:}\Bigr).$$

1.4 DKP 階層との関係

1) $\tau(l+r,r,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})=\langle l+2r|e^{H}ge^{-\bar{H}}|l\rangle$ $(l,\bar{\boldsymbol{t}}$ 固定）は $(r,\boldsymbol{t})$ に関して DKP 階層の解である.

2) $\tau(l-r,r,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})=\langle l|e^{H}ge^{-\bar{H}}|l-2r\rangle$ （$l,\boldsymbol{t}$ 固定）は $(r,\bar{\boldsymbol{t}})$ に関して DKP 階層の解である.

3) $\tau(l+r,r,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}),\tau(l+1+r,r,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})$ （l 固定）は Jimbo-Miwa D'_∞ 型階層の解である.

2．補助線形方程式系

波動函数を導入して前述の双線形方程式を書き直し，そこから波動函数に対する補助線形方程式系を導出することができる．

2.1 波動函数の定義

$$\Psi_1(s,r,z) = z^{s+r} e^{\xi(\boldsymbol{t},z)} \frac{\tau(s,r,\boldsymbol{t}-[z^{-1}],\bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(s,r,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})},$$

$$\Psi_2(s,r,z) = z^{s+r-2} e^{\xi(\boldsymbol{t},z)} \frac{\tau(s-1,r-1,\boldsymbol{t}-[z^{-1}],\bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(s,r,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})},$$

$$\Psi_1^*(s,r,z) = z^{-s-r-2} e^{-\xi(\boldsymbol{t},z)} \frac{\tau(s+1,r+1,\boldsymbol{t}+[z^{-1}],\bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(s,r,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})},$$

$$\Psi_2^*(s,r,z) = z^{-s-r} e^{-\xi(\boldsymbol{t},z)} \frac{\tau(s,r,\boldsymbol{t}+[z^{-1}],\bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(s,r,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})}.$$

波動函数の定義（続き）

$$\bar{\Psi}_1(s,r,z) = z^{s-r} e^{\xi(\bar{\boldsymbol{t}},z^{-1})} \frac{\tau(s+1,r,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}-[z])}{\tau(s,r,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})},$$

$$\bar{\Psi}_2(s,r,z) = z^{s-r} e^{\xi(\bar{\boldsymbol{t}},z^{-1})} \frac{\tau(s,r-1,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}-[z])}{\tau(s,r,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})},$$

$$\bar{\Psi}_1^*(s,r,z) = z^{-s+r} e^{-\xi(\bar{\boldsymbol{t}},z^{-1})} \frac{\tau(s,r+1,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}+[z])}{\tau(s,r,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})},$$

$$\bar{\Psi}_2^*(s,r,z) = z^{-s+r} e^{-\xi(\bar{\boldsymbol{t}},z^{-1})} \frac{\tau(s-1,r,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}+[z])}{\tau(s,r,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})}.$$

注意　記号はフェルミオン表示に合わせている．

$$\Psi_1(s,r,z) = \frac{\langle s+r+1|e^{H(\boldsymbol{t})}\psi(z)ge^{-\bar{H}(\bar{\boldsymbol{t}})}|s-r\rangle}{\langle s+r|e^{H(\boldsymbol{t})}ge^{-\bar{H}(\bar{\boldsymbol{t}})}|s-r\rangle},$$

$$\Psi_1^*(s,r,z) = \frac{\langle s+r+1|e^{H(\boldsymbol{t})}\psi^*(z)ge^{-\bar{H}(\bar{\boldsymbol{t}})}|s-r\rangle}{\langle s+r|e^{H(\boldsymbol{t})}ge^{-\bar{H}(\bar{\boldsymbol{t}})}|s-r\rangle}, \quad \ldots$$

2.2 Dressing operator

dressing operator $W_1, W_2, V_1, V_2, \bar{W}_1, \bar{W}_2, \bar{V}_1, \bar{V}_2$ （いずれも s についての差分作用素）を次のように導入する.

$$\Psi_1(s,r,z) = W_1 z^{s+r} e^{\xi(\boldsymbol{t},z)}, \quad \Psi_2(s,r,z) = W_2 z^{s+r} e^{\xi(\boldsymbol{t},z)},$$
$$\Psi_1^*(s,r,z) = V_1 z^{-s-r} e^{-\xi(\boldsymbol{t},z)}, \quad \Psi_2^*(s,r,z) = V_2 z^{-s-r} e^{-\xi(\boldsymbol{t},z)},$$
$$\bar{\Psi}_1(s,r,z) = \bar{W}_1 z^{s-r} e^{\xi(\boldsymbol{t},z^{-1})}, \quad \bar{\Psi}_2(s,r,z) = \bar{W}_2 z^{s-r} e^{\xi(\boldsymbol{t},z^{-1})},$$
$$\bar{\Psi}_1^*(s,r,z) = \bar{V}_1 z^{-s+r} e^{-\xi(\boldsymbol{t},z^{-1})}, \quad \bar{\Psi}_2^*(s,r,z) = \bar{V}_2 z^{-s+r} e^{-\xi(\boldsymbol{t},z^{-1})}.$$

定理　これらの dressing operator は次の代数的関係式を満たす.

$$(1) \begin{pmatrix} W_1 & \bar{V}_1 \\ W_2 & \bar{V}_2 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & -e^{\partial_s} \\ e^{-\partial_s} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{W}_1 & V_1 \\ \bar{W}_2 & V_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & e^{\partial_s} \\ -e^{-\partial_s} & 0 \end{pmatrix},$$

$$(2) \begin{pmatrix} \bar{W}_1 & V_1 \\ \bar{W}_2 & V_2 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & -e^{\partial_s} \\ e^{-\partial_s} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 & \bar{V}_1 \\ W_2 & \bar{V}_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & e^{\partial_s} \\ -e^{-\partial_s} & 0 \end{pmatrix}.$$

ここで $\cdots^*$ は形式的共役（$s^* = s$, $(e^{n\partial_s})^* = e^{-n\partial_s}$, 行列は転置）を表す.

2.3 補助線形方程式系

定理　波動函数は次の補助線形方程式を満たす.

$$
(1)\ \partial_n \begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_1^* & \bar{\Psi}_1 & \bar{\Psi}_1^* \\ \Psi_2 & \Psi_2^* & \bar{\Psi}_2 & \bar{\Psi}_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_1^* & \bar{\Psi}_1 & \bar{\Psi}_1^* \\ \Psi_2 & \Psi_2^* & \bar{\Psi}_2 & \bar{\Psi}_2^* \end{pmatrix},
$$

$$
(2)\ \bar{\partial}_n \begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_1^* & \bar{\Psi}_1 & \bar{\Psi}_1^* \\ \Psi_2 & \Psi_2^* & \bar{\Psi}_2 & \bar{\Psi}_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_n & \bar{B}_n \\ \bar{C}_n & \bar{D}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_1^* & \bar{\Psi}_1 & \bar{\Psi}_1^* \\ \Psi_2 & \Psi_2^* & \bar{\Psi}_2 & \bar{\Psi}_2^* \end{pmatrix},
$$

$$
(3)\ e^{\partial_r} \begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_1^* & \bar{\Psi}_1 & \bar{\Psi}_1^* \\ \Psi_2 & \Psi_2^* & \bar{\Psi}_2 & \bar{\Psi}_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_1^* & \bar{\Psi}_1 & \bar{\Psi}_1^* \\ \Psi_2 & \Psi_2^* & \bar{\Psi}_2 & \bar{\Psi}_2^* \end{pmatrix}.
$$

ここで $A_n, B_n, C_n, D_n, \bar{A}_n, \bar{B}_n, \bar{C}_n, \bar{D}_n, A, B, C$ は s に関する有限階の差分作用素であり，次の代数的関係式が成立する.

$$
\begin{aligned}
A_n^* &= -e^{\partial_s} D_n e^{\partial_s},\ B_n^* = e^{-\partial_s} B_n e^{-\partial_s},\ C_n^* = e^{\partial_s} C_n e^{\partial_s}, \\
\bar{A}_n^* &= -e^{\partial_s} \bar{D}_n e^{\partial_s},\ \bar{B}_n^* = e^{-\partial_s} \bar{B}_n e^{-\partial_s},\ \bar{C}_n^* = e^{\partial_s} \bar{C}_n e^{\partial_s}.
\end{aligned}
$$

注意　$n = 1$ の場合の (1), (2) はWillox が見出したものに一致する.

3. 差分Fay等式

3.1 双線形方程式の変数の特殊化による導出

注意　あらかじめ双線形方程式で $s \to s+1$, $r \to r+1$ と置き換えておく.

特殊化 (1a) $\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{t} + [\lambda^{-1}] + [\mu^{-1}]$, $\bar{\boldsymbol{t}}' = \bar{\boldsymbol{t}}$, $\bar{\boldsymbol{t}}' = \bar{\boldsymbol{t}}$, $s' = s+1$, $r' = r$

$$\begin{aligned}
&\oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{\lambda\mu}{z(z-\lambda)(z-\mu)} \tau(s+1, r, \boldsymbol{t} + [\lambda^{-1}] + [\mu^{-1}] - [z^{-1}], \bar{\boldsymbol{t}}) \\
&\qquad\qquad\qquad \times \tau(s+1, r+1, \boldsymbol{t}' + [z^{-1}], \bar{\boldsymbol{t}}) \\
&+ \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{(z-\lambda)(z-\mu)}{z^3 \lambda\mu} \tau(s+2, r+1, \boldsymbol{t} + [\lambda^{-1}] + [\mu^{-1}] + [z^{-1}], \bar{\boldsymbol{t}}) \tau(s, r, \boldsymbol{t} - [z^{-1}], \bar{\boldsymbol{t}}) \\
&= \oint \frac{dz}{2\pi i} z \tau(s+2, r, \boldsymbol{t} + [\lambda^{-1}] + [\mu^{-1}], \bar{\boldsymbol{t}} - [z]) \tau(s, r+1, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}} + [z]) \\
&+ \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z} \tau(s+1, r+1, \boldsymbol{t} + [\lambda^{-1}] + [\mu^{-1}], \bar{\boldsymbol{t}} + [z]) \tau(s+1, r, \boldsymbol{t}, \bar{\boldsymbol{t}} - [z]).
\end{aligned}$$

留数を計算して次の等式を得る．

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\mu}{\lambda-\mu}\tau(s+1,r,\boldsymbol{t}+[\mu^{-1}],\overline{\boldsymbol{t}})\tau(s+1,r+1,\boldsymbol{t}+[\lambda^{-1}],\overline{\boldsymbol{t}})\\
&\qquad-\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\tau(s+1,r,\boldsymbol{t}+[\lambda^{-1}],\overline{\boldsymbol{t}})\tau(s+1,r+1,\boldsymbol{t}+[\mu^{-1}],\overline{\boldsymbol{t}})\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{\lambda\mu}\tau(s+2,r+1,\boldsymbol{t}+[\lambda^{-1}]+[\mu^{-1}],\overline{\boldsymbol{t}})\tau(s,r,\boldsymbol{t},\overline{\boldsymbol{t}})\\
&\qquad\qquad\qquad=\tau(s+1,r+1,\boldsymbol{t}+[\lambda^{-1}]+[\mu^{-1}],\overline{\boldsymbol{t}})\tau(s+1,r,\boldsymbol{t},\overline{\boldsymbol{t}}).
\end{aligned}
$$

注意　DKP 階層の場合と同様に４項関係式になる．$\boldsymbol{t}+[\lambda^{-1}]+[\mu^{-1}]$ というずらしを含む項が２つ現れるのが特徴．Toda 階層の場合にはそのような項は１つだけで，全体として３項関係式になる．

特殊化 (1b) $\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{t} + [\lambda^{-1}] + [\mu^{-1}]$, $\overline{\boldsymbol{t}}' = \overline{\boldsymbol{t}}$, $\overline{\boldsymbol{t}}' = \overline{\boldsymbol{t}}$, $s' = s$, $r' = r + 1$

同様の計算によって次の等式を得る.

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\mu}{\lambda-\mu}\tau(s, r+1, \boldsymbol{t}+[\mu^{-1}], \overline{\boldsymbol{t}})\tau(s+1, r+1, \boldsymbol{t}+[\lambda^{-1}], \overline{\boldsymbol{t}}) \\
& \qquad -\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\tau(s, r+1, \overline{\boldsymbol{t}}+[\lambda^{-1}], \overline{\boldsymbol{t}})\tau(s+1, r+1, \overline{\boldsymbol{t}}+[\mu^{-1}], \overline{\boldsymbol{t}}) \\
& \qquad\quad +\frac{1}{\lambda\mu}\tau(s+1, r+2, \overline{\boldsymbol{t}}+[\lambda^{-1}]+[\mu^{-1}], \overline{\boldsymbol{t}})\tau(s, r, \boldsymbol{t}, \overline{\boldsymbol{t}}) \\
& \qquad\qquad = \tau(s+1, r+1, \boldsymbol{t}+[\lambda^{-1}]+[\mu^{-1}], \overline{\boldsymbol{t}})\tau(s, r+1, \boldsymbol{t}, \overline{\boldsymbol{t}}).
\end{aligned}
$$

その他の特殊化 (2a), (2b), (3a), (3b)

(2a), (2b) $\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{t}$, $\overline{\boldsymbol{t}}' = \boldsymbol{t} + [\lambda] + [\mu]$, ... $\rightarrow$ 2 通りの等式
(3a), (3b) $\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{t} + [\lambda^{-\lambda}]$, $\overline{\boldsymbol{t}}' = \overline{\boldsymbol{t}} + [\mu]$, ... $\rightarrow$ 2 通りの等式

3.2 補助線形方程式系の母函数表示

定理　６通りの差分 Fay 等式は次の４つの方程式ならびにその $\{\Psi_1,\Psi_2\}$ を $\{\Psi_1^*,\Psi_2^*\}$, $\{\bar\Psi_1,\bar\Psi_2\}$, $\{\bar\Psi_1^*,\bar\Psi_2^*\}$ に置き換えた形の方程式に書き直せる.

$$
\begin{aligned}
(1)\ & e^{-D(\lambda)}\Psi_1(s,r,\mu)+\lambda^{-1}\Psi_1(s+1,r,\mu)\\
&\qquad -\frac{e^{-D(\lambda)}\tau(s+1,r)/\tau(s+1,r)}{e^{-D(\lambda)}\tau(s,r)/\tau(s,r)}\Psi_1(s,r,\mu)\\
&\qquad -\lambda^{-1}\frac{e^{-D(\lambda)}\tau(s+1,r)/\tau(s+1,r)}{e^{-D(\lambda)}\tau(s,r)/\tau(s+1,r+1)}e^{-D(\lambda)}\Psi_2(s+1,r,\mu)=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\ & e^{D(\lambda)}\Psi_2(s,r,\mu)+\lambda^{-1}\Psi_2(s-1,r,\mu)\\
&\qquad -\lambda^{-1}\frac{e^{D(\lambda)}\tau(s-1,r)/\tau(s-1,r)}{e^{D(\lambda)}\tau(s,r)/\tau(s-1,r-1)}e^{D(\lambda)}\Psi_1(s-1,r,\mu)\\
&\qquad -\frac{e^{D(\lambda)}\tau(s-1,r)/\tau(s-1,r)}{e^{D(\lambda)}\tau(s,r)/\tau(s,r)}\Psi_2(s,r,\mu)=0,
\end{aligned}
$$

(3) $e^{-\bar{D}(\lambda)}\Psi_1(s,r,\mu)-\Psi_1(s,r,\mu)$

$$+\lambda\frac{e^{-\bar{D}(\lambda)}\tau(s+1,r)/\tau(s,r)}{e^{-\bar{D}(\lambda)}\tau(s,r)/\tau(s-1,r)}\Psi_1(s-1,r,\mu)$$

$$-\lambda\frac{e^{-\bar{D}(\lambda)}\tau(s+1,r)/\tau(s,r)}{e^{-\bar{D}(\lambda)}\tau(s,r)/\tau(s,r+1)}e^{-\bar{D}(\lambda)}\Psi_2(s+1,r,\mu)=0,$$

(4) $e^{\bar{D}(\lambda)}\Psi_2(s,r,\mu)-\Psi_2(s,r,\mu)$

$$-\lambda\frac{e^{\bar{D}(\lambda)}\tau(s-1,r)/\tau(s,r)}{e^{\bar{D}(\lambda)}\tau(s,r)/\tau(s,r-1)}e^{\bar{D}(\lambda)}\Psi_1(s-1,r,\mu)$$

$$+\lambda\frac{e^{\bar{D}(\lambda)}\tau(s-1,r)/\tau(s,r)}{e^{\bar{D}(\lambda)}\tau(s,r)/\tau(s+1,r)}\Psi_2(s+1,r,\mu)=0.$$

ここで $D(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{-n}}{n}\partial_n,\ \bar{D}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\bar{\partial}_n.$

注意　これらの方程式は補助線形方程式系の母函数表示を与えている.